

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

Редактор *В. Т. Хозяинов.*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.*

Корректор *О. А. Сигал.*

Подписано к печати 4/VII 1953 г. Бумага 60×92/1. 24,63 бум. л., 49,25 печ. л., 49,51 уч.-изд. л.
40 210 тип. зн. в печ. л. Тираж 6 000 экз. Т-04262. Цена книги 14 р. 85 к.
Переплёт 1 р. 50 к. Заказ № 335.

4-я типография им. Евг. Соколовой Союзполиграфпрома
Главиздата Министерства Культуры СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Некоторые обозначения	12

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГИДРОДИНАМИКА

Глава I. Идеальная жидкость	13
§ 1. Уравнение непрерывности	13
§ 2. Уравнение Эйлера	15
§ 3. Гидростатика	19
§ 4. Условие отсутствия конвекции	21
§ 5. Уравнение Бернулли	23
§ 6. Поток энергии	24
§ 7. Поток импульса	26
§ 8. Сохранение циркуляции скорости	28
§ 9. Потенциальное движение	30
§ 10. Несжимаемая жидкость	35
§ 11. Сила сопротивления при потенциальном обтекании	47
§ 12. Гравитационные волны	54
§ 13. Длинные гравитационные волны	60
§ 14. Внутренние волны в несжимаемой жидкости	62
Глава II. Вязкая жидкость	65
§ 15. Уравнения движения вязкой жидкости	65
§ 16. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости	71
§ 17. Течение по трубе	74
§ 18. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами	79
§ 19. Закон подобия	80
§ 20. Формула Стокса	83
§ 21. Ламинарный след	92
§ 22. Вязкость суспензий	98
§ 23. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости	101
§ 24. Колебательное движение в вязкой жидкости	111
§ 25. Затухание гравитационных волн	122
Глава III. Турбулентность	127
§ 26. Устойчивость стационарного движения жидкости	127
§ 27. Возникновение турбулентности	129
§ 28. Устойчивость вращательного движения жидкости	134
§ 29. Устойчивость движения по трубе	138
§ 30. Неустойчивость тангенциальных разрывов	142
§ 31. Развитая турбулентность	145
§ 32. Локальная турбулентность	150

§ 33. Корреляция скоростей	154
§ 34. Турбулентная область и явление отрыва	160
§ 35. Турбулентная струя	163
§ 36. Турбулентный след	169
§ 37. Теорема Н. Е. Жуковского	171
§ 38. Изотропная турбулентность	174
Глава IV. Пограничный слой	180
§ 39. Ламинарный пограничный слой	180
§ 40. Движение вблизи линии отрыва	188
§ 41. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое	195
§ 42. Логарифмический профиль скоростей	198
§ 43. Турбулентное течение в трубах	203
§ 44. Турбулентный пограничный слой	206
§ 45. Кризис сопротивления	210
§ 46. Хорошо обтекаемые тела	214
§ 47. Индуктивное сопротивление	217
§ 48. Подъёмная сила тонкого крыла	222
Глава V. Теплопроводность в жидкости	226
§ 49. Общее уравнение переноса тепла	226
§ 50. Теплопроводность в несжимаемой жидкости	232
§ 51. Теплопроводность в неограниченной среде	236
§ 52. Теплопроводность в ограниченной среде	241
§ 53. Закон подобия для теплопередачи	248
§ 54. Теплопередача в пограничном слое	251
§ 55. Нагревание тела в движущейся жидкости	256
§ 56. Свободная конвекция	260
Глава VI. Диффузия	269
§ 57. Уравнения гидродинамики для жидкой смеси	269
§ 58. Коэффициенты диффузии и термодиффузии	273
§ 59. Диффузия взвешенных в жидкости частиц	279
Глава VII. Поверхностные явления	282
§ 60. Формула Лапласа	282
§ 61. Капиллярные волны	290
§ 62. Влияние адсорбированных плёнок на движение жидкости	295
Глава VIII. Звук	299
§ 63. Звуковые волны	299
§ 64. Энергия и импульс звуковых волн	305
§ 65. Отражение и преломление звуковых волн	311
§ 66. Геометрическая акустика	313
§ 67. Распространение звука в движущейся среде	318
§ 68. Собственные колебания	322
§ 69. Сферические волны	326
§ 70. Цилиндрические волны	330
§ 71. Общее решение волнового уравнения	332
§ 72. Боковая волна	336
§ 73. Излучение звука	342
§ 74. Принцип взаимности	354
§ 75. Распространение звука по трубке	358
§ 76. Рассеяние звука	362
§ 77. Поглощение звука	367
§ 78. Вторая вязкость	375

Глава IX. Ударные волны	382
§ 79. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа	382
§ 80. Стационарный поток сжимаемого газа	385
§ 81. Поверхности разрыва	391
§ 82. Ударная адиабата	394
§ 83. Ударные волны слабой интенсивности	398
§ 84. Направление изменения величин в ударной волне	401
§ 85. Ударные волны в идеальном газе	406
§ 86. Косая ударная волна	410
§ 87. Ширина ударных волн	415
§ 88. Изотермический скачок	421
§ 89. Слабые разрывы	423
Глава X. Одномерное движение сжимаемого газа	427
§ 90. Истечение газа через сопло	427
§ 91. Вязкое движение сжимаемого газа по трубе	430
§ 92. Одномерное автомодельное движение	434
§ 93. Разрывы в начальных условиях	442
§ 94. Одномерные бегущие волны	449
§ 95. Образование разрывов в звуковой волне	457
§ 96. Характеристики	463
§ 97. Инварианты Римана	467
§ 98. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа	472
§ 99. Распространение сильных ударных волн	480
§ 100. Теория «мелкой воды»	484
Глава XI. Пересечение поверхностей разрыва	488
§ 101. Волна разрежения	488
§ 102. Пересечение ударных волн	495
§ 103. Пересечение ударных волн с поверхностью твердого тела	500
§ 104. Сверхзвуковое обтекание угла	504
§ 105. Обтекание конического острия	508
Глава XII. Плоское течение сжимаемого газа	513
§ 106. Потенциальное движение сжимаемого газа	513
§ 107. Стационарные простые волны	517
§ 108. Уравнение Чаплыгина (общая задача о двумерном стационарном движении сжимаемого газа)	523
§ 109. Характеристики плоского стационарного течения	527
§ 110. Уравнение Эйлера-Трикоми. Переход через звуковую скорость	530
§ 111. Решения уравнения Эйлера-Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности	536
§ 112. Обтекание со звуковой скоростью	541
Глава XIII. Обтекание конечных тел	548
§ 113. Образование ударных волн при сверхзвуковом обтекании тел	548
§ 114. Сверхзвуковое обтекание заостренного тела	551
§ 115. Дозвуковое обтекание тонкого крыла	556
§ 116. Сверхзвуковое обтекание крыла	560
§ 117. Околозвуковой закон подобия	563
§ 118. Закон подобия при очень больших значениях числа М	566
Глава XIV. Гидродинамика горения	569
§ 119. Медленное горение	569
§ 120. Детонация	576
§ 121. Распространение детонационной волны	584

§ 122. Соотношение между различными режимами горения . . .	592
§ 123. Конденсационные скачки	596
Глава XV. Релятивистская гидродинамика	599
§ 124. Тензор энергии-импульса жидкости	599
§ 125. Релятивистские гидродинамические уравнения	601
§ 126. Релятивистские уравнения диссипативных процессов	606
Глава XVI. Гидродинамика сверхтекучей жидкости	609
§ 127. Основные свойства сверхтекучей жидкости	609
§ 128. Термомеханический эффект	612
§ 129. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости	614
§ 130. Распространение звука в сверхтекучей жидкости	622

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Глава I. Основные уравнения теории упругости	629
§ 1. Тензор деформаций	629
§ 2. Тензор напряжений	633
§ 3. Термодинамика деформирования	638
§ 4. Закон Гука	640
§ 5. Однородные деформации	644
§ 6. Деформации с изменением температуры	647
§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел	650
§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью	659
§ 9. Соприкосновение твёрдых тел	664
§ 10. Упругие свойства кристаллов	671
Глава II. Равновесие стержней и пластинок	679
§ 11. Энергия изогнутой пластинки	679
§ 12. Уравнение равновесия пластинки	681
§ 13. Продольные деформации пластинок	688
§ 14. Сильный изгиб пластинок	694
§ 15. Деформации оболочек	699
§ 16. Кручение стержней	704
§ 17. Изгиб стержней	711
§ 18. Энергия деформированного стержня	716
§ 19. Уравнения равновесия стержней	720
§ 20. Слабый изгиб стержней	728
§ 21. Устойчивость упругих систем	738
Глава III. Упругие волны	743
§ 22. Упругие волны в изотропной среде	743
§ 23. Упругие волны в кристаллах	749
§ 24. Поверхностные волны	751
§ 25. Колебания стержней и пластинок	756
§ 26. Ангармонические колебания	763
Глава IV. Теплопроводность и вязкость твёрдых тел	768
§ 27. Уравнение теплопроводности в твёрдых телах	768
§ 28. Теплопроводность кристаллов	770
§ 29. Вязкость твёрдых тел	771
§ 30. Поглощение звука в твёрдых телах	774
§ 31. Очень вязкие жидкости	782
Предметный указатель	785

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга посвящена изложению так называемой механики сплошных сред, т. е. теории движения жидкостей и газов (гидродинамика) и твёрдых тел (теория упругости). Являясь по существу областями физики, эти теории благодаря ряду своих специфических особенностей превратились в самостоятельные науки.

В теории упругости существенную роль играет решение математически чётко поставленных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных; поэтому теория упругости содержит в себе много элементов так называемой математической физики.

Гидродинамика имеет существенно иной характер. Её уравнения нелинейны, и потому прямое их исследование и решение возможны лишь в сравнительно редких случаях. Благодаря этому развитие современной гидродинамики возможно лишь в непрерывной связи с экспериментом. Это обстоятельство сильно сближает её с другими областями физики.

Несмотря на своё практическое обособление от других областей физики, гидродинамика и теория упругости тем не менее имеют большое значение как части теоретической физики. С одной стороны, они являются областями применения общих методов и законов теоретической физики и ясное понимание их невозможно без знания основ других разделов последней. С другой стороны, сама механика сплошных сред необходима для решения задач из совершенно других областей теоретической физики.

Мы хотели бы сделать здесь некоторые замечания о характере изложения гидродинамики в предлагаемой книге. Эта книга излагает гидродинамику как часть теоретической физики и этим в значительной мере определяется характер её содержания, существенно отличающийся от других курсов гидродинамики. Мы стремились с возможной полнотой разобрань все представляющие физический интерес вопросы. При этом мы старались построить изложение таким образом, чтобы создать по возможности более ясную картину явлений и их взаимоотношений. В соответствии с таким характером книги мы не излагаем в ней как приближённых методов гидродинамических

расчётов, так и тех из эмпирических теорий, которые не имеют более глубокого физического обоснования. В то же время здесь излагаются такие предметы, как теория теплопередачи и диффузии в жидкостях, акустика и теория горения, которые обычно выпадают из курсов гидродинамики.

В ещё большей степени эти замечания относятся ко второй части книги, посвящённой теории упругости. В книге, написанной физиками и в первую очередь для физиков, нас, естественно, интересовали вопросы, которые обычно не излагаются в курсах теории упругости; таковы, например, вопросы теплопроводности и вязкости твёрдых тел, ряд вопросов теории упругих колебаний и волн (см. главы III и IV части 2). В то же время мы лишь очень кратко касаемся ряда специальных проблем (например, сложных математических методов теории упругости, теории оболочек и т. п.), в которых к тому же авторы ни в какой степени не являются специалистами.

В настоящем, втором, издании книга подвергнута большой переработке. Добавлено значительное количество нового материала, в особенности в газодинамике, почти полностью написанной заново. В частности, добавлено изложение теории околзвукowego движения. Этот вопрос имеет важнейшее принципиальное значение для всей газодинамики, так как изучение особенностей, возникающих при переходе через звуковую скорость, должно дать возможность выяснения основных качественных свойств стационарного обтекания твёрдых тел сжимаемым газом. В этой области до настоящего времени ещё сравнительно мало сделано; многие важные вопросы могут быть ещё только поставлены (см. § 112). Имея в виду необходимость их дальнейшей разработки, мы даём (в §§ 110 и 111) подробное изложение применёемого здесь математического аппарата.

Добавлены две новые главы, посвящённые релятивистской гидродинамике и гидродинамике сверхтекучей жидкости. Релятивистские гидродинамические уравнения (глава XV) могут найти применение в различных астрофизических вопросах, например при изучении объектов, в которых существенную роль играет излучение; своеобразное поле применения этих уравнений открывается также и в совершенно другой области физики, например, в теории множественного образования частиц при столкновениях. Излагаемая в главе XVI «двухскоростная» гидродинамика даёт макроскопическое описание движения сверхтекучей жидкости, каковой является жидкий гелий при температурах, близких к абсолютному нулю.

В этом издании исключена глава о кинетической теории газов, имевшаяся в первом издании книги; мы рассчитываем включить её в дальнейшем в книгу, посвящённую физической кинетике.

Теория упругости подверглась сравнительно меньшей переработке; основные изменения сводятся к добавлению значительного числа новых задач.

Для чтения этой книги необходимо знание основ термодинамики. Из математики предполагается свободное владение векторным анализом и тензорной алгеброй. Что касается так называемой математической физики (теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка), то все основные необходимые сведения и решения основных задач даются в книге параллельно с изложением соответствующих физических вопросов.

Мы хотели бы выразить искреннюю благодарность Я. Б. Зельдовичу и Л. И. Седову за ценное для нас обсуждение ряда гидродинамических вопросов. Мы благодарим также Д. В. Сивухина, прочитавшего книгу в рукописи и сделавшего ряд замечаний, использованных нами при подготовке второго издания книги.

*Л. Ландау
Е. Лифшиц*

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Часть 1

Гидродинамика

Плотность ρ
 Давление p
 Температура T
 Энтропия единицы массы s
 Внутренняя энергия единицы массы ϵ
 Тепловая функция $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$
 Отношение теплоёмкостей при постоянных объёме и давлении $\gamma = c_p/c_v$
 Динамическая вязкость η
 Кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$
 Коэффициент теплопроводности κ
 Коэффициент температуропроводности $\chi = \kappa/\rho c_p$
 Число Рейнольдса R
 Скорость звука c
 Отношение скорости жидкости к скорости звука M

Часть 2

Теория упругости

Вектор смещения u
 Тензор деформации $u_{ik} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$
 Тензор напряжений σ_{ik}
 Модуль всестороннего сжатия K
 Модуль сдвига μ
 Модуль растяжения $E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}$
 Коэффициент Пуассона $\sigma =$

$$= \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$$
 Продольная скорость звука $c_l =$

$$= \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}$$
 Поперечная скорость звука $c_t =$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГИДРОДИНАМИКА

ГЛАВА I

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 1. Уравнение непрерывности

Изучение движения жидкостей (и газов) представляет собой содержание так называемой гидродинамики. Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость ¹⁾ рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается всё-таки настолько большим, что содержит ещё очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться «физически» бесконечно малый объем, т. е. объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идёт речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ и каких-либо её двух термодинамических величин, например, давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. Как известно, все термодинамические величины определяются по значениям каких-либо двух из них с помощью уравнения состояния вещества; поэтому задание пяти величин: трёх компонент скорости \mathbf{v} , давления p и плотности ρ , полностью определяет состояние движущейся жидкости.

Все эти величины являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z и времени t . Подчеркнём, что $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ есть

¹⁾ Мы говорим здесь и ниже для краткости только о жидкости, имея при этом в виду как жидкости, так и газы.

скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства в момент времени t , т. е. относится к определённым точкам пространства, а не к определённым частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к величинам ρ, p .

Начнём вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике.

Рассмотрим некоторый объём V_0 пространства. Количество (масса) жидкости в этом объёме есть $\int \rho dV$, где ρ есть плотность жидкости, а интегрирование производится по объёму V_0 . Через элемент df поверхности, ограничивающей рассматриваемый объём, в единицу времени протекает количество $\rho v df$ жидкости; вектор df по абсолютной величине равен площади элемента поверхности и направлен по нормали к ней. Условимся направлять df по внешней нормали. Тогда $\rho v df$ положительно, если жидкость вытекает из объёма, и отрицательно, если жидкость втекает в него. Полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объёма V_0 , есть, следовательно,

$$\oint \rho v df,$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объём.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объёме V_0 можно написать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Приравнявая оба выражения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \rho v df. \quad (1,1)$$

Интеграл по поверхности преобразуем согласно формуле Остроградского в интеграл по объёму:

$$\oint \rho v df = \int \operatorname{div} \rho v dV.$$

Таким образом,

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объёма, то должно быть равным нулю подинтегральное выражение, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0. \quad (1,2)$$

Это — так называемое уравнение непрерывности.

Раскрывая выражение $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$, (1,2) можно написать также в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (1,3)$$

Вектор

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (1,4)$$

называют плотностью потока жидкости. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенную перпендикулярно к скорости.

§ 2. Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объём. Полная сила, действующая на выделенный объём жидкости, равна интегралу

$$- \oint p \, d\mathbf{f}$$

от давления, взятому по поверхности рассматриваемого объёма. Преобразуя его в интеграл по объёму, имеем:

$$- \oint p \, d\mathbf{f} = - \int \operatorname{grad} p \, dV.$$

Отсюда видно, что на каждый элемент объёма dV жидкости действует со стороны окружающей его жидкости сила $-dV \operatorname{grad} p$. Другими словами, можно сказать, что на единицу объёма жидкости действует сила $-\operatorname{grad} p$.

Мы можем теперь написать уравнение движения элемента объёма жидкости, приравняв силу $-\operatorname{grad} p$ произведению массы ρ единицы объёма жидкости на её ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p. \quad (2,1)$$

Стоящая здесь производная $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определённой передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Эту производную надо выразить через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Для этого заметим, что изменение $d\mathbf{v}$ скорости данной частицы жидкости в течение времени dt складывается из двух частей: из изменения скорости в данной точке пространства в течение времени dt и из разности скоростей (в один и тот же момент времени) в двух точках, разделённых расстоянием $d\mathbf{r}$, пройденным рассматриваемой частицей жидкости в течение времени dt . Первая из этих частей равна

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt,$$

где теперь производная $\partial v/\partial t$ берётся при постоянных x, y, z , т. е. в заданной точке пространства. Вторая часть изменения скорости равна

$$dx \frac{\partial v}{\partial x} + dy \frac{\partial v}{\partial y} + dz \frac{\partial v}{\partial z} = (dr \nabla) v.$$

Таким образом,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + (dr \nabla) v$$

или, разделив обе стороны равенства на dt ,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v. \quad (2,2)$$

Подставляя полученное соотношение в (2,1), находим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2,3)$$

Это и есть искомое уравнение движения жидкости, установленное впервые *Л. Эйлером* в 1755 г. Оно называется уравнением Эйлера и является одним из основных уравнений гидродинамики.

Если жидкость находится в поле тяжести, то на каждую единицу её объёма действует ещё сила ρg , где g есть ускорение силы тяжести. Эта сила должна быть прибавлена к правой стороне уравнения (2,1), так что (2,3) приобретает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} + g. \quad (2,4)$$

При выводе уравнений движения мы совершенно не учитывали процессов диссипации энергии, которые могут иметь место в текущей жидкости вследствие внутреннего трения (вязкости) в жидкости и теплообмена между различными её участками. Поэтому всё излагаемое здесь и в следующих параграфах этой главы относится только к таким движениям жидкостей и газов, при которых несущественны процессы теплопроводности и вязкости; о таком движении говорят как о движении идеальной жидкости.

Отсутствие теплообмена между отдельными участками жидкости (а также, конечно, и между жидкостью и соприкасающимися с нею окружающими телами) означает, что движение происходит адиабатически, причём адиабатически в каждом из участков жидкости. Таким образом, движение идеальной жидкости следует рассматривать как адиабатическое.

При адиабатическом движении энтропия каждого участка жидкости остаётся постоянной при перемещении последнего в пространстве. Обозначая посредством s энтропию, отнесённую к единице массы жидкости, мы можем выразить адиабатичность движения уравнением

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2,5)$$

где полная производная по времени означает, как и в (2,1), изменение энтропии заданного перемещающегося участка жидкости. Эту производную можно написать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} s = 0. \quad (2,6)$$

Это есть общее уравнение, выражающее собой адиабатичность движения идеальной жидкости. С помощью (1,2) его можно написать в виде «уравнения непрерывности» для энтропии

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (2,7)$$

Произведение $\rho s \mathbf{v}$ представляет собой «плотность потока энтропии».

Надо иметь в виду, что обычно уравнение адиабатичности принимает гораздо более простую форму. Если, как это обычно имеет место, в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках объёма жидкости, то она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. В этих случаях можно, следовательно, писать уравнение адиабатичности просто в виде

$$s = \text{const.}, \quad (2,8)$$

что мы и будем обычно делать в дальнейшем. Такое движение называют изэнтропическим.

Изэнтропичностью движения можно воспользоваться для того, чтобы представить уравнение движения (2,3) в несколько ином виде. Для этого воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$d\omega = T ds + V dp,$$

где ω — тепловая функция единицы массы жидкости, $V = 1/\rho$ — удельный объём, а T — температура. Поскольку $s = \text{const.}$, мы имеем просто

$$d\omega = V dp = \frac{1}{\rho} dp,$$

и поэтому $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \omega$. Уравнение (2,3) можно, следовательно, написать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \operatorname{grad} \omega. \quad (2,9)$$

Полезно заметить ещё одну форму уравнения Эйлера, в котором оно содержит только скорость. Воспользовавшись известной формулой векторного анализа

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 = [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v},$$

можно написать (2,9) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = - \text{grad } w. \quad (2,10)$$

Если применить к обоим строкам этого уравнения операцию rot, то мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}], \quad (2,11)$$

содержащее только скорость.

К уравнениям движения надо добавить граничные условия, которые должны выполняться на ограничивающих жидкость стенках. Для идеальной жидкости это условие должно выражать собой просто тот факт, что жидкость не может проникнуть за твёрдую поверхность. Это значит, что на неподвижных стенках должна обращаться в нуль нормальная к поверхности стенки компонента скорости жидкости:

$$v_n = 0 \quad (2,12)$$

(в общем же случае движущейся поверхности v_n должно быть равно соответствующей компоненте скорости поверхности).

На границе между двумя несмешивающимися жидкостями должны выполняться условие равенства давлений и условие равенства нормальных к поверхности раздела компонент скорости обеих жидкостей (причём каждая из этих скоростей равна скорости нормального перемещения самой поверхности раздела).

Как уже было указано в начале § 1, состояние движущейся жидкости определяется пятью величинами: тремя компонентами скорости \mathbf{v} и, например, давлением p и плотностью ρ . Соответственно этому полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для идеальной жидкости этими уравнениями являются уравнения Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение, выражающее адиабатичность движения.

ЗАДАЧА

Написать уравнения одномерного течения идеальной жидкости в переменных a, t , где a есть x -координата частиц жидкости в некоторый момент времени $t = t_0$ (так называемая переменная Лагранжа)¹⁾.

Решение. В указанных переменных координата x каждой частицы жидкости в произвольный момент времени рассматривается как функция t и её же координаты a в начальный момент: $x = x(a, t)$. Условие сохранения массы элемента жидкости при его движении (уравнение непрерывности) напишется соответственно в виде $\rho dx = \rho_0 da$, или

$$\rho \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)_t = \rho_0,$$

¹⁾ Хотя эти переменные и принято называть лагранжевыми, но следует указать, что в действительности уравнения движения жидкости в этих координатах были впервые получены Л. Эйлером одновременно с основными уравнениями (2,3).

где $\rho_0(a)$ есть заданное начальное распределение плотности. Скорость жидкой частицы есть, по определению, $v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$, а производная $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ определяет изменение со временем скорости данной частицы по мере её движения. Уравнение Эйлера напишется в виде

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

а уравнение адиабатичности:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0.$$

§ 3. Гидростатика

Для покоящейся жидкости, находящейся в однородном поле тяжести, уравнение Эйлера (2,4) принимает вид

$$\text{grad } p = \rho g. \quad (3,1)$$

Это уравнение описывает механическое равновесие жидкости. (Если внешние силы вообще отсутствуют, то уравнение равновесия гласит просто $\nabla p = 0$, т. е. $p = \text{const.}$, — давление одинаково во всех точках жидкости.)

Уравнение (3,1) непосредственно интегрируется, если плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего её объёма, т. е. если не происходит заметного сжатия жидкости под действием внешнего поля. Направляя ось z вертикально вверх, имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда

$$p = -\rho g z + \text{const.}$$

Если покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность (на высоте h), к которой приложено одинаковое во всех точках внешнее давление p_0 , то эта поверхность должна быть горизонтальной плоскостью $z = h$. Из условия $p = p_0$ при $z = h$ имеем $\text{const.} = p_0 + \rho g h$, так что

$$p = p_0 + \rho g (h - z). \quad (3,2)$$

Для больших масс жидкости или газа плотность ρ нельзя, вообще говоря, считать постоянной; это в особенности относится к газам (например, к атмосфере). Предположим, что жидкость находится не только в механическом, но и в тепловом равновесии. Тогда температура одинакова во всех точках жидкости, и уравнение (3,1) может быть проинтегрировано следующим образом. Воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$d\Phi = -s dT + V dp,$$

где Φ — термодинамический потенциал, отнесённый к единице массы жидкости. При постоянной температуре

$$d\Phi = V dp = \frac{1}{\rho} dp.$$

Отсюда видно, что выражение $\frac{1}{\rho} \nabla p$ можно написать в рассматриваемом случае как $\nabla\Phi$, так что уравнение равновесия (3,1) принимает вид

$$\nabla\Phi = \mathbf{g}.$$

Для постоянного вектора \mathbf{g} , направленного вдоль оси z (в отрицательном её направлении), имеет место тождество $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$. Таким образом,

$$\nabla(\Phi + gz) = 0,$$

откуда находим, что вдоль всего объёма жидкости должна быть постоянной сумма

$$\Phi + gz = \text{const.}; \quad (3,3)$$

gz представляет собой потенциальную энергию единицы массы жидкости в поле тяжести. Условие (3,3) известно уже из статистической физики как условие термодинамического равновесия системы, находящейся во внешнем поле.

Отметим здесь ещё следующее простое следствие из уравнения (3,1). Если жидкость или газ (например, атмосфера) находятся в механическом равновесии в поле тяжести, то давление в них может быть функцией только от высоты z (так как, если бы на данной высоте давление было различно в различных местах, то возникло бы движение). Тогда из (3,1) следует, что и плотность

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz} \quad (3,4)$$

тоже является функцией только от z . Но давление и плотность однозначно определяют температуру в данной точке тела. Следовательно, и температура должна быть функцией только от z . Таким образом, при механическом равновесии в поле тяжести распределение давления, плотности и температуры зависит только от высоты. Если же, например, температура различна в разных местах жидкости на одной и той же высоте, то механическое равновесие в ней невозможно.

Наконец, выведем уравнение равновесия очень большой массы жидкости, части которой удерживаются вместе силами гравитационного притяжения (звезда). Пусть φ — ньютоновский гравитационный потенциал создаваемого жидкостью поля. Он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \quad (3,5)$$

где G — ньютоновская гравитационная постоянная. Напряжённость гравитационного поля равна — $\text{grad } \varphi$, так что сила, действующая на массу ρ , есть — $\rho \text{ grad } \varphi$. Поэтому условие равновесия будет:

$$\text{grad } p = -\rho \text{ grad } \varphi.$$

Разделив это равенство на ρ , применив к обеим его сторонам операцию div и воспользовавшись уравнением (3,5), получим окончательное уравнение равновесия в виде

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) = -4\pi G\rho. \quad (3,6)$$

Подчеркнём, что здесь идёт речь только о механическом равновесии; существование же полного теплового равновесия в уравнении (3,6) отнюдь не предполагается.

Если тело не вращается, то в равновесии оно будет иметь сферическую форму, а распределение плотности и давления в нём будет центрально-симметрическим. Уравнение (3,6), написанное в сферических координатах, примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (3,7)$$

§ 4. Условие отсутствия конвекции

Жидкость может находиться в механическом равновесии (т. е. в ней может отсутствовать макроскопическое движение), не находясь при этом в тепловом равновесии. Уравнение (3,1), являющееся условием механического равновесия, может быть удовлетворено и при не постоянной вдоль жидкости температуре. При этом, однако, возникает вопрос о том, будет ли такое равновесие устойчивым. Оказывается, что равновесие будет устойчивым лишь при выполнении определённого условия. Если это условие не выполняется, то равновесие неустойчиво, что приводит к появлению в жидкости беспорядочных течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое движение носит название конвекции. Условие устойчивости механического равновесия является, другими словами, условием отсутствия конвекции. Оно может быть выведено следующим образом.

Рассмотрим элемент жидкости, находящийся на высоте z и обладающий удельным объёмом $V(p, s)$, где p и s — равновесные давление и энтропия газа на этой высоте. Предположим, что этот элемент жидкости подвергается адиабатическому смещению на малый отрезок ξ вверх; его удельный объём станет при этом равным $V(p', s)$, где p' — давление на высоте $z + \xi$. Для устойчивости равновесия необходимо (хотя, вообще говоря, и не достаточно), чтобы возникающая при этом сила стремилась вернуть элемент в исходное положение. Это значит, что рассматриваемый элемент должен оказаться более

тяжёлым, чем «вытесненная» им в новом положении жидкость. Удельный объём последней есть $V(p', s')$, где s' — равновесная энтропия жидкости на высоте $z + \xi$. Таким образом, имеем условие устойчивости

$$V(p', s') - V(p', s) > 0.$$

Разлагая эту разность по степеням $s' - s = \frac{ds}{dz} \xi$, получим:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (4,1)$$

Согласно термодинамическим формулам имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

где c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении. Теплоёмкость c_p , как и температура T , есть величина всегда положительная; поэтому мы можем переписать (4,1) в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (4,2)$$

Большинство веществ расширяется при нагревании, т. е. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$; тогда условие отсутствия конвекции сводится к неравенству

$$\frac{ds}{dz} > 0, \quad (4,3)$$

т. е. энтропия должна возрастать с высотой.

Отсюда легко найти условие, которому должен удовлетворять градиент температуры $\frac{dT}{dz}$. Раскрывая производную $\frac{ds}{dz}$, пишем:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0.$$

Наконец, подставляя согласно (3,4) $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$, получим:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \quad (4,4)$$

Конвекция будет происходить, если температура падает по направлению снизу вверх, причём её градиент превышает по абсолютному значению величину $\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Если речь идёт о равновесии столба газа, который можно считать идеальным, то $\frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 1$ и условие устойчивости равновесия гласит просто

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}. \quad (4,5)$$

§ 5. Уравнение Бернулли

Уравнения гидродинамики заметно упрощаются в случае стационарного течения жидкости. Под стационарным (или установившимся) подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остаётся постоянной во времени. Другими словами, \mathbf{v} является функцией одних только координат, так что $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Уравнение (2,10) сводится теперь к равенству

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = - \text{grad } \omega. \quad (5,1)$$

Введём понятие о так называемых линиях тока как линиях, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания в данный момент времени; они определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (5,2)$$

При стационарном движении жидкости линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. При нестационарном течении такое совпадение, разумеется, не имеет места: касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в определённый момент времени, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определённых частиц в последовательные моменты времени.

Умножим уравнение (5,1) на единичный вектор касательной к линии тока в каждой её точке; этот единичный вектор обозначим \mathbf{l} . Проекция градиента на некоторое направление равна, как известно, производной, взятой по этому направлению. Поэтому искомая проекция от $\text{grad } \omega$ есть $\frac{\partial \omega}{\partial l}$. Что касается вектора $[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$, то он перпендикулярен к скорости \mathbf{v} , и потому его проекция на направление \mathbf{l} равна нулю.

Таким образом, из уравнения (5,1) мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\frac{v^2}{2} + \omega$ постоянна вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + \omega = \text{const.} \quad (5,3)$$

Значение const. , вообще говоря, различно для разных линий тока. Уравнение (5,2) называется уравнением Бернулли.

Если течение жидкости происходит в поле тяжести, то к правой части уравнения (5,1) надо прибавить ещё ускорение силы тяжести \mathbf{g} .

Выберем направление силы тяжести в качестве направления оси z , причём положительные значения z отсчитываются вверх. Тогда косинус угла между направлениями \mathbf{g} и \mathbf{l} равен производной $-\frac{dz}{dl}$, так что проекция \mathbf{g} на \mathbf{l} есть

$$-g \frac{dz}{dl}.$$

Соответственно этому будем иметь теперь

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) = 0.$$

Таким образом, уравнение Бернулли гласит, что вдоль линий тока остаётся постоянной сумма

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const.} \quad (5,4)$$

§ 6. Поток энергии

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объёма и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объёме жидкости. Энергия единицы объёма жидкости равна

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия (ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости). Изменение этой энергии определяется частной производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right).$$

Для вычисления этой величины пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

или, воспользовавшись уравнением непрерывности (1,2) и уравнением движения (2,3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2} \text{div } \rho \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ grad } p - \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

В последнем члене заменяем $\mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \nabla v^2$, а градиент давления согласно термодинамическому соотношению $d\omega = T ds + \frac{1}{\rho} dp$ заменяем на $\rho \nabla \omega - \rho T \nabla s$ и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2} \text{div } \rho \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \nabla \left(\omega + \frac{v^2}{2} \right) + \rho T \mathbf{v} \nabla s.$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial t} \rho \varepsilon$ воспользуемся термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Имея в виду, что сумма $\varepsilon + \frac{p}{\rho} = \varepsilon + pV$ есть не что иное, как тепловая функция w единицы массы, находим:

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = w d\rho + \rho T ds,$$

и потому

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -w \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - \rho T \nabla s.$$

Здесь мы воспользовались также уравнением адиабатичности в форме (2,6).

Собирая полученные выражения, находим для искомого изменения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - \rho (\mathbf{v} \nabla) \left(w + \frac{v^2}{2} \right),$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\}. \quad (6,1)$$

Для того чтобы выяснить смысл полученного равенства, проинтегрируем его по некоторому объёму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = - \int \operatorname{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\} dV,$$

или, преобразовав стоящий справа объёмный интеграл в интеграл по поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = - \oint \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) d\mathbf{f}. \quad (6,2)$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объёме пространства. Стоящий справа интеграл по поверхности представляет собой, следовательно, количество энергии, «вытекающей» в единицу времени из рассматриваемого объёма. Отсюда видно, что выражение

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \quad (6,3)$$

может быть названо вектором «плотности потока энергии». Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению скорости.

Важнейшее понятие о «потоке энергии» и выражение закона её сохранения в виде «уравнения непрерывности» для энергии были.

впервые введены в 1874 г. *Н. А. Умовым*. *Н. А. Умов* применил, в частности, эти понятия к механике сплошных сред и получил выражение для потока энергии в жидкости.

Выражение (6,3) показывает, что каждая единица массы жидкости как бы переносит с собой при своём движении энергию $\omega + \frac{v^2}{2}$. Тот факт, что здесь стоит тепловая функция ω , а не просто внутренняя энергия ϵ , имеет простой физический смысл. Подставив $\omega = \epsilon + \frac{p}{\rho}$, напишем полный поток энергии через замкнутую поверхность в виде

$$-\oint \rho v \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) df - \oint p v df.$$

Первый член есть энергия (кинетическая и внутренняя), непосредственно переносимая (в единицу времени) проходящей через поверхность массой жидкости. Второй же член представляет собой работу, производимую над заключённой внутри поверхности жидкостью силами давления.

§ 7. Поток импульса

Произведём теперь аналогичный вывод для импульса жидкости. Импульс единицы объёма жидкости есть ρv . Определим скорость его изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v.$$

Будем производить вычисления в тензорных обозначениях¹⁾. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (1,2) (написав $\text{div } \rho v$ в виде $\frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k$),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k},$$

¹⁾ Латинские индексы i, k, \dots пробегают везде значения 1, 2, 3, соответствующие компонентам векторов и тензоров соответственно по осям x, y, z .

В дальнейшем мы будем писать суммы вроде $\mathbf{AB} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$

просто в виде $A_i B_i$, опуская знак суммирования. Аналогично мы будем поступать при всех вообще перемножениях векторов или тензоров: по всем дважды повторяющимся (в данном выражении) латинским индексам везде подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Такие индексы, по которым производится суммирование, иногда называют «немыми». При манипулировании с «немыми» индексами необходимо помнить, что каждую пару таких индексов можно обозначить любыми (одинаковыми) буквами, поскольку обозначение индексов, пробегающих все возможные значения, не влияет, конечно, на значение суммы.

и уравнением Эйлера (2,3) в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_i v_k.$$

Первый член справа напишем в виде ¹⁾

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

и находим окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (7,1)$$

где тензор Π_{ik} определяется как

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (7,2)$$

Тензор Π_{ik} , очевидно, симметричен.

Для выяснения смысла тензора Π_{ik} проинтегрируем уравнение (7.1) по некоторому объёму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

Стоящий в правой стороне равенства интеграл преобразуем согласно формуле Остроградского в интеграл по поверхности ²⁾:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} df_k. \quad (7,3)$$

Слева стоит изменение в единицу времени i -й компоненты импульса в рассматриваемом объёме. Поэтому стоящий справа интеграл по поверхности есть количество этого импульса, «вытекающего» в единицу времени через ограничивающую объём поверхность. Следовательно, $\Pi_{ik} df_k$ есть i -я компонента импульса, протекающего через элемент df поверхности. Если написать df_k в виде $n_k df$ (df — абсолютная величина элемента поверхности, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали

¹⁾ δ_{ik} обозначает так называемый единичный тензор, т. е. тензор с компонентами, равными единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$. Очевидно, что $\delta_{ik} A_k = A_i$, где A_i — некоторый вектор. Аналогично, если A_{kl} есть тензор второго ранга, то имеют место соотношения: $\delta_{ik} A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik} A_{ik} = A_{ii}$ и т. д.

²⁾ Правило преобразования интеграла по замкнутой поверхности в интеграл по охватываемому этой поверхностью объёму можно сформулировать следующим образом: оно осуществляется заменой элемента поверхности df_i оператором $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$, который должен быть применён ко всему подинтегральному выражению

$$df_i \rightarrow dV \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

к нему), то мы найдём, что $\Pi_{ik}n_k$ есть поток i -й компоненты импульса, отнесённый к единице площади поверхности. Заметим, что согласно (7,2) $\Pi_{ik}n_k = \rho n_i + \rho v_i v_k n_k$; это выражение может быть написано в векторном виде как

$$\rho \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (7,4)$$

Таким образом, Π_{ik} есть i -я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k . Тензор Π_{ik} называется тензором плотности потока импульса. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

Вектор (7,4) определяет поток вектора импульса в направлении \mathbf{n} , т. е. через поверхность, перпендикулярную к \mathbf{n} . В частности, выбирая направление единичного вектора \mathbf{n} вдоль направления скорости жидкости, мы найдём, что в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса, причём плотность её потока равна

$$\rho + \rho v^2.$$

В направлении же, перпендикулярном к скорости, переносится лишь поперечная (по отношению к \mathbf{v}) компонента импульса, а плотность её потока равна просто ρ .

§ 8. Сохранение циркуляции скорости

Интеграл

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

взятый вдоль замкнутого контура, называется циркуляцией скорости вдоль этого контура.

Рассмотрим замкнутый контур, проведённый в жидкости в некоторый момент времени. Будем рассматривать его как «жидкий», т. е. как составленный из находящихся на нём частиц жидкости. С течением времени эти частицы передвигаются, а с ними перемещается и весь контур. Выясним, что происходит при этом с циркуляцией скорости вдоль контура. Другими словами, вычислим производную по времени

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Мы пишем здесь полную производную по времени соответственно тому, что ищем изменение циркуляции вдоль перемещающегося «жидкого контура», а не вдоль контура, неподвижного в пространстве.

Во избежание путаницы будем временно обозначать дифференцирование по координатам знаком δ , оставив знак d для дифференцирования по времени. Кроме того, заметим, что элемент $d\mathbf{l}$ длины контура можно написать в виде разности $\delta \mathbf{r}$ радиус-векторов \mathbf{r} точек двух

концов этого элемента. Таким образом, напомним циркуляцию скорости в виде

$$\oint \mathbf{v} \delta \mathbf{r}.$$

При дифференцировании этого интеграла по времени надо иметь в виду, что меняется не только скорость, но и сам контур (т. е. его форма). Поэтому, внося знак дифференцирования по времени под знак интеграла, надо дифференцировать не только \mathbf{v} , но и $\delta \mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \delta \mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt}.$$

Поскольку скорость \mathbf{v} есть не что иное, как производная по времени от радиус-вектора \mathbf{r} , то

$$\mathbf{v} \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \delta \mathbf{v} = \delta \frac{v^2}{2}.$$

Но интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю. Поэтому второй из написанных интегралов исчезает и остаётся

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \delta \mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{r}.$$

Теперь остаётся только подставить сюда для ускорения $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ его выражение согласно (2,9):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } w.$$

Применив формулу Стокса, получаем тогда (поскольку $\text{rot grad } w \equiv 0$):

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{r} = \int \text{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{f} = 0.$$

Таким образом, переходя к прежним обозначениям, находим окончательно ¹⁾:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = 0,$$

или

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \text{const.} \quad (8,1)$$

Мы пришли, следовательно, к результату, что (в идеальной жидкости) циркуляция скорости вдоль замкнутого «жидкого» контура остаётся неизменной со временем (так называемая теорема Томсона или закон сохранения циркуляции).

¹⁾ Этот результат сохраняет силу и в однородном поле тяжести, так как $\text{rot } \mathbf{g} \equiv 0$.

Подчеркнём, что этот результат получился путём использования уравнения Эйлера в форме (2,9) и потому связан с предположением об изэнтропичности движения жидкости. Для неизэнтропического движения эта теорема не имеет места ¹⁾.

§ 9. Потенциальное движение

Из закона сохранения циркуляции можно вывести важное следствие. Будем считать сначала, что движение жидкости стационарно и рассмотрим линию тока, о которой известно, что в некоторой её точке $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Проведём произвольный бесконечно малый замкнутый контур, охватывающий линию тока вокруг этой точки. В силу теоремы Стокса циркуляция скорости по всякому бесконечно малому контуру равна $\text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$, где $d\mathbf{f}$ — элемент площади, охватываемый этим контуром, а $\text{rot } \mathbf{v}$ — значение ротора скорости в точках этого элемента. Поскольку рассматриваемый здесь нами контур расположен в месте, где $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, циркуляция скорости по нему равна нулю. С течением времени этот контур будет передвигаться вместе с жидкостью, всё время оставаясь бесконечно малым и охватывая собой ту же самую линию тока. Поскольку циркуляция скорости должна оставаться неизменной, т. е. равной нулю, ясно, что и $\text{rot } \mathbf{v}$ должен быть равным нулю во всех точках линии тока.

Таким образом, мы приходим к результату, что если в какой-либо точке линии тока ротор скорости равен нулю, то $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ и во всех других её точках. Если движение жидкости не стационарно, то этот результат остаётся в силе, с той разницей, что надо говорить не о линии тока, а о траектории, описываемой с течением времени некоторой определённой жидкой частицей (напоминаем, что при нестационарном движении эти траектории не совпадают, вообще говоря, с линиями тока) ²⁾.

На первый взгляд отсюда можно было бы сделать следующий вывод. Рассмотрим стационарное обтекание какого-либо тела потоком жидкости. На бесконечности натекающий поток однороден; его скорость $\mathbf{v} = \text{const.}$, так что $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$ на всех линиях тока. Отсюда можно было бы заключить, что $\text{rot } \mathbf{v}$ будет равен нулю и вдоль всей длины всех линий тока, т. е. во всём пространстве.

¹⁾ С чисто математической точки зрения необходимо, чтобы между p и ρ существовала однозначная связь (при изэнтропическом движении она определяется уравнением $s(p, \rho) = \text{const.}$); тогда $-\frac{\nabla p}{\rho}$ может быть написано в виде градиента некоторой функции, что и требуется для вывода теоремы Томсона.

²⁾ Во избежание недоразумений отметим уже здесь, что этот результат теряет смысл при турбулентном движении (гл. III).

Кроме того, оговорим, что отличный от нуля ротор скорости может появляться на линии тока после пересечения его так называемой ударной волной. Мы увидим, что это связано с нарушением изэнтропичности течения, существенной для всего вывода закона циркуляции скорости (§ 106).

Движение жидкости, при котором во всём пространстве $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, называется потенциальным (или безвихревым) в противоположность вихревому движению, при котором ротор скорости отличен от нуля. Таким образом, мы пришли бы к результату, что стационарное обтекание всякого тела натекающим из бесконечности однородным потоком должно быть потенциальным.

Аналогичным образом из закона сохранения циркуляции скорости можно было бы сделать ещё и следующий вывод. Предположим, что в некоторый момент времени движение жидкости (во всем её объёме) потенциально. Тогда циркуляция скорости по любому замкнутому контуру в ней равна нулю¹⁾. В силу теоремы Томсона можно было бы заключить, что это будет иметь место и в течение всего дальнейшего времени, т. е. мы получили бы результат, что если движение жидкости потенциально в некоторый момент времени, то оно будет потенциальным и в дальнейшем (в частности, должно было бы быть потенциальным всякое движение, при котором в начальный момент времени жидкость вообще покоилась). Этому соответствует и тот факт, что уравнение (2,11) удовлетворяется при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ тождественно.

В действительности, однако, все эти заключения имеют лишь весьма ограниченную применимость. Дело в том, что приведённое выше доказательство сохранения равенства $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ вдоль линии тока, строго говоря, неприменимо для линии, проходящей вдоль поверхности обтекаемого жидкостью твёрдого тела, уже просто потому, что ввиду наличия стенки нельзя провести в жидкости замкнутого контура, который охватывал бы собой такую линию тока. С этим обстоятельством связан тот факт, что уравнения движения идеальной жидкости допускают решения, в которых на поверхности обтекаемого жидкостью твёрдого тела происходит, как говорят, «отрыв струй»: линии тока, следовавшие вдоль поверхности, в некотором месте «отрываются» от неё, уходя в глубь жидкости. В результате возникает картина течения, характеризующаяся наличием отходящей от тела «поверхности тангенциального разрыва», на которой скорость жидкости (будучи направлена в каждой точке по касательной к поверхности) терпит разрыв непрерывности. Другими словами, вдоль этой поверхности один слой жидкости как бы «скользит» по другому (на рис. 1 изображено обтекание с поверхностью разрыва, отделяющей движущуюся жидкость от образующейся позади тела

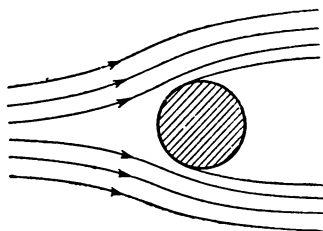


Рис. 1.

¹⁾ Для простоты мы считаем здесь, что жидкость заполняет односвязную область пространства. Для многосвязной области получился бы тот же самый конечный результат, но при рассуждениях надо было бы делать специальные оговорки по поводу выбора контуров.

«застойной» области неподвижной жидкости). С чисто математической точки зрения скачок тангенциальной составляющей скорости представляется собой, как известно, поверхностный ротор скорости.

При учёте таких разрывных течений решение уравнений идеальной жидкости не однозначно: наряду с непрерывным решением они допускают также и бесчисленное множество решений с поверхностями тангенциальных разрывов, отходящими от любой наперёд заданной линии на поверхности обтекаемого тела. Следует, однако, подчеркнуть, что все эти разрывные решения не имеют физического смысла, так как тангенциальные разрывы абсолютно неустойчивы, в результате чего движение жидкости становится в действительности турбулентным (см. об этом в гл. III).

Реальная физическая задача об обтекании заданного тела, разумеется, однозначна. Дело в том, что в действительности не существует строго идеальных жидкостей; всякая реальная жидкость обладает какой-то, хотя бы и малой, вязкостью. Эта вязкость может практически совсем не проявляться при движении жидкости почти во всём пространстве, но сколь бы она ни была мала, она будет играть существенную роль в тонком пристеночном слое жидкости. Именно, свойства движения в этом (так называемом пограничном) слое и определяют в действительности выбор одного из бесчисленного множества решений уравнений движения идеальной жидкости. При этом оказывается, что в общем случае обтекания тел произвольной формы отбираются именно решения с отрывом струй (что фактически приводит к возникновению турбулентности).

Несмотря на всё изложенное, изучение решений уравнений движения, соответствующих непрерывному стационарному потенциальному обтеканию тел, имеет в некоторых случаях смысл. Между тем как в общем случае обтекания тел произвольной формы истинная картина течения практически ничего общего с картиной потенциального обтекания не имеет, в случае тел, имеющих некоторую особую («хорошо обтекаемую», см. § 46) форму, движение жидкости может очень мало отличаться от потенциального (точнее, оно будет не потенциальным лишь в тонком слое жидкости вблизи поверхности тела и в сравнительно узкой области «следа» позади тела).

Другим важным случаем, когда осуществляется потенциальное обтекание, являются малые колебания погружённого в жидкость тела. Легко показать, что если амплитуда a колебаний мала по сравнению с линейными размерами l тела ($a \ll l$), то движение жидкости вокруг тела будет всегда потенциальным. Для этого оценим порядок величины различных членов в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \omega.$$

Скорость \mathbf{v} испытывает заметное изменение (порядка скорости u колеблющегося тела) на протяжении расстояний порядка размеров

тела l . Поэтому производные от \mathbf{v} по координатам — порядка величины u/l . Порядок же величины самой скорости \mathbf{v} определяется (на не слишком больших расстояниях от тела) скоростью u . Таким образом, имеем $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2/l$. Производная же $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ — порядка величины ωu , где ω — частота колебаний. Поскольку $\omega \sim u/a$, то имеем $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$. Из $a \ll l$ следует теперь, что член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ мал по сравнению с $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ и может быть опущен, так что уравнение движения жидкости приобретает вид $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\omega$. Применяв к обеим сторонам этого уравнения операцию rot , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

откуда $\text{rot } \mathbf{v} = \text{const}$. Но при колебательном движении среднее (по времени) значение скорости равно нулю; поэтому из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{const}$ следует, что $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Таким образом, движение жидкости, совершающей малые колебания, является (в первом приближении) потенциальным.

Выясним теперь некоторые общие свойства потенциального движения жидкости. Прежде всего напомним, что вывод закона сохранения циркуляции, а с ним и всех дальнейших следствий, был основан на предположении об изэнтропичности течения. Если же движение не изэнтропично, то этот закон не имеет места; поэтому, даже если в некоторый момент времени движение является потенциальным, то в следующие моменты времени ротор скорости станет, вообще говоря, отличным от нуля. Таким образом, фактически потенциальным может быть лишь изэнтропическое движение.

Согласно теореме Стокса

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{f},$$

где стоящий справа интеграл берётся по поверхности, охватываемой рассматриваемым контуром. Отсюда видно, что при потенциальном движении жидкости циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = 0. \quad (9,1)$$

Из этого обстоятельства следует, в частности, что при потенциальном течении не может существовать замкнутых линий тока ¹⁾.

¹⁾ Этот результат, как и (9,1), может не иметь места при движении жидкости в многосвязной области пространства. При потенциальном течении в такой области циркуляция скорости может быть отличной от нуля, если замкнутый контур, вдоль которого она берётся, не может быть стянут в точку так, чтобы нигде не пересечь границ области.

Действительно, поскольку направление линии тока совпадает в каждой точке с направлением скорости, циркуляция скорости вдоль такой линии во всяком случае была бы отличной от нуля.

При вихревом же движении циркуляция скорости, вообще говоря, отлична от нуля. В этом случае могут существовать замкнутые линии тока; надо, впрочем, подчеркнуть, что наличие замкнутых линий тока отнюдь не является необходимым свойством вихревого движения.

Как и всякое векторное поле с равным нулю ротором, скорость потенциально движущейся жидкости может быть выражена в виде градиента от некоторого скаляра. Этот скаляр называется потенциалом скорости; мы будем обозначать его посредством φ :

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (9,2)$$

Написав уравнение Эйлера в виде (2,10)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\nabla w$$

и подставив в него $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, получаем:

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w \right) = 0,$$

откуда находим следующее равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t), \quad (9,3)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Это равенство представляет собой первый интеграл уравнений потенциального движения. Функция $f(t)$ в равенстве (9,3) может быть без ограничения общности положена равной нулю. Действительно, поскольку скорость определяется производными от φ по координатам, можно прибавить к φ любую функцию времени; заменив же φ на $\varphi + \int f(t) dt$, мы получим в правой стороне равенства (9,3) нуль.

При стационарном движении имеем (выбирая потенциал φ не зависящим от времени) $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{const.}$, и (9,3) переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const.} \quad (9,4)$$

Необходимо подчеркнуть здесь следующее существенное отличие между уравнениями Бернулли в случае потенциального и непотенциального движений. В общем случае произвольного движения const. в правой части этого уравнения есть величина, постоянная вдоль каждой данной линии тока, но, вообще говоря, различная для разных

линий тока. При потенциальном же движении const. в уравнении Бернулли есть величина, постоянная вообще во всем объеме жидкости. Это обстоятельство в особенности повышает роль уравнения Бернулли при исследовании потенциального движения.

§ 10. Несжимаемая жидкость

В очень многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, т. е. постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят как о движении несжимаемой жидкости.

Общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются при применении их к несжимаемой жидкости. Правда, уравнение Эйлера не меняет своего вида, если положить в нём $\rho = \text{const.}$, за исключением только того, что в уравнении (2,4) можно внести ρ под знак градиента:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (10,1)$$

Зато уравнение непрерывности принимает при $\rho = \text{const.}$ простой вид

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (10,2)$$

Поскольку плотность не является теперь неизвестной функцией, как это имеет место в общем случае, то в качестве основной системы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости можно выбрать уравнения, содержащие только скорость. Такими уравнениями являются уравнение непрерывности (10,2) и уравнение (2,11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]. \quad (10,3)$$

Уравнение Бернулли тоже может быть написано для несжимаемой жидкости в более простом виде. Уравнение (10,1) отличается от общего уравнения Эйлера (2,9) тем, что вместо ∇w в нём стоит $\nabla \frac{p}{\rho}$. Поэтому мы можем сразу написать уравнение Бернулли, заменив просто в (5,4) тепловую функцию отношением p/ρ :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad (10,4)$$

Для несжимаемой жидкости можно писать p/ρ вместо w также и в выражении (6,3) для потока энергии, которое принимает тогда вид

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right). \quad (10,5)$$

Действительно, согласно известному термодинамическому соотношению, имеем для изменения внутренней энергии выражение $d\epsilon = T ds - p dV$;

при $s = \text{const.}$ и $V = \frac{1}{\rho} = \text{const.}$ имеем $d\varepsilon = 0$, т. е. $\varepsilon = \text{const.}$ Поскольку же постоянные члены в энергии несущественны, то можно опустить ε и в $\omega = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$.

В особенности упрощаются уравнения для потенциального течения несжимаемой жидкости. Уравнение (10,3) удовлетворяется при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ тождественно. Уравнение же (10,2) при подстановке $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ превращается в

$$\Delta \varphi = 0, \quad (10,6)$$

т. е. в уравнение Лапласа для потенциала φ ¹⁾. К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия на поверхностях соприкосновения жидкости с твёрдыми телами. Именно, на неподвижных твёрдых поверхностях нормальная к поверхности компонента v_n скорости жидкости должна быть равна нулю, а в общем случае движущихся твёрдых тел v_n должно быть равно проекции скорости движения тела на направление той же нормали (эта скорость является заданной функцией времени). Скорость v_n равна, с другой стороны, производной от потенциала φ по направлению нормали: $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

Таким образом; граничные условия гласят в общем случае, что $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ является на границах заданной функцией времени и координат.

При потенциальном движении скорость связана с давлением уравнением (9,3). В случае несжимаемой жидкости в этом уравнении можно писать p/ρ вместо ω :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (10,7)$$

Отметим здесь следующее важное свойство потенциального движения несжимаемой жидкости. Пусть через жидкость движется какое-нибудь твёрдое тело. Если возникающее при этом течение жидкости является потенциальным, то это течение зависит в каждый момент только от скорости движущегося тела в этот же момент времени, но не, например, от его ускорения. Действительно, самое уравнение (10,6) не содержит времени явно; время входит в решение лишь через предельные условия, содержащие только скорость движущегося в жидкости тела.

Из уравнения Бернулли $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$ видно, что при стационарном движении несжимаемой жидкости (при отсутствии поля тяжести) наибольшее значение давления достигается в точках, где скорость обращается в нуль. Такая точка обычно имеется на поверх-

¹⁾ Потенциал скорости был впервые введен Эйлером. Им же было получено для этой величины уравнение вида (10,6), получившее впоследствии название уравнения Лапласа.

ности обтекаемого жидкостью тела (точка O на рис. 2) и называется критической точкой. Если u есть скорость натекающего на тело потока жидкости (т. е. скорость жидкости на бесконечности), а p_0 — давление на бесконечности, то давление в критической точке равно

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2}. \quad (10,8)$$

Если распределение скоростей в движущейся жидкости зависит только от двух координат, скажем от x и y , причём скорость параллельна везде плоскости xy , то о таком течении говорят как о двухмерном или плоском. Для решения задач о двухмерном течении несжимаемой жидкости иногда бывает удобным выражать скорость через так называемую функцию тока. Из уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ видно, что компоненты скорости могут быть написаны в виде производных

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10,9)$$

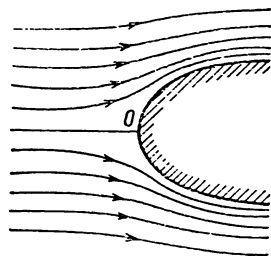


Рис. 2.

от некоторой функции $\psi(x, y)$, называемой функцией тока. Уравнение непрерывности при этом удовлетворяется автоматически. Уравнение же, которому должна удовлетворять функция тока, получается подстановкой (10,9) в уравнение (10,3). При этом получается:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = 0. \quad (10,10)$$

Зная функцию тока, можно непосредственно определить форму линий тока для стационарного движения жидкости. Действительно, дифференциальное уравнение линий тока (при двухмерном течении) есть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или $v_y dx - v_x dy = 0$; оно выражает собой тот факт, что направление касательной к линии тока в каждой точке совпадает с направлением скорости. Подставляя сюда (10,9), получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0,$$

откуда $\psi = \text{const}$. Таким образом, линии тока представляют собой семейство кривых, получающихся приравниванием функции тока $\psi(x, y)$ произвольной постоянной.

Если между двумя точками 1 и 2 в плоскости x, y провести кривую, то поток жидкости Q через эту кривую определится

разностью значений функции тока в этих точках независимо от формы кривой. Действительно, если v_n — проекция скорости на нормаль к кривой в данной её точке, то

$$Q = \rho \int_1^2 v_n dl = \rho \int_1^2 (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_1^2 d\psi,$$

или

$$Q = \rho(\psi_2 - \psi_1). \quad (10,11)$$

Мощные методы решения задач о плоском потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью различных профилей связаны с применением к этой задаче теории функций комплексного переменного. Эти методы были введены в гидродинамику *Гельмгольцем* и *Кирхгофом*, а затем доведены до большого совершенства работами *Н. Е. Жуковского* и *С. А. Чаплыгина*¹⁾.

Основание для этих применений заключается в следующем. Потенциал и функция тока связаны с компонентами скорости посредством

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Но такие соотношения между производными функций φ и ψ с чисто математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши-Римана, выражающими собой тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi + i\psi \quad (10,12)$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ будет иметь в каждой точке определённую производную

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \quad (10,13)$$

Функцию w называют комплексным потенциалом, а $\frac{dw}{dz}$ — комплексной скоростью. Модуль и аргумент последней определяют абсолютную величину скорости v и угол θ её наклона к направлению оси x :

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}. \quad (10,14)$$

На твёрдой поверхности обтекаемого контура скорость должна быть направлена по касательной к нему. Другими словами, контур должен совпадать с одной из линий тока, т. е. на нём должно быть

¹⁾ Подробное изложение этих методов и их многочисленных применений дано в книгах: *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика часть I, Гостехиздат, 1948; Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.*

$\psi = \text{const.}$; эту постоянную можно выбрать равной нулю, и тогда задача об обтекании жидкостью заданного контура сводится к определению аналитической функции $w(z)$, принимающей на этом контуре вещественные значения. Более сложна постановка задачи в случаях, когда жидкость имеет свободную поверхность (такой пример — см. задачу 9 к этому параграфу).

Интеграл от аналитической функции по какому-либо замкнутому контуру C равен, как известно, умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов этой функции относительно её простых полюсов, расположенных внутри C ; поэтому

$$\oint w' dz = 2\pi i \sum_k A_k,$$

где A_k — вычеты комплексной скорости. С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned} \oint w' dz &= \oint (v_x - iv_y)(dx + i dy) = \\ &= \oint (v_x dx + v_y dy) + i \oint (v_x dy - v_y dx). \end{aligned}$$

Вещественная часть этого выражения есть не что иное, как циркуляция Γ скорости по контуру C . Мнимая же часть (умноженная на ρ) представляет собой поток жидкости через этот контур; при отсутствии внутри контура источников жидкости этот поток равен нулю, и тогда имеем просто

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \quad (10,15)$$

(все вычеты A_k при этом чисто мнимые).

Наконец, остановимся на условиях, при выполнении которых жидкость можно считать несжимаемой. При адиабатическом изменении давления на Δp плотность жидкости изменится на

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \Delta p.$$

Но согласно уравнению Бернулли колебания давления в стационарно движущейся жидкости — порядка величины $\Delta p \sim \rho v^2$. Поэтому

$$\Delta \rho \sim \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \rho v^2.$$

В § 63 будет показано, что производная $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$ представляет собой квадрат скорости звука c в жидкости, так что

$$\Delta \rho \sim \rho \frac{v^2}{c^2}.$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$. Мы видим, что необходимым условием для этого является малость скорости её

движения по сравнению со скоростью звука:

$$v \ll c. \quad (10,16)$$

Это условие является достаточным, однако, только при стационарном движении. При нестационарном движении необходимо выполнение ещё одного условия. Пусть τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Сравнивая члены $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\nabla p}{\rho}$ в уравнении Эйлера, получим, по порядку величины, $\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{l\rho}$ или $\Delta p \sim \frac{l}{\tau} \rho v$, а соответствующее изменение p есть $\Delta p \sim \frac{l\rho v}{\tau c^2}$. Сравнивая теперь члены $\frac{\partial p}{\partial t}$ и $\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ в уравнении непрерывности, найдём, что производной $\frac{\partial p}{\partial t}$ можно пренебречь (т. е. можно считать, что $\rho = \text{const.}$) в случае, если $\frac{\Delta p}{\tau} \ll \rho \frac{v}{l}$ или

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \quad (10,17)$$

Выполнение обоих условий (10,16) и (10,17) достаточно для того, чтобы можно было считать жидкость несжимаемой. Условие (10,17) имеет наглядный смысл — оно означает, что время l/c , в течение которого звуковой сигнал пройдёт расстояние l , мало по сравнению со временем τ , в течение которого заметно изменяется движение жидкости и, таким образом, даёт возможность рассматривать процесс распространения взаимодействий в жидкости как мгновенный.

З а д а ч и

1. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω .

Решение. Ось z выбираем по оси цилиндра. Тогда $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$. Уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически, а уравнение Эйлера (10,1) даёт:

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Общий интеграл этих уравнений есть

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const.}$$

На свободной поверхности $p = \text{const.}$, так что эта поверхность является параболоидом:

$$z = \frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$$

(начало координат — в нижней точке поверхности).

2. Шар (радиуса R) движется в несжимаемой идеальной жидкости. Определить потенциальное течение жидкости вокруг шара.

Решение. На бесконечности скорость жидкости должна обращаться в нуль. Обращающимися на бесконечности в нуль решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ являются, как известно, $1/r$ и производные различных порядков от $1/r$ по координатам (начало координат — в центре шара). Ввиду полной симметрии шара в решение может войти лишь один постоянный вектор — скорость \mathbf{u} , а ввиду линейности уравнения Лапласа и граничного условия к нему φ должно содержать \mathbf{u} линейным образом. Единственным скаляром, который можно составить из \mathbf{u} и производных от $1/r$, является произведение $\mathbf{u}\nabla \frac{1}{r}$. Соответственно этому ищем φ в виде

$$\varphi = A\nabla \frac{1}{r} = -\frac{A\mathbf{n}}{r^2}$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиус-вектора). Постоянная A определяется из условия равенства нормальных к поверхности шара компонент скоростей \mathbf{v} и \mathbf{u} ($\mathbf{v}\mathbf{n} = \mathbf{u}\mathbf{n}$) при $r = R$. Это условие даёт $A = u \frac{R^3}{2}$, так что

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2} \mathbf{u}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

Распределение давления определяется формулой (10,7):

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

(p_0 — давление на бесконечности). При вычислении производной $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ надо иметь в виду, что начало координат (выбранное нами в центре шара) смещается со временем со скоростью \mathbf{u} . Поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\nabla\varphi$. Распределение давления на поверхности шара даётся формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{8} (9 \cos^2 \theta - 5) + \frac{\rho}{2} R\mathbf{n} \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

(θ — угол между \mathbf{n} и \mathbf{u}).

3. То же для бесконечного цилиндра, движущегося перпендикулярно к своей оси¹⁾.

Решение. Течение не зависит от координаты вдоль оси цилиндра, так что приходится решать двухмерное уравнение Лапласа. Обращающимися в нуль на бесконечности решениями являются производные от $\ln r$ по координатам, начиная от первого порядка и выше (\mathbf{r} — перпендикулярный к оси цилиндра радиус-вектор). Ищем решение в виде

$$\varphi = A\nabla \ln r = \frac{A\mathbf{n}}{r}$$

и с помощью граничных условий получаем $A = -R^2\mathbf{u}$, так что

$$\varphi = -\frac{R^2}{r} \mathbf{u}\mathbf{n}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^2}{r^2} [2\mathbf{n}(\mathbf{u}\mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

1) Решение более общих задач о потенциальном обтекании эллипсоида и цилиндра эллиптического сечения см. в книгах: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть I, Гостехиздат, 1948, стр. 265 и 355; Г. Ламб, Гидродинамика, §§ 103—116, Гостехиздат, 1947.

Давление на поверхности цилиндра даётся формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{2} (4 \cos^2 \theta - 3) + \rho R \pi \frac{du}{dt}.$$

4. Определить потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в цилиндрическом сосуде эллиптического сечения, вращающемся вокруг своей оси с угловой скоростью Ω ; определить полный момент импульса жидкости в сосуде.

Решение. Выбираем декартовы координаты x, y в плоскости поперечного сечения сосуда с началом на его оси. Скорость точек цилиндра есть $\mathbf{u} = [\Omega r]$, так что граничное условие $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$ есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \Omega (x n_y - y n_x).$$

Если направить оси x, y вдоль осей эллиптического контура сечения в данный момент времени, то уравнение этого контура будет $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и граничное условие примет вид

$$a^2 y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \Omega x \right) + b^2 x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega y \right) = 0.$$

Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа есть

$$\varphi = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x y. \quad (1)$$

Момент импульса жидкости, отнесённый к единице длины вдоль оси сосуда, есть

$$M = \rho \int (x v_y - y v_x) df.$$

Интегрируя по поверхности эллипса, получаем:

$$M = \Omega \pi \frac{\rho a b (a^2 - b^2)^2}{4 (a^2 + b^2)}.$$

Формула (1) определяет абсолютное движение жидкости, но отнесённое к мгновенному положению, занимаемому связанными с вращающимся сосудом осями x, y . Движение жидкости относительно сосуда (т. е. относительно вращающейся системы координат x, y) получим вычитанием скорости $[\Omega r]$ из абсолютной скорости жидкости; обозначая относительную скорость жидкости \mathbf{v}' , имеем:

$$v'_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega y = \frac{2\Omega a^2}{a^2 + b^2} y, \quad v'_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2 + b^2} x.$$

Траектории относительного движения получаются путём интегрирования уравнений $\dot{x} = v'_x, \dot{y} = v'_y$ и представляют эллипсы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const.}$, подобные граничному эллипсу.

5. Определить течение жидкости вблизи критической точки на обтекаемом теле (рис. 2).

Решение. Малый участок поверхности тела вблизи критической точки можно рассматривать как плоский. Выбираем его в качестве плоскости x, y .

Разлагая φ при малых x, y, z в ряд, имеем с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

(постоянный член в φ несущественен). Постоянные коэффициенты определяем так, чтобы φ удовлетворяло уравнению $\Delta\varphi = 0$ и граничным условиям $v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ при $z=0$ и всех x, y и $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ при $x = y = z = 0$ (в критической точке). Это дает $a = b = c = 0$; $C = -A - B$, $E = F = 0$. Член Dxy может быть всегда исключён соответствующим поворотом осей x и y . В результате получаем:

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2. \quad (1)$$

Если течение обладает аксиальной симметрией вокруг оси z (симметричное обтекание тела вращения), то должно быть $A = B$, так что

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости равны $v_x = 2Ax$, $v_y = 2Ay$, $v_z = -4Az$. Линии тока определяются уравнениями (5,2), откуда $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, т. е. линии тока являются кубическими гиперболами.

Если течение является однородным вдоль оси y (например, при обтекании в направлении оси z цилиндра с осью вдоль оси y), то в (1) должно быть $B = 0$, так что

$$\varphi = A(x^2 - z^2).$$

Линиями тока являются гиперболы $xz = \text{const}$.

6. Определить движение жидкости при потенциальном обтекании угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями (вблизи вершины угла).

Решение. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости поперечного сечения, перпендикулярной к линии пересечения плоскостей, с началом в вершине угла. Угол θ отсчитывается от одной из прямых, образующих сечение угла. Пусть α есть величина обтекаемого угла; при $\alpha < \pi$ течение происходит внутри угла, при $\alpha > \pi$ — вне его. Граничное условие исчезновения нормальной составляющей скорости гласит $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$ при $\theta = 0$ и α . Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа пишем в виде ¹⁾

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \frac{\pi}{\alpha},$$

так что

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \quad v_\theta = -nAr^n \sin n\theta.$$

При $n < 1$ (обтекание выпуклого угла; рис. 3) v_r обращается в начале координат в бесконечность как $\frac{1}{r^{1-n}}$. При $n > 1$ (течение внутри

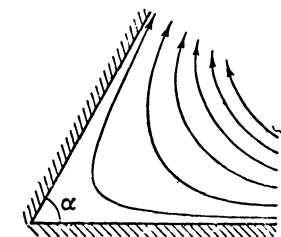


Рис. 4.

вогнутого угла — рис. 4) v_r обращается при $r = 0$ в нуль.

¹⁾ Мы выбираем решение с наиболее низкой (малые r !) положительной степенью r .

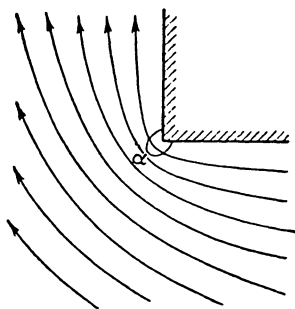


Рис. 3.

Функция тока, определяющая форму линий тока, есть

$$\psi = Ar^n \sin n\theta.$$

Полученные для φ и ψ выражения являются вещественной и мнимой частями комплексного потенциала $w = Az^n$.

7. Из несжимаемой жидкости, заполняющей всё пространство, внезапно удаляется сферический объём радиуса a . Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью (Рэле́й, 1917).

Решение. Движение жидкости после образования полости будет центрально-симметрическим со скоростями, направленными в каждой точке по радиусу к центру. Для радиальной скорости

$$v_r \equiv v < 0$$

имеем уравнение Эйлера (в сферических координатах)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1)$$

Уравнение непрерывности даёт:

$$r^2 v = F(t), \quad (2)$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени; это равенство выражает собой тот факт, что в силу несжимаемой жидкости объём, протекающий через сферу любого радиуса, не зависит от последнего.

Подставляя v из (2) в (1), имеем:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Интегрируя это уравнение по r в пределах от ∞ до радиуса

$$R = R(t) \leq a$$

заполняющейся полости, получим:

$$-\frac{F'(t)}{r} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}, \quad (3)$$

где $V = \frac{dR(t)}{dt}$ — скорость изменения радиуса полости, а p_0 — давление на бесконечности; скорость жидкости на бесконечности, а также давление на поверхности полости равны нулю. Написав соотношение (2) для точек на поверхности полости, находим:

$$F(t) = R^2(t) V(t),$$

и, подставив это выражение для $F(t)$ в (3), получим следующее уравнение:

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2} R \frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \quad (4)$$

В этом уравнении переменные разделяются, и интегрируя его при начальном условии $V=0$ при $R=a$ (в начальный момент жидкость покоилась), найдём:

$$V \equiv \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right)}.$$

Отсюда имеем для искомого полного времени заполнения полости:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}}.$$

Этот интеграл приводится к виду *B*-интеграла Эйлера, и вычисление даёт окончательно:

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0,915a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

8. Погружённая в несжимаемую жидкость сфера расширяется по заданному закону $R = R(t)$. Определить давление жидкости на поверхности сферы.

Решение. Обозначим искомое давление посредством $P(t)$. Вычисления в точности аналогичны произведённым в предыдущей задаче с той лишь разницей, что при $r = R$ давление равно не нулю, а $P(t)$. В результате получим вместо (3) уравнение

$$-\frac{F'(t)}{r} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

и соответственно вместо (4) уравнение

$$\frac{p_0 - P(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV \frac{dV}{dR}.$$

Имея в виду, что $V = \frac{dR}{dt}$, можно привести выражение для $P(t)$ к виду

$$P(t) = p_0 + \frac{\rho}{2} \left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right].$$

9. Определить форму струи, вытекающей из бесконечно длинной щели, прорезанной в плоской стенке ¹⁾.

Решение. Пусть в плоскости x, y стенка совпадает с осью x , отверстие есть отрезок $-a/2 \leq x \leq a/2$ этой оси, а жидкость занимает полуплоскость $y > 0$. Вдали от стенки (при $y \rightarrow \infty$) скорость жидкости равна нулю, а давление пусть будет p_0 .

На свободной поверхности струи (BC и $B'C'$ на рис. 5, *a*) давление $p = 0$, а скорость согласно уравнению Бернулли имеет постоянную величину $v_1 = \sqrt{2p_0/\rho}$. Линии стенки, продолжающиеся в свободную границу струи, представляют собой линии тока. Пусть на линии ABC $\psi = 0$; тогда на линии $A'B'C'$ $\psi = -Q/\rho$, где $Q = \rho a_1 v_1$ — расход жидкости в струе (a_1, v_1 — ширина струи и скорость жидкости в ней на бесконечности). Потенциал φ меняется как на линии ABC , так и на линии $A'B'C'$ от $-\infty$ до $+\infty$; пусть в точках B и B' $\varphi = 0$. Тогда в плоскости комплексного переменного w области течения будет соответствовать бесконечная полоса ширины Q/ρ (обозначения точек на рис. 5, *b* — z соответствуют обозначениям на рис. 5, *a* в плоскости x, y).

¹⁾ Решение задачи о вытекании жидкости из круглого отверстия см. Г. Ламб, Гидродинамика, § 102, Гостехиздат, 1947.

Введём новую комплексную переменную — логарифм комплексной скорости:

$$\zeta = -\ln \left[\frac{1}{v_1 e^{i\pi/2}} \frac{dw}{dz} \right] = \ln \frac{v_1}{v} + i \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \quad (1)$$

($v_1 e^{i\pi/2}$ — комплексная скорость на бесконечности струи). На $A'B'$ имеем $\theta = 0$; на AB $\theta = -\pi$; на BC и $B'C'$ $v = v_1$, причём на бесконечности струи $\theta = \pi/2$. Поэтому в плоскости переменного ζ области течения соответствует полуплоса ширины π , расположенная в правой полуплоскости (рис. 5, в). Если мы теперь найдём конформное преобразование, переводящее полосу

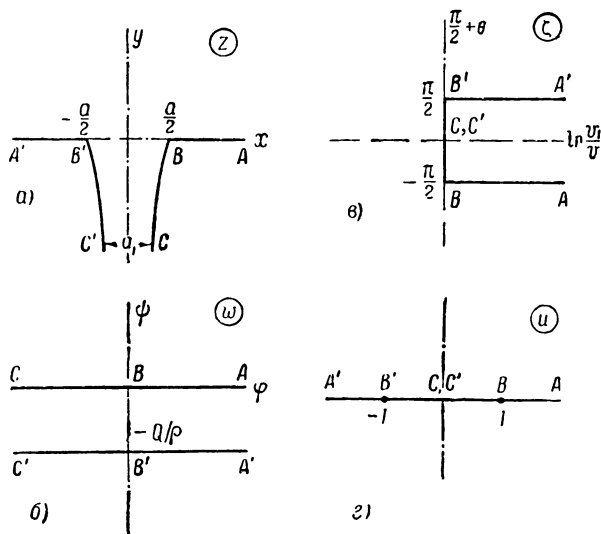


Рис. 5.

плоскости w в полуплоску плоскости ζ (с указанным на рис. 5 соответствием точек), то тем самым мы определим w как функцию от $\frac{dw}{dz}$; функция w может быть найдена затем одной квадратурой.

Для того чтобы найти искомое преобразование, введём ещё одну вспомогательную комплексную переменную u , такую, чтобы в плоскости u области течения соответствовала верхняя полуплоскость, причём точкам B и B' соответствовали точки $u = \pm 1$, точкам C, C' $u = 0$, а бесконечно удалённым точкам A и A' $u = \pm \infty$ (рис. 5, г). Зависимость w от этой вспомогательной переменной определяется конформным преобразованием, переводящим верхнюю полуплоскость u в полосу плоскости w . При условленном соответствии точек это есть

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi} \ln u. \quad (2)$$

Чтобы найти зависимость ζ от u , надо найти конформное отображение полуплосы плоскости ζ в верхнюю полуплоскость u . Рассматривая эту полуплоску как треугольник, одна из вершин которого удалена в бесконечность, можно

найти искомое отображение с помощью известной формулы Шварца-Кристоффеля; ответ гласит

$$\zeta = -i \operatorname{arcsin} u. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) решают задачу, определяя в параметрическом виде зависимость $\frac{dw}{dz}$ от w .

Определим форму струи. На BC имеем $w = \varphi$, $\zeta = i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, а u меняется между 0 и 1. Из (2) и (3) получим:

$$\varphi = -\frac{Q}{\rho\pi} \ln(-\cos \theta), \quad (4)$$

а из (1) $\frac{d\varphi}{dz} = v_1 e^{-i\theta}$, или

$$dz \equiv dx + i dy = \frac{1}{v_1} e^{i\theta} d\varphi = \frac{a_1}{\pi} e^{i\theta} \operatorname{tg} \theta d\theta,$$

откуда интегрированием (с условиями $y = 0$, $x = a/2$ при $\theta = -\pi$) найдём в параметрическом виде форму струи. В частности, для сжатия струи получается $\frac{a_1}{a} = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0,61$.

§ 11. Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой идеальной жидкостью какого-либо твёрдого тела. Такая задача, конечно, полностью эквивалентна задаче об определении течения жидкости при движении через неё того же тела. Для получения второго случая из первого достаточно перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится. Мы будем говорить ниже именно о движении твёрдого тела через жидкость.

Определим характер распределения скоростей в жидкости на больших расстояниях от движущегося тела. Потенциальное движение несжимаемой жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Мы должны рассмотреть такие решения этого уравнения, которые обращаются на бесконечности в нуль, поскольку жидкость на бесконечности неподвижна. Выберем начало координат где-нибудь внутри движущегося тела (эта система координат движется вместе с телом; мы, однако, рассматриваем распределение скоростей в жидкости в некоторый заданный момент времени). Как известно, уравнение Лапласа имеет решением $1/r$, где r — расстояние от начала координат. Решением являются также градиент $\nabla \frac{1}{r}$ и следующие производные от $1/r$ по координатам. Все эти решения (и их линейные комбинации) обращаются на бесконечности в нуль. Поэтому общий вид искомого решения уравнения Лапласа на больших расстояниях от тела есть

$$\varphi = -\frac{a}{r} + A\nabla \frac{1}{r} + \dots,$$

где a , A не зависят от координат; опущенные члены содержат производные высших порядков от $1/r$. Легко видеть, что постоянная a должна быть равной нулю. Действительно, потенциал $\varphi = -\frac{a}{r}$ даёт скорость $\mathbf{v} = -\nabla \frac{a}{r} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}$. Вычислим соответствующий поток жидкости через какую-нибудь замкнутую поверхность, скажем, сферу с радиусом R . На этой поверхности скорость постоянна и равна $\frac{a}{R^2}$; поэтому полный поток жидкости через неё равен $\rho \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Между тем, поток несжимаемой жидкости через всякую замкнутую поверхность должен, очевидно, обращаться в нуль. Поэтому заключаем, что должно быть $a = 0$.

Таким образом, φ содержит члены, начиная с членов порядка $1/r^2$. Поскольку мы ищем скорость на больших расстояниях, то члены более высоких порядков можно опустить, и мы получаем:

$$\varphi = A\nabla \frac{1}{r} = -\frac{A\mathbf{n}}{r^2}, \quad (11,1)$$

а для скорости $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$

$$\mathbf{v} = (A\nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{3(A\mathbf{n})\mathbf{n} - A}{r^3} \quad (11,2)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}). Мы видим, что на больших расстояниях скорость спадает, как $1/r^3$. Вектор A зависит от конкретной формы и скорости движения тела и может быть определён только путём полного решения гидродинамического уравнения $\Delta\varphi = 0$ на всех расстояниях, с учётом соответствующих граничных условий на поверхности движущегося тела.

Входящий в (11,2) вектор A оказывается связанным определённым образом с полным импульсом и с полной энергией жидкости, обтекающей движущееся в ней тело. Полная кинетическая энергия жидкости (внутренняя энергия несжимаемой жидкости постоянна) есть

$$E = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV,$$

где интегрирование производится по всему пространству вне тела. Выделим из пространства часть V , ограниченную сферой большого радиуса R , с центром в начале координат и будем интегрировать сначала только по объёму V , имея в виду стремить затем R к бесконечности. Имеем тождественно

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v} + \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV,$$

где \mathbf{u} — скорость тела. Поскольку \mathbf{u} есть не зависящая от координат величина, то первый интеграл равен просто $u^2(V - V_0)$, где V_0 — объём тела. Во втором же интеграле пишем сумму $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ в виде

$\nabla(\varphi + \mathbf{ur})$ и, воспользовавшись также тем, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ в силу уравнения непрерывности, а $\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv 0$, имеем:

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \int \operatorname{div} \{(\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\} dV.$$

Второй интеграл преобразуем в интеграл по поверхности S сферы и поверхности S_0 тела:

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) df.$$

На поверхности тела нормальные компоненты \mathbf{v} и \mathbf{u} равны друг другу в силу граничных условий; поскольку вектор $d\mathbf{f}$ направлен как раз по нормали к поверхности, то ясно, что интеграл по S_0 тождественно обращается в нуль. На удалённой же поверхности S подставляем для φ и \mathbf{v} выражения (11,2) и опускаем члены, обращающиеся в нуль при переходе к пределу по $R \rightarrow \infty$. Написав элемент поверхности сферы S в виде $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, получим:

$$\int v^2 dV = u^2 \left(\frac{4\pi}{3} R^3 - V_0 \right) + \int \{3(\mathbf{An})(\mathbf{un}) - (\mathbf{un})^2 R^3\} d\omega.$$

Наконец, производя интегрирование ¹⁾ и умножая на $\frac{\rho}{2}$, получаем окончательно следующее выражение для полной энергии жидкости:

$$E = \frac{\rho}{2} (4\pi \mathbf{Au} - V_0 u^2). \quad (11,3)$$

Как уже указывалось, точное вычисление вектора \mathbf{A} требует полного решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ с учётом конкретных граничных условий на поверхности тела. Общий характер зависимости \mathbf{A} от скорости \mathbf{u} тела можно, однако, установить уже непосредственно из факта линейности уравнения для φ и линейности (как по φ , так и по \mathbf{u}) граничных условий к этому уравнению. Из этой линейности следует, что \mathbf{A} должен быть линейной же функцией от компонент вектора \mathbf{u} . Определяемая же формулой (11,3) энергия E является,

¹⁾ Интегрирование по $d\omega$ эквивалентно усреднению подинтегрального выражения по всем направлениям вектора \mathbf{n} и умножению затем на 4π . Для усреднения выражений типа $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) \equiv A_i n_i B_k n_k$ (\mathbf{A} , \mathbf{B} — постоянные векторы) замечаем, что средние значения $n_i n_k$ составляют симметрический тензор, который может выражаться только через единичный тензор δ_{ik} , т. е. $n_i n_k = a \delta_{ik}$. Упрощая по индексам i и k и помня, что $n_i^2 = 1$, находим, что $a = 1/3$. Поэтому

$$\overline{(\mathbf{An})(\mathbf{Bn})} = \frac{1}{3} \delta_{ik} A_i B_k = \frac{1}{3} (\mathbf{AB}).$$

следовательно, квадратичной функцией компонент вектора \mathbf{u} и по-
тому может быть представлена в виде

$$E = \frac{m_{ik} u_i u_k}{2}, \quad (11,4)$$

где m_{ik} — некоторый постоянный симметрический тензор, компоненты которого могут быть вычислены с помощью компонент вектора \mathbf{A} ; его называют тензором присоединённых масс.

Зная энергию E , можно получить выражение для полного импульса \mathbf{P} жидкости. Для этого замечаем, что бесконечно малые изменения E и \mathbf{P} связаны друг с другом соотношением $dE = \mathbf{u} d\mathbf{P}$ ¹⁾; отсюда следует, что если E выражено в виде (11,4), то компоненты \mathbf{P} должны иметь вид

$$P_i = m_{ik} u_k. \quad (11,5)$$

Наконец, сравнение формул (11,3)—(11,5) показывает, что \mathbf{P} выражается через \mathbf{A} следующим образом:

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0\mathbf{u}. \quad (11,6)$$

Следует обратить внимание на то, что полный импульс жидкости оказывается вполне определённой конечной величиной.

Передаваемый в единицу времени от тела к жидкости импульс есть $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$. Взятый с обратным знаком, он определяет, очевидно, реакцию \mathbf{F} жидкости, т. е. действующую на тело силу:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (11,7)$$

Параллельная скорости тела составляющая \mathbf{F} называется силой сопротивления, а перпендикулярная составляющая — подъёмной силой.

¹⁾ Действительно, пусть тело ускоряется под влиянием какой-либо внешней силы \mathbf{F} . В результате импульс жидкости будет возрастать; пусть $d\mathbf{P}$ есть его приращение в течение времени dt . Это приращение связано с силой посредством $d\mathbf{P} = \mathbf{F} dt$, а умноженное на скорость \mathbf{u} даёт $\mathbf{u} d\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{u} dt$, т. е. работу силы \mathbf{F} на пути $\mathbf{u} dt$, которая в свою очередь должна быть равна увеличению энергии dE жидкости.

Следует заметить, что вычисление импульса непосредственно как интеграла $\int \rho \mathbf{v} dV$ по всему объёму жидкости было бы невозможным. Дело в том, что этот интеграл (со скоростью \mathbf{v} , распределённой по (11,2)) расходится в том смысле, что результат интегрирования, хотя и конечен, но зависит от способа взятия интеграла: производя интегрирование по большой области, размеры которой устремляются затем к бесконечности, мы получили бы значение, зависящее от формы области (сфера, цилиндр и т. п.). Используемый же нами способ вычисления импульса, исходя из соотношения $\mathbf{u} d\mathbf{P} = dE$, приводит ко вполне определённому конечному значению (дававшему формулой (11,6)), заведомо удовлетворяющему физическому условию о связи изменения импульса с действующими на тело силами.

Если бы было возможно потенциальное обтекание равномерно движущегося в идеальной жидкости тела, то было бы $P = \text{const.}$ (так как $u = \text{const.}$) и $F = 0$. Другими словами, отсутствовала бы как сила сопротивления, так и подъёмная сила, т. е. действующие на поверхность тела со стороны жидкости силы давления взаимно компенсируются (так называемый парадокс Даламбера). Происхождение этого «парадокса» в особенности очевидно для силы сопротивления. Действительно, наличие этой силы при равномерном движении тела означало бы, что для поддержания движения какой-либо внешний источник должен непрерывно производить работу, которая либо диссипируется в жидкости, либо преобразуется в её кинетическую энергию, приводя к постоянно уходящему на бесконечность потоку энергии в движущейся жидкости. Но никакой диссипации энергии в идеальной жидкости, по определению, нет, а скорость приводимой телом в движение жидкости настолько быстро убывает с увеличением расстояния от тела, что никакого потока энергии на бесконечности тоже нет.

Следует, однако, подчеркнуть, что все эти соображения относятся лишь к движению тела в неограниченной жидкости. Если же, например, жидкость имеет свободную поверхность, то равномерно движущееся параллельно этой поверхности тело будет испытывать силу сопротивления. Появление этой силы (называемой волновым сопротивлением) связано с возникновением на свободной поверхности жидкости системы распространяющихся по ней волн, непрерывно уносящих энергию в бесконечность.

Пусть некоторое тело совершает под влиянием действующей на него внешней силы f колебательное движение. При соблюдении рассмотренных в предыдущем параграфе условий окружающая тело жидкость совершает потенциальное движение, и для вывода уравнений движения тела можно воспользоваться полученными выше соотношениями. Сила f должна быть равна производной по времени от полного импульса системы, равного сумме импульса Mu тела (M — масса тела) и импульса P жидкости:

$$M \frac{du}{dt} + \frac{dP}{dt} = f.$$

С помощью (11,5) получаем отсюда:

$$M \frac{du_i}{dt} + m_{ik} \frac{du_k}{dt} = f_i,$$

что можно написать также и в виде

$$\frac{du_k}{dt} (M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i. \quad (11,8)$$

Это и есть уравнение движения тела, погружённого в идеальную жидкость.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратный вопрос. Именно, пусть сама жидкость производит под влиянием каких-либо внешних (по отношению к телу) причин некоторое колебательное движение. Под влиянием этого движения погружённое в жидкость тело тоже начинает двигаться¹⁾. Выведем уравнение этого движения.

Будем предполагать, что скорость движения жидкости мало меняется на протяжении расстояний порядка величины линейных размеров тела. Пусть \mathbf{v} есть скорость жидкости в месте нахождения тела, которую она имела бы, если бы тела вообще не было; другими словами, \mathbf{v} есть скорость основного движения жидкости. По сделанному предположению \mathbf{v} можно считать постоянной вдоль всего объёма, занимаемого телом. Посредством \mathbf{u} попрежнему обозначаем скорость тела.

Силу, действующую на тело и приводящую его в движение, можно определить из следующих соображений. Если бы тело полностью увлекалось жидкостью (т. е. было бы $\mathbf{v} = \mathbf{u}$), то на него действовала бы такая же сила, которая бы действовала на жидкость в объёме тела, если бы тела вовсе не было. Импульс этого объёма жидкости есть $\rho V_0 \mathbf{v}$, и потому действующая на него сила равна $\rho V_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Но в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторое дополнительное движение. Связанный с этим дополнительным движением импульс жидкости равен $m_{ik}(u_k - v_k)$ (в выражении (11,5) надо теперь писать вместо \mathbf{u} скорость $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ движения тела относительно жидкости). Изменение этого импульса со временем приводит к появлению дополнительной силы реакции, действующей на тело и равной $-m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k)$. Таким образом, полная сила, действующая на тело, равна

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Эту силу надо приравнять производной по времени от импульса тела. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению движения:

$$\frac{d}{dt} M u_i = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Интегрируя с обеих сторон по времени, получаем отсюда:

$$M u_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k),$$

или

$$(M \delta_{ik} + m_{ik}) u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik}) v_k. \quad (11,9)$$

¹⁾ Речь может идти, например, о движении тела в жидкости, по которой распространяется звуковая волна с длиной волны, большой по сравнению с размерами тела.

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, поскольку скорость u тела, приводимого жидкостью в движение, должна обратиться в нуль вместе со скоростью жидкости v . Полученное соотношение определяет скорость тела по скорости жидкости. Если плотность тела равна плотности жидкости ($M = \rho V_0$), то, как и следовало ожидать, $u = v$.

ЗАДАЧИ

1. Получить уравнение движения для шара, совершающего колебательное движение в идеальной жидкости, и для шара, приводимого в движение колеблющейся жидкостью.

Решение. Сравнивая (11,1) с выражением для φ , полученным для обтекания шара в задаче 2 § 10, видим, что

$$A = u \frac{R^3}{2}$$

(R — радиус шара). Полный импульс приводимой шаром в движение жидкости есть согласно (11,6) $P = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 u$, так что тензор m_{ik} равен

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \delta_{ik}.$$

Испытываемая движущимся шаром сила сопротивления равна

$$F = -\frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{du}{dt},$$

а уравнение движения колеблющегося в жидкости шара гласит:

$$\frac{4\pi R^3}{3} \left(\rho_0 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{du}{dt} = f$$

(ρ_0 — плотность вещества шара). Коэффициент при u можно рассматривать как некоторую «эффективную массу» шара; она складывается из массы самого шара и из «присоединённой» массы, равной в данном случае половине массы жидкости, вытесняемой шаром.

Если шар приводится в движение жидкостью, то для его скорости получаем из (11,9) выражение

$$u = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0} v.$$

Если плотность шара превышает плотность жидкости ($\rho_0 > \rho$), то $u < v$, т. е. шар «отстаёт» от жидкости; если же $\rho_0 < \rho$, то шар опережает её.

2. Выразить действующий на движущееся в жидкости тело момент сил через вектор A .

Решение. Как известно из механики, действующий на тело момент сил M определяется по его функции Лагранжа (в данном случае — по энергии E) соотношением $\delta E = M \delta \theta$, где $\delta \theta$ — вектор бесконечно малого угла поворота тела, а δE — изменение E при этом повороте. Вместо того чтобы поворачивать тело на угол $\delta \theta$ (и соответственно менять компоненты m_{ik}), можно повернуть на угол $-\delta \theta$ жидкость относительно тела и соответственно изменить скорость u . Имеем при повороте $\delta u = -[\delta \theta u]$, так что

$$\delta E = P \delta u = -\delta \theta [uP].$$

Используя выражение (11,6) для P , получаем отсюда искомую формулу:

$$M = -[uP] = 4\pi\rho [Au].$$

§ 12. Гравитационные волны

Свободная поверхность жидкости, находящейся в равновесии в поле тяжести, является плоской. Если под влиянием какого-либо внешнего воздействия поверхность жидкости в каком-нибудь месте выводится из её равновесного положения, то в жидкости возникает движение. Это движение будет распространяться вдоль всей поверхности жидкости в виде волн, называемых гравитационными, поскольку они обуславливаются действием поля тяжести. Гравитационные волны происходят в основном на поверхности жидкости, захватывая внутренние её слои тем меньше, чем глубже эти слои расположены.

Мы будем рассматривать здесь такие гравитационные волны, в которых скорость движущихся частиц жидкости настолько мала, что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ по сравнению с $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$. Легко выяснить, что означает это условие физически. В течение промежутка времени порядка периода τ колебаний, совершаемых частицами жидкости в волне, эти частицы проходят расстояние порядка амплитуды a волны. Поэтому скорость их движения — порядка $v \sim a/\tau$. Скорость v заметно меняется на протяжении интервалов времени порядка τ и на протяжении расстояний порядка λ вдоль направления распространения волны (λ — длина волны). Поэтому производная от скорости по времени — порядка v/τ , а по координатам — порядка v/λ . Таким образом, условие $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ эквивалентно требованию

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{1}{\tau},$$

или

$$a \ll \lambda, \quad (12,1)$$

т. е. амплитуда колебаний в волне должна быть мала по сравнению с длиной волны. В § 9 мы видели, что если в уравнении движения можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, то движение жидкости является потенциальным. Предполагая жидкость несжимаемой, мы можем воспользоваться поэтому уравнениями (10,6) и (10,7). В уравнении (10,7) мы можем теперь пренебречь членом $\frac{v^2}{2}$, содержащим квадрат скорости; положив $f(t) = 0$ и введя в поле тяжести член ρgz , получим:

$$p = -\rho gz - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (12,2)$$

Ось z выбираем, как обычно, вертикально вверх, а в качестве плоскости x, y выбираем равновесную плоскую поверхность жидкости.

Будем обозначать z -координату точек поверхности жидкости посредством ζ ; ζ является функцией координат x, y и времени t . В рав-

новесии $\zeta = 0$, так что ζ есть вертикальное смещение жидкой поверхности при её колебаниях. Пусть на поверхность жидкости действует постоянное давление p_0 (например, атмосферное). Тогда имеем на поверхности согласно (12,2)

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Но вместо потенциала φ можно ввести потенциал $\varphi' = \varphi + \frac{p_0}{\rho} t$; такая замена ничего не изменит, так как $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi = \text{grad } \varphi'$. В написанном уравнении выпадает тогда член p_0 , и, обозначая ниже φ' просто как φ , получаем условие на поверхности жидкости в виде

$$g \zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (12,3)$$

Малость амплитуды колебаний в волне означает, что смещение ζ мало. Поэтому можно считать, в том же приближении, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности равна просто производной по времени от смещения ζ :

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Но $v_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}$, так что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Подставляя сюда ζ из (12,3), получаем:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0.$$

В силу малости колебаний можно в этом условии брать значение стоящего в скобках выражения при $z=0$ вместо $z=\zeta$. Таким образом, получаем окончательно следующую систему уравнений, определяющих движение в гравитационной волне:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (12,4)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (12,5)$$

Мы будем рассматривать здесь волны на поверхности жидкости, считая эту поверхность неограниченной по своей площади. Мы будем также считать, что длина волны мала по сравнению с глубиной жидкости; тогда можно рассматривать жидкость как бесконечно глубокою. Поэтому мы не пишем граничных условий на боковых границах и на дне жидкости.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси x и однородную вдоль оси y ; в такой волне все величины не

зависят от координаты y . Будем искать решение, являющееся простой периодической функцией времени и координаты x , т. е. положим:

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z).$$

ω есть так называемая циклическая частота (мы будем говорить о ней просто как о частоте) волны; $\frac{2\pi}{\omega}$ есть период изменения движения со временем в данной точке пространства; k есть так называемый волновой вектор волны; $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ есть длина волны, т. е. период изменения движения вдоль оси x (в заданный момент времени)¹). Подставляя написанные выражения в уравнение

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

получаем:

$$\frac{d^2f}{dz^2} - k^2f = 0.$$

Это уравнение имеет решения e^{kz} и e^{-kz} . Из них надо выбрать первое, поскольку второе приводит к неограниченному возрастанию φ по направлению в глубь жидкости. (Напоминаем, что область жидкости есть $z < 0$.) Таким образом, получаем для потенциала скорости выражение

$$\varphi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (12,6)$$

Мы должны ещё удовлетворить граничному условию (12,5). Подставляя в него (12,6), получаем:

$$k - \frac{\omega^2}{g} = 0,$$

или

$$\omega^2 = kg. \quad (12,7)$$

Этим определяется связь между волновым вектором и частотой гравитационной волны.

Распределение скоростей в движущейся жидкости получается непосредственно взятием производных от φ по координатам:

$$v_x = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t); \quad v_z = Ake^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (12,8)$$

Мы видим, что скорость экспоненциально падает по направлению в глубь жидкости. В каждой заданной точке пространства (т. е.

¹) Задача о гравитационных волнах малой амплитуды может быть решена при произвольных начальных условиях: в начальный момент времени могут быть произвольно заданы профиль волны и распределение скоростей на нём. Общее решение этой задачи дано *Н. Е. Кочным* (1935) и *Л. И. Седовым* (1948); оно приведено в книге: *Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике*, гл. II, § 13, 1951. См. также *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика*, часть 1, гл. VIII, §§ 9, 10, Гостехиздат, 1948.

при заданных x, z) вектор скорости равномерно вращается в плоскости x, z , оставаясь постоянным по всей величине (равной Ake^{kz}).

Определим ещё траекторию частиц жидкости в волне. Обозначим временно посредством x, z координаты движущейся частицы жидкости (а не координаты неподвижной точки в пространстве), а посредством x_0, z_0 — значения x, z для равновесного положения частицы. Тогда $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, а в правой части (12,8) можно приближённо написать x_0, z_0 вместо x, z , воспользовавшись малостью колебаний. Интегрирование по времени даёт тогда:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t); \\ z - z_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \quad (12,9)$$

Таким образом, частицы жидкости описывают окружности вокруг точек x_0, z_0 с радиусом $A \frac{k}{\omega} e^{kz_0}$, экспоненциально падающим по направлению в глубь жидкости.

Скорость U распространения волны равна, как будет показано в § 66, $U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Подставляя сюда $\omega = \sqrt{kg}$, находим, что скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности бесконечно глубокой жидкости равна

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (12,10)$$

Она растёт при увеличении длины волны.

Мы не касаемся здесь сложной теории гравитационных волн произвольной (не малой) амплитуды. Эта теория была развита в весьма полном виде *А. И. Некрасовым*¹⁾.

З а д а ч и

1. Определить скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности жидкости, глубина которой равна h .

Р е ш е н и е. На дне жидкости нормальная составляющая скорости должна быть равна нулю, т. е.

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h.$$

Из этого условия определяется отношение между постоянными A и B в общем решении

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) \{Ae^{kz} + Be^{-kz}\}.$$

¹⁾ Изложение этой теории дано в книге: *А. И. Некрасов, Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости*, Изд. АН СССР, 1951.

В результате находим:

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t) \operatorname{ch} k(z + h).$$

Из предельного условия (12,5) находим соотношение между k и ω в виде

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Скорость распространения волны

$$U = \frac{\sqrt{g}}{2 \sqrt{k \operatorname{th} kh}} \left\{ \operatorname{th} kh + \frac{kh}{\operatorname{ch}^2 kh} \right\}.$$

При $kh \gg 1$ получается результат (12,10), а при $kh \ll 1$ — результат (13,10).

2. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн на поверхности раздела двух жидкостей, причём верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя — снизу горизонтальными неподвижными плоскостями. Плотность и глубина слоя нижней жидкости ρ и h , а верхней ρ' и h' (причём $\rho > \rho'$).

Решение. Плоскость x, y выбираем по плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. Ищем решение в обеих жидкостях соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \operatorname{ch} k(z + h) \cos(kx - \omega t), \\ \varphi' &= B \operatorname{ch} k(z - h') \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(так, чтобы удовлетворялись условия на верхней и нижней границах, — см. решение задачи 1). На поверхности раздела давление должно быть непрерывным; согласно (12,2) это приводит к условию

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

(при $z = 0$) или

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho - \rho')} \left(\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Кроме того, скорости v_z обеих жидкостей на поверхности раздела должны быть одинаковыми. Это приводит к условию (при $z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}. \quad (3)$$

Далее, $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ и, подставляя сюда (2), получаем:

$$g(\rho - \rho') \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Подставляя (1) в (3) и (4), получим два однородных линейных уравнения для A и B , из условия совместности которых найдём:

$$\omega^2 = \frac{k g (\rho - \rho')}{\rho \operatorname{cth} kh + \rho' \operatorname{cth} kh'}.$$

При $kh \gg 1, kh' \gg 1$ (обе жидкости очень глубоки):

$$\omega^2 = k g \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'},$$

а при $kh \ll 1, kh' \ll 1$ (длинные волны):

$$\omega = k \sqrt{\frac{g(\rho - \rho') h h'}{\rho h' + \rho' h}},$$

3. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн, распространяющихся одновременно по поверхности раздела и верхней поверхности двух слоёв жидкости, из которых нижняя (плотность ρ) бесконечно глубока, а верхняя (плотность ρ') имеет толщину h' и свободную верхнюю поверхность.

Решение. Выбираем плоскость x, y в плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. В нижней и верхней жидкостях ищем решение соответственно в виде

$$\varphi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t); \quad \varphi' = [B e^{-kz} + C e^{kz}] \cos(kx - \omega t). \quad (1)$$

На поверхности раздела обеих жидкостей (т. е. при $z = 0$) имеют место условия (см. задачу 2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}; \quad g(\rho - \rho') \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

а на верхней свободной границе (т. е. при $z = h'$):

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Первое из уравнений (2) при подстановке (1) даёт $A = C - B$, а два остальных условия дают два уравнения для B и C , из условия совместности которых получаем квадратное уравнение для ω^2 с корнями:

$$\omega^2 = kg \frac{(\rho - \rho')(1 - e^{-2kh})}{\rho + \rho' + (\rho - \rho')e^{-2kh}}, \quad \omega^2 = kg.$$

При $h' \rightarrow \infty$ эти корни соответствуют волнам, распространяющимся независимо по поверхности раздела и по верхней поверхности жидкости.

4. Определить возможные частоты колебаний¹⁾ (стоячих волн) жидкости глубины h , находящейся в прямоугольном бассейне ширины a и длины b .

Решение. Оси x и y выбираем по двум боковым сторонам бассейна. Ищем решение в виде стоячей волны:

$$\varphi = \cos \omega t \operatorname{ch} k(z + h) f(x, y).$$

Для f получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

а условие на свободной поверхности приводит, как и в задаче 1, к соотношению

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Решение уравнения для f берём в виде

$$f = \cos px \cos qy, \quad p^2 + q^2 = k^2.$$

На боковых сторонах сосуда должны выполняться условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b,$$

¹⁾ См. § 68,

Отсюда находим:

$$p = \frac{m\pi}{a}, \quad q = \frac{n\pi}{b},$$

где m, n — целые числа. Поэтому возможные значения k равны

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

§ 13. Длинные гравитационные волны

Рассмотрев гравитационные волны, длина которых мала по сравнению с глубиной жидкости, остановимся теперь на противоположном предельном случае волн, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости. Такие волны называются длинными.

Рассмотрим сначала распространение длинных волн в канале. Длину канала (направленную вдоль оси x) будем считать неограниченной. Сечение канала может иметь произвольную форму и может меняться вдоль его длины. Площадь поперечного сечения жидкости в канале обозначим посредством $S = S(x, t)$. Глубина и ширина канала предполагаются малыми по сравнению с длиной волны.

Мы будем рассматривать здесь продольные длинные волны, в которых жидкость движется вдоль канала. В таких волнах компонента v_x скорости вдоль длины канала велика по сравнению с компонентами v_y, v_z .

Обозначив v_x просто как v и опуская малые члены, мы можем написать x -компоненту уравнения Эйлера в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

а z -компоненту — в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

(квадратичные по скорости члены опускаем, поскольку амплитуда волны попрежнему считается малой). Из второго уравнения имеем, замечая, что на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно быть $p = p_0$:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (13,1)$$

Второе уравнение для определения двух неизвестных v и ζ можно вывести методом, аналогичным выводу уравнения непрерывности. Это уравнение представляет собой по существу уравнение непрерывности применительно к рассматриваемому случаю. Рассмотрим объём жидкости, заключённый между двумя плоскостями поперечного сечения канала, находящимися на расстоянии dx друг от друга. За единицу

времени через одну плоскость войдёт объём жидкости, равный $(Sv)_x$, а через другую плоскость выйдет объём $(Sv)_{x+dx}$. Поэтому объём жидкости между обеими плоскостями изменится на

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx.$$

Но в силу несжимаемости жидкости это изменение может произойти только за счёт изменения её уровня. Изменение объёма жидкости между рассматриваемыми плоскостями в единицу времени равно

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx.$$

Следовательно, можно написать:

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx = - \frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0. \quad (13,2)$$

Это и есть искомое уравнение непрерывности.

Пусть S_0 есть площадь поперечного сечения жидкости в канале при равновесии. Тогда $S = S_0 + S'$, где S' — изменение этой площади благодаря наличию волны. Поскольку изменение уровня жидкости в волне мало, то S' можно написать в виде $b\zeta$, где b — ширина сечения канала у самой поверхности жидкости в нём. Уравнение (13,2) приобретает тогда вид

$$b \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (S_0 v)}{\partial x} = 0. \quad (13,3)$$

Дифференцируя (13,3) по t и подставляя $\frac{\partial v}{\partial t}$ из (13,1), получим:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(S_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0. \quad (13,4)$$

Если сечение канала одинаково вдоль всей его длины, то $S_0 = \text{const.}$ и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g S_0}{b} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (13,5)$$

Уравнение такого вида называется волновым; как будет показано в § 63, оно соответствует распространению волн с не зависящей от частоты скоростью U , равной квадратному корню из коэффициента при $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. Таким образом, скорость распространения длинных гравитационных волн в каналах равна

$$U = \sqrt{\frac{g S_0}{b}}. \quad (13,6)$$

Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть длинные волны в обширном бассейне, который мы будем считать неограниченным в двух измерениях (вдоль плоскости x, y). Глубину жидкости в бассейне обозначим посредством h . Из трёх компонент скорости малой является теперь компонента v_z . Уравнения Эйлера приобретают вид, аналогичный (13,1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \quad (13,7)$$

Уравнение непрерывности выводится аналогично (13,2) и имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h v_y)}{\partial y} = 0.$$

Глубину h пишем в виде $h = h_0 + \zeta$, где h_0 — равновесная глубина. Тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \quad (13,8)$$

Предположим, что бассейн имеет плоское горизонтальное дно ($h_0 = \text{const.}$). Дифференцируя (13,8) по t и подставляя (13,7), получим:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (13,9)$$

Это есть опять уравнение типа волнового (двухмерного) уравнения; оно соответствует волнам со скоростью распространения, равной

$$U = \sqrt{gh}. \quad (13,10)$$

§ 14. Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Своеобразные гравитационные волны могут распространяться внутри несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с вызываемой наличием поля тяжести неоднородностью жидкости: её давление (а с ним и энтропия s) непременно будет меняться с высотой; поэтому всякое смещение какого-либо участка жидкости по высоте приведёт к нарушению механического равновесия, а потому к возникновению колебательного движения. Действительно, ввиду адиабатичности движения этот участок принесёт с собой в новое место своё значение энтропии s , отличное от её равновесного значения в этом месте.

Мы будем ниже предполагать, что длина распространяющейся в жидкости волны мала по сравнению с расстояниями, на которых поле тяжести вызывает заметное изменение плотности. Самую жидкость мы будем при этом рассматривать как несжимаемую. Это значит, что можно пренебречь изменением её плотности, связанным с изменением давления в волне. Изменением же плотности, связанным с тепловым расширением, отнюдь нельзя пренебречь, так как именно оно определяет собой всё явление.

Выпишем систему гидродинамических уравнений для рассматриваемого движения. Будем отмечать значения величин в состоянии механического равновесия индексом нуль, а малые отклонения от этих значений в волне — штрихом. Тогда уравнение сохранения энтропии $s = s_0 + s'$ напишется с точностью до величин первого порядка малости в виде

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s_0 = 0, \quad (14,1)$$

где s_0 , как и равновесные значения других величин, является заданной функцией вертикальной координаты z .

Далее, в уравнении Эйлера снова пренебрегаем (в силу малости колебаний) членом $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$; учитывая также, что равновесное распределение давления определяется уравнением $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, получим с той же точностью

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho'.$$

Поскольку согласно сказанному выше изменение плотности связано только с изменением энтропии, но не давления, то можно написать:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s',$$

и мы получим уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' - \nabla \frac{p'}{\rho_0}. \quad (14,2)$$

ρ_0 можно ввести под знак градиента, так как изменением равновесной плотности на расстояниях порядка длины волны мы, согласно сказанному выше, всё равно пренебрегаем. По этой же причине можно считать плотность постоянной и в уравнении непрерывности, которое сводится при этом к

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (14,3)$$

Будем искать решение системы уравнений (14,1)—(14,3) в виде плоской волны:

$$\mathbf{v} = \text{const. } e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

и аналогично для s' и p' . Подстановка в уравнение непрерывности (14,3) даёт

$$\mathbf{v}\mathbf{k} = 0, \quad (14,4)$$

т. е. скорость жидкости везде перпендикулярна к волновому вектору (поперечная волна). Уравнения же (14,1) и (14,2) дают

$$i\omega s' = \mathbf{v} \nabla s_0, \quad -i\omega \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' \mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0} p'.$$

Условие $\mathbf{kv} = 0$, применённое ко второму из этих равенств, приводит к соотношению

$$ik^2\rho' = \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'(\mathbf{gk}),$$

и исключая затем из обоих уравнений \mathbf{v} и s' , получим искомое соотношение между волновым вектором и частотой волны

$$\omega^2 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p g \frac{ds}{dz} \sin^2\theta. \quad (14,5)$$

Мы опускаем здесь и ниже индекс нуль у равновесных значений термодинамических величин; ось z направлена вертикально вверх, а θ есть угол между осью z и направлением \mathbf{k} . Положительность выражения (14,5) обеспечивается условием устойчивости равновесного распределения $s(z)$ (условием отсутствия конвекции, см. § 4).

Мы видим, что частота оказывается зависящей только от направления волнового вектора, но не от его величины. При $\theta = 0$ получается $\omega = 0$; это означает, что волны рассматриваемого типа с волновым вектором, направленным вертикально, вообще невозможны.

Если жидкость находится не только в механическом, но и в полном термодинамическом равновесии, то её температура постоянна и можно написать:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

Наконец, воспользовавшись известными термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$$

(c_p — теплоемкость единицы массы жидкости), получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{c_p}} \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \sin\theta. \quad (14,6)$$

В частности, для идеального газа эта формула даёт

$$\omega = \frac{g}{\sqrt{c_p T}} \sin\theta. \quad (14,7)$$

ГЛАВА II

ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 15. Уравнения движения вязкой жидкости

Мы переходим теперь к изучению влияния, которое оказывают на движение жидкости происходящие при движении процессы диссипации энергии. Эти процессы являются выражением всегда имеющей в той или иной степени место термодинамической необратимости движения, связанной с наличием внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности.

Для того чтобы получить уравнения, описывающие движение вязкой жидкости, необходимо ввести дополнительные члены в уравнение движения идеальной жидкости. Что касается уравнения непрерывности, то, как явствует из самого его вывода, оно относится в равной мере к движению всякой жидкости, в том числе и вязкой. Уравнение же Эйлера должно быть изменено.

Мы видели в § 7, что уравнение Эйлера может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса. Поток импульса, определяемый формулой (7,2), представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный просто с механическим передвижением различных участков жидкости из одного места в другое и с действующими в жидкости силами давления. Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса (7,2) дополнительный член σ'_{ik} , определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости. Таким образом, мы будем писать тензор плотности потока импульса в вязкой жидкости в виде

$$\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = - \sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (15,1)$$

Тензор

$$\sigma_{ik} = - \rho \delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (15,2)$$

называют тензором напряжений, а σ'_{ik} — «вязким» тензором напряжений. σ_{ik} определяет ту часть потока импульса, которая не связана с непосредственным переносом импульса вместе с массой передвигающейся жидкости¹⁾.

Установить общий вид тензора σ'_{ik} можно, исходя из следующих соображений. Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому σ'_{ik} должно зависеть от производных от скорости по координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то можно считать, что обусловленный вязкостью перенос импульса зависит только от первых производных от скорости. Самую зависимость σ'_{ik} от производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ можно в том же приближении считать линейной. Не зависящие от $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ члены должны отсутствовать в выражении для σ'_{ik} , поскольку σ'_{ik} должны обратиться в нуль при $\mathbf{v} = \text{const}$. Далее замечаем, что σ'_{ik} должно обращаться в нуль также и в том случае, когда вся жидкость как целое совершает равномерное вращение, поскольку ясно, что при таком движении никакого внутреннего трения в жидкости не происходит. При равномерном вращении с угловой скоростью Ω скорость \mathbf{v} равна векторному произведению $[\Omega \mathbf{r}]$. Линейными комбинациями производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, обращающимися в нуль при $\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]$, являются суммы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Поэтому σ'_{ik} должно содержать именно эти симметричные комбинации производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего этим условиям, является

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik},$$

где a , b не зависят от скорости²⁾. Удобно, однако, писать это выражение в несколько ином виде, введя вместо a , b другие постоянные

1) Мы увидим ниже, что σ'_{ik} содержит член, пропорциональный δ_{ik} , т. е. член такого же вида, как и $p\delta_{ik}$. Поэтому, строго говоря, после такого видоизменения формы тензора потока импульса должно быть уточнено, что именно подразумевается под давлением p . См. об этом конец § 49.

2) В этом утверждении использована изотропия жидкости, вследствие которой её свойства как таковой могут характеризоваться лишь скалярными величинами (в данном случае величинами a и b).

ные. Именно, мы будем писать σ'_{ik} в виде

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (15,3)$$

Выражение, стоящее в скобках в первом члене, обладает тем свойством, что при упрощении (т. е. при суммировании компонент с $i = k$) даёт нуль. Величины η и ζ называются коэффициентами вязкости. Как будет показано в §§ 16, 49, оба они являются величинами положительными:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \quad (15,4)$$

Уравнения движения вязкой жидкости можно теперь получить непосредственно путём прибавления выражения $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ к правой стороне уравнения Эйлера

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (15,5)$$

Это есть наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости. Величины η , ζ являются, вообще говоря, функциями давления и температуры. В общем случае p , T , а потому и η , ζ , не постоянны вдоль всей жидкости, так что η и ζ не могут быть вынесены из-под знака производной.

В большинстве случаев, однако, изменение коэффициентов вязкости вдоль жидкости незначительно, и потому можно считать их постоянными. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Но $\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \text{div } \mathbf{v}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \equiv \Delta v_i$. Поэтому можем написать уравнение движения вязкой жидкости в векторном виде:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}. \quad (15,6)$$

Если жидкость можно считать несжимаемой, то $\text{div } \mathbf{v} = 0$, и последний член справа в (15,6) исчезает. Таким образом, уравнение

движения несжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}. \quad (15,7)$$

Это есть так называемое уравнение Навье-Стокса. Тензор напряжений в несжимаемой жидкости принимает простой вид:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (15,8)$$

Мы видим, что в несжимаемой жидкости вязкость описывается всего одним коэффициентом. Поскольку практически жидкость можно очень часто считать несжимаемой, обычно играет роль именно этот коэффициент вязкости η . Отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (15,9)$$

называют кинематической вязкостью (а о самой η говорят тогда как о динамической вязкости). Приведём значения величин η и ν для некоторых жидкостей и газов (при температуре 20° С) в абсолютных единицах:

	η г/сек · см	ν см ² /сек
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

Упомянем, что динамическая вязкость газов при заданной температуре не зависит от давления. Кинематическая же вязкость соответственно обратно пропорциональна давлению.

Из уравнения Навье-Стокса можно исключить давление таким же способом, как это было сделано раньше с уравнением Эйлера. Именно, применив к обеим сторонам уравнения (15,7) операцию rot, получим (вместо уравнения (2,11) идеальной жидкости):

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] + \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}. \quad (15,10)$$

Необходимо написать ещё граничные условия к уравнениям движения вязкой жидкости. Между поверхностью твёрдого тела и всякой реальной жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что непосредственно прилегающий к твёрдой стенке слой жидкости полностью задерживается, как бы «прилипая» к стенке. Соответственно этому граничные условия к уравнениям движения вязкой жидкости заключаются в требовании обращения в нуль скорости жидкости на неподвижных твёрдых поверхностях:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (15,11)$$

Подчеркнём, что здесь требуется исчезновение как нормальной, так и тангенциальной компонент скорости, между тем как граничные условия к уравнениям идеальной жидкости требуют обращения в нуль только v_n ¹⁾.

В общем случае движущейся поверхности скорость \mathbf{v} должна быть равна скорости этой поверхности.

Легко написать выражение для силы, действующей на соприкасающуюся с жидкостью твёрдую поверхность. Сила, действующая на некоторый элемент поверхности, есть не что иное, как поток импульса через этот элемент. Поток импульса через элемент поверхности df есть

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности, и помня, что на твёрдой поверхности $\mathbf{v} = 0$ ²⁾, находим, что сила \mathbf{P} , действующая на единицу площади поверхности, равна

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \quad (15,12)$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй представляет собой действующую на поверхность силу трения, обусловленную вязкостью. Подчеркнём, что \mathbf{n} в (15,12) есть единичный вектор нормали, внешней по отношению к поверхности жидкости, т. е. внутренней по отношению к твёрдой поверхности.

Если мы имеем границу раздела двух несмешивающихся жидкостей (или жидкости и газа), то условия на этой поверхности гласят, что скорости обеих жидкостей должны быть равны и силы, с которыми они действуют друг на друга, должны быть одинаковы по величине и противоположны по направлению. Второе из этих условий записывается в виде

$$n_k^{(1)} \sigma_{ik}^{(1)} + n_k^{(2)} \sigma_{ik}^{(2)} = 0,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум жидкостям. Векторы нормали $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ имеют взаимно противоположные направления, т. е. $n_i^{(1)} = -n_i^{(2)} = n_i$, так что можно написать:

$$n_i \sigma_{ik}^{(1)} = n_i \sigma_{ik}^{(2)}. \quad (15,13)$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться условие

$$\sigma_{ik} n_k \equiv \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0. \quad (15,14)$$

Приведём для справок выражения для компонент тензора напряжений и уравнения Навье-Стокса в цилиндрических и сферических

1) Отметим, что решениями уравнения Эйлера, вообще говоря, невозможно удовлетворить граничному условию $\mathbf{v} = 0$.

2) При определении действующей на поверхность силы надо рассматривать данный элемент поверхности в системе отсчёта, в которой он покоится. Сила равна просто потоку импульса только при неподвижной поверхности,

координатах. В цилиндрических координатах r, φ, z компоненты тензора напряжений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (15,15)$$

Три компоненты уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0.\end{aligned}\quad (15,16)$$

В сферических координатах r, φ, θ имеем для тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi r} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right),\end{aligned}\quad (15,17)$$

а уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = \\
 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\
 \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right], \\
 \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\
 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial r^2} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\
 \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\
 \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\
 = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\
 + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \right. \\
 \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0.
 \end{aligned} \tag{15,18}$$

Наконец, приведём уравнение, которому должна удовлетворять функция тока $\psi(x, y)$ при двухмерном течении несжимаемой вязкой жидкости. Оно получается подстановкой $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v_z = 0$ в уравнение (15,10):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi = 0. \tag{15,19}$$

§ 16. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, переходящей в конце концов в тепло. Вычисление диссипируемой энергии в особенности просто для несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV.$$

Вычислим производную от этой энергии по времени. Для этого пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

и подставляем для производной $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ её выражение согласно уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} &= -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho (\mathbf{v} \nabla) \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \text{div} (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Здесь посредством $(\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}')$ обозначен вектор с компонентами $v_i \sigma'_{ik}$. Замечая, что в несжимаемой жидкости $\text{div} \mathbf{v} = 0$, можно написать первый член справа в виде дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\text{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (16,1)$$

Выражение, стоящее под знаком div , представляет собой не что иное, как плотность потока энергии в жидкости. Именно, член $\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)$ есть поток энергии, связанный с простым переносом массы жидкости при её движении, совпадающий с потоком энергии в идеальной жидкости (см. (10,5)). Второй же член $(\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}')$ есть поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Действительно, наличие вязкости приводит к появлению потока импульса $\boldsymbol{\sigma}'_{ik}$; перенос же импульса всегда связан с переносом энергии, причём поток энергии получается, очевидно, из потока импульса умножением на скорость.

Если проинтегрировать (16,1) по некоторому объёму V , то получится:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho v^2}{2} dV = - \oint \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}') \right] d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (16,2)$$

Первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости в объёме V благодаря наличию потока энергии через поверхность этого объёма. Второй же член (взятый с обратным знаком)

представляет собой, следовательно, уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией.

Если распространить интегрирование по всему объёму жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (на бесконечности скорость обращается в нуль¹⁾), и мы получим диссипируемую в единицу времени во всей жидкости энергию в виде

$$\dot{E}_{\text{кин}} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV.$$

В несжимаемых жидкостях тензор σ'_{ik} определяется выражением (15,8), так что

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Легко проверить, что это выражение может быть написано в виде

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

Таким образом, находим окончательно для диссипации энергии в несжимаемой жидкости следующую формулу:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (16,3)$$

Диссипация приводит к уменьшению механической энергии, т. е. должно быть $\dot{E}_{\text{кин}} < 0$. С другой стороны, интеграл в (16,3) является величиной всегда положительной. Поэтому мы можем заключить, что коэффициент вязкости η всегда положителен.

ЗАДАЧА

Для потенциального движения преобразовать интеграл (16,3) в интеграл по поверхности, ограничивающей область движения.

Решение. Положив $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ и произведя однократное интегрирование по частям, получим:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 dV = -2\eta \int v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} df_k,$$

или

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\eta \int \nabla v^2 df.$$

¹⁾ Мы рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится.

Здесь и в аналогичных других местах мы для определённости говорим о бесконечном объёме жидкости, что отнюдь не означает какого-либо ограничения общности. Так, для жидкости, заключённой в ограниченном твёрдыми стенками объёме, интеграл по поверхности этого объёма всё равно обратился бы в нуль в силу условия равенства нулю нормальной к стенке компоненты скорости.

§ 17. Течение по трубе

Рассмотрим несколько простейших случаев движения вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоянной скоростью u . Плоскость x, z выберем в одной из них, причём ось x направим по направлению скорости u . Все величины зависят, очевидно, только от координаты y , а скорость жидкости направлена везде по оси x . Из (15,7) имеем для стационарного движения

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0.$$

(Уравнение же непрерывности удовлетворяется тождественно.) Отсюда $p = \text{const.}$, $v = ay + b$. При $y = 0$ и при $y = h$ (h — расстояние между плоскостями) должно быть соответственно $v = 0$ и $v = u$. Отсюда находим:

$$v = \frac{y}{h} u. \quad (17,1)$$

Таким образом, распределение скоростей в жидкости линейно. Средняя скорость жидкости определяется как

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dy$$

и равна

$$\bar{v} = \frac{1}{2} u. \quad (17,2)$$

Из (15,12) находим, что нормальная компонента действующей на плоскости силы равна, как и должно было быть, просто p , а тангенциальная сила трения (на плоскости $y = 0$) равна

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \frac{\eta u}{h} \quad (17,3)$$

(на плоскости $y = h$ она имеет обратный знак).

Далее, рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии градиента давления. Координаты выбираем, как в предыдущем случае; ось x направлена по направлению движения жидкости. Уравнения Навье-Стокса дают (скорость зависит, очевидно, только от координаты y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что давление не зависит от y , т. е. постоянно вдоль толщины слоя жидкости между плоскостями,

Тогда в первом уравнении справа стоит функция только x , а слева — только от y ; такое уравнение может выполняться, только если его левая и правая части являются постоянными величинами. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.},$$

т. е. давление является линейной функцией координаты x вдоль направления потока жидкости. Для скорости же получаем теперь

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий $v = 0$ при $y = 0$ и $y = h$. В результате получаем:

$$v = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left\{ \frac{h^2}{4} - \left(y - \frac{h}{2} \right)^2 \right\}. \quad (17,4)$$

Таким образом, скорость меняется вдоль толщины слоя жидкости по параболическому закону, достигая наибольшей величины посредине слоя. Средняя скорость течения (скорость, усреднённая по толщине

слоя жидкости) определяется опять как $\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dy$; вычисление

даёт

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (17,5)$$

Вычислим еще действующую на неподвижную плоскость силу трения $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0}$. Подстановка (17,4) даёт

$$\sigma_{xy} = -\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (17,6)$$

Наконец, рассмотрим стационарное течение жидкости по трубе произвольного сечения (одинакового вдоль всей длины трубы). Ось трубы выберем в качестве оси x . Очевидно, что скорость v жидкости направлена везде по оси x и является функцией только от y и z . Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а y - и z -компоненты уравнения Навье-Стокса дают опять $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т. е. давление постоянно вдоль сечения трубы. x -компонента уравнения (15,7) даёт

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (17,7)$$

Отсюда опять заключаем, что $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$; градиент давления можно поэтому написать в виде $-\frac{\Delta p}{l}$, где Δp — разность давлений на концах трубы, а l — её длина,

Таким образом, распределение скоростей в потоке жидкости в трубе определяется двухмерным уравнением типа $\Delta v = \text{const}$. Это уравнение должно быть решено при граничном условии $v = 0$ на контуре сечения трубы. Решим это уравнение для трубы кругового сечения. Выбирая начало координат в центре кругового сечения и вводя полярные координаты, имеем в силу симметрии $v = v(r)$. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в полярных координатах, имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{4\eta l}.$$

Интегрируя, находим:

$$v = - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b. \quad (17,8)$$

Постоянную a надо положить равной нулю, поскольку скорость должна оставаться конечной во всём сечении трубы, включая его центр. Постоянную b определяем из требования $v = 0$ при $r = R$ (R — радиус трубы) и получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (17,9)$$

Таким образом, скорость распределена по сечению трубы по параболическому закону.

Легко определить количество (массу) жидкости Q , протекающей в 1 сек. через поперечное сечение трубы (или, как говорят, «расход» жидкости в трубе). Через кольцевой элемент $2\pi r dr$ площади сечения трубы проходит в 1 сек. количество жидкости $\rho \cdot 2\pi r v dr$. Поэтому

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr.$$

С помощью (17,9) получаем:

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l} R^4. \quad (17,10)$$

Количество протекающей жидкости пропорционально, таким образом, четвёртой степени радиуса трубки (формула Пуазейля).

З а д а ч и

1. Определить течение жидкости по трубе с кольцевым сечением (внутренний и внешний радиусы трубы R_1 и R_2).

Решение. Определяя постоянные a и b в общем решении (17,8) из условий $v = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$, находим:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left\{ R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_2} \right\}.$$

Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} \left\{ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\}.$$

2. То же для трубы эллиптического сечения.

Решение. Ищем решение уравнения (17,7) в виде $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Постоянные A, B, C определяем из требования, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению и граничному условию $v = 0$ на контуре сечения (т. е. уравнение $Ay^2 + Bz^2 + C = 0$ должно совпадать с уравнением контура $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, где a, b — полуоси эллипса). В результате получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right).$$

Для количества протекающей жидкости получаем:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{4\nu l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

3. То же для трубы с сечением в виде равностороннего треугольника (сторона треугольника a).

Решение. Обращающееся в нуль на треугольном контуре решение уравнения (17,7) есть

$$v = \frac{\Delta p}{l} \frac{2}{\sqrt{3}a\eta} h_1 h_2 h_3.$$

где h_1, h_2, h_3 — длины трёх высот, опущенных из данной точки треугольника на три его стороны. Действительно, каждое из выражений $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$ (где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$) равно нулю; это видно хотя бы из того, что каждую из высот h_1, h_2, h_3 можно выбрать в качестве одной из координат u или z , а при применении оператора Лапласа к координате получается нуль. Поэтому имеем:

$$\Delta h_1 h_2 h_3 = 2(h_1 \nabla h_2 \nabla h_3 + h_2 \nabla h_1 \nabla h_3 + h_3 \nabla h_1 \nabla h_2).$$

Но $\nabla h_1 = \mathbf{p}_1, \nabla h_2 = \mathbf{p}_2, \nabla h_3 = \mathbf{p}_3$, где $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ — единичные векторы вдоль направлений высот h_1, h_2, h_3 . Каждые два из $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ образуют друг с другом угол $\frac{2\pi}{3}$, так что $\nabla h_1 \nabla h_2 = \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и т. д., и мы получаем соотношение

$$\Delta h_1 h_2 h_3 = -(h_1 + h_2 + h_3) = -\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

с помощью которого убеждаемся в выполнении уравнения (17,7). Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{\sqrt{3} a^4 \Delta p}{320\nu l}.$$

4. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси; определить движение жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси цилиндра. Скорость направлена везде вдоль оси z и зависит (как и давление) только от r :

$$v_z = v(r).$$

Для v получаем уравнение

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

(член $(\nabla \nabla) v = v \frac{\partial v}{\partial z}$ исчезает тождественно). Используя граничные условия $v = u$ при $r = R_1$ и $v = 0$ при $r = R_2$, получаем:

$$v = u \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}.$$

Сила трения, действующая на единицу длины каждого из цилиндров, равна $2\pi\eta u$.

5. Слой жидкости (толщины h) ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклонённой под углом α к горизонту. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием поля тяжести.

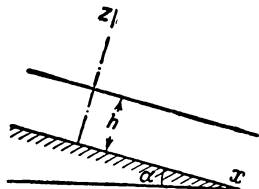


Рис. 6.

Решение. Выбираем неподвижную нижнюю плоскость в качестве плоскости x, y , ось x направлена по направлению течения жидкости, а ось z — перпендикулярно к плоскости x, y (рис. 6). Ищем решение, зависящее только от координаты z . Уравнения Навье-Стокса с $v_x = v(z)$ при наличии поля тяжести гласят:

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha = 0.$$

На свободной поверхности ($z = h$) должны выполняться условия $\sigma_{zz} = -p = -p_0$, $\sigma_{xz} = \eta \frac{dv}{dz} = 0$ (p_0 — атмосферное давление). При $z = 0$ должно быть $v = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot (h - z), \quad v = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z(2h - z).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение слоя (отнесённое к единице длины вдоль оси y), есть $Q = \rho \int_0^h v dz$ и равно

$$Q = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\nu}.$$

6. Определить закон падения давления вдоль трубки кругового сечения, по которой происходит изотермическое течение вязкого идеального газа (иметь в виду, что динамическая вязкость η идеального газа не зависит от его давления).

Решение. В каждом небольшом участке трубки газ можно считать несжимаемым (если только градиент давления не слишком велик) и соответственно этому можно применить формулу (17,10), согласно которой

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi \rho R^4}.$$

На больших расстояниях, однако, ρ будет меняться, и давление не будет линейной функцией от x . Согласно уравнению Клапейрона плотность газа

$\rho = \frac{mp}{kT}$ (m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана), так что

$$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{8\eta QkT}{\pi m R^4} \right) \frac{1}{p}$$

(расход газа Q через всё сечение трубки должен быть, очевидно, одинаковым вне зависимости от того, является ли газ несжимаемым или нет). Отсюда получаем:

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta QkT}{\pi m R^4} l$$

(p_2, p_1 — давления на концах участка трубки длины l).

§ 18. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости, заключённой между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 ; радиусы цилиндров пусть будут R_1 и R_2 , причём $R_2 > R_1$. Выберем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z по оси цилиндров. Из симметрии очевидно, что

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\varphi = v(r); \quad p = p(r).$$

Уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах даёт в рассматриваемом случае два уравнения:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \tag{18,1}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{18,2}$$

Второе из этих уравнений имеет решения типа r^n ; подстановка решения в таком виде даёт $n = \pm 1$, так что

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Постоянные a и b находятся из предельных условий, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра: $v = R_1\Omega_1$ при $r = R_1$, $v = R_2\Omega_2$ при $r = R_2$. В результате получаем распределение скоростей в виде

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^3 - \Omega_1 R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{18,3}$$

Распределение давления получается отсюда согласно (18,1) простым интегрированием.

При $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ получается просто $v = \Omega r$, т. е. жидкость вращается как целое вместе с цилиндрами. При отсутствии внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0$; $R_2 = \infty$) получается

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}.$$

Определим ещё момент действующих на цилиндры сил трения. На единицу поверхности внутреннего цилиндра действует сила трения, направленная по касательной к поверхности и равная согласно (15,12) компоненте $\sigma'_{r\varphi}$ тензора напряжений. С помощью формул (15,15) находим:

$$\sigma'_{r\varphi} \Big|_{r=R_1} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Сила, действующая на поверхность единицы длины цилиндра, получается отсюда умножением на $2\pi R_1$, а момент M_1 этих сил — умножением ещё на R_1 . Таким образом, получаем:

$$M_1 = - \frac{4\pi\eta (\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (18,4)$$

Момент M_2 сил, действующих на внешний цилиндр, равен, очевидно, — M_1 .

Задача о движении вязкой жидкости в пространстве между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами была положена в основу гидродинамической теории смазки *Н. П. Петровым* (1883)¹⁾.

По поводу полученных в этом и предыдущем параграфах решений уравнений движения вязкой жидкости можно сделать следующее общее замечание. Во всех этих случаях нелинейный член $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ тождественно исчезает из уравнений, определяющих распределение скоростей, так что фактически приходится решать линейные уравнения, что крайне облегчает задачу. По этой же причине все эти решения тождественно удовлетворяют также и уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, написанным, например, в виде (10,2), (10,3). С этим связано то обстоятельство, что формулы (17,1) и (18,3) не содержат вовсе коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости содержится только в таких формулах, как (17,9), которые связывают скорость с градиентом давления в жидкости, поскольку самое наличие градиента давления связано с вязкостью жидкости; идеальная жидкость могла бы течь по трубе и при отсутствии градиента давления.

§ 19. Закон подобия

При изучении движения вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин. Рассмотрим какой-нибудь определённый тип движения. Этим типом может быть, например, дви-

¹⁾ Решение более сложной задачи о движении вязкой жидкости в узком пространстве между цилиндрами с параллельными, но эксцентрично расположенными осями, можно найти в книге: *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, стр. 419, Гостехиздат, 1948.*

жение тела определённой формы через жидкость. Если тело не является шаром, то должно быть также указано, в каком направлении оно движется, например, движение эллипсоида в направлении его большой оси или в направлении его малой оси и т. п. Далее, речь может идти о течении жидкости по области, ограниченной стенками определённой формы (по трубе определённого сечения и т. п.).

Телами одинаковой формы мы называем при этом тела геометрически подобные, т. е. такие, которые могут быть получены друг из друга изменением всех линейных размеров в одинаковое число раз. Поэтому если форма тела задана, то для полного определения размеров тела достаточно указать какой-нибудь один из его линейных размеров (радиус шара или цилиндрической трубы, одну из полуосей эллипсоида вращения с заданным эксцентриситетом и т. п.).

Мы будем рассматривать сейчас стационарные движения. Поэтому если речь идёт, например, об обтекании твёрдого тела жидкостью (ниже мы говорим для определённости о таком случае), то скорость натекающего потока жидкости должна быть постоянной. Жидкость мы будем предполагать несжимаемой.

Из параметров, характеризующих самую жидкость, в гидродинамические уравнения (уравнение Навье-Стокса) входит только кинематическая вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$; неизвестными же функциями, которые должны быть определены решением уравнений, являются при этом скорость v и отношение $\frac{p}{\rho}$ давления p к постоянной ρ . Кроме того, течение жидкости зависит посредством граничных условий от формы и размеров движущегося в жидкости тела и от его скорости. Поскольку форма тела считается заданной, то его геометрические свойства определяются всего одним каким-нибудь линейным размером, который мы обозначим посредством l . Скорость же натекающего потока пусть будет u .

Таким образом, каждый тип движения жидкости определяется тремя параметрами: ν , u , l . Эти величины обладают размерностями:

$$[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}, \quad [l] = \text{см}, \quad [u] = \text{см}/\text{сек}.$$

Легко убедиться в том, что из этих величин можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, именно, $\frac{lu}{\nu}$. Эта комбинация называется числом Рейнольдса и обозначается посредством R :

$$R = \frac{\rho ul}{\eta} = \frac{ul}{\nu}. \quad (19,1)$$

Всякий другой безразмерный параметр можно написать в виде функции от R .

Будем измерять длины в единицах l , а скорости — в единицах u , т. е. введём безразмерные величины $\frac{r}{l}$, $\frac{v}{u}$. Поскольку единственным безразмерным параметром является число Рейнольдса, то ясно, что получающееся в результате решения гидродинамических уравнений распределение скоростей определяется функциями вида

$$v = uf\left(\frac{r}{l}, R\right). \quad (19,2)$$

Из этого выражения видно, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости) скорости $\frac{v}{u}$ являются одинаковыми функциями отношения $\frac{r}{l}$, если только числа Рейнольдса для этих течений одинаковы. Течения, которые могут быть получены друг из друга простым изменением масштаба измерения координат и скоростей, называются подобными. Таким образом, течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны (так называемый закон подобия; *О. Рейнольдс*, 1883).

Аналогичную (19,2) формулу можно написать и для распределения давления в жидкости. Для этого надо составить из параметров v , l , u какую-нибудь величину с размерностью давления, делённого на ρ ; в качестве такой величины выберем, например, u^2 . Тогда можно утверждать, что $\frac{p}{\rho u^2}$ будет функцией от безразмерной переменной $\frac{r}{l}$ и безразмерного параметра R . Таким образом,

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{r}{l}, R\right). \quad (19,3)$$

Наконец, аналогичные соображения применимы к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющимся уже функциями координат. Таковой является, например, действующая на обтекаемое тело сила сопротивления F . Именно, можно утверждать, что безразмерное отношение F к составленной из v , u , l , ρ величине размерности силы должно быть функцией только от числа Рейнольдса. В качестве указанной комбинации из v , u , l , ρ можно взять, например, произведение $\rho u^2 l^2$. Тогда

$$F = \rho u^2 l^2 f(R). \quad (19,4)$$

Если влияние силы тяжести на движение является существенным, то движение определяется не тремя, а четырьмя параметрами: l , u , v и ускорением силы тяжести g . Из этих параметров можно составить уже не одну, а две независимые безразмерные комбинации. В качестве их можно, например, выбрать число Рейнольдса и так называемое число Фруда, равное

$$F = \frac{u^2}{lg}. \quad (19,5)$$

В формулах (19,2)—(19,4) функция f будет зависеть теперь не от одного, а от двух параметров (R и F), и течения являются подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Наконец, скажем несколько слов о нестационарных движениях. Нестационарное движение определённого типа характеризуется наряду с величинами ν , u , l ещё значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ , определяющего изменение движения со временем. Так, при колебаниях по определённому закону погружённого в жидкость твёрдого тела определённой формы этим временем может являться период колебаний. Из четырёх величин ν , u , l , τ можно опять составить не одну, а две независимые безразмерные величины, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и число

$$S = \frac{u\tau}{l}, \quad (19,6)$$

называемое иногда числом Струхала. Подобие движений имеет место в таких случаях при равенстве обоих этих чисел.

Если колебания в жидкости возникают самопроизвольно (а не под влиянием заданной внешней вынуждающей силы), то для движения определённого типа число S будет определённой функцией числа R :

$$S = f(R).$$

§ 20. Формула Стокса

Уравнение Навье-Стокса заметно упрощается в случае движений с малым числом Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}.$$

Член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины $\frac{u^2}{l}$, где u и l имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же $\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$ — порядка величины $\frac{\eta u}{\rho l^2}$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при малых числах Рейнольдса членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p = 0. \quad (20,1)$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (20,2)$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (20,3)$$

получающееся применением операции rot к уравнению (20,1).

Рассмотрим в качестве примера прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости. Задача о движении шара, очевидно, вполне эквивалентна задаче об обтекании неподвижного шара потоком жидкости, имеющей на бесконечности заданную скорость \mathbf{u} . Распределение скоростей в первой задаче получается из решения второй задачи просто вычитанием скорости \mathbf{u} ; тогда жидкость на бесконечности оказывается неподвижной, а шар движется со скоростью — \mathbf{u} . Если мы рассматриваем движение как стационарное, то надо, конечно, говорить именно об обтекании жидкостью неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем.

Таким образом, на бесконечности должно быть $\mathbf{v} = \mathbf{u}$; напишем \mathbf{v} в виде $\mathbf{v}' + \mathbf{u}$, так что \mathbf{v}' обращается на бесконечности в нуль. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$, то \mathbf{v}' может быть представлено в виде ротора некоторого вектора: $\mathbf{v}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{u}$. Далее, ротор полярного вектора является, как известно, вектором аксиальным, и обратно. Поскольку скорость является обычным полярным вектором, то вектор \mathbf{A} должен быть аксиальным. С другой стороны, скорость \mathbf{v} , а потому и \mathbf{A} , зависит только от переменного радиус-вектора \mathbf{r} (начало координат выбираем в центре шара) и от параметра \mathbf{u} ; оба эти вектора полярны. Далее, вектор \mathbf{A} должен, очевидно, зависеть от \mathbf{u} линейно. Но единственным таким аксиальным вектором, который можно построить для полностью симметричного тела (шара) из двух полярных векторов, является векторное произведение $[\mathbf{r}\mathbf{u}]$. Поэтому \mathbf{A} должно иметь вид $f'(r)[\mathbf{r}\mathbf{u}]$, где $f'(r)$ — скалярная функция от r , а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиус-вектора. Произведение $f'(r)\mathbf{n}$ можно представить в виде градиента $\nabla f(r)$ от некоторой другой функции $f(r)$, так что общим видом \mathbf{A} является $[\nabla f \cdot \mathbf{u}]$. Поэтому мы можем искать скорость в виде

$$\mathbf{v}' = \operatorname{rot} [\nabla f \cdot \mathbf{u}].$$

Поскольку $\mathbf{u} = \text{const.}$, то можно написать:

$$[\nabla f \cdot \mathbf{u}] = \operatorname{rot} f\mathbf{u},$$

так что

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} f\mathbf{u} + \mathbf{u}. \quad (20,4)$$

Для определения функции f воспользуемся уравнением (20,3). Имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f\mathbf{u} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \operatorname{rot} f\mathbf{u} = -\Delta \operatorname{rot} f\mathbf{u}.$$

Поэтому (20,3) принимает вид

$$\Delta^2 \operatorname{rot} f\mathbf{u} = 0$$

или, помня, что $\mathbf{u} = \text{const.}$:

$$\Delta^2 [\nabla f \cdot \mathbf{u}] = [\Delta^2 \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{u}] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2 \text{grad } f = 0. \quad (20,5)$$

Первое интегрирование даёт

$$\Delta^2 f = \text{const.}$$

Легко видеть, что const. должна быть положена равной нулю. Действительно, скорость \mathbf{v} должна на бесконечности исчезать; тем более, это должно относиться к её производным. Выражение же $\Delta^2 f$ содержит четвёртые производные от f , в то время как сама скорость выражается через вторые производные от f .

Таким образом, имеем:

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + A.$$

Из двух постоянных a и A вторая должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость исчезла на бесконечности. Из $\Delta f = \frac{2a}{r}$ получаем:

$$f = ar + \frac{b}{r}. \quad (20,6)$$

Аддитивная постоянная в f опущена как несущественная (скорость определяется производными от f).

Подстановка в (20,4) даёт после простого вычисления

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3}. \quad (20,7)$$

Постоянные a и b должны быть определены из граничных условий. Именно, на поверхности шара (т. е. при $r = R$) должно быть $\mathbf{v} = 0$:

$$\mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{R} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{R^3} = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном \mathbf{n} , то коэффициенты при \mathbf{u} и при $\mathbf{n}(\mathbf{un})$ должны, каждый в отдельности, исчезать:

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1 = 0, \quad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{3}{4} R, \quad b = \frac{R^3}{4}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$f = \frac{3}{4} Rr + \frac{R^3}{4r}. \quad (20,8)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3}{4} R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u}, \quad (20,9)$$

или в компонентах в сферических координатах

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right], \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right]. \end{aligned} \quad (20,10)$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара. Для определения давления подставляем (20,4) в (20,1):

$$\text{grad } p = \eta \Delta \mathbf{v} = \eta \Delta \text{rot rot } \mathbf{f} \mathbf{u} = \eta \Delta (\text{grad div } \mathbf{f} \mathbf{u} - \mathbf{u} \Delta f).$$

Но $\Delta^2 f = 0$ и потому

$$\text{grad } p = \text{grad } (\eta \Delta \text{div } \mathbf{f} \mathbf{u}) = \text{grad } (\eta \mathbf{u} \text{ grad } \Delta f).$$

Отсюда

$$p = \eta \mathbf{u} \text{ grad } \Delta f + p_0 \quad (20,11)$$

(p_0 — давление жидкости на бесконечности). Подстановка f приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{u} \mathbf{n}}{r^3} R. \quad (20,12)$$

С помощью полученных формул можно вычислить силу \mathbf{F} давления текущей жидкости на шар (или, что то же, силу сопротивления, испытываемую движущимся в жидкости шаром). Для этого введём сферические координаты с полярной осью вдоль скорости \mathbf{u} ; все величины будут в силу симметрии функциями только от r и полярного угла θ . Очевидно, что сила \mathbf{F} направлена по скорости \mathbf{u} . Абсолютная величина этой силы может быть определена с помощью (15,12). Определяя из этой формулы компоненты (по нормали и по касательной к поверхности) силы, приложенной к элементу поверхности шара, и проектируя эти компоненты на направление \mathbf{n} , найдём:

$$F = \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df, \quad (20,13)$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара.

Подставляя выражения (20,10) в формулы

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

(см. (15,17)), найдём, что на поверхности шара

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R} u \sin \theta,$$

а давление (20,12) $p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R} \cos \theta$. Поэтому интеграл (20,13) сводится к выражению

$$F = \frac{3\eta u}{2R} \int df,$$

или окончательно ¹⁾

$$F = 6\pi R\eta u. \quad (20,14)$$

Эта формула (называемая формулой Стокса) определяет силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в жидкости шар. Отметим, что сила сопротивления оказывается пропорциональной первым степеням скорости и линейных размеров тела ²⁾.

Такой характер зависимости сопротивления от скорости и размеров имеет место и для медленно движущихся тел другой формы. Направление силы сопротивления, действующей на тело произвольной формы, не совпадает с направлением скорости; в общем виде зависимость F от u может быть написана как

$$F_i = a_{ik}u_k, \quad (20,15)$$

где a_{ik} — не зависящий от скорости тензор второго ранга. Существенно, что этот тензор — симметрический ($a_{ik} = a_{ki}$); это утверждение (справедливое в линейном по скорости приближении) является частным случаем общего закона, имеющего место для медленных движений, сопровождающихся диссипативными процессами ³⁾.

Полученное нами решение задачи об обтекании оказывается неприменимым на достаточно больших расстояниях от шара, несмотря на малость числа Рейнольдса. Для того чтобы убедиться в этом, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, которым мы пренебрегаем в (20,1). На больших расстояниях скорость равна u . Производные же от скорости на этих расстояниях, как видно из (20,9), — порядка величины $\frac{uR}{r^2}$. Следова-

тельно, $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины $\frac{u^2R}{r^2}$. Оставленные же в уравнении (20,1) члены, например, $\frac{1}{\rho}\nabla p$ — порядка $\frac{\eta Ru}{\rho r^3}$ (согласно (20,12)). Условие

$$\frac{u\eta R}{\rho r^3} \gg \frac{u^2R}{r^2}$$

¹⁾ Имея в виду некоторые дальнейшие применения, укажем, что если производить вычисления, пользуясь выражением (20,7) для скорости с неопределёнными постоянными a и b , то получится

$$F = 8\pi a\eta u. \quad (20,14a)$$

²⁾ Сила сопротивления может быть вычислена и для медленно движущегося произвольного трёхосного эллипсоида. Соответствующие формулы можно найти в книге: Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, § 339. Укажем здесь предельные выражения для плоского круглого диска (радиуса R), движущегося в направлении, перпендикулярном к своей плоскости:

$$F = 16\eta R u,$$

и для такого же диска, движущегося в своей плоскости:

$$F = \frac{32}{3}\eta R u.$$

³⁾ См., например, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, § 114, Гостехиздат, 1951.

выполняется только на расстояниях

$$r \ll \frac{\nu}{u},$$

где $\nu = \eta/\rho$. На больших расстояниях сделанные пренебрежения оказываются незаконными и полученное распределение скоростей неправильным.

Для получения распределения скоростей на больших расстояниях от обтекаемого тела следует учесть отброшенный в (20,1) член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Поскольку на больших расстояниях скорость \mathbf{v} мало отличается от \mathbf{u} , то можно написать приближённо $(\mathbf{u}\nabla)$ вместо $(\mathbf{v}\nabla)$. Тогда мы получим для скорости на больших расстояниях линейное уравнение

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \quad (20,16)$$

(Осеен, 1910).

Мы не станем приводить здесь решение этого уравнения для обтекания шара¹⁾. Укажем лишь, что с помощью получаемого таким образом распределения скоростей можно вывести уточнённую формулу для испытываемой шаром силы сопротивления (следующий член разложения этой силы по числу Рейнольдса $\frac{uR}{\nu}$). Эта формула гласит²⁾:

$$F = 6\pi\eta uR \left(1 + \frac{3Ru}{8\nu}\right). \quad (20,17)$$

Наконец, упомянем, что при решении задачи об обтекании бесконечного цилиндра жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении, необходимо с самого начала решать уравнение Осеена (уравнение же (20,1) в этом случае вовсе не обладает решением, удовлетворяющим граничным условиям на поверхности тела и одновременно обращающимся в нуль на бесконечности). Отнесённая к единице длины цилиндра сила сопротивления оказывается равной

$$F = \frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - C - \ln \frac{Ru}{4\nu}}, \quad (20,18)$$

где $C = 0,577\dots$ — число Эйлера.

1) Подробное проведение вычислений для шара и для цилиндра можно найти в книге: Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, 3-е изд., 1948, §§ 25, 26.

2) На первый взгляд может показаться, что уравнение Осеена, не дающее правильного уточнения распределения скоростей на близких расстояниях, не может послужить для правильного вычисления поправочного члена в силе сопротивления. В действительности, однако, надо учесть следующее обстоятельство. Вклад в силу F , связанный с движением жидкости на близких расстояниях (для которых $u \ll \nu/r$), должен разлагаться по степеням вектора \mathbf{u} . Поэтому первый входящий от этого вклада, отличный от нуля поправочный член в F будет пропорционален вектору $\mathbf{u}u^2$, т. е. даёт поправку второго порядка по числу Рейнольдса и, таким образом, не отразится на поправке первого порядка в формуле (20,17). Вычисление же следующих поправок к формуле Стокса с помощью уравнения Осеена невозможно,

ЗАДАЧИ

1. Определить движение жидкости, заполняющей пространство между двумя концентрическими сферами (радиусов R_1 и R_2 ; $R_2 > R_1$), равномерно вращающимися вокруг различных диаметров с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (числа Рейнольдса $\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$ и $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\nu}$ малы по сравнению с единицей).

Решение. В силу линейности уравнений движение между двумя вращающимися сферами можно рассматривать как наложение двух движений, имеющих место, если одна из сфер покоится, а другая вращается. Положим сначала $\Omega_2 = 0$, т. е. вращается только внутренняя сфера. Естественно ожидать, что скорость жидкости в каждой точке будет направлена по касательной к окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Но в силу аксиальной симметрии относительно оси вращения давление не может иметь градиента в этом направлении. Поэтому уравнение движения (20,1) приобретает вид

$$\Delta \mathbf{v} = 0.$$

Вектор угловой скорости Ω_1 является аксиальным вектором. Рассуждения, аналогичные произведённым в тексте, показывают, что можно искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \text{rot } \Omega_1 f(r) = [\nabla f \cdot \Omega_1].$$

Уравнение движения даёт тогда $[\text{grad } \Delta f \cdot \Omega_1] = 0$; поскольку вектор $\text{grad } \Delta f$ направлен по радиус-вектору, а произведение $[\mathbf{r} \Omega_1]$ не может быть равно нулю при заданном Ω_1 и произвольном \mathbf{r} , то должно быть $\text{grad } \Delta f = 0$, так что

$$\Delta f = \text{const.}$$

Интегрируя, получаем:

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a \right) [\Omega_1 \mathbf{r}].$$

Постоянные a и b определяются из условий $\mathbf{v} = 0$ при $r = R_2$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R_1$, где $\mathbf{u} = [\Omega_1 \mathbf{r}]$ есть скорость точек вращающейся сферы. В результате получим:

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) [\Omega_1 \mathbf{r}].$$

Давление в жидкости остаётся постоянным ($p = p_0$). Аналогично получается для случая, когда вращается внешний шар, а внутренний покоится ($\Omega_1 = 0$):

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) [\Omega_2 \mathbf{r}].$$

В общем случае вращения обеих сфер имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) [\Omega_1 \mathbf{r}] + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) [\Omega_2 \mathbf{r}] \right\}.$$

Если внешний шар вообще отсутствует ($R_2 = \infty$, $\Omega_2 = 0$), т. е. мы имеем просто шар радиуса R , вращающийся в неограниченной жидкости, то

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{r^3} [\Omega \mathbf{r}].$$

Вычислим момент сил трения, действующих на шар в этом случае. Если выбрать сферические координаты с полярной осью по Ω , то $v_r = v_\theta = 0$, $v_\varphi = v = \frac{R^3 \Omega}{r^2} \sin \theta$. Действующая на единицу поверхности шара сила трения равна

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R} = -3\eta \Omega \sin \theta.$$

Полный действующий на шар момент сил трения есть

$$M = \int_0^\pi \sigma'_{r\varphi} R \sin \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \, d\theta,$$

откуда

$$M = -8\pi\eta R^3 \Omega.$$

Если отсутствует внутренний шар, то $\mathbf{v} = [\Omega_2 \mathbf{r}]$, т. е. жидкость просто вращается как целое вместе со сферой, внутри которой она находится.

2. Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью η'), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью η (Рибчинский, 1911).

Решение. Пользуемся системой координат, в которой капля покоится. Для жидкости снаружи капли ищем решение уравнения (20,5) опять в виде (20,6), так что скорость имеет вид (20,7). Для жидкости же внутри капли надо искать решение, не обладающее особой точкой при $r=0$ (причём должны оставаться конечными также и вторые производные от f , определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4} r^2 + \frac{B}{8} r^4,$$

чему соответствует скорость

$$\mathbf{v} = -Au + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{un}) - 2\mathbf{u}].$$

На поверхности шара ¹⁾ должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости вещества вне ($\mathbf{v}^{(e)}$) и внутри ($\mathbf{v}^{(i)}$) капли должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

¹⁾ Изменение формы капли при её движении можно не рассматривать, так как оно представляет собой эффект высшего порядка малости.

Следует, однако, иметь в виду, что, для того чтобы движущаяся капля фактически была шарообразной, силы поверхностного натяжения на её границе должны превышать силы, происходящие от неравномерности давления и стремящиеся нарушить шаровую форму. Это значит, что должно быть $\frac{\eta u}{R} \ll \frac{\alpha}{R}$ (α — коэффициент поверхностного натяжения), или, подставляя $u \sim R^2 g \rho / \eta$:

$$R \ll \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}.$$

то же самое должно иметь место для компоненты $\sigma_{r\theta}$ тензора напряжений:

$$\sigma_{r\theta}^{(z)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент σ_{rr} тензора напряжений можно не писать — оно определило бы собой искомую скорость u , которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырёх условий получаем четыре уравнения для постоянных a , b , A , B , решение которых даёт

$$a = R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3 \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (20,14а):

$$F = 2\pi u \eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}.$$

При $\eta' \rightarrow \infty$ (что соответствует твёрдому шару) эта формула переходит в формулу Стокса. В предельном же случае $\eta' \rightarrow 0$ (газовый пузырёк) получается $F = 4\pi u \eta R$, т. е. сила сопротивления составляет $2/3$ от сопротивления твёрдому шару.

Приравняв F действующей на каплю силе тяжести $\frac{4\pi}{3} R^3 (\rho - \rho') g$, найдём:

$$u = \frac{2R^2 g (\rho - \rho') (\eta + \eta')}{3\eta (2\eta + 3\eta')}.$$

3. Две параллельные плоские круглые пластинки (радиуса R) расположены одна над другой на малом расстоянии друг от друга; пространство между ними заполнено жидкостью. Пластинки сближаются друг с другом с постоянной скоростью u , вытесняя жидкость. Определить испытываемое пластинками сопротивление (*О. Рейнольдс*).

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с началом в центре нижней пластинки (которую полагаем неподвижной). Движение жидкости осесимметрично, а ввиду тонкости слоя жидкости в основном радиально ($v_z \ll v_r$), причём $\frac{\partial v_r}{\partial r} \ll \frac{\partial v_r}{\partial z}$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad v_r = v_z = 0, \\ \text{при } z = h: \quad v_r = 0, \quad v_z = -u, \\ \text{при } r = R: \quad p = p_0 \end{aligned}$$

(h — расстояние между пластинками, p_0 — внешнее давление). Из уравнений (1) находим:

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} z (z - h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по dz , получим:

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right),$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3} (R^2 - r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая на пластинку, равна

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

§ 21. Ламинарный след

При стационарном обтекании твёрдого тела вязкой жидкостью движение жидкости на больших расстояниях позади тела обладает своеобразным характером, который может быть исследован в общем виде вне зависимости от формы тела.

Обозначим через U постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление U выберем в качестве оси x с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $U + v$; на бесконечности v обращается в нуль.

Оказывается, что на больших расстояниях позади тела скорость v заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x . В эту область, называемую ламинарным следом¹⁾, попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе является существенно вихревым. На линиях же тока, проходящих достаточно далеко от тела, влияние вязкости незначительно на всём их протяжении, и потому ротор скорости на них (равный нулю в натекающем из бесконечности потоке) остаётся практически равным нулю, как это было бы в идеальной жидкости. Таким образом, на больших расстояниях от тела движение жидкости можно считать потенциальным везде, за исключением лишь области следа.

Выведем формулы, связывающие свойства движения жидкости в следе с действующими на обтекаемое тело силами.

Полный поток импульса, переносимого жидкостью через какую-нибудь замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемое тело, равен взятому по этой поверхности интегралу от тензора потока импульса:

$$\oint \Pi_{ik} df_k.$$

1) В отличие от турбулентного следа — см. § 36.

Компоненты тензора Π_{ik} равны:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k).$$

Напишем давление в виде $p = p_0 + p'$, где p_0 — давление на бесконечности. Интегрирование постоянного члена $p_0\delta_{ik} + U_iU_k$ даст в результате нуль, поскольку для замкнутой поверхности векторный интеграл $\oint df = 0$. Обращается в нуль также и интеграл $U_i \int \rho v_k df_k$: поскольку полное количество жидкости в рассматриваемом объёме остаётся неизменным, полный поток жидкости $\int \rho v df$ через охватывающую его поверхность должен исчезать. Наконец, вдали от тела скорость v мала по сравнению с U . Поэтому если рассматриваемая поверхность расположена достаточно далеко от тела, то на ней можно пренебречь в Π_{ik} членом $\rho v_i v_k$ по сравнению с $\rho U_k v_i$. Таким образом, полный поток импульса будет равен интегралу

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k.$$

Выберем теперь в качестве рассматриваемого объёма жидкости объём между двумя бесконечными плоскостями $x = \text{const.}$, из которых одна взята достаточно далеко впереди, а другая — позади тела. При определении полного потока импульса интеграл по бесконечно удалённой «боковой» поверхности исчезает (так как на бесконечности $p' = 0$, $v = 0$), и поэтому достаточно интегрировать только по обеим поперечным плоскостям. Получающийся таким образом поток импульса представляет собой, очевидно, разность между полным потоком импульса, «втекающим» через переднее, и потоком, «вытекающим» через заднее сечение. Но эта разность является в то же время количеством импульса, передаваемым в единицу времени от жидкости к телу, т. е. силой F , действующей на обтекаемое тело.

Таким образом, компоненты силы F равны разностям

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x) dy dz, \quad F_y = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_y dy dz,$$

$$F_z = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_z dy dz,$$

где интегрирование производится по бесконечным плоскостям $x = x_1$ (значительно позади) и $x = x_2$ (значительно впереди тела). Рассмотрим сначала первую из этих величин.

Вне следа движение потенциально, и потому справедливо уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} (U + v)^2 = \text{const.} \equiv p_0 + \frac{\rho}{2} U^2,$$

или, пренебрегая членом $\frac{\rho v^2}{2}$ по сравнению с ρUv ,

$$p' = -\rho U v_x.$$

Мы видим, что в этом приближении подинтегральное выражение в F_x обращается в нуль во всей области вне следа. Другими словами, интеграл по плоскости $x = x_2$ (проходящей впереди тела и не пересекающей след вовсе) исчезает полностью, а в интеграле по задней плоскости $x = x_1$ надо интегрировать лишь по площади сечения следа. Но внутри следа изменение давления p' — порядка величины ρv^2 , т. е. мало по сравнению с ρUv_x . Таким образом, приходим к окончательному результату, что сила сопротивления, действующая на тело в направлении обтекания, равна

$$F_x = -\rho U \iint v_x dy dz, \quad (21,1)$$

где интегрирование производится по площади поперечного сечения следа вдали от тела. Скорость v_x в следе, разумеется, отрицательна — жидкость движется здесь медленнее, чем она двигалась бы при отсутствии тела. Обратим внимание на то, что стоящий в (21,1) интеграл определяет «дефицит» расхода жидкости через сечение следа по сравнению с расходом при отсутствии тела.

Рассмотрим теперь силу (с компонентами F_y, F_z), стремящуюся сдвинуть тело в поперечном направлении. Эта сила называется подъемной. Вне следа, где движение потенциально, можно написать $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$; интеграл по проходящей везде вне следа плоскости $x = x_2$ обращается в нуль:

$$\iint v_y dy dz = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy dz = 0, \quad \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy dz = 0,$$

поскольку на бесконечности $\varphi = 0$. Таким образом, для подъемной силы получаем выражение

$$F_y = -\rho U \iint v_y dy dz, \quad F_z = -\rho U \iint v_z dy dz. \quad (21,2)$$

Интегрирование в этих формулах фактически тоже производится лишь по площади сечения следа. Если обтекаемое тело обладает осью симметрии (не обязательно полной аксиальной симметрии) и обтекание происходит вдоль направления этой оси, то осью симметрии обладает и движение жидкости вокруг тела. В этом случае подъемная сила, очевидно, отсутствует.

Вернёмся снова к движению жидкости в следе. Оценка различных членов в уравнении Навье-Стокса показывает, что членом $v \Delta v$ можно, вообще говоря, пренебречь на расстояниях r от тела, удовлетворяющих условию $rU/v \gg 1$ (ср. вывод обратного условия в начале § 20); это и есть те расстояния, на которых движение жидкости (вне следа)

можно считать потенциальным. Однако такое пренебрежение недопустимо даже на этих расстояниях в области внутри следа, поскольку здесь поперечные производные $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ велики по сравнению с продольной производной $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

В уравнении Навье-Стокса член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет для движения в следе порядок величины $(U+v)\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{Uv}{x}$. Член же $v\Delta v$ — порядка $v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{v^3}{Y^2}$, где Y обозначает порядок величины ширины следа, т. е. порядок величины расстояний от оси x , на которых скорость v заметно падает. Сравнивая обе эти величины, найдём:

$$Y \sim \sqrt{\frac{vx}{U}}. \quad (21,3)$$

Эта величина, действительно, мала по сравнению с x ввиду предположенного условия $Ux/v \gg 1$. Таким образом, ширина ламинарного следа увеличивается пропорционально квадратному корню из расстояния от тела.

Чтобы определить закон убывания скорости в следе с увеличением x , обратимся к формуле (21,1). Область интегрирования в этой формуле — порядка величины Y^2 . Поэтому оценка интеграла даст $F_x \sim \rho U v Y^2$, и, используя соотношение (21,3), получим искомый закон:

$$v \sim \frac{F_x}{\rho vx}. \quad (21,4)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить движение жидкости в ламинарном следе (при наличии как силы сопротивления, так и подъёмной силы).

Решение. Написав в уравнении Навье-Стокса скорость в виде $U+v$ и опуская (вдали от тела) квадратичные по v члены, получаем:

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = -\nabla \frac{p}{\rho} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

(мы пренебрегли также в Δv членом $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$). Ищем решение в виде $v = v_1 + v_2$, где v_1 есть решение уравнения

$$U \frac{\partial v_1}{\partial x} = v \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right).$$

Величину же v_2 , связанную с наличием члена $-\nabla \frac{p}{\rho}$ в исходном уравнении, можно искать в виде градиента $\nabla \Phi$ от некоторого скаляра. Поскольку вдали от тела производные по x малы по сравнению с производными по y и z , в рассматриваемом приближении в v_x надо пренебречь членом $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, т. е. считать $v_x = v_{1x}$.

Таким образом, для v_x имеем уравнение

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение формально совпадает с двумерным уравнением теплопроводности, причём роль времени играет x/U , а роль коэффициента температуропроводности — вязкость ν . Решение, убывающее с возрастанием y и z (при заданном x), а в пределе при $x \rightarrow 0$ приводящее к бесконечно малой ширине следа (в рассматриваемом приближении расстояния порядка размеров тела считаются малыми), есть (см. § 51):

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{x} e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}}. \quad (1)$$

Постоянный коэффициент в этой формуле выражен через силу сопротивления с помощью формулы (21,1), в которой ввиду быстрого убывания v_x можно распространить интегрирование по $dy dz$ до $\pm\infty$. Если ввести вместо декартовых координат сферические r, θ , φ с полярной осью по оси x , то области следа ($\sqrt{y^2+z^2} \ll x$) будут соответствовать значениям полярного угла $\theta \ll 1$. Формула (1) в этих координатах примет вид

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{r} e^{-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}}. \quad (1')$$

Опущенный нами член $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ (с Φ из получаемой ниже формулы (3)) дал бы в v_x член, более быстро убывающий с r (как $1/r^2$).

Такой же вид, как (1), должны иметь также и v_{1y}, v_{1z} . Выберем направление подъёмной силы в качестве оси y (так что $F_z=0$). Согласно (21,2) и замечая, что на бесконечности $\Phi=0$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int v_y dy dz = \int \int \left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) dy dz = \int \int v_{1y} dy dz = -\frac{F_y}{\rho U};$$

$$\int \int v_{1z} dy dz = 0.$$

Определяя из этих условий const. в v_{1y}, v_{1z} , получаем:

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{x} e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2+z^2}{x}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (2)$$

Для определения функции Φ поступаем следующим образом. Согласно уравнению непрерывности $\operatorname{div} v \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$; подставляя (2), получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = -\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Продифференцировав это равенство по x и воспользовавшись уравнением, которому удовлетворяет v_{1y} , получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) = -\frac{\nu}{U} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Наконец, подставляя выражение для v_{1y} и интегрируя по x , получаем окончательно:

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U} \frac{y}{y^2 + z^2} \left[e^{-\frac{U}{4\nu} \frac{y^2 + z^2}{x}} - 1 \right] \quad (3)$$

(постоянная интегрирования выбрана так, чтобы Φ оставалось конечным при $y = z = 0$). В сферических координатах (с азимутом φ , отсчитываемым от плоскости x, y):

$$\Phi = -\frac{F_y \cos \varphi}{2\pi\rho U} \frac{1}{r\theta} \left[e^{-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}} - 1 \right]. \quad (3')$$

Из (2) — (3) видно, что v_y и v_z содержат в отличие от v_x наряду с членами, экспоненциально падающими с θ (при заданном r), также и члены, значительно медленнее убывающие при удалении от «оси» следа (как $1/\theta^2$).

Качественные результаты (21,3) — (21,4) находятся, как и должно было быть, в согласии с этими формулами. Если подъёмная сила отсутствует, то движение жидкости в следе осесимметрично.

2. Определить движение жидкости вдали от тела вне следа.

Решение. Вне следа движение считаем потенциальным. Интересуясь лишь наименее быстро убывающими с расстоянием членами в потенциале Φ , ищем решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi = 0$ в виде суммы двух членов:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos \varphi}{r} f(\theta),$$

из которых первый центрально-симметричен и связан с силой F_x , а второй — симметричен относительно плоскости x, y и связан с силой F_y .

Воспользовавшись выражением для $\Delta\Phi$ в сферических координатах, получим для функции $f(\theta)$ уравнение

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{f}{\sin \theta} = 0.$$

Решение этого уравнения, конечное при $\theta \rightarrow \pi$, есть

$$f = b \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Коэффициент b должен быть определён так, чтобы дать правильное значение F_y . Проще, однако, воспользоваться тем, что в области $\sqrt{\nu/U}r \ll \theta \ll 1$ эта часть Φ должна совпадать с выражением

$$\Phi = \frac{F_y \cos \varphi}{2\pi\rho U} \frac{1}{r\theta},$$

получаемым из формулы (3') для Φ в следе. Отсюда

$$b = \frac{F_y}{4\pi\rho U}.$$

Для определения коэффициента a замечаем, что полный поток жидкости через сферу S большого радиуса r (как и через всякую замкнутую

поверхность) должен быть равен нулю. Но через часть S_0 этой сферы, являющуюся площадью сечения следа, вытекает количество жидкости

$$- \int_{S_0} \int v_x dy dz = \frac{F_x}{\rho U}.$$

Поэтому через всю остальную площадь сферы должно вытекать столько же жидкости, т. е. должно быть $\int_{S-S_0} \mathbf{v} df = \frac{F_x}{\rho U}$. В силу малости S_0 по сравнению со всей площадью S , можно заменить это условие требованием

$$\int_S \mathbf{v} df = \int_S \nabla \Phi df = -4\pi a = \frac{F_x}{\rho U},$$

откуда $a = -F_x/4\pi\rho U$.

Полное решение задачи дается суммой обоих полученных выражений:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho Ur} \left(-F_x + F_y \cos \varphi \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right), \quad (1)$$

чем и определяется движение во всей области вне следа (вдали от тела). Потенциал убывает с расстоянием как $1/r$; соответственно скорость \mathbf{v} убывает как $1/r^2$. Если подъёмная сила отсутствует, то движение вне следа сферически симметрично.

§ 22. Вязкость суспензий

Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твёрдых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью η , отличной от вязкости η_0 основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объём всех частиц предполагается малым по сравнению с объёмом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (А. Эйнштейн, 1906).

В качестве вспомогательной задачи необходимо предварительно рассмотреть влияние, которое оказывает один погружённый в жидкость твёрдый шарик на течение, обладающее постоянным градиентом скорости. Пусть невозмущённое шариком течение описывается линейным распределением скоростей

$$v_i^{(0)} = \alpha_{ik} x_k, \quad (22,1)$$

где α_{ik} — постоянный симметрический тензор. Давление в жидкости при этом постоянно: $p^{(0)} = \text{const.}$; условимся в дальнейшем отсчитывать давление от этого постоянного значения. В силу несжимаемости жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{v}^{(0)} = 0$) тензор α_{ik} должен иметь равную нулю сумму диагональных членов:

$$\alpha_{ii} = 0. \quad (22,2)$$

Пусть теперь в начало координат помещён шарик радиуса R . Скорость изменённого им течения обозначим посредством $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$; на бесконечности $\mathbf{v}^{(1)}$ должно обращаться в нуль, но вблизи шарика $\mathbf{v}^{(1)}$ отнюдь не мало по сравнению с $\mathbf{v}^{(0)}$. Из симметрии течения ясно, что шарик останется неподвижным, так что граничное условие гласит: $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$.

Искомое решение уравнений движения (20,1)—(20,3) может быть получено непосредственно из найденного в § 20 решения (20,4) (с функцией f из (20,6)), если заметить, что производные от последнего по координатам тоже являются решениями. В данном случае мы ищем решение, зависящее как от параметров от компонент тензора α_{ik} (а не от вектора \mathbf{u} , как в § 20). Таковым является

$$\mathbf{v}^{(1)} = \text{rot rot} (\alpha \nabla f) \quad p = \eta_0 \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_i \partial x_k},$$

где $(\alpha \nabla f)$ обозначает вектор с компонентами $\alpha_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Раскрывая эти выражения и выбирая постоянные a и b в функции $f = ar + \frac{b}{r}$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности шарика, мы получим в результате следующие формулы для скорости и давления:

$$v_i^{(1)} = \frac{5}{2} \left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2} \right) \alpha_{ki} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4} \alpha_{ik} n_k, \quad (22,3)$$

$$p = -5\eta_0 \frac{R^5}{r^3} \alpha_{ik} n_i n_k \quad (22,4)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиус-вектора).

Переходя теперь к самому вопросу об определении эффективной вязкости суспензии, вычислим среднее (по всему объёму) значение тензора плотности потока импульса Π_{ik} , совпадающего в линейном по скорости приближении с тензором напряжений — σ_{ik} :

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V} \int \sigma_{ik} dV.$$

Интегрирование можно производить здесь по объёму V сферы большого радиуса, который затем устремляем к бесконечности.

Прежде всего пишем тождественно:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ik} = \eta_0 \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) - \bar{p} \delta_{ik} + \\ + \frac{1}{V} \int \left\{ \sigma_{ik} - \eta_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + p \delta_{ik} \right\} dV. \end{aligned} \quad (22,5)$$

В стоящем здесь интеграле подинтегральное выражение отлично от нуля лишь внутри твёрдых шариков; ввиду предполагаемой малости концентрации суспензии его можно вычислять для одного отдельного шарика, как если бы других вообще не было, после чего результат должен быть умножен на концентрацию c суспензии (число шариков

в единице объёма). Непосредственное вычисление такого интеграла требовало бы исследования внутренних напряжений в шариках. Можно, однако, обойти это затруднение путём преобразования интеграла по объёму в интеграл по поверхности бесконечно удалённой сферы, проходящей только через жидкость. Для этого замечаем, что ввиду уравнений движения $\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} = 0$ имеет место тождество

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_{lk});$$

поэтому преобразование объёмного интеграла в поверхностный даёт

$$\sigma_{ik} = \eta_0 \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) + c \oint \{ \sigma_{il} x_{lk} df_l - \eta_0 (v_i df_k + v_k df_i) \}.$$

Член с \bar{p} мы опустили, имея в виду, что среднее давление непременно обращается в нуль (действительно, это есть скаляр, который должен определяться линейной комбинацией компонент тензора α_{ik} ; но единственный такой скаляр $\alpha_{ii} = 0$).

При вычислении интеграла по сфере очень большого радиуса в выражении (22,3) для скорости следует, конечно, сохранить лишь члены $\sim 1/r^2$. Простое вычисление даёт для этого интеграла

$$c \eta_0 \cdot 20\pi R^3 \{ 5 \overline{\alpha_{im} n_i n_k n_l n_m} - \overline{\alpha_{il} n_k n_l} \},$$

где черта обозначает усреднение по направлениям единичного вектора n . Производя усреднение ¹⁾, получим окончательно

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0 \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) + 5\eta_0 \alpha_{ik} \frac{4\pi R^3}{3} c. \quad (22,6)$$

Отношение второго члена к первому определяет искомую относительную поправку в эффективной вязкости суспензии. Интересуясь поправками лишь первого порядка малости, можно положить первый член равным $2\eta_0 \alpha_{ik}$. В результате получаем следующую формулу для эффективной вязкости суспензии:

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{5}{2} \varphi \right), \quad (22,7)$$

где $\varphi = \frac{4\pi R^3}{3} c$ обозначает малое отношение суммарного объёма всех шариков к полному объёму суспензии.

¹⁾ Искомые средние значения произведений компонент единичного вектора представляют собой симметричные тензоры, которые могут быть составлены только из единичных тензоров δ_{ik} . Имея это в виду, легко найти, что

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik},$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

§ 23. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

Если нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не исчезают тождественно, решение этих уравнений представляет большие трудности, и точные решения могут быть получены лишь в очень небольшом числе случаев. Больше того, вплоть до настоящего времени никому не удалось произвести полное исследование характера стационарного движения вязкой жидкости во всём пространстве вокруг обтекаемого ею тела в предельном случае очень больших чисел Рейнольдса. Хотя фактически такое обтекание, как мы увидим ниже, никогда не бывает стационарным, тем не менее, решение этого вопроса представляло бы значительный методический интерес¹⁾.

Ниже приводятся примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости.

1. Бесконечный плоский диск, погружённый в вязкую жидкость, равномерно вращается вокруг своей оси. Требуется определить движение жидкости, приводимой в движение диском (*Т. Карман, 1921*). Выбираем плоскость диска в качестве плоскости $z = 0$ цилиндрических координат. Диск вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω . Рассматриваем неограниченную жидкость с той стороны диска, где $z > 0$. Предельные условия гласят:

$$\begin{aligned} v_r &= 0, & v_\varphi &= \Omega r, & v_z &= 0 & \text{при } z = 0, \\ v_r &= 0, & v_\varphi &= 0 & & & \text{при } z = \infty. \end{aligned}$$

Аксиальная скорость v_z не исчезает при $z \rightarrow \infty$, а стремится к постоянному отрицательному пределу, определяющему из самих уравнений движения. Дело в том, что, поскольку жидкость движется радиально по направлению от оси вращения, в особенности вблизи диска, для обеспечения непрерывности в жидкости должен существовать постоянный вертикальный поток по направлению из бесконечности к диску. Решение уравнений движения ищем в виде

$$\begin{aligned} v_r &= r\Omega F(z_1); & v_\varphi &= r\Omega G(z_1); & v_z &= \sqrt{\nu\Omega} H(z_1); \\ p &= -\rho\nu\Omega P(z_1), & \text{где } z_1 &= \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z. \end{aligned} \quad (23,1)$$

В этом распределении радиальная и круговая скорости пропорциональны расстоянию от оси вращения диска, а вертикальная скорость v_z постоянна вдоль каждой горизонтальной плоскости.

¹⁾ Посвящённая этому вопросу так называемая «теория исчезающей вязкости» Осеена не является удовлетворительной, так как исходит из необоснованного упрощения уравнений Навье-Стокса. Теория же пограничного слоя Прандтля (см. § 39) не даёт ответа на поставленный вопрос для всего объёма жидкости.

Подстановка в уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности приводит к следующим уравнениям для функций F , G , H , P :

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F'' & 2FG + G'H &= G'', \\ HH' &= P' + H'', & 2F + H' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23,2)$$

(штрих означает дифференцирование по z_1) с предельными условиями:

$$\left. \begin{aligned} F=0, \quad G=1, \quad H=0 &\text{ при } z_1=0, \\ F=0, \quad G=0 &\text{ при } z_1=\infty. \end{aligned} \right\} \quad (23,3)$$

Мы свели, таким образом, решение задачи к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной переменной,

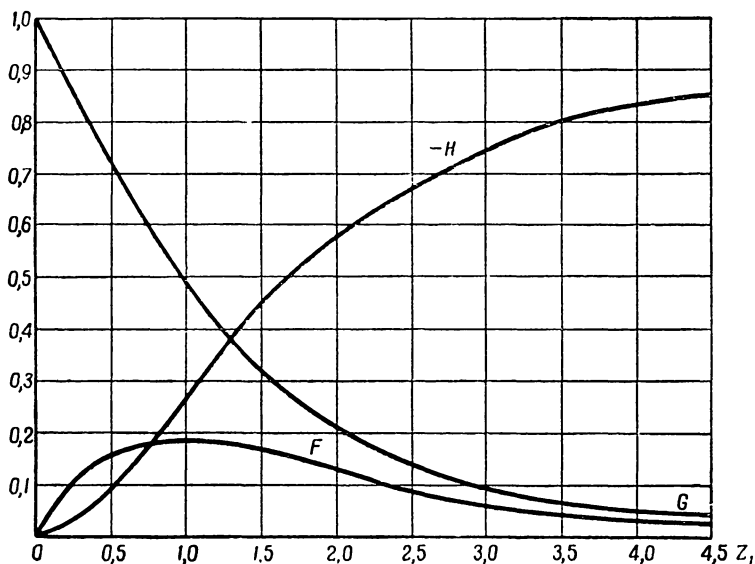


Рис. 7.

которое может быть произведено численным образом¹⁾. На рис. 7 изображены полученные таким способом графики функций F , G , $-H$. Предельное значение функции H при $z_1 \rightarrow \infty$ равно $-0,886$; другими словами, скорость потока жидкости, текущего из бесконечности к диску, равна

$$v_z(\infty) = -0,886 \sqrt{\nu \Omega}.$$

¹⁾ Численное интегрирование было произведено также для другой аналогичной задачи, в которой жидкость на бесконечности обладает собственным равномерным вращением, а диск покоится (Bödewadt, ZAMM, 20, 241, 1940).

Сила трения, действующая на единицу поверхности диска по направлению, перпендикулярному к его радиусу, есть $\sigma_{z\varphi} = \eta \left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right|_{z=0}$. Пренебрегая эффектами от краёв диска, можно написать для диска большого, но конечного радиуса R момент действующих на него сил трения в виде

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr = \pi R^4 \rho \sqrt{\nu \Omega^3} G'(0)$$

(множитель 2 перед интегралом учитывает наличие у диска двух сторон, омываемых жидкостью). Численное вычисление функции G приводит к формуле

$$M = -1,94 \cdot R^4 \rho \sqrt{\nu \Omega^3}. \quad (23,4)$$

2. Требуется определить стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклонёнными друг к другу под углом (на рис. 8 изображён поперечный разрез обеих плоскостей); исток жидкости происходит вдоль линии пересечения плоскостей (*Г. Гаммель*, 1916).

Выбираем цилиндрические координаты r , z , φ с осью z вдоль линии пересечения плоскостей (точка O на рис. 8) и углом φ , отсчитываемым указанным на рис. 8 образом. Движение однородно вдоль оси z , и естественно предположить, что оно будет чисто радиальным, т. е. $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v(r, \varphi)$. Уравнения (15,16) дают

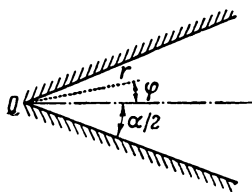


Рис. 8.

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right); \quad (23,5)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0; \quad (23,6)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что rv есть функция только от φ . Вводя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv, \quad (23,7)$$

получаем из (23,6)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{du}{d\varphi},$$

откуда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} u(\varphi) + f(r).$$

Подставляя это выражение в (23,5), получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2} r^3 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от φ и только от r , являются, каждая в отдельности, постоянной величиной, которую мы обозначим как $2C_1$. Таким образом:

$$f'(r) = 12\nu^2 C_1 \frac{1}{r^3},$$

откуда

$$f(r) = -\frac{6\nu^2 C_1}{r^2} + \text{const.},$$

и окончательно имеем для давления

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2} (2u - C_1) + \text{const.} \quad (23,8)$$

Для $u(\varphi)$ имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на u' и первого интегрирования даёт

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2}} + C_3, \quad (23,9)$$

чем и определяется искомая зависимость скорости от φ ; функция $u(\varphi)$ может быть выражена отсюда посредством эллиптических функций. Три постоянные C_1 , C_2 , C_3 определяются из граничных условий на стенках

$$u\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (23,10)$$

и из условия, что через любое сечение $r = \text{const.}$ проходит (в 1 сек.) одинаковое количество жидкости Q :

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} vr \, d\varphi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} u \, d\varphi. \quad (23,11)$$

Q может быть как положительным, так и отрицательным. Если $Q > 0$, то линия пересечения плоскостей является источником, т. е. жидкость вытекает из вершины угла (о таком течении говорят как о течении в диффузоре). Если $Q < 0$, то эта линия является стоком, и мы имеем дело со сходящимся к вершине угла течением (или, как говорят, с течением в конфузоре). Отношение $\frac{|Q|}{\rho\nu}$ является безразмер-

ным и играет роль числа Рейнольдса для рассматриваемого движения.

Рассмотрим сначала конфузорное движение ($Q < 0$). Для исследования решения (23,9) — (23,11) сделаем оправдывающееся в дальнейшем предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (т. е. $u(\varphi) = u(-\varphi)$), причем функция $u(\varphi)$ везде отрицательна (скорость направлена везде к вершине угла) и монотонно меняется от значения 0 при $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ до значения $-u_0$ ($u_0 > 0$) при $\varphi = 0$, так что u_0 есть максимум $|u|$. Тогда при $u = -u_0$ должно быть $\frac{du}{d\varphi} = 0$, откуда заключаем, что $u = -u_0$ есть корень кубического многочлена, стоящего под корнем в подинтегральном выражении в (23,9), так что можно написать:

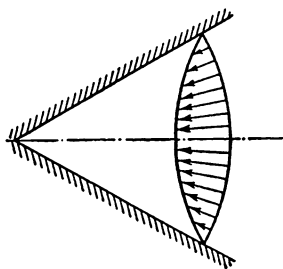


Рис. 9.

$$-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2 = (u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q],$$

где q — новая постоянная. Таким образом, имеем:

$$2\varphi = \pm \int_{-u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}, \quad (23,12)$$

причем постоянные u_0 и q определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_{-u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}, \\ \frac{R}{6} &= \int_{-u_0}^0 \frac{u du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}} \end{aligned} \right\} \quad (23,13)$$

(где $R = \frac{|Q|}{\nu \rho}$); постоянная q должна быть положительна, в противном случае эти интегралы сделались бы комплексными. Эти два уравнения имеют, как можно показать, решения для u_0 и q при любых R и $\alpha < \pi$. Другими словами, сходящееся (конфузорное) симметрическое течение (рис. 9) возможно при любом угле раствора $\alpha < \pi$ и любом числе Рейнольдса. Рассмотрим подробнее движение при очень больших R . Большим R соответствуют также и большие значения u_0 . Написав (23,12) (для $\varphi > 0$) в виде

$$2\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \int_u^0 \frac{du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}},$$

мы видим, что во всей области интегрирования подинтегральное выражение теперь мало, если только $|u|$ не близко к u_0 . Это значит, что $|u|$ может быть заметно отличным от u_0 только при φ , близких $\pm \frac{\alpha}{2}$, т. е. в непосредственной близости от стенок¹⁾. Другими словами, почти во всём интервале углов φ получается $u \approx \text{const.} = -u_0$, причём, как показывают равенства (23,13), должно быть $u_0 = \frac{R}{6\alpha}$. Самая скорость v равна $v = \frac{|Q|}{\rho \alpha r}$, что соответствует потенциальному невязкому течению со скоростью, не зависящей от угла и падающей по величине обратно пропорционально r . Таким образом, при больших числах Рейнольдса течение в конфузоре очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Влияние вязкости проявляется только в очень узком слое вблизи стенок, где происходит быстрое падение скорости от значения, соответствующего потенциальному потоку, до нуля (рис. 10).

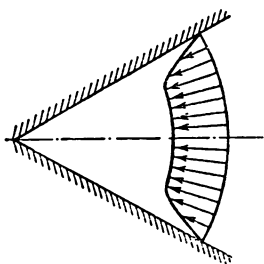


Рис. 10.

Пусть теперь $Q > 0$, т. е. мы имеем дело с диффузорным течением. Сделаем сначала опять предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и что $u(\varphi)$ (теперь $u > 0$) монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ до $u = u_0 > 0$ при $\varphi = 0$. Вместо (23,13) пишем теперь:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)[u^2 + (1 + u_0)u + q]}}, \\ \frac{R}{6} &= \int_0^{u_0} \frac{u du}{\sqrt{(u_0 - u)[u^2 + (1 + u_0)u + q]}}. \end{aligned} \right\} \quad (23,14)$$

Если рассматривать u_0 как заданное, то α монотонно возрастает с уменьшением q и имеет наибольшее возможное значение при $q = 0$:

$$\alpha_{\max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u(u_0 - u)(u + u_0 + 1)}}.$$

¹⁾ Может возникнуть вопрос о том, каким образом этот интеграл может сделаться не малым даже при $u \approx -u_0$. В действительности при очень больших u_0 один из корней трёхчлена $-u^2 - (1 - u_0)u + q$ оказывается тоже близким к $-u_0$, так что всё подкоренное выражение имеет два почти совпадающих корня и потому весь интеграл «почти расходится» при $u = -u_0$.

С другой стороны, как легко убедиться, при заданном q α есть монотонно убывающая функция от u_0 . Отсюда следует, что u_0 как функция от q при заданном α есть монотонно убывающая функция, так что её наибольшее значение соответствует $q = 0$ и определяется написанным равенством. Наибольшему u_0 соответствует также и наибольшее $R = R_{\max}$. С помощью подстановки $k^2 = \frac{u_0}{1+2u_0}$, $u = u_0 \cos^2 x$ можно представить зависимость R_{\max} от α в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \sqrt{1-2k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \\ R_{\max} &= -6\alpha \frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx. \end{aligned} \right\} (23,15)$$

Таким образом, симметричное, везде расходящееся течение в диффузоре (рис. 11, а) возможно для данного угла раствора только при

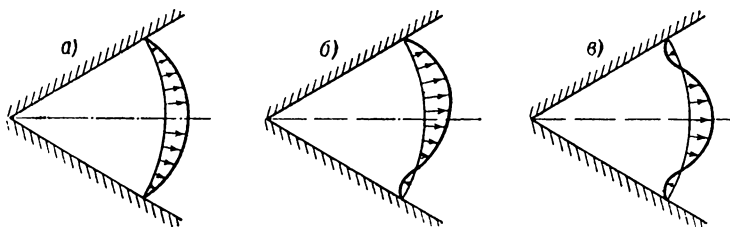


Рис. 11.

числах Рейнольдса, не превышающих определённого предела. При $\alpha \rightarrow \pi$ (чему соответствует $k \rightarrow 0$) R_{\max} стремится к нулю. При $\alpha \rightarrow 0$ (чему соответствует $k \rightarrow 1/\sqrt{2}$) R_{\max} стремится к бесконечности по закону $R_{\max} = \frac{18,8}{\alpha}$.

При $R > R_{\max}$ предположение о симметричном, везде расходящемся течении в диффузоре незаконно, так как условия (23,14) не могут быть выполнены. В интервале углов $-\frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}$ функция $u(\varphi)$ должна иметь здесь несколько максимумов или минимумов. Соответствующие этим экстремумам значения $u(\varphi)$ должны попеременно быть корнями стоящего под корнем многочлена. Поэтому ясно, что трёхчлен $u^2 + (1+u_0)u + q$ (с $u_0 > 0$, $q > 0$) должен иметь в этой области два вещественных отрицательных корня, так что стоящее под корнем выражение может быть написано в виде

$$(u_0 - u)(u + u'_0)(u + u''_0),$$

где $u_0 > 0$, $u'_0 > 0$, $u''_0 > 0$; пусть $u'_0 < u''_0$. Функция $u(\varphi)$ может, очевидно, изменяться в интервале $u_0 \geq u \geq -u'_0$, причём $u = u_0$ соответствует положительному максимуму $u(\varphi)$, а $u = -u'_0$ — отрицательному минимуму. Не останавливаясь подробнее на исследовании получающихся таким образом решений, укажем, что при $R > R_{\max}$ возникает сначала решение, при котором скорость имеет один максимум и один минимум, причём движение асимметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (рис. 11, б). При дальнейшем увеличении R возникает симметричное решение с одним минимумом и двумя максимумами скорости (рис. 11, в) и т. д. Во всех этих решениях имеются, следовательно, наряду с областями вытекающей жидкости также и области втекающих потоков (но, конечно, так, что полный расход жидкости $Q > 0$). При $R \rightarrow \infty$ число чередующихся минимумов и максимумов неограниченно возрастает, так что никакого определённого предельного решения не существует. Подчеркнём, что при диффузорном течении решение не стремится, таким образом, при $R \rightarrow \infty$ к решению уравнений Эйлера, как это имеет место при конфузорном движении. Наконец, отметим, что при увеличении R стационарное диффузорное движение описанного типа вскоре после достижения $R = R_{\max}$ делается неустойчивым и в действительности возникает нестационарное (турбулентное, см. гл. III) движение.

3. Требуется определить движение в струе жидкости, бьющей из конца тонкой трубки и попадающей в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью, — так называемая затопленная струя (Л. Ландау, 1943).

Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке её выхода, которая выбирается в качестве начала координат. Движение обладает аксиальной симметрией вокруг полярной оси, так что $v_\varphi = 0$, а v_θ, v_r являются функциями только от r, θ . Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат (в частности, через бесконечно удалённую) должен протекать одинаковый полный поток импульса («импульс струи»). Для этого скорость должна падать обратно пропорционально расстоянию r от начала координат, так что

$$v_r = \frac{1}{r} F(\theta), \quad v_\theta = \frac{1}{r} f(\theta), \quad (23,16)$$

где F, f — некоторые функции только от θ . Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f \operatorname{ctg} \theta. \quad (23,17)$$

Компоненты $\Pi_{r\varphi}$, $\Pi_{\theta\varphi}$ тензора потока импульса в струе тождественно исчезают, как это явствует уже из соображений симметрии. Сделаем предположение, что равны нулю также и компоненты $\Pi_{\theta\theta}$ и $\Pi_{\varphi\varphi}$ (оно оправдывается тем, что в результате мы получим решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям). С помощью выражений (15,17) для компонент тензора σ_{ik} и формул (23,16) — (23,17) легко убедиться в том, что между компонентами $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{r\theta}$ тензора потока импульса в струе имеется соотношение

$$\sin^2 \theta \Pi_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\varphi\varphi} - \Pi_{\theta\theta})].$$

Поэтому из равенства нулю $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{\theta\theta}$ следует, что и $\Pi_{r\theta} = 0$. Таким образом, из всех компонент Π_{ik} отлична от нуля только Π_{rr} , зависящая от r как $\frac{1}{r^2}$. Легко видеть, что при этом уравнения движения $\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$ удовлетворяются автоматически.

Далее, пишем:

$$\frac{1}{\rho} (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{r^2} (f^2 + 2vf \operatorname{ctg} \theta - 2vf') = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{f} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{f} + \frac{1}{2v} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f = -\frac{2v \sin \theta}{(A - \cos \theta)}, \quad (23,18)$$

а из (23,17) получаем теперь для F

$$F = 2v \left\{ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right\}. \quad (23,19)$$

Распределение давления определяем из уравнения

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2} (f + 2v \operatorname{ctg} \theta) = 0$$

и получаем:

$$p = -\frac{4\rho v^2}{r^2} \frac{A \cos \theta - 1}{(A - \cos \theta)^2}. \quad (23,20)$$

Постоянную A можно связать с «импульсом струи», т. е. с полным потоком импульса в ней. Этот поток равен интегралу по сферической поверхности:

$$P = \oint \Pi_{rr} \cos \theta \, df = 2\pi \int_0^\pi r^2 \Pi_{rr} \cos \theta \sin \theta \, d\theta.$$

Величина Π_{rr} равна

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{rr} = \frac{4v^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^4} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right\},$$

и вычисление интеграла приводит к результату

$$P = 16\pi\nu^2\rho A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right\}. \quad (23,21)$$

Формулы (23,16) — (23,21) решают поставленную задачу¹⁾.

Линии тока определяются уравнением $\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta}$, интегрирование которого даёт

$$\frac{r \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} = \text{const.}$$

На рис. 12 изображены линии тока в струе (для $A > 1$).

Рассмотрим два предельных случая слабой (импульс P мал) и сильной (большие P) струи. При $P \rightarrow 0$ постоянная A стремится к бесконечности; из (20,21) имеем:

$$P = \frac{16\pi\nu^2\rho}{A}.$$

Для скорости получаем в этом случае

$$v_\theta = -\frac{P \sin \theta}{8\pi\nu\rho r},$$

$$v_r = \frac{P \cos \theta}{4\pi\nu\rho r}.$$

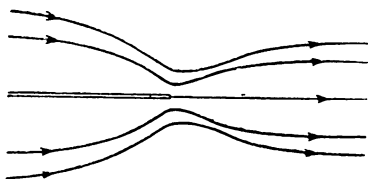


Рис. 12.

При $P \rightarrow \infty$ (сильная струя²⁾) A стремится к единице; (23,21) даёт

$$A = 1 + \frac{\alpha^2}{2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{32\pi\nu^2\rho}{3P}.$$

Для больших углов ($\theta \sim 1$) скорость определяется формулами

$$v_\theta = -2\nu \frac{\text{ctg} \frac{\theta}{2}}{r}, \quad v_r = -\frac{2\nu}{r},$$

а для малых углов ($\theta \sim \alpha$) получается:

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{\alpha^2 + \theta^2}, \quad v_r = 8\nu \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \theta^2)^2}.$$

1) Полученное здесь решение является точным для струи, которая рассматривается как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию r от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить с помощью полученного решения полный поток жидкости, проходящей через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля полный поток жидкости получился бы при учёте следующих членов разложения по указанному выше отношению (см. Ю. Б. Румер, Прикл. матем. и мех., 16, вып. 2, 1952).

Затопленная ламинарная струя с отличным от нуля моментом вращения вокруг оси рассмотрена Л. Г. Лойцянским, Прикл. матем. и мех., 17, вып. 1, 1953.

2) Надо, однако, иметь в виду, что в действительности движение в достаточно сильной струе делается турбулентным (§ 35).

§ 24. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погружённых в неё твёрдых тел, обладает целым рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера. Именно, предположим, что несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой ω . Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение. Твёрдую поверхность выберем в качестве плоскости y, z ; области жидкости соответствуют $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебаний поверхности. Скорость u колеблющейся поверхности есть функция времени вида $A \cos(\omega t + \alpha)$. Удобно писать такую функцию в виде действительной части от комплексного выражения: $u = \text{Re} \{u_0 e^{-i\omega t}\}$ (с комплексной, вообще говоря, постоянной $u_0 = Ae^{-i\alpha}$; надлежащим выбором начала отсчёта времени эту постоянную всегда можно сделать вещественной).

До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над скоростью u , можно опускать знак взятия действительной части и вычислять так, как если бы u было комплексным, после чего можно взять действительную часть от окончательного результата. Таким образом, мы будем писать:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \quad (24,1)$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничному условию $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, т. е.

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = u$$

при $x = 0$.

Из соображений симметрии очевидно, что все величины будут зависеть только от координаты x (и от времени t). Из уравнения непрерывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ имеем поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

откуда $v_x = \text{const.}$, причём согласно граничным условиям эта постоянная должна быть равной нулю, т. е. $v_x = 0$. Поскольку все величины не зависят от координат y, z , то $(\nabla \cdot) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}$ и благодаря равенству v_x нулю имеем тождественно $(\nabla \cdot) \mathbf{v} = 0$. Уравнение движения (15,7) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (24,2)$$

Это уравнение линейно. Его x -компонента даёт

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

т. е. $p = \text{const.}$

Из симметрии, далее, очевидно, что скорость v направлена везде по оси y . Для $v_y = v$ получаем согласно (24,2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (24,3)$$

т. е. уравнение типа уравнения теплопроводности (одномерного). Будем искать периодическое по x и t решение этого уравнения вида

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

с амплитудой (комплексной) u_0 , так, чтобы при $x = 0$ было $v = u$. Подставляя в (24,3), получаем $i\omega = \nu k^2$, откуда

$$k = \sqrt{i \frac{\omega}{\nu}} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

так что скорость v равна

$$v = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x} e^{i \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x - \omega t \right)} \quad (24,4)$$

(мы выбрали k с положительной мнимой частью, так как в противном случае скорость неограниченно возрастала бы по направлению в глубь жидкости, что физически нелепо).

Полученное решение представляет собой поперечную волну: её скорость $v_y = v$ направлена перпендикулярно к направлению распространения. Наиболее существенным свойством этой волны является то, что она быстро затухает по направлению внутрь жидкости: её амплитуда экспоненциально падает с увеличением расстояния x до твёрдой поверхности¹⁾.

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны. Они, однако, быстро затухают при удалении от поверхности твёрдого тела, движение которого создаёт эти волны.

Назовём «глубиной проникновения» δ волны расстояние, на котором амплитуда волны падает в e раз. Из (24,4) видно, что

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (24,5)$$

Таким образом, глубина проникновения волны падает с увеличением частоты волны и растёт с увеличением кинематической вязкости жидкости.

Вычислим силу трения, действующую на единицу площади плоскости, совершающей колебания в вязкой жидкости. Эта сила направлена, очевидно, по оси y ; она равна компоненте

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

¹⁾ На протяжении одного пространственного периода амплитуда падает в $e^{2\pi} \approx 540$ раз.

тензора напряжений; значение производной должно быть взято на самой поверхности, т. е. при $x = 0$. Подставляя (24,4), получим:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}} (i - 1) u. \quad (24,6)$$

Предполагая u_0 действительным и взяв действительную часть от (24,6), получаем:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\rho\eta} u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Скорость же колеблющейся поверхности есть $u = u_0 \cos \omega t$. Таким образом, между скоростью и силой трения имеется сдвиг фаз¹⁾.

Легко вычислить также и среднее (по времени) значение диссипации энергии при рассматриваемом движении. Это можно сделать по общей формуле (16,3); в данном случае, однако, проще вычислить искомую диссипацию непосредственно как работу сил трения. Именно, диссипация энергии в единицу времени, отнесённая к единице площади колеблющейся плоскости, равна среднему значению произведения силы σ_{xy} на скорость $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = \frac{u_0^2}{2} \sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}. \quad (24,7)$$

Она пропорциональна корню из частоты колебаний и из вязкости жидкости.

Может быть решена в замкнутом виде также и общая задача о жидкости, приводимой в движение плоской поверхностью, движущейся (в своей плоскости) по произвольному закону $u = u(t)$. Мы не станем производить здесь соответствующих вычислений, так как искомое решение уравнения (24,3) формально совпадает с решением аналогичной задачи теории теплопроводности, которая будет рассмотрена в § 52 (и даётся формулой (52,15)). В частности, испытываемая твёрдой поверхностью сила трения (отнесённая к единице пло-

¹⁾ При колебаниях полуплоскости (параллельно линии своего края) возникает дополнительная сила трения, связанная с краевыми эффектами. Задача о движении вязкой жидкости при колебаниях полуплоскости (а также и более общая задача о колебаниях клина с произвольным углом раствора) может быть решена с помощью класса решений уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, использованного А. Зоммерфельдом в теории дифракции от клина (см., например, статью М. Лауэ «Интерференция и дифракция электромагнитных волн» в Handb. d. Exper. Physik, т. 18, стр. 333, 1928).

Мы приведём здесь для справок лишь следующий результат: возникающее от краевого эффекта увеличение силы трения на полуплоскость может быть описано как результат увеличения площади при смещении края полуплоскости на расстояние

$$\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}}.$$

щади) определяется формулой

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (24,8)$$

(ср. (52,16)).

Рассмотрим теперь общий случай колеблющегося тела произвольной формы. В изученном выше случае колебаний плоской поверхности член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения жидкости исчезал тождественно. Для поверхности произвольной формы это, конечно, уже не имеет места. Мы будем, однако, предполагать, что этот член мал по сравнению с другими членами, так что им всё же можно пренебречь. Необходимые для возможности такого пренебрежения условия будут выяснены ниже.

Таким образом, мы будем исходить попрежнему из линейного уравнения (24,2). Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию rot . Член $\text{rot grad } p$ исчезает тождественно, так что мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}, \quad (24,9)$$

т. е. $\text{rot } \mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению типа уравнения теплопроводности.

Но мы видели выше, что такое уравнение приводит к экспоненциальному затуханию описываемой им величины. Мы можем, следовательно, утверждать, что ротор скорости затухает по направлению в глубь жидкости. Другими словами, вызываемое колебаниями тела движение жидкости является вихревым в некотором слое вокруг тела, а на больших расстояниях быстро переходит в потенциальное движение. «Глубина проникновения» вихревого движения — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

В связи с этим возможны два важных предельных случая. Именно, величина δ может быть велика или мала по сравнению с размерами колеблющегося в жидкости тела. Пусть l есть порядок величины этих размеров. Рассмотрим сначала случай $\delta \gg l$; это значит, что должно выполняться условие $l^2\omega \ll \nu$. Наряду с этим условием мы будем предполагать также, что число Рейнольдса мало. Если a есть амплитуда колебаний тела, то его скорость — порядка величины $a\omega$. Поэтому число Рейнольдса для рассматриваемого движения есть $\frac{\omega al}{\nu}$. Таким образом, мы предполагаем выполнение условий

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \frac{\omega la}{\nu} \ll 1. \quad (24,10)$$

Это есть случай малых частот колебаний. Но малость частоты означает, что скорость медленно меняется со временем и потому в общем уравнении движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

можно пренебречь производной $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Членом же $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь в силу малости числа Рейнольдса.

Отсутствие члена $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ в уравнении движения означает стационарность движения. Таким образом, при $\delta \gg l$ движение можно рассматривать в каждый данный момент времени как стационарное. Это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент. Если, например, речь идет о колебаниях погруженного в жидкость шара, с частотой, удовлетворяющей неравенствам (24,10) (где l есть теперь радиус шара), то можно поэтому утверждать, что испытываемая шаром сила сопротивления будет определяться формулой Стокса (20,14), полученной для равномерного движения шара при малых числах Рейнольдса.

Перейдем теперь к изучению противоположного случая, когда $l \gg \delta$. Для того чтобы можно было опять пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, необходимо в этом случае одновременное выполнение условия малости амплитуды колебаний тела по сравнению с его размерами

$$l^2\omega \gg \nu, \quad a \ll l \quad (24,11)$$

(заметим, что число Рейнольдса при этом отнюдь не должно быть малым). Действительно, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Оператор $(\mathbf{v}\nabla)$ означает дифференцирование вдоль направления скорости. Но вблизи поверхности тела скорость направлена в основном в касательном направлении. В этом направлении скорость заметно меняется лишь на протяжении размеров тела. Поэтому $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim \frac{v^2}{l} \sim \frac{a^2\omega^2}{l}$ (сама скорость имеет порядок величины $a\omega$). Производная же $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ — порядка $\nu\omega \sim a\omega^2$. Сравнивая оба выражения, видим, что при $a \ll l$ действительно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Члены же $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ и $\nu \Delta \mathbf{v}$ имеют теперь, как легко убедиться, одинаковый порядок величины.

Рассмотрим теперь характер движения жидкости вокруг колеблющегося тела в случае выполнения условий (24,11). В тонком слое вблизи поверхности тела движение является вихревым. В основной же массе жидкости движение потенциально¹⁾. Поэтому везде, кроме пристеночного слоя, движение жидкости описывается уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (24,12)$$

1) При колебаниях плоской поверхности на расстоянии δ затухает не только $\text{rot } \mathbf{v}$, но и сама скорость \mathbf{v} . Это связано с тем, что плоскость при своих колебаниях не вытесняет жидкости и потому жидкость вдали от неё остаётся вообще неподвижной. При колебаниях же тел другой формы происходит вытеснение жидкости, в результате чего она приходит в движение, скорость которого заметно затухает лишь на расстояниях порядка размеров тела.

Отсюда следует, что и $\Delta v = 0$, а потому уравнение Навье-Стокса переходит в уравнение Эйлера. Таким образом, везде, кроме пристеночного слоя, жидкость движется как идеальная.

Поскольку пристеночный слой тонкий, то при решении уравнений (24,12) с целью определения движения в основной массе жидкости следовало бы взять в качестве граничных условий те условия, которые должны выполняться на поверхности тела, т. е. равенство скорости жидкости скорости тела. Однако решения уравнений движения идеальной жидкости не могут удовлетворить этим условиям. Можно потребовать лишь выполнения этого условия для нормальной к поверхности компоненты скорости жидкости.

Хотя уравнения (24,12) и неприменимы в пристеночном слое жидкости, но поскольку получающееся в результате их решения распределение скоростей уже удовлетворяет необходимым граничным условиям для нормальной компоненты скорости, то истинный ход этой компоненты вблизи поверхности не обнаружит каких-либо существенных особенностей. Что же касается касательной компоненты, то, решая уравнения (24,12), мы получили бы для неё некоторое значение, отличное от соответствующей компоненты скорости тела, между тем как эти скорости тоже должны быть равными. Поэтому в тонком пристеночном слое должно происходить быстрое изменение касательной компоненты скорости.

Легко определить ход этого изменения. Рассмотрим какой-нибудь участок поверхности тела, размеры которого велики по сравнению с δ , но малы по сравнению с размерами тела. Такой участок можно рассматривать приближённо как плоский и потому можно воспользоваться для него полученными выше для плоской поверхности результатами. Пусть ось x направлена по направлению нормали к рассматриваемому участку поверхности, а ось y — по касательной к нему, совпадающей с направлением тангенциальной составляющей скорости элемента поверхности. Обозначим посредством v_y касательную компоненту скорости движения жидкости относительно тела; на самой поверхности v_y должно обратиться в нуль. Пусть, наконец, $v_0 e^{-i\omega t}$ есть значение v_y , получающееся в результате решения уравнений (24,12). На основании полученных в начале этого параграфа результатов мы можем утверждать, что в пристеночном слое величина v_y будет падать по направлению к поверхности по закону

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t} [1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}]. \quad (24,13)$$

Наконец, полная диссипируемая в единицу времени энергия будет равна интегралу

$$\bar{E}_{\text{зат}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}} \oint |v_0|^2 df, \quad (24,14)$$

взятому по всей поверхности колеблющегося тела.

В задачах к этому параграфу вычислены силы сопротивления, действующие на различные тела, совершающие колебательное движение в вязкой жидкости. Сделаем здесь следующее общее замечание по поводу этих сил. Написав скорость движения тела в комплексном виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$, мы получаем в результате силы сопротивления F , пропорциональную скорости u , тоже в комплексном виде $F = \beta u$, где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ — комплексная постоянная; это выражение можно написать как сумму двух членов:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2) u = \beta_1 u - \frac{\beta_2}{\omega} \dot{u}, \quad (24,15)$$

пропорциональных соответственно скорости u и ускорению \dot{u} с действительными коэффициентами.

Средняя (по времени) диссипация энергии определяется средним значением произведения силы сопротивления и скорости; при этом, разумеется, следует предварительно взять действительные части написанных выше выражений, т. е. написать:

$$u = \frac{1}{2} (u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}),$$

$$F = \frac{1}{2} (u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t}).$$

Замечая, что средние значения от $e^{\pm 2i\omega t}$ равны нулю, получим:

$$\overline{Fu} = \frac{1}{4} (\beta + \beta^*) |u_0|^2 = \frac{\beta_1}{2} |u_0|^2. \quad (24,16)$$

Таким образом, мы видим, что диссипация энергии связана только с действительной частью величины β ; соответствующую (пропорциональную скорости) часть силы сопротивления (24,15) можно назвать диссипативной. Вторую же часть этой силы, пропорциональную ускорению (определяющуюся мнимой частью β) и не связанную с диссипацией энергии, можно назвать инерционной.

Аналогичные соображения относятся к моменту сил, действующих на тело, совершающее вращательные колебания в вязкой жидкости.

З а д а ч и

1. Определить силу трения, действующую на каждую из двух параллельных твёрдых плоскостей, между которыми находится слой вязкой жидкости, причём одна из плоскостей совершает колебательное движение в своей плоскости.

Р е ш е н и е. Ищем решение уравнения (24,3) в виде¹⁾

$$v = (A \sin kx + B \cos kx) e^{-i\omega t}$$

¹⁾ Во всех задачах к этому параграфу δ обозначает величину (24,5):
 $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, а $k = \frac{1+i}{\delta}$.

и определяем A и B из условий $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ при $x = 0$ и $v = 0$ при $x = h$ (h — расстояние между плоскостями). В результате получаем:

$$v = u \frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}.$$

Сила трения (на единицу поверхности) на движущейся плоскости равна

$$P_{1x} = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = -ku \eta \operatorname{ctg} kh,$$

а на неподвижной

$$P_{2x} = -\eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=h} = \frac{\eta k u}{\sin kh}$$

(везде подразумеваются действительные части соответствующих выражений).
2. Определить силу трения, действующую на колеблющуюся плоскость, покрытую слоем жидкости (толщины h), верхняя поверхность которого свободна.

Решение. Граничные условия на твердой плоскости: $v = u$ при $x = 0$, а на свободной поверхности: $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ при $x = h$. Для скорости находим:

$$v = u \frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}.$$

Сила трения есть

$$P_x = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \eta u k \operatorname{tg} kh.$$

3. Плоский диск большого радиуса R совершает вращательные колебания вокруг своей оси с малой амплитудой (угол поворота диска $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, $\theta_0 \ll 1$); определить момент сил трения, действующих на диск.

Решение. Для колебаний с малой амплитудой член $(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}$ в уравнении движения всегда мал по сравнению с $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ независимо от величины частоты ω . Если $R \gg \delta$, то при определении распределения скоростей плоскость диска можно считать неограниченной. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси вращения и ищем решение в виде $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v = r\Omega(z, t)$. Для угловой скорости жидкости $\Omega(z, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в $-\omega\theta_0 \sin \omega t$ при $z = 0$ и в нуль при $z = \infty$, есть

$$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

Момент сил трения, действующих на обе стороны диска, равен

$$M = 2 \int_0^R r 2\pi r \eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} dr = \omega\theta_0 \pi \sqrt{\omega \rho \eta} R^4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Определить движение жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии градиента давления, меняющегося со временем по гармоническому закону.

Решение. Выбираем плоскость x, z посередине между обеими плоскостями; ось x направлена по градиенту давления, который пишем в виде $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = ae^{-i\omega t}$. Скорость направлена везде по оси x и определяется уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $v = 0$ при $y = \pm h/2$, есть

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - \frac{\cos ky}{\cos \frac{kh}{2}} \right],$$

Среднее (по сечению) значение скорости равно

$$\bar{v} = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2}{kh} \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \right).$$

При $h/\delta \ll 1$ это выражение переходит в

$$\bar{v} \approx ae^{-i\omega t} \frac{h^2}{12\nu}$$

в согласии с (17,5), а при $h/\delta \gg 1$ получается

$$\bar{v} \approx \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}$$

в соответствии с тем, что в этом случае скорость должна быть почти постоянной вдоль сечения и заметно меняется лишь в узком пристеночном слое.

5. Определить силу сопротивления, испытываемую шаром (радиуса R), совершающим в жидкости колебательное поступательное движение.

Решение. Скорость шара пишем в виде $\mathbf{u} = u_0 e^{-i\omega t}$. Аналогично тому, как мы поступали в § 20, ищем скорость жидкости в виде

$$\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \mathbf{u}_0,$$

где f — функция только от r (начало координат выбираем в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Подставляя в (24,9) и производя преобразования, аналогичные произведённым в § 20, получаем уравнение

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu} \Delta f = 0$$

(вместо уравнения $\Delta^2 f = 0$ в § 20). Отсюда имеем:

$$\Delta f = \operatorname{const} \cdot \frac{e^{ikr}}{r};$$

выбрано решение, экспоненциально затухающее, а не возрастающее с r . Интегрируя, получаем:

$$\frac{df}{dr} = a \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + \frac{b}{r^2} \quad (1)$$

(самую функцию f можно не выписывать, так как в скорость входят только производные f' и f''). Постоянные a и b определяются из условия $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R$ и оказываются равными

$$a = -\frac{3R}{2ik} e^{-ikR}, \quad b = -\frac{R^3}{2} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right). \quad (2)$$

Отметим, что при больших частотах ($R \gg \delta$) $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow -\frac{R^3}{2}$, что соответствует (в согласии с утверждениями § 24) потенциальному движению (определённому в задаче 2 § 10).

Сила сопротивления вычисляется по формуле (20,13), в которой интегрирование производится по поверхности шара. Результат:

$$F = 6\pi\eta R \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) u + 3\pi R^3 \sqrt{\frac{2\eta\rho}{\omega}} \left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right) \frac{du}{dt}. \quad (3)$$

При $\omega = 0$ эта формула переходит в формулу Стокса. При больших же частотах получается:

$$F = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{du}{dt} + 3\pi R^2 \sqrt{2\eta\rho\omega} u.$$

Первый член в этом выражении соответствует инерционной силе при потенциальном обтекании шара (см. задачу 1 § 11), а второй дает предельное выражение для диссипативной силы.

6. Определить силу сопротивления, действующую на произвольно движущийся шар (скорость шара есть заданная функция времени $u = u(t)$).

Решение. Разлагаем $u(t)$ в интеграл Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$u_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

В силу линейности уравнений полная сила сопротивления может быть написана в виде интеграла от сил сопротивления, получающихся при движении со скоростями, равными отдельным компонентам Фурье $u_{\omega} e^{-i\omega t}$; эти силы определяются выражением (3) предыдущей задачи и равны

$$\pi\rho R^3 u_{\omega} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} (1-i) \sqrt{\omega} \right\}.$$

Замечая, что $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\omega} = -i\omega u_{\omega}$, переписываем это в виде

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} u_{\omega} + \frac{2}{3} (\dot{u})_{\omega} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} (\dot{u})_{\omega} \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right\}.$$

При интегрировании по $d\omega$ в первом и втором членах получаем соответственно $u(t)$ и $\dot{u}(t)$. Для интегрирования третьего члена раньше всего замечаем, что для отрицательных ω надо писать этот член в комплексно сопряжённом виде, написав в нём $\frac{1-i}{\sqrt{|\omega|}}$ вместо $\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}$ (это связано с тем, что полученная в задаче 5 формула (3) выведена для скорости $u = u_0 e^{-i\omega t}$ с положительным ω ; для скорости же $u_0 e^{i\omega t}$ получилась бы комплексно сопряжённая величина). Поэтому вместо интеграла по $d\omega$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ можно написать удвоенную действительную часть интеграла от 0

до $+\infty$. Пишем:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_0^{\infty} \frac{(\dot{u})_{\omega} e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}} d\omega \right\} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau + (1+i) \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + i \int_t^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}} d\tau \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для силы сопротивления

$$F = 2\pi\rho R^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} u + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\}. \quad (4)$$

7. Определить силу сопротивления для шара, начинающего в момент $t=0$ двигаться равноускоренно по закону $u=at$.

Решение. Полагая в формуле (4) задачи 6 $u=0$ при $t<0$ и $\frac{d^2u}{dt^2}=a$ при $t>0$, получаем (при $t>0$):

$$F = 2\pi\rho R^3 a \left\{ \frac{1}{3} + \frac{3\nu}{R^2} t + \frac{6}{R} \sqrt{t \frac{\nu}{\pi}} \right\}.$$

8. То же для шара, мгновенно приведённого в равномерное движение.

Решение. Имеем $u=0$ при $t<0$ и $u=u_0$ при $t>0$. Производная $\frac{du}{dt}$ равна нулю всегда, кроме момента $t=0$, в который она обращается в бесконечность, причём так, что интеграл от $\frac{du}{dt}$ по времени конечен и равен u_0 . В результате получаем для всего времени $t>0$

$$F = 6\pi\rho R u_0 \left\{ 1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}} \right\} + \frac{2\pi\rho R^3}{3} u_0 \delta(t);$$

здесь $\delta(t)$ есть δ -функция. При $t \rightarrow \infty$ это выражение асимптотически приближается к значению, даваемому формулой Стокса. Импульс силы сопротивления, испытываемый шаром в течение бесконечно малого интервала времени вокруг $t=0$, получается интегрированием по времени последнего члена в F и равен $\frac{2}{3}\pi\rho R^3 u_0$.

9. Определить момент сил, действующих на шар, совершающий в вязкой жидкости вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. По тем же причинам, что и в задаче 1 § 20, в уравнении движения можно не писать члена с градиентом давления, так что имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Ищем решение в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} f \Omega_0 e^{-i\omega t},$$

где $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ — угловая скорость вращения шара. Для f получаем теперь вместо уравнения $\Delta f = \operatorname{const}$. следующее уравнение:

$$\Delta f + k^2 f = \operatorname{const}.$$

Опуская несущественный постоянный член в решении этого уравнения имеем отсюда $f = \frac{a}{r} e^{ikr}$ (выбирается такое решение, которое обращается на бесконечности в нуль). Постоянную a определяем из предельного условия $v = [\Omega r]$ на поверхности шара и в результате получаем:

$$f = \frac{R^3}{1 - ikR} e^{ik(r-R)}, \quad v = [\Omega r] \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1 - ikr}{1 - ikR} e^{ik(r-R)}$$

(R — радиус шара). Вычисление, аналогичное произведённому в задаче 1 § 20, приводит к следующему выражению для момента сил, действующих на шар со стороны жидкости:

$$M = -\frac{8\pi}{3} \eta R^3 \Omega \frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ (т. е. $\delta \rightarrow \infty$) получается выражение $M = -8\pi\eta R^3\Omega$, соответствующее равномерному вращению шара (см. задачу 1 § 20). В обратном же предельном случае $R/\delta \gg 1$ получается:

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi R^4 \sqrt{\eta\rho\omega} (i - 1) \Omega.$$

Это выражение можно получить и непосредственным путём: при $\delta \ll R$ каждый элемент поверхности шара можно рассматривать как плоский, а действующую на него силу трения определить по формуле (24,6), подставив в неё скорость $u = \Omega R \sin \theta$.

10. Определить момент сил, действующих на наполненный вязкой жидкостью полый шар, совершающий вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Решение. Ищем скорость в том же виде, как и в предыдущей задаче. Для f берём решение, конечное во всём объёме внутри шара, включая его центр: $f = a \frac{\sin kr}{r}$. Определяя a из граничного условия, получаем:

$$v = [\Omega r] \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{rk \cos kr - \sin kr}{Rk \cos kR - \sin kR}.$$

Вычисление момента сил трения приводит к выражению

$$M = \frac{8}{3} \pi \eta R^3 \Omega \frac{k^2 R^2 \sin kR + 3kR \cos kR - 3 \sin kR}{kR \cos kR - \sin kR}.$$

Предельное выражение при $R/\delta \gg 1$ совпадает, естественно, с соответствующим выражением предыдущей задачи. Если же $R/\delta \ll 1$, то

$$M = \frac{8}{15} \pi \eta \omega R^5 \Omega \left(i - \frac{R^2 \omega}{35\nu}\right).$$

Первый член в этой формуле соответствует инерционным силам, возникающим при вращении всей массы жидкости как целого.

§ 25. Затухание гравитационных волн

Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, могут быть проведены по поводу распределения скоростей вблизи свободной поверхности жидкости. Именно, рассмотрим колебательное движение, происходящее у поверхности жидкости (например, гравитационные волны). Предполо-

жим, что выполняются условия (24,11), в которых теперь роль размеров l играет длина волны λ :

$$\lambda^2 \omega \gg \nu, \quad a \ll \lambda \quad (25,1)$$

(a — амплитуда волны, ω — её частота). Тогда можно утверждать, что решение будет вихревым лишь в тонком слое у поверхности жидкости, а в основном её объёме движение будет потенциальным — таким, каким оно было бы у идеальной жидкости.

Движение вязкой жидкости должно удовлетворять у свободной поверхности граничным условиям (15,14), требующим исчезновения определённых комбинаций производных от скорости по координатам. Движение же, получающееся в результате решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости, этому условию не удовлетворяет. Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для скорости v_y , мы можем заключить, что в тонком слое у поверхности жидкости соответствующие производные скорости будут быстро уменьшаться. Существенно отметить, что градиент скорости не будет при этом аномально большим, как это имело место вблизи твёрдой поверхности.

Вычислим диссипацию энергии в гравитационной волне. Здесь надо говорить не о диссипации кинетической энергии, а о диссипации механической энергии $E_{\text{мех}}$, включающей в себя наряду с кинетической также и потенциальную энергию в поле тяжести. Ясно, однако, что на обусловленную процессами внутреннего трения в жидкости диссипацию энергии не может влиять факт наличия или отсутствия поля тяжести. Поэтому $\dot{E}_{\text{мех}}$ определяется той же формулой (16,3):

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

При вычислении этого интеграла для гравитационной волны надо заметить, что, поскольку объём поверхностного слоя вихревого движения мал, а градиент скорости в нём не аномально велик, фактом наличия этого слоя можно пренебречь, в противоположность тому, что мы имели в случае колебаний твёрдой поверхности. Другими словами, интегрирование должно производиться по всему объёму жидкости, в котором, как мы видели, жидкость движется как идеальная.

Но движение в гравитационной волне в идеальной жидкости было уже нами определено в § 12. Это движение потенциально, и потому

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

так что

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 dV.$$

Потенциал φ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) e^{-kz}.$$

Нас интересует, конечно, не моментальное, а среднее по времени значение $\bar{E}_{\text{мех}}$ диссипируемой энергии. Замечая, что средние значения квадратов косинуса и синуса одинаковы, получим:

$$\bar{E}_{\text{мех}} = -8\eta k^4 \int \bar{\varphi}^2 dV. \quad (25,2)$$

Что касается самой энергии $E_{\text{мех}}$ гравитационной волны, то для её вычисления можно воспользоваться известным из механики обстоятельством, что у всякой системы, совершающей малые колебания (колебания с малой амплитудой), средняя кинетическая и потенциальная энергии равны друг другу. На этом основании можно написать $\bar{E}_{\text{мех}}$ просто как удвоенную кинетическую энергию:

$$\bar{E}_{\text{мех}} = \rho \int \bar{v}^2 dV = \rho \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dV,$$

откуда

$$\bar{E}_{\text{мех}} = 2\rho k^2 \int \bar{\varphi}^2 dV. \quad (25,3)$$

Затухание волн удобно характеризовать так называемым коэффициентом затухания γ , определяющимся как отношение

$$\gamma = \frac{|\dot{\bar{E}}_{\text{мех}}|}{2\bar{E}}. \quad (25,4)$$

С течением времени энергия волны падает по закону $\bar{E} = \text{const.} \cdot e^{-2\gamma t}$; что касается амплитуды волны, то, поскольку энергия пропорциональна её квадрату, закон её уменьшения со временем определяется множителем $e^{-\gamma t}$.

С помощью (25,2), (25,3) находим:

$$\gamma = 2\nu k^2. \quad (25,5)$$

Подставляя сюда (12,7), получим коэффициент затухания гравитационных волн в виде

$$\gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2}. \quad (25,6)$$

З а д а ч и

1. Определить коэффициент затухания длинных гравитационных волн, распространяющихся в канале постоянного сечения; частота предполагается настолько большой, что $\sqrt{\nu/\omega}$ мало по сравнению с глубиной жидкости в канале.

Решение. Основная диссипация энергии будет происходить в пристеночном слое жидкости, где скорость меняется от нуля на самой стенке до значения $v = v_0 e^{-i\omega t}$, которое она имеет в волне. Средняя диссипация энергии (отнесённая к единице длины канала) равна согласно (24,14)

$$l \frac{|v_0|^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\eta\rho\omega};$$

l — длина той части контура сечения канала, вдоль которой он соприкасается с жидкостью. Средняя же энергия жидкости (тоже отнесённая к единице длины канала) равна $S\rho\bar{v}^2 = S\rho \frac{|v_0|^2}{2}$ (S — площадь сечения жидкости в канале). Коэффициент затухания равен

$$\gamma = \frac{l}{2\sqrt{2}S} \sqrt{\nu\omega}.$$

Так, для канала прямоугольного сечения (ширина a , глубина жидкости h)

$$\gamma = \frac{2h+a}{2\sqrt{2}ah} \sqrt{\nu\omega}.$$

2. Определить движение в гравитационной волне на жидкости с большой вязкостью.

Решение. Приведённое в тексте вычисление коэффициента затухания применимо только в случаях, когда этот коэффициент мал, так что движение можно рассматривать в первом приближении как движение идеальной жидкости. При произвольной вязкости ищем решение уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

зависящее от t и x посредством множителя $e^{-i\omega t + ikx}$ и затухающее с z по направлению в глубь жидкости ($z < 0$). Получаем:

$$v_x = e^{-i\omega t + ikx} (Ae^{kz} + Be^{mz}), \quad v_z = e^{-i\omega t + ikx} \left(-iAe^{kz} - i\frac{k}{m}Be^{mz} \right),$$

$$\frac{p}{\rho} = e^{-i\omega t + ikx} \frac{\omega}{k} Ae^{kz} - gz, \quad \text{где } m = \sqrt{k^2 - i\frac{\omega}{\nu}}.$$

Предельные условия на поверхности жидкости:

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0$$

(при $z = \zeta$). Во втором из этих условий можно непосредственно написать $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Первое же дифференцируем предварительно по t и пишем gv_z вместо $g\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, после чего полагаем $z = 0$. Из условия совместности получающихся таким образом двух однородных уравнений для A и B получаем:

$$\left(2 - i\frac{\omega}{\nu k^2} \right)^2 + \frac{g}{\nu^2 k^3} = 4\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\nu k^2}}. \quad (2)$$

Это уравнение определяет зависимость ω от волнового вектора k . При этом ω является комплексной величиной; её действительная часть определяет частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания. Физический смысл имеют те из решений уравнения (2), мнимая часть которых отрицательна (соответственно затуханию волны); таковыми являются только два из корней уравнения (2). Если $\sqrt{k^2} \ll \sqrt{gk}$ (условие (25,1)), то коэффициент затухания мал и (2) даёт приближённо $\omega = \pm \sqrt{gk} - i \cdot 2\sqrt{k^2}$ — известный уже нам результат. В противоположном предельном случае $\sqrt{k^2} \gg \sqrt{gk}$ уравнение (2) имеет два чисто мнимых корня, соответствующих чисто затухающему аperiodическому движению. Один из корней есть

$$\omega = -\frac{ig}{2\sqrt{k}},$$

а другой значительно больше (порядка $\sqrt{k^2}$) и поэтому не интересен (соответствующее ему движение быстро затухает).

ГЛАВА III ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 26. Устойчивость стационарного движения жидкости

При решении уравнений стационарного движения вязкой жидкости часто приходится ввиду математических трудностей ограничиваться некоторыми приближениями. Применимость этих приближённых решений ограничена, естественно, определёнными пределами. Таково, например, решение задачи об обтекании шара (§ 20), область применимости которого ограничена малыми значениями числа Рейнольдса.

Принципиально, однако, для всякой задачи, т. е. для всякого движения в заданных стационарных внешних условиях, должно существовать точное стационарное решение гидродинамических уравнений (некоторые такие точные решения были рассмотрены нами в §§ 17, 18, 23). Эти решения формально существуют при любых числах Рейнольдса.

Не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может, однако, реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны ещё быть устойчивыми. Для устойчивости движения необходимо, чтобы малые возмущения, раз возникнув, затухали бы со временем. Если же, напротив, неизбежно возникающие в потоке жидкости сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, то движение будет абсолютно неустойчивым. Такое неустойчивое по отношению к бесконечно малым возмущениям движение вовсе не может существовать.

Математическое исследование вопроса об устойчивости того или иного движения по отношению к бесконечно малым возмущениям должно происходить по следующей схеме. На исследуемое стационарное решение (распределение скоростей в котором пусть будет $\mathbf{v}_0(x, y, z)$) накладывается нестационарное малое возмущение $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$, которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее движение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, удовлетворяло уравнениям движения. Уравнение для определения \mathbf{v}_1 получается подстановкой в уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

скорости и давления в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, $p = p_0 + p_1$, причём известные функции \mathbf{v}_0 и p_0 удовлетворяют невозмущённым уравнениям

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0.$$

Опуская члены высших порядков по малой величине \mathbf{v}_1 , получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0. \quad (26,1)$$

Граничным условием является исчезновение \mathbf{v}_1 на неподвижных твёрдых поверхностях.

Таким образом, \mathbf{v}_1 удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только от координат, но не от времени. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде суммы частных решений, в которых \mathbf{v}_1 зависит от времени посредством множителей типа $e^{-i\omega t}$. Сами «частоты» ω возмущений не произвольны, а определяются в результате решений уравнений (26,1) с соответствующими предельным условиями. Эти «частоты», вообще говоря, комплексны. Если имеются такие ω , мнимая часть которых положительна, то $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать со временем. Другими словами, такие возмущения, раз возникнув, будут возрастать, т. е. движение будет неустойчиво по отношению к таким возмущениям. Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных «частот» ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такое математическое исследование устойчивости, однако, крайне сложно. До настоящего времени совершенно не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечных размеров. Нет сомнения в том, что при достаточно малых числах Рейнольдса стационарное обтекание устойчиво. Экспериментальные данные свидетельствуют, повидимому, о том, что при увеличении R достигается в конце концов определённое его значение (которое можно назвать критическим, $R_{кр}$), начиная с которого движение становится неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, и, таким образом, при достаточно больших числах Рейнольдса ($R > R_{кр}$) стационарное обтекание твёрдых тел вообще невозможно. Критическое значение числа Рейнольдса не является, разумеется, универсальным; для каждого типа движения существует своё $R_{кр}$. Эти значения, повидимому, — порядка нескольких десятков (так, при поперечном обтекании цилиндра незатухающее нестационарное движение наблюдалось уже при $R = \frac{ud}{\nu} = 34$, где d — диаметр цилиндра; точные же измерения $R_{кр}$ не производились).

§ 27. Возникновение турбулентности

Обратимся теперь к изучению характера того нестационарного режима, который устанавливается в результате абсолютной неустойчивости стационарного движения при больших числах Рейнольдса.

Начнём с выяснения свойств этого движения при числах Рейнольдса, лишь немногим превышающих $R_{кр}$. При $R < R_{кр}$ у комплексов «частот» $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ всех возможных малых возмущений скорости мнимая часть отрицательна ($\gamma_1 < 0$). При $R = R_{кр}$ появляется одна частота, мнимая часть которой обращается в нуль. При $R > R_{кр}$ у этой «частоты» мнимая часть положительна, причём для R , близких к $R_{кр}$, γ_1 мало по сравнению с действительной частью ω_1 ¹⁾. Функция v_1 , соответствующая этой «частоте», имеет вид

$$v_1 = A(t) f(x, y, z), \quad (27,1)$$

где f — некоторая комплексная функция координат, а комплексная «амплитуда» $A(t)$ равна²⁾

$$A(t) = \text{const. } e^{I_1 t} e^{-i\omega_1 t}. \quad (27,2)$$

Это выражение для $A(t)$ в действительности, однако, пригодно лишь в течение короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима: множитель $e^{I_1 t}$ быстро растёт со временем, между тем как описанный в § 26 метод определения v_1 , приводящий к выражению типа (27,1) — (27,2), применим лишь при достаточной малости v_1 . В действительности, конечно, модуль $|A|$ амплитуды нестационарного движения не растёт неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При R , близких к $R_{кр}$ (везде идёт речь о $R > R_{кр}$), этот конечный предел тоже ещё мал, и для его определения можно поступить следующим образом.

Определим производную по времени от квадрата амплитуды $|A|^2$. Для самых малых времён, когда ещё применимо (27,2), имеем:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2.$$

Это выражение является по существу лишь первым членом разложения в ряд по степеням A и A^* . При увеличении модуля $|A|$ (но когда он всё же ещё остаётся малым) надо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие члены есть члены третьего порядка по A .

¹⁾ Надо иметь в виду, что в совокупность (или, как говорят, «спектр») всех возможных (для каждого данного типа движений) значений частот входят как отдельные изолированные значения («дискретный спектр»), так и частоты, непрерывно заполняющие целые интервалы значений («непрерывный спектр»). Можно, однако, видеть, что интересующие нас частоты с положительной мнимой частью могут иметься, вообще говоря, только среди частот дискретного спектра.

²⁾ Как всегда, подразумевается вещественная часть выражения (27,2).

Нас, однако, интересует не точное значение производной $\frac{d|A|^2}{dt}$, а её среднее по времени значение, причём усреднение производится по промежуткам времени, большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_1$ периодического множителя $e^{-i\omega_1 t}$ (напоминаем, что, поскольку $\omega_1 \gg \gamma_1$, этот период мал по сравнению с временем $1/\gamma_1$ заметного изменения модуля амплитуды $|A|$). Но члены третьего порядка непременно содержат периодический множитель и при усреднении выпадают¹⁾. Среди членов же четвёртого порядка есть член, пропорциональный $A^2 A^{*2} = |A|^4$; этот член при усреднении, очевидно, не выпадает. Таким образом, с точностью до членов четвёртого порядка имеем:

$$\overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \quad (27,3)$$

где α может быть как больше, так и меньше нуля.

Положим, что α есть положительная постоянная²⁾. Над $|A|^2$ и $|A|^4$ мы не пишем знаков усреднения, так как усреднение происходит только по промежуткам времени, малым по сравнению с $1/\gamma_1$. По этой же причине при решении этого уравнения надо поступать так, как если бы черты над производной в левой его части не было. Решение уравнения (27,3) имеет вид

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const.} \cdot e^{-2\gamma_1 t}.$$

Отсюда видно, что $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|^2_{\max} = \frac{2\gamma_1}{\alpha}. \quad (27,4)$$

Величина γ_1 есть некоторая функция от числа Рейнольдса. Вблизи $R_{кр}$ она может быть разложена в ряд по степеням $R - R_{кр}$. Но $\gamma_1(R_{кр}) = 0$ по самому определению критического числа Рейнольдса. Поэтому член нулевого порядка в разложении выпадает, и мы имеем с точностью до членов первого порядка

$$\gamma_1 = \text{const.} (R - R_{кр}).$$

Подставляя это в (27,4), мы видим, что абсолютная величина $|A|$ амплитуды пропорциональна корню из разности $R - R_{кр}$:

$$|A|_{\max} \sim \sqrt{R - R_{кр}}. \quad (27,5)$$

Резюмируем полученные результаты. Абсолютная неустойчивость движения при $R > R_{кр}$ приводит к появлению нестационарного перио-

1) Строго говоря, члены третьего порядка дают при усреднении не нуль, а величины четвёртого порядка; эти величины предполагаются включёнными в члены четвёртого порядка в разложении.

2) Повидимому, именно этот случай соответствует обычным обтеканиям тел.

дического движения. При R , близких к $R_{кр}$, это движение может быть представлено в виде наложения стационарного движения $v_0(x, y, z)$ и периодического движения $v_1(x, y, z, t)$ с малой, но конечной амплитудой, растущей по мере увеличения R пропорционально корню из $R - R_{кр}$. Распределение скоростей в этом движении имеет вид

$$v_1 = f(x, y, z) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \quad (27,6)$$

где f — комплексная функция координат, а β_1 — некоторая начальная фаза. При больших разностях $R - R_{кр}$ разделение скорости на две части v_0 и v_1 уже не имеет смысла. Мы имеем при этом дело просто с некоторым периодическим движением с частотой ω_1 . Если вместо времени пользоваться в качестве независимой переменной фазой $\varphi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, то можно сказать, что функция $v(x, y, z, \varphi_1)$ является периодической функцией от φ_1 с периодом 2π . Эта функция, однако, не есть теперь простая тригонометрическая. В её разложение в ряд Фурье

$$v = \sum_p A_p(x, y, z) e^{-i\varphi_1 p} \quad (27,7)$$

(суммирование производится по всем положительным и отрицательным целым числам p) входят не только члены с основной частотой ω_1 , но и члены, соответствующие частотам, равным целым кратным от неё.

Необходимо указать ещё на следующую существенную особенность рассматриваемого нестационарного движения. Уравнением (27,3) определяется только абсолютная величина временного множителя $A(t)$, но не его фаза. Фаза $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ периодического движения остаётся по существу неопределённой и зависит от случайных начальных условий, имевших место в момент начала движения. В зависимости от этих условий начальная фаза β_1 может иметь любое значение. Таким образом, изучаемое периодическое движение не определяется однозначно теми заданными стационарными внешними условиями, в которых происходит движение. Одна величина — начальная фаза скорости — остаётся произвольной. Можно сказать, что это движение обладает одной степенью свободы, между тем как стационарное движение, полностью определяющееся внешними условиями, не обладает степенями свободы вовсе.

Перейдём теперь к изучению явлений, возникающих при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса. По мере этого увеличения наступает в конце концов момент, когда становится неустойчивым и рассмотренное выше периодическое движение. Исследование этой неустойчивости должно было бы производиться¹⁾ аналогично изложенному выше методу определения неустойчивости основного стационарного течения. Роль невозмущённого движения играет теперь периодическое движение $v_0(x, y, z, t)$ (с частотой ω_1), а в уравнения движения

1) Но не было произведено ни в одном случае ввиду исключительных математических трудностей.

подставляется $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, где \mathbf{v}_2 — малая поправка. Для \mathbf{v}_2 получаем опять линейное уравнение, но коэффициенты этого уравнения являются теперь функциями не только от координат, но и от времени, причём по времени эти коэффициенты являются периодическими функциями с периодом $2\pi/\omega_1$. Решение такого уравнения должно разыскиваться в виде

$$\mathbf{v}_2 = \Pi(x, y, z, t) e^{-i\omega t},$$

где $\Pi(x, y, z, t)$ — периодическая функция времени (с периодом $2\pi/\omega_1$). Неустойчивость наступает опять при появлении «частоты» $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$, у которой мнимая часть γ_2 положительна, а соответствующая действительная часть ω_2 определяет новую появляющуюся частоту.

Таким образом, в результате возникает некоторое квазипериодическое движение, характеризующееся двумя различными периодами. Аналогично тому как после появления первого периодического движения течение обладало одной степенью свободы, теперь две величины (фазы) являются произвольными, т. е. движение обладает двумя степенями свободы.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса появляются последовательно всё новые и новые периоды. Интервалы между числами Рейнольдса, соответствующими последовательному появлению новых частот, быстро падают. Что касается самих вновь появляющихся движений, то они имеют всё более мелкие масштабы. Это значит, что порядок величины расстояний, на которых заметно меняется скорость движения, тем меньше, чем позже данное движение появляется.

Таким образом, при $R > R_{кр}$ движение быстро приобретает сложный и запутанный характер. Такое движение называется турбулентным; его свойства будут подробно исследованы в следующих параграфах. В противоположность турбулентному, правильное течение жидкости, при котором она движется как бы слоями, обладающими различными скоростями, называется ламинарным.

Напишем общий вид функции $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, зависимость которой от времени определяется некоторым числом n различных частот ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Вместо одной фазы $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ мы имеем теперь n различных фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$. Функцию \mathbf{v} можно рассматривать как функцию от этих фаз (и от координат), причём по каждой из них она является периодической функцией с периодом 2π . Такая функция может быть написана в виде ряда

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} \mathbf{A}_{p_1, \dots, p_n}(x, y, z) e^{-i \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i} \quad (27,8)$$

(суммирование производится по всем целым числам p_1, p_2, \dots, p_n), представляющего собой обобщение формулы (27,7). Заметим, что

самый выбор основных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ является, как видно из (27,8), не однозначным; с тем же успехом можно взять в качестве основных какие-нибудь n линейных независимых комбинаций ω_i с целыми коэффициентами¹⁾.

Движение, описываемое формулой типа (27,8), обладает n степенями свободы; в него входят n произвольных начальных фаз β_i . По мере увеличения числа Рейнольдса вместе с увеличением числа частот растёт также и число степеней свободы движения. В пределе при стремлении R к бесконечности число степеней свободы тоже делается сколь угодно большим.

Надо иметь в виду, что, поскольку скорость является периодической функцией фаз (с периодами 2π), состояния, фазы которых отличаются только на целое кратное 2π , являются физически тождественными. Другими словами, можно сказать, что все существенно различные значения каждой из фаз лежат в интервале $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$. Рассмотрим какую-нибудь пару фаз $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Пусть в некоторый момент времени φ_1 имеет значение α . Тогда согласно только что сказанному «одинаковые» с α значения φ_1 будет

иметь во все моменты времени $t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi n \frac{1}{\omega_1}$, где n — любое

целое число. Фаза φ_2 имеет в эти моменты значения $\varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1) + \beta_2 + 2\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Но различные частоты являются, вообще говоря,

числами несоизмеримыми друг с другом, так что $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ есть число иррациональное. Приводя каждый раз посредством вычитания должного целого кратного от 2π значение φ_2 к интервалу между 0 и 2π , мы получим поэтому при пробегании n значений от 0 до ∞ для φ_2 значения, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному числу в этом интервале. Другими словами, в течение достаточно большого промежутка времени φ_1 и φ_2 одновременно пройдут сколь угодно близко к любой паре наперёд заданных значений. То же самое относится, очевидно, и ко всем фазам. Таким образом, турбулентное движение обладает свойствами некоторой, как говорят, квазипериодичности: в течение достаточно долгого времени жидкость пройдёт через состояния, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному состоянию, определяющемуся любым возможным набором одновременных значений фаз φ_i .

Мы ввели понятие о критическом числе Рейнольдса, как о том значении R , при котором возникает неустойчивость стационарного движения в описанном выше смысле. Понятие о $R_{кр}$ можно, однако,

1) Эти линейные комбинации должны быть такими, чтобы из них можно было составить все возможные числа $\sum p_i \varphi_i$; легко видеть, что для этого детерминант из коэффициентов преобразования от старых частот к новым должен быть равен единице.

характеризовать также и с несколько иной точки зрения. Именно, при $R < R_{кр}$ не существует устойчивых, не затухающих со временем, нестационарных решений уравнений движения. После достижения критического значения появляется устойчивое нестационарное решение, которое и осуществляется реально в движущейся жидкости.

Для исследованных экспериментально обтеканий обычных конечных тел оба определения $R_{кр}$, повидимому, совпадают. Логически, однако, это не обязательно, и принципиально возможны случаи, когда существуют два различных критических значения: значение, выше которого возможно существование незатухающих нестационарных движений, и значение, выше которого становится абсолютно неустойчивым стационарное движение (второе, очевидно, должно превышать первое). Поскольку, однако, в настоящее время нет никаких указаний на реальное существование таких случаев неустойчивости, мы не станем останавливаться подробнее на их исследовании¹⁾.

§ 28. Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный применённому в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (*Рэлей*, 1916). Идея метода состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются силы, действующие на смещённый участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещённый элемент в исходное положение.

Каждый элемент жидкости в невозмущённом течении движется по окружности $r = \text{const.}$ вокруг оси цилиндров. Пусть $\mu(r) = mr^2\dot{\varphi}$ есть момент импульса элемента с массой m ($\dot{\varphi}$ — угловая скорость). Действующая на него центробежная сила равна $\frac{\mu^2}{mr^3}$; эта сила уравновешивается соответствующим радиальным градиентом давления, возникающим во вращающейся жидкости. Предположим теперь, что элемент жидкости, находящийся на расстоянии r_0 от оси, подвергается малому смещению со своей траектории, так что попадает на расстояние $r > r_0$ от оси. Сохраняющийся момент импульса элемента остаётся при этом равным своему первоначальному значению $\mu_0 = \mu(r_0)$. Соответственно в его новом положении на него будет действовать

¹⁾ Здесь не идёт речь о движениях типа течения в трубе, потеря устойчивости которыми обладает специфическими особенностями (см. § 29).

центробежная сила, равная $\frac{\mu_0^2}{mr^3}$. Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, эта центробежная сила должна быть меньше, чем её равновесное значение $\frac{\mu^2}{mr^3}$, уравнивающееся имеющимся на расстоянии r градиентом давления. Таким образом, необходимое условие устойчивости гласит $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$; разлагая $\mu(r)$ по степеням положительной разности $r - r_0$, напомним это условие в виде

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0. \quad (28,1)$$

Согласно формуле (18,3) угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Вычисляя μ как $mr^2\dot{\varphi}$ и опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (28,1) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \dot{\varphi} > 0. \quad (28,2)$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ монотонно меняется с r от значения Ω_1 на внутреннем до значения Ω_2 на внешнем цилиндре. Если оба цилиндра вращаются в противоположных направлениях, т. е. Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки, то функция $\dot{\varphi}$ меняет знак в пространстве между цилиндрами и её произведение на постоянное число $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ не может быть везде положительным. Таким образом, в этом случае (28,2) не выполняется во всём объёме жидкости, и движение неустойчиво.

Пусть теперь оба цилиндра вращаются в одну сторону; выбирая это направление вращения в качестве положительного, имеем $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Тогда $\dot{\varphi}$ везде положительно, и для выполнения условия (28,2) необходимо, чтобы было

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \quad (28,3)$$

Если же $\Omega_2 R_2^2$ меньше, чем $\Omega_1 R_1^2$, то движение неустойчиво. Так, например, если внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$), а вращается только внутренний, то движение неустойчиво. Напротив, если покоится внутренний цилиндр ($\Omega_1 = 0$), то движение устойчиво.

Подчеркнём, что в изложенных рассуждениях совершенно не учитывалось влияние вязких сил трения при смещении элемента жидкости. Поэтому использованный метод применим лишь при достаточно малой вязкости, т. е. достаточно больших R .

Для исследования устойчивости движения при произвольных R надо, следуя общему методу, исходить из уравнений (26,1) (Г. Тэйлор, 1923). В данном случае невозмущённое распределение скоростей v_0 зависит

только от цилиндрической координаты r и не зависит ни от угла φ , ни от координаты z вдоль оси цилиндров. Таким образом, мы имеем для возмущения \mathbf{v}_1 систему линейных уравнений с коэффициентами, не содержащими не только времени, но и координат φ и z . Мы можем искать решения этих уравнений в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{f}(r) \quad (28,4)$$

с произвольно направленным вектором \mathbf{f} ; это решение зависит от z посредством периодического множителя e^{ikz} , а «волновой вектор» k определяет периодичность возмущения вдоль оси z . Допустимые частоты ω , получающиеся в результате решения уравнений с надлежащими граничными условиями в плоскости, перпендикулярной к оси z ($\mathbf{v}_1 = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$), будут при этом функциями от k , зависящими, как от параметра, от R : $\omega = \omega(k, R)$. Момент возникновения неустойчивости определяется тем значением R , при котором функция $\gamma_1 = \text{Im } \omega$ впервые обращается при каком-либо k в нуль. При $R < R_{\text{кр}}$ функция $\gamma_1(k, R)$ везде отрицательна, а при $R > R_{\text{кр}}$ в некотором интервале значений k $\gamma_1 > 0$. Пусть $k_{\text{кр}}$ есть то значение k , для которого (при $R = R_{\text{кр}}$) γ_1 обращается в нуль. Соответствующая функция (28,4) определяет характер того (накладываемого на основное) движения, которое возникает в жидкости в момент потери устойчивости основным течением; оно периодически вдоль оси цилиндров с периодом длины $2\pi/k_{\text{кр}}$ ¹⁾.

Помимо решений вида (28,4), не зависящих вовсе от угла φ , рассматриваемая система уравнений обладает также решениями, в которых \mathbf{v}_1 содержит множитель $e^{im\varphi}$ (m — целое число). Нас, однако, интересует лишь то решение, которое соответствует первому появлению неустойчивости. В этом смысле решения с $m \neq 0$ никогда не исследовались. Однако естественное предположение о том, что неустойчивость прежде всего возникает по отношению к возмущениям с $m = 0$, полностью подтверждается экспериментальными наблюдениями.

Следует также иметь в виду, что и решение вида (28,4) при заданном k отнюдь не однозначно. Заданному k соответствует, вообще говоря, ряд различных решений (28,4) с различными ω . Из них снова нас интересует лишь то, которое даёт наименьшее значение $R_{\text{кр}}$.

Оказывается, что решению, приводящему к наименьшему значению $R_{\text{кр}}$, соответствует чисто мнимая функция $\omega(k)$. Поэтому при $k = k_{\text{кр}}$ не только $\text{Im } \omega = 0$, но и вообще $\omega = 0$. Это значит, что

¹⁾ При R , несколько превышающем $R_{\text{кр}}$, имеется уже не одно, а целый интервал значений k , для которых $\text{Im } \omega > 0$. Не следует, однако, думать, что возникающее при этом движение будет представлять собой одновременное наложение движений с разными периодичностями. В действительности при каждом R возникает движение со вполне определённой периодичностью, стабилизирующее всё течение в целом. Определение этой периодичности, однако, уже невозможно с помощью линеаризованного уравнения (26,1).

первая потеря устойчивости стационарным движением между вращающимися цилиндрами приводит к возникновению другого, тоже стационарного движения.

Ввиду большой сложности вычисления были доведены до численных результатов лишь для случая узкого зазора между цилиндрами ($R_2 - R_1 \ll R_2$). Они приводят к следующим результатам¹⁾.

На рис. 13 изображён примерный вид кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости движения (последняя заштрихована). Правая ветвь кривой, соответствующая вращению обоих цилиндров в одну сторону, имеет в качестве асимптоты прямую $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$.

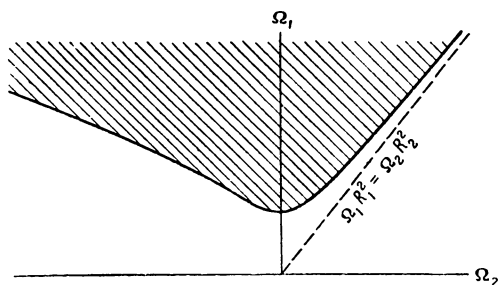


Рис. 13.

Увеличение числа Рейнольдса для данного типа движения означает увеличение обоих чисел $\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}$ и $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\nu}$ в одинаковое число раз. На диаграмме рис. 13 этому соответствует передвижение вверх по проходящей через начало координат прямой, имеющей определённый наклон. На правой части диаграммы (обе угловые скорости Ω_1 и Ω_2 положительны) все такие прямые, для которых $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} > 1$, нигде не пересекают кривую, ограничивающую область неустойчивости. Напротив, при $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} < 1$ и достаточном увеличении числа Рейнольдса мы всегда попадём в область неустойчивости в согласии с условием (28,3). На левой части диаграммы (Ω_1 и Ω_2 — различных знаков) всякая прямая, проходящая через начало координат, всегда пересекает в конце концов указанную кривую, т. е. движение может сделаться неустойчивым при любом отношении $\frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}$, опять в согласии с полученными выше результатами. При $\Omega_2 = 0$ (вращается только внутренний цилиндр) неустойчивость наступает при

$$\Omega_1 = 41,3 \frac{\nu}{h \sqrt{hR}} \quad (28,5)$$

(где $h = R_2 - R_1$).

¹⁾ Подробное изложение хода вычислений можно найти в книге: Н. Е. Кокин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, гл. III, § 2, Гостехиздат, 1948.

Устойчивость движения в не заштрихованной на рис. 13 области не означает, однако, что течение фактически остаётся здесь стационарным при сколь угодно больших значениях R . Эксперимент показывает, что существует граница, за которой становится возможным устойчивое нестационарное движение. В этой области стационарное движение «метастабильно»: оно устойчиво по отношению к достаточно малым возмущениям, но неустойчиво по отношению к более интенсивным возмущениям. Если под влиянием таких возмущений в некоторой области вдоль длины цилиндров возникает нестационарное движение, то оно, раз возникнув, «вытесняет» затем ламинарное движение во всём пространстве. Это нестационарное движение обладает сразу при своём возникновении большим числом «степеней свободы» (в объяснённом в § 27 смысле), т. е. представляет собой развитую турбулентность.

В заштрихованной на рис. 13 области движение тоже становится при достаточно больших R турбулентным; о характере его возникновения, однако, имеется очень мало данных.

Предельным случаем движения между вращающимися цилиндрами, соответствующим достаточно большим их радиусам и очень малым зазорам $h = R_2 - R_1$ является движение жидкости между двумя движущимися друг относительно друга параллельными плоскостями (см. § 17). Это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях числа $R = \frac{Uh}{\nu}$ (U — относительная скорость плоскостей). Устойчивое же турбулентное движение становится возможным при значениях R , превышающих примерно 1500.

§ 29. Устойчивость движения по трубе

Совершенно особым характером потери устойчивости обладает стационарное течение жидкости по трубе (рассмотренное в § 17).

Ввиду однородности потока вдоль оси x (вдоль длины трубы) невозмущённое распределение скоростей v_0 не зависит от координаты x . Аналогично изложенному в предыдущем параграфе мы можем поэтому искать решения уравнений (26,1) в виде

$$v_1 = e^{i(kx - \omega t)} f(y, z). \quad (29,1)$$

И здесь будет существовать такое значение $R = R_{кр}$, при котором $\gamma_1 = \text{Im } \omega$ впервые обращается при некотором значении k в нуль. Существенно, однако, что вещественная часть функции $\omega(k)$ теперь уже отнюдь не будет равна нулю.

Для значений R , лишь немного превышающих $R_{кр}$, интервал значений k , в котором $\gamma_1(k) > 0$, мал и расположен вокруг точки, в которой $\gamma_1(k)$ имеет максимум, т. е. $\frac{d\gamma_1}{dk} = 0$ (как это ясно из рис. 14). Пусть в некотором участке потока возникает слабое возмущение; оно

представляет собой волновой пакет, получающийся путём наложения ряда компонент вида (29,1). С течением времени будут усиливаться те из этих компонент, для которых $\gamma_1(k) > 0$; остальные же компоненты затухнут. Возникающий таким образом усиливающийся волновой пакет будет в то же время «сноситься» вниз по течению со скоростью, равной групповой скорости пакета $\frac{d\omega}{dk}$ (§ 66); поскольку речь идёт теперь о волнах со значениями волновых векторов в малом интервале вокруг точки, в которой $\frac{d\gamma_1}{dk} = 0$,

то величина

$$\frac{d\omega}{dk} \approx \frac{d\omega_1}{dk}$$

вещественна и потому действительно представляет собой истинную скорость распространения пакета.

Этот «снос» возмущений вниз по течению весьма существенен и придаёт всему явлению потери устойчивости совершенно иной характер по сравнению с тем, который был описан в § 28.

Мы видели, что для движения между вращающимися цилиндрами при $R > R_{кр}$ (когда существуют частоты с $\text{Im } \omega > 0$) основное стационарное течение оказывается вообще невозможным, так как уже ничтожные возмущения, раз возникнув, усиливаются до конечной амплитуды. При течении же в трубе усиление возмущения сопровождается его перемещением вниз по потоку; если же рассматривать движение в данном месте трубы, то окажется, что в нём возмущение не усиливается, а затухает со временем. Следует также иметь в виду, что, поскольку реально приходится, разумеется, иметь дело с трубами хотя и большой, но конечной длины, возникающее где-либо возмущение может оказаться «вынесенным» из трубы раньше, чем оно приведёт к истинному срыву ламинарного течения. Таким образом, и при $R > R_{кр}$ стационарное движение в трубе по существу устойчиво по отношению к малым возмущениям и принципиально может быть осуществлено при значениях R , значительно превышающих $R_{кр}$.

Поскольку возмущения возрастают с координатой x вниз по потоку, а не со временем в данной точке пространства, то при исследовании этого типа неустойчивости разумно поставить вопрос следующим образом. Предположим, что в заданном месте пространства на поток накладывается непрерывно действующее возмущение с заданной частотой ω , и посмотрим, что будет происходить с этим возмущением при его «снесе» вниз по течению. Обращая функцию $\omega = \omega(k)$, мы найдём, какой «волновой вектор» k соответствует заданной (вещественной) частоте ω . Если $\text{Im } k < 0$, то множитель e^{ikx} возрастает с увеличением x , т. е. возмущение усиливается вниз по течению. Кривая

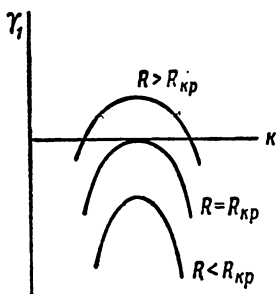


Рис. 14.

в плоскости ω, R , определяемая уравнением $\text{Im } k(\omega, R) = 0$, даёт границу устойчивости, разделяя для каждого R области значений частоты возмущений, усиливающихся и затухающих вниз по течению.

Фактическое проведение вычислений чрезвычайно сложно. Такое исследование было произведено полностью лишь для течения между двумя параллельными плоскостями (Лин, 1946)¹⁾. Естественно, однако, думать, что качественный характер результатов будет таким же и для течения по трубе кругового сечения.

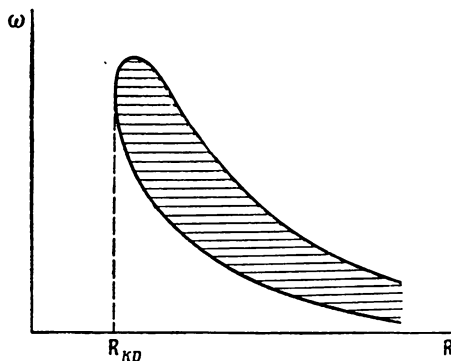


Рис. 15.

Кривая границы устойчивости для течения между двумя плоскостями изображена схематически на рис. 15. Заштрихованная область внутри кривой есть область неустойчивости. При $R \rightarrow \infty$ обе ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс²⁾. Для наименьшего значения R , при котором возможны незатухающие возмущения, вычисления дают значение $R_{кр} \approx 7700$, при-

чём R определяется как $\frac{hU}{\nu}$, где h — расстояние между плоскостями, а U — средняя по сечению скорость жидкости.

Таким образом, для всякого отличного от нуля значения частоты, не превышающего определённое максимальное значение, существует конечный интервал значений R , в котором возмущения с такой частотой усиливаются. Интересно, что малая, но конечная, вязкость жидкости оказывает в известном смысле дестабилизирующее влияние на устойчивость по сравнению с тем, что имело бы место для строго идеальной жидкости. Действительно, при $R \rightarrow \infty$ возмущения со всякой конечной частотой затухают; при введении же конечной вязкости мы в конце концов попадём в область неустойчивости, пока дальнейшее увеличение вязкости (уменьшение R) не выведет снова из этой области.

Эти вычисления, однако, еще не дают ответа на вопрос о том, не возникает ли (при достаточно больших R) при течении по трубе также и истинная неустойчивость по отношению к бесконечно малым возму-

¹⁾ Подробное изложение хода вычислений см. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, гл. III, § 3, Гостехиздат, 1948.

²⁾ Асимптотические уравнения обеих ветвей граничной кривой при больших R гласят:

$$\frac{\omega h}{U} = \frac{5,0}{R^{3/11}}, \quad \frac{\omega h}{U} = \frac{11,2}{R^{8/7}}.$$

нениям, т. е. неустойчивость, приводящая к возрастанию возмущений со временем в данной точке пространства. Сформулируем в общих чертах, что означала бы такая неустойчивость в математическом смысле. Рассмотрим некоторое малое возмущение, возникающее в момент времени $t=0$ в конечной области пространства. Разложив в интеграл Фурье по координате x , представим его в виде

$$\iint f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi dk,$$

где $f(x)$ — некоторая функция, описывающая начальное возмущение. С течением времени каждая из компонент Фурье возмущения будет меняться пропорционально множителю $e^{-i\omega t}$ с частотой $\omega = \omega(k, R)$, так что возмущение в целом в момент времени t определится интегралом

$$\iint f(\xi) e^{ik(x-\xi)-i\omega t} d\xi dk.$$

Поскольку $f(x)$ отлично от нуля лишь в конечной области пространства, то $x - \xi$ пробегает конечный интервал значений. Поэтому предельное поведение написанного интеграла при больших t определится в основном поведением интеграла

$$\int e^{-i\omega(k)t} dk.$$

Если этот интеграл стремится при $t \rightarrow \infty$ к бесконечности, то это означало бы наличие истинной абсолютной неустойчивости течения.

До настоящего времени такое исследование не было произведено ни для какого случая. Экспериментальные данные о течении в трубах дают, однако, основание полагать, что истинная неустойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям отсутствует при любых значениях R . На это указывает то обстоятельство, что чем тщательнее устраняются возмущения, возникающие у входа жидкости в трубу, тем до более высоких значений удаётся наблюдать ламинарное течение в ней¹⁾.

В то же время экспериментальные данные показывают, что существует ещё одно критическое число Рейнольдса (обозначим его $R'_{кр}$), определяющее границу, до которой вообще не может существовать устойчивого нестационарного движения (ср. конец § 27). Если в каком-либо участке вдоль длины трубы возникает турбулентное движение, то при $R < R'_{кр}$ турбулентная область, «сносясь» вниз по течению, в то же время будет сужаться, пока не исчезнет совсем; напротив, при $R > R'_{кр}$ она будет с течением времени расширяться, захватывая

1) Фактически ламинарное течение удавалось наблюдать вплоть до $R \approx 50\,000$, где $R = \frac{dU}{\nu}$, d — диаметр трубы, U — средняя по сечению скорость в ней.

всё больший участок потока. Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $R < R'_{кр}$ они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они ни были. Напротив, при $R > R'_{кр}$ движение станет турбулентным на всём протяжении трубы, причём для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше R ¹⁾. Таким образом, ламинарное течение по трубе при $R > R'_{кр}$ метастабильно, будучи неустойчивым по отношению к возмущениям конечной интенсивности — тем меньшей, чем больше R .

Как уже было указано в конце предыдущего параграфа, нестационарное движение, возникающее при «срыве» метастабильного ламинарного течения, является уже сразу вполне турбулентным. В этом смысле характер возникновения турбулентности в трубе существенным образом отличается от возникновения турбулентности в результате абсолютной неустойчивости стационарного обтекания конечных тел. В последнем случае возникновение нестационарного движения при прохождении через $R_{кр}$ происходит, повидимому, непрерывным образом, без скачков, с постепенным увеличением «числа степеней свободы» (как это было объяснено в §§ 26, 27). При течении же жидкости по трубе возникновение турбулентности происходит скачком. С этим различием связано, в частности, различие между зависимостью сопротивления от числа Рейнольдса в обоих случаях. Если, например, речь идёт о движении какого-нибудь тела в жидкости, то испытываемая им сила сопротивления F не претерпевает скачка при $R = R_{кр}$ (когда стационарное обтекание делается абсолютно неустойчивым). В этой точке кривая $F(R)$ должна иметь только излом — соответственно изменению характера движения. При течении же в трубе при $R \geq R_{кр}$ имеется по существу два различных закона сопротивления: один для стационарного, а другой — для турбулентного течений. При каком бы значении R ни произошёл переход одного в другое, сила сопротивления испытывает скачок.

§ 30. Неустойчивость тангенциальных разрывов

Движением несжимаемой жидкости, абсолютно неустойчивым в идеальной жидкости, являются течения, при которых два слоя жидкости двигались бы друг относительно друга, «скользя» один по другому; поверхность раздела между этими двумя слоями жидкости была бы поверхностью «тангенциального разрыва», на которой скорость жидкости (направленная по касательной к поверхности) испытывала бы скачок. В дальнейшем мы увидим, к какой картине фактически осуществляющегося движения приводит эта неустойчивость (§ 35); здесь же проведём доказательство сделанного утверждения.

1) Для трубы кругового сечения $R'_{кр}$ лежит между 1600 и 1700. Для течения между параллельными плоскостями турбулентное движение наблюдалось, начиная с $R = 1400$.

Рассматривая небольшой участок поверхности разрыва и течение жидкости вблизи него, мы можем считать этот участок плоским, а скорости v_1 и v_2 жидкости по обеим его сторонам постоянными. Не ограничивая общности, можно считать, что одна из этих скоростей равна нулю; этого всегда можно добиться соответствующим выбором системы координат. Пусть $v_2 = 0$, а v_1 обозначим просто как v ; направление v выберем в качестве оси x , а ось z направим по нормали к поверхности.

Пусть поверхность разрыва испытывает слабое возмущение, при котором все величины — координаты точек самой поверхности, давление и скорость жидкости — являются периодическими функциями, пропорциональными $e^{i(kx - \omega t)}$. Рассмотрим жидкость с той стороны от поверхности разрыва, где её скорость равна v , и обозначим посредством v' малое изменение скорости при возмущении. Согласно уравнениям (26,1) (с постоянным $v_0 = v$ и $\nu = 0$) имеем для возмущения v' следующую систему:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + (v \nabla) \mathbf{v}' = - \frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Поскольку v направлено по оси x , то второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{\nabla p'}{\rho}. \quad (30,1)$$

Если применить к обеим его сторонам операцию div , то в силу первого уравнения мы получим слева нуль, так что p' должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0. \quad (30,2)$$

Пусть $\zeta = \zeta(x, t)$ есть смещение вдоль оси z точек поверхности разрыва при возмущении. Производная $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ есть скорость изменения координаты ζ поверхности при заданной координате x . Поскольку нормальная к поверхности разрыва компонента скорости жидкости равна скорости перемещения самой поверхности, то в требуемом приближении имеем:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_z - v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (30,3)$$

(для v'_z надо, конечно, брать её значение на самой поверхности).

Будем искать p' в виде

$$p' = f(z) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Подстановка в (30,2) даёт для $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0,$$

откуда $f = \text{const. } e^{\pm kz}$. Пусть пространство с рассматриваемой стороны поверхности разрыва (сторона 1) соответствует положительным z . Тогда мы должны взять $f = \text{const. } e^{-kz}$, так что

$$p' = \text{const. } e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz}. \quad (30,4)$$

Подставляя это выражение в z -компоненту уравнения (30,1), найдём¹⁾:

$$v'_z = \frac{kp'_1}{i\rho_1(kv - \omega)}. \quad (30,5)$$

Смещение ζ тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю $e^{i(kx - \omega t)}$, и получаем из (30,3):

$$v'_z = i\zeta(kv - \omega).$$

Вместе с (30,5) это даёт

$$p'_1 = -\zeta \frac{\rho_1(kv - \omega)^2}{k}. \quad (30,6)$$

Давление p'_2 по другую сторону поверхности выразится такой же формулой, в которой надо теперь положить $v = 0$ и, кроме того, изменить общий знак (соответственно тому, что в этой области $z < 0$ и все величины должны быть пропорциональны e^{kz} , а не e^{-kz}). Таким образом,

$$p'_2 = \zeta \frac{\rho_2\omega^2}{k}. \quad (30,7)$$

Мы пишем различные плотности ρ_1 и ρ_2 , имея в виду охватить также и случай, когда речь идёт о границе раздела между двумя различными несмешивающимися жидкостями.

Наконец, из условия равенства давлений p'_1 и p'_2 на поверхности разрыва получаем:

$$\rho_1(kv - \omega)^2 = -\rho_2\omega^2,$$

откуда находим искомую зависимость между ω и k :

$$\omega = kv \frac{\rho_1 \pm i \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (30,8)$$

Мы видим, что ω оказывается комплексной величиной, причём всегда имеются ω с положительной мнимой частью. Таким образом, тангенциальные разрывы оказываются абсолютно неустойчивыми; они неустойчивы уже по отношению к бесконечно малым возмущениям. В таком виде этот результат относится к сколь угодно малой вязкости, т. е. сколь угодно большим R . В этом случае не имеет смысла различать неустойчивость «сносового» типа от истинной абсолютной

1) Случай $kv = \omega$, принципиально возможный, нас не интересует, так как неустойчивость может быть связана только с комплексными, а не действительными «частотами» ω .

неустойчивости, поскольку с увеличением k мнимая часть ω неограниченно возрастает, и потому «коэффициент усиления» возмущения при его сносе может быть сколь угодно велик.

При учёте конечной вязкости тангенциальный разрыв теряет свою резкость; изменение скорости от одного до другого значения происходит в слое конечной толщины. Вопрос об устойчивости такого движения в математическом отношении вполне аналогичен вопросу об устойчивости движения в ламинарном пограничном слое с перегибом в профиле скоростей (§ 41). Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в данном случае неустойчивость наступает весьма рано.

§ 31. Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях R характеризуется наличием чрезвычайно нерегулярного, беспорядочного изменения скорости со временем в каждой точке потока («развитая турбулентность»). Скорость всё время пульсирует вокруг некоторого своего среднего значения; отметим уже здесь, что размах этих пульсаций, вообще говоря, не мал по сравнению с величиной самой скорости. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока, рассматриваемого в заданный момент времени. Траектории жидких частиц в турбулентном потоке чрезвычайно сложны, что приводит к наличию сильного перемешивания жидкости.

Как было указано в предыдущем параграфе, турбулентное движение обладает очень большим числом степеней свободы. Значения соответствующих этим степеням свободы начальных фаз β_i определяются начальными условиями движения. Но задание точных начальных условий, которые бы определяли значения такого большого числа величин, является настолько нереальным, что самая постановка вопроса в такой форме физически бессмысленна.

Положение здесь аналогично тому, которое имело бы место при попытке рассмотреть движение всех молекул, составляющих какое-нибудь макроскопическое тело, с помощью уравнений механики, — и здесь постановка вопроса о задании начальных условий, определяющих начальные значения координат и скоростей всех молекул, и дальнейшем интегрировании уравнений движения является физически бессмысленной. Аналогию можно провести несколько дальше. Макроскопическое тело, рассматриваемое как состоящее из отдельных молекул, обладает грандиозным числом степеней свободы. Точное, микроскопическое, описание состояния тела требовало бы определения значения координат и скоростей всех составляющих его частиц. Точный ход изменения этих величин со временем зависит от их значений в начальный момент времени. Но благодаря крайней сложности и беспорядочности движения молекул можно считать, что в течение достаточно большого промежутка времени скорости и координаты

молекул пройдут через все возможные наборы их значений, так что влияние начальных условий сглаживается и исчезает. Это обстоятельство, как известно, приводит к возможности рассматривать макроскопические тела статистическим образом.

Аналогичное положение имеет место для турбулентного движения. Для точного описания изменения со временем распределения скоростей в движущейся жидкости должны быть заданы значения всех начальных фаз β_i , после чего будут известны значения всех фаз $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ в каждый момент времени. Мы видели, что, вне зависимости от значений начальных фаз β_i , в течение достаточно долгого времени жидкость пройдёт через состояния, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному состоянию, определяющемуся любым возможным набором одновременных значений фаз φ_i . Отсюда следует, что при рассмотрении турбулентного движения в течение достаточно больших промежутков времени конкретные начальные условия перестают играть какую-либо роль. Это обстоятельство показывает, что теория турбулентного движения должна иметь статистический характер. В настоящее время полная количественная теория турбулентности ещё не построена. Тем не менее известен ряд весьма существенных качественных результатов, изложению которых и посвящены следующие параграфы.

Введём понятие о средней скорости движения, получающейся в результате усреднения по большим промежуткам времени истинной скорости в каждой точке пространства. При таком усреднении нерегулярность изменения скорости сглаживается и средняя скорость оказывается плавно меняющейся вдоль потока функцией. Мы будем в дальнейшем обозначать среднюю скорость посредством $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$. Разность $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ между истинной и средней скоростями, обнаруживающую характерное для турбулентности нерегулярное изменение, мы будем называть «пульсационной» частью скорости.

Рассмотрим подробнее характер накладывающегося на усреднённый поток нерегулярного, «пульсационного», движения. Это движение можно в свою очередь качественно рассматривать как результат наложения движений («турбулентных пульсаций») различных, как мы будем говорить, масштабов (под масштабом движения подразумевается порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения). По мере возрастания числа Рейнольдса появляются сначала крупномасштабные пульсации; чем меньше масштаб движения, тем позже такие пульсации появляются. При очень больших числах Рейнольдса в турбулентном потоке присутствуют пульсации с масштабами от самых больших до очень малых. Основную же роль во всяком турбулентном потоке играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых — порядок величины характеристических длин, определяющих размеры области, в которой происходит турбулентное движение; в дальнейшем мы будем обозначать порядок величины этого основного масштаба каждого данного

турбулентного движения посредством l . Эти крупномасштабные движения обладают наибольшими «амплитудами». Их скорость сравнима по порядку величины с изменениями средней скорости на протяжении расстояний l (порядок величины этих изменений будем обозначать как Δu)¹⁾. Соответствующие этим движениям частоты — порядка отношения u/l средней скорости u (а не её изменения Δu) к размерам l . Действительно, частота определяет период повторяемости картины движения, наблюдаемой из некоторой неподвижной системы отсчёта. Но относительно такой системы вся эта картина движется вместе со всей жидкостью со скоростью порядка u .

Мелкомасштабные же пульсации, соответствующие большим частотам, участвуют в турбулентном потоке со значительно меньшими амплитудами. Их можно рассматривать как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь сравнительно малая часть всей кинетической энергии жидкости.

Из описанной картины турбулентного движения можно сделать заключение о характере изменения пульсационной скорости вдоль потока (рассматриваемого в заданный момент времени). На протяжении больших расстояний (сравнимых с l) изменение пульсационной скорости определяется изменением скорости крупномасштабных пульсаций и потому сравнимо по величине с порядком Δu . На малых же (по сравнению с l) расстояниях оно определяется мелкомасштабными пульсациями и потому мало (по сравнению с Δu)²⁾. Такая же картина имеет место, если наблюдать изменение скорости со временем в заданной точке пространства. На протяжении малых (по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$) интервалов времени скорость испытывает незначительные изменения; в течение же больших промежутков времени скорость меняется на величины порядка Δu .

В число Рейнольдса R , определяющее свойства данного течения жидкости в целом, в качестве характеристических размеров входит длина l . Наряду с таким числом Рейнольдса можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса, имеющих в турбулентном потоке пульсаций различных масштабов. Если λ есть порядок величины масштаба данного движения, а v_λ — порядок величины его скорости,

1) Мы говорим здесь о порядке величины не самой средней скорости, а её изменения (на расстояниях порядка l), поскольку именно это изменение Δu характеризует скорость турбулентного движения. Абсолютная же величина средней скорости может быть произвольной, в зависимости от того, в какой системе отсчёта движение рассматривается.

Отметим также, что экспериментальные данные свидетельствуют о том, что масштабы основного турбулентного движения в действительности в несколько раз меньше, чем характеристические размеры l , а его скорость — в несколько раз меньше, чем Δu .

2) Но велико по сравнению с изменением средней скорости на том же малом расстоянии.

то соответствующее число Рейнольдса определяется как $R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}$.

Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

При больших числах Рейнольдса R велики также и числа Рейнольдса R_λ крупномасштабных движений. Но большие числа Рейнольдса эквивалентны малым вязкостям. Мы приходим, следовательно, к результату, что для крупномасштабного движения, являющегося как раз основным во всяком турбулентном потоке, вязкость жидкости не играет роли и может быть положена равной нулю, так что это движение описывается уравнением Эйлера. В частности, отсюда следует, что в крупномасштабном движении не происходит заметной диссипации энергии.

Вязкость жидкости становится существенной только для самых мелкомасштабных пульсаций, число Рейнольдса которых сравнимо с единицей (масштаб этих движений обозначим как λ_0 ; он будет определен в следующем параграфе). Именно в этих мелкомасштабных пульсациях, не существенных с точки зрения общей картины движения жидкости в турбулентном потоке, и происходит диссипация энергии.

Мы приходим, таким образом, к следующему представлению о диссипации энергии при турбулентном движении. От пульсаций с большими масштабами энергия переходит в пульсации с меньшими масштабами, практически не диссипируясь при этом. Можно сказать, что имеется как бы непрерывный «поток энергии» от крупномасштабным пульсациям, т. е. от малых частот к большим. Этот поток энергии диссипируется, т. е. кинетическая энергия переходит в тепло, в самых мелкомасштабных пульсациях¹⁾.

Поскольку вязкость жидкости существенна только для самых мелкомасштабных пульсаций, то можно утверждать, что все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от ν (более точно, эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условиях, в которых происходит движение). Это обстоятельство сужает круг величин, определяющих свойства турбулентного движения, в результате чего для исследования турбулентности приобретают большое значение соображения подобия, связанные с размерностью имеющих в нашем распоряжении величин.

Применим такие соображения к определению порядка величины диссипации энергии при турбулентном движении. Пусть ϵ есть среднее количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости²⁾. Мы видели, что эта энергия черпается из крупно-

¹⁾ Для поддержания «стационарного» состояния необходимо, конечно, наличие внешних источников энергии, непрерывно передающих её основному крупномасштабному движению.

²⁾ В этой главе буква ϵ будет обозначать среднюю диссипацию энергии, а не внутреннюю энергию жидкости!

масштабного движения, откуда постепенно передаётся во всё меньшие масштабы, пока не диссипируется в пульсациях масштаба $\sim \lambda_0$. Поэтому, несмотря на то, что диссипация обязана в конце концов вязкости жидкости, порядок величины ε может быть определён с помощью одних только величин, характерных для крупномасштабных движений. Таковыми являются плотность жидкости ρ , размеры l и скорость Δu . Из этих трёх величин можно составить всего одну комбинацию, обладающую той же размерностью, что и ε , т. е. $\frac{\rho \Delta u^3}{\rho \cdot \text{сек}} = \frac{\rho \Delta u^3}{\text{сек}^3}$. Таким способом получаем:

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}, \quad (31,1)$$

чем и определяется порядок величины диссипации энергии в турбулентном потоке.

Турбулентно движущуюся жидкость можно в некоторых отношениях качественно описывать как жидкость, обладающую некоторой, как говорят, «турбулентной вязкостью» $\nu_{\text{турб}}$, отличной от истинной кинематической вязкости ν . Характеризуя свойства турбулентного движения, $\nu_{\text{турб}}$ должно по порядку величины определяться величинами ρ , Δu , l . Единственной составленной из них величиной с размерностью кинематической вязкости является $\Delta u \cdot l$, поэтому

$$\nu_{\text{турб}} \sim \Delta u \cdot l. \quad (31,2)$$

Отношение турбулентной вязкости к обычной согласно этой формуле — порядка

$$\frac{\nu_{\text{турб}}}{\nu} \sim R,$$

т. е. растёт с числом Рейнольдса ¹⁾.

Диссипация энергии ε выражается посредством $\nu_{\text{турб}}$ формулой

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}} \left(\frac{\Delta u}{l} \right)^2 \quad (31,3)$$

¹⁾ В действительности, однако, в этом отношении должен стоять ещё довольно значительный численный коэффициент. Это связано с указанным выше обстоятельством, что l и Δu могут довольно заметно отличаться от истинных масштабов и скоростей турбулентного движения. Отношение $\frac{\nu_{\text{турб}}}{\nu}$ можно написать более точно в виде

$$\frac{\nu_{\text{турб}}}{\nu} \sim \frac{R}{R_{\text{кр}}},$$

где учитывается тот факт, что $\nu_{\text{турб}}$ и ν должны в действительности сравниваться по порядку величины не при $R \sim 1$, а при $R \sim R_{\text{кр}}$.

в соответствии с обычным определением вязкости. В то время как ν определяет диссипацию энергии по производным от истинной скорости по координатам, $\nu_{\text{турб}}$ связывает диссипацию с градиентом ($\sim \frac{\Delta u}{l}$) средней скорости движения.

Применим соображения подобия ещё для определения порядка величины Δp изменения давления на протяжении области турбулентного движения. Единственной величиной размерности давления, которую можно составить из ρ , l и Δu , является $\rho(\Delta u)^2$. Поэтому должно быть:

$$\Delta p \sim \rho (\Delta u)^2. \quad (31,4)$$

§ 32. Локальная турбулентность

Перейдём теперь к изучению свойств турбулентности в масштабах λ , малых по сравнению с основным масштабом l турбулентности. Об этих свойствах мы будем говорить как о локальных свойствах турбулентности. При этом мы будем рассматривать жидкость вдали от твёрдых стенок, точнее, на расстояниях от этих стенок, больших по сравнению с λ .

О такой мелкомасштабной турбулентности вдали от твёрдых тел можно высказать естественное предположение, что она обладает свойством изотропности. Это значит, что в участках, размеры которых малы по сравнению с l , свойства турбулентного движения одинаковы по всем направлениям; в частности, они не зависят от направления скорости усреднённого движения. Необходимо подчеркнуть, что здесь и везде ниже в этом параграфе, где говорится о свойствах турбулентного движения в малом участке жидкости, подразумевается относительное движение жидких частиц в этом участке, а не абсолютное движение, в котором принимает участие весь участок как целое и которое связано с движением более крупных масштабов.

Оказывается возможным получить целый ряд весьма существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений подобия. Эти результаты принадлежат *А. Н. Колмогорову* и *А. М. Обухова* (1941). Для этого выясним предварительно, какими параметрами могут вообще определяться свойства турбулентного движения в участках, малых по сравнению с l , но больших по сравнению с расстояниями λ_0 , на которых начинает играть роль вязкость жидкости; ниже будет идти речь именно о таких расстояниях. Этими параметрами является плотность ρ жидкости и, кроме того, ещё одна характеристика для каждого турбулентного потока величина — энергия ϵ , диссипируемая в единицу времени в единице массы жидкости. Мы видели, что ϵ представляет собой «поток энергии», непрерывно передаваемой от пульсаций с большими к пульсациям с меньшими масштабами. Поэтому, хотя диссипация энергии и обуславливается в конечном итоге вязкостью жидкости и происходит

в самых мелкомасштабных пульсациях, тем не менее величина ε определяет свойства движения и в больших масштабах. Что касается масштабов l и Δu размеров и скорости движения в целом, то естественно считать, что (при заданных ρ и ν) локальные свойства турбулентности от этих величин не зависят. Вязкость жидкости ν тоже не может входить ни в какие интересующие нас теперь величины (напоминаем, что речь идёт о расстояниях $\lambda \gg \lambda_0$).

Определим порядок величины v_λ изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка λ . Оно должно определяться только ρ , ε и, разумеется, самой величиной расстояния λ . Из этих трёх величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости; таковой является $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$. Поэтому можно утверждать, что должно быть:

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \quad (32,1)$$

Мы приходим, таким образом, к весьма существенному результату: изменение скорости на протяжении некоторого малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния (закон Колмогорова — Обухова). Величину v_λ можно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба порядка λ ¹⁾.

Поставим теперь вопрос несколько иначе. Именно, определим порядок величины v_τ изменения скорости в заданной точке пространства, испытываемого ею в течение промежутка времени τ , малого по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$ движения в целом. Для этого замечаем, что благодаря наличию общего течения каждый данный участок жидкости в продолжение промежутка времени τ перемещается в пространстве на расстояние порядка произведения $u\tau$ средней скорости u на время τ . Поэтому в данной точке пространства по истечении времени τ будет находиться участок жидкости, который в начальный момент был удалён от этой точки на расстояние $u\tau$. Искомую величину v_τ мы можем, следовательно, получить, непосредственно подставляя в (26,1) $u\tau$ вместо λ :

$$v_\tau \sim (\varepsilon u\tau)^{1/3}. \quad (32,2)$$

1) Изменение v_λ скорости на малых расстояниях есть, в основном, изменение пульсационной части скорости; изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях.

К соотношению (32,1) можно притти и другим путём, выражая постоянную величину — диссипацию ε — через величины, характеризующие пульсации масштаба λ . Именно, ε должно быть пропорционально квадрату градиента скорости v_λ и соответствующему коэффициенту турбулентной вязкости $\nu_{\text{турб}\lambda} \sim v_\lambda \lambda$ (ср. (31,2) — (31,3)):

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}\lambda} \left(\frac{v_\lambda}{\lambda} \right)^2 \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda},$$

откуда и получается (32,1).

Таким образом, изменение скорости в течение промежутка времени τ пропорционально кубическому корню из этого промежутка.

От величины v_τ следует отличать изменение v'_τ скорости данного перемещающегося в пространстве участка жидкости. Это изменение может, очевидно, зависеть только от величин ρ , ϵ , определяющих локальные свойства турбулентности, и, разумеется, от величины самого интервала времени τ . Составляя из ρ , ϵ , τ единственную комбинацию размерности скорости, получаем для искомого изменения

$$v'_\tau \sim (\epsilon\tau)^{1/2}. \quad (32,3)$$

В отличие от изменения скорости в заданной точке пространства оно пропорционально квадратному, а не кубическому корню из τ . Легко видеть, что для малых τ (по сравнению с T) v'_τ всегда меньше, чем v_τ ¹⁾.

С помощью выражения (31,1) для ϵ можно переписать (32,1) в виде

$$v_\lambda \sim \Delta u \left(\frac{\lambda}{T}\right)^{1/3}. \quad (32,4)$$

Аналогично можно написать v_τ как

$$v_\tau \sim \Delta u \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3} \quad (32,5)$$

(где $T \sim l/u$).

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости. Эти расстояния λ_0 определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке (эту величину называют «внутренним масштабом» турбулентности в противоположность «внешнему масштабу» l). Для этого составляем «число Рейнольдса» $R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}$; с помощью (32,4) получаем:

$$R_\lambda \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu^{1/3}}.$$

Вводя число Рейнольдса $R \sim \frac{\Delta u \cdot l}{\nu}$ движения в целом, переписываем это в виде

$$R_\lambda \sim R \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}.$$

Порядок величины λ_0 определяется тем, что должно быть $R_{\lambda_0} \sim 1$. Отсюда находим:

$$\lambda_0 = \frac{l}{R^{3/4}}. \quad (32,6)$$

1) Неравенство $v'_\tau \ll v_\tau$ по существу уже подразумевалось при выводе (32,2).

К этому же выражению можно притти, составляя единственную комбинацию размерности длины из величин ρ , ϵ , ν :

$$\lambda_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4},$$

после чего ϵ можно выразить через Δu и l посредством (31,1).

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности падает при увеличении числа Рейнольдса обратно пропорционально этому числу в степени 3/4. Для соответствующей скорости имеем:

$$v_{\lambda_0} \sim \frac{\Delta u}{R^{1/4}}. \quad (32,7)$$

Она тоже падает с увеличением R . Наконец, порядок величины частот, соответствующих движениям этих масштабов, есть

$$\omega_0 \sim u/\lambda_0$$

или

$$\omega_0 \sim \frac{u}{l} R^{3/4}. \quad (32,8)$$

Этим определяется порядок величины верхнего конца частотного спектра турбулентного движения; нижний его конец лежит при частотах порядка u/l . Таким образом, диапазон частот растёт пропорционально числу Рейнольдса в степени 3/4.

Аналогичные соображения дают возможность определить порядок величины числа степеней свободы турбулентного движения. Обозначим посредством n число степеней свободы, приходящихся на единицу объёма жидкости; n имеет размерность $1/\text{см}^3$. Это число может зависеть только от величин ρ , ϵ и ν , кроме того, от вязкости ν , поскольку ею определяется нижний предел масштабов турбулентных движений. Из этих трёх величин можно составить всего одну величину размерности $1/\text{см}^3$, именно, $\left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{3/4}$; это есть не что иное, как $1/\lambda_0^3$ — результат, который естественно было ожидать. Таким образом, имеем:

$$n \sim \frac{1}{\lambda_0^3} \sim \frac{1}{l^3} R^{9/4}. \quad (32,9)$$

Полное число N степеней свободы получается умножением n на объём области турбулентного движения, имеющий порядок величины l^3 ¹⁾:

$$N \sim R^{9/4}. \quad (32,10)$$

¹⁾ Формулы (32,6)—(32,10) определяют закон изменения соответствующих величин с числом Рейнольдса. Однако, что касается количественной стороны дела, то следует иметь в виду, что во всех этих формулах может в действительности стоять значительный численный коэффициент. Так, число степеней свободы должно быть порядка единицы не при $R \sim 1$, а при $R \sim R_{кр}$. Поэтому надо писать в (32,10) вместо R отношение $R/R_{кр}$, так что

$$N \sim \left(\frac{R}{R_{кр}}\right)^{9/4}.$$

Наконец, остановимся на свойствах движения в участках, размеры λ которых малы по сравнению с λ_0 . В таких участках движение обладает правильным характером, и его скорость меняется плавно. Поэтому мы можем здесь разложить v_λ в ряд по степеням λ и, сохранив только первый член, получим $v_\lambda = \text{const} \cdot \lambda$. Порядок величины const может быть определён из требования, чтобы при $\lambda \sim \lambda_0$ было $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$.

Это даёт $\text{const} \sim \frac{v_{\lambda_0}}{\lambda_0}$, и подставляя (32,6) — (32,7), получим:

$$v_\lambda \sim \frac{\Delta u}{l} R^{1/2} \lambda. \quad (32,11)$$

Эту формулу можно получить также и путём непосредственного приравнивания двух выражений для диссипации энергии ϵ : выражения (31,1) $\frac{(\Delta u)^3}{l}$, определяющего ϵ посредством величин, характеризующих крупномасштабное движение, и выражения $\nu \left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2$, определяющего ту же величину через градиент скорости ($\sim v_\lambda/\lambda$) тех пульсаций, в которых фактически и происходит диссипация.

ЗАДАЧА

Две жидкие частицы находятся на малом расстоянии λ_1 друг от друга (большом по сравнению с λ_0). Определить порядок величины времени τ , в течение которого частицы разойдутся на расстояние λ_2 ($\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll l$).

Решение. Если $\lambda \gg \lambda_0$, то имеем из соображений размерности $\frac{d\lambda}{dt} \sim (\epsilon \lambda)^{1/3}$. Интегрируя это соотношение и считая, что $\lambda_2 \gg \lambda_1$, получим:

$$\tau \sim \left(\frac{\lambda_2^3}{\epsilon}\right)^{1/3}.$$

§ 33. Корреляция скоростей

Уже формула (32,1) качественно определяет корреляцию скоростей в локальной турбулентности, т. е. связь между скоростями в двух близких точках потока. Введём теперь величины, которые могут служить количественной характеристикой этой корреляции¹⁾. Такими величинами являются, например, компоненты тензора

$$B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})}, \quad (33,1)$$

где v_2 и v_1 — скорости жидкости в двух близких точках потока,

¹⁾ Излагаемые ниже в этом параграфе результаты были получены Карманом и Говартом (1938) и А. Н. Колмогоровым (1941).

а черта обозначает усреднение по времени ¹⁾). Радиус-вектор между точками 1 и 2 (направленный от 1 к 2) обозначим посредством \mathbf{r} ; его величину r будем считать малой по сравнению с l (но не обязательно большой по сравнению с внутренним масштабом турбулентности λ_0).

В силу изотропии локальной турбулентности тензор B_{ik} не может зависеть ни от какого избранного направления в пространстве. Единственным вектором, который может входить в выражение для B_{ik} , является радиус-вектор \mathbf{r} . Другими словами, в B_{ik} может входить, кроме абсолютной величины r вектора \mathbf{r} , только единичный тензор δ_{ik} и единичный вектор \mathbf{n} в направлении \mathbf{r} . Наиболее общий вид такого тензора второго ранга есть

$$B_{ik} = A(r) \delta_{ik} + B(r) n_i n_k. \quad (33,2)$$

Выберем оси координат так, чтобы направление одной из осей совпадало с направлением \mathbf{n} ; компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как v_r , а перпендикулярную \mathbf{n} составляющую скорости будем отличать индексом t . Компонента B_{rr} есть тогда среднее значение квадрата относительной скорости двух близких жидких частиц в их движении навстречу друг другу. Аналогично B_{tt} есть средний квадрат скорости вращательного движения одной частицы относительно другой, а B_{rt} — среднее значение от произведения этих двух составляющих скорости. Поскольку $n_r = 1$, $n_t = 0$, то из (33,2) имеем:

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{rt} = 0. \quad (33,3)$$

Выведем соотношение, связывающее B_{rr} и B_{tt} .

Для этого предварительно замечаем, что изменение скорости на малых расстояниях обусловлено в основном мелкомасштабными пульсациями. С другой стороны, свойства локальной турбулентности не зависят от имеющего наряду с ней место крупномасштабного движения. Поэтому для вычисления тензора B_{ik} достаточно рассмотреть частный случай полностью изотропного и однородного турбулентного движения, в котором усредненное движение жидкости вообще отсутствует ²⁾. Раскроем скобки в определении (33,1):

$$B_{ik} = \overline{v_{1i} v_{1k}} + \overline{v_{2i} v_{2k}} - \overline{v_{1i} v_{2k}} - \overline{v_{1k} v_{2i}}.$$

¹⁾ При отсутствии корреляции между значениями скорости в точках 1 и 2 средние значения произведений в (33,1) сводились бы к произведениям средних значений каждого множителя в отдельности и потому обращались бы в нуль.

²⁾ Такое движение можно представлять себе как движение в жидкости, подвергнутой сильному «взбалтыванию» и затем оставленной в покое. Такое движение, разумеется, непременно затухает со временем. Под усреднением в формуле (33,1) надо при этом, строго говоря, понимать не усреднение по времени, а усреднение по всем возможным положениям точек 1 и 2 (при заданном расстоянии r между ними) в один и тот же момент времени,

В силу полной однородности и изотропности движения имеем теперь $\overline{v_{1i}v_{1k}} = \overline{v_{2i}v_{2k}}$ и $\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1k}v_{2i}}$. Таким образом,

$$B_{ik} = 2\overline{v_{1i}v_{1k}} - 2\overline{v_{1i}v_{2k}}. \quad (33,4)$$

Продифференцируем это выражение по координатам точки 2:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2\overline{v_{1i} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}}}.$$

Но в силу уравнения непрерывности $\frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}} = 0$, так что

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = 0.$$

Поскольку B_{ik} является функцией только от компонент $x_i = x_{2i} - x_{1i}$ вектора \mathbf{r} , то дифференцирование по x_{2k} эквивалентно дифференцированию по x_k . Подставляя (33,2), получаем после простого вычисления следующее соотношение:

$$A' + B' + \frac{2B}{r} = 0$$

($'$ означает дифференцирование по r). Подставляя сюда (33,3), переписываем это в виде

$$B'_{rr} + \frac{2}{r}(B_{rr} - B_{tt}) = 0,$$

откуда окончательно получаем общее соотношение между B_{rr} и B_{tt} :

$$B_{tt} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr}(r^2 B_{rr}). \quad (33,5)$$

На расстояниях r , больших по сравнению с λ_0 , разность скоростей пропорциональна $r^{1/3}$ (согласно (32,1)). Поэтому компоненты тензора B_{ik} для таких r пропорциональны $r^{2/3}$. Подставляя в (33,5) $B_{rr} = \text{const.} \cdot r^{2/3}$, $B_{tt} = \text{const.} \cdot r^{2/3}$, получаем следующее простое соотношение:

$$B_{tt} = \frac{4}{3} B_{rr}. \quad (33,6)$$

Для расстояний же r , малых по сравнению с λ_0 , разность скоростей пропорциональна r и, следовательно, B_{rr} и B_{tt} пропорциональны r^2 . Формула (33,5) приводит теперь к соотношению

$$B_{tt} = 2B_{rr}. \quad (33,7)$$

Для этих расстояний ($r \ll \lambda_0$) B_{tt} и B_{rr} могут ещё быть выражены, каждая в отдельности, через среднюю диссипацию энергии ϵ . Пишем $B_{rr} = ar$, где a — постоянная, и, комбинируя (33,2)—(33,4), находим:

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1i}v_{1k}} - ar^2 \delta_{ik} + \frac{ar^2}{2} n_i n_k.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем:

$$\overline{\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}}} = 15a, \quad \overline{\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}}} = 0.$$

Поскольку это имеет место при сколь угодно малых r , то можно здесь положить $x_{1i} = x_{2i}$, так что

$$\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2} = 15a, \quad \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}} = 0.$$

С другой стороны, согласно общей формуле (16,3) имеем для средней диссипации энергии:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i}\right)^2} = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2} + \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i}} \right] = 15a\nu,$$

откуда $a = \frac{\varepsilon}{15\nu}$. В результате получаем окончательно следующие соотношения, определяющие B_{rr} и B_{tt} через среднюю диссипацию энергии ¹⁾:

$$B_{tt} = \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2, \quad B_{rr} = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2. \quad (33,8)$$

Остановимся ещё на тензоре «тройной корреляции»

$$B_{ikl} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l})}. \quad (33,9)$$

Будем опять считать, что движение полностью однородно и изотропно. Рассмотрим предварительно вспомогательный тензор $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$. Этот тензор симметричен по индексам i и k , а в силу изотропии должен, как и B_{ik} , выражаться через n_i и δ_{ik} . Наиболее общий вид такого тензора есть

$$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} = C(r) \delta_{ik}n_l + D(r) (\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r) n_i n_k n_l. \quad (33,10)$$

Дифференцируя по x_{2l} , получаем в силу уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}} \overline{(v_{1i}v_{1k}v_{2l})} = \overline{v_{1i}v_{1k} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}} = 0.$$

¹⁾ Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую величины B_{rr} , B_{tt} для всех расстояний r , малых по сравнению с l . В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это явствует из следующих соображений. Мгновенное значение величины $(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})$ можно было бы принципиально выразить универсальным образом через диссипацию энергии ε в тот же момент времени. Однако при усреднении этих выражений будет существенным закон изменения ε в течение периодов крупномасштабных (масштабы $\sim l$) движений, различный для различных конкретных случаев движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным.

Подстановка сюда выражения для $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ приводит после простого вычисления, которое мы здесь не приводим, к двум равенствам:

$$\frac{d}{dr} [r^2(3C + 2D + F)] = 0,$$

$$C' + \frac{2}{r}(C + D) = 0.$$

Интегрирование первого даёт

$$3C + 2D + F = \frac{\text{const.}}{r^2}.$$

Но при $r = 0$ функции C , D , F должны оставаться конечными; поэтому надо положить $\text{const.} = 0$, так что

$$3C + 2D + F = 0.$$

Из обоих полученных таким образом уравнений находим:

$$D = -\left(C + \frac{rC'}{2}\right), \quad F = rC' - C. \quad (33,11)$$

Раскроем теперь скобки в (33,9). Легко видеть, что в силу изотропии движения средние значения $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{1l}}$ и $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{2l}}$ исчезают. Действительно, в этих произведениях все три скорости берутся в одной и той же точке; поэтому единственным тензором, через который может выражаться тензор $\overline{v_i v_k v_l}$, является δ_{ik} . Но из единичных тензоров невозможно составить симметрический тензор третьего ранга. Что касается таких средних значений, как $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ и $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{1l}}$, то они равны друг другу с обратным знаком (при перестановке точек 1 и 2 меняется знак вектора n_i в (33,10)). В результате получаем:

$$B_{ikl} = 2(\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} + \overline{v_{1i}v_{2k}v_{1l}} + \overline{v_{2i}v_{1k}v_{1l}}).$$

Подстановка (33,10) и (33,11) приводит к выражению

$$B_{ikl} = -2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(rC' - C)n_i n_k n_l. \quad (33,12)$$

Направляя опять одну из осей координат по направлению вектора \mathbf{n} , получаем для компонент тензора B_{ikl} :

$$B_{rrr} = -12C, \quad B_{rtt} = -2(C + rC'), \quad B_{rrt} = B_{itt} = 0.$$

Отсюда видно, что между отличными от нуля компонентами B_{rtt} и B_{rrr} имеет место соотношение

$$B_{rtt} = \frac{1}{6} \frac{d}{dr} (rB_{rrr}). \quad (33,13)$$

Наконец, оказывается возможным найти связь между компонентами тензоров B_{ik} и B_{ikl} . Для этого вычисляем производную $\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1i}v_{2k}}$ (напоминаем, что полностью однородное и изотропное движение непременно

затухает со временем). Выражая производные $\frac{\partial v_{1i}}{\partial t}$ и $\frac{\partial v_{2k}}{\partial t}$ с помощью уравнения Навье-Стокса, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1i} v_{2k}} = & - \frac{\partial}{\partial x_{1l}} (\overline{v_{1i} v_{1l} v_{2k}}) - \frac{\partial}{\partial x_{2l}} (\overline{v_{1i} v_{2k} v_{2l}}) - \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \left(\overline{\frac{p_1 v_{2k}}{\rho}} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \left(\overline{\frac{p_2 v_{1i}}{\rho}} \right) + \nu \Delta_1 \overline{v_{1i} v_{2k}} + \nu \Delta_2 \overline{v_{1i} v_{2k}}. \end{aligned}$$

При использовании свойства однородности и изотропности движения надо иметь в виду, что при перестановке точек 1 и 2 изменяется знак \mathbf{r} , а потому надо изменить знак производных (первых) по координатам. Поэтому два первых и два последних члена попарно равны друг другу. Что же касается третьего и четвертого, то они равны нулю.

(Действительно, среднее значение $\overline{p_1 v_{2k}}$ должно в силу изотропии иметь вид $f(r) n_k$. С другой стороны, дивергенция $\frac{\partial}{\partial x_{2k}} (\overline{p_1 v_{2k}}) = p_1 \frac{\partial \overline{v_{2k}}}{\partial x_{2k}}$ равна нулю. Но единственным центрально-симметрическим вектором с везде равной нулю дивергенцией является вектор $\frac{\text{const.}}{r^2} n_k$; такой вектор обращался бы в бесконечность при $r = 0$, что невозможно. Поэтому должно быть $\text{const.} = 0$.)

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{1i} v_{2k}} = -2 \frac{\partial}{\partial x_{1l}} \overline{v_{1i} v_{1l} v_{2k}} = 2 \nu \Delta_1 \overline{v_{1i} v_{2k}}. \quad (33,14)$$

Сюда надо подставить согласно выведенным выше формулам

$$\begin{aligned} \overline{v_{1i} v_{2k}} &= \overline{v_{2i} v_{2k}} - \frac{1}{2} B_{ik}, \\ \overline{v_{1i} v_{1l} v_{2k}} &= -\frac{B_{rrr}}{12} \delta_{il} n_k + \frac{1}{12} \left(\frac{r B'_{rrr}}{2} + B_{rrr} \right) (\delta_{ik} n_l + \delta_{lk} n_i) - \\ & - \frac{1}{12} (r B'_{rrr} - B_{rrr}) n_i n_k n_l. \end{aligned} \quad (33,15)$$

В первом из этих выражений ввиду полной однородности и изотропии движения заменяем $\overline{v_{2k} v_{2l}}$ на $1/3 \overline{v^2} \delta_{ik}$, так что

$$\overline{v_{1i} v_{2k}} = \frac{\overline{v^2}}{3} \delta_{ik} - \frac{1}{2} B_{ik}. \quad (33,16)$$

Производная же по времени от кинетической энергии единицы объёма $\frac{\rho \overline{v^2}}{2}$ есть не что иное, как диссипация энергии — ϵ ; поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v^2} = -\frac{2}{3} \epsilon.$$

Простое, но довольно длинное вычисление приводит к следующему уравнению:

$$-\frac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{2}\frac{\partial B_{rrr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4}\frac{\partial(r^4 B_{rrr})}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right). \quad (33,17)$$

Поскольку r предполагается малым, то в левой части этого уравнения можно с достаточной точностью положить $r = 0$, т. е. пренебречь B_{rr} по сравнению с ϵ . Умножив оставшееся равенство на r^4 и проинтегрировав по r (с учётом обращения корреляционных функций в нуль при $r = 0$), получим следующее соотношение между B_{rr} и B_{rrr} , принадлежащее *А. Н. Колмогорову*:

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\epsilon r + 6\nu\frac{dB_{rr}}{dr}. \quad (33,18)$$

Соотношение (33,18), как и (33,13), справедливо при r как меньших, так и больших λ_0 . При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий вязкость, мал и мы имеем просто

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (33,19)$$

Если же подставить в (33,18) при $r \ll \lambda_0$ выражение (33,8) для B_{rr} , то получится нуль; это связано с тем, что B_{rrr} в этом случае должно быть третьего порядка по r , так что члены первого порядка должны сократиться¹⁾.

§ 34. Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение ротора скорости вдоль объёма жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших R) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объём жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой ротор скорости отсутствует, и движение потенциально. Ротор скорости оказывается, таким образом, распределённым не по всему объёму жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

Возможность существования такой отграниченной области вихревого движения является следствием того, что турбулентное движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описывающееся

1) Отношение $|B_{rrr}/B_{rr}^{3/2}|$ в областях $l \gg r \gg \lambda_0$ и $r \ll \lambda_0$ должно иметь постоянные значения. Экспериментальные же данные показывают, что фактически эта величина примерно постоянна вообще при всех r и равна около 0,4.

уравнениями Эйлера¹⁾. Мы видели (§ 8), что для движения идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости. В частности, если в какой-нибудь точке линии тока ротор скорости равен нулю, то это имеет место и вдоль всей этой линии. Напротив, если в какой-нибудь точке линии тока $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, то он отличен от нуля вдоль всей линии тока. Отсюда ясно, что наличие отграниченных областей вихревого и безвихревого движения совместимо с уравнениями движения, если область вихревого движения представляет собой область, за границы которой не выходят находящиеся внутри неё линии тока. Такое распределение ротора скорости будет устойчивым, и ротор скорости не будет «проникать» за поверхность раздела.

Одним из свойств области вихревого турбулентного движения является то, что обмен жидкостью между нею и окружающим пространством может быть только односторонним. Жидкость может втекать в неё из области потенциального движения, но никогда не вытекает из неё.

Подчеркнём, что приведённые здесь соображения не могут, конечно, рассматриваться как сколько-нибудь точное доказательство высказанных утверждений. Однако наличие отграниченных областей вихревого турбулентного движения, повидимому, подтверждается опытом.

Как в вихревой, так и в безвихревой областях движение турбулентно. Однако характер этой турбулентности совершенно различен в обеих областях. Для выяснения происхождения этого различия обратим внимание на следующее общее свойство потенциального движения, описывающегося уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Предположим, что движение периодически в плоскости x, y , так что φ зависит от x и y посредством множителя вида $e^{ik_1x + ik_2y}$; тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2) \varphi = -k^2 \varphi,$$

и поскольку сумма вторых производных должна быть равна нулю, ясно, что вторая производная по координате z равна φ , умноженному на положительный коэффициент: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k^2 \varphi$. Но тогда зависимость φ от z будет определяться затухающим множителем вида e^{-kz} при $z > 0$ (неограниченное возрастание, как e^{kz} , очевидно, невозможно). Таким образом, если потенциальное движение периодически в некоторой плоскости, то оно должно быть затухающим вдоль перпендикулярного к этой плоскости направления. При этом, чем больше k_1 и k_2 , т. е. чем меньше период повторяемости движения в плоскости x, y , тем

¹⁾ Границей применимости этих уравнений к турбулентному движению являются расстояния порядка λ_0 . Поэтому и о резкой границе между областями вихревого и безвихревого движений можно говорить только с точностью до таких расстояний.

быстрее затухает движение вдоль оси z . Все эти рассуждения остаются качественно применимыми и в тех случаях, когда движение не является строго периодическим, а лишь обнаруживает некоторую качественную повторяемость.

Отсюда непосредственно вытекает следующий результат. Вне области вихревого движения турбулентные пульсации должны затухать, причём тем быстрее, чем меньше их масштаб. Другими словами, мелкомасштабные пульсации не проникают глубоко в область потенциального движения. В результате заметную роль в этой области играют лишь самые крупномасштабные пульсации, затухающие лишь на расстояниях порядка величины размеров (поперечных) вихревой области, как раз играющих в данном случае роль основного масштаба турбулентности. На расстояниях, больших этих размеров, турбулентность практически отсутствует и движение можно считать ламинарным.

Мы видели, что диссипация энергии при турбулентном движении связана с наиболее мелкомасштабными пульсациями; крупномасштабные движения заметной диссипацией не сопровождаются, с чем и связана возможность применения к ним уравнения Эйлера. Ввиду сказанного выше мы приходим к существенному результату, что диссипация энергии происходит в основном лишь в области вихревого турбулентного движения и практически не имеет места вне этой области.

Имея в виду все эти особенности вихревого и безвихревого турбулентного движений, мы будем в дальнейшем для краткости называть область вихревого турбулентного движения просто областью турбулентного движения или турбулентной областью. В следующих параграфах будет рассмотрена форма этой области для различных случаев.

Турбулентная область должна быть ограничена с какой-нибудь стороны частью поверхности обтекаемого жидкостью тела. Линию, ограничивающую эту часть поверхности тела, называют линией отрыва. От неё отходит поверхность раздела между областью турбулентности и остальным объёмом жидкости. Самое образование турбулентной области при обтекании тела называют явлением отрыва.

Форма турбулентной области определяется свойствами движения в основном объёме жидкости (т. е. не в непосредственной близости от поверхности тела). Не существующая пока полная теория турбулентности должна была бы дать принципиальную возможность определения этой формы с помощью уравнений движения идеальной жидкости, если задано положение линии отрыва на поверхности тела. Действительное же положение линии отрыва определяется свойствами движения в непосредственной близости поверхности тела (в так называемом пограничном слое), где существенную роль играет вязкость жидкости (см. § 40).

§ 35. Турбулентная струя

Форма, а также и некоторые другие основные свойства турбулентных областей в ряде случаев могут быть установлены уже с помощью простых соображений подобия. Сюда относятся прежде всего различного рода свободные турбулентные струи, распространяющиеся в заполненном жидкостью же пространстве (*Л. Прандтль*, 1925).

В качестве первого примера рассмотрим турбулентную область, возникающую при «отрыве» потока с края угла, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями (на рис. 16 изображен их поперечный разрез). При ламинарном обтекании (рис. 3) поток жидкости, идущей вдоль одной из сторон угла (скажем, в направлении от A к O), плавно поворачивался бы, переходя в поток, идущий вдоль второй плоскости в направлении от края угла (от O к B). При турбулентном же обтекании картина движения оказывается совершенно иной.

Поток жидкости, идущий вдоль одной из сторон угла, теперь не поворачивается, дойдя до края угла, а продолжает распространяться в прежнем направлении. Вдоль другой же стороны возникает поток жидкости, подтекающей в направлении к краю угла (от B к O). «Смешивание» обоих потоков происходит в турбулентной области¹⁾ (границы сечения этой области указаны на рис. 16 пунктиром).

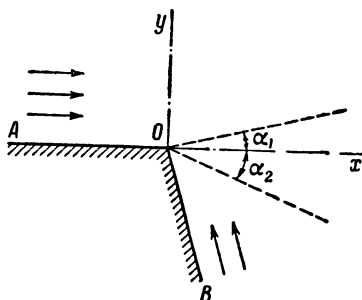


Рис. 16.

Происхождение такой области можно наглядно описать следующим образом. Представим себе такое течение жидкости, при котором идущий от A к O равномерный поток продолжал бы течь в том же направлении, заполняя всё пространство сверху от плоскости AO и её продолжения направо в глубь жидкости, а в пространстве под этой плоскостью жидкость была бы вообще неподвижна. Другими словами, мы имели бы при этом поверхность разрыва (продолжение плоскости AO) между жидкостью, текущей с постоянной скоростью, и жидкостью неподвижной. Но такая поверхность разрыва является неустойчивой и не может реально существовать (см. § 30). Эта неустойчивость приводит к её «разбалтыванию» и образованию области турбулентного движения. Подтекающий от B к O поток возникает при этом в результате того, что в область турбулентности должно происходить втекание жидкости извне.

¹⁾ Напоминаем, что вне турбулентной области имеет место безвихревое турбулентное движение, постепенно переходящее в ламинарное по мере удаления от границ этой области.

Определим форму области турбулентного движения. Выберем ось x указанным на рис. 16 образом; начало координат находится в точке O . Обозначим посредством Y_1 и Y_2 расстояния от плоскости x, z до верхней и нижней границ турбулентной области; требуется определить зависимость Y_1 и Y_2 от x . Эту зависимость легко определить непосредственно из соображений подобия. Поскольку все размеры плоскостей бесконечны, то в нашем распоряжении нет никаких характерных для рассматриваемого движения постоянных параметров с размерностью длины. Отсюда следует, что единственной возможной зависимостью величин Y_1, Y_2 от расстояния x является их прямая пропорциональность:

$$Y_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x, \quad Y_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot x. \quad (35,1)$$

Коэффициенты пропорциональности являются просто численными постоянными; мы пишем их в виде $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2$, так что α_1 и α_2 — углы наклона обеих границ турбулентной области к оси x . Таким образом, область турбулентного движения ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии края обтекаемого угла.

Значения углов α_1 и α_2 зависят только от величины обтекаемого угла и не зависят, например, от скорости набегающего потока жидкости. Они не могут быть вычислены теоретически; экспериментальные данные дают, например, для обтекания прямого угла значения $\alpha_1 = 5^\circ, \alpha_2 = 10^\circ$ ¹⁾.

Скорости потоков жидкости с обеих сторон угла неодинаковы; их отношение является определённым числом, зависящим опять-таки только от величины обтекаемого угла. При не слишком малых углах одна из скоростей оказывается значительно больше другой — именно, большей является скорость «основного» потока, в направлении которого расположена турбулентная область (поток от A к O). Так, при обтекании прямого угла скорость потока вдоль плоскости AO в 30 раз больше скорости потока от B к O .

Отметим ещё, что разность давлений жидкости по обе стороны турбулентной области очень мала. Так, при обтекании прямого угла оказывается

$$p_1 - p_2 = 0,003\rho U_1^2,$$

где U_1 — скорость набегающего потока (от A к O), p_1 — давление в верхнем (вдоль AO), а p_2 — в нижнем (вдоль BO) потоках жидкости.

В предельном случае равного нулю обтекаемого угла мы имеем дело просто с краем пластинки, вдоль обеих сторон которой течёт

¹⁾ Здесь и в других случаях ниже имеются в виду экспериментальные данные о распределении скоростей в поперечном сечении турбулентной струи, обработанные с помощью результатов расчётов (Толмин, 1926) по «теории пути перемешивания» (см. примечание на стр. 167). В эту теорию входит произвольная постоянная, значение которой подбирается каждый раз таким, чтобы получить по возможности хорошее согласие с экспериментальными данными.

жидкость. Угол раствора $\alpha_1 + \alpha_2$ турбулентной области при этом тоже обращается в нуль, т. е. турбулентная область исчезает; скорости же потоков по обеим сторонам пластинки становятся одинаковыми. При увеличении же угла AOB наступает момент, когда плоскость BO касается нижней границы турбулентной области; угол AOB является при этом уже тупым. При дальнейшем увеличении угла AOB область турбулентности будет оставаться ограниченной с одной стороны поверхностью твёрдой стенки. По существу, мы имеем при этом дело просто с явлением отрыва, с линией отрыва вдоль края угла. Угол раствора турбулентной области остаётся всё время конечным.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о бьющей из конца тонкой трубки турбулентной струе, распространяющейся в неограниченном пространстве, заполненном той же жидкостью (задача о ламинарном движении в такой «затопленной» струе была решена в § 23). На больших по сравнению с размерами отверстия трубы расстояниях (о которых только и будет идти речь) струя аксиально симметрична вне зависимости от конкретной формы отверстия.

Определим форму области турбулентного движения в струе. Выберем ось струи в качестве оси x , а радиус области турбулентности обозначим посредством R ; требуется определить зависимость R от x (x отсчитывается от точки выхода струи). Как и в предыдущем примере, эту зависимость легко определить непосредственно из соображений размерности. На расстояниях, больших по сравнению с размерами отверстия трубы, конкретная форма и размеры отверстия не могут играть роли для формы струи. Поэтому в нашем распоряжении нет никаких характеристических параметров с размерностью длины. Отсюда опять следует, что R должно быть пропорционально x :

$$R = \text{tg } \alpha \cdot x, \quad (35,2)$$

где численная постоянная $\text{tg } \alpha$ одинакова для всех струй. Таким образом, турбулентная область представляет собой конус; эксперимент даёт для угла раствора 2α этого конуса значение $25\text{—}30^\circ$ (рис. 17) ¹⁾.

Распределение (средних по времени) скоростей в поперечном сечении струи обладает следующим характером. Движение направлено в основном вдоль струи. Продольная составляющая скорости быстро

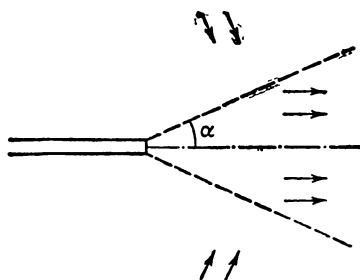


Рис. 17.

¹⁾ На опыте наблюдается некоторая зависимость постоянной α от начальных условий (профиля скорости) в отверстии трубки, из которого исходит струя. Естественно думать, что эта зависимость связана с тем, что в конкретных условиях опыта ещё влияли конечные размеры выходного отверстия, а на больших расстояниях от последнего это влияние сгладилось бы.

падает при удалении от оси струи; она становится равной $u_0/2$ (u_0 — скорость на оси струи) уже на расстоянии $0,35R$ от оси, а на границе турбулентной области достигает значения порядка $0,01 u_0$. Поперечная же составляющая скорости сохраняет вдоль сечения турбулентной области примерно одинаковый порядок величины и на границе области равна около $0,025 u_0$, будучи направлена здесь внутрь струи. За счёт этой поперечной составляющей и осуществляется «втекание» жидкости в турбулентную область. Распределение скоростей вне турбулентной области (при заданном угле её раствора) может быть определено теоретически (см. задачу 1 к этому параграфу).

Скорость в струе падает также с увеличением расстояния от отверстия. Легко определить закон, по которому происходит это уменьшение. Для этого воспользуемся следующими соображениями. Полный поток импульса через сферическую поверхность (с центром в точке выхода струи) должен оставаться неизменным при изменении её радиуса. Плотность потока импульса в струе — порядка величины ρu^2 , где u есть порядок величины некоторой средней скорости в струе; это есть единственная величина должной размерности, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении плотности жидкости ρ , скорости u и расстояния x . Площадь той части поперечного сечения струи, в которой u заметно отлично от нуля, — порядка величины R^2 . Поэтому полный поток импульса — порядка $\rho u^2 R^2$. Приравнявая это выражение постоянной и подставляя $R = \text{const. } x$, получаем:

$$u \sim \frac{\text{const.}}{x}, \quad (35,3)$$

т. е. скорость падает обратно пропорционально расстоянию от точки выхода струи.

Количество Q жидкости, протекающей в 1 сек. через поперечное сечение турбулентной области струи, — порядка величины произведения его площади ($\sim R^2$) на среднюю скорость u . Подставляя, находим ¹⁾:

$$Q = Bx. \quad (35,4)$$

Таким образом, расход жидкости сквозь сечение турбулентной области возрастает с x (т. е. жидкость как бы втягивается в турбулентную область ²⁾). Входящую сюда постоянную можно определить

¹⁾ Если две переменные величины, меняющиеся в широких пределах, всегда одного порядка величины, то они вообще пропорциональны друг другу. Поэтому в данном (и в других аналогичных) случае вместо $Q \sim \text{const. } x$ можно писать точную формулу $Q = \text{const. } x$.

²⁾ Что касается полного потока жидкости через всю бесконечную плоскость, проведённую поперёк струи, то он оказывается бесконечным, т. е. струя, бьющая в неограниченное пространство, увлекает с собой бесконечное количество жидкости.

следующим образом. На расстояниях порядка величины размеров отверстия трубки Q должно переходить в характерное для каждой данной струи количество Q_0 жидкости, выбрасываемой в 1 сек. из трубы. Отсюда видно, что $B \sim Q_0/a$, где a — поперечные размеры отверстия трубки (например, радиус круглого отверстия). Таким образом, можно написать:

$$B = c \frac{Q_0}{a}, \quad (35,5)$$

где c — численная постоянная, зависящая только от формы отверстия. Для круглого отверстия опыт даёт для c значение около 1,5.

Движение в каждом участке длины струи характеризуется числом Рейнольдса для этого участка, определяемым как $\frac{uR}{\nu}$. Но в силу (35,2) и (35,3) произведение uR остаётся постоянным вдоль струи, так что число Рейнольдса одинаково для всех участков струи. В качестве этого числа может быть выбрано, например, отношение $\frac{B}{\rho\nu}$. Входящая сюда постоянная B является тем единственным параметром, который определяет все движения в струе. При увеличении «мощности» струи Q_0 (при заданной величине a отверстия) достигается в конце концов некоторое критическое значение числа Рейнольдса $\frac{B}{\rho\nu}$, после которого движение делается турбулентным одновременно вдоль всей длины струи ¹⁾.

¹⁾ Для более подробного расчёта различных случаев турбулентного движения обычно пользуются различными «полуэмпирическими» теориями, основанными на определённых предположениях о зависимости коэффициента турбулентной вязкости от градиента средней скорости. Так, в теории Прандтля полагается (для плоского течения)

$$\nu_{\text{турб}} = l^2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|,$$

причём зависимость l (так называемой «длины пути перемешивания») от координат выбирается в соответствии с соображениями подобия; для свободных турбулентных струй, например, полагается $l = cx$, где c — эмпирическая численная постоянная. Такие теории обычно дают хорошее согласие с опытом и потому имеют прикладное значение в качестве хороших интерполяционных расчётных схем. При этом, однако, оказывается невозможным приписать входящим в теорию характерным эмпирическим численным постоянным универсальных значений; так, например, отношение длины пути перемешивания l к поперечным размерам турбулентной области приходится выбирать различным для разных конкретных случаев. Следует также отметить, что хорошее согласие с опытными данными удаётся получить, исходя из различных выражений для турбулентной вязкости.

Подробное изложение этих теорий можно найти в книгах: Л. Г. Лойцянский, Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941; Г. Н. Абрамович, Турбулентные свободные струи жидкостей и газов, Госэнергоиздат, 1948.

ЗАДАЧИ

1. Определить среднее движение жидкости в струе вне турбулентной области.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль оси струи и началом координат в точке её выхода. В силу аксиальной симметрии струи компонента u_φ средней скорости отсутствует, а u_θ, u_r являются функциями только от r и θ . Те же соображения, что и в задаче о ламинарной струе в § 23, показывают, что u_r, u_θ должны иметь вид $u_\theta = \frac{f(\theta)}{r}, u_r = \frac{F(\theta)}{r}$. Вне турбулентной области движение жидкости потенциально, т. е. $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, откуда

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) = 0.$$

Но $r u_\theta$ не зависит от r , поэтому $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{dF}{d\theta} = 0$, откуда $F = \text{const.} \equiv -b$, т. е.

$$u_r = -\frac{b}{r}. \quad (1)$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta u_\theta) = 0$$

получаем теперь

$$f = \frac{\text{const.} - b \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Постоянная интегрирования должна быть положена равной $-b$ так, чтобы скорость не обращалась в бесконечность при $\theta = \pi$ (что касается обращения f в бесконечность при $\theta = 0$, то оно несущественно, поскольку рассматриваемое здесь решение относится только к пространству вне турбулентной области, а направление $\theta = 0$ лежит внутри неё). Таким образом,

$$u_\theta = -\frac{b}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{b}{r} \text{ctg } \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Проекция скорости на направление струи (u_x) и абсолютная величина скорости равны

$$u_x = \frac{b}{r} = \frac{b \cos \theta}{x}, \quad u = \frac{b}{r} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (3)$$

Постоянную b можно связать с постоянной B , входящей в формулу (35,4). Рассмотрим отрезок конуса турбулентной области, вырезаемый двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Количество жидкости, втекающей в 1 сек. извне в этот участок турбулентной области, равно

$$dQ = -2\pi r \rho \sin \alpha u_\theta dr = 2\pi b \rho (1 + \cos \alpha) dr,$$

а из формулы (35,4) имеем $dQ = B dx = B \cos \alpha dr$. Сравнивая оба выражения, получаем:

$$b = \frac{B}{2\pi \rho} \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (4)$$

На границе турбулентной области скорость u направлена внутрь этой области, образуя угол $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ с положительным направлением оси x .

Сравним среднюю скорость \bar{u}_x внутри турбулентной области (определённую как $\bar{u}_x = \frac{Q}{\rho\pi R^2} = \frac{B}{\rho r x \operatorname{tg}^2 \alpha}$) со скоростью $(u_x)_{\text{пот}}$ на границе этой области. Взяв вторую из (3) с $\theta = \alpha$, получаем:

$$\frac{(u_x)_{\text{пот}}}{\bar{u}_x} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

При $\alpha = 12^\circ$ получаем для этого отношения значение 0,011, т. е. на границе турбулентной области скорость мала по сравнению со средней скоростью внутри области.

2. Определить закон изменения размеров и скорости в турбулентной затопленной струе, бьющей из бесконечно длинной тонкой щели.

Решение. По тем же причинам, как и для аксиальной струи, заключаем, что турбулентная область ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии щели, т. е. полуширина струи:

$$Y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Поток импульса в струе (отнесённый к единице длины щели) — порядка $\rho u^2 Y$. Для зависимости средней скорости u от x получаем поэтому

$$u \sim \frac{\text{const.}}{\sqrt{x}}.$$

Расход жидкости через сечение турбулентной области струи $Q \sim \rho u Y$, откуда

$$Q = \text{const.} \sqrt{x}.$$

Экспериментальные данные дают для угла раствора, 2α плоскопараллельной струи значение $25-33^\circ$ (ср. сноску на стр. 165).

§ 36. Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твёрдого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют турбулентным следом. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нём (*Прандтль*, 1926).

Как и при исследовании ламинарного следа в § 21, обозначим посредством U скорость натекающего на тело потока и выберем её направление в качестве оси x . Усреднённую же по турбулентным пульсациям скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $U + u$. Обозначив посредством a некоторую поперечную ширину следа, мы определим зависимость a от x . Если при обтекании тела подъёмная сила отсутствует, то на больших расстояниях от тела след обладает аксиальной симметрией и имеет круговое сечение; величиной a может являться в этом случае радиус следа. Наличие

же подъёмной силы приводит к появлению некоторого избранного направления в плоскости y, z и след уже не будет обладать аксиальной симметрией ни на каких расстояниях от тела.

Продольная компонента скорости жидкости в следе — порядка величины U , а поперечная — порядка некоторого среднего значения u турбулентной скорости. Поэтому угол между линиями тока и осью x — порядка величины отношения u/U . С другой стороны, граница следа является, как мы знаем, границей, за которую не выходят линии тока вихревого турбулентного движения. Отсюда следует, что угол наклона линии контура продольного сечения следа к оси x — тоже порядка величины u/U . Это значит, что мы можем написать:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}. \quad (36,1)$$

Далее, воспользуемся формулами (21,1), (21,2), определяющими действующие на тело силы через интегралы от скорости жидкости в следе (причём под скоростью подразумевается теперь её усреднённое значение). В этих интегралах область интегрирования — порядка величины a^2 . Поэтому оценка интеграла приводит к соотношению $F \sim \rho U u a^2$, где F — порядок величины силы сопротивления или подъёмной силы. Таким образом:

$$u \sim \frac{F}{\rho U a^2}. \quad (36,2)$$

Подставляя это в (36,1), находим:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{F}{\rho U^2 a^2},$$

откуда путём интегрирования

$$a \sim \left(\frac{Fx}{\rho U^2} \right)^{1/3}. \quad (36,3)$$

Таким образом, ширина следа растёт пропорционально кубическому корню из расстояния от тела. Для скорости u имеем из (36,2) и (36,3)

$$u \sim \left(\frac{FU}{\rho x^2} \right)^{1/3}, \quad (36,4)$$

т. е. средняя скорость движения жидкости внутри следа падает обратно пропорционально $x^{2/3}$.

Движение жидкости в каждом участке длины следа характеризуется числом Рейнольдса $R \sim \frac{au}{\nu}$. Подставляя (36,3) и (36,4), получаем:

$$R \sim \frac{F}{\nu \rho U a} \sim \frac{1}{\nu} \left(\frac{F^2}{\rho^2 U x} \right)^{1/3}.$$

Мы видим, что это число не остаётся постоянным вдоль длины

следа в противоположность тому, что мы имели в случае турбулентной струи. На достаточно больших расстояниях от тела R делается настолько малым, что движение в следе перестаёт быть турбулентным. Дальше простирается область ламинарного следа, свойства которого были уже исследованы в § 21.

В задаче 2 § 21 были получены формулы, описывающие движение жидкости вне следа вдали от тела. Эти формулы применимы к движению вне турбулентного следа в той же мере, что и вне ламинарного следа.

Отметим здесь некоторые общие свойства распределения скоростей вокруг обтекаемого тела. Как внутри турбулентного следа, так и вне его, скорость (речь идёт везде о скорости u) падает с увеличением расстояния от тела. При этом, однако, продольная скорость u_x падает вне следа значительно быстрее (как $1/x^2$), чем внутри следа. Поэтому вдали от тела можно считать, что продольная скорость u_x имеется только внутри следа, а вне его $u_x = 0$. Можно сказать, что u_x спадает от некоторого максимального значения на «оси» следа до нуля на его границе. Что же касается поперечных скоростей u_y , u_z , то на границе следа они того же порядка величины, что и внутри него, а при удалении от следа (при неизменном расстоянии от тела) они быстро падают.

§ 37. Теорема Н. Е. Жуковского

Описанный в конце предыдущего параграфа характер распределения скоростей вокруг обтекаемого тела не относится к исключительным случаям, когда толщина образующегося за телом следа очень мала по сравнению с его шириной. Такой след образуется при обтекании тел, толщина которых (в направлении оси y) мала по сравнению с их шириной в направлении z (длина же в направлении обтекания — оси x — может быть произвольной); другими словами, речь идёт об обтекании тел, поперечное (к направлению движения) сечение которых обладает сильно вытянутой в одном направлении формой. Сюда относятся, в частности, обтекания «крыльев» — тел, «размах» которых велик по сравнению со всеми остальными их размерами.

Ясно, что в таком случае нет никаких причин для того, чтобы перпендикулярная к плоскости турбулентного следа скорость u_y заметно уменьшалась уже на расстояниях порядка толщины следа. Напротив, эта скорость будет теперь иметь одинаковый порядок величины как внутри следа, так и на значительных (порядка «размаха» крыла) расстояниях от него. При этом, конечно, предполагается, что подъёмная сила отлична от нуля; в противном случае поперечная скорость практически вообще отсутствует.

Рассмотрим вертикальную подъёмную силу F_y , развивающуюся при таком обтекании. Согласно формуле (21,2) она определяется

интегралом

$$F_y = -\rho U \iint u_y dy dz, \quad (37,1)$$

причём ввиду характера распределения скорости u_y интегрирование в данном случае должно производиться по всей поперечной плоскости. Более того, поскольку толщина следа (по оси y) мала, а скорость u_y внутри него отнюдь не велика по сравнению с этой же скоростью вне следа, то в рассматриваемом случае можно с достаточной точностью ограничиться при интегрировании по dy интегрированием только по области вне следа, т. е. написать:

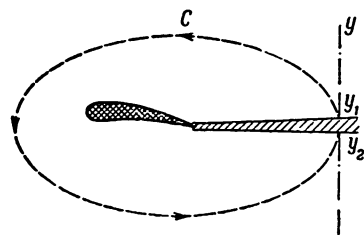


Рис. 18.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_y dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y dy + \int_{-\infty}^{y_2} u_y dy,$$

где y_1 и y_2 — координаты границ следа (рис. 18).

Но вне следа движение потенциально и $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; имея в виду, что на бесконечности $\varphi = 0$, получаем поэтому

$$\int u_y dy = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где φ_2 и φ_1 — значения потенциала на обеих сторонах следа; можно сказать, что $\varphi_2 - \varphi_1$ есть скачок потенциала на поверхности разрыва, которой можно заменить тонкий след. Что же касается производных от φ , то производная $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ должна оставаться непрерывной. Скачок нормальной к поверхности следа компоненты скорости означал бы, что некоторое количество жидкости «втекает» в след; между тем, в приближении, в котором толщина следа пренебрегается, этот эффект должен отсутствовать. Таким образом, мы заменяем след поверхностью тангенциального разрыва. Далее, в этом же приближении на следе должно быть непрерывно также и давление. Поскольку изменение давления определяется согласно формуле Бернулли в первом приближении величиной $\rho U u_x = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, то отсюда следует, что должна быть непрерывна и производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Производная же $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ — скорость в направлении размаха крыла — испытывает, вообще говоря, скачок.

Ввиду непрерывности производной $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ скачок $\varphi_2 - \varphi_1$ есть величина, зависящая только от z , но не от координаты x вдоль длины

следа. Таким образом, получаем для подъемной силы следующую формулу:

$$F_y = -\rho U \int (\varphi_2 - \varphi_1) dz. \quad (37,2)$$

Интегрирование по dz распространяется фактически лишь по ширине следа (вне следа, конечно, $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0$).

Эту формулу можно представить в несколько ином виде. Для этого замечаем, что по известным свойствам интегралов от градиента скаляра можно написать разность $\varphi_2 - \varphi_1$ в виде криволинейного интеграла $\int \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y dy + u_z dz)$, взятого по контуру, выходящему из точки y_1 , огибающему тело и приходящему в точку y_2 , проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от y_1 до y_2 , превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая посредством Γ циркуляцию скорости по замкнутому контуру C , охватывающему тело (рис. 18):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \, d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (37,3)$$

получаем для подъемной силы формулу ¹⁾

$$F_y = -\rho U \int \Gamma \, dz. \quad (37,4)$$

Устанавливаемая этой формулой связь подъемной силы с циркуляцией скорости составляет содержание знаменитой теоремы Н. Е. Жуковского, впервые установленной им в 1906 г. ²⁾

З а д а ч и

1. Определить закон расширения турбулентного следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного цилиндра.

Решение. Для силы сопротивления f_x , отнесенной к единице длины цилиндра, имеем по порядку величины $f_x \sim \rho U u Y$. Комбинируя это с соотношением (36,1), получаем для ширины следа Y

$$Y = A \sqrt{\frac{x f_x}{\rho U^2}}, \quad (1)$$

где A — постоянная. Средняя скорость u в следе падает по закону

$$u \sim \sqrt{\frac{f_x}{\rho x}}.$$

¹⁾ Знак циркуляции скорости выбирается всегда для обхода контура в направлении против часовой стрелки. Знак в формуле (37,3) связан также и с выбором направления обтекания: мы предполагали везде, что обтекание происходит в положительном направлении оси x (поток натекает слева направо).

²⁾ О применении этой теоремы к хорошо обтекаемым крыльям см. § 46.

«Число Рейнольдса» $R \sim \frac{Y u}{\nu} \sim \frac{f_x}{\rho U}$ не зависит от x и потому ламинарного участка след не имеет.

Укажем, что согласно экспериментальным данным постоянный коэффициент в (1) равен $A = 0,93$ (причём Y есть полуширина следа); если под Y понимать расстояние, на котором скорость u_x падает до половины своего максимального значения по середине следа, то $A = 0,41$.

2. Определить движение вне следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного тела.

Решение. Вне следа движение потенциально (потенциал обозначаем здесь посредством Φ в отличие от угла φ в цилиндрической системе координат r, z, φ с осью z вдоль длины тела). Подобно тому как было сделано в решении задачи 2 § 21, заключаем, что должно быть

$$\int \mathbf{u} \, d\mathbf{f} = \int \nabla \Phi \, d\mathbf{f} = \frac{f_x}{\rho U},$$

где теперь интегрирование производится по поверхности цилиндра большого радиуса с осью вдоль оси x и длиной, равной единице, а f_x есть сила сопротивления, отнесенная к единице длины тела. Удовлетворяющее этому

условию решение двумерного уравнения Лапласа $\Delta \Phi = 0$ есть $\Phi = \frac{f_x}{2\pi\rho U} \ln r$.

Далее, для подъёмной силы имеем согласно формуле (37,2) $f_y = \rho U (\Phi_1 - \Phi_2)$. Наименее быстро убывающим с расстоянием решением уравнения Лапласа, испытывающим скачок на плоскости $\varphi = 0$ является $\Phi = \text{const.} \varphi$; поскольку $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, то $\text{const.} = -f_y/2\pi\rho U$. Движение жидкости определяется суммой обоих найденных решений, т. е.

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\rho U} (f_x \ln r - f_y \varphi). \quad (1)$$

Цилиндрические компоненты скорости \mathbf{u} равны

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{f_x}{2\pi\rho U r}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U r}. \quad (2)$$

Скорость \mathbf{u} образует с цилиндрическим радиус-вектором постоянный угол, тангенс которого равен f_y/f_x .

3. Определить закон изгибания следа за бесконечно длинным телом при наличии подъёмной силы.

Решение. При наличии подъёмной силы след (рассматриваемый как поверхность разрыва) изгибается в плоскости x, y . Закон $y = y(x)$ этого загибания определяется уравнением $\frac{dx}{u_x + U} = \frac{dy}{u_y}$. Подставляя сюда соглас-

но (2) $u_y \approx -\frac{f_y}{2\pi\rho U x}$ и пренебрегая u_x по сравнению с U , получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U^2 x},$$

откуда

$$y = \text{const.} - \frac{f_y}{2\pi\rho U^2} \ln x.$$

§ 38. Изотропная турбулентность

Мы уже упоминали в § 33 о своеобразном случае турбулентного движения — полностью однородном и изотропном движении, при котором во всём объёме жидкости её средняя скорость равна нулю. Такое движение можно представлять себе как движение в жидкости,

подвергнутой сильному «взбалтыванию» и затем оставленной в покое. С течением времени это движение, разумеется, затухает.

Дальнейшее исследование изотропной турбулентности, в частности определение закона его затухания со временем, основано на законе сохранения, впервые установленном Л. Г. Лойцянским (1939). Этот специфический для изотропной турбулентности закон является следствием общего закона сохранения момента импульса и может быть выведен следующим образом.

Выделим в неограниченной жидкости некоторый достаточно большой объём и рассмотрим полный момент импульса \mathbf{M} , заключённой в этом объёме жидкости. Эта величина имеет некоторое, вообще говоря, отличное от нуля случайное значение. Благодаря взаимодействию с окружающими областями жидкости величина \mathbf{M} не остаётся, строго говоря, постоянной. Но поскольку это взаимодействие представляет собой для рассматриваемой части жидкости поверхностный эффект, то ясно, что времена T , в течение которых \mathbf{M} может претерпеть значительное изменение, растут вместе с размерами L выделенной нами области. Такие времена, как и размеры L , должны рассматриваться как сколь угодно большие и в этом смысле момент импульса \mathbf{M} сохраняется.

Для удобства дальнейших вычислений представим себе, что выделенный нами объём жидкости заключён в сосуд с неподвижными твёрдыми стенками; очевидно, что граничные условия на поверхности очень большого объёма не могут сказаться на интересующих нас объёмных свойствах движения.

Согласно общему определению тензор M_{ik} полного момента импульса равен интегралу

$$M_{ik} = \rho \int (x_i v_k - x_k v_i) dV,$$

взятому по всему объёму. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\int x_k v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i x_k v_i) dV - \int x_i x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV - \int x_i v_k dV.$$

Первый интеграл в правой стороне равенства, будучи преобразован в поверхностный, исчезает, поскольку на ограничивающих жидкость стенках нормальная компонента скорости равна нулю, так что $v_k df_k = (\mathbf{v}\mathbf{n}) df = 0$. Второй же интеграл исчезает в силу несжимаемости жидкости ($\text{div } \mathbf{v} = 0$). Таким образом,

$$\int x_k v_i dV = - \int x_i v_k dV,$$

и мы можем переписать M_{ik} в виде

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k dV.$$

Сумма квадратов компонент тензора M_{ik} равна удвоенному квадрату абсолютной величины вектора момента $M = \rho \int [\mathbf{r}\mathbf{v}] dV$. Поэтому имеем:

$$M^2 = 2\rho^2 \left\{ \int x_i v_k dV \right\}^2.$$

Квадрат интеграла можно написать в виде двойного интеграла:

$$M^2 = 2\rho^2 \iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV'.$$

Наконец, замечаем, что это выражение можно окончательно переписать в виде

$$M^2 = -\rho^2 \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k dV dV' \quad (38,1)$$

(интегралы, содержащие квадраты x_i^2 и $x'_i{}^2$, исчезают, поскольку

$$\iint x_i^2 v_k v'_k dV dV' = \iint x_i^2 v'_k dV' \int v_k dV,$$

а $\int v_k dV = 0$, так как полный импульс несжимаемой жидкости, заключённой в неподвижном сосуде, равен нулю).

Множитель $v_k v'_k \equiv \mathbf{v}\mathbf{v}'$ в подинтегральном выражении в (38,1) представляет собой произведение скоростей в двух точках с координатами x_k и x'_k , находящихся на расстоянии $r = \sqrt{(x_k - x'_k)^2}$ друг от друга. Усредним это произведение по всем положениям точек x_k и x'_k (при заданном r) в рассматриваемом объёме; это есть то самое усреднение, которое использовалось в § 33 при определении функций корреляции. В силу изотропии движения величина $\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}'}$ является функцией только от r . Она быстро падает с увеличением r , поскольку скорости турбулентного движения в двух точках, находящихся на большом расстоянии друг от друга, можно считать статистически независимыми; среднее значение их произведения разбивается тогда на произведение средних значений каждой в отдельности, которые исчезают (напомним, что рассматривается движение с равной везде нулю средней скоростью).

Произведя под интегралом в (38,1) такое усреднение, получим M^2 в виде

$$M^2 = \rho^2 \int f dV, \quad f = -\int (\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}'}) r^2 dV'. \quad (38,2)$$

Подинтегральное выражение в f быстро падает с увеличением r , так что интеграл сходится (это значит, что при стремлении размеров области L к бесконечности f стремится к конечному пределу).

Ввиду однородности движения¹⁾ величина f постоянна вдоль объёма жидкости, так что можно написать просто

$$M^2 = \rho^2 f V.$$

Отметим, что момент количества движения оказывается, таким образом, растущим как квадратный корень из объёма движущейся жидкости, а не как его первая степень. Это связано с тем, что полный момент импульса является суммой большого числа статистически независимых слагаемых (моментов отдельных небольших участков жидкости) с равными нулю средними значениями.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае изотропной турбулентности условие постоянства M эквивалентно условию

$$\int (\overline{vv'}) r^2 dV = \text{const.} \quad (38,3)$$

Это и есть закон Л. Г. Лойцянского²⁾.

В интеграле (38,3) подинтегральное выражение заметно отлично от нуля в области размеров порядка основного масштаба l турбулентного движения (объём этой области $\sim l^3$) и имеет в ней порядок величины $v^2 l^2$. Поэтому из (38,3) получаем соотношение

$$v^2 l^2 = \text{const.} \quad (38,4)$$

С помощью этого соотношения можно определить закон затухания изотропной турбулентности со временем. Для этого оценим ещё производную по времени от кинетической энергии единицы объёма жидкости. С одной стороны, её можно написать по порядку величины как $\frac{\rho v^2}{t}$. С другой стороны, она должна быть равна энергии ϵ , диссипируемой в единицу времени в том же объёме. Согласно формуле (31,1) $\epsilon \sim \frac{\rho v^3}{l}$ (роль характеристической скорости играет теперь v) Сравнивая оба эти выражения, находим:

$$l \sim vt. \quad (38,5)$$

Подставляя (38,5) в (38,4), находим, что

$$v = \frac{\text{const.}}{t^{5/7}}. \quad (38,6)$$

1) Во всей области, за исключением лишь незначительной её части вблизи поверхности.

2) Строго говоря, изложенным доказательством не исключается возможность того, что написанный интеграл равен всегда нулю или бесконечности, в результате чего закон его сохранения потерял бы смысл. Мы, однако, не видим никаких оснований для таких опасений.

Таким образом, скорость изотропного турбулентного движения затухает со временем обратно пропорционально $t^{5/7}$. Для l имеем:

$$l = \text{const. } t^{2/7}, \quad (38,7)$$

т. е. основной масштаб турбулентности растёт пропорционально $t^{2/7}$. Эти результаты были получены *А. Н. Колмогоровым* (1941).

Согласно формулам (38,6), (38,7) число Рейнольдса $R \sim \frac{v l}{\nu}$ падает со временем как $t^{-3/7}$ и по истечении достаточно длительного времени делается настолько малым, что начинает играть существенную роль вязкость жидкости. Диссипируемая энергия определяется тогда, с одной стороны, обычной формулой (16,3), согласно которой

$$\varepsilon = \frac{\rho \nu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \sim \frac{\rho \nu v^2}{l^2}.$$

С другой стороны, $\varepsilon \sim \frac{\rho v^2}{t}$. Сравнивая оба выражения, получим:

$$l \sim \sqrt{\nu t}, \quad (38,8)$$

а с помощью соотношения (38,4) найдём теперь

$$v = \frac{\text{const.}}{t^{5/4}}. \quad (38,9)$$

Эти формулы, принадлежащие *М. Д. Миллионщикову* (1939), определяют закон затухания изотропной турбулентности в последних стадиях этого затухания, когда влияние вязкости становится преобладающим.

Изотропное турбулентное движение можно осуществить путём пропускания потока жидкости через турбулизирующую решётку — экран с большим числом регулярно расположенных отверстий. Обозначим скорость основного потока посредством U (и выберем ось x в направлении U), а истинную скорость будем писать в виде $U + v$, так что v есть скорость интересующего нас турбулентного движения. Если ввести систему отсчёта, движущуюся со скоростью U , то относительно такой системы жидкость совершает турбулентное движение со скоростью v . По мере удаления от решётки усреднённое турбулентное движение (со скоростью $u = \bar{v}$) затухает быстрее, чем пульсационное. Это связано с тем, что усреднённое движение обладает масштабами порядка размеров a отверстий решётки, которые (см. ниже) малы по сравнению с масштабами пульсационного движения. В результате на достаточно больших расстояниях x от решётки усреднённая скорость и практически равна нулю и турбулентная скорость v является чисто пульсационной. На этих расстояниях турбулентное движение можно практически считать полностью изотропным (в участках, размеры которых малы по сравнению с x , но не обязательно

малы по сравнению с основным масштабом турбулентности). Затуханию турбулентности со временем в движущейся системе отсчёта соответствует в исходной неподвижной системе затухание турбулентности с удалением от решётки. Закон этого затухания определяется полученными выше формулами, в которых надо только заменить t на x/U . Имея в виду, что на расстояниях от решётки порядка величины a её отверстий должно быть и $l \sim a$, мы можем переписать формулу (38,7) в виде

$$l \sim a \left(\frac{x}{a} \right)^{2/7}.$$

Для скорости имеем согласно (38,5) $v \sim \frac{lU}{x}$, откуда

$$v \sim U \left(\frac{a}{x} \right)^{5/7}.$$

З а д а ч а

С помощью уравнения (33,17) получить для изотропного турбулентного движения количественный закон затухания величин $\overline{v_{r1}v_{r2}}$ в стадии, когда существенна вязкость жидкости (Л. Г. Лойцянский, М. Д. Миллионщиков).

Р е ш е н и е. В рассматриваемом случае в уравнении (33,17) можно пренебречь членом с B_{rrr} как членом более высокого порядка по уже малой скорости. Вводя величину

$$b_{rr} \equiv \overline{v_{r1}v_{r2}} = \frac{\overline{v^2}}{3} - \frac{B_{rr}}{2}$$

(см. (33,16)), получим для неё уравнение

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t} - \frac{2\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial b_{rr}}{\partial r} \right) = 0.$$

Интересующее нас решение этого уравнения есть

$$b_{rr} = \frac{\text{const.}}{t^{5/2}} e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}$$

ср. аналогичное решение (51,6) уравнения теплопроводности). Оно определяет асимптотический вид функции b_{rr} при начальных условиях, в которых b_{rr} есть любая достаточно быстро убывающая с возрастанием r функция (подобно тому как (51,6) даёт асимптотический закон распространения тепла, сконцентрированного в начальный момент в малом участке пространства).

ГЛАВА IV ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 39. Ламинарный пограничный слой

Мы уже неоднократно ссылались на то обстоятельство, что очень большие числа Рейнольдса эквивалентны очень малой вязкости, в результате чего жидкость может рассматриваться при таких R как идеальная. Однако такое приближение во всяком случае непригодно для движения жидкости вблизи твёрдых стенок. Граничные условия для идеальной жидкости требуют лишь исчезновения нормальной составляющей скорости; касательная же к поверхности обтекаемого тела компонента скорости остаётся, вообще говоря, конечной. Между тем, у всякой реальной жидкости скорость на твёрдых стенках должна обращаться в нуль.

Отсюда можно сделать вывод, что при больших числах Рейнольдса падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое жидкости. Этот слой носит название пограничного и характеризуется, следовательно, наличием в нём значительных градиентов скорости. Движение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным. Здесь мы рассмотрим свойства ламинарного пограничного слоя. Граница этого слоя не является, конечно, резкой, и переход между ламинарным движением в нём и в основном потоке жидкости происходит непрерывным образом.

Падение скорости в пограничном слое обуславливается в конечном итоге вязкостью жидкости, которой нельзя пренебречь здесь, несмотря на большие значения R . Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в пограничном слое велики и потому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, велики, несмотря на малость ν .

Тот факт, что влияние вязкости жидкости должно сказываться лишь вблизи самой обтекаемой поверхности, был указан ещё Д. И. Менделеевым в 1880 г. в его исследованиях по сопротивлению жидкостей движущимся телам. Математическая теория пограничного слоя была дана *Л. Прандтлем*.

Выведем уравнения движения жидкости в ламинарном пограничном слое. Для простоты вывода рассмотрим двухмерное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Эту плоскость выберем

в качестве плоскости x, z , причём ось x направлена по направлению обтекания. Распределение скорости не зависит от координаты z ; z -компонента скорости отсутствует.

Точные гидродинамические уравнения Навье-Стокса и уравнение непрерывности, написанные в компонентах, принимают вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (39,1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (39,2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (39,3)$$

Движение предполагается стационарным, и потому производных по времени мы не пишем.

Ввиду тонкости пограничного слоя ясно, что движение в нём будет происходить в основном параллельно обтекаемой поверхности, т. е. скорость v_y будет мала по сравнению с v_x (это видно уже и непосредственно из уравнения непрерывности).

Вдоль направления оси y скорость меняется быстро — заметное изменение её происходит на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В направлении же оси x скорость меняется медленно; заметное изменение её происходит здесь на протяжении расстояний порядка характеристической длины l задачи (скажем, размеров тела). Поэтому её производные по y велики по сравнению с производными по x . Из сказанного следует, что в уравнении (39,1) можно пренебречь производной $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, а сравнивая первое уравнение со вторым, мы видим, что производная $\frac{\partial p}{\partial y}$ мала по сравнению с $\frac{\partial p}{\partial x}$ (по порядку величины — в отношении $\frac{v_y}{v_x}$). В рассматриваемом приближении мы можем положить просто

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (39,4)$$

т. е. можно считать, что в пограничном слое нет поперечного градиента давления. Другими словами, давление в пограничном слое равно давлению $p(x)$, имеющемуся в основном потоке жидкости и являющемуся при решении задачи о пограничном слое заданной функцией от x . В уравнении (39,1) мы можем теперь написать вместо $\frac{\partial p}{\partial x}$ полную производную $\frac{dp(x)}{dx}$; эту производную можно выразить с помощью скорости $U(x)$ основного потока. Поскольку вне пограничного слоя движение потенциально, то имеет место уравнение

Бернулли

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const.}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}.$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений движения в ламинарном пограничном слое в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (39,5)$$

Можно легко показать, что эти уравнения (выведенные для обтекания плоской стенки) остаются справедливыми и в более общем случае произвольного двухмерного обтекания тела (поперечное обтекание бесконечно длинного цилиндра произвольного сечения). При этом x есть расстояние, отсчитываемое по длине линии контура поперечного сечения тела от некоторой его точки, а y — расстояние от поверхности тела (по нормали к ней).

Пусть U_0 есть характеристическая скорость данной задачи (например, скорость на бесконечности натекающего на тело потока жидкости). Введём вместо координат x , y и скоростей v_x , v_y безразмерные переменные x' , y' , v'_x , v'_y согласно определениям:

$$x = lx', \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{R}}, \quad v_x = U_0 v'_x, \quad v_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{R}} \quad (39,6)$$

(и соответственно полагаем $U = U_0 U'$), где $R = \frac{U_0 l}{\nu}$. Тогда уравнения (39,5) принимают вид

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} = U' \frac{dU'}{dx'}, \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0. \quad (39,7)$$

Эти уравнения (а также и граничные условия к ним) не содержат вязкости. Это значит, что их решения не зависят от числа Рейнольдса. Таким образом, мы приходим к важному результату: при изменении числа Рейнольдса вся картина движения в пограничном слое подвергается лишь подобному преобразованию, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально корню из R .

Далее, мы можем утверждать, что получающиеся в результате решения уравнений (39,7) безразмерные «скорости» v'_x , v'_y , как не зависящие от R , должны быть порядка величины единицы; то же самое относится и к «толщине пограничного слоя» δ в координатах x' , y' . Из формул (39,6) можно, следовательно, заключить, что

$$v_y \sim \frac{U_0}{\sqrt{R}}, \quad (39,8)$$

т. е. отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально \sqrt{R} , и

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}, \quad (39,9)$$

т. е. толщина пограничного слоя падает с увеличением числа Рейнольдса как $R^{-1/2}$.

Применим уравнения пограничного слоя к обтеканию плоской пластинки плоско-параллельным потоком жидкости. Пусть плоскость пластинки совпадает с полуплоскостью x, z , соответствующей положительным x (так что передним краем пластинки является линия $x=0$). Длину пластинки в положительном направлении оси x предполагаем бесконечной. Скорость основного потока в этом случае, очевидно, постоянна: $U = \text{const}$. Уравнения (39,5) принимают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (39,10)$$

Граничные условия на поверхности пластинки требуют обращения в нуль обеих компонент скорости:

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } x \geq 0, y = 0.$$

При удалении же от пластинки скорость должна асимптотически приближаться к скорости U натекания жидкости на пластинку, т. е.

$$v_x = U \text{ при } y \rightarrow \pm \infty.$$

В решении уравнений пограничного слоя $\frac{v_x}{U}$ и $v_y \sqrt{\frac{l}{U\nu}}$ могут быть, как мы видели, функциями только от $x' = \frac{x}{l}$ и $y' = y \sqrt{\frac{U}{l\nu}}$. Но в рассматриваемой задаче о бесконечной пластинке нет никаких характеристических параметров длины l . Поэтому $\frac{v_x}{U}$ может зависеть только от такой комбинации x' и y' , которая бы не содержала l ; таковой является $\frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U}{\nu}}$. Что же касается v_y , то здесь функцией от $\frac{y'}{\sqrt{x'}}$ должно быть произведение $v'_y \sqrt{x'}$. Таким образом, можно искать решение в виде

$$v_x = Uf\left(y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right), \quad v_y = \sqrt{\frac{U\nu}{x}} f_1\left(y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right), \quad (39,11)$$

где f, f_1 — некоторые безразмерные функции. С помощью второго из уравнений (39,10) можно выразить f_1 через f . Таким образом,

задача сводится к определению всего одной функции f от одной переменной $\xi = y \sqrt{\frac{U}{x\nu}}$.

Ниже мы будем интересоваться только распределением продольной скорости v_x (поскольку v_y мало). Уже из формулы (39,11) с неопределённой пока функцией f можно сделать следующий существенный вывод. Скорость v_x возрастает от нуля на поверхности пластинки до определённой доли U при определённом значении аргумента функции f , т. е. при $y \sqrt{\frac{U}{x\nu}} = \text{const.}$, где const. есть некоторое число. Поэтому мы можем заключить, что «толщина» пограничного слоя на обтекаемой пластинке — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{x\nu}{U}}. \quad (39,12)$$

Таким образом, по мере удаления от края пластинки δ растёт пропорционально квадратному корню из расстояния до этого края.

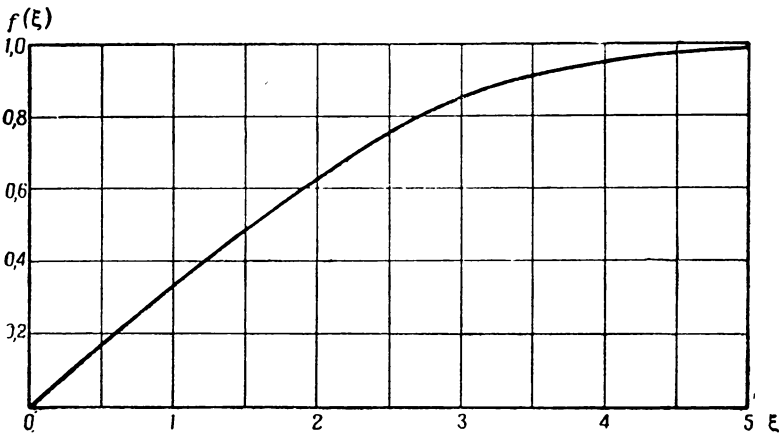


Рис. 19.

Функцию f можно определить посредством численного интегрирования соответствующего уравнения. График этой функции изображён

1) Легко найти, что если ввести функцию $\varphi(\xi)$ такую, что $f(\xi) = \varphi'(\xi)$, то

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi\varphi' - \varphi),$$

а φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi'' + 2\varphi''' = 0$$

с условиями: $\varphi = 0, \varphi' = 0$ при $\xi = 0$ и $\varphi' = 1$ при $\xi = \infty$.

на рис. 19. Мы видим, что f весьма быстро стремится к своему предельному значению — к единице¹⁾.

Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Численный подсчёт даёт:

$$\sigma_{xy} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho U^3}{x}}. \quad (39,13)$$

Если пластинка имеет длину l (вдоль оси x), то полная действующая на неё сила трения (отнесённая к единице длины пластинки в поперечном — вдоль оси z — направлении) равна

$$F = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx.$$

Множитель 2 учитывает наличие у пластинки двух сторон, омываемых жидкостью. Подстановка (39,13) даёт:

$$F = 1,328 \sqrt{\eta \rho l U^3} \quad (39,14)$$

(Блазиус, 1908). Отметим, что сила трения оказывается пропорциональной полуторной степени скорости натекающего потока. Формула (39,14) может применяться только для достаточно длинных пластинок, для которых число Рейнольдса $R = \frac{Ul}{\nu}$ достаточно велико. Вместо силы обычно вводят так называемый коэффициент сопротивления, определяемый как безразмерное отношение

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l}. \quad (39,15)$$

Согласно (39,14) эта величина при ламинарном обтекании пластинки обратно пропорциональна квадратному корню из числа Рейнольдса:

$$C = \frac{1,328}{\sqrt{R}}. \quad (39,16)$$

Полученные здесь количественные формулы относятся, конечно, только к обтеканию плоской пластинки. Качественные же результаты

¹⁾ Иногда для характеристики ширины пограничного слоя пользуются так называемой «толщиной вытеснения», определяемой так, чтобы было

$$\int_0^{\infty} (U - v_x) dy = U\delta^*.$$

Она равна

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

(например, (39,8), (39,9)) имеют место и при обтекании тела произвольной формы; при этом под l надо понимать размеры тела в направлении обтекания.

Упомянем особо о следующих двух случаях пограничного слоя. Если мы имеем плоский диск (большого радиуса), вращающийся в жидкости вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости, то для оценки толщины пограничного слоя надо подставить в (39,12) Ωx вместо U (Ω — угловая скорость вращения). Тогда находим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}. \quad (39,17)$$

Мы видим, что толщину пограничного слоя можно считать постоянной вдоль поверхности диска (в согласии с полученным в § 23 точным решением этой задачи). Что касается действующего на диск момента сил трения, то расчёт с помощью уравнения пограничного слоя приводит, конечно, к формуле (23,4), поскольку эта формула является вообще точной и потому относится к ламинарному движению при любых R .

Наконец, остановимся на вопросе о ламинарном пограничном слое, возникающем на стенках трубы вблизи места входа жидкости в неё. Жидкость вступает в трубу обычно с распределением скоростей, почти постоянным по всему поперечному сечению, и падение скорости происходит только в пограничном слое. По мере удаления от входа начинают тормозиться слои жидкости всё ближе к оси трубы. Поскольку количество протекающей жидкости должно оставаться постоянным, то наряду с уменьшением диаметра внутренней части течения (с почти постоянным профилем скоростей) происходит одновременное его ускорение. Так продолжается до тех пор, пока асимптотически не устанавливается пуазейлевское распределение скоростей, которое, таким образом, имеет место только на достаточно большом расстоянии от входа трубы. Легко определить порядок величины длины l этого так называемого начального участка течения. Он определяется тем, что на расстоянии l от входа толщина пограничного слоя делается порядка величины радиуса a трубы, так что пограничный слой как бы заполняет собой всё её сечение. Полагая в (39,12) $x \sim l$ и $\delta \sim a$, получим:

$$l \sim \frac{a^2 U}{\nu} \sim aR. \quad (39,18)$$

Таким образом, длина начального участка пропорциональна числу Рейнольдса¹⁾.

¹⁾ Мы совершенно не останавливаемся на теории пограничного слоя в сжимаемой жидкости. Уравнения движения в таком слое составляются по такому же принципу, как и для несжимаемой жидкости, но, разумеется, оказываются значительно более сложными. А. А. Дородницыну (1942) принадлежит преобразование, с помощью которого эти уравнения могут быть

ЗАДАЧИ

1. Определить толщину пограничного слоя вблизи критической точки (см. § 10) на обтекаемом жидкостью теле.

Решение. Вблизи точки остановки скорость жидкости (вне пограничного слоя) является линейной функцией расстояния x от этой точки, так что можно написать $U = cx$. Оценка членов уравнений (39,5) приводит к выражению

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{c}}.$$

Таким образом, вблизи критической точки толщина пограничного слоя остаётся конечной (и, в частности, не обращается в нуль в самой критической точке).

2. Определить движение в пограничном слое при конфузорном (см. § 23) течении между двумя непараллельными плоскостями (*Польгаузен*, 1921).

Решение. Рассматривая пограничный слой, образующийся вдоль одной из сторон угла, отсчитываем координату x вдоль этой стороны от точки O (рис. 8). При течении идеальной жидкости мы имели бы для скорости выражение $U = \frac{Q}{\alpha x \rho}$; соответствующий градиент давления равен согласно формуле Бернулли

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{U^2}{2} = -\frac{Q^2}{\alpha^2 x^3 \rho^3}.$$

Легко убедиться в том, что v_x и v_y надо искать в виде

$$v_x = \frac{Q}{\rho \alpha x} f\left(\frac{y}{x}\right), \quad v_y = \frac{Q}{\rho \alpha x} f_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Из уравнения непрерывности получаем $f_1 = \frac{y}{x} f$, после чего первое из уравнений (39,5) даёт для функции f

$$\frac{\rho \nu \alpha}{Q} f'' = 1 - f^2,$$

где ' означает дифференцирование f по её аргументу $\xi = \frac{y}{x}$. Граничные условия гласят: $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$ (соответственно тому, что должно быть $v_x|_{y=0} = 0$, $v_x|_{y=\infty} = \frac{Q}{\rho \alpha x}$). Первый интеграл этого уравнения есть

$$\frac{\nu \alpha \rho}{2Q} f'^2 = f - \frac{f^3}{3} + \text{const.}$$

Поскольку при $y \rightarrow \infty$ f стремится к единице, то мы видим, что и f' стремится к определённом пределу, и ясно, что этот предел может быть только

приведены к более простому виду, сходному с уравнениями движения в пограничном слое несжимаемой жидкости.

Изложение теории этого вопроса можно найти в книгах: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, гл. II, §§ 35, 36, Гостехиздат, 1948; Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, § 89, Гостехиздат, 1950.

нулём. Определяя отсюда const., находим:

$$\frac{\nu \rho}{2Q} f'^2 = -\frac{1}{3} (f-1)^2 (f+2).$$

Так как правая часть всегда отрицательна в интервале $0 \leq f \leq 1$, то непременно должно быть $Q < 0$. Другими словами, пограничный слой рассматриваемого типа образуется только при конфузорном течении (с большими числами Рейнольдса $R = \frac{|Q|}{\nu \rho}$), и не получается при диффузорном течении в согласии с результатами § 23. Интегрируя ещё раз, получаем окончательно:

$$f = 3 \operatorname{th}^2 \left[\ln (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \xi \sqrt{\frac{R}{2\alpha}} \right] - 2.$$

§ 40. Движение вблизи линии отрыва

При описании явления отрыва (§ 34) уже было указано, что реальное положение линии отрыва на поверхности обтекаемого тела определяется свойствами движения в пограничном слое. Мы увидим ниже, что в чисто математическом отношении линия отрыва есть линия, точки которой являются особыми точками решений уравнений движения в пограничном слое (уравнений Прандтля). Задача состоит в том, чтобы определить свойства этих решений вблизи такой особой линии¹⁾.

От линии отрыва отходит, как мы знаем, уходящая в глубь жидкости поверхность, ограничивающая область турбулентного движения. Движение во всей турбулентной области является вихревым, между тем как при отсутствии отрыва оно было бы вихревым лишь в пограничном слое, где существенна вязкость жидкости, а в основном потоке ротор скорости отсутствовал бы. Поэтому можно сказать, что при отрыве происходит «проникновение» ротора скорости из пограничного слоя в глубь жидкости. Но в силу закона сохранения циркуляции скорости такое «проникновение» может произойти только путём непосредственного перемещения движущейся вблизи поверхности тела (в пограничном слое) жидкости в глубь основного потока. Другими словами, должен произойти как бы «отрыв» течения в пограничном слое от поверхности тела, в результате чего линии тока выходят из пристеночного слоя в глубь жидкости. (Поэтому и называют это явление «отрывом» или «отрывом пограничного слоя».)

Уравнения движения в пограничном слое приводят, как мы видели, к результату, что в пограничном слое тангенциальная составляющая скорости (v_x) велика по сравнению с нормальной к поверхности тела компонентой (v_y). Такое соотношение между v_x и v_y органически связано с основными предположениями о характере движения в пограничном слое и должно необходимым образом соблюдаться везде, где уравнения Прандтля имеют физически осмысленные решения. Математически оно во всяком случае имеет место во всех точках, не

¹⁾ Излагаемая здесь, несколько отличная от обычной трактовка вопроса принадлежит Л. Д. Ландау.

лежащих в непосредственной близости от особых точек. Но если $v_y \ll v_x$, то это значит, что жидкость движется вдоль поверхности тела, практически не отклоняясь от неё, так что никакого «отрыва течения» произойти не может. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрыв может произойти лишь на той линии, точки которой являются особыми для решения уравнений Прандтля.

Характер этих особенностей тоже непосредственно следует из сказанного. Действительно, дойдя до линии отрыва, течение отклоняется, переходя из области пограничного слоя в глубь жидкости. Другими словами, нормальная составляющая скорости перестаёт быть малой по сравнению с тангенциальной и делается по крайней мере одного с нею порядка величины. Мы видели (см. (39,8)), что отношение $\frac{v_y}{v_x}$ — порядка $\frac{1}{\sqrt{R}}$, так что возрастание v_y до $v_y \sim v_x$ означает увеличение в \sqrt{R} раз. Поэтому при достаточно больших числах Рейнольдса (о которых, разумеется, только и идёт речь) можно считать, что v_y возрастает в бесконечное число раз. Если перейти в уравнениях Прандтля к безразмерным величинам (см. (39,7)), то описанное положение формально означает, что безразмерная скорость v'_y в решении уравнений становится на линии отрыва бесконечной.

Будем рассматривать для некоторого упрощения дальнейшего исследования «двухмерную» задачу о поперечном обтекании бесконечно длинного тела. Как обычно, x будет координатой вдоль поверхности тела в направлении течения, а координата y будет расстоянием от поверхности тела. Вместо линии отрыва здесь можно говорить о «точке отрыва», подразумевая пересечение линии отрыва с плоскостью x, y ; в выбранных координатах это есть точка $x = \text{const.} \equiv x_0, y = 0$. Область до точки отрыва пусть соответствует $x < x_0$.

Согласно полученным результатам при $x = x_0$ имеем при всех y ¹⁾

$$v_y(x_0, y) = \infty. \quad (40,1)$$

Но в уравнениях Прандтля скорость v_y является своего рода вспомогательной величиной, которой при исследовании движения в пограничном слое обычно не интересуются (в связи с её малостью). Поэтому желательно выяснить, какими свойствами обладает вблизи линии отрыва функция v_x .

Из (40,1) ясно, что при $x = x_0$ обращается в бесконечность также и производная $\frac{\partial v_y}{\partial y}$. Из уравнения непрерывности $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ следует тогда, что и $\frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$ делается бесконечной, или

$$\frac{\partial x}{\partial v_x} = 0,$$

¹⁾ Кроме только точки $y = 0$, в которой всегда должно быть $v_y = 0$ согласно граничным условиям на поверхности тела.

где x рассматривается как функция от v_x и y . Обозначим посредством $v_0(y)$ значение функции $v_x(x, y)$ при $x = x_0$ ($v_0(y) = v_x(x_0, y)$). Вблизи точки отрыва разности $v_x - v_0$ и $x_0 - x$ малы и можно разложить $x_0 - x$ в ряд по степеням $v_x - v_0$ (при заданном y). В силу условия $\left. \frac{\partial x}{\partial v_x} \right|_{v=v_0} = 0$ член первого порядка в этом разложении должен тождественно выпадать, и с точностью до членов второго порядка имеем:

$$x_0 - x = f(y)(v_x - v_0)^2$$

или

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{x_0 - x}, \quad (40,2)$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{f}}$ — некоторая функция только от y . Написав теперь

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}$$

и интегрируя, получаем для v_y :

$$v_y = \frac{\beta(y)}{\sqrt{x_0 - x}}, \quad (40,3)$$

где $\beta(y) = \frac{1}{2} \int \alpha(y) dy$ есть опять функция от y .

Далее, воспользуемся первым из уравнений (39,5):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (40,4)$$

Производная $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ не обращается, как это видно из (40,2), при $x = x_0$ в бесконечность. То же самое относится и к величине $\frac{dp}{dx}$, определяющей движением вне пограничного слоя. Оба же члена в левой стороне уравнения (40,4) обращаются, каждый в отдельности, в бесконечность. В первом приближении можно, следовательно, написать для области вблизи точки отрыва

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Подставляя сюда $\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v_y}{\partial y}$, переписываем это уравнение в виде

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Поскольку при $x = x_0$ скорость v_x , вообще говоря, не обращается в нуль, то должно быть $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, т. е. отношение $\frac{v_y}{v_x}$ не зависит

от y . С другой стороны, из (40,2) и (40,3) имеем с точностью до членов высшего порядка

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y) \sqrt{x_0 - x}}.$$

Для того чтобы это выражение было функцией только от x , необходимо: $\beta(y) = \frac{1}{2} A v_0(y)$, где A — численная постоянная. Таким образом,

$$v_y = \frac{A v_0(y)}{2 \sqrt{x_0 - x}}. \quad (40,5)$$

Наконец, замечая, что функции α и β в (40,2) и (40,3) связаны друг с другом уравнением $\alpha = 2\beta'$, получаем $\alpha = A \frac{dv_0}{dy}$, так что

$$v_x = v_0(y) + A \frac{dv_0}{dy} \sqrt{x_0 - x}. \quad (40,6)$$

Формулы (40,5) и (40,6) определяют характер зависимости функций v_x и v_y от x вблизи точки отрыва. Мы видим, что обе они оказываются разложимыми в этой области по степеням корня $\sqrt{x_0 - x}$, причём разложение v_y начинается с члена (-1) -й степени, так что v_y обращается при $x \rightarrow x_0$ в бесконечность, как $\frac{1}{\sqrt{x_0 - x}}$. При $x > x_0$, т. е. за точкой отрыва, разложение (40,5) и (40,6) физически неприменимо, так как корни делаются мнимыми; это свидетельствует о физической бессмысленности продолжения за точку отрыва решений уравнений Прандтля, описывающих движение до этой точки.

В силу граничных условий на самой поверхности тела должно быть всегда $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$. Из (40,5) и (40,6) заключаем поэтому, что

$$v_0'(0) = 0, \quad \left. \frac{dv_0}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (40,7)$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что в самой точке отрыва ($x = x_0$, $y = 0$) обращается в нуль не только скорость v_x , но и её первая производная по y (этот результат принадлежит Прандтлю).

Необходимо подчеркнуть, что равенство $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ на линии отрыва имеет место лишь постольку, поскольку при этом же x обращается в бесконечность v_y . Если бы постоянная A в (40,5) случайно оказалась равной нулю (а потому не было бы и $v_y(x_0, y) = \infty$), то точка $x = x_0$, $y = 0$, в которой обращается в нуль производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, не была бы ничем замечательна и во всяком случае не была бы точкой отрыва. Обращение A в нуль может, однако, произойти лишь чисто случайно и поэтому невероятно. Практически, следовательно, точка на

поверхности тела, в которой $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, всегда является в то же время точкой отрыва.

Если бы в точке $x = x_0$ не возник отрыв (т. е. если $A = 0$), то при $x > x_0$ было бы $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} < 0$, т. е. при удалении от стенки (при достаточно малых y) v_x делалось бы отрицательным, увеличиваясь по абсолютной величине. Другими словами, за точкой $x = x_0$ жидкость двигалась бы в нижних слоях пограничного слоя в направлении, обратном основному потоку; возникло бы «подтекание» жидкости к этой точке. Подчеркнём, что из такого рода рассуждений ещё отнюдь нельзя было бы делать вывода о необходимости отрыва в точке, где $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$; вся картина течения с «подтеканием» могла бы (как это и было бы при $A = 0$) находиться целиком в области пограничного слоя, не выходя в область основного потока, между тем как для отрыва характерен именно выход течения в основной объём жидкости.

В предыдущем параграфе было показано, что картина движения в пограничном слое остаётся при изменении числа Рейнольдса подобной самой себе, причём, в частности, масштабы по координате x остаются неизменными. Отсюда следует, что значение x_0 координаты x , при котором обращается в нуль производная $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$, не меняется при изменении R . Таким образом, мы приходим к существенному выводу, что положение точки отрыва на поверхности обтекаемого тела не зависит от числа Рейнольдса (до тех пор, разумеется, пока пограничный слой остаётся ламинарным; см. об этом § 45).

Выясним ещё, какими свойствами обладает распределение давления $p(x)$ вблизи точки отрыва. При $y = 0$ левая сторона уравнения (40,4) обращается в нуль вместе с v_x и v_y и остаётся

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (40,8)$$

Отсюда видно, что знак $\frac{dp}{dx}$ совпадает со знаком $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0}$. До тех пор, пока $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} > 0$, о знаке второй производной ничего нельзя сказать. Но поскольку при удалении от стенки v_x положительно и растёт (в области до точки отрыва), то в самой точке $x = x_0$, где $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, должно во всяком случае быть $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} > 0$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_0} > 0, \quad (40,9)$$

т. е. вблизи точки отрыва жидкость движется от более низкого давления к более высокому. Градиент давления связан с градиентом скорости $U(x)$ вне пограничного слоя соотношением $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$. Поскольку положительное направление оси совпадает с направлением основного потока, то $U > 0$, и мы заключаем, что

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} < 0, \quad (40,10)$$

т. е. вблизи точки отрыва скорость U падает в направлении течения.

Из полученных результатов можно вывести заключение о том, что при обтекании тела в том или ином месте его поверхности должен произойти отрыв. Действительно, на заднем, как и на переднем, конце тела имеется точка, в которой при потенциальном обтекании идеальной жидкостью скорость жидкости обращалась бы в нуль (критическая точка). Поэтому, начиная с некоторого значения x , скорость $U(x)$ должна была бы начать падать, обращаясь в конце концов в нуль. С другой стороны, ясно, что текущая вдоль поверхности тела жидкость тормозится тем сильнее, чем ближе к стенке находится рассматриваемый её слой (т. е. чем меньше y). Поэтому, раньше чем обратилась бы в нуль скорость $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя, должна была бы обратиться в нуль скорость в непосредственной близости от стенки. Математически это, очевидно, означает, что производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ во всяком случае должна была бы обратиться в нуль (а поэтому отрыв не может не возникнуть) при некотором x , меньшем, чем то его значение, при котором было бы $U(x) = 0$.

В случае обтекания тел произвольной формы все вычисления могут быть произведены совершенно аналогичным образом и приводят к результату, что на линии отрыва обращаются в нуль производные $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ от обеих касательных к поверхности тела компонент скорости v_x и v_z (ось y попрежнему направлена по нормали к рассматриваемому участку поверхности тела).

Приведём простое рассуждение, которое показывает необходимость возникновения отрыва в случаях, когда в отсутствии отрыва в обтекающем тело потоке жидкости имелось бы достаточно быстрое возрастание давления (и соответственно этому падение скорости U) в направлении течения. Пусть на малом расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1$ давление p испытывает достаточно большое увеличение от значения p_1 до p_2 ($p_2 \gg p_1$). На том же расстоянии Δx скорость U жидкости вне пограничного слоя падает от исходного значения U_1 до значительно меньшего значения U_2 , определяемого уравнением Бернулли:

$$\frac{1}{2} (U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1).$$

Поскольку p не зависит от y , то увеличение давления $p_2 - p_1$ одинаково на всех расстояниях от стенки. При достаточно большом градиенте давления $\frac{dp}{dx} \sim \frac{p_2 - p_1}{\Delta x}$ в уравнении движения (40,4) может быть опущен член $\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, содержащий вязкость (если только, разумеется, y не слишком мало). Тогда можно и для оценки изменения скорости v в пограничном слое воспользоваться уравнением Бернулли, написав

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1)$$

или, сравнивая с предыдущим равенством:

$$v_2^2 = v_1^2 - (U_1^2 - U_2^2).$$

Но скорость v_1 в пограничном слое меньше скорости основного потока; можно выбрать такое y , для которого $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. Скорость v_2 оказывается, таким образом, мнимой, что свидетельствует об отсутствии физически осмысленных решений уравнений Прандтля. В действительности, на участке Δx должен возникнуть отрыв, в результате которого слишком большой градиент давления уменьшается.

Интересным случаем возникновения отрыва является обтекание угла, образованного двумя пересекающимися твёрдыми поверхностями. При ламинарном потенциальном обтекании выпуклого угла (рис. 3) скорость жидкости на крае угла обратилась бы в бесконечность (см. задачу 6 § 10), возрастая вдоль потока, подходящего к краю, и убывая в потоке, уходящем от него. В действительности, быстрое падение скорости (и соответственно возрастание давления) за краем угла приводит к возникновению отрыва, причём линией отрыва является линия края угла. В результате возникает картина движения, рассмотренная в § 35.

При ламинарном же течении внутри вогнутого угла (рис. 4) скорость жидкости обращается на краю угла в нуль. Падение скорости (и возрастание давления) имеет здесь место в потоке, подходящем к краю угла. Оно приводит, вообще говоря, к возникновению отрыва, причём линия отрыва расположена вверх по течению от края угла.

Задача

Определить наименьший порядок увеличения давления Δp , которое должно иметь место (в основном потоке) на расстоянии Δx , для того чтобы произошёл отрыв.

Решение. Пусть y есть такое расстояние от поверхности тела, на котором, с одной стороны, уже можно применить уравнение Бернулли, а с другой стороны, такое, что квадрат $v^2(y)$ скорости v в пограничном слое здесь меньше изменения $|\Delta U^2|$ квадрата скорости U вне этого слоя. Для $v(y)$ можно написать по порядку величины: $v(y) \approx \frac{dv}{dy} y \sim \frac{U}{\delta} y$ ($\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{U}}$ —

ширина пограничного слоя, l — размеры тела). Приравнивая порядки величины обоих членов в правой стороне уравнения (40,4), получаем: $\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \nu \frac{v(y)}{y^2} \sim \nu \frac{U}{\delta y}$. Из условия же $v^2 = |\Delta U^2| = 2 \frac{\Delta p}{\rho}$ получаем: $\frac{U^2}{\delta^2} y^2 \sim \frac{\Delta p}{\rho}$. Исключая y из обоих полученных соотношений, находим окончательно:

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l} \right)^{2/3}.$$

§ 41. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Ламинарное движение в пограничном слое, как и всякое другое ламинарное течение, при достаточно больших числах Рейнольдса становится в той или иной степени неустойчивым. Характер потери устойчивости в пограничном слое аналогичен потере устойчивости при течении по трубе (§ 29).

Число Рейнольдса для течения в пограничном слое меняется вдоль поверхности обтекаемого тела. Так, при обтекании пластинки можно определить число Рейнольдса как $R_x = \frac{Ux}{\nu}$, где x — расстояние от переднего края пластинки, U — скорость жидкости вне пограничного слоя. Более характерным для пограничного слоя, однако, является такое определение, в котором роль размеров играет какая-либо длина, непосредственно характеризующая толщину слоя; в качестве таковой можно, например, выбрать так называемую «толщину вытеснения» δ^* (см. примечание на стр. 185):

$$R_\delta = \frac{U\delta^*}{\nu}.$$

Поскольку зависимость толщины пограничного слоя от расстояния x определяется формулой (39,12), то ясно, что $R_\delta \sim \sqrt{R_x}$ ¹⁾.

Ввиду сравнительной медленности изменения толщины слоя с расстоянием, при исследовании устойчивости течения в небольшом его участке можно отвлечься от этого изменения и рассматривать прямолинейное плоское течение с неизменяющимся вдоль оси x профилем скоростей²⁾. Тогда с чисто математической точки зрения задача будет вполне аналогична задаче об устойчивости течения между двумя параллельными плоскостями (о которой шла речь в § 29). Разница заключается лишь в форме профиля скоростей: вместо симметричного

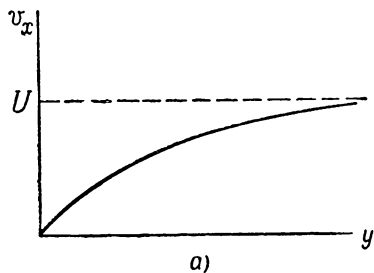
1) Так, для ламинарного пограничного слоя на плоской пластинке

$$R_\delta = 1,72 \sqrt{R_x}.$$

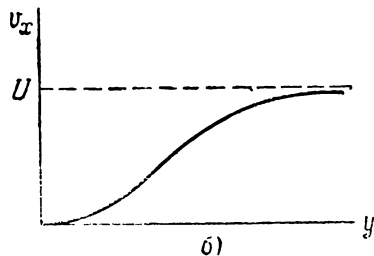
2) При таком рассмотрении остаётся, конечно, в стороне вопрос о влиянии, которое может иметь на устойчивость пограничного слоя кривизна обтекаемой поверхности.

профиля с $v = 0$ на обеих границах здесь имеется несимметричный профиль, в котором скорость меняется от нуля на поверхности тела до некоторого заданного значения U — скорости потока вне пограничного слоя. Такое исследование приводит к следующим результатам (Лин, 1945).

Форма граничной кривой устойчивости на диаграмме ω, R (см. § 29) зависит от формы профиля скоростей в пограничном слое. Если профиль скоростей не имеет точки перегиба (скорость v_x монотонно возрастает, причём кривая $v_x = v_x(y)$ везде выпуклая; рис. 20, а), то граница устойчивости имеет форму, вполне аналогичную той, которая характеризует устойчивость течения в трубе: имеется некоторое минимальное значение $R = R_{кр}$, при котором появляются усиливающиеся возмущения, а при $R \rightarrow \infty$ обе ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс (рис. 21, а).



а)



б)

Рис. 20.

Для профиля скоростей, имеющего место в пограничном слое на плоской пластинке, вычисление даёт для критического значения числа Рейнольдса значение $R_{кр} \approx 420^1$.

Профиль скоростей типа рис. 20, а не может иметь места, если скорость жидкости вне пограничного слоя уменьшается вниз по течению; в этом случае профиль скоростей непременно должен иметь точку перегиба. Действительно, рассмотрим

небольшой участок поверхности стенки, который можно считать плоским, и пусть x есть опять продольная координата вдоль направления течения, а y — расстояние от стенки. Из соотношения (40,8):

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{\partial U}{\partial x}$$

видно, что если U падает вниз по течению ($\frac{\partial U}{\partial x} < 0$), то вблизи поверхности

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0,$$

¹⁾ При $R_0 \rightarrow \infty$ на ветвях I и II границы устойчивости ω обращается в нуль соответственно как $R_0^{-1/2}$ и $R_0^{-1/3}$.

т. е. кривая $v_x = v_x(y)$ — вогнутая. При увеличении же y скорость v_x должна асимптотически приближаться к конечному пределу U . Уже из чисто геометрических соображений ясно, что для этого кривая должна стать выпуклой, а потому имеет где-то точку перегиба (рис. 20, б).

При наличии точки перегиба в профиле скоростей форма кривой границы устойчивости несколько меняется. Именно, обе ветви кривой имеют при $R \rightarrow \infty$ различные асимптоты: одна ветвь по-прежнему асимптотически приближается к оси абсцисс, а на другой ω стремится к конечному, отличному от нуля пределу (рис. 21, б). Кроме того, наличие точки перегиба сильно понижает значение $R_{кр}$.

То обстоятельство, что число Рейнольдса возрастает вдоль пограничного слоя, придаёт своеобразный характер поведению возмущений при их «сносе» вниз по течению. Рассмотрим обтекание плоской пластинки и предположим, что в некотором месте пограничного слоя производится возмущение с заданной частотой ω . Его распространению вниз по течению соответствует на диаграмме рис. 21, а перемещение вправо по горизонтальной прямой $\omega = \text{const}$. При этом возмущение сначала затухает, затем по достижении ветви I границы устойчивости начнёт усиливаться. Усиление продолжается до момента достижения ветви II, после чего возмущение вновь будет затухать. Полный «коэффициент усиления» возмущения за время его прохождения через область неустойчивости очень быстро возрастает по мере того, как эта область сдвигается в сторону больших R (т. е. чем ниже на рис. 21, а расположен соответствующий горизонтальный отрезок между ветвями I и II границы устойчивости).

Эти результаты, однако, сами по себе ещё не дают ответа на вопрос о том, возникает ли при достаточно больших R истинная абсолютная неустойчивость в ламинарном пограничном слое, т. е. неустойчивость, приводящая к усилению со временем возмущений в данном месте потока (см. § 29). Как и для течения по трубе, такое исследование не было произведено,

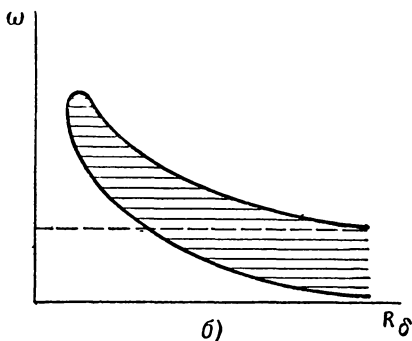
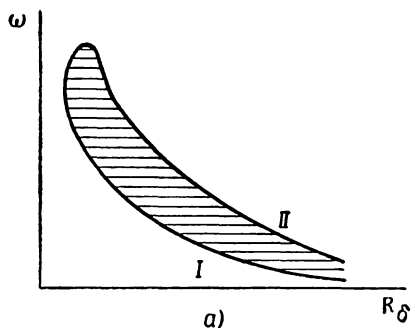


Рис. 21.

Экспериментальные данные об обтекании плоской пластинки показывают, что место возникновения турбулентности в пограничном слое ¹⁾ существенно зависит от интенсивности возмущений в натекающем потоке. При значительной возмущённости (степени турбулентности) потока удавалось наблюдать турбулизацию пограничного слоя при $R_\delta \approx 560$. По мере уменьшения степени возмущённости потока наступление турбулентности отодвигается к более высоким значениям R_δ , стремящимся, повидимому, к конечному пределу около 3000.

Возможно, что существование этого предела свидетельствует о наличии истинной абсолютной неустойчивости при достаточно больших значениях R . Возможно, однако, и что благодаря чрезвычайно быстрому росту «коэффициента усиления» с увеличением R описанная выше неустойчивость «сносового» типа может симулировать истинную неустойчивость.

§ 42. Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим плоско-параллельный турбулентный поток жидкости, текущий вдоль неограниченной плоской поверхности (когда мы говорим о плоско-параллельности турбулентного потока, то подразумевается, конечно, усреднённое по времени движение в нём) ²⁾. Выберем направление потока в качестве оси x , плоскость стенки — в качестве плоскости x, z , так что y есть расстояние от стенки. Компоненты средней скорости вдоль осей y и z равны нулю: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. Перепад давления отсутствует; все величины зависят только от y .

Обозначим посредством σ силу трения, действующую на единицу поверхности стенки (и направленную, очевидно, по оси x). Величина σ представляет собой не что иное, как импульс, передаваемый жидкостью твёрдой стенке; она является в то же время тем постоянным потоком импульса (точнее x -компоненты импульса), который направлен в отрицательном направлении оси y , и определяет количество импульса, непрерывно передаваемого от более удалённых от стенки слоёв жидкости к менее удалённым.

Наличие этого потока импульса связано, конечно, с наличием вдоль оси y градиента средней скорости u . Если бы жидкость двигалась с везде одинаковой скоростью, то никакого потока импульса в ней не было бы. Можно поставить вопрос и обратным образом. Именно, зададимся некоторым определённым значением σ и поставим

¹⁾ Благодаря изменению числа Рейнольдса вдоль длины пластинки турбулируется не сразу весь пограничный слой, а лишь та его часть, для которой R_δ превышает определённое значение. При заданной скорости обтекания это значит, что турбулизация возникает на определённом расстоянии от переднего края; при увеличении скорости это место приближается к переднему краю.

²⁾ Излагаемые в §§ 42—44 результаты были получены *Т. Карманом* и *Л. Прандтлем*.

вопрос о том, каково должно быть движение в жидкости данной плотности ρ , приводящее к потоку импульса σ . Что касается вязкости ν , то при больших числах Рейнольдса она, как обычно, не играет роли (она делается существенной лишь на очень малых расстояниях y ; см. ниже). Таким образом, значение градиента скорости $\frac{du}{dy}$ в каждой точке должно определяться постоянными параметрами ρ , σ и, разумеется, самим расстоянием y . Размерности этих трёх величин есть соответственно $\frac{г}{см^3}$, $\frac{дина}{см^2} = \frac{г}{см \cdot сек^2}$ и $см$. Размерность же производной $\frac{du}{dy}$ есть $1/сек$. Единственной комбинацией этой размерности, которую можно составить из σ , ρ и y , является $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{1}{y}$. Поэтому должно быть

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (42,1)$$

где x есть численная постоянная. Эта постоянная не может быть вычислена теоретически и должна быть определена из экспериментальных данных. Она оказывается равной 1)

$$x = 0,417. \quad (42,2)$$

Введём удобное для дальнейшего обозначение $v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, так что

$$\sigma = \rho v_*^2. \quad (42,3)$$

Величина v_* имеет размерность $см/сек$ и играет роль некоторой характерной для рассматриваемого турбулентного движения скорости; (42,1) приобретает теперь вид $\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{xy}$, откуда

$$u = \frac{v_*}{x} (\ln y + c), \quad (42,4)$$

где c есть постоянная интегрирования. Для определения этой постоянной нельзя воспользоваться обычными граничными условиями на поверхности стенки: при $y=0$ первый член в (42,4) обращается в бесконечность. Причина этого заключается в том, что написанное выражение становится в действительности неприменимым на очень малых расстояниях от стенки, поскольку при очень малых y влияние вязкости делается существенным и им нельзя пренебрегать. Условия на бесконечности тоже отсутствуют: при $y=\infty$ выражение (42,4) тоже делается бесконечным. Это связано с тем, что в поставленных нами идеализированных условиях задачи фигурирует бесконечная

1) Значение этой постоянной (и ещё одной постоянной ниже в формуле (42,8)) получено из результатов измерений распределения скоростей вблизи стенок трубы при турбулентном течении в ней,

поверхность стенки, влияние которой простирается поэтому и на бесконечно большие расстояния.

Прежде чем определить постоянную c , укажем предварительно на следующую существенную особенность рассматриваемого движения: оно не имеет никаких характерных постоянных параметров длины, которые могли бы определить масштаб турбулентного движения, как это имеет место в обычных случаях. Поэтому основной масштаб турбулентности определяется самим расстоянием y : турбулентное движение на расстоянии y от стенки имеет основной масштаб порядка величины y . Что же касается пульсационной скорости турбулентного движения, то она — порядка величины v_* . Это тоже следует непосредственно из соображений размерности, поскольку v_* есть единственная величина с размерностью скорости, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин σ , ρ , y . Подчеркнём, что в то время как средняя скорость падает с уменьшением y , порядок величины пульсационной скорости оказывается одинаковым на всех расстояниях от стенки. Этот результат находится в согласии с общим правилом, что порядок величины пульсационной скорости определяется изменением Δu средней скорости (§ 31). В рассматриваемом случае нет характерных длин l , на которых можно было бы брать изменение средней скорости. Δu должно быть теперь разумным образом определено, как изменение u при изменении расстояния y на величину порядка его самого. Но при таком изменении y скорость u меняется согласно (42,4) как раз на величину порядка v_* .

На достаточно малых расстояниях от стенки начинает играть роль вязкость жидкости; обозначим порядок величины этих расстояний посредством y_0 . Определить y_0 можно следующим образом. Масштаб турбулентного движения на этих расстояниях — порядка y_0 , а скорость — порядка v_* . Поэтому число Рейнольдса, характеризующее движение на расстояниях порядка y_0 , есть

$$R \sim \frac{y_0 v_*}{\nu}.$$

Вязкость начинает играть роль, когда R делается порядка единицы. Отсюда находим, что

$$y_0 \sim \frac{\nu}{v_*}, \quad (42,5)$$

чем и определяется интересующее нас расстояние.

На малых по сравнению с y_0 расстояниях от стенки движение жидкости определяется обычным вязким трением. Распределение скоростей здесь может быть получено непосредственно из обычной формулы для вязкого трения:

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{dy},$$

откуда

$$u = \frac{\sigma}{\rho \nu} y = \frac{v_*^2}{\nu} y. \quad (42,6)$$

Таким образом, непосредственно к стенке прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется с y по линейному закону; величина скорости во всей этой прослойке мала — она меняется от нуля на самой стенке до значений порядка v_* при $y \sim y_0$. Мы будем называть эту прослойку «вязким подслоем».

Подчеркнём, что и здесь движение жидкости турбулентно (в этом смысле обычно принятое название «ламинарного подслоя» неудачно). Сходство с ламинарным движением заключается только в том, что средняя скорость распределена здесь по такому же закону, по которому была бы распределена истинная скорость при ламинарном течении в тех же условиях. Никакой сколько-нибудь резкой границы между вязким подслоем и остальным потоком, разумеется, нет; в этом смысле понятие о вязком подслое имеет чисто качественный характер.

Порядок величины продольной компоненты пульсационной скорости (v'_x) в вязком подслое — тот же, что и средней скорости, и, в частности, пропорционален y ($\sim v_* y / y_0$). Из уравнения непрерывности следует поэтому, что производная $\frac{\partial v'_y}{\partial y} = -\frac{\partial v'_x}{\partial x}$ пропорциональна y , а потому поперечная компонента пульсационной скорости изменяется как y^2 ($\sim v_* y^2 / y_0^2$). Далее из линейности уравнений движения в вязком подслое (нелинейные члены здесь малы по сравнению с вязкими) следует, что периоды турбулентных пульсаций одинаковы по всей его толщине. Умножая эти периоды на пульсационную скорость, найдём, что расстояния, проходимые частицами жидкости в их пульсационном движении в продольном направлении, пропорциональны (порядка величины) y , а в поперечном — пропорциональны y^2 ($\sim y^2 / y_0$).

В дальнейшем движении в вязком подслое мы не будем интересоваться вовсе. Наличие его надо учесть только соответствующим выбором постоянной интегрирования в (42,4). Эта постоянная должна быть выбрана таким образом, чтобы скорость делалась порядка v_* на расстояниях порядка y_0 . Для этого надо взять $c = -\ln y_0$, так что

$$u = \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{y}{y_0}, \text{ или}$$

$$u = \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{y v_*}{\nu}. \quad (42,7)$$

Эта формула определяет (при ограниченных y) распределение скоростей в турбулентном потоке, текущем вдоль твёрдой стенки. Такое распределение называют логарифмическим профилем скоростей.

В формуле (42,7) под знаком логарифма должен был бы на самом деле стоять ещё некоторый численный коэффициент. Однако в формулах, которые мы будем здесь выводить, мы ограничиваемся «логарифмической» точностью. Это значит, что величина, стоящая

в качестве аргумента под знаком логарифма, предполагается большой, причём пренебрегаем не только членами, пропорциональными более низким степеням этого аргумента, но и членами, содержащими логарифм в более низких степенях, чем в главном члене. Введение небольшого численного коэффициента под знаком логарифма в (42) эквивалентно прибавлению к написанному выражению дополнительного члена вида $\text{const. } v_*$, где const. — число порядка единицы; этот член не содержит логарифма, и потому мы им пренебрегаем. Надо, однако, иметь в виду, что в выводимых здесь формулах аргумент у логарифма всё же не настолько велик, чтобы его логарифм тоже был ещё очень велик; поэтому и точность формул не очень высока.

Более точными эти формулы можно сделать, вводя численный множитель в аргументе логарифма, или, что то же самое, прибавляя к логарифму постоянную. Эти постоянные, однако, не могут быть вычислены теоретически и должны определяться из экспериментальных данных. Так, более точная формула для распределения скоростей может быть написана в виде

$$u = v_* \left(2,40 \ln \frac{yv_*}{\nu} + 5,84 \right). \quad (42,8)$$

Нетрудно определить диссипацию энергии ϵ в единице объёма жидкости. σ представляет собой среднее значение компоненты Π_{xy} тензора плотности потока импульса $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$. Вне вязкого подслоя вязкий член может быть опущен, так что $\sigma = \overline{\rho v_x v_y}$. Вводя пульсационную скорость v' , можно написать $v_x = u + v'_x$; что же касается скорости v_y , то она сама является пульсационной скоростью, поскольку её среднее значение равно нулю. В результате получим:

$$\sigma = \overline{\rho v_x v_y} = \overline{\rho v'_x v'_y} + \rho u \overline{v'_y} = \overline{\rho v'_x v'_y}.$$

Далее, плотность потока энергии в направлении оси y равна

$$\left(p + \frac{\rho v^2}{2} \right) v_y$$

(здесь тоже опущен вязкий член). Написав во втором члене

$$v^2 = (u + v'_x)^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$

и усредняя, получим:

$$\overline{\rho v'_y} + \frac{\rho}{2} (\overline{v_x'^2 v'_y} + \overline{v_y'^3} + \overline{v_z'^2 v'_y}) + \overline{\rho u v'_x v'_y}.$$

Здесь достаточно сохранить только последний член. Дело в том, что пульсационная скорость — порядка величины v_* и потому с логарифмической точностью мала по сравнению с u . Что касается давления p ,

то его турбулентные пульсации — порядка величины ρv_*^2 (ср. (31,4), и потому с той же точностью соответствующий член в потоке энергии тоже может быть опущен. Таким образом, имеем для средней плотности потока энергии

$$\rho u \overline{v'_x v'_y} = u \sigma.$$

По мере приближения к поверхности стенки этот поток уменьшается, что связано как раз с тем, что энергия диссипируется. Уменьшение плотности потока энергии при приближении к стенке на расстояние dy равно $\sigma \frac{du}{dy} dy$. Это есть то количество энергии, которое превратилось в тепло в слое жидкости толщины dy (и с равной единице площадью боковых поверхностей). Отсюда заключаем, что диссипация энергии, отнесённая к единице массы, есть $\frac{\sigma}{\rho} \frac{du}{dy}$, или

$$\epsilon = \frac{v_*^3}{xy} = \frac{1}{xy} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{3/2}. \quad (42,9)$$

§ 43. Турбулентное течение в трубах

Применим теперь полученные результаты к турбулентному течению жидкости по трубе. Вблизи стенок трубы (на расстояниях, малых по сравнению с её радиусом a) её поверхность можно приближённо рассматривать как плоскую и распределение скоростей должно описываться формулой (42,7) или (42,8). Однако ввиду медленного изменения функции $\ln y$ можно с логарифмической точностью применить формулу (42,7) и к средней скорости U течения жидкости в трубе, написав в этой формуле вместо y радиус a трубы:

$$U = \frac{v_*}{x} \ln \frac{av_*}{v}. \quad (43,1)$$

Под скоростью U мы будем подразумевать количество (объём) жидкости, протекающей в 1 сек. через сечение трубы, делённое на площадь этого сечения: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Для того чтобы связать скорость U с поддерживающим течение перепадом давления $\Delta p/l$ (Δp — разность давлений на концах трубы с длиной l), замечаем следующее. Действующая на всё сечение потока жидкости в трубе движущая сила есть $\pi a^2 \Delta p$. Эта сила идёт на преодоление трения о стенки. Поскольку отнесённая к единице площади стенки сила трения есть $\sigma = \rho v_*^2$, то полная сила трения равна $2\pi a l \rho v_*^2$. Приравнявая оба выражения, находим:

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho v_*^2 \frac{2}{a}. \quad (43,2)$$

Уравнения (43,1) и (43,2) определяют в параметрическом виде (параметром является v_*) связь скорости течения жидкости по трубе

с перепадом давления в ней. Об этой связи говорят обычно как о «законе сопротивления» трубы. Выражая v_* через $\Delta p/l$ из (43,2) и подставляя в (43,1), получаем закон сопротивления в виде уравнения

$$U = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2x^2\rho l}} \ln\left(\frac{a}{v} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho l}}\right). \quad (43,3)$$

Обычно в этой формуле вводят так называемый коэффициент сопротивления трубы, являющийся безразмерной величиной и определяющийся как отношение

$$\lambda = \frac{\frac{\Delta p}{l} 2a}{\frac{1}{2} \rho U^2}. \quad (43,4)$$

Зависимость λ от безразмерного числа Рейнольдса $R = \frac{2aU}{v}$ определяется неявным образом уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,85 \ln(R\sqrt{\lambda}) - 0,55. \quad (43,5)$$

Мы подставили здесь для x значение (42,2) и прибавили к логарифму эмпирическую численную постоянную¹⁾. Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления является медленно убывающей функцией числа Рейнольдса. Для сравнения приведём закон сопротивления при ламинарном течении в трубе. Вводя в формулу (17,10) коэффициент сопротивления, получаем:

$$\lambda = \frac{64}{R}. \quad (43,6)$$

При ламинарном течении коэффициент сопротивления падает с ростом числа Рейнольдса быстрее, чем при турбулентном течении.

На рис. 22 изображён (в логарифмическом масштабе) график зависимости λ от R . Круто спадающая прямая соответствует ламинарному режиму (формула (43,6)), а более пологая кривая (практически тоже близкая к прямой) — турбулентному течению. Переход с первой на вторую происходит по мере увеличения числа Рейнольдса в момент турбулизации течения, который может наступить при различных значениях R в зависимости от конкретных условий течения (от степени

¹⁾ Коэффициент перед логарифмом в этой формуле взят в соответствии с коэффициентом в формуле (42,8) логарифмического профиля скоростей. Только при таком условии эта формула имеет теоретический смысл предельной формулы для турбулентного течения при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Если же выбирать в формуле (43,5) произвольным образом значения обеих входящих в неё постоянных, то она сможет играть роль лишь чисто эмпирической формулы для зависимости λ от R . В таком случае, однако, нет никаких оснований предпочитать её любой другой, более простой, эмпирической формуле, достаточно хорошо описывающей экспериментальные данные,

«возмущённости» потока; см. § 29); в момент перехода коэффициент сопротивления резко возрастает.

До сих пор мы предполагали, что поверхность стенки достаточно гладкая. Если же поверхность является шероховатой, то выведенные здесь формулы могут несколько измениться. В качестве меры шероховатости стенки можно выбрать порядок величины выступов шероховатости, которые мы обозначим посредством d . Существенным является сравнительная величина d и толщина подслоя y_0 . Если толщина y_0 велика по сравнению с d , то наличие шероховатости вообще не суще-

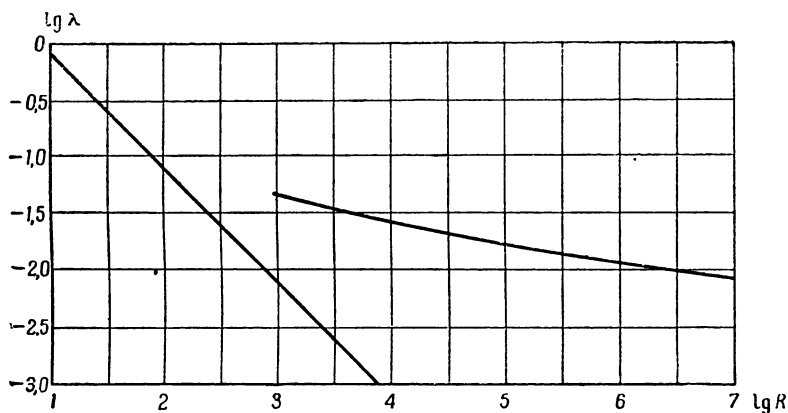


Рис. 22.

ственно; это и подразумевается под достаточной гладкостью стенки. Если y_0 и d одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя.

В обратном же предельном случае сильной шероховатости ($d \gg y_0$) снова можно установить некоторые общие соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами ρ , σ , d ; вязкость ν , как обычно, не должна входить непосредственно. Скорость этого движения — порядка величины v_* — единственной имеющейся в нашем распоряжении величины с размерностью скорости. Таким образом, мы видим, что в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, скорость делается малой (порядка v_*) на расстояниях $y \sim d$ вместо $y \sim y_0$, как это было при течении вдоль гладкой поверхности. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет определяться формулой, получающейся из (42,7) заменой в ней $\frac{\nu}{v_*}$ на d . Таким образом,

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{d}. \quad (43,7)$$

Аналогично должны быть изменены формулы для течения по трубе. Достаточно просто заменить в них $\frac{v}{v_*}$ на d . Для закона сопротивления получаем теперь вместо (43,3) формулу

$$U = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\gamma^2 \rho l}} \ln \frac{a}{d}. \quad (43,8)$$

Под знаком логарифма теперь стоит постоянная величина, не содержащая перепада давления, как это было в (43,3). Мы видим, что средняя скорость течения теперь просто пропорциональна квадратному корню из градиента давления в трубе. Если ввести коэффициент сопротивления, то (43,8) приобретёт вид

$$\lambda = \frac{8\gamma^2}{\ln^2 \frac{a}{d}} = \frac{1,4}{\ln^2 \frac{a}{d}}, \quad (43,9)$$

т. е. λ является постоянной величиной, не зависящей от числа Рейнольдса.

§ 44. Турбулентный пограничный слой

Тот факт, что мы получили для плоско-параллельного турбулентного потока логарифмический закон распределения скоростей формально во всём пространстве, связан с тем, что рассматривалось течение вдоль стенки, площадь которой бесконечна. При течении же вдоль поверхности реальных конечных тел логарифмическим профилем обладает лишь движение на небольших расстояниях от поверхности — в пограничном слое¹⁾. Отметим уже сразу, что турбулентный пограничный слой может существовать как под турбулентным образом движущейся в основном потоке жидкостью, так и под ламинарным потоком.

Падение средней скорости в турбулентном, как и в ламинарном пограничном слое, обуславливается в конечном итоге вязкостью жидкости. Однако влияние вязкости проявляется в турбулентном пограничном слое очень своеобразным образом. Самый ход изменения сред-

¹⁾ Толщина пограничного слоя растёт вдоль поверхности обтекаемого тела по направлению течения жидкости (закон этого возрастания будет определён ниже). Это объясняет, почему при течении по трубе логарифмический профиль имеет место вдоль всего сечения трубы. Толщина пограничного слоя у стенки трубы растёт, начиная от места втекания жидкости. Уже на некотором конечном расстоянии от конца трубы пограничный слой как бы заполняет собой всю площадь сечения трубы. Поэтому, если рассматривать трубу как достаточно длинную и не интересоваться её начальным участком, то течение во всём её объёме будет того же типа, как и в турбулентном пограничном слое. Напомним, что аналогичное положение имеет место и при ламинарном течении по трубе. Такое течение описывается при любых числах Рейнольдса формулой Пуазейля. В пуазейлевском же течении роль вязкости проявляется на всех расстояниях от стенки и никогда не бывает ограничена тонким пристеночным слоем жидкости.

ней скорости в слое не зависит непосредственно от вязкости; вязкость входит в выражение для градиента скорости только в вязком подслое. Общая же толщина пограничного слоя определяется вязкостью и обращается в нуль вместе с ней (см. ниже). Если бы вязкость была в точности равна нулю, то никакого пограничного слоя вовсе не было бы.

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к турбулентному пограничному слою, образуемому при обтекании тонкой плоской пластинки, — таком же, какое было рассмотрено в § 39 для ламинарного течения. На границе турбулентного слоя скорость жидкости почти равна скорости натекания основного потока, которую мы обозначаем посредством U . С другой стороны, для определения этой скорости на границе мы можем (с логарифмической точностью) воспользоваться формулой (42,7), подставив в неё вместо u толщину пограничного слоя δ . Сравнивая оба выражения, получим:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu}. \quad (44,1)$$

Здесь U есть постоянный (для данного потока) параметр; толщина же δ меняется вдоль пластинки, а вместе с ней является, следовательно, медленно меняющейся функцией от x и величина v_* . Для определения этих функций формула (44,1) недостаточна; необходимо получить ещё какое-нибудь соотношение, которое бы связывало v_* и δ с x .

Для этого воспользуемся теми же соображениями, с помощью которых была получена формула (36,3) для ширины турбулентного следа. Как и там, производная $\frac{d\delta}{dx}$ должна быть порядка величины отношения скорости вдоль оси y на границе слоя к скорости вдоль оси x на той же границе. Вторая из них — порядка U , что же касается поперечной скорости, то она обязана пульсационному движению и потому — порядка v_* . Таким образом,

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v_*}{U},$$

откуда

$$\delta \sim \frac{v_* x}{U}. \quad (44,2)$$

Формулы (44,1) и (44,2) определяют вместе зависимость v_* и δ от расстояния x ¹⁾. Эта зависимость, однако, не может быть написана в явном виде. Ниже мы выразим δ через некоторую вспомогательную величину. Но поскольку v_* есть медленно меняющаяся функция от x , то уже из (44,2) видно, что толщина слоя меняется в основном

¹⁾ Если на пластинке имеется значительный участок ламинарного пограничного слоя, то x должно, строго говоря, отсчитываться примерно от точки перехода ламинарного слоя в турбулентный.

пропорционально x . Напомним, что толщина ламинарного пограничного слоя растёт пропорционально \sqrt{x} , т. е. медленнее, чем в турбулентном слое.

Определим зависимость от x действующей на единицу площади поверхности пластинки силы трения σ . Эта зависимость определяется двумя формулами:

$$\sigma = \rho v_*^2, \quad U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_*^2 x}{U \nu}.$$

Вторая из них получается подстановкой (44,2) в (44,1) и обладает логарифмической точностью. Введём коэффициент сопротивления c (отнесённый к единице площади поверхности пластинки), определяемый как безразмерное отношение

$$c = \frac{2\sigma}{\rho U^2} = 2 \left(\frac{v_*}{U} \right)^2. \quad (44,3)$$

Тогда, исключая v_* из двух написанных уравнений, получим следующее уравнение, определяющее (с логарифмической точностью) в неявном виде зависимость c от x :

$$\sqrt{\frac{2x^2}{c}} = \ln c R_x, \quad R_x = \frac{Ux}{\nu}. \quad (44,4)$$

Для придания этой формуле большей точности можно прибавить к логарифму эмпирическую численную постоянную. Такая формула имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 1,7 \ln c R_x + 3,0. \quad (44,5)$$

Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления c является медленно убывающей функцией расстояния x .

Наконец, выразим толщину пограничного слоя с помощью функции $c(x)$. Имеем:

$$v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = U \sqrt{\frac{c}{2}}.$$

Подставляя это в (44,2), получаем:

$$\delta = \text{const. } x \sqrt{c}. \quad (44,6)$$

Писать эту формулу со знаком равенства имеет смысл, конечно, только в случаях турбулентного пограничного слоя над ламинарным потоком, когда величина δ имеет точный смысл (область турбулентности, как всегда, резко ограничена от ламинарной области). Постоянный же множитель в (44,6) должен быть определён из экспериментальных данных.

ЗАДАЧИ

1. Определить с помощью формулы (44,5) полную силу, действующую на обе стороны пластинки.

Решение. Искомая сила (отнесённая к единице длины вдоль края пластинки) есть $F = 2 \int_0^l \sigma dx$ (l — длина пластинки). Введя вместо F коэффициент сопротивления

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 2l},$$

имеем:

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l c dx.$$

Если ограничиваться только членами, содержащими логарифм в наиболее высокой (первой) степени, то написанный интеграл будет равен просто $c(l)$ (где значение c берётся при $x = l$). Для того же, чтобы получить для C более точное выражение, соответствующее формуле (44,5), надо произвести интегрирование с точностью до членов следующего порядка, содержащих логарифм в нулевой степени. Для этого пишем:

$$\int_0^l c dx = xc \Big|_0^l - \int_0^l x \frac{dc}{dx} dx.$$

Производную $\frac{dc}{dx}$ вычисляем с помощью формулы (44,5), написав её временно в виде

$$c = \frac{1}{a^2 \ln^2 bxc},$$

и получаем с нужной точностью

$$C = c(l) + \frac{2}{a^2 \ln^3 blc} = c(l) \left[1 + \frac{2}{\ln blc} \right]$$

и, далее,

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(1 - \frac{1}{\ln blc} \right) = a (\ln blc - 1) = a \ln \frac{blc}{e} \approx a \ln \frac{blC}{e}.$$

Подставляя значения a и b согласно (44,5), получаем окончательно следующее уравнение, определяющее зависимость полного коэффициента сопротивления C от числа Рейнольдса $R = \frac{Ul}{\nu}$:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = 1,7 \ln (CR) + 1,3.$$

При больших R коэффициент сопротивления, определённый этой формулой, падает как $\frac{1}{\ln^2 R}$. При ламинарном же пограничном слое C падает как $1/\sqrt{R}$ (см. (39,16)), т. е. более быстро. Таким образом, можно сказать, что при

больших числах Рейнольдса сила трения в турбулентном пограничном слое больше, чем в ламинарном.

2. Определить зависимость коэффициента сопротивления шероховатой пластинки от числа Рейнольдса при турбулентном пограничном слое на ней.

Решение. Подставляя вместо толщины ламинарного подслоя y_0 размеры d выступов шероховатости, получаем:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{xv_*}{Ud}.$$

Вводя коэффициент сопротивления c , получаем отсюда

$$\frac{0,59}{\sqrt{c}} = \ln \left(\frac{x}{d} \sqrt{c} \right).$$

Аналогично для полного коэффициента сопротивления пластинки (тоже с логарифмической точностью) получаем:

$$\frac{0,59}{\sqrt{C}} = \ln \left(\frac{l}{d} \sqrt{C} \right).$$

Отметим, что коэффициент сопротивления шероховатых пластинок не зависит от числа Рейнольдса.

§ 45. Кризис сопротивления

Из полученных в последних параграфах результатов можно сделать существенные заключения о законе сопротивления при больших числах Рейнольдса, т. е. о зависимости действующей на обтекаемое тело силы сопротивления от R при больших значениях последнего.

Картина обтекания при больших R (о которых только и идёт речь ниже) выглядит, как уже говорилось, следующим образом. Во всём основном объёме жидкости (т. е. везде, за исключением пограничного слоя, которым мы здесь не интересуемся) жидкость может рассматриваться как идеальная, причём её движение является потенциальным везде, кроме области турбулентного следа. Размеры — ширина — следа зависят от положения линии отрыва на поверхности обтекаемого тела. При этом существенно, что хотя это положение и определяется свойствами пограничного слоя, но в результате оказывается, как было отмечено в § 40, не зависящим от числа Рейнольдса. Таким образом, мы можем сказать, что вся картина обтекания при больших числах Рейнольдса практически не зависит от вязкости, т. е., другими словами, от R (до тех пор, пока пограничный слой остаётся ламинарным; см. ниже).

Отсюда следует, что и сила сопротивления не может зависеть от вязкости. В нашем распоряжении остаются только три величины: скорость U натекающего потока, плотность жидкости ρ и размеры тела l . Из них можно составить всего лишь одну величину с размерностью силы, именно, $\rho U^2 l^2$. Вместо квадрата l^2 линейных размеров тела введём, как это обычно делают, пропорциональную ему площадь S поперечного (по отношению к направлению обтекания) сечения тела

и напишем:

$$F = \text{const.} \cdot \rho U^2 S, \quad (45,1)$$

где const. есть численная постоянная, зависящая только от формы тела. Таким образом, сила сопротивления должна быть (при больших R) пропорциональна площади сечения тела и квадрату скорости обтекания. Напомним для сравнения, что при совсем малых R ($R \ll 1$) сопротивление было пропорционально первой степени линейных размеров тела и первой степени скорости ($F \sim \nu \rho l U$; см. § 20)¹⁾.

Обычно, как уже говорилось, вместо силы сопротивления F рассматривают коэффициент сопротивления C , определяемый как

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}.$$

C является безразмерной величиной и может зависеть только от R . Формула (45,1) напишется в виде

$$C = \text{const.}, \quad (45,2)$$

т. е. коэффициент сопротивления зависит только от формы тела.

Такой ход силы сопротивления не может, однако, продолжаться до сколь угодно больших чисел Рейнольдса. Дело в том, что при достаточно больших R ламинарный пограничный слой (на поверхности тела до линии отрыва) делается неустойчивым и турбулизуется. При этом турбулизуется не весь пограничный слой, а лишь некоторая его часть. Вся поверхность тела может быть разделена, таким образом, на три части: на передней имеется ламинарный пограничный слой, затем идёт область турбулентного слоя и, наконец, область за линией отрыва.

Турбулизация пограничного слоя существенно сказывается на всей картине течения в основном потоке. Именно, она приводит к заметному смещению линии отрыва по направлению к заднему концу тела (т. е. вперёд по течению жидкости), так что турбулентный след за телом сужается (как это изображено схематически на рис. 23; область следа заштрихована)²⁾. Сужение турбулентного следа приводит к уменьшению силы сопротивления. Таким образом, турбулизация пограничного слоя при больших числах Рейнольдса сопровождается

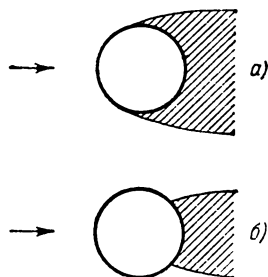


Рис. 23.

1) Своеобразный случай, когда сопротивление остаётся пропорциональным первой степени скорости при больших значениях R , — обтекание пузырька газа; см. задачу к этому параграфу.

2) Так, при поперечном обтекании длинного цилиндра турбулизация пограничного слоя сдвигает положение точки отрыва от 95 до 60° (угол на окружности сечения цилиндра отсчитывается от направления обтекания).

падением коэффициента сопротивления. Коэффициент сопротивления падает в несколько раз в сравнительно узком интервале чисел Рейнольдса (в области R , равных нескольким 10^5). Это явление называется кризисом сопротивления. Уменьшение коэффициента сопро-

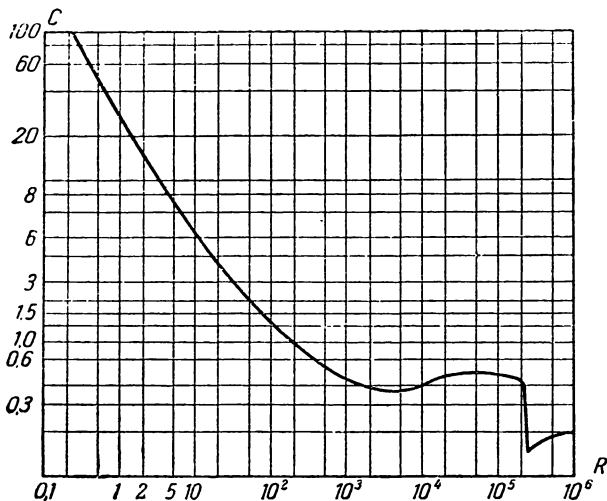


Рис. 24.

тивления настолько значительно, что само сопротивление, которое при постоянном C должно возрастать пропорционально квадрату скорости, в этой области чисел Рейнольдса даже убывает с возрастанием скорости.

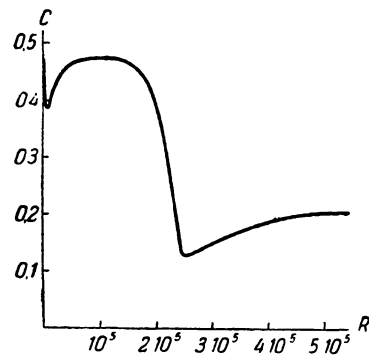


Рис. 25.

Можно отметить, что на явление кризиса влияет степень турбулентности набегающего на тело потока. Чем она больше, тем раньше (при меньших R) наступает турбулизация пограничного слоя. В связи с этим и падение коэффициента сопротивления начинается при меньших числах Рейнольдса (и растягивается по более широкому интервалу их значений).

На рис. 24 и 25 приведён экспериментально найденный график зависимости коэффициента сопротивления от

числа Рейнольдса $R = \frac{Ud}{\nu}$ для шара (на рис. 24 — в логарифмическом, а на рис. 25 — в обыкновенном масштабе). При самых малых R ($R \ll 1$) коэффициент сопротивления падает по закону $C = \frac{24}{R}$ (формула Стокса).

Падение C продолжается затем более медленно вплоть до $R \approx 5 \cdot 10^8$, где C достигает минимума, вслед за чем несколько повышается. В области чисел Рейнольдса $2 \cdot 10^4$ — $2 \cdot 10^5$ имеет место закон (45,2), т. е. C практически остаётся постоянным. При $R \approx 2$ — $3 \cdot 10^5$ наступает кризис сопротивления, причём коэффициент сопротивления падает примерно в 4—5 раз.

Для сравнения приведём пример обтекания, при котором не происходит явления кризиса. Рассмотрим обтекание плоского диска в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Место отрыва в этом случае заранее очевидно из чисто геометрических соображений, — ясно, что отрыв произойдёт по краю диска и в дальнейшем уже никуда не будет смещаться. Поэтому при увеличении R коэффициент сопротивления диска остаётся постоянным, не обнаруживая кризиса.

Следует иметь в виду, что при тех больших скоростях, когда наступает кризис сопротивления, может уже стать заметным влияние сжимаемости жидкости. Параметром, характеризующим степень этого влияния, является число $M = U/c$, где c — скорость звука; жидкость можно рассматривать как несжимаемую, если $M \ll 1$ (§ 10). Поскольку из двух чисел M и R лишь одно содержит размеры тела, то эти числа могут меняться независимо друг от друга.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что сжимаемость оказывает в общем стабилизирующее влияние на движение в ламинарном пограничном слое. При возрастании числа M увеличивается критическое значение R , при котором происходит турбулизация пограничного слоя. В связи с этим отодвигается также и наступление кризиса сопротивления. Так, для шара при изменении M от 0,3 до 0,7 кризис сопротивления отодвигается примерно от $R \approx 4 \cdot 10^5$ до $8 \cdot 10^5$.

Укажем также, что при увеличении M положение точки отрыва в ламинарном пограничном слое смещается вверх по течению — по направлению к переднему концу тела, что должно приводить к некоторому увеличению сопротивления.

З а д а ч а

Определить силу сопротивления, действующую на движущийся в жидкости газовый пузырёк при больших числах Рейнольдса (*В. Г. Левич. 1949*).

Решение. На границе жидкости с газом должна обращаться в нуль не самая касательная составляющая скорости жидкости, а лишь её нормальная производная (вязкость газа пренебрегаем). Поэтому градиент скорости вблизи поверхности не будет аномально велик, пограничный слой (в том виде, о котором шла речь в § 39) будет отсутствовать, а потому будет отсутствовать (почти по всей поверхности пузырька) также и явление отрыва. При вычислении диссипации энергии с помощью объёмного интеграла (16,3) можно поэтому во всём пространстве пользоваться распределением скоростей, соответствующим потенциальному обтеканию шара (задача 2 § 10), пренебрегая при этом ролью поверхностного слоя жидкости и очень тонкого турбулентного следа. Производя вычисление по формуле, полученной в задаче

к § 16, найдём:

$$\dot{E}_{\text{вин}} = -\eta \int \left. \frac{\partial v^2}{\partial r} \right|_{r=R} 2\pi R^2 \sin \theta \, d\theta = -12\pi\eta R U^2.$$

Отсюда видно, что искомая диссипативная сила сопротивления¹⁾

$$F = 12\pi\eta R U.$$

§ 46. Хорошо обтекаемые тела

Можно поставить вопрос о том, какова должна быть форма тела (при заданной, например, площади его сечения) для того, чтобы оно испытывало при движении в жидкости по возможности малое сопротивление. Из всего предыдущего ясно, что для этого во всяком случае необходимо достигнуть по возможности более позднего отрыва: отрыв должен произойти поближе к заднему концу тела так, чтобы турбулентный след был как можно более узким. Мы уже знаем, что возникновение отрыва облегчается наличием быстрого возрастания давления вдоль обтекаемого тела вниз по течению. Поэтому необходимо придать телу такую форму, чтобы изменение давления вдоль него,— в той области, где давление возрастает,— происходило по возможности медленно и плавно. Этого можно достигнуть приданием телу удлинённой (в направлении обтекания) формы, причём оно плавно заостряется в направлении обтекания так, что стекающие с разных сторон поверхности тела потоки как бы плавно смыкаются без того, чтобы им пришлось где-либо обтекать какие-нибудь углы или же сильно поворачивать по отношению к направлению набегающего потока. Спереди же тело должно быть закруглено; при наличии здесь угла скорость

жидкости на его краю обратилась бы в бесконечность (см. задачу 6 § 10), вслед за чем произошли бы сильное возрастание давления вниз по течению и неизбежный отрыв.

Всем этим требованиям в высокой степени удовлетворяют формы типа, изображённого на рис. 26. Изображённый, например, на рис. 26

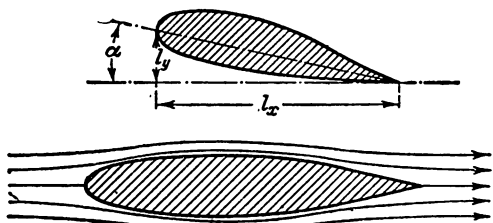


Рис. 26.

профиль может представлять собой сечение удлинённого тела вращения, но может быть и сечением тела с большим «размахом» (о таких телах мы будем условно говорить как о «крыльях»). Профиль сечения крыла может быть и не симметричным, как, например, на верхнем рис. 26. При обтекании тел такой формы отрыв происходит лишь

¹⁾ Область применимости этой формулы фактически невелика, так как при достаточном увеличении скорости пузырьёк теряет свою сферическую форму.

в непосредственной близости острого конца, в результате чего коэффициент сопротивления достигает относительно малых значений. Такие тела называют хорошо обтекаемыми.

В сопротивлении хорошо обтекаемых тел заметную роль играет эффект непосредственного трения жидкости о поверхность в пограничном слое. Этот эффект сравнительно очень мал и потому практически совершенно несущественен для плохо обтекаемых тел (о которых шла речь в предыдущем параграфе). В обратном же предельном случае обтекания плоской пластинки (параллельным ей потоком жидкости) он представляет собой единственный источник сопротивления (§ 39).

При обтекании хорошо обтекаемого крыла, наклонённого под малым углом к направлению потока (α на рис. 26, так называемый «угол атаки»), развивается большая подъёмная сила F_y , при этом сопротивление F_x остаётся малым, и в результате отношение $\frac{F_y}{F_x}$ может достичь больших значений (порядка 10—100). Так продолжается, однако, лишь до тех пор, пока угол атаки не сделается слишком большим (обычно порядка 10°). После этого сопротивление начинает очень быстро возрастать, а подъёмная сила падать. Это явление обуславливается тем, что при больших углах атаки тело перестаёт удовлетворять условиям хорошей обтекаемости: место отрыва сильно смещается по поверхности тела по направлению к его переднему краю, в результате чего след делается значительно более широким. Надо иметь в виду, что в предельном случае тела очень малой толщины, т. е. плоской пластинки, хорошее обтекание имеет место только при очень малом угле атаки; отрыв происходит на переднем крае пластинки уже при малых углах её наклона к направлению потока.

Угол атаки α отсчитывается, по определению, от того положения крыла, при котором подъёмная сила равна нулю. При малых углах атаки подъёмную силу можно разложить в ряд по степеням α . Ограничиваясь первым членом разложения, мы можем считать силу F_y пропорциональной α . Далее, по тем же соображениям размерности, как и для силы сопротивления, подъёмная сила должна быть пропорциональна ρU^2 . Вводя также длину размаха l_z крыла, мы можем написать:

$$F_y = \text{const.} \cdot \rho U^2 \alpha l_x l_z, \quad (46,1)$$

где const. — численная постоянная, зависящая только от формы крыла и не зависящая, в частности, от угла атаки. Для крыльев очень большого размаха можно считать подъёмную силу пропорциональной размаху; в этом случае const. зависит только от формы профиля поперечного сечения крыла.

Вместо подъёмной силы крыла часто пользуются так называемым коэффициентом подъёмной силы, определяемым как

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 l_x l_z}. \quad (46,2)$$

Для крыльев очень большого размаха согласно сказанному выше он пропорционален углу атаки и не зависит ни от скорости движения, ни от размаха крыла:

$$C_y = \text{const. } \sigma. \quad (46,3)$$

Для вычисления подъемной силы хорошо обтекаемого крыла с помощью формулы Жуковского необходимо определить циркуляцию скорости Γ . Это делается следующим образом. Везде, кроме области следа, движение потенциально. В данном же случае след очень тонок и занимает на поверхности крыла лишь очень небольшую область вблизи его задней заостренной кромки. Поэтому для определения распределения скоростей (а с ним и циркуляции Γ) можно решать задачу о потенциальном обтекании крыла идеальной жидкостью. Наличие следа учитывается при этом тем, что от острой задней кромки крыла отходит поверхность касательного разрыва, на которой потенциал испытывает скачок $\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma$. Как было уже показано в § 37, на этой поверхности испытывает скачок также и производная $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, а производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ непрерывны. Для крыла конечного размаха поставленная таким образом задача имеет однозначное решение. Нахождение точного решения, однако, весьма сложно. Для крыла в виде круглого диска (наклоненного под малым углом атаки) эта задача была решена *Н. Е. Кочиным*¹⁾.

Если крыло обладает очень большим размахом (и постоянным вдоль размаха сечением), то, рассматривая его как бесконечно длинное вдоль оси z , можно считать движение жидкости плоским (в плоскости x, y). Из соображений симметрии ясно, что при этом скорость $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ в направлении размаха будет вообще равной нулю. В этом случае, следовательно, мы должны искать решение, в котором испытывает скачок только сам потенциал при непрерывных его производных; другими словами, поверхность касательного разрыва вообще отсутствует, и мы имеем дело просто с неоднозначной функцией $\varphi(x, y)$, принимающей конечное приращение Γ при обходе по замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль. В таком виде, однако, задача о плоском обтекании не однозначна, так как допускает решение при произвольном, заранее заданном, скачке потенциала. Для получения однозначного ответа необходимо потребовать выполнения дополнительного условия, впервые сформулированного *С. А. Чаплыгиным* в 1909 г.

Это условие, называемое условием Жуковского-Чаплыгина, заключается в требовании, чтобы скорость жидкости не обращалась в бесконечность на острой задней кромке крыла; напомним

¹⁾ *Н. Е. Кочин*, Прикладная математика и механика 4, 3, 1940; 9, 13, 1945.

в этой связи, что при огибании угла идеальной жидкостью скорость жидкости в вершине угла обращается, вообще говоря, в бесконечность по степенному закону (задача 6 § 10). Можно сказать, что поставленное условие означает, что струи, стекающие с обеих сторон крыла, должны плавно смыкаться без того, чтобы поворачивать вокруг острого угла. Естественно, что при выполнении этого условия решение задачи о потенциальном обтекании приведет к картине, наиболее близкой к истинной, при которой ведь скорость везде конечна, а отрыв происходит лишь у самой задней кромки. Решение становится после этого вполне однозначным и, в частности, определяется и нужная для вычисления подъемной силы циркуляция Γ .

§ 47. Индуктивное сопротивление

Существенную часть силы сопротивления, испытываемой хорошо обтекаемым крылом (конечного размаха), составляет сопротивление, связанное с диссипацией энергии в тонком турбулентном следе. Это сопротивление называют индуктивным. Общие идеи, лежащие в основе вычисления этого сопротивления, были впервые сформулированы С. А. Чаплыгиным в 1910 г.

В § 21 было показано, каким образом можно вычислить связанную со следом силу сопротивления, рассматривая движение жидкости вдали от тела. Полученная там формула (21,1), однако, в данном случае неприменима. Согласно этой формуле сопротивление определяется интегралом от v_x по площади сечения следа, т. е. расходом жидкости через сечение следа. Но ввиду тонкости следа за хорошо обтекаемым крылом этот расход в данном случае мал, и в рассматриваемом ниже приближении им можно вовсе пренебречь.

Подобно тому как мы поступали в § 21, пишем силу F_x в виде разности полных потоков x -компоненты импульса через плоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, проходящие соответственно значительно позади и значительно впереди тела. Написав три компоненты скорости в виде $U + v_x, v_y, v_z$, будем иметь для компоненты Π_{xx} плотности потока импульса выражение $\Pi_{xx} = p + \rho(U + v_x)^2$, так что сила сопротивления есть

$$F_x = \left(\int \int_{x=x_2} - \int \int_{x=x_1} \right) [p + \rho(U + v_x)^2] dy dz. \quad (47,1)$$

Ввиду тонкости следа можно пренебречь (в интеграле по плоскости $x = x_1$) интегралом по площади его сечения и, таким образом, интегрировать везде только по области вне следа. Но вне следа движение потенциально и имеет место формула Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2}(U + v)^2 = p_0 + \frac{\rho U^2}{2},$$

откуда

$$p = p_0 - \rho U v_x - \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (47,2)$$

Пренебречь здесь квадратичными членами (как это было сделано в § 21) нельзя, так как именно ими определяется в данном случае искомая сила сопротивления. Подставляя (47,2) в (47,1), получим:

$$F_x = \left(\int_{x=x_2} \int - \int_{x=x_1} \int \right) \left[p_0 + \rho U^2 + \rho U v_x + \frac{\rho}{2} (v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) \right] dy dz.$$

Разность интегралов от постоянной величины $p_0 + \rho U^2$ обращается в нуль; исчезает также разность интегралов от $\rho U v_x$, поскольку потоки жидкости $\int \int \rho v_x dy dz$ через переднюю и заднюю плоскости должны быть одинаковыми (расходом жидкости через сечение следа в рассматриваемом приближении пренебрегаем). Далее, отодвигая плоскость $x = x_2$ достаточно далеко вперёд от тела, будем иметь на ней очень малые значения скорости v , так что интегралом от $\frac{\rho}{2} (v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)$ по этой плоскости можно пренебречь. Наконец, при обтекании хорошо обтекаемого крыла скорость v_x вне следа мала по сравнению с v_y и v_z . Поэтому в интеграле по плоскости $x = x_1$ можно пренебречь v_x^2 по сравнению с $v_y^2 + v_z^2$. Таким образом, получим:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \int (v_y^2 + v_z^2) dy dz, \quad (47,3)$$

где интегрирование производится по плоскости $x = \text{const.}$, расположенной на большом расстоянии позади тела, причём сечение следа исключается из области интегрирования¹⁾.

Вычисленное таким образом сопротивление хорошо обтекаемого крыла можно выразить через ту же циркуляцию скорости Γ , которая определяет и подъёмную силу. Для этого прежде всего заметим, что на достаточно большом расстоянии от тела скорость слабо зависит от координаты x и потому можно рассматривать $v_y(y, z)$, $v_z(y, z)$ как скорость некоторого двухмерного движения, считая её не зависящей от x вовсе. Удобно ввести в качестве вспомогательной величины функцию тока (§ 10), так что $v_z = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Таким образом,

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz,$$

1) Во избежание недоразумений заметим следующее. Формула (47,3) может создать впечатление, что порядок величины скоростей v_y , v_z вообще не убывает с расстоянием x . Это действительно так до тех пор, пока толщина следа мала по сравнению с его шириной, что и предполагалось при выводе формулы (47,3). На очень больших расстояниях позади крыла след в конце концов расширится настолько, что его сечение станет примерно круговым. Формула (47,3) здесь уже неприменима, а v_y , v_z будут быстро убывать с увеличением расстояния,

где интегрирование по вертикальной координате y производится от $+\infty$ до y_1 и от y_2 до $-\infty$ (y_1, y_2 — координаты верхней и нижней границ следа; см. рис. 18). Ввиду потенциальности движения вне следа ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) имеем $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$. Применяя к написанному интегралу двумерную формулу Грина, получаем поэтому:

$$F_x = -\frac{\rho}{2} \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl,$$

где интегрирование производится по контуру, огибающему область интегрирования в исходном интеграле ($\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру). На бесконечности $\psi = 0$ и, следовательно, надо интегрировать по контуру поперечного сечения следа (сечения плоскостью y, z), в результате чего получаем:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_1 \right] dz.$$

Здесь надо интегрировать по dz по ширине следа, а стоящая в квадратных скобках разность есть скачок производной $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ при прохождении через след. Замечая, что $\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, имеем:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 = \frac{d\Gamma}{dz},$$

так что

$$F_x = \frac{\rho}{2} \int \psi \frac{d\Gamma}{dz} dz.$$

Наконец, воспользуемся известной из теории потенциала формулой

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 \right] \ln r dl,$$

где интегрирование производится по некоторому плоскому контуру, r — расстояние от dl до точки, в которой разыскивается значение ψ , а в квадратных скобках стоит заданный скачок производной от ψ по направлению нормали к контуру¹⁾. В нашем случае контуром интегрирования является отрезок оси z , так что для значений функции $\psi(y, z)$ на оси z можно написать:

$$\begin{aligned} \psi(0, z) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_2 \right] \ln |z - z'| dz' = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \ln |z - z'| dz'. \end{aligned}$$

¹⁾ Эта формула определяет в двумерной теории потенциала потенциал, создаваемый заряженным плоским контуром с плотностью заряда, равной

$$\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 \right].$$

Наконец, подставляя это в F_x , получим окончательно для индуктивного сопротивления следующую формулу:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \ln |z - z'| dz dz' \quad (47,4)$$

(Л. Прандтль, 1918). Длина размаха крыла обозначена здесь посредством $l_z = l$, а начало отсчёта z выбрано на одном из его концов.

Если увеличить все размеры по оси z в некоторое число раз (при неизменных Γ), то интеграл (47,4) не изменится¹⁾. Это показывает, что полное индуктивное сопротивление крыла не изменяется по порядку величины при увеличении его размаха. Другими словами, индуктивное сопротивление, отнесённое к единице длины крыла, падает с увеличением этой длины²⁾. В противоположность сопротивлению полная подъёмная сила

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz \quad (47,5)$$

растёт примерно пропорционально размаху крыла, а отнесённая к единице длины — остаётся постоянной.

Для фактического вычисления интегралов (47,4) и (47,5) удобен следующий метод. Вместо координаты z вводим новую переменную θ согласно

$$z = \frac{l}{2} (1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (47,6)$$

Распределение же циркуляции задаётся в виде тригонометрического ряда

$$\Gamma = -2Ul \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \quad (47,7)$$

Здесь выполнено условие $\Gamma = 0$ на концах крыла, т. е. при $z = 0, l$ или $\theta = 0, \pi$.

¹⁾ Во избежание недоразумений отметим, что тот факт, что при изменении единиц измерения длины стоящий под знаком интеграла логарифм увеличивается на постоянную, несущественен. Действительно, интеграл, отличающийся от написанного тем, что в нём вместо $\ln |z - z'|$ стоит const. , всё равно равен нулю, так как $\int \frac{d\Gamma}{dz} dz = \Gamma | = 0$ (на краях следа Γ обращается в нуль).

²⁾ В пределе, при стремлении размаха к бесконечности, отнесённое к единице длины индуктивное сопротивление обращается в нуль. В действительности при этом остаётся небольшое сопротивление, определяющееся расходом жидкости (т. е. интегралом $\int \int v_x dy dz$) в следе, которым мы пренебрегли при выводе формулы (47,3); это сопротивление включает в себя как сопротивление трения, так и остающаяся часть сопротивления, связанного с диссипацией в следе.

Подставив это выражение в формулу (47,5) и производя интегрирование (учитывая при этом взаимную ортогональность функций $\sin \theta$ и $\sin n\theta$ с $n \neq 1$), получим:

$$F_y = \frac{\rho U^2}{2} \pi l^2 A_1.$$

Таким образом, подъемная сила зависит только от первого коэффициента в разложении (47,7). Для коэффициента подъемной силы (46,2) имеем:

$$C_y = \pi \lambda A_1, \quad (47,8)$$

где введено отношение $\lambda = l/l_x$ размаха крыла к его ширине.

Для вычисления сопротивления перепишем формулу (47,4), производя в ней однократное интегрирование по частям:

$$F_x = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \Gamma(z) \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \frac{dz' dz}{z - z'}. \quad (47,9)$$

Стоящий здесь интеграл по dz' должен быть взят, как легко видеть, в смысле его главного значения. Элементарное вычисление с подстановкой (47,7)¹⁾ приводит к следующей формуле для коэффициента индуктивного сопротивления:

$$C_x = \pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2. \quad (47,10)$$

Коэффициент сопротивления крыла мы определяем как

$$C_x = \frac{F_x}{1/2 \rho U^2 l_x l_z}, \quad (47,11)$$

относя его, как и коэффициент подъемной силы, к площади крыла в плане.

З а д а ч а

Определить минимальное значение индуктивного сопротивления, которое может быть достигнуто при заданных подъемной силе и размахе крыла $l_z = l$.

¹⁾ При интегрировании по dz' приходится брать интеграл (главное значение)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

При интегрировании же по dz пользуемся тем, что

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Решение. Из формул (47,8) и (47,10) ясно, что минимальное значение C_x при заданном C_y (т. е. заданном A_1) достигается, если равны нулю все A_n с $n \neq 1$. При этом

$$C_{x \min} = \frac{1}{\pi \lambda} C_y^2. \quad (1)$$

Распределение же циркуляции по размаху крыла даётся формулой

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{z(l-z)}. \quad (2)$$

Если длина размаха достаточно велика, то движение жидкости вокруг каждого сечения крыла приближённо соответствует плоскому обтеканию бесконечно длинного крыла с таким профилем сечения. В этом случае можно утверждать, что распределение (2) циркуляции осуществляется при эллиптической в плане (в плоскости x, z) форме крыла с полуосями $l_x/2$ и $l/2$.

§ 48. Подъёмная сила тонкого крыла

Задача о вычислении подъёмной силы крыла сводится по теореме Жуковского к задаче о вычислении циркуляции Γ . Эта задача может быть решена в общем виде для хорошо обтекаемого тонкого крыла бесконечного размаха (с постоянным вдоль размаха профилем сечения)¹⁾. Излагаемый ниже изящный метод решения принадлежит Л. И. Седову (1939).

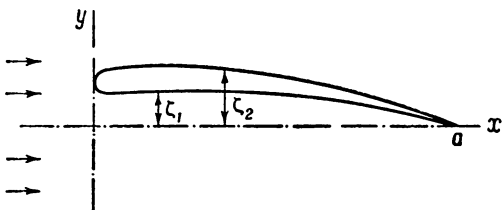


Рис. 27.

Пусть $y = \zeta_1(x)$ и $y = \zeta_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей контура сечения (рис. 27). Мы предполагаем, что этот профиль

тонкий, слабо изогнутый и наклонён к направлению обтекания (оси x) под малым углом атаки; другими словами, малы как сами ζ_1, ζ_2 , так и производные ζ'_1, ζ'_2 , т. е. нормаль к контуру направлена везде почти параллельно оси y . При этих условиях можно считать возмущение v скорости жидкости, вызываемое присутствием крыла, везде²⁾ малым по сравнению со скоростью натекания U . Граничное условие на поверхности крыла гласит: $\frac{v_y}{U} = \zeta'$ при $y = \zeta$. В силу сделанных предположений мы можем потребовать его выполнения не при $y = \zeta$, а при

1) Более подробное изложение теории плоского обтекания крыла несжимаемой жидкостью см. книги: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 1, Гостехиздат, 1948; Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

2) Кроме лишь малой области вблизи передней закруглённой кромки крыла.

$y = 0$. Тогда на отрезке оси абсцисс от $x = 0$ до $x = l_x \equiv a$ должно быть:

$$v_y = U'_{\zeta_2}(x) \quad \text{при } y \rightarrow +0, \quad v_y = U'_{\zeta_1}(x) \quad \text{при } y \rightarrow -0. \quad (48,1)$$

Имея в виду применить методы теории функций комплексного переменного, вводим комплексную скорость $\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$ (ср. § 10), представляющую собой аналитическую функцию переменной $z = x + iy$. В данном случае на отрезке $(0, a)$ оси абсцисс эта функция должна удовлетворять условию

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} &= -U'_{\zeta_2}(x) \quad \text{при } y \rightarrow +0, \\ \operatorname{Im} \frac{dw}{dz} &= -U'_{\zeta_1}(x) \quad \text{при } y \rightarrow -0. \end{aligned} \right\} \quad (48,2)$$

Для решения поставленной задачи прежде всего представим искомое поле скоростей $v(x, y)$ в виде суммы $v = v^+ + v^-$ двух распределений, обладающих следующими свойствами симметрии:

$$\left. \begin{aligned} v_x^-(x, -y) &= v_x^-(x, y), & v_y^-(x, -y) &= -v_y^-(x, y), \\ v_x^+(x, y) &= -v_x^+(x, -y), & v_y^+(x, -y) &= v_y^+(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (48,3)$$

Эти свойства (для каждого из распределений v^- и v^+ в отдельности) не противоречат уравнениям непрерывности и потенциальности, и ввиду линейности задачи эти распределения можно искать независимо друг от друга.

Соответственно представится в виде суммы $w' = w'_+ + w'_-$ также и комплексная скорость, причём граничные условия на отрезке $(0, a)$ для обоих членов суммы гласят:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} w'_+ |_{y \rightarrow +0} &= \operatorname{Im} w'_+ |_{y \rightarrow -0} = -\frac{U}{2} (\zeta'_1 + \zeta'_2), \\ \operatorname{Im} w'_- |_{y \rightarrow +0} &= -\operatorname{Im} w'_- |_{y \rightarrow -0} = \frac{U}{2} (\zeta'_1 - \zeta'_2). \end{aligned} \right\} \quad (48,4)$$

Функция w'_- может быть определена непосредственно с помощью формулы Коши:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где интегрирование производится в плоскости комплексного переменного ξ по окружности L малого радиуса с центром в точке $\xi = z$ (рис. 28). Контур L можно заменить окружностью C' бесконечно большого радиуса и обходимым по часовой стрелке контуром C ; последний может быть стянут к дважды пробегаемому отрезку $(0, a)$. Интеграл по C' обращается в нуль, так как $w'(z)$ исчезает на

бесконечности. Интеграл же по C даёт следующее выражение:

$$\omega'_- = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi) - \zeta'_1(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (48,5)$$

При этом мы воспользовались предельными значениями (48,4) мнимой части ω'_- на отрезке $(0, a)$ и тем, что согласно условиям симметрии (48,3) вещественная часть ω'_- на этом отрезке не испытывает скачка.

Для нахождения же функция ω'_+ надо применить формулу Коши не к самой этой функции, а к произведению $\omega'_+(z)g(z)$, где

$$g(z) = \sqrt{\frac{z}{z-a}},$$

причём при $z = x > a$ корень берётся со знаком плюс. На отрезке $(0, a)$ действительной оси функция $g(z)$ чисто мнимая и имеет разрыв:

$$g(x + i0) = -g(x - i0) = -i\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Ввиду этих свойств функции $g(z)$ ясно, что мнимая часть произведения $g\omega'_+$ будет иметь на отрезке $(0, a)$ разрыв, а вещественная часть будет непрерывна, подобно тому как это имеет место у функции ω'_- . Поэтому в точности аналогично выводу формулы (48,5) получим:

$$\omega'_+(z)g(z) = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi) + \zeta'_2(\xi)}{\xi - z} g(\xi + i0) d\xi.$$

Собирая полученные выражения, найдём окончательно следующую формулу, определяющую распределение скоростей вокруг тонкого крыла:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = & -\frac{U}{2\pi i} \sqrt{\frac{z-a}{z}} \int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi) + \zeta'_2(\xi)}{\xi - z} \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi - \\ & -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi) - \zeta'_1(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (48,6)$$

Вблизи закруглённой передней кромки (т. е. при $z \rightarrow 0$) это выражение, вообще говоря, обращается в бесконечность, что связано с непригодностью в этой области рассматриваемого приближения.

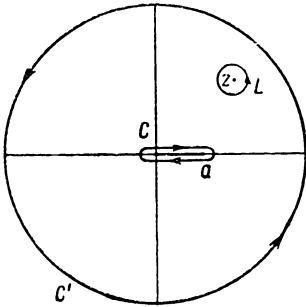


Рис. 28.

Вблизи же задней заострённой кромки (т. е. при $z \rightarrow a$) первый член в (48,6) конечен; второй же член хотя, вообще говоря, и обращается в бесконечность, но лишь логарифмическим образом¹⁾. Эта логарифмическая особенность связана с характером принятого здесь приближения и исчезает при более точном рассмотрении; никакой же степенной расходимости, в согласии с условием Жуковского-Чаплыгина, на задней кромке не оказывается. Выполнение этого условия достигнуто соответствующим выбором использованной выше функции $g(z)$.

Формула (48,6) непосредственно позволяет определить циркуляцию скорости Γ вокруг профиля крыла. Согласно общему правилу (см. § 10) Γ определяется вычетом функции $w'(z)$ относительно точки $z = 0$, являющейся её простым полюсом. Искомый вычет легко определить как коэффициент при $1/z$ в разложении функции $w'(z)$ по степеням $1/z$ вблизи бесконечно удалённой точки:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \dots,$$

причём для Γ получается простая формула:

$$\Gamma = U \int_0^a (\zeta'_1 + \zeta'_2) \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (48,7)$$

Отметим, что сюда входит только сумма функций ζ_1 и ζ_2 . Можно сказать, что подъёмная сила не изменится, если заменить тонкое крыло изогнутой пластинкой, форма которой задаётся функцией $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$.

Так, например, для крыла в виде плоской пластинки бесконечного размаха, наклонённой под малым углом атаки α , имеем $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a-x)$, и формула (48,7) даёт $\Gamma = -\pi\alpha U$. Коэффициент подъёмной силы такого крыла равен

$$C_y = \frac{-\rho U \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U^2 a} = 2\pi\alpha.$$

¹⁾ Эта расходимость отсутствует, если вблизи задней кромки ζ_1 и ζ_2 обращаются в нуль как $(a-x)^k$, $k > 1$, т. е. если угловая точка контура у заднего его края есть точка возврата.

ГЛАВА V

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ЖИДКОСТИ

§ 49. Общее уравнение переноса тепла

В конце § 2 было указано, что полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности и внутреннего трения, одним из этих уравнений является попрежнему уравнение непрерывности; уравнения Эйлера заменяются уравнениями Навье-Стокса. Что же касается пятого уравнения, то для идеальной жидкости им является уравнение сохранения энтропии (2,6). В вязкой жидкости это уравнение, разумеется, не имеет места, поскольку в ней происходят необратимые процессы диссипации энергии.

В идеальной жидкости закон сохранения энергии выражается уравнением (6,1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right].$$

Слева стоит скорость изменения энергии единицы объёма жидкости, а справа — дивергенция плотности потока энергии. В вязкой жидкости закон сохранения энергии, конечно, тоже имеет место: изменение полной энергии жидкости в некотором объёме (в 1 сек.) должно быть попрежнему равно полному потоку энергии через границы этого объёма. Однако плотность потока энергии выглядит теперь иным образом. Прежде всего помимо потока $\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right)$, связанного с простым переносом массы жидкости при её движении, имеется ещё поток, связанный с процессами внутреннего трения. Этот второй поток выражается вектором $(\sigma'v)$ с компонентами $v_i \sigma'_{ik}$ (см. § 15). Этим, однако, не исчерпываются все дополнительные члены в потоке энергии.

Если температура жидкости не постоянна вдоль её объёма, то наряду с обоими указанными механизмами переноса энергии будет происходить перенос тепла также и посредством так называемой теплопроводности. Под этим подразумевается непосредственный молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Он не связан с макроскопическим движением и происходит также и в неподвижной жидкости.

Обозначим через q плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности. Поток q связан некоторым образом с изменением температуры вдоль жидкости. Эту зависимость можно написать сразу в тех случаях, когда градиент температуры в жидкости не слишком велик; практически в явлениях теплопроводности мы почти всегда имеем дело именно с такими случаями. Мы можем тогда разложить q в ряд по степеням градиента температуры, ограничившись первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку q должно обращаться в нуль вместе с ∇T . Таким образом, получаем:

$$q = -\kappa \nabla T. \quad (49,1)$$

Постоянная κ называется коэффициентом теплопроводности. Она всегда положительна, — это видно уже непосредственно из того, что поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой, т. е. q и ∇T должны иметь противоположные направления. Коэффициент κ является, вообще говоря, функцией температуры и давления.

Таким образом, полная плотность потока энергии в жидкости при наличии вязкости и теплопроводности равна сумме

$$\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\sigma' v) - \kappa \nabla T.$$

Соответственно этому общий закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\operatorname{div} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\sigma' v) - \kappa \nabla T \right]. \quad (49,2)$$

Это уравнение можно было бы выбрать в качестве последнего из полной системы гидродинамических уравнений вязкой жидкости. Удобно, однако, придать ему другой вид, преобразовав его с помощью уравнений движения. Для этого вычислим производную по времени от энергии единицы объема жидкости, исходя из уравнений движения. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Подставляя сюда $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ из уравнения непрерывности и $\frac{\partial v}{\partial t}$ из уравнения Навье-Стокса, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho v - \rho (v \nabla) \frac{v^2}{2} - v \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \operatorname{div} \rho v.$$

Воспользуемся теперь термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

откуда

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Подставляя это и вводя тепловую функцию $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = - \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \nabla p + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Далее, из термодинамического соотношения $d w = T ds + \frac{1}{\rho} dp$ имеем:

$$\nabla p = \rho \nabla w - \rho T \nabla s.$$

Последний же член в правой стороне равенства можно написать в виде

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v} \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Подставляя эти выражения, прибавляя и вычитая $\operatorname{div}(\mathbf{x} \nabla T)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = & - \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') - \mathbf{x} \nabla T \right] + \\ & + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(\mathbf{x} \nabla T). \end{aligned} \quad (49,3)$$

Сравнивая это выражение для производной от энергии единицы объема с выражением (49,2), получим следующее уравнение:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\mathbf{x} \nabla T). \quad (49,4)$$

Мы будем называть это уравнение общим уравнением переноса тепла. При отсутствии вязкости и теплопроводности его правая сторона обращается в нуль и получается уравнение сохранения энтропии (2,6) идеальной жидкости.

Следует обратить внимание на следующее истолкование уравнения (49,4). Стоящее слева выражение есть не что иное, как умноженная на ρT полная производная от энтропии по времени: $\rho T \frac{ds}{dt}$; $\frac{ds}{dt}$ определяет изменение энтропии данной передвигающейся в пространстве единицы массы жидкости; $T \frac{ds}{dt}$ есть, следовательно, количество получаемого этой единицей массы в единицу времени тепла, а $\rho T \frac{ds}{dt}$ — количество тепла, отнесенное к единице объема. Из (49,4) мы видим поэтому, что количество получаемого единицей объема жидкости тепла есть

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\mathbf{x} \nabla T).$$

Первый член здесь представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря вязкости, а второй есть тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством теплопроводности.

Раскроем член $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ в (49,4), подставив в него выражение (15,3) для σ'_{ik} . Имеем:

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Легко проверить, что первый член может быть написан в виде

$$\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2,$$

а во втором имеем:

$$\zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2.$$

Таким образом, уравнение (49,4) приобретает вид

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \operatorname{div} (\mathbf{x} \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (49,5)$$

В результате необратимых процессов теплопроводности и внутреннего трения энтропия жидкости возрастает. Речь идёт при этом, конечно, не об энтропии каждого элемента объёма жидкости в отдельности, а о полной энтропии всей жидкости, равной интегралу $\int \rho s dV$. Изменение энтропии в единицу времени определяется производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} dV.$$

С помощью уравнения непрерывности и уравнения (49,5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div} \rho \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \nabla s + \frac{1}{T} \operatorname{div} (\mathbf{x} \nabla T) + \\ &+ \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Первые два члена дают в сумме $-\operatorname{div} (\rho s \mathbf{v})$. Интеграл по объёму от этого члена преобразуется в интеграл от потока энтропии $\rho s \mathbf{v}$ по поверхности. Рассматривая неограниченный объём жидкости, покоящейся на бесконечности, мы можем стремиться граничную поверхность на бесконечность; тогда подинтегральное выражение в поверхностном интеграле обращается в нуль и интеграл исчезает. Интеграл от третьего члена преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div} (\mathbf{x} \nabla T) dV = \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{x} \nabla T}{T} \right) dV + \int \frac{\mathbf{x} (\nabla T)^2}{T^2} dV.$$

Считая, что температура жидкости на бесконечности достаточно быстро стремится к постоянному пределу, преобразуем первый интеграл в интеграл по бесконечно удалённой поверхности, на которой $\nabla T = 0$, так что интеграл тоже исчезает,

В результате получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\chi (\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \\ + \int \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV. \quad (49,6) \end{aligned}$$

Первый член представляет собой увеличение энтропии благодаря теплопроводности, а остальные два — увеличение энтропии, обусловленное внутренним трением.

Энтропия может только возрастать, т. е. сумма (49,6) должна быть положительна. С другой стороны, в каждом из членов этой суммы подинтегральное выражение может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю двух других интегралов. Поэтому каждый из этих интегралов должен быть всегда положительным. Отсюда следует наряду с известной уже нам положительностью χ и η также и положительность второго коэффициента вязкости ζ .

При выводе формулы (49,1) молчаливо подразумевалось, что поток тепла зависит только от градиента температуры и не зависит от градиента давления. Это предположение, а priori не очевидное, может быть оправдано теперь следующим образом. Если бы в \mathbf{q} входил член, пропорциональный ∇p , то в выражении (49,6) для изменения энтропии прибавился бы ещё член, содержащий под интегралом произведение $\nabla p \nabla T$. Поскольку это последнее может быть как положительным, так и отрицательным, то и производная от энтропии по времени не была бы существенно положительной, что невозможно.

Наконец, необходимо уточнить изложенные выше рассуждения ещё и в следующем отношении. Строго говоря, в термодинамически неравновесной системе, каковой является жидкость при наличии в ней градиентов скорости и температуры, обычные определения термодинамических величин теряют смысл и должны быть уточнены. Подразумевавшиеся нами здесь определения заключаются прежде всего в том, что ρ , ϵ и \mathbf{v} определяются попрежнему: ρ и $\rho \epsilon$ есть масса и внутренняя энергия, заключённые в единице объёма, а \mathbf{v} есть импульс единицы массы жидкости. Остальные же термодинамические величины определяются затем как те функции от ρ и ϵ , которыми они являются в состоянии теплового равновесия. При этом, однако, энтропия $s = s(\epsilon, \rho)$ уже не будет истинной термодинамической энтропией: интеграл $\int \rho s dV$ не будет, строго говоря, той величиной, которая должна возрастать со временем. Тем не менее, легко видеть, что при малых градиентах скорости и температуры в принятом нами здесь приближении s совпадает с истинной энтропией.

Действительно, при наличии градиентов в энтропии появляются, вообще говоря, связанные с ними дополнительные (по отношению к $s(\rho, \epsilon)$) члены. На изложенных выше результатах, однако, могли бы сказаться лишь линейные по градиентам члены (например, член,

пропорциональный скаляру $\operatorname{div} \mathbf{v}$). Такие члены неизбежно могли бы принимать как положительные, так и отрицательные значения. Между тем, они должны быть существенно отрицательными, так как равновесное значение $s = s(\rho, \epsilon)$ является максимальным возможным. Поэтому разложение энтропии по степеням малых градиентов может содержать (помимо нулевого члена) лишь члены, начиная со второго порядка.

Аналогичные замечания должны были быть по существу сделаны уже в § 15 (ср. примечание на стр. 66), так как уже наличие градиента скорости является термодинамической неравновесностью. Именно, под давлением p , которое входит в выражение для тензора плотности потока импульса в вязкой жидкости, следует понимать ту функцию $p = p(\epsilon, \rho)$, которой она является в состоянии теплового равновесия. При этом p не будет уже, строго говоря, давлением в обычном смысле слова, т. е. не будет совпадать с нормальной силой, действующей на элемент поверхности. В отличие от того, что было сказано выше об энтропии, здесь отличие проявится уже в величинах первого порядка по малому градиенту: мы видели, что в нормальной компоненте силы появляется наряду с p ещё и член, пропорциональный $\operatorname{div} \mathbf{v}$ (в несжимаемой жидкости этот член отсутствует и там разница появляется лишь в членах более высокого порядка).

Таким образом, три коэффициента η , ζ , κ , фигурирующие в системе уравнений движения вязкой теплопроводящей жидкости, полностью определяют гидродинамические свойства жидкости в рассматриваемом, всегда применяемом приближении (т. е. при пренебрежении производными высших порядков по координатам от скорости, температуры и т. п.). Введение в уравнения каких-либо дополнительных членов (например, введение в плотность потока массы членов, пропорциональных градиентам плотности или температуры) лишено физического смысла и означало бы в лучшем случае лишь изменение определения основных величин; в частности, скорость не совпала бы с импульсом единицы массы жидкости ¹⁾.

1) В худшем же случае введение таких членов может вообще нарушить соблюдение необходимых законов сохранения. Следует иметь в виду, что при любом определении величин плотности потока массы \mathbf{j} во всяком случае должна совпадать с импульсом единицы объёма жидкости. Действительно, плотность потока \mathbf{j} определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0;$$

умножая его на \mathbf{r} и интегрируя по всему занятому жидкостью объёму, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{r} dV = \int \mathbf{j} dV,$$

а поскольку интеграл $\int \rho \mathbf{r} dV$ определяет положение центра инерции данной массы жидкости, то ясно, что интеграл $\int \mathbf{j} dV$ есть её импульс.

§ 50. Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Общее уравнение теплопроводности в форме (49,4) или (49,5) может быть в различных случаях значительно упрощено.

Если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Однако неравномерно нагретая жидкость не является всё же при этом вполне «несжимаемой» в том смысле, как это понималось выше. Дело в том, что плотность меняется ещё и под влиянием изменения температуры; этим изменением плотности, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточно малых скоростях плотность неравномерно нагретой жидкости всё же нельзя считать постоянной. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо, следовательно, считать постоянным давление, а не плотность. Так, имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T,$$

и поскольку $T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ есть теплоёмкость c_p при постоянном давлении, то

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T \nabla s = c_p \nabla T.$$

Уравнение (49,4) принимает вид

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T\right) = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (50,1)$$

Для того чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо (помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука), чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы; подчеркнём, что здесь речь идёт именно об абсолютных значениях разностей температур, а не о градиенте температуры. Тогда жидкость можно считать «несжимаемой» в том же смысле, как это подразумевалось раньше; в частности, уравнение непрерывности будет выглядеть просто как $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Считая разности температур малыми, мы будем пренебрегать также и температурным изменением величин η , κ , c_p , т. е. будем считать их постоянными. Написав член $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ в том виде, как это сделано в (49,5), мы получим в результате уравнение переноса тепла в несжимаемой жидкости в следующем сравнительно простом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \quad (50,2)$$

где $\nu = \eta/\rho$ есть кинематическая вязкость, а вместо κ введён так назы-

ваемый коэффициент температуропроводности, определяемый как

$$\chi = \frac{\alpha}{\rho c_p}. \quad (50,3)$$

В особенности просто выглядит уравнение переноса тепла в неподвижной жидкости, где перенос энергии обязан целиком теплопроводности. Опуская в (50,2) члены, содержащие скорость, получаем просто

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (50,4)$$

Это уравнение называется в математической физике уравнением теплопроводности или уравнением Фурье. Оно может быть выведено, разумеется, и гораздо более простым образом, без помощи общего уравнения переноса тепла в движущейся жидкости. Согласно закону сохранения энергии количество тепла, поглощающееся в некотором объёме в единицу времени, должно быть равно полному потоку тепла, «втекающего» в этот объём через ограничивающую его поверхность. Как мы знаем, такой закон сохранения может быть выражен в виде «уравнения непрерывности» для количества тепла. Это уравнение получается приравниванием количества тепла, поглощающегося в единице объёма жидкости в единицу времени, дивергенции плотности потока тепла, взятой с обратным знаком. Первое из них равно $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$; здесь должна быть взята теплоёмкость c_p , так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным. Приравнивая это выражение — $\text{div } \mathbf{q} = \chi \Delta T$, получим как раз уравнение (50,4).

Необходимо отметить, что применимость уравнения теплопроводности (50,4) к жидкостям практически сильно ограничена. Дело в том, что в жидкостях, реально находящихся в поле тяжести, уже малый градиент температуры приводит, в большинстве случаев, к возникновению заметного движения (так называемая конвекция; см. § 56). Поэтому реально можно иметь дело с неравномерным распределением температуры в неподвижной жидкости, разве только, если градиент температуры направлен противоположно силе тяжести или же если жидкость очень вязкая. Тем не менее, изучение уравнения теплопроводности в форме (50,4) весьма существенно, так как уравнением такого вида описываются процессы теплопроводности в твёрдых телах. Имея это в виду, мы займёмся здесь и в §§ 51, 52 более подробным его исследованием.

Если распределение температуры в неравномерно нагретой неподвижной среде поддерживается (посредством некоторых внешних источников тепла) постоянным во времени, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta T = 0. \quad (50,5)$$

Таким образом, стационарное распределение температуры в неподвижной

среде описывается уравнением Лапласа. В более общем случае, когда коэффициент κ нельзя считать постоянным, вместо (50,5) имеем уравнение

$$\operatorname{div}(\kappa \nabla T) = 0. \quad (50,6)$$

Если в жидкости имеются посторонние источники тепла, то к уравнению теплопроводности должен быть добавлен соответствующий дополнительный член (таким источником тепла может, например, являться нагревание электрическим током). Пусть Q есть количество тепла, выделяемое этими источниками в единице объема жидкости в единицу времени; Q является, вообще говоря, функцией от координат и от времени. Тогда условие баланса тепла, т. е. уравнение теплопроводности, напишется в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + Q. \quad (50,7)$$

Напишем граничные условия для уравнения теплопроводности, которые должны иметь место на границе двух сред. Прежде всего, на границе должны быть равными температуры обеих сред:

$$T_1 = T_2. \quad (50,8)$$

Кроме того, поток тепла, выходящего из одной среды, должен быть равен потоку, входящему во вторую среду. Выбирая систему координат, в которой данный участок границы покоится, можно написать это условие в виде

$$\kappa_1 \nabla T_1 df = \kappa_2 \nabla T_2 df$$

для каждого элемента df поверхности раздела. Написав $\nabla T df = \frac{\partial T}{\partial n} df$, где $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная от T по направлению нормали к поверхности, получим граничное условие в виде

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (50,9)$$

Если на поверхности раздела имеются посторонние источники тепла, выделяющие количество тепла $Q^{(s)}$ на единице площади в единицу времени, то вместо условия (50,9) надо написать:

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \quad (50,10)$$

В физических задачах о распределении температуры при наличии источников тепла интенсивность последних обычно сама задается в виде функции температуры. Если функция $Q(T)$ достаточно быстро возрастает с увеличением T , то установление стационарного распределения температуры в теле, границы которого поддерживаются при заданных условиях (например, при заданной температуре), может оказаться невозможным. Теплоотвод через внешнюю поверхность тела пропорционален некоторому среднему значению разности температур $T - T_0$ тела

и внешней среды вне зависимости от закона тепловыделения внутри тела; ясно, что если последнее достаточно быстро возрастает с температурой, то теплоотвод может оказаться недостаточным для осуществления равновесного состояния.

Невозможность установления стационарного теплового состояния лежит в основе развитой *Н. Н. Семёновым* (1928) теории так называемого теплового взрыва: если скорость экзотермической реакции горения достаточно быстро возрастает с температурой, то при невозможности стационарного распределения возникают быстрое нестационарное разогревание вещества и ускорение реакции (тепловой взрыв). Количественная теория для экспоненциальной зависимости тепловыделения от температуры была развита *Д. А. Франк-Каменецким* (1939) (см. задачу 1 этого параграфа)¹⁾.

З а д а ч и

1. В слое вещества, ограниченном двумя параллельными бесконечными плоскостями, распределены источники тепла с объёмной интенсивностью $Q = Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$; граничные плоскости поддерживаются при постоянной температуре T_0 . Найти условие, определяющее возможность установления стационарного распределения температуры.

Решение. Уравнение стационарной теплопроводности в данном случае гласит:

$$\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = -Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

с граничными условиями $T = T_0$ при $x = 0$ и $x = 2l$ ($2l$ — ширина слоя). Вводим безразмерные переменные $\tau = \alpha(T - T_0)$ и $\xi = x/l$; тогда

$$\tau'' + \lambda e^\tau = 0, \quad \lambda = \frac{Q_0 \alpha l^2}{\kappa}.$$

Интегрируя это уравнение (умножив его на $2\tau'$) один раз, найдём:

$$\tau'^2 = \frac{\lambda}{2} (e^{\tau_0} - e^\tau),$$

где τ_0 — постоянная. Последняя представляет собой, очевидно, максимальное значение τ , которое ввиду симметрии задачи должно достигаться

¹⁾ Скорость (а с ней и интенсивность выделения тепла) взрывных реакций горения зависит от температуры в основном пропорционально множителю вида $e^{-U/RT}$ с большой постоянной U . *Д. А. Франк-Каменецкий* указал, что для исследования условий возникновения теплового взрыва следует рассматривать ход реакции при сравнительно незначительном разогревании

вещества и соответственно этому заменить $e^{-\frac{U}{RT}}$ на $e^{-\frac{U}{RT_0} - \frac{U}{RT_0^2}(T-T_0)}$, где T_0 — внешняя температура.

Более подробное изложение этого вопроса см. *Д. А. Франк-Каменецкий*, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, изд. АН СССР, 1947,

посередине слоя, т. е. при $\xi = 1$. Поэтому вторичное интегрирование с учётом условия $\tau = 0$ при $\xi = 0$ даёт

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$e^{-\frac{\tau_0}{2}} \operatorname{Arch} e^{\frac{\tau_0}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \quad (1)$$

Определяемая этим равенством функция $\lambda(\tau_0)$ имеет максимум $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$ при определённом значении $\tau_0 = \tau_{0 \text{ кр}}$; если $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$, то удовлетворяющего граничным условиям решения не существует¹⁾. Численные значения: $\lambda_{\text{кр}} = 0,88$, $\tau_{0 \text{ кр}} = 1,2^2$).

2. В неподвижную жидкость, в которой поддерживается постоянный градиент температуры, погружён шар. Определить возникающее стационарное распределение температуры в жидкости и шаре.

Решение. Распределение температуры определяется во всём пространстве уравнением $\Delta T = 0$ с граничными условиями

$$T_1 = T_2, \quad \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

при $r = R$ (R — радиус шара; величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к шару и жидкости) и условием $\nabla T = A$ на бесконечности (A — заданный градиент температуры). В силу симметрии условий задачи A есть единственный вектор, которым должно определяться искомое решение.

Таковыми решениями уравнения Лапласа являются $\operatorname{const.} A r$ и $\operatorname{const.} A \nabla \frac{1}{r}$.

Замечая, кроме того, что решение должно оставаться конечным в центре шара, ищем температуры T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = c_1 A r, \quad T_2 = c_2 A \frac{r}{r^3} + A r;$$

постоянные c_1 и c_2 определяются из условий при $r = R$, и в результате находим:

$$T_1 = \frac{3\alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} A r, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] A r.$$

§ 51. Теплопроводность в неограниченной среде

Рассмотрим теплопроводность в неограниченной неподвижной среде. Наиболее общей постановкой задачи является следующая. В начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры во всём пространстве:

$$T = T_0(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

¹⁾ Из двух корней уравнения (1) при $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ устойчивому распределению температуры соответствует лишь меньший.

²⁾ Аналогичные значения для сферической области (с её радиусом в качестве длины l) равны $\lambda_{\text{кр}} = 3,32$, $\tau_{0 \text{ кр}} = 1,47$, а для бесконечного цилиндра $\lambda_{\text{кр}} = 2,00$, $\tau_{0 \text{ кр}} = 1,36$.

где T_0 — некоторая заданная функция координат. Требуется определить распределение температуры во всякий последующий момент времени t .

Разложим искомую функцию T в интеграл Фурье по координатам:

$$T = \int T_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z, \quad (51,1)$$

где коэффициенты разложения определяются посредством

$$T_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T(x', y', z', t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dV', \quad dV' = dx' dy' dz'.$$

Подставляя в уравнение (50,4) выражение (51,1), получаем:

$$\int \left(\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k = 0,$$

откуда

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0.$$

Из этого уравнения находим зависимость $T_{\mathbf{k}}$ от времени:

$$T_{\mathbf{k}} = e^{-k^2 \chi t} T_{0\mathbf{k}}.$$

Подставляя это в (51,1), получаем:

$$T = \int T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (51,2)$$

Поскольку при $t=0$ должно быть $T = T_0(x, y, z)$, то ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляют собой коэффициенты разложения функции $T_0(x, y, z)$ в интеграл Фурье:

$$T_{0\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_0(x', y', z') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dV'.$$

Наконец, подставляя это выражение в (51,2), получаем:

$$T = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int T_0(x', y', z') e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} dV' d^3k.$$

Интеграл по d^3k разбивается на произведение трёх одинаковых интегралов, каждый из которых имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_x^2 \chi t} e^{ik_x(x-x')} dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_x^2 \chi t} \cos k_x(x-x') dk_x$$

(аналогичный интеграл с \sin вместо \cos исчезает в силу нечётности функции \sin). С помощью известной формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

получаем окончательно для $T(x, y, z, t)$ следующее выражение:

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(x', y', z') e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}} dV'. \quad (51,3)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя распределение температуры в любой момент времени по её заданному распределению в начальный момент времени.

Если начальное распределение температуры является функцией только от одной координаты, x , то, произведя в (51,3) интегрирование по $dy' dz'$, находим:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}} dx'. \quad (51,4)$$

Пусть при $t=0$ температура равна нулю во всём пространстве, за исключением бесконечно тонкого слоя в плоскости $x=0$, где она принимает бесконечно большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int T_0(x) dx$, остаётся конечным. Такое распределение можно представить с помощью δ -функции в виде

$$T_0(x) = \text{const.} \delta(x).$$

Интегрирование в формуле (51,4) сводится при этом просто к замене x нулём, в результате чего получается:

$$T(x, t) = \text{const.} \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}}. \quad (51,5)$$

Аналогично, если в начальный момент некоторое конечное количество тепла сконцентрировано в точке (начале координат), то в последующие моменты времени распределение температуры определится формулой

$$T(r, t) = \text{const.} \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\chi t}} \quad (51,6)$$

(r — расстояние от начала координат). По мере возрастания времени температура в точке $r=0$ падает обратно пропорционально $t^{3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причём область заметно отличной от нуля температуры постепенно расширяется (рис. 29). Ход этого расширения определяется в основном экспоненциальным множителем в (51,6). Мы видим, что порядок величины l размеров этой области определяется соотношением $l^2/\chi t \sim 1$, откуда

$$l \sim \sqrt{\chi t}, \quad (51,7)$$

т. е. растёт пропорционально квадратному корню из времени.

Формулу (51,7) можно истолковать с несколько иной точки зрения. Пусть l есть порядок величины размеров тела. Тогда мы можем утверждать, что если это тело было неравномерно нагрето, то порядок величины времени τ , в течение которого температуры в разных точках тела заметно выравняются, равен

$$\tau \sim \frac{l^2}{\chi}. \quad (51,8)$$

Время τ , которое можно назвать «временем релаксации» для процесса теплопроводности, пропорционально квадрату размеров тела и обратно пропорционально коэффициенту теплопроводности.

Процесс теплопроводности, описываемый полученными здесь формулами, обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на всё пространство. Так, из формулы (51,5) видно, что тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в нуль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры теплопроводностью χ , если только эта зависимость не приводит к обращению χ в нуль в какой-либо области пространства. Если же χ есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простирается в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства; речь идёт о распространении тепла в среду, температуру которой (вне области влияния) можно считать равной нулю (Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, 1950; им же принадлежит решение приведённых ниже задач).

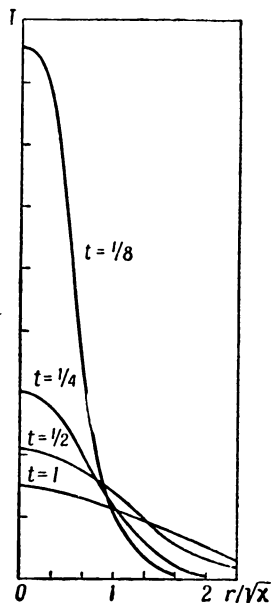


Рис. 29.

Задачи

1. Теплоёмкость и теплопроводность среды — степенные функции температуры, а её плотность постоянна. Определить закон обращения температуры в нуль близи границы области, до которой в данный момент распространилось тепло из некоторого произвольного источника; вне этой области температура равна нулю.

Решение. Если α и c_p — степенные функции температуры, то то же самое относится к теплопроводности χ и к тепловой функции $w = \int c_p dT$ (постоянный член в w опускаем). Поэтому можно написать $\chi = aW^n$, где

посредством $W = \rho w$ мы обозначили тепловую функцию единицы объёма среды. Тогда уравнение теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T)$$

приобретёт вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \operatorname{div} (W^n \nabla W). \quad (1)$$

В течение небольшого интервала времени малый участок границы можно считать плоским, а скорость его перемещения в пространстве v — постоянной. Соответственно этому ищем решение уравнения (1) в виде $W = W(x - vt)$, где x — координата в перпендикулярном к границе направлении. Имеем:

$$-v \frac{\partial W}{\partial x} = a \frac{d}{dx} \left(W^n \frac{dW}{dx} \right), \quad (2)$$

откуда после двукратного интегрирования находим следующий закон обращения W в нуль:

$$W \propto |x|^{1/n}, \quad (3)$$

где $|x|$ — расстояние от границы нагретой области. В то же время этим подтверждается вывод о наличии границы нагретой области (вне которой W , а с ней и T равны нулю), если показатель $n > 0$. Если $n \leq 0$, то уравнение (2) не имеет решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, т. е. тепло распределено в каждый момент по всему пространству.

2. В той же среде в начальный момент времени в плоскости $x = 0$ сконцентрировано количество тепла, равное (будучи отнесено к единице площади) Q , а в остальном пространстве $T = 0$. Определить распределение температуры в последующие моменты времени.

Решение. В одномерном случае уравнение (1) гласит:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(W^n \frac{\partial W}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Из имеющихся в нашем распоряжении параметров Q и a и переменных x , t можно составить лишь одну безразмерную комбинацию:

$$\xi = \frac{x}{(Q^n a t)^{1/(2+n)}} \quad (5)$$

(Q и a имеют размерность соответственно эрг/см^2 и $\text{см}^2/\text{сек}$ ($\text{см}^3/\text{эрг}$) n). Поэтому искомая функция $W(x, t)$ должна иметь вид

$$W = \left(\frac{Q^n}{a t} \right)^{\frac{1}{2+n}} f(\xi), \quad (6)$$

где безразмерная функция $f(\xi)$ умножена на величину, имеющую размерность эрг/см^3 . После этой подстановки уравнение (4) даёт

$$(2+n) \frac{d}{d\xi} \left(f^n \frac{df}{d\xi} \right) + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0.$$

Это уравнение в полных производных имеет простое решение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$f(\xi) = \left[\frac{n}{2(2+n)} (\xi_0^2 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (7)$$

где ξ_0 — постоянная интегрирования.

При $n > 0$ эта формула даёт распределение температуры в области между границами $x = \pm x_0$, определяющимися равенством $\xi = \pm \xi_0$; вне этих границ $W = 0$. Отсюда следует, что границы нагретой области расширяются со временем по закону

$$x_0 = \text{const} \cdot t^{\frac{1}{2+n}}.$$

Постоянная ξ_0 определяется условием постоянства полного количества тепла:

$$Q = \int_{-x_0}^{x_0} W dx = Q \int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi) d\xi, \quad (8)$$

откуда получается:

$$\xi_0^{2+n} = \frac{(2+n)^{1+n} 2^{1-n}}{n\pi^{n/2}} \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{n}\right)}. \quad (9)$$

При $n = -\nu < 0$ напомним решение в виде

$$f(\xi) = \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)} (\xi_0^2 + \xi^2) \right]^{-\frac{1}{\nu}}. \quad (10)$$

Здесь тепло распределено по всему пространству, причём на больших расстояниях W убывает по степенному закону: $W \sim x^{-2/\nu}$. Это решение применимо лишь при $\nu < 2$; при $\nu \geq 2$ нормировочный интеграл (8) (который берётся теперь в пределах $\pm \infty$) расходится, что физически означает мгновенный уход тепла на бесконечное расстояние. При $\nu < 2$ постоянная ξ_0 в (10) равна

$$\xi_0^{2-\nu} = \frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu} \frac{\Gamma^\nu\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)}. \quad (11)$$

Наконец, при $n \rightarrow 0$ имеем $\xi_0 \rightarrow 2/\sqrt{n}$ и решение, определяемое формулами (3), (4), (7), даёт

$$W = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}} \left(1 - n \frac{x^2}{4at}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

в согласии с формулой (51,5).

§ 52. Теплопроводность в ограниченной среде

В задачах о теплопроводности в ограниченной среде задание начального распределения температуры недостаточно для однозначности решения, и необходимо ещё задание краевых условий на ограничивающей среде поверхности.

Рассмотрим теплопроводность в полупространстве ($x > 0$) и начём со случая, когда на граничной поверхности $x = 0$ поддерживается заданная постоянная температура. Эту температуру мы примем условно за нуль, т. е. будем отсчитывать от неё температуру в других точках среды.

В начальный момент времени попрежнему задано распределение температуры во всей среде. Таким образом, граничные и начальные условия гласят:

$$T = 0 \text{ при } x = 0; \quad T = T_0(x, y, z) \text{ при } t = 0, \quad x > 0. \quad (52,1)$$

Решение уравнения теплопроводности с этими условиями можно свести к решению того же уравнения для среды, не ограниченной в обоих направлениях оси x , при помощи следующего искусственного приёма. Представим себе, что среда распространяется и по левую сторону от плоскости $x = 0$, причём в начальный момент времени распределение температуры в этой части среды описывается той же функцией T_0 , но только взятой с обратным знаком. Другими словами, в начальный момент времени распределение температуры во всём пространстве описывается некоторой функцией, нечётной по переменной x , т. е. такой, что

$$T_0(-x, y, z) = -T_0(x, y, z). \quad (52,2)$$

Из равенства (52,2) следует, что $T_0(0, y, z) = -T_0(0, y, z) = 0$, т. е. требуемое граничное условие (52,1) автоматически выполнено в начальный момент времени, и из симметрии условий задачи очевидно, что оно будет выполнено и во всякий другой момент времени.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (50,4) в неограниченной среде с начальной функцией $T_0(x, y, z)$, удовлетворяющей (52,2), и без какого бы то ни было граничного условия. Поэтому мы можем воспользоваться непосредственно общей формулой (51,3).

Разобьём в (51,3) область интегрирования по dx' на две части: от $-\infty$ до 0 и от 0 до $-\infty$, и воспользуемся соотношением (52,2). Мы получим тогда

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_0(x', y', z') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}} \right\} e^{-\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}} dx' dy' dz'. \quad (52,3)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя температуру во всей среде, т. е. при всех $x > 0$.

Если начальное распределение температуры зависит только от x , то формула (52,3) приобретает вид

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \int_0^{\infty} T_0(x') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}} \right\} dx'. \quad (52,4)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда в начальный момент везде, кроме $x=0$, температура равна заданной постоянной величине, которую, не ограничивая общности, можно положить равной -1 ; температура же на плоскости $x=0$ всё время равна нулю. Соответствующее решение получается непосредственно подстановкой

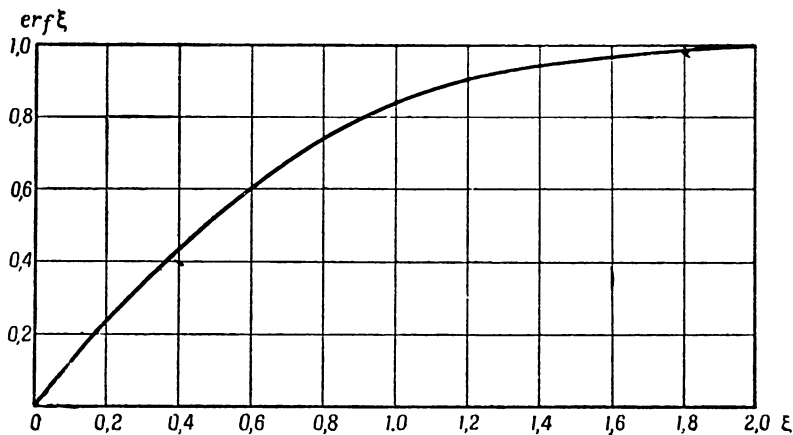


Рис. 30.

$T_0(x) = -1$ в (52,4). Разобьём интеграл в (52,4) на два интеграла и в каждом из них произведём замену переменных типа

$$\frac{x' - x}{2\sqrt{\chi t}} = \xi.$$

Тогда мы получим для $T(x, t)$ следующее выражение:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(-\frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right) \right\},$$

где функция $\operatorname{erf} x$ определяется как

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (52,5)$$

и называется интегралом ошибок (заметим, что $\operatorname{erf}(\infty) = 1$). Поскольку

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x),$$

то мы получаем окончательно

$$T(x, t) = -\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right). \quad (52,6)$$

На рис. 30 изображён график функции $\operatorname{erf} \xi$. С течением времени распределение температуры по пространству всё более сглаживается. Это

сглаживание происходит таким образом, что каждое заданное значение температуры «перемещается» вправо пропорционально \sqrt{t} . Последний результат, впрочем, заранее очевиден. Действительно, рассматриваемая задача определяется всего одним параметром — начальной разностью температур T_0 граничной плоскости и остального пространства (положенной выше условно равной единице). Из имеющихся в нашем распоряжении параметров T_0 и χ и переменных x и t можно составить всего одну безразмерную комбинацию $x/\sqrt{\chi t}$; поэтому ясно, что искомое распределение температуры должно определяться функцией вида $T = T_0 f(x/\sqrt{\chi t})$.

Рассмотрим теперь случай, когда граничная поверхность среды теплоизолирована. Другими словами, на плоскости $x=0$ тепловой поток должен отсутствовать, т. е. должно быть $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Таким образом, имеем теперь следующие граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0; \quad T = T_0(x, y, z) \text{ при } t=0, \quad x > 0. \quad (52,7)$$

Для нахождения решения поступим аналогично тому, как мы делали в предыдущем случае. Именно, опять представим себе среду неограниченной в обе стороны от плоскости $x=0$. Распределение же температуры в начальный момент времени представим себе теперь симметричным относительно плоскости $x=0$. Другими словами, функцию $T_0(x, y, z)$ предположим теперь чётной по переменной x :

$$T_0(-x, y, z) = T_0(x, y, z). \quad (52,8)$$

Тогда $\frac{\partial T_0(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial T_0(-x, y, z)}{\partial x}$ и при $x=0$ будет $\frac{\partial T_0}{\partial x} = 0$. Из симметрии очевидно, что это условие автоматически будет выполнено и во все последующие моменты времени.

Повторяя опять все произведённые выше вычисления, но только пользуясь (52,8) вместо (52,2), получим общее решение поставленной задачи в виде

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_0(x', y', z') \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\chi t}} + e^{-\frac{(x'+x)^2}{4\chi t}} \right\} e^{-\frac{(y'-y)^2 + (z'-z)^2}{4\chi t}} dx' dy' dz'. \quad (52,9)$$

Если T_0 есть функция только от x , то

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \int_0^{\infty} T_0(x') \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\chi t}} + e^{-\frac{(x'+x)^2}{4\chi t}} \right\} dx'. \quad (52,10)$$

Перейдём теперь к задачам с другого рода граничными условиями, тоже допускающими решение уравнения теплопроводности в общем

виде. Рассмотрим среду, ограниченную плоскостью $x = 0$, через которую извне подводится поток тепла, являющийся заданной функцией времени. Другими словами, имеем граничные и начальные условия:

$$-x \frac{\partial T}{\partial x} = q(t) \text{ при } x = 0; T = 0 \text{ при } t = -\infty, x > 0, \quad (52,11)$$

где $q(t)$ — заданная функция.

Предварительно решим вспомогательную задачу, в которой $q(t) = \delta(t)$. Легко сообразить, что эта задача физически эквивалентна задаче о распространении тепла в неограниченной среде от точечного источника, содержащего заданное полное количество тепла. Действительно, граничное условие $-x \frac{\partial T}{\partial x} = \delta(t)$ при $x = 0$ физически означает, что через каждую единицу площади плоскости $x = 0$ мгновенно подводится количество тепла, равное единице. В задаче же с условием $T = \frac{2}{\rho c_p} \delta(x)$ при $t = 0$ на той же площади в начальный момент времени сконцентрировано количество тепла $\int \rho c_p T dx = 2$, из которого половина распространяется затем в направлении положительных x (а другая половина — к отрицательным x). Поэтому ясно, что решения обеих задач тождественны и согласно (51,5) находим:

$$xT(x, t) = \sqrt{\frac{\chi}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}}.$$

Поскольку в силу линейности уравнений эффекты от тепла, подводимого в различные моменты времени, просто складываются, то искомое общее решение уравнения теплопроводности с условиями (52,11) есть

$$xT(x, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) e^{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}} d\tau. \quad (52,12)$$

В частности, на самой плоскости $x = 0$ температура меняется по закону

$$xT(0, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) d\tau. \quad (52,13)$$

С помощью этих результатов можно непосредственно получить решение другой задачи, в которой заданной функцией времени является сама температура T на плоскости $x = 0$:

$$T = T_0(t) \text{ при } x = 0; T = 0 \text{ при } t = -\infty, x > 0. \quad (52,14)$$

Для этого замечаем, что если некоторая функция $T(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то этому же уравнению

удовлетворяет и производная $\frac{\partial T}{\partial x}$. С другой стороны, дифференцируя по x выражение (52,12,) получим:

$$-x \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^t \frac{xq(\tau)}{2\sqrt{\pi\chi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}} d\tau.$$

Это есть функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности, причём $q(t)$ есть (согласно (52,11)) её же значение при $x=0$; очевидно, что она и даёт искомое решение задачи с условиями (52,14). Написав $T(x, t)$ вместо $-x \frac{\partial T}{\partial x}$ и $T_0(t)$ вместо $q(t)$, получаем таким образом:

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}} d\tau. \quad (52,15)$$

Для потока тепла $q = -x \frac{\partial T}{\partial x}$ через граничную поверхность $x=0$ получаем после короткого преобразования:

$$q(t) = \frac{x}{\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (52,16)$$

Эта формула представляет собой обращение интегрального соотношения (52,13).

Очень просто решается важная задача, в которой на граничной поверхности $x=0$ температура задаётся в течение всего времени в виде периодической функции:

$$T = T_0 e^{-i\omega t} \quad \text{при } x=0.$$

Ясно, что распределение температуры во всём пространстве будет зависеть от времени посредством того же множителя $e^{-i\omega t}$. Поскольку одномерное уравнение теплопроводности формально совпадает с уравнением (24,3), определяющим движение вязкой жидкости над колеблющейся плоскостью, то по аналогии с формулой (24,4) мы можем непосредственно написать искомое распределение температуры в виде

$$T = T_0 e^{-x\sqrt{\omega/2\chi}} e^{i(x\sqrt{\omega/2\chi} - \omega t)}. \quad (2,17)$$

Мы видим, что колебания температуры на граничной поверхности распространяются от неё в виде быстро затухающих в глубь среды так называемых «тепловых волн».

Другой тип задач теории теплопроводности представляют задачи о скорости выравнивания температуры неравномерно нагретых конечных тел, поверхность которых поддерживается при заданных условиях.

Для решения таких задач, следуя общим методам, ищем решения уравнения теплопроводности вида

$$T = T_n(x, y, z) e^{-\lambda_n t}$$

с постоянными λ_n . Для функций T_n получаем уравнение

$$\chi \Delta T_n = -\lambda_n T_n. \quad (52,18)$$

Это уравнение при заданных граничных условиях имеет отличные от нуля решения лишь при определённых λ_n , составляющих набор его «собственных значений». Все эти значения вещественны и положительны, а соответствующие функции $T_n(x, y, z)$ составляют полную систему взаимно ортогональных функций. Пусть распределение температуры в начальный момент времени даётся функцией $T_0(x, y, z)$. Разлагая её по системе функций T_n :

$$T_0(x, y, z) = \sum_n c_n T_n(x, y, z),$$

мы получим тогда искомое решение поставленной задачи в виде

$$T(x, y, z, t) = \sum_n c_n T_n(x, y, z) e^{-\lambda_n t}. \quad (52,19)$$

Скорость выравнивания температуры определяется, очевидно, в основном тем членом этой суммы, который соответствует наименьшему из λ_n ; пусть это будет λ_1 . «Время выравнивания» температуры можно определить как $\tau = 1/\lambda_1$.

Задачи

1. Определить распределение температуры вокруг сферической поверхности (радиуса R), температура которой есть заданная функция времени $T_0(t)$.

Решение. Уравнение теплопроводности для центрально-симметричного распределения температуры в сферических координатах есть

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}.$$

Подстановкой $T(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}$ оно приводится к уравнению $\frac{\partial F}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ типа одномерного уравнения теплопроводности. Поэтому искомое решение можно написать непосредственно на основании решения (52,15) в виде

$$T(r, t) = \frac{R(r-R)}{2r\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}} d\tau.$$

2. То же, если температура сферической поверхности есть $T_0 e^{-t\omega}$.

Решение. Аналогично (52,17) получим:

$$T = T_0 e^{-t\omega} \frac{R}{r} e^{-(1-t)(r-R)\sqrt{\omega/2\chi}}.$$

3. Определить «время выравнивания» температуры для куба (с длиной ребра $2a$), поверхность которого: а) поддерживается при заданной температуре $T = 0$, б) теплоизолирована.

Решение. В случае а) наименьшему значению λ соответствует следующее решение уравнения (52,18):

$$T_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi z}{a}$$

(начало координат — в центре куба), причём

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{a^2}{3\pi^2\chi}.$$

В случае же б) имеем $T_1 = \cos \frac{\pi x}{a}$ (или такая же функция от y или z), причём $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

4. То же для шара радиуса R .

Решение. Наименьшему значению λ соответствует центрально-симметричное решение уравнения (52,18)

$$T_1 = \frac{\sin kr}{r},$$

причём в случае а) $k = \pi/R$, так что

$$\tau = \frac{1}{\chi k^2} = \frac{R^2}{\chi\pi^2}.$$

В случае же б) k определяется как наименьший корень уравнения $\text{tg } kR = kR$, откуда $kR = 4,493$, так что $\tau = 0,050R^2/\chi$.

§ 53. Закон подобия для теплопередачи

Процессы теплопередачи в жидкости осложняются по сравнению с теплопередачей в твёрдых телах возможностью движения жидкости. Погружённое в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача происходит только с помощью процессов теплопроводности. О движении неравномерно нагретой жидкости говорят как о конвекции.

Будем предполагать, что имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы для того, чтобы её физические свойства можно было считать не зависящими от температуры. С другой стороны, эти разности будут предполагаться настолько большими, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, обусловленными выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путём внутреннего трения (см. § 55). Тогда в уравнении (50,2) может быть опущен член, содержащий вязкость, так что остаётся

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = -\chi\Delta T, \quad (53,1)$$

где $\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ есть коэффициент температуропроводности. Это уравнение вместе с уравнением Навье-Стокса и уравнением непрерывности полностью описывает конвекцию в рассматриваемых условиях.

В дальнейшем мы будем интересоваться только стационарным конвекционным движением¹⁾. Тогда все производные по времени выпадают, и мы получаем следующую систему основных уравнений:

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad (53,2)$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad (53,3)$$

В эту систему, в которой неизвестными функциями являются \mathbf{v} , T и p/ρ , входят всего два постоянных параметра: ν и χ . Кроме того, решение этих уравнений зависит, через посредство граничных условий, еще от некоторого характеристического параметра длины l , скорости U и характеристической разности температур $T_1 - T_0$. Первые два определяют, как всегда, размеры фигурирующих в задаче твёрдых тел и скорость основного потока жидкости, а третий — разность температур между жидкостью и твёрдыми телами.

При составлении безразмерных величин из имеющихся в нашем распоряжении параметров возникает вопрос о том, какую размерность следует приписать температуре. Для этого замечаем, что температура определяется уравнением (53,2), являющимся линейным и однородным по T . Поэтому температура может быть умножена без нарушения уравнений на произвольный постоянный множитель. Другими словами, это значит, что единицы для измерения температуры могут быть выбраны произвольным образом. Возможность такого преобразования температуры может быть учтена формально посредством приписывания ей некоторой особой размерности, которая бы не входила в размерности остальных величин. Таковой является как раз размерность градуса — единицы, в которой температура обычно и измеряется.

Таким образом, конвекция характеризуется в рассматриваемых условиях пятью параметрами со следующими размерностями:

$$[\nu] = [\chi] = \text{см}^2/\text{сек}, \quad [U] = \text{см}/\text{сек}, \quad [l] = \text{см}, \quad [T_1 - T_0] = \text{град}.$$

Из них можно составить две независимые безразмерные комбинации.

В качестве таковых мы выберем число Рейнольдса $R = \frac{Ul}{\nu}$ и так называемое число Прандтля, определяемое как отношение

$$P = \frac{\nu}{\chi}. \quad (53,4)$$

Всякая другая безразмерная величина может быть выражена через R и P ²⁾.

1) Для того чтобы конвекция могла быть стационарной, необходимо, строго говоря, чтобы в соприкасающихся с жидкостью твёрдых телах находились источники тепла, поддерживающие их при постоянной температуре.

2) Иногда пользуются так называемым числом Пекле, определяемым как

$$\frac{Ul}{\chi} = RP.$$

Что касается числа Прандтля, то оно представляет собой просто некоторую материальную константу вещества и не зависит от свойств самого потока. У газов это число — всегда порядка единицы. Значения же P для различных жидкостей лежат в более широком интервале. У очень вязких жидкостей P может достигать очень больших значений. Приведём в качестве примера значения P при 20°C для ряда веществ:

воздух	0,733
вода	6,75
спирт	16,6
глицерин	7250
ртуть	0,044

Подобно тому как было сделано в § 19, мы можем теперь заключить, что в стационарном конвекционном потоке (заданного типа) распределение температуры и скорости имеет вид

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = f\left(\frac{r}{l}, R, P\right), \quad \frac{v}{U} = f\left(\frac{r}{l}, R\right). \quad (53,5)$$

Безразмерная функция, определяющая распределение температуры, зависит как от параметров от обоих чисел R и P ; распределение же скоростей — только от числа R , поскольку оно определяется уравнениями (53,3), в которые теплопроводность не входит вовсе. Два конвекционных потока подобны, если их числа Рейнольдса и Прандтля одинаковы.

Теплопередачу между твёрдыми телами и жидкостью характеризуют обычно так называемым коэффициентом теплопередачи α , определяемым как отношение

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0}, \quad (53,6)$$

где q — плотность потока тепла через поверхность тела, а $T_1 - T_0$ — характеристическая разность температур твёрдого тела и жидкости. Если распределение температуры в жидкости известно, то коэффициент теплопередачи легко определить, вычисляя плотность потока тепла $q = -x \frac{\partial T}{\partial n}$ на границе жидкости (производная берётся по нормали к поверхности тела).

Коэффициент теплопередачи является размерной величиной. В качестве безразмерной величины, характеризующей теплопередачу, пользуются так называемым числом Нуссельта¹⁾

$$N = \frac{\alpha l}{\chi}. \quad (53,7)$$

¹⁾ Пользуются также безразмерным «числом теплопередачи», определяемым как

$$K_h = \frac{\alpha}{\rho c_p U} = \frac{N}{R P}.$$

Из соображений подобия следует, что для каждого данного типа конвекционного движения число Нуссельта является определённой функцией только от чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$N = f(R, P). \quad (53,8)$$

Эта функция приобретает тривиальный вид при конвекции с достаточно малыми числами Рейнольдса. Малым R соответствуют малые скорости движения. Поэтому в первом приближении в уравнении (53,2) можно пренебречь членом, содержащим скорость, так что распределение температуры определяется уравнением $\Delta T = 0$, т. е. обычным уравнением стационарной теплопроводности в неподвижной среде. Коэффициент теплопередачи не может, очевидно, зависеть теперь ни от скорости, ни от вязкости жидкости и потому должно быть просто

$$N = \text{const.}, \quad (53,9)$$

причём при вычислении этой постоянной можно рассматривать жидкость как неподвижную.

З а д а ч а

Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, температура стенки которой меняется вдоль длины трубы по линейному закону.

Решение. Условия течения одинаковы во всех сечениях трубы, и распределение температуры можно искать в виде $T = Az + f(r)$, где Az — температура стенки (выбраны цилиндрические координаты с осью z по оси трубы). Для скорости имеем согласно (17,9) $v_z = v = 2v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, где v_m — средняя скорость. Подставляя это в (53,2), находим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = \frac{2v_m A}{\chi} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $f = 0$ при $r = R$, есть

$$f(r) = -\frac{v_m A R^3}{2\chi} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right].$$

Плотность потока тепла равна

$$q = \chi \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{2} \rho c_p v_m R A.$$

Она не зависит от коэффициента теплопроводности.

§ 54. Теплопередача в пограничном слое

Распределение температуры в жидкости при очень больших числах Рейнольдса обнаруживает особенности, аналогичные тем, которыми обладает и само распределение скоростей. Очень большие значения R эквивалентны очень малой вязкости. Но поскольку число $P = \frac{\nu}{\chi}$ не

бывает очень малым, то вместе с ν должен рассматриваться как очень малый и коэффициент температуропроводности χ . Это соответствует тому, что при достаточно больших скоростях движения жидкость может приближённо рассматриваться как идеальная, — в идеальной жидкости должны отсутствовать как процессы внутреннего трения, так и процессы теплопроводности.

Такое рассмотрение, однако, опять будет неприменимо в пристеночном слое жидкости, поскольку при нём не будут выполняться на поверхности тела ни граничное условие прилипания, ни условие одинаковости температур жидкости и тела. В результате в пограничном слое будет происходить наряду с быстрым падением скорости также и быстрое изменение температуры жидкости до значения, равного температуре поверхности твёрдого тела. Пограничный слой будет характеризоваться наличием в нём больших градиентов как скорости, так и температуры.

Что касается распределения температуры в основном объёме жидкости, то легко видеть, что при обтекании нагретого тела (при больших R) нагревание жидкости будет происходить практически только в области следа, между тем как вне следа температура жидкости не изменится. Действительно, при очень больших R процессы теплопроводности в основном потоке не играют практически никакой роли. Поэтому температура изменится только в тех местах пространства, в которые попадает при своём движении нагретая в пограничном слое жидкость. Но мы знаем (см. § 34), что из пограничного слоя линии тока выходят в область основного потока только за линией отрыва, где они попадают в область турбулентного следа. Из области же следа линии тока в окружающее пространство уже не выходят. Таким образом, текущая мимо поверхности нагретого тела в пограничном слое жидкость попадает целиком в область следа, в котором и остаётся. Мы видим, что тепло оказывается распределённым в тех же областях, в которых имеется отличный от нуля ротор скорости.

Внутри самой турбулентной области происходит весьма интенсивный теплообмен, обусловленный сильным перемешиванием жидкости, которое характерно для всякого турбулентного движения. Такой механизм теплопередачи можно назвать турбулентной теплопроводностью и характеризовать соответствующим коэффициентом $\chi_{\text{турб}}$, подобно тому как мы ввели понятие о коэффициенте турбулентной вязкости $\eta_{\text{турб}}$ (§ 31). По порядку величины коэффициент «турбулентной температуропроводности» определяется такой же формулой, как и $\nu_{\text{турб}}$ (31,2):

$$\chi_{\text{турб}} \sim l \Delta u.$$

Таким образом, процессы теплопередачи в ламинарном и турбулентном потоках являются принципиально различными. В предельном случае сколь угодно малых вязкости и теплопроводности в ламинарном потоке процессы теплопередачи вообще отсутствуют, и температура жидкости в каждом месте пространства не меняется. Напротив,

в турбулентно движущейся жидкости в том же предельном случае теплопередача происходит и приводит к быстрому выравниванию температуры в различных участках потока.

Необходимо отметить, что когда мы говорим о температуре жидкости, совершающей турбулентное движение, то подразумевается усреднённое по времени значение температуры. Истинная температура испытывает в каждой точке пространства крайне нерегулярное изменение со временем такого же характера, какое испытывает и скорость движения.

Рассмотрим сначала теплопередачу в ламинарном пограничном слое. Уравнения движения (39,10) сохраняют свой вид. Аналогичное упрощение должно быть произведено теперь и для уравнения (53,2). Написанное в раскрытом виде это уравнение имеет вид (все величины не зависят от координаты z):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

В правой его части можно пренебречь производной $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, так что остаётся

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (54,1)$$

Из сравнения этого уравнения с первым из уравнений (39,10) ясно, что если число Прандтля — порядка единицы, то порядок величины δ толщины слоя, в котором происходит падение скорости v_x и изменение температуры T , будет попрежнему определяться полученными в § 39 формулами, т. е. будет обратно пропорционален \sqrt{R} . Поток тепла $q = -\chi \frac{\partial T}{\partial n}$ равен по порядку величины $q \sim \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta}$. Поэтому мы приходим к результату, что q , а вместе с ним и число Нуссельта, прямо пропорционально \sqrt{R} . Зависимость же N от P остаётся неопределённой. Таким образом, получаем:

$$N = \sqrt{R} f(P). \quad (54,2)$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент теплопередачи α обратно пропорционален корню из размеров l тела.

Перейдём теперь к теплопередаче в турбулентном пограничном слое. При этом удобно, как и в § 42, рассмотреть бесконечный плоскопараллельный турбулентный поток, текущий вдоль бесконечной плоской поверхности. Поперечный градиент температуры $\frac{dT}{dy}$ в таком потоке может быть определён из таких же соображений размерности, какие были использованы для нахождения градиента скорости $\frac{du}{dy}$. Обозначим посредством q плотность потока тепла вдоль оси y ,

вызванного наличием градиента температуры. Этот поток является такой же постоянной (не зависящей от y) величиной, какой является поток импульса σ , и наряду с ним может рассматриваться как заданный параметр, определяющий свойства потока. Кроме того, мы имеем геперь в качестве параметров плотность ρ и теплоёмкость c_p единицы массы жидкости. Вместо σ введём в качестве параметра величину v_* ; q и c_p обладают размерностями соответственно $\text{эрг/сек} \cdot \text{см}^2 = \text{г/сек}^3$ и $\text{эрг/г} \cdot \text{град} = \text{см}^2/\text{сек}^2 \cdot \text{град}$. Что касается коэффициентов вязкости и теплопроводности, то они при достаточно больших R не могут входить в $\frac{dT}{dy}$ явно.

В силу упоминавшейся уже в § 53 однородности уравнений по температуре можно изменить температуру в любое число раз без того, чтобы нарушить уравнения. Но при изменении температуры должен во столько же раз измениться и поток тепла. Поэтому q и T должны быть пропорциональны друг другу. Но из q , v_* , ρ , c_p и y можно составить всего только одну величину, которая имеет размерность град/см и в то же время пропорциональна q . Такой величиной является $\frac{q}{\rho c_p v_* y}$. Поэтому должно быть

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p v_* y},$$

где β есть численная постоянная, которая должна быть определена экспериментально¹⁾. Отсюда имеем:

$$T = \beta \frac{q}{\rho c_p v_*} (\ln y + c). \quad (54,3)$$

Таким образом, температура, как и скорость, распределена по логарифмическому закону. Входящая сюда постоянная интегрирования c должна, как и при выводе (42,7), быть определена из условий в вязком подслое. Полная разность между температурой жидкости в данной точке и температурой стенки (которую мы принимаем условно за нуль) складывается из падения температуры в турбулентном слое и её падения в вязком подслое. Логарифмическим законом (54,3)

¹⁾ Здесь κ есть постоянная, входящая в логарифмический профиль скоростей (42,4). При таком определении β есть отношение $\beta = \nu_{\text{турб}}/\chi_{\text{турб}}$, где $\nu_{\text{турб}}$ и $\chi_{\text{турб}}$ — коэффициенты в соотношениях

$$q = \rho c_p \chi_{\text{турб}} \frac{dT}{dy}, \quad \sigma = \rho \nu_{\text{турб}} \frac{du}{dy}.$$

Из одновременных измерений профиля скоростей и температур в трубах и при обтекании плоских пластинок для β получается значение около 0,7. Укажем в этой связи, что аналогичные измерения в турбулентном следе за нагретым телом дают для отношения $\nu_{\text{турб}}/\chi_{\text{турб}}$ в свободном турбулентном потоке значение около 0,5.

определяется только первое из них. Поэтому, если написать (54,3) в виде

$$T = \beta \frac{q}{\chi \rho c_p v_*} \left(\ln \frac{y v_*}{\nu} + \text{const.} \right),$$

введя под знаком логарифма множителем толщину y_0 , то const. (умноженная на множитель, стоящий перед скобкой) должна представлять собой изменение температуры в вязком подслое. Это изменение зависит, конечно, и от коэффициентов ν и χ . Поскольку const. есть величина безразмерная, то она должна иметь вид некоторой функции от числа R , являющегося единственной безразмерной комбинацией, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин ν , χ , ρ , v_* , c_p (что касается потока тепла q , то он не может входить в const., поскольку T должно быть пропорционально q , а q входит уже в множитель перед скобкой). Таким образом, получаем закон распределения температуры в виде

$$* T = \beta \frac{q}{\chi \rho c_p v_*} \left[\ln \frac{v_* y}{\nu} + f(P) \right]. \quad (54,4)$$

С помощью этой формулы можно рассчитать теплопередачу при турбулентном течении по трубе, при турбулентном обтекании плоской пластинки и т. п. Мы не станем останавливаться здесь на этом.

Задачи

1. Определить предельный закон зависимости числа Нуссельта от числа Прандтля в ламинарном пограничном слое при больших значениях R и больших R .

Решение. При больших R расстояние δ' , на котором происходит изменение температуры, мало по сравнению с толщиной δ слоя, в котором происходит падение скорости v_x (δ' может быть названо толщиной температурного пограничного слоя). Порядок величины δ' может быть получен оценкой членов уравнения (54,1). На расстоянии от $y = 0$ до $y \sim \delta'$ температура испытывает изменение порядка полной разности $T_1 - T_0$ температур жидкости и твёрдого тела, а скорость v_x на том же расстоянии испытывает изменение порядка $U \delta' / \delta$ (полное изменение порядка U скорость испытывает на расстоянии δ). Поэтому при $y \sim \delta'$ члены уравнения (54,1) порядка величины

$$\chi \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \sim \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta'^2}, \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} \sim U \frac{\delta'}{\delta} \frac{T_1 - T_0}{l}.$$

Сравнение обоих выражений даёт $\delta'^3 \sim \chi \frac{\delta l}{U}$. Подставляя $\delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}$, получаем:

$$\delta' \sim \frac{l}{R^{1/2} P^{1/3}} \sim \frac{\delta}{P^{1/3}}.$$

Таким образом, при больших R толщина температурного пограничного слоя убывает по сравнению с толщиной скоростного пограничного слоя обратно пропорционально кубическому корню из R .

Поток тепла $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{\delta'}$ и окончательно находим искомый предельный закон теплопередачи¹⁾:

$$N = \text{const. } R^{1/2} P^{1/3}.$$

2. Определить предельный вид функции $f(P)$ в логарифмическом законе распределения температуры (54,4) при больших значениях P .

Решение. Согласно сказанному в § 42 поперечная скорость в вязком подслое порядка величины v_* $(y/y_0)^2$, а масштаб турбулентного движения — порядка y^2/y_0 . «Турбулентная температуропроводность», следовательно, — порядка

$$\chi_{\text{турб}} \sim v_* y_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4 \sim v \left(\frac{y}{y_0}\right)^4$$

(мы воспользовались здесь соотношением (42,5); $\chi_{\text{турб}}$ сравнивается по порядку величины с обычным коэффициентом χ на расстояниях порядка $y_1 \sim y_0 P^{-1/4}$. Поскольку $\chi_{\text{турб}}$ очень быстро растёт с y , то ясно, что основное изменение температуры в вязком подслое происходит на расстояниях от стенки порядка y_1 и его можно считать пропорциональным y_1 , т. е. имеющим порядок величины

$$\frac{q y_1}{\kappa} \sim \frac{q y_0}{\kappa P^{1/4}} \sim \frac{q}{\rho c_p v_*} P^{3/4}.$$

Сравнивая с формулой (54,4), находим, что функция $f(P)$ будет иметь вид

$$f(P) = \text{const. } P^{3/4},$$

где const. — численная постоянная²⁾.

§ 55. Нагревание тела в движущейся жидкости

Термометр, погружённый в неподвижную жидкость, показывает температуру, равную температуре жидкости. Если же жидкость движется, то термометр покажет температуру несколько более высокую. Это обуславливается нагреванием благодаря внутреннему трению тормозящейся у поверхности термометра жидкости.

1) Для реальных значений коэффициента теплопроводности различных веществ число Прандтля не достигает тех больших значений, для которых мог бы иметь место этот предельный закон. Такие законы, однако, могут быть применены к конвективной диффузии, описываемой теми же уравнениями, что и конвективная теплопередача, причём роль температуры играет концентрация растворённого вещества, роль теплового потока — поток этого вещества, а «диффузионное число Прандтля» определяется как $P_D = \nu/D$, где D — коэффициент диффузии. Так, для растворов в воде и сходных жидкостях число P_D достигает значений порядка 10^3 , а для растворов в очень вязких растворителях — 10^6 и более.

2) Вычисление постоянного коэффициента в этой формуле для различных конкретных случаев облегчается тем, что благодаря неравенству $\delta' \ll \delta$ при интегрировании уравнения (54,1) в температурном пограничном слое для компонент скорости жидкости можно ограничиться первыми членами их разложения по степеням расстояния y от стенки. Расчёты конвективной диффузии для различных конкретных случаев см. В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, изд. АН СССР, 1952.

Общую задачу можно сформулировать следующим образом. Тело произвольной формы погружается в движущуюся жидкость; по истечении достаточного промежутка времени установится некоторое тепловое равновесие и требуется определить возникающую при этом разность температур $T_1 - T_0$ между ними.

Решение этой задачи определяется уравнением (50,2), в котором, однако, теперь уже нельзя пренебречь членом, содержащим вязкость, как это было сделано в (53,1); именно этот член определяет интересующий нас здесь эффект. Таким образом, для установившегося состояния имеем уравнение

$$\nu \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (55,1)$$

К нему должны быть присоединены уравнения движения (53,3) самой жидкости и, строго говоря, ещё и уравнение теплопроводности внутри твёрдого тела. В предельном случае достаточно малой теплопроводности тела можно пренебречь ею вовсе и температуру каждой точки поверхности тела считать просто равной температуре жидкости в той же точке, получающейся в результате решения уравнения (55,1) с граничным условием $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, т. е. условием исчезновения потока тепла через поверхность тела. В обратном предельном случае достаточно большой теплопроводности тела можно приближённо потребовать одинаковости температуры во всех точках его поверхности; производная $\frac{\partial T}{\partial n}$ при этом, вообще говоря, не обращается в нуль на всей поверхности и следует требовать исчезновения лишь полного потока тепла через всю поверхность тела (т. е. интеграла от $\frac{\partial T}{\partial n}$ по этой поверхности). В обоих этих предельных случаях коэффициент теплопроводности тела не входит явно в решение задачи; ниже мы будем предполагать, что имеем дело с одним из них ¹⁾.

В уравнения (55,1) и (53,3) входят постоянные параметры χ , ν и c_p и, кроме того, в их решение войдут размеры тела l и скорость U набегающего потока. (Разность же температур $T_1 - T_0$ не является теперь произвольным параметром, а должна сама быть определена в результате решения уравнений.) Из этих параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых выберем R и P . Тогда можно утверждать, что искомая разность $T_1 - T_0$ равна какой-либо величине с размерностью температуры (в качестве таковой выберем $\frac{U^2}{c_p}$), умноженной на

¹⁾ И. А. Кибелем получено точное решение для вращения нагретого диска в вязкой жидкости, аналогичное изложенному в § 23 решению при постоянной температуре (см. Прикладная математика и механика, 11, 611, 1947).

функцию от R и P :

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(R, P). \quad (55,2)$$

Легко определить вид этой функции в случае очень малых чисел Рейнольдса, т. е. достаточно малых скоростей U . Тогда член $\nu \nabla^2 T$ в (55,1) мал по сравнению с $\chi \Delta T$, так что уравнение (55,1) упрощается:

$$\chi \Delta T = -\frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (55,3)$$

Температура и скорость испытывают заметное изменение на протяжении расстояний порядка размеров l тела. Поэтому оценка обеих сторон уравнения (55,3) даёт

$$\frac{\chi (T_1 - T_0)}{l^2} \sim \frac{\nu U^2}{c_p l^2},$$

откуда $T_1 - T_0 \sim \frac{\nu}{\chi c_p} U^2$. Таким образом, мы приходим к результату, что при малых R

$$T_1 - T_0 = \text{const.} \cdot P \frac{U^2}{c_p}, \quad (55,4)$$

где const. — численная постоянная, зависящая от формы тела. Отметим, что разность температур оказывается пропорциональной квадрату скорости U .

Некоторые общие заключения о виде функции $f(P, R)$ в (55,2) можно сделать и в обратном предельном случае больших R , когда скорость и температура меняются только в узком пограничном слое. Пусть δ и δ' — расстояния, на которых меняются соответственно скорость и температура; δ и δ' отличаются друг от друга множителем, зависящим от P . В 1 сек. в пограничном слое выделяется благодаря вязкости жидкости количество тепла, равное (на 1 см^2 поверхности тела) интегралу от $\frac{\nu \rho}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$ по толщине слоя (см. (16,3)). Этот интеграл — порядка величины $\nu \rho \frac{U^2}{\delta^2} \delta = \nu \rho \frac{U^2}{\delta}$. С другой стороны, это тепло должно быть равно теплу, теряемому телом и равному потоку $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \sim \chi c_p \rho \frac{T_1 - T_0}{\delta'}$. Сравнивая оба эти выражения, приходим к результату:

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(P). \quad (55,5)$$

Таким образом, и в этом случае функция f оказывается не зависящей от R ; зависимость же её от P остаётся неопределённой.

Задачи

1. Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, стенки которой подерживаются при постоянной температуре T_0 .

Решение. В цилиндрических координатах с осью z по оси трубы имеем: $v_z = v = 2v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$, где v_m — средняя скорость течения. Подстановка в (55,3) приводит к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{16v_m^2}{R^4} \frac{\nu}{\chi c_p} r^2.$$

Решение этого уравнения, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $T = T_0$ при $r = R$, есть

$$T - T_0 = v_m^2 \frac{P}{c_p} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right].$$

2. Определить разность температур между твёрдым шаром и обтекающей его жидкостью при малых числах Рейнольдса; теплопроводность шара предполагается большой.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре шара и полярной осью вдоль направления скорости и натекающего потока. Вычисляя компоненты тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ с помощью формул (15,17) и формулы (20,9) для скорости жидкости, обтекающей шар, получаем уравнение (55,3) в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = - A \frac{R^4}{r^4} \left[\cos^2 \theta \left(3 - \frac{6R^2}{r^2} + \frac{2R^4}{r^4} \right) + \frac{R^4}{r^4} \right],$$

где $A = \frac{9}{4} u^2 \frac{P}{c_p}$. Ищем $T(r, \theta)$ в виде

$$T = f(r) \cos^2 \theta + g(r)$$

и получаем после отделения частей, зависящей и не зависящей от θ , два уравнения для f и g :

$$r^2 f'' + 2rf' - 6f = - A \left(\frac{3R^2}{r^2} - \frac{6R^4}{r^4} + \frac{2R^6}{r^6} \right), \quad r^2 g'' + 2rg' + 2f = - A \frac{R^6}{r^6}.$$

Из первого получаем:

$$f = A \left(\frac{3R^2}{4r^2} + \frac{R^4}{r^4} - \frac{1}{12} \frac{R^6}{r^6} \right) + \frac{c_1 R^3}{r^3}$$

(член вида const. r^2 опускаем как не исчезающий на бесконечности), после чего второе приводит к решению

$$g = - \frac{A}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{R^4}{r^4} + \frac{1}{18} \frac{R^6}{r^6} \right) - \frac{c_1 R^3}{3r^3} + \frac{c_2 R}{r} + c_3.$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из условий

$$T = \text{const.}, \quad \text{и} \quad \int \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$

что эквивалентно требованию $f(R) = 0, \quad g'(R) + \frac{1}{3} f'(R) = 0$; на бесконечности должно быть $T = T_0$. Находим:

$$c_1 = - \frac{5}{3} A, \quad c_2 = \frac{2}{3} A, \quad c_3 = T_0.$$

Для разности температур шара ($T_1 = T(R)$) и жидкости (T_0) получаем:

$$T_1 - T_0 = \frac{5}{8} P \frac{u^2}{c_p}.$$

Заметим, что найденное распределение температуры оказывается удовлетворяющим и условию $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ при $r = R$, т. е. $f'(R) = g'(R) = 0$. Поэтому оно является одновременно и решением той же задачи в случае малой теплопроводности шара.

§ 56. Свободная конвекция

Мы видели в § 3, что если в находящейся в поле тяжести жидкости имеет место механическое равновесие, то распределение температуры в ней должно зависеть только от высоты z : $T = T(z)$. Если же распределение температуры не удовлетворяет этому требованию, являясь в общем случае функцией всех трёх координат, то механическое равновесие в жидкости невозможно. Больше того, даже если $T = T(z)$, то механическое равновесие всё же может оказаться невозможным, если вертикальный градиент температуры направлен вниз и по абсолютной величине превышает определённое предельное значение (§ 4).

Отсутствие механического равновесия приводит к возникновению в жидкости внутренних течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое возникающее в поле тяжести движение называют свободной конвекцией.

Выведем уравнения, описывающие конвекцию. Мы будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это значит, что давление предполагается достаточно мало меняющимся вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Например, в атмосфере, где давление меняется с высотой, это значит, что мы не будем рассматривать слишком высоких её столбов, в которых изменение плотности с высотой становится существенным. Что же касается изменения плотности благодаря неравномерной нагретости жидкости, то этим изменением, конечно, нельзя пренебречь. Именно оно приводит к появлению сил, вызывающих конвекционное движение.

Напишем переменную температуру $T(x, y, z, t)$ в виде $T = T_0 + T'$, где T_0 есть некоторое постоянное среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры T' . Мы будем предполагать, что T' мало по сравнению с T_0 .

Плотность жидкости тоже напишем в виде $\rho = \rho_0 + \rho'$ с постоянным ρ_0 . Ввиду малости изменения температуры T' мало также и вызываемое им изменение плотности ρ' , причём можно написать:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \quad (56,1)$$

Здесь $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ — коэффициент теплового расширения жидкости.

В давлении же $p = p_0 + p'$ величина p_0 не будет постоянной. Это есть давление, соответствующее механическому равновесию при постоянных (равных T_0 и ρ_0) температуре и плотности. Оно меняется

с высотой согласно гидростатическому уравнению

$$\rho_0 = \rho_0 g \tau + \text{const.} \quad (56,2)$$

Начнём с преобразования уравнения Навье-Стокса, которое при наличии поля тяжести имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g},$$

получающийся добавлением к правой стороне (15,7) действующей на единицу массы силы \mathbf{g} . Подставим сюда $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. С точностью до малых первого порядка имеем:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho',$$

или, подставляя (56,1) и (56,2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + g T' \beta.$$

Подставляя это выражение в уравнение Навье-Стокса и опуская индекс у ρ_0 , получаем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \frac{p'}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta g T'. \quad (56,3)$$

В уравнении теплопроводности (50,2) член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, всегда мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T' = \chi \Delta T'. \quad (56,4)$$

Уравнения (56,3) и (56,4) вместе с уравнением непрерывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ представляют собой полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию.

Для стационарного движения уравнения конвекции принимают вид

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \frac{p'}{\rho} - g \beta T' + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (56,5)$$

$$\mathbf{v} \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (56,6)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (56,7)$$

В эту систему пяти уравнений, определяющих неизвестные функции \mathbf{v} , $\frac{p'}{\rho}$, T' , входят три параметра: ν , χ и $g\beta$. Кроме того, в их решение входит характеристическая длина l и разность $T_1 - T_0$ температур твёрдого тела и жидкости (вдали от тела). Характеристическая скорость теперь отсутствует, поскольку никакого вынужденного

посторонними причинами потока нет и всё движение жидкости обусловливается её неравномерной нагретостью.

Таким образом, стационарная свободная конвекция в поле тяжести характеризуется пятью параметрами, имеющими следующие размерности:

$$[\chi] = [\nu] = \text{см}^2/\text{сек}, \quad [T_1 - T_0] = \text{град}, \quad [l] = \text{см}, \\ [g\beta] = \text{см}/\text{сек}^2\text{град}.$$

Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве их обычно выбирают число Прандтля $P = \frac{\nu}{\chi}$ и так называемое число Грассхофа:

$$G = \frac{g\beta l^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}. \quad (56,8)$$

Закон подобия для свободной конвекции гласит, следовательно:

$$\nu = \frac{\nu}{l} f\left(\frac{r}{l}, G\right), \quad T = (T_1 - T_0) f\left(\frac{r}{l}, P, G\right). \quad (56,9)$$

Два течения подобны, если их числа Прандтля и Грассхофа одинаковы.

Теплопередачу при конвекции в поле тяжести, как и без учёта тяжести, характеризуют числом Нуссельта. Это число является теперь функцией только от P и G :

$$N = f(P, G). \quad (56,10)$$

Значение числа Грассхофа является важной характеристикой конвекционного движения жидкости. При достаточно малых значениях G свободная конвекция несущественна для процесса теплопередачи в жидкости; теплопередача осуществляется при этом в основном посредством обычной теплопроводности.

Конвекционное движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. Для свободной конвекции не существует числа Рейнольдса (поскольку нет характеристических параметров скорости), и наступление турбулентности определяется числом Грассхофа, — конвекция становится турбулентной при очень больших значениях G .

Весьма своеобразным случаем конвекции является движение, возникающее в жидкости между двумя бесконечными горизонтальными плоскостями, нагретыми до различной температуры (причём температура T_2 нижней плоскости выше температуры T_1 верхней плоскости). Если разность температур $T_2 - T_1$ не слишком велика, то жидкость остаётся неподвижной и возникает режим чистой теплопроводности, причём температура и плотность жидкости являются функциями только от вертикальной координаты z и плотность возрастает снизу вверх. Если же разность $T_2 - T_1$ превышает некоторое критическое значение (зависящее от расстояния l между плоскостями), то такой

режим становится неустойчивым и возникает стационарное конвекционное движение. Момент наступления неустойчивости может быть определён теоретически (см. задачу 5). Критическое значение разности $T_2 - T_1$ определяется значением произведения

$$Gr = \frac{g\beta l^3 (T_2 - T_1)}{\nu\chi}. \quad (56,11)$$

В слое жидкости между двумя твёрдыми плоскостями, поддерживаемыми при постоянной температуре, конвекция должна возникать при $Gr > 1710$. Если же верхняя поверхность жидкости свободна (но тоже поддерживается при постоянной температуре), то конвекция возникает при $Gr > 1100$ 1).

Возникающее конвективное движение имеет своеобразный характер. Уже в силу неограниченности пространства в горизонтальных направлениях очевидно, что движение должно обладать периодичностью в горизонтальной плоскости. Другими словами, всё пространство между граничными плоскостями можно представить себе разделённым на одинаковые правильные призмы, в каждой из которых жидкость движется одинаковым образом. Контуры сечений этих призм горизонтальной плоскостью образуют в ней некоторую «двухмерную решётку». Теоретическое определение симметрии этой решётки весьма затруднительно; экспериментальные же данные свидетельствуют, по видимому, о «гексагональной» симметрии с ячейками в виде шестигранных призм, в середине которых жидкость движется вверх, а по краям — вниз (или наоборот).

При очень больших значениях G стационарная конвекция в свою очередь становится неустойчивой; турбулентность начинается около $G \sim 50\,000$.

Другой аналогичный случай неустойчивости, подробно исследованный Г. А. Остроумовым (1946), представляет конвекция, возникающая в определённых условиях в вертикальной цилиндрической трубе, вдоль которой поддерживается постоянный градиент температуры; здесь тоже существует критическое значение произведения Gr , за которым покоящееся состояние жидкости оказывается неустойчивым (см. задачу 6).

Задачи

1. Определить число Нуссельта при свободной конвекции у плоской вертикальной пластинки. Предполагается, что скорость и разность температур $T' = T - T_0$ (T_0 — температура жидкости на бесконечном расстоянии от

1) Эти условия (при заданном значении разности $T_2 - T_1$) во всяком случае выполняются при достаточно больших l . Во избежание недоразумений следует напомнить, что речь идёт здесь лишь о таких высотах l , при которых несущественно изменение плотности жидкости (или газа) под влиянием поля тяжести. Поэтому к очень высоким столбам газа эти критерии неприменимы. В этом случае следует применять критерий, выведенный в § 4, из которого видно, что конвекция может отсутствовать при любой высоте столба, если градиент температуры не слишком велик,

пластинки) заметно отличны от нуля лишь в тонком пограничном слое у поверхности пластинки (*Польгаузен*).

Решение. Выбираем начало координат на нижнем краю пластинки, ось x вертикально в плоскости пластинки, а ось y — перпендикулярно к ней. В пограничном слое давление не меняется вдоль оси y (ср. § 39) и потому везде равно гидростатическому давлению $p_0(x)$, так что $p' = 0$. С обычной для пограничного слоя точностью уравнения (56,5) — (56,7) принимают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0); \quad (1)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями $v_x = v_y = 0$, $T = T_1$ при $y = 0$ (T_1 — температура пластинки), $v_x = 0$, $T = T_0$ при $y = \infty$. Эти уравнения могут быть преобразованы в дифференциальные уравнения в полных производных введением в качестве независимой переменной величины

$$\xi = C \frac{y}{x^{1/4}}, \quad C = \left[\frac{g(T_1 - T_0)\beta}{4\nu^2} \right]^{1/4}. \quad (4)$$

Полагаем

$$v_x = 4\nu C^2 \sqrt{x} \varphi'(\xi), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0) \theta(\xi). \quad (5)$$

Тогда (3) даёт $v_y = \nu C x^{-1/4} (\xi \varphi' - 3\varphi)$, а (1) и (2) дают уравнения для φ и θ :

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3P\varphi\theta' = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $\varphi'(\infty) = 0$, $\theta(\infty) = 0$.

Из (4) — (5) следует, что толщина пограничного слоя — порядка $\delta \sim \frac{x^{1/4}}{C}$. Условие применимости решения гласит поэтому $\delta \ll l$ (где l — высота пластинки) или $G^{1/4} \gg 1$. Полный поток тепла (отнесённый к единице площади пластинки) равен

$$q = -\frac{1}{l} \int_0^l x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx = -\frac{4x}{3} \theta'(0, P) C (T_1 - T_0) l^{-1/4}.$$

Число Нуссельта равно

$$N = f(P) G^{1/4},$$

где функция $f(P)$ определяется решением уравнений (6).

2. Горячая турбулентная затопленная струя газа изгибается под влиянием поля тяжести; требуется определить её форму (*Г. Н. Абрамович*, 1938).

Решение. Пусть T' — некоторое среднее (по сечению струи) значение разности температур в струе и в окружающем газе, u — некоторое среднее значение скорости газа в струе, а l — расстояние вдоль струи от точки её выхода (l предполагается большим по сравнению с размерами

выходного отверстия струи). Условие постоянства потока тепла Q вдоль струи гласит: $Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \text{const.}$, а поскольку радиус турбулентной струи пропорционален l (ср. § 35), то

$$T' u l^2 = \text{const.} \sim \frac{Q}{\rho c_p} \quad (1)$$

(заметим, что без учёта поля тяжести $u \propto 1/l$ — см. (35,3) — и из (1) следует, что $T' \propto 1/l$).

Вектор потока импульса через поперечное сечение струи пропорционален $\rho u^2 R^2 \mathbf{n} \sim \rho u^2 l^2 \mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления струи). Его горизонтальная составляющая постоянна вдоль струи:

$$u^2 l^2 \cos \theta = \text{const.} \quad (2)$$

(θ — угол между \mathbf{n} и горизонталью), а изменение вертикальной компоненты определяется действующей на струю «подъёмной силой». Последняя пропорциональна

$$\rho \beta T' R^2 g \sim \rho \beta T' l^2 g \sim \frac{\beta g Q}{c_p} \frac{1}{u}.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{d}{dl} (l^2 u^2 \sin \theta) \sim \frac{\beta g Q}{\rho c_p u}. \quad (3)$$

Ввиду (2) отсюда следует

$$\frac{d \operatorname{tg} \theta}{dl} = \text{const.} \cdot l \sqrt{\cos \theta},$$

откуда окончательно

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos \theta)^{5/2}} = \text{const.} \cdot l^2 \quad (4)$$

(θ_0 — определяет направление струи в точке её выхода).

В частности, если на всём протяжении струи изменение угла θ незначительно, то (4) даёт

$$\theta - \theta_0 = \text{const.} \cdot l^2.$$

Это значит, что струя имеет форму кубической параболы, в которой отклонение d от прямолинейной траектории $d = \text{const.} \cdot l^3$.

3. От неподвижного горячего тела поднимается вверх турбулентная (число Грасгофа велико) струя нагретого газа. Определить закон изменения скорости и температуры струи с высотой (*Я. Б. Зельдович, 1937*).

Решение. Как и в предыдущем случае, радиус струи пропорционален расстоянию от источника, и аналогично (1) имеем:

$$T' u z^2 = \text{const.},$$

а вместо (3)

$$\frac{d}{dz} (z^2 u^2) = \frac{\text{const.}}{u}$$

(z — высота над телом, предполагающаяся большой по сравнению с его размерами). Интегрируя последнее уравнение, найдём:

$$u \propto \frac{1}{z^{1/3}},$$

а для температуры соответственно

$$T' \propto \frac{1}{z^{5/3}}.$$

4. То же для ламинарной свободно восходящей конвективной струи (Я. Б. Зельдович, 1937).

Решение. Наряду с соотношением

$$T' u R^2 = \text{const.},$$

выражающим постоянство потока тепла, имеем соотношения

$$\frac{u^2}{z} \sim \frac{\nu u}{R^2} \sim g \beta T',$$

вытекающие из уравнения (56,5). Из этих соотношений находим следующие законы изменения радиуса, скорости и температуры струи с высотой:

$$R \propto \sqrt{z}, \quad u = \text{const.}, \quad T' \propto \frac{1}{z}.$$

Заметим, что число $G \propto T' R^3 \propto \sqrt{z}$, т. е. растёт с высотой; поэтому на некоторой высоте струя должна стать турбулентной.

5. Вывести уравнения, определяющие начало возникновения стационарной конвекции между двумя горизонтальными плоскостями, поддерживаемыми при заданных температурах (Рэле́й, 1916).

Решение. На неподвижную жидкость с постоянным вертикальным градиентом температуры $\frac{\partial T}{\partial z} = -A < 0$ накладывается возмущение, пропорциональное $e^{-i\omega t}$. Неподвижный режим неустойчив, если среди допустимых значений ω имеется хотя бы одно с положительной мнимой частью. Поэтому момент наступления неустойчивости определяется моментом появления решений с равной нулю мнимой частью ω . В данном случае речь идёт о возникновении, в результате неустойчивости, стационарного конвективного движения; поэтому следует искать решения, у которых и действительная часть ω равна нулю, т. е. решения, от времени вообще не зависящие.

В уравнениях (56,5) — (56,7) малыми величинами являются скорость \mathbf{v} возмущающего движения и вызванное им изменение давления p' ; температуру же напишем в виде $T' = -Az + \tau$, где возмущение τ мало (изменение давления, связанное с наличием постоянного градиента температуры, предполагаем включённым в p_0). Тогда получим, опуская члены второго порядка:

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{v} &= \nabla \frac{p'}{\rho} + \beta g \tau, \\ \chi \Delta \tau &= -A v_z, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Исключая из этих уравнений переменные \mathbf{v} и p'/ρ , получим в результате уравнение для одной переменной τ :

$$\Delta^3 \tau = \frac{\gamma}{l^4} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

где введено обозначение $\gamma = l^4 g A / \nu \chi = \text{PG}$; l — расстояние между плоскостями.

Граничные условия к уравнениям (1) на твёрдой поверхности гласят

$$\tau = 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Последнее из них следует из уравнения непрерывности ввиду того, что должно быть $v_x = v_y = 0$ при всех x, y . Ввиду второго из уравнений (1) условия для v_z можно заменить условиями для высших производных от τ , заменив v_z на $\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}$.

Ищем τ в виде $e^{ikr} f(z)$, где k — вектор в плоскости x, y , и получаем для $f(z)$ уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 f + \frac{\gamma k^2}{l^4} f = 0.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию функций $\text{ch} \frac{\mu z}{l}$ и $\text{sh} \frac{\mu z}{l}$, где

$$\mu^2 = k^2 l^2 - \gamma^{1/3} (kl)^{2/3} \sqrt[3]{\bar{1}},$$

с тремя различными значениями $\sqrt[3]{\bar{1}}$. Коэффициенты этой комбинации определяются граничными условиями, приводящими к системе алгебраических уравнений, условие совместности которых и определит зависимость $lk(\gamma)$. Обратная функция $\gamma = \gamma(kl)$ имеет минимум при некотором значении kl ; соответствующее значение $\gamma = \text{PG}$ и определит искомый критерий возникновения неустойчивости, а значение k — периодичность (но не симметрию) в плоскости x, y возникающего движения¹⁾.

6. Определить начало возникновения стационарной конвекции в неподвижной жидкости в вертикальной цилиндрической трубе, вдоль которой поддерживается постоянный градиент температуры (*Г. А. Остроумов*, 1946).

Решение. Ищем решение уравнений (1) задачи 5, в котором конвекционная скорость \mathbf{v} направлена везде по оси трубы (оси z), а вся картина движения постоянна вдоль этой оси, т. е. величины $v_z = v$, τ , $\frac{\partial p'}{\partial z}$ зависят только от координат в плоскости сечения трубы. Уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \quad \nu \Delta v = -g\beta\tau + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z},$$

$$\gamma \Delta \tau = -Av$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$). Первые два уравнения показывают, что $\frac{\partial p'}{\partial z} = \text{const.}$, а исключая из остальных уравнений τ , получим:

$$\Delta^2 v = \frac{\gamma}{R^4} v, \quad (1)$$

где снова положено $\gamma = AR^4 g\beta / \chi \nu = \text{PG}$ (R — радиус трубы). На поверхности трубы должны удовлетворяться условие $v = 0$ и условие непрерывности теплового потока. Кроме того, должен быть равен нулю полный поток жидкости через поперечное сечение трубы.

Уравнение (1) имеет решения вида $\cos n\varphi J_n(kr)$ и $\cos n\varphi I_n(kr)$ (J_n, I_n — функции Бесселя вещественного и мнимого аргументов, r, φ — полярные координаты в плоскости сечения трубы, $kR = \gamma^{1/4}$). Моменту возникновения

¹⁾ Подробное изложение вычислений можно найти в статье *A. Pellew, R. Southwell, Proc. Roy. Soc. (A), 176, 312, 1940*,

конвекции отвечает то решение, которому соответствует наименьшее значение γ . Оказывается, что таковым является решение с $n = 1$:

$$v = v_0 \cos \varphi [J_1(kr) I_1(kR) - I_1(kr) J_1(kR)],$$

$$\tau = v_0 \frac{\nu k^2}{g\beta} \cos \varphi [J_1(kr) I_1(kR) + I_1(kr) J_1(kR)]$$

(причём градиент давления $\frac{\partial p'}{\partial z}$ отсутствует). Здесь удовлетворено условие $v = 0$ при $r = R$ и тождественно исчезает полный поток жидкости через сечение трубы. В предельном случае теплоизолирующих стенок трубы должно быть выполнено также условие $\frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$ при $r = R$, откуда

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} + \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} = \frac{2}{kR}.$$

Наименьший корень этого уравнения даёт искомое критическое значение $\gamma = (kR)^4 = 67,4$. В обратном же предельном случае бесконечной теплопроводности стенок должно быть $\tau = 0$ при $r = R$, для чего требуется $J_1(kR) = 0$; отсюда критическое значение $\gamma = 215,8^1$.

¹⁾ Более подробное исследование вопроса см. книгу: Г. А. Остроумов, Свободная конвекция в условиях внутренней задачи, Гостехиздат, 1952.

ГЛАВА VI ДИФФУЗИЯ

§ 57. Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

Во всём предыдущем изложении предполагалось, что жидкость полностью однородна по своему составу. Если же мы имеем дело со смесью жидкостей или газов, состав которой меняется вдоль её объёма, то уравнения гидродинамики существенно изменяются.

Мы ограничимся рассмотрением смесей с двумя только компонентами. Состав смеси мы будем описывать концентрацией c , определяемой как отношение массы одного из входящих в состав смеси веществ к полной массе жидкости в данном элементе объёма.

С течением времени распределение концентрации в жидкости, вообще говоря, меняется. Изменение концентрации происходит двумя путями. Во первых, при макроскопическом движении жидкости каждый данный её участок передвигается как целое с неизменным составом. Этим путём осуществляется чисто механическое перемешивание жидкости; хотя состав каждого передвигающегося участка жидкости не меняется, но в каждой данной неподвижной точке пространства концентрация находящейся в этом месте жидкости будет со временем меняться. Если отвлечься от могущих одновременно иметь место процессов теплопроводности и внутреннего трения, то такое изменение концентрации является термодинамически обратимым процессом и не ведёт к диссипации энергии.

Во-вторых, изменение состава может происходить путём молекулярного переноса веществ смеси из одного участка жидкости в другой. Выравнивание концентрации путём такого непосредственного изменения состава каждого из участков жидкости называется диффузией. Диффузия является процессом необратимым и представляет собой наряду с теплопроводностью и вязкостью один из источников диссипации энергии в жидкой смеси.

Будем обозначать посредством ρ полную плотность жидкости. Уравнение непрерывности для полной массы жидкости сохраняет прежний вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (57,1)$$

Оно означает, что полная масса жидкости в некотором объёме может измениться только путём втекания или вытекания жидкости из этого объёма. Следует подчеркнуть, что, строго говоря, для жидкой смеси самое понятие скорости должно быть определено заново. Написав уравнение непрерывности в виде (57,1), мы тем самым определили скорость в соответствии с прежним определением как полный импульс единицы массы жидкости.

Не меняется также и уравнение Навье-Стокса (15,5). Введём теперь остальные гидродинамические уравнения для смесей.

При отсутствии диффузии состав каждого данного элемента жидкости оставался бы неизменным при его передвижении. Это значит, что полная производная $\frac{dc}{dt}$ была бы равна нулю, т. е. имело бы место уравнение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c = 0.$$

Это уравнение можно написать, используя (57,1), как

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \rho c) = 0,$$

т. е. в виде уравнения непрерывности для одного из веществ в смеси (ρc есть масса одного из веществ смеси в единице объёма). Написанное в интегральном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

оно означает, что изменение количества данного вещества в некотором объёме равно количеству этого вещества, переносимому движущейся жидкостью через поверхность объёма.

При наличии диффузии наряду с потоком $\mathbf{v} \rho c$ данного вещества вместе со всей жидкостью имеется ещё и другой поток, который приводит к переносу веществ в смеси даже при отсутствии движения жидкости в целом. Пусть \mathbf{i} есть плотность этого диффузионного потока, т. е. количество рассматриваемого вещества, переносимого путём диффузии в единицу времени через единицу поверхности¹⁾. Тогда для изменения количества этого вещества в некотором объёме имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \, d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \, d\mathbf{f},$$

или в дифференциальном виде

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = - \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{i}. \quad (57,2)$$

¹⁾ Сумма плотностей потоков обоих веществ должна быть равна $\rho \mathbf{v}$. Поэтому если плотность потока одного из них есть $\rho c \mathbf{v} + \mathbf{i}$, то другого: $\rho \mathbf{v} (1 - c) - \mathbf{i}$.

С помощью (57,1) это «уравнение непрерывности» для одного из веществ в смеси можно написать в виде

$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c \right) = - \operatorname{div} i. \quad (57,3)$$

Для вывода ещё одного уравнения повторим произведённый в § 49 вывод, учитывая, что термодинамические величины жидкости являются теперь функциями также и от концентрации.

При вычислении (в § 49) производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)$$

с помощью уравнений движения нам приходилось, в частности, преобразовывать члены $\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ и $-\mathbf{v} \nabla p$. Это преобразование теперь изменится в связи с тем, что термодинамические тождества для энергии и тепловой функции содержат дополнительный член с дифференциалом концентрации. Именно, эти тождества имеют вид

$$d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc,$$

$$d\omega = T ds + \frac{1}{\rho} d\rho + \mu dc,$$

где μ — соответствующим образом определённый химический потенциал смеси ¹⁾. Соответственно этому в производную $\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ войдёт теперь дополнительный член $\rho \mu \frac{\partial c}{\partial t}$. Написав второе из термодинамических соотношений в виде

$$dp = \rho d\omega - p T ds - \rho \mu dc,$$

мы видим, что в член $-\mathbf{v} \nabla p$ войдёт дополнительный член $\rho \mu \nabla c$.

¹⁾ Из термодинамики известно, что для смеси двух веществ термодинамическое тождество имеет вид

$$d\varepsilon = T ds - p dV + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2,$$

где n_1, n_2 — числа частиц обоих веществ в 1 г смеси, а μ_1, μ_2 — химические потенциалы этих веществ. Числа n_1 и n_2 удовлетворяют соотношению $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$, где m_1, m_2 — массы частиц обоёго рода. Если ввести в качестве переменной концентрацию $c = n_1 m_1$, то мы получим:

$$d\varepsilon = T ds - p dV + \left(\frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2} \right) dc.$$

Сравнивая с приведённым в тексте соотношением, мы видим, что «химический потенциал» μ , которым мы пользуемся, связан с обычными потенциалами μ_1 и μ_2 посредством

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2}.$$

Таким образом, к выражению (49,3) надо прибавить

$$\rho\mu \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c \right).$$

Согласно уравнению (57,3) его можно написать в виде

$$-\mu \operatorname{div} \mathbf{i}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho z \right) = \\ = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') + \mathbf{q} \right] + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) - \\ - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \mu \operatorname{div} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (57,4)$$

Вместо $-\mathbf{v} \nabla T$ мы пишем теперь некоторый поток тепла \mathbf{q} , который может зависеть не только от градиента температуры, но и от градиента концентрации (см. следующий параграф). Сумму двух последних членов с правой стороны равенства напомним в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{q} - \mu \operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div} (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) + \mathbf{i} \nabla \mu.$$

Выражение

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') + \mathbf{q},$$

стоящее под знаком div в (57,4), есть, по определению \mathbf{q} , полный поток энергии в жидкости. Первый член есть обратимый поток энергии, связанный просто с перемещением жидкости как целого, а сумма $-(\mathbf{v} \sigma') + \mathbf{q}$ есть необратимый поток. При отсутствии макроскопического движения вязкий поток $(\mathbf{v} \sigma')$ исчезает и тепловой поток есть просто \mathbf{q} .

Уравнение закона сохранения энергии гласит:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho z \right) = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') + \mathbf{q} \right]. \quad (57,5)$$

Вычитая его почленно из (57,4), получим искомое уравнение

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div} (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) - \mathbf{i} \nabla \mu, \quad (57,6)$$

обобщающее выведенное ранее уравнение (49,4).

Мы получили, таким образом, полную систему гидродинамических уравнений для жидких смесей. Число уравнений в этой системе на единицу больше, чем в случае чистой жидкости, соответственно тому, что имеется ещё одна неизвестная функция — концентрация. Этими уравнениями являются: уравнения непрерывности (57,1), уравнения Навье-Стокса, «уравнение непрерывности» для одной из компонент смеси (57,2) и уравнение (57,6), определяющее изменение энтропии. Надо, впрочем, отметить, что уравнения (57,2) и (57,6) определяют пока по существу только вид соответствующих гидродинамических

уравнений, поскольку в них входят неопределённые величины: потоки \mathbf{i} и \mathbf{q} . Эти уравнения делаются определёнными лишь при подстановке \mathbf{i} и \mathbf{q} , выраженных через градиенты температуры и концентрации; соответствующие выражения будут получены в § 58.

Для изменения полной энтропии жидкости вычисление, полностью аналогичное произведённому в § 49 (с использованием (57,6) вместо (49,4)), приводит к результату

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = - \int \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{i}\mu) \nabla T}{T^2} dV - \int \frac{\mathbf{i} \nabla \mu}{T} dV + \dots \quad (57,7)$$

(члены, обусловленные вязкостью, для краткости не выписываем).

§ 58. Коэффициенты диффузии и термодиффузии

Диффузионный поток вещества \mathbf{i} и тепловой поток \mathbf{q} возникают в результате наличия в жидкости градиентов концентрации и температуры. Не следует при этом думать, что \mathbf{i} зависит только от градиента концентрации, а \mathbf{q} — только от градиента температуры. Напротив, каждый из этих потоков зависит, вообще говоря, от обоих указанных градиентов.

Если градиенты температуры и концентрации невелики, то можно считать, что \mathbf{i} и \mathbf{q} являются линейными функциями от $\nabla \mu$ и ∇T ¹⁾. Соответственно этому напомним \mathbf{i} и \mathbf{q} в виде линейных функций от градиентов μ и T :

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \\ \mathbf{q} &= -\delta \nabla \mu - \gamma \nabla T + \mu \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Между коэффициентами β и δ существует простое соотношение, являющееся следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов. Содержание этого общего принципа заключается в следующем²⁾. Рассмотрим какую-нибудь замкнутую систему и пусть x_1, x_2, \dots — некоторые величины, характеризующие состояние системы. Их равновесные значения определяются тем, что в статистическом равновесии энтропия S всей системы должна иметь максимум, т. е. должно быть $X_i = 0$, где X_i обозначают производные:

$$X_i = - \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (58,1)$$

Предположим, что система находится в состоянии, близком к равновесному. Это значит, что все x_i лишь мало отличаются от своих равновесных значений, а величины X_i малы. В системе будут

¹⁾ От градиента давления (при заданных $\nabla \mu$ и ∇T) потоки \mathbf{q} и \mathbf{i} не зависят по той же причине, которая была указана для \mathbf{q} уже в § 49.

²⁾ См. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, 3-е изд., § 118, Гостехиздат, 1951.

происходить процессы, стремящиеся привести её в состояние равновесия. Величины x_i являются при этом функциями времени, а скорость их изменения определяется производными по времени \dot{x}_i ; представим последние в виде функций от X_i и разложим эти функции в ряд. С точностью до членов первого порядка имеем:

$$\dot{x}_i = - \sum_k \gamma_{ik} X_k. \quad (58,2)$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов утверждает, что величины γ_{ik} (называемые кинетическими коэффициентами) симметричны по индексам i, k :

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad (58,3)$$

Скорость изменения энтропии S равна

$$\dot{S} = - \sum_i X_i \dot{x}_i.$$

Пусть теперь сами величины x_i различны в разных точках тела, т. е. каждый элемент объёма тела должен характеризоваться своими значениями величин x_i . Другими словами, будем рассматривать x_i как функции от координат. Тогда в выражении для \dot{S} , кроме суммирования по i , надо произвести также и интегрирование по всему объёму системы, т. е.

$$\dot{S} = - \int \sum_i X_i \dot{x}_i dV. \quad (58,4)$$

Что касается зависимости между X_i и \dot{x}_i , то обычно можно утверждать, что значения \dot{x}_i в каждой данной точке системы зависят только от значений величин X_i в этой же точке. Если это условие выполняется, то можно писать связь между \dot{x}_i и X_i для каждой точки в системе, и мы возвращаемся к прежним соотношениям.

В данном случае выберем в качестве величин \dot{x}_i компоненты векторов \mathbf{i} и $\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}$. Тогда из сравнения (57,7) с (58,4) видно, что роль величин X_i будут играть соответственно компоненты векторов $\frac{1}{T} \nabla \mu$ и $\frac{1}{T^2} \nabla T$. Кинетическими же коэффициентами γ_{ik} будут являться коэффициенты при этих векторах в равенствах

$$\mathbf{i} = - \alpha T \left(\frac{\nabla \mu}{T} \right) - \beta T^2 \left(\frac{\nabla T}{T^2} \right),$$

$$\mathbf{q} - \mu \mathbf{i} = - \delta T \left(\frac{\nabla \mu}{T} \right) - \gamma T^2 \left(\frac{\nabla T}{T^2} \right).$$

В силу симметрии кинетических коэффициентов должно быть $\beta T^2 = \delta T$, т. е.

$$\delta = \beta T.$$

Это и есть искомое соотношение. Мы можем поэтому написать потоки \mathbf{i} и \mathbf{q} в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \\ \mathbf{q} &= -\beta T \nabla \mu - \gamma \nabla T + \mu \mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (58,5)$$

всего с тремя независимыми коэффициентами: α , β , γ . В выражении для теплового потока удобно исключить градиент $\nabla \mu$, выразив его через \mathbf{i} и ∇T . Сделав это, получим:

$$\mathbf{i} = -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \quad (58,6)$$

$$\mathbf{q} = \left(\mu + \frac{\beta T}{\alpha} \right) \mathbf{i} - \chi \nabla T, \quad (58,7)$$

где введено обозначение

$$\chi = \gamma - \frac{\beta^2 T}{\alpha}. \quad (58,8)$$

Если поток вещества \mathbf{i} отсутствует, то говорят о чистой теплопроводности. Для того чтобы было $\mathbf{i} = 0$, T и μ должны удовлетворять уравнению $\alpha \nabla \mu + \beta \nabla T = 0$, или

$$\alpha d\mu + \beta dT = 0.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению вида $f(c, T) = 0$, не содержащему в явном виде координат (химический потенциал является функцией не только от c , T , но и от давления; в равновесии, однако, давление постоянно вдоль тела, и потому мы полагаем $p = \text{const.}$). Это соотношение определяет связь между концентрацией и температурой, которая должна иметь место для отсутствия потока вещества. Далее, при $\mathbf{i} = 0$ имеем из (58,7) $\mathbf{q} = -\chi \nabla T$; таким образом, χ является не чем иным, как коэффициентом теплопроводности.

Перейдём теперь к обычным переменным p , T и c . Имеем:

$$\nabla \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} \nabla c + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c, p} \nabla T + \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{c, T} \nabla p.$$

В последнем члене производную $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{c, T}$ можно заменить равной ей производной $\left(\frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p, T}$, где V — удельный объём¹⁾. Подставляя это

¹⁾ Это равенство следует из термодинамического тождества

$$d\varphi = -s dT + V dp + \mu dc,$$

где φ — термодинамический потенциал единицы массы:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{c, T} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial c} = \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p, T}.$$

в (58,6) — (58,7) и вводя обозначения

$$D = \frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T}, \quad \frac{\rho k_T D}{T} = \alpha \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c, p} + \beta, \quad (58,9)$$

$$k_p = \rho \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p, T}}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T}}, \quad (58,10)$$

получим следующие выражения:

$$\mathbf{i} = -\rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{\rho} \nabla p \right), \quad (58,11)$$

$$\mathbf{q} = \left[k_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, c} + \mu \right] \mathbf{i} - \kappa \nabla T. \quad (58,12)$$

Коэффициент D называется коэффициентом диффузии; он определяет диффузионный поток при наличии одного только градиента концентрации. Диффузионный же поток, вызываемый градиентом температуры, определяется «коэффициентом термодиффузии» $k_T D$ (безразмерную же величину k_T называют «термодиффузионным отношением»).

В учёте последнего члена в (58,11) может возникнуть необходимость лишь при наличии в жидкости существенного градиента давления, вызванного, например, внешним полем. Величину $k_p D$ можно назвать коэффициентом бародиффузии. Следует отметить, что согласно формуле (58,10) безразмерная величина k_p целиком определяется одними лишь чисто термодинамическими свойствами жидкости.

В чистой жидкости диффузионный поток, разумеется, отсутствует. Поэтому ясно, что коэффициенты k_T и k_p должны обращаться в нуль на обоих пределах: $c = 0$ и $c = 1$.

Условие возрастания энтропии накладывает определённые ограничения на коэффициенты в формулах (58,6) и (58,7). Подставив эти формулы в выражение (57,7) для скорости изменения энтропии, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \frac{i^2}{\alpha T} dV + \dots \quad (58,13)$$

Отсюда видно, что наряду с известным уже нам условием $\kappa > 0$ должно выполняться также условие $\alpha > 0$. Имея в виду, что производная $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T}$ всегда положительна согласно одному из термодинамических неравенств¹⁾, мы находим, следовательно, что должен быть положителен коэффициент диффузии: $D > 0$. Величины же k_T и k_p могут быть как положительными, так и отрицательными.

Мы не станем выписывать громоздких общих уравнений, получающихся при подстановке полученных здесь выражений для \mathbf{i} и \mathbf{q}

1) См. «Статистическая физика», § 94, Гостехиздат, 1951.

в уравнения (57,3), (57,6). Ограничимся лишь случаем, когда нет никакого существенного градиента давления, а концентрация и температура настолько мало меняются вдоль жидкости, что коэффициенты в выражениях (58,11) и (58,12), являющиеся в общем случае функциями от c и T , можно считать постоянными. Будем, кроме того, считать, что в жидкости нет никакого макроскопического движения, помимо того, которое может быть вызвано самим наличием градиентов температуры и концентрации. Скорость такого движения будет пропорциональна этим градиентам, и потому в уравнениях (57,3) и (57,6) члены, содержащие скорость, оказываются величинами второго порядка малости и могут быть опущены. Величиной второго порядка является также и член $i \nabla \mu$ в (57,6). Таким образом, остаётся

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \quad \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) = 0.$$

Подставим сюда для \mathbf{i} и \mathbf{q} выражения (58,11) и (58,12) (без члена с ∇p), а производную $\frac{\partial s}{\partial t}$ преобразуем следующим образом¹⁾:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{c,p} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial c} \right)_{T,p} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

В результате получим после простого преобразования следующие уравнения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T \right), \quad (58,14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (58,15)$$

Эта система линейных уравнений определяет распределение температуры и концентрации в жидкости.

В особенности важен случай, когда концентрация смеси мала. При стремлении концентрации к нулю коэффициент диффузии стремится к некоторой конечной постоянной, а коэффициент термодиффузии — к нулю. Поэтому при малых концентрациях k_T мало, и в уравнении (58,14) можно пренебречь членом $k_T \nabla T$. Оно переходит тогда в уравнение диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c. \quad (58,16)$$

Граничные условия для уравнения (58,16) в разных случаях различны. На границе с поверхностью тела, не растворимого в жидкости, должна обращаться в нуль нормальная к поверхности компонента диффузионного потока $\mathbf{i} = -\rho D \nabla c$; другими словами, должно быть

¹⁾ Имеем:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial c} \right)_{p,T} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial T} = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c}.$$

$\frac{\partial c}{\partial n} = 0$. Если же речь идёт о диффузии от тела, растворяющегося в жидкости, то вблизи его поверхности быстро устанавливается равновесие, при котором концентрация в примыкающей к поверхности тела жидкости равна концентрации насыщенного раствора c_0 ; диффузия вещества из этого слоя происходит медленнее, чем процесс растворения. Поэтому граничное условие на такой поверхности гласит: $c = c_0$. Наконец, если твёрдая поверхность «поглощает» попадающее на неё диффундирующее вещество, то граничным условием является равенство $c = 0$ (с таким случаем приходится, например, иметь дело при изучении химических реакций, происходящих на поверхности твёрдого тела).

Поскольку уравнения чистой диффузии (58,16) и теплопроводности имеют в точности одинаковый вид, то все выведенные в §§ 51, 52 формулы могут быть непосредственно перенесены на случай диффузии простой заменой T на c и χ на D . Граничному условию теплоизолированной поверхности соответствует при диффузии условие на нерастворимой твёрдой поверхности; поверхности же, поддерживаемой при постоянной температуре, соответствует диффузия от поверхности растворяющегося в жидкости тела.

В частности, по аналогии с формулой (51,6) можно написать следующее решение уравнения диффузии:

$$c(r) = \frac{M}{8\rho (\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}. \quad (58,17)$$

Оно определяет распределение растворённого вещества в произвольный момент времени, если в начальный момент $t = 0$ всё вещество было сконцентрировано в бесконечно малом элементе объёма жидкости в начале координат (M — полное количество растворённого вещества).

З а д а ч а

Определить коэффициент бародиффузии для смеси двух идеальных газов. Решение. Для удельного объёма имеем:

$$V = \frac{kT}{p} (n_1 + n_2)$$

(обозначения — см. примечание на стр. 271), а химические потенциалы имеют вид¹⁾

$$\mu_1 = f_1(p, T) + kT \ln \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \mu_2 = f_2(p, T) + kT \ln \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

Числа n_1 , n_2 выражаются через концентрацию газа l согласно $n_1 m_1 = c$, $n_2 m_2 = 1 - c$. Вычисление по формуле (58,10) даёт

$$k_p = (m_2 - m_1) c (1 - c) \left[\frac{1 - c}{m_2} + \frac{c}{m_1} \right].$$

1) См. «Статистическая физика»; 3-е изд., § 91, Гостехиздат, 1951.

§ 59. Диффузия взвешенных в жидкости частиц

Под влиянием молекулярного движения в жидкости взвешенные в ней частицы совершают беспорядочное движение (так называемое броуновское движение). Пусть в начальный момент времени в некоторой точке (начале координат) находится одна такая частица. Её дальнейшее движение можно рассматривать как «диффузию», причём роль концентрации играет вероятность нахождения частицы в том или ином элементе объёма жидкости. Соответственно для определения этой вероятности мы можем непосредственно воспользоваться решением (58,17) уравнения диффузии. Возможность такого рассмотрения связана с тем, что при диффузии в слабых растворах (т. е. при $c \ll 1$, когда только и применимо уравнение диффузии в форме (58,16)) частицы растворённого вещества практически не взаимодействуют друг с другом, и потому можно рассматривать движение каждой частицы независимо от других.

Пусть $w(r, t) dr$ есть вероятность нахождения частицы в момент времени t на расстоянии между r и $r + dr$ от исходной точки. Полагая в (58,17) $M/\rho = 1$ и умножая на элемент объёма $4\pi r^2 dr$ шарового слоя, получим:

$$w(r, t) dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} r^2 dr. \quad (59,1)$$

Определим средний квадрат расстояния, на которое частица удалится от исходной точки в течение времени t . Имеем:

$$\overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 w(r, t) dr. \quad (59,2)$$

Вычисление с помощью (59,1) даёт

$$\overline{r^2} = 6 Dt. \quad (59,3)$$

Таким образом, среднее расстояние, проходимое частицей в течение некоторого интервала времени, пропорционально квадратному корню из этого времени.

Коэффициент диффузии взвешенных в жидкости частиц может быть вычислен по их так называемой подвижности.

Предположим, что на эти частицы действует некоторая постоянная внешняя сила \mathbf{f} (например, сила тяжести). В стационарном состоянии сила, действующая на каждую частицу, должна уравновешиваться силой сопротивления, испытываемой движущейся частицей со стороны жидкости. При не слишком больших скоростях сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. Написав её в виде v/b , где b — постоянная, и приравнявая внешней силе \mathbf{f} , получим:

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f}, \quad (59,4)$$

т. е. скорость, приобретаемая частицей под влиянием внешней силы, пропорциональна этой силе. Постоянная b называется подвижностью и может быть, принципиально, вычислена с помощью гидродинамических уравнений. Так, для частиц, имеющих форму шариков (радиуса R), сила сопротивления равна $6\pi\eta Rv$ (см. (20,14)), а потому подвижность есть

$$b = \frac{1}{6\pi\eta R}. \quad (59,5)$$

Для частиц не шарообразной формы сила сопротивления зависит от направления движения; она может быть написана в виде $a_{ik}v_k$, где a_{ik} — симметрический тензор (см. (20,15)). При вычислении подвижности надо произвести усреднение по всем ориентациям частицы; если a_1, a_2, a_3 — главные значения симметрического тензора a_{ik} , то мы получим:

$$b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right). \quad (59,6)$$

Подвижность b связана с коэффициентом диффузии D простым соотношением. Для его вывода напишем диффузионный поток i , который содержит наряду с обычным членом — $\rho D \nabla c$, связанным с градиентом концентрации (температуру предполагаем постоянной), также и член, связанный со скоростью, приобретаемой частицей под влиянием внешних сил. Этот последний равен, очевидно, ρcv . Таким образом,

$$i = -\rho D \nabla c + \rho cbf, \quad (59,7)$$

где мы воспользовались выражением (59,4). В состоянии термодинамического равновесия диффузия отсутствует, и поток i должен обратиться в нуль. С другой стороны, равновесное распределение концентрации взвешенных в жидкости частиц во внешнем поле определяется известной из статистики формулой Больцмана, согласно которой $c = \text{const. } e^{-U/kT}$, где U — потенциальная энергия частицы во внешнем поле. Поскольку $f = -\nabla U$, то для равновесного градиента концентрации получаем: $\nabla c = \frac{f}{kT}c$. Подставляя это в (59,7) и приравнявая i нулю, получим:

$$D = kTb. \quad (59,8)$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью (соотношение Эйнштейна).

Подставляя (59,5) в (59,8), найдём следующее выражение для коэффициента диффузии шарообразных частиц:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta R}. \quad (59,9)$$

Наряду с поступательным броуновским движением и поступательной диффузией взвешенных частиц можно рассмотреть их вращательное броуновское движение и диффузию. Аналогично тому как

коэффициент поступательной диффузии вычисляется через силу сопротивления, так коэффициент вращательной диффузии может быть выражен через момент сил, действующих на вращающуюся в жидкости частицу¹⁾.

З а д а ч и

1. Частицы совершают броуновское движение в жидкости, ограниченной с одной стороны плоской стенкой; при попадании на стенку частицы «прилипают» к ней. Определить вероятность того, что частица, находящаяся в начальный момент времени на расстоянии x_0 от стенки, «прилипнет» к ней в течение времени t .

Решение. Распределение вероятностей $w(x, t)$ (x — расстояние от стенки) определяется диффузионным уравнением с граничным условием $w = 0$ при $x = 0$ и начальным условием $w = \delta(x - x_0)$ при $t = 0$. Такое решение определяется формулой (52,4), в которой надо теперь писать w вместо T , D вместо χ и положить под знаком интеграла $w_0(x') = \delta(x' - x_0)$. Тогда получим:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right\}.$$

Вероятность «прилипания» к стенке в единицу времени определяется значением «диффузионного потока» $D \frac{\partial w}{\partial x}$ при $x = 0$; искомая же вероятность $W(t)$ прилипания в течение времени t равна

$$W(t) = D \int_0^t \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} dt.$$

Подставляя w , получим:

$$W(t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{Dt}}\right).$$

2. Определить порядок величины времени τ , в течение которого взвешенная в жидкости частица поворачивается вокруг своей оси на большой угол.

Решение. Искомое время τ определится как время, в течение которого частица при броуновском движении сместится на расстояние порядка величины своих линейных размеров a . Согласно (59,3) имеем: $\tau \sim \frac{a^2}{D}$, а согласно

(59,9) $D \sim \frac{kT}{\eta a}$. Таким образом,

$$\tau \sim \frac{\eta a^3}{kT}.$$

1) Если частицы (не шарообразной формы) взвешены в плоско-параллельном потоке жидкости с поперечным градиентом скорости, то под влиянием одновременного воздействия ориентирующих гидродинамических сил и дезориентирующего броуновского движения установится определенное распределение частиц по их ориентациям в пространстве. Решение этой задачи для эллипсоидальных частиц см. А. Peterlin, H. Stuart, Zs. f. Phys. 112, 1, 1939.

ГЛАВА VII ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 60. Формула Лапласа

В этой главе мы изучим явления, происходящие вблизи поверхности раздела между двумя сплошными средами (в действительности, конечно, соприкасающиеся тела разделены узким переходным слоем, который вследствие его весьма малой толщины можно рассматривать как поверхность).

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи неё давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой поверхностным давлением) напишем условие термодинамического равновесия обоих тел друг с другом с учётом свойств поверхности их раздела.

Пусть поверхность раздела подвергается бесконечно малому смещению. В каждой точке несмещённой поверхности проведём нормаль к ней. Отрезок нормали, заключённый между её пересечениями с несмещённой и смещённой поверхностями, обозначим посредством $\delta\zeta$. Тогда объём каждого элемента пространства, заключённого между поверхностями, есть $\delta\zeta df$, где df — элемент поверхности. Пусть p_1 и p_2 — давления в первой и второй средах и будем считать $\delta\zeta$ положительным, если смещение поверхности раздела производится, скажем, в сторону второй среды. Тогда работа, которую надо произвести для описанного изменения объёма, равна

$$\int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df.$$

Полная работа δR смещения поверхности получится путём прибавления сюда ещё работы, связанной с изменением площади самой этой поверхности. Эта часть работы пропорциональна, как известно, изменению df площади поверхности и равна αdf , где α есть так называемый коэффициент поверхностного натяжения¹⁾. Таким

¹⁾ На границе вода — воздух $\alpha = 72,5 \text{ эрг/см}^2$ (при 20°C), на границе керосин — воздух $\alpha = 24$ (при 20°C). Весьма велико поверхностное натяжение жидких металлов; так, на границе ртуть — воздух $\alpha = 547$ (при 175°C), жидкая платина — воздух $\alpha = 1820$ (при 2000°C). Очень мало поверхностное натяжение между жидким гелием и его паром: $\alpha = 0,24$ (при -270°C).

образом, полная работа равна

$$\delta R = - \int (p_1 - p_2) \delta \zeta df + \alpha \delta f. \quad (60,1)$$

Условие термодинамического равновесия определяется, как известно, обращением δR в нуль.

Пусть далее R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности; мы будем считать R_1 и R_2 положительными, если они направлены внутрь первой среды. Тогда элементы длины dl_1 и dl_2 на поверхности, проведённые в плоскостях её главных сечений, получают при бесконечно малом смещении поверхности приращения, равные соответственно $\frac{\delta \zeta}{R_1} dl_1$ и $\frac{\delta \zeta}{R_2} dl_2$ (dl_1 и dl_2 надо рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами R_1 и R_2). Поэтому элемент поверхности $df = dl_1 dl_2$ будет равен после смещения

$$dl_1 \left(1 + \frac{\delta \zeta}{R_1}\right) dl_2 \left(1 + \frac{\delta \zeta}{R_2}\right) \approx dl_1 dl_2 \left(1 + \frac{\delta \zeta}{R_1} + \frac{\delta \zeta}{R_2}\right),$$

т. е. изменится на величину

$$\delta \zeta df \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда видно, что полное изменение площади поверхности раздела есть

$$\delta f = \int \delta \zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df. \quad (60,2)$$

Подставляя полученные выражения в (60,1) и приравнявая нулю получим условие равновесия в виде

$$\int \delta \zeta \left\{ (p_1 - p_2) - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \right\} df = 0.$$

Это условие должно выполняться при произвольном бесконечно малом смещении поверхности, т. е. при произвольном $\delta \zeta$. Поэтому необходимо, чтобы стоящее под интегралом в скобках выражение тождественно обращалось в нуль, т. е.

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (60,3)$$

Это и есть искомая формула (формула Лапласа), определяющая поверхностное давление. Мы видим, что если R_1 и R_2 положительны, то $p_1 - p_2 > 0$. Это значит, что из двух тел давление больше в том, поверхность которого выпукла. Если $R_1 = R_2 = \infty$, т. е. поверхность раздела плоская, то давления в обоих телах, как и должно было быть, одинаковы.

Применим формулу (60,3) для исследования механического равновесия соприкасающихся тел. Предположим, что ни на поверхность

раздела, ни на сами тела не действуют никакие внешние силы. Тогда вдоль каждого из тел давление постоянно. Имея в виду формулу (60,3), мы можем поэтому написать условие равновесия в виде

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.} \quad (60,4)$$

Таким образом, сумма обратных радиусов кривизны должна быть постоянной вдоль всей свободной поверхности раздела. Если вся поверхность свободна, то условие (60,4) означает, что поверхность должна иметь шарообразную форму (например, поверхность маленькой капли, влиянием силы тяжести на которую можно пренебречь). Если же поверхность закреплена вдоль какой-нибудь линии (например, у жидкой плёнки на твёрдой рамке), то её форма является более сложной.

В применении к равновесию тонких плёнок жидкости, закреплённых на твёрдой рамке, в условии (60,5) справа должен стоять нуль. Действительно, сумма $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ должна быть одинаковой вдоль всей свободной поверхности плёнки и в то же время на двух своих сторонах она должна иметь противоположный знак, поскольку если одна сторона выпукла, то другая вогнута с теми же радиусами кривизны, которые, однако, должны считаться теперь отрицательными. Отсюда следует, что условие равновесия тонкой плёнки есть

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \quad (60,5)$$

Рассмотрим теперь условие равновесия на поверхности тела, находящегося в поле тяжести. Предположим для простоты, что второй средой является просто атмосфера, давление которой на протяжении размеров тела можно считать постоянным. В качестве самого тела рассмотрим несжимаемую жидкость. Тогда имеем $p_2 = \text{const.}$ а давление p_1 в жидкости равно согласно (3,2) $p_1 = \text{const.} - \rho g z$ (координата z отсчитывается вертикально вверх). Таким образом, условие равновесия приобретает вид

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g}{\alpha} z = \text{const.} \quad (60,6)$$

Надо, впрочем, отметить, что для определения равновесной формы поверхности жидкости в конкретных случаях обычно бывает удобным пользоваться условием равновесия не в виде (60,6), а непосредственно решая вариационную задачу о минимуме полной свободной энергии. Внутренняя свободная энергия несжимаемой жидкости зависит только от объёма, но не от формы поверхности. От формы зависит, во-первых, поверхностная свободная энергия

$$\int \alpha df$$

и, во-вторых, энергия во внешнем поле (поле тяжести), равная

$$g\rho \int z dV.$$

Таким образом, условие равновесия можно написать в виде

$$\alpha \int df + g\rho \int z dV = \min. \quad (60,7)$$

Определение минимума должно производиться при дополнительном условии

$$\int dV = \text{const.}, \quad (60,8)$$

выражающем неизменность полного объёма жидкости.

Постоянные α , ρ , g входят в условия равновесия (60,6)—(60,7) только в виде отношения $\frac{\alpha}{g\rho}$. Это отношение имеет размерность квадрата длины. Длина

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}} \quad (60,9)$$

называется капиллярной постоянной данного вещества¹⁾. Форма поверхности жидкости определяется только этой величиной. Если капиллярная постоянная велика (по сравнению с размерами тела), то при определении формы поверхности можно пренебречь полем тяжести.

Для того чтобы определить из условия (60,4) или (60,6) форму поверхности, надо иметь формулы, определяющие радиусы кривизны по форме поверхности. Эти формулы известны из дифференциальной геометрии, но имеют в общем случае довольно сложный вид. Они значительно упрощаются в том случае, когда форма поверхности лишь слабо отклоняется от плоской. Мы выведем здесь соответствующую приближённую формулу непосредственно, не пользуясь общей формулой дифференциальной геометрии.

Пусть $z = \zeta(x, y)$ есть уравнение поверхности; мы предполагаем, что ζ везде мало, т. е. что поверхность слабо отклоняется от плоскости $z = 0$. Как известно, площадь f поверхности определяется интегралом

$$f = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

или приближённо при малых ζ

$$f = \int \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy. \quad (60,10)$$

¹⁾ Так, для воды $a = 0,122$ см (при 20° С).

Определим вариацию δf :

$$\delta f = \int \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right\} dx dy.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\delta f = - \int \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \delta \zeta dx dy.$$

Сравнивая это выражение с (60,2), получаем:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (60,11)$$

Это и есть искомая формула, определяющая сумму обратных радиусов кривизны слабо изогнутой поверхности.

При равновесии трёх соприкасающихся друг с другом фаз их поверхности раздела устанавливаются таким образом, чтобы была равна нулю равнодействующая трёх сил поверхностного натяжения, действующих на общую линию соприкосновения трёх сред. Это условие приводит к тому, что поверхности раздела должны пересекаться друг с другом под углами (так называемые «краевые углы»), определяющимися значениями коэффициентов поверхностного натяжения¹⁾.

Наконец, остановимся на вопросе о граничных условиях, которые должны соблюдаться на границе двух движущихся жидкостей при учёте сил поверхностного натяжения. Если поверхностное натяжение не учитывается, то на границе двух жидкостей имеем:

$$n_k (\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}) = 0,$$

что выражает равенство вязких сил трения, действующих на поверхности обеих жидкостей. При учёте поверхностного натяжения надо написать в правой части этого условия дополнительную силу, определяемую по величине формулой Лапласа и направленную по нормали к поверхности:

$$n_k \sigma_{ik}^{(2)} - n_k \sigma_{ik}^{(1)} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (60,12)$$

Иначе можно написать это уравнение в виде

$$(p_1 - p_2) n_i = (\sigma'_{ik}^{(1)} - \sigma'_{ik}^{(2)}) n_k + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (60,13)$$

Если обе жидкости можно считать идеальными, то вязкие напряжения σ'_{ik} исчезают, и мы получаем вновь просто уравнение (60,3).

Условие (60,13), однако, ещё не является наиболее общим. Дело в том, что коэффициент поверхностного натяжения α может оказаться не постоянным вдоль поверхности (например, в результате непостоян-

¹⁾ Подробнее о краевых углах см., например, «Статистическая физика», 3-е изд., § 140, 1951.

ства температуры). Тогда наряду с нормальной силой (исчезающей в случае плоской поверхности) появляется некоторая дополнительная сила, направленная тангенциально к поверхности. Аналогично тому как при неравномерном давлении появляется объёмная сила, равная (на единицу объёма) — ∇p (см. § 2), здесь имеем для тангенциальной силы f_t , действующей на единицу площади поверхности раздела, $f_t = \text{grad } \alpha$. Мы пишем здесь градиент со знаком плюс перед ним, а не со знаком минус, как в силе — ∇p , в связи с тем, что силы поверхностного натяжения стремятся уменьшить площадь поверхности, между тем как силы давления стремятся увеличить объём тела. Прибавляя эту силу к правой стороне равенства (60,13), получим граничное условие

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma'_{ik}{}^{(1)} - \sigma'_{ik}{}^{(2)}) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \quad (60,14)$$

(единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен внутрь первой жидкости). Отметим, что это условие может быть выполнено только у вязкой жидкости. Действительно, у идеальной жидкости $\sigma'_{ik} = 0$; тогда левая сторона равенства (60,14) будет представлять собой вектор, направленный по нормали, а правая — вектор, направленный по касательной к поверхности. Но такое равенство невозможно (за исключением, разумеется, тривиального случая, когда эти величины равны нулю каждая в отдельности).

Задачи

1. Определить форму жидкой пленки, края которой закреплены на двух рамках, имеющих форму окружностей, центры которых лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям (разрез плёнки изображён на рис. 31).

Решение. Задача сводится к отысканию поверхности минимальной площади, образованной вращением вокруг прямой $r=0$ кривой $z=z(r)$, имеющей концы в двух заданных точках A и B . Площадь поверхности вращения есть

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2} dz. \quad \text{Как известно, минимум}$$

интеграла вида $\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt$ определяется уравне-

нием $L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{const}$. В данном случае это даёт $r = c_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2}$,

откуда находим после интегрирования

$$r = c_1 \operatorname{ch} \frac{z - c_2}{c_1};$$

таким образом, искомая поверхность является поверхностью, образованной вращением цепной линии (так называемый катеноид). Постоянные c_1 и c_2 должны быть определены так, чтобы кривая $r(z)$ проходила через заданные

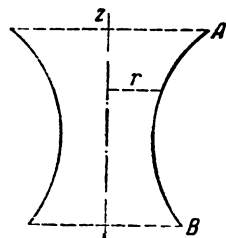


Рис. 31.

точки A и B . При этом c_2 зависит просто от выбора начала координат на оси z . Для постоянной же c_1 получаются два значения, из которых должно быть выбрано большее (меньшее не соответствует минимуму интеграла).

При увеличении расстояния h между рамками при некотором определенном его значении наступает момент, когда уравнение, определяющее постоянную c_1 , перестаёт иметь действительные корни. При больших расстояниях устойчивой является только форма, соответствующая двум плёнкам, натянутым на каждую из двух рамок. Так, для двух рамок одинакового радиуса R катеноидальная форма становится невозможной при расстоянии h между рамками, равном $h = 1,33 R$.

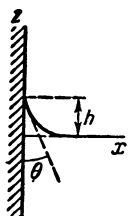


Рис. 32.

2. Определить форму поверхности жидкости, находящейся в поле тяжести и соприкасающейся с одной стороны с вертикальной плоской стенкой. Краевой угол, образуемый жидкостью при соприкосновении с веществом стенки, равен θ (рис. 32).

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 32 образом. Плоскость $x = 0$ есть плоскость стенки, а $z = 0$ есть плоскость поверхности жидкости вдали от стенки. Радиусы кривизны поверхности $z = z(x)$ суть $R_1 = \infty$, $R_2 =$

$= -\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}$, так что уравнение (60,6) приобретает вид

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = \text{const.} \quad (1)$$

(a — капиллярная постоянная). При $x = \infty$ должно быть $z = 0$, $\frac{1}{R_2} = 0$; поэтому $\text{const.} = 0$. Первый интеграл получающегося уравнения есть

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \quad (2)$$

Из условия на бесконечности ($z = 0$, $z' = 0$ при $x = \infty$) имеем $A = 1$. Второе интегрирование даёт

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \text{Arch} \frac{a\sqrt{2}}{z} + a\sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}} + x_0.$$

Постоянная x_0 должна быть определена так, чтобы на поверхности стенки ($x = 0$) было $z' = -\text{ctg} \theta$ или согласно (2) $z = h$, где $h = a\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ есть высота поднятия жидкости у самой стенки.

3. Определить форму поверхности жидкости, поднявшейся между двумя вертикальными параллельными плоскими пластинками (рис. 33).

Решение. Выбираем плоскость y, z посредине между обеими пластинками, а плоскость x, y — совпадающей с поверхностью жидкости вне пространства между пластинками, вдали от них. В уравнении (1) задачи 2, выражающем условие равновесия и потому справедливом вдоль всей поверхности жидкости (как между, так и вне пластинок), условия при $x = \infty$ дают опять $\text{const.} = 0$. В интеграле же (2) уравнения (1) постоянная A различна

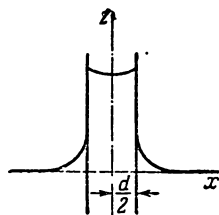


Рис. 33.

для $|x| > \frac{d}{2}$ и $|x| < \frac{d}{2}$ (при $|x| = \frac{d}{2}$ функция $z(x)$ имеет разрыв). Для пространства между пластинками имеем следующие условия: при $x = 0$ должно быть $z' = 0$, а при $x = \pm \frac{d}{2}$: $z' = \text{ctg} \theta$, где θ — краевой угол. Согласно (2)

имеем для высот $z_0 = z(0)$ и $z_1 = z(d/2)$:

$$z_0 = a \sqrt{A-1}, \quad z_1 = a \sqrt{A-\sin^2 \theta}.$$

Интегрируя (2), получаем:

$$x = \int_{z_0}^z \frac{\left(A - \frac{z^2}{a^2}\right) dz}{\sqrt{1 - \left(A - \frac{z^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{a\sqrt{A-\cos^2 \xi}} \frac{\cos \xi d\xi}{\sqrt{A - \cos^2 \xi}},$$

где ξ — новая переменная, связанная с z посредством $z = a \sqrt{A - \cos^2 \xi}$. Этот интеграл — эллиптический и не может быть выражен в элементарных функциях. Постоянная A определяется из условия $z = z_1$ при $x = \frac{d}{2}$, откуда

$$d = a \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \frac{\cos \xi d\xi}{\sqrt{A - \cos^2 \xi}}.$$

Полученные формулы определяют форму поверхности жидкости в пространстве между пластинками. При $d \rightarrow 0$ A стремится к бесконечности. Поэтому при $d \ll a$ имеем:

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \cos \xi d\xi = \frac{a}{\sqrt{A}} \cos \theta,$$

откуда $A = \frac{a^2}{d^2} \cos^2 \theta$. Высота поднятия жидкости $z_0 \approx z_1 \approx \frac{a^2}{d} \cos \theta$; эта формула может быть получена, разумеется, и элементарным путём.

4. На плоскости горизонтальной твёрдой поверхности находится (в поле тяжести) тонкий неравномерно нагретый слой жидкости; её температура является заданной функцией координаты x вдоль слоя, причём (благодаря тонкости плёнки) её можно считать не зависящей от координаты z вдоль толщины слоя. Неравномерная нагретость приводит к возникновению стационарного движения жидкости в плёнке, в результате чего её толщина ζ будет меняться вдоль слоя; требуется определить функцию $\zeta = \zeta(x)$.

Решение. Вместе с температурой заданными функциями x являются также плотность ρ жидкости и поверхностное натяжение α . Давление в жидкости $p = p_0 + \rho g (\zeta - z)$, где p_0 — атмосферное давление (давление на свободной поверхности слоя); изменением давления благодаря искривлению поверхности можно пренебречь. Скорость жидкости в тонком слое можно считать направленной везде вдоль оси x . Уравнение движения гласит:

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = g \left[\frac{d(\rho \zeta)}{dx} - z \frac{d\rho}{dx} \right]. \quad (1)$$

На твёрдой поверхности ($z=0$) имеем $v=0$, а на свободной поверхности ($z=\zeta$) должно выполняться граничное условие (60,14), которое в данном случае даёт

$$\eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=\zeta} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Интегрируя уравнение (1) с этими условиями, получим:

$$rv = gz \left(\zeta - \frac{z}{2} \right) \frac{d(\rho\zeta)}{dx} - \frac{gz}{6} (3\zeta^2 - z^2) \frac{d\rho}{dx} - z \frac{d\alpha}{dx}. \quad (2)$$

Ввиду стационарности движения полный поток жидкости через поперечное сечение слоя должен быть равен нулю: $\int_0^\zeta v dz = 0$. Подставляя сюда (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\rho}{3} \frac{d^2\zeta^2}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{d\rho}{dx} \zeta^2 = \frac{1}{g} \frac{d\alpha}{dx},$$

определяющее функцию $\zeta(x)$. Интегрируя его, получим:

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-1/4} \left[\int \rho^{-1/4} d\alpha + \text{const.} \right]. \quad (3)$$

Если температура (α с ней и ρ и α) лишь мало меняется вдоль слоя жидкости, то можно написать (3) в виде

$$\zeta^2 = \zeta_0^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{3/4} + \frac{3}{\rho g} (\alpha - \alpha_0),$$

где ζ_0 — значение ζ в точке, где $\rho = \rho_0$, $\alpha = \alpha_0$.

§ 61. Капиллярные волны

Поверхность жидкости стремится принять свою равновесную форму как под влиянием действующего на жидкость поля тяжести, так и под влиянием сил поверхностного натяжения. Между тем при изучении в §§ 12—13 волн на поверхности жидкости мы не учитывали этого последнего фактора. Мы увидим ниже, что влияние капиллярности на гравитационные волны существенно при малых длинах волн.

Как и в § 12, будем предполагать амплитуду колебаний малой по сравнению с длиной волны. Для потенциала скорости имеем попрежнему уравнение

$$\Delta\varphi = 0.$$

Условие же на поверхности жидкости будет теперь иным. Именно, разность давлений с обеих сторон этой поверхности должна быть равной не нулю, как это предполагалось в § 12, а должна определяться формулой Лапласа (60,3).

Обозначим z -координату точек поверхности жидкости посредством ζ . Поскольку ζ мало, то можно воспользоваться выражением (60,11) и написать формулу Лапласа в виде

$$p - p_0 = -\alpha \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right).$$

Здесь p есть давление в жидкости вблизи поверхности, p_0 — постоянное внешнее давление. Для p подставляем согласно (12,2)

$$p = -\rho g\zeta - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и находим:

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0$$

(по тем же причинам, как и в § 12, можно, определяя соответствующим образом φ , опустить постоянную p_0). Продифференцировав это соотношение по t и заменив в нём $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ на $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, получим граничное условие для потенциала φ в виде

$$\left\{ \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right\}_{z=0} = 0. \quad (61,1)$$

Рассмотрим «плоскую» волну, распространяющуюся вдоль оси x . Как и в § 12, получаем решение в виде

$$\varphi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t).$$

Связь между k и ω определяется теперь из предельного условия (61,1) и имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3. \quad (61,2)$$

Мы видим, что при больших длинах волн, удовлетворяющих условию $k \ll \sqrt{\frac{g\rho}{\alpha}}$ или

$$k \ll \frac{1}{a}$$

(a — капиллярная постоянная), влиянием капиллярности можно пренебречь, и волна является чисто гравитационной. В обратном случае коротких волн можно пренебречь влиянием поля тяжести. Тогда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3. \quad (61,3)$$

Такие волны называются капиллярными (или рябью); в промежуточном случае говорят о капиллярно-гравитационных волнах.

Определим ещё собственные колебания сферической капли несжимаемой жидкости, совершаемые ею под влиянием капиллярных сил. При колебаниях происходит отклонение формы поверхности капли от сферической. Амплитуду колебаний будем, как обычно, предполагать малой.

Начнём с определения суммы $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ для поверхности, слабо отклоняющейся от сферической. Поступим для этого аналогично тому, что мы делали при выводе формулы (60,11). Площадь поверхности, описываемой в сферических координатах r, θ, φ ¹⁾ функцией

¹⁾ Ниже в этом параграфе φ обозначает азимут сферических координат, а потенциал скорости мы будем обозначать посредством ψ .

$r = r(\theta, \varphi)$, равна, как известно, интегралу

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} r \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (61,4)$$

Шаровая поверхность описывается уравнением $r = \text{const.} \equiv R$ (R — радиус шара), а близкая к ней поверхность — уравнением $r = R + \zeta$ с малым ζ . Подставляя это в (61,4), имеем приближённо

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ (R + \zeta)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^2 \right] \right\} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Определим изменение δf поверхности при варьировании ζ . Имеем:

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 2(R + \zeta) \delta \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \varphi} \right\} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Интегрируя второй член по частям по углу θ , а третий член — по φ , получаем:

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 2(R + \zeta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right\} \delta \zeta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Если разделить выражение в фигурных скобках на $R(R + 2\zeta)$, то выражение, которое будет стоять под знаком интеграла в качестве множителя при $\delta \zeta \, df \approx \delta \zeta R(R + 2\zeta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$, будет согласно формуле (60,2) представлять собой как раз искомую сумму обратных радиусов кривизны, вычисленную с точностью до членов первого порядка по ζ . Таким образом, получим:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (61,5)$$

Первый член соответствует чисто сферической поверхности, для которой $R_1 = R_2 = R$.

Потенциал скорости ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$ с граничным условием при $r = R$, имеющим вид (аналогично тому, что мы имели для плоской поверхности)

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right] \right\} + p_0 = 0.$$

Постоянную $\frac{2\alpha}{R} + p_0$ в этом условии снова можно опустить; дифференцируя по времени и подставляя $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, находим оконча-

тельно граничное условие для ψ в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{r=R} - \frac{\alpha}{R^2} \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] \right\} \Big|_{r=R} = 0. \quad (61,6)$$

Будем искать решение в виде стоячей волны

$$\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \varphi),$$

где функция f удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Как известно, всякое решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде линейной комбинации так называемых объёмных шаровых функций вида

$$r^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — шаровые функции Лапласа, равные

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Здесь

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}$$

есть так называемая присоединённая функция Лежандра ($P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра l -го порядка). Как известно, l пробегает все целые положительные значения, включая нуль, а m пробегает при заданном l значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Соответственно этому ищем частное решение поставленной задачи в виде

$$\psi = A e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (61,7)$$

Частота ω определяется так, чтобы удовлетворить предельному условию (61,6). Подставляя в это уравнение выражение (61,7) и воспользовавшись тем, что шаровые функции Y_{lm} удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0,$$

находим (сокращая общий множитель ψ):

$$\rho \omega^2 + \frac{l\alpha}{R^3} \{2 - l(l+1)\} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho R^3} l(l-1)(l+2). \quad (61,8)$$

Эта формула определяет частоты собственных капиллярных колебаний сферической капли. Мы видим, что они зависят только от числа l , но не от m . Между тем данному l соответствует $2l+1$ различных функций (61,7). Таким образом, каждая из частот (61,8) соответствует $2l+1$ различным собственным колебаниям. О независимых собственных колебаниях, имеющих одинаковые частоты, говорят

как о «вырожденных»; в данном случае имеет место $2l + 1$ -кратное вырождение.

Выражение (61,8) обращается в нуль при $l = 0$ и при $l = 1$. Значение $l = 0$ соответствовало бы радиальным колебаниям, т. е. сферически симметричным пульсациям капли; в несжимаемой жидкости такие колебания, очевидно, невозможны. При $l = 1$ движение представляло бы собой просто поступательное перемещение капли как целого. Наименьшая возможная частота колебаний капли соответствует $l = 2$ и равна

$$\omega_{\min}^2 = \frac{8\alpha}{\rho R^3}. \quad (61,9)$$

Своеобразное, связанное с поверхностным натяжением волновое движение наблюдается на стекающем по вертикальной стенке тонком слое вязкой жидкости. П. Л. Капица показал, что возникновение этих волн должно происходить в результате неустойчивости основного движения, наступающей уже при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса ¹⁾.

З а д а ч и

1. Определить зависимость частоты от волнового вектора для капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости, глубина которой равна h .

Р е ш е н и е. Подставляя в условие (61,1) $\varphi = A \cos(kx - \omega t) \operatorname{ch} k(z + h)$ (см. задачу 1 § 12), получаем:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right) \operatorname{th} kh.$$

При $kh \gg 1$ мы возвращаемся к формуле (61,2), а для длинных волн ($kh \ll 1$) имеем:

$$\omega^2 = ghk^2 + \frac{\alpha hk^4}{\rho}.$$

2. Определить коэффициент затухания капиллярных волн.

Р е ш е н и е. Подставляя (61,3) в (25,5), получим:

$$\gamma = \frac{2\eta k^2}{\rho} = \frac{2\eta \omega^{4/3}}{\rho^{1/3} \alpha^{2/3}}.$$

3. Найти условие устойчивости тангенциального разрыва в поле тяжести с учётом поверхностного натяжения (жидкости по обе стороны поверхности разрыва предполагаются различными).

Р е ш е н и е. Пусть U — скорость верхнего слоя жидкости относительно нижнего. Накладываем на основное движение периодическое вдоль горизонтальной оси возмущение и ищем потенциал скорости в виде:
в нижней жидкости

$$\varphi = Ae^{kz} \cos(kz - \omega t)$$

и в верхней

$$\varphi' = A'e^{-kz} \cos(kz - \omega t) + Ux.$$

Для нижней жидкости имеем на поверхности разрыва

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

¹⁾ См. П. Л. Капица, ЖЭТФ, 18, 3, 1948.

(ζ — вертикальная координата поверхности раздела), а в нижней

$$v'_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Условие равенства давлений в обеих жидкостях на поверхности разрыва имеет вид

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \zeta - \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \rho' g \zeta + \frac{\rho'}{2} (v'^2 - U^2)$$

(при раскрытии выражения $v'^2 - U^2$ должны быть сохранены только члены первого порядка по A'). Смещение ζ ищем в виде $\zeta = a \sin(kx - \omega t)$. Подставляя φ , φ' , ζ в написанные три условия при $z = 0$, получаем три уравнения, исключая из которых a , A , A' , находим:

$$\omega = k \frac{\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\frac{k g (\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2 \rho \rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'}}.$$

Для того чтобы это выражение было вещественным при всех k , необходимо выполнение условия

$$U^4 \leq \frac{4\alpha g (\rho - \rho') (\rho + \rho')^2}{\rho^2 \rho'^2}.$$

В противном случае существуют комплексные ω с положительной мнимой частью и движение неустойчиво.

§ 62. Влияние адсорбированных плёнок на движение жидкости

Наличие на поверхности жидкости плёнки адсорбированного ею вещества может существенно изменить гидродинамические свойства свободной поверхности жидкости. Дело в том, что при изменении формы поверхности, сопровождающем движение жидкости, происходит «растяжение» или «сжатие» плёнки, т. е. изменение поверхностной концентрации адсорбированного вещества. Эти изменения приводят к появлению дополнительных сил, которые и должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности жидкости.

Мы ограничимся здесь рассмотрением адсорбированных плёнок веществ, которые можно считать нерастворимыми в самой жидкости. Это значит, что вещество находится только у поверхности и не проникает в глубь жидкости. Если же поверхностно-активное вещество обладает также и некоторой заметной растворимостью, то необходимо было бы принять во внимание процессы диффузии этого вещества между поверхностной плёнкой и объёмом жидкости, возникающие при изменении концентрации плёнки.

При наличии адсорбированного вещества коэффициент поверхностного натяжения α является функцией поверхностной концентрации этого вещества (количество вещества на единице площади поверхности), которую мы обозначим посредством γ . Если γ меняется вдоль поверхности, то вместе с ней функцией координат точки поверхности

является также и коэффициент α . В связи с этим в граничном условии на поверхности жидкости добавляется тангенциальная сила, о которой уже шла речь в конце § 60 (условие (60,14)). В данном случае градиент α выражается через градиент поверхностной концентрации, так что действующая на поверхность тангенциальная сила равна

$$\mathbf{f}_t = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \nabla \gamma. \quad (62,1)$$

В § 60 уже было указано, что граничное условие (60,14) с учётом этой силы может быть выполнено только у вязкой жидкости. Отсюда следует, что в тех случаях, когда вязкость жидкости мала и несущественна для рассматриваемого явления, нет необходимости также и в учёте наличия пленки.

Для определения движения жидкости, покрытой плёнкой, надо добавить к уравнениям движения жидкости с граничным условием (60,14) ещё одно уравнение соответственно тому, что мы имеем теперь на одну неизвестную величину (поверхностная концентрация γ) больше. Этим дополнительным уравнением является «уравнение непрерывности», выражающее собой неизменность общего количества адсорбированного вещества в плёнке. Конкретный вид этого уравнения зависит от формы поверхности. Если поверхность плоская, то оно имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \gamma) = 0, \quad (62,2)$$

где все величины берутся на поверхности жидкости (плоскость x, y выбрана в плоскости этой поверхности).

Решение задач о движении жидкости, покрытой адсорбционной плёнкой, существенно упрощается в тех случаях, когда плёнку можно считать несжимаемой, т. е. можно считать, что площадь каждого элемента поверхности плёнки остаётся при движении постоянной.

Примером того, насколько существенным в гидродинамическом отношении может оказаться наличие адсорбционной плёнки, является движение пузырька газа в вязкой жидкости. Если на поверхности пузырька никакой плёнки нет, то наполняющий его газ тоже приходит в движение и сила сопротивления, испытываемая пузырьком со стороны жидкости, оказывается отличной от той, которую испытывал бы твёрдый шарик того же радиуса (см. задачу 2 § 20). Если же пузырёк покрыт плёнкой адсорбированного вещества, то прежде всего непосредственно из соображений симметрии ясно, что плёнка остаётся при движении пузырька неподвижной. Действительно, движение в ней могло бы совершаться только по поверхности пузырька вдоль меридианов; в результате происходило бы непрерывное накопление вещества плёнки у одного из полюсов пузырька (внутри газа или жидкости адсорбированное вещество не проникает), что невозможно. Вместе со скоростью плёнки должна быть равной нулю

и скорость газа на поверхности пузырька, а при таких граничных условиях останется неподвижным весь вообще газ внутри пузырька. Таким образом, покрытый плёнкой пузырёк будет двигаться как твёрдый шарик и, в частности, испытываемая им сила сопротивления (при малых числах Рейнольдса) будет определяться формулой Стокса (В. Г. Левич; ему же принадлежит решение вопросов, рассмотренных в задачах этого параграфа¹⁾).

Задачи

1. Два сосуда соединены глубоким длинным каналом с плоско-параллельными стенками (ширина канала a , длина l). Поверхность жидкости в сосудах и в канале покрыта адсорбированной плёнкой, причём поверхностные концентрации γ_1 и γ_2 плёнки в обоих сосудах различны, в результате чего вблизи поверхности жидкости в канале возникает движение. Определить количество переносимого при этом движении вещества плёнки.

Решение. Выбираем плоскость одной из стенок канала в качестве плоскости x, z , а поверхность жидкости — в качестве плоскости x, y , так что ось x направлена вдоль длины канала; области жидкости соответствуют $z < 0$. Градиент давления отсутствует, так что уравнение стационарного движения жидкости (ср. § 17) есть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где v есть скорость жидкости, направленная, очевидно, по оси x . Вдоль длины канала имеется градиент концентрации $\frac{d\gamma}{dx}$. На поверхности жидкости в канале имеет место граничное условие

$$\eta \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{при } z = 0. \quad (2)$$

На стенках канала жидкость должна быть неподвижна, т. е.

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0, a. \quad (3)$$

Глубину канала считаем бесконечной, и потому

$$v = 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

Частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (3) и (4), являются $\text{const.} \sin(2n+1) \frac{\pi y}{a} \cdot e^{\frac{(2n+1)\pi}{a} z}$ с целыми n . Условию (2) удовлетворяет сумма

$$v = \frac{4a}{\eta\pi^3} \frac{d\alpha}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi y}{a} \cdot e^{\frac{(2n+1)\pi}{a} z}}{(2n+1)^3}.$$

Количество переносимого (в единицу времени) вещества плёнки равно

$$Q = \int_0^a \gamma v|_{z=0} dy = \frac{8a^3}{\eta\pi^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \frac{d\alpha}{dx} \gamma$$

¹⁾ Более подробное изложение теории этих явлений см. В. Г. Левич, Физико-химическая гидромеханика, изд. АН СССР, 1952.

(движение происходит в направлении увеличения α). Величина Q должна, очевидно, быть постоянной вдоль канала. Поэтому можно написать:

$$\gamma \frac{d\alpha}{dx} = \text{const.} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \frac{d\alpha}{dx} \gamma dx = \frac{1}{l} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha,$$

где $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$, и предполагается, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Таким образом, имеем окончательно

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l \pi^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha = 0,27 \frac{a^2}{\eta l} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha.$$

2. Определить коэффициент затухания капиллярных волн на поверхности жидкости, покрытой адсорбированной плёнкой.

Решение. Если вязкость жидкости не слишком велика, то растягивающие (тангенциальные) силы, действующие на плёнку со стороны жидкости, малы, и поэтому плёнку можно рассматривать как несжимаемую.

Соответственно этому можно вычислять диссипацию энергии как диссипацию вблизи твёрдой стенки, т. е. по формуле (24,14). Написав потенциал скорости в виде $\varphi = \varphi_0 e^{ikx - \omega t e - kz}$, получим для диссипации, отнесённой к единице площади поверхности:

$$\bar{E}_{\text{кин}} = - \sqrt{\frac{\rho \eta \omega}{8}} |k \dot{\varphi}_0|^2.$$

Полная же энергия (тоже отнесённая к единице площади) есть

$$\bar{E} = \rho \int \bar{v}^2 dz = \frac{\rho}{2k} |k \varphi_0|^2.$$

Коэффициент затухания равен (используем соотношение (61,3)):

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6} \eta^{1/2}}{2 \sqrt{2} \alpha^{1/3} \rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4} \eta^{1/2} \alpha^{1/4}}{2 \sqrt{2} \rho^{3/4}}.$$

Отношение этой величины к коэффициенту затухания капиллярных волн на чистой поверхности жидкости (задача 2, § 61) равно

$$\frac{1}{4 \sqrt{2}} \left(\frac{\alpha \rho}{k \eta^2} \right)^{1/4}$$

и велико по сравнению с единицей, если только длина волны не чрезмерно мала. Таким образом, наличие адсорбированной плёнки на поверхности жидкости приводит к значительному увеличению коэффициента затухания волн.

ГЛАВА VIII

ЗВУК

§ 63. Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнём с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют звуковыми волнами. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость \mathbf{v} в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (63,1)$$

где ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а ρ', p' — их изменения в звуковой волне ($\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$).

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

при подстановке в него (63,1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка (ρ', p', \mathbf{v} надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (63,2)$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (63,3)$$

Условие применимости линеаризованных уравнений движения (63,2) и (63,3), для распространения звуковых волн заключается в малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со

скоростью звука: $v \ll c$. Это условие можно получить, например, из требования $\rho' \ll \rho_0$ (см. ниже формулу (63,12)).

Уравнения (63,2) и (63,3) содержат неизвестные функции \mathbf{v} , p' , ρ' . Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение p' давления связано с малым изменением ρ' плотности уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho'. \quad (63,4)$$

Заменив с его помощью ρ' на p' в уравнении (63,2), получим:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (63,5)$$

Два уравнения (63,3) и (63,5) с неизвестными \mathbf{v} и p' полностью описывают звуковую волну.

Для того чтобы выразить все неизвестные величины через одну из них, удобно ввести потенциал скорости согласно $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Из уравнения (63,3) получим равенство

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (63,6)$$

связывающее p' с φ (индекс у ρ_0 и ρ_0 здесь и ниже мы будем для краткости опускать). После этого найдём из (63,5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (63,7)$$

которому должен удовлетворять потенциал φ ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (63,8)$$

Уравнение вида (63,7) называется волновым. Применив к (63,7) операцию grad , найдём, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трёх компонент скорости \mathbf{v} , а взяв производную по времени от (63,7), найдём, что волновому уравнению удовлетворяет и давление p' (а потому и ρ').

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от x . Другими словами, всё движение однородно в плоскости y, z ; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (63,7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (63,9)$$

Для решения этого уравнения вводим вместо x, t новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (63,9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя ещё раз, получим $\varphi_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (63,10)$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин (p' , ρ' , v) в плоской волне.

Будем говорить для определённости о плотности $\rho' = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $\rho' = f_1(x - ct)$. Выясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const.}$ плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных x . Очевидно, что плотность одинакова для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const.}$, или

$$x = \text{const.} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке жидкости её плотность имеет определённое значение, то через промежуток времени t то же самое значение плотность имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движения распространяется в среде вдоль оси x со скоростью c , называемой скоростью звука.

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой, как говорят, бегущую плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Очевидно, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x .

Из трёх компонент скорости $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ в плоской волне отлична от нуля только компонента $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена по направлению распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость $v_x = v$ связана с давлением p' и плотностью ρ' простыми соотношениями. Написав $\varphi = f(x - ct)$, имеем $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x - ct)$ и $p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct)$. Сравнивая

эти выражения, находим:

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \quad (63,11)$$

Подставляя сюда согласно (63,4) $p' = c^2 \rho'$, находим связь между скоростью и изменением плотности:

$$v = \frac{c \rho'}{\rho}. \quad (63,12)$$

Укажем также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем $T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s p'$ и, воспользовавшись известной термодинамической формулой $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ и формулой (63,11), получим:

$$T' = \frac{c \beta T}{c_p} v, \quad (63,13)$$

где $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — коэффициент теплового расширения.

Формула (63,8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости вещества. Последняя связана с изотермической сжимаемостью известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \quad (63,14)$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Уравнение состояния идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где R — газовая постоянная, а μ — молекулярный вес. Для скорости звука получим выражение

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (63,15)$$

где посредством γ обозначено отношение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ¹⁾. Поскольку γ обычно слабо зависит от температуры, то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры. При заданной температуре она не зависит от давления газа.

Весьма важным случаем волн являются так называемые монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде действительной части ком-

¹⁾ Полезно обратить внимание на то, что скорость звука в газе порядка величины средней тепловой скорости молекул.

плексного выражения (см. начало § 24). Так, для потенциала скорости напишем

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \}, \quad (63,16)$$

где ω — частота волны. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0, \quad (63,17)$$

получающемуся при подстановке (63,16) в (63,7).

Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . В такой волне все величины являются функциями только от $x - ct$, и потому, скажем, потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{Re} \left\{ A e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}, \quad (63,18)$$

где A — постоянная, называемая комплексной амплитудой. Написав её в виде $A = a e^{i\alpha}$ с действительными постоянными a и α , будем иметь:

$$\varphi = a \cos \left(\frac{\omega}{c} x - \omega t + \alpha \right). \quad (63,19)$$

Постоянную a называют амплитудой, а аргумент под знаком \cos фазой волны. Обозначим посредством \mathbf{n} единичный вектор в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (63,20)$$

называется волновым вектором. Вводя этот вектор, можно написать (63,18) в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}. \quad (63,21)$$

Монохроматические волны играют весьма существенную роль в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нём говорят также как о спектральном разложении). Об отдельных компонентах этого разложения говорят как о монохроматических компонентах волны или как о её компонентах Фурье.

Задачи

1. Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нём мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределёнными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы.

Решение. В двухфазной системе p и T не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз.

Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую. Пусть x — доля (по массе) фазы 2 в системе. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} s &= (1-x)s_1 + xs_2, \\ V &= (1-x)V_1 + xV_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам 1 и 2. Для вычисления производной $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ преобразуем её от переменных p, s к переменным p, x и получаем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p},$$

после чего подстановка (1) даёт

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = x \left[\frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_2}{dp} \right] + (1-x) \left[\frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_1}{dp} \right]. \quad (2)$$

Скорость звука определится с помощью (1) и (2) по формуле (63,8).

Раскрывая полные производные по давлению, вводя скрытую теплоту перехода из фазы 1 в фазу 2: $q = T(s_2 - s_1)$ и воспользовавшись формулой Клапейрона-Клаузиуса для производной $\frac{dp}{dT}$ вдоль кривой равновесия фаз $\left(\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}\right)$, получим выражение, стоящее в первой квадратной скобке в (2) в виде

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q} \left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p (V_2 - V_1) - \frac{Tc_{p2}}{q^2} (V_2 - V_1)^2.$$

Аналогично преобразуется и вторая скобка.

Пусть фаза 1 — жидкость, а фаза 2 — пар; последний рассматриваем как идеальный газ, а удельным объёмом V_1 можно пренебречь по сравнению с V_2 . Если $x \ll 1$ (жидкость с небольшим количеством пара в виде пузырьков), то для скорости звука получается

$$c = \frac{q\mu p V_1}{RT \sqrt{c_{p1} T}} \quad (3)$$

(R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес). Эта скорость, вообще говоря, очень мала; таким образом, при образовании в жидкости пузырьков пара (кавитация) скорость звука в ней скачкообразно резко падает.

Если же $1-x \ll 1$ (пар с незначительным количеством жидкости в виде капелек), то получается:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_{p2} T}{q^2}. \quad (4)$$

Сравнивая со скоростью звука в чистом газе (63,15), найдём, что и здесь добавление второй фазы уменьшает скорость звука, хотя и далеко не в такой сильной степени.

В промежутке при возрастании x от нуля до единицы скорость звука монотонно возрастает от значения (3) до значения (4).

Отметим, что при $x=0$ и $x=1$ скорость звука испытывает скачок при переходе от однофазной системы к двухфазной. Это обстоятельство приво-

дит к тому, что при очень близких к нулю или единице значениях x обычная линейная теория звука вообще становится неприменимой уже при малых амплитудах звуковой волны: производимые волной сжатия и разрежения в данных условиях сопровождаются переходом двухфазной системы в однофазную (и обратно), в результате чего совершенно нарушается существование для теории предположение о постоянстве скорости звука.

2. Определить скорость звука в газе, нагретом до настолько высокой температуры, что давление равновесного чёрного излучения в нём сравнимо с давлением самого газа.

Решение. Давление вещества равно

$$p = nkT + \frac{ak}{4} T^4,$$

а энтропия

$$s = \frac{k}{m} \ln \frac{T^{3/2}}{n} + \frac{akT^3}{n}.$$

В этих выражениях первые члены относятся к частицам, а вторые — к излучению; n — плотность числа частиц, m — их масса, k — постоянная Больцмана, $a = \frac{4\pi^2 k^3}{45 \hbar^3 c^3}$ (1). В плотности же вещества чёрное излучение не играет роли, так что $p = mn$. Скорость звука обозначим здесь в отличие от скорости света посредством u ; записывая производные в виде якобианов, имеем:

$$u^2 = \frac{\partial(p, s)}{\partial(\rho, s)} = \frac{\partial(p, s)}{\partial(n, T)} / \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(n, T)}.$$

Вычисляя эти якобианы, получим:

$$u^2 = \frac{5kT}{3m} \left[1 + \frac{2a^2 T^6}{5n(n + 2aT^3)} \right].$$

§ 64. Энергия и импульс звуковых волн

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объёма жидкости равна $\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\frac{\rho'v^2}{2}$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим:

$$\rho_0 \varepsilon_0 + \rho' \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

Производные берутся при постоянной энтропии, поскольку звуковая волна адиабатична. В силу термодинамического соотношения $d\varepsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$ имеем: $\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w$, а

¹⁾ См., например, «Статистическая физика», 3-е изд., § 60, Гостехиздат, 1951

вторая производная равна

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s \left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объёма жидкости равна

$$\rho_0\varepsilon_0 + w_0\rho' + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \rho_0\frac{v^2}{2}.$$

Первый член в этом выражении ($\varepsilon_0\rho_0$) представляет собой энергию единицы объёма неподвижной жидкости и не имеет отношения к звуковой волне. Что касается второго члена ($w_0\rho'$), то это есть изменение энергии, связанное просто с изменением количества вещества (массы жидкости) в каждой данной единице объёма. В полной энергии, получающейся интегрированием энергии единицы объёма по всему объёму жидкости, этот член выпадает: поскольку общее количество жидкости остаётся неизменным, то $\int\rho dV = \int\rho_0 dV$, так что $\int\rho' dV = 0$. Таким образом, полное изменение энергии жидкости, связанное с наличием звуковой волны, равно интегралу

$$\int\left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)dV.$$

Подинтегральное выражение можно рассматривать как плотность E звуковой энергии:

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}. \quad (64,1)$$

Это выражение упрощается в случае бегущей плоской волны. В такой волне $\rho' = \rho_0\frac{v}{c}$ (см. (63,12)), и оба члена в (64,1) оказываются одинаковыми, так что

$$E = \rho_0 v^2. \quad (64,2)$$

В общем случае произвольной волны такое соотношение не имеет места. Аналогичную формулу можно написать в общем случае лишь для среднего (по времени) значения полной звуковой энергии. Она следует непосредственно из известной общей теоремы механики о том, что во всякой системе, совершающей малые колебания, среднее значение полной потенциальной энергии равно среднему значению полной кинетической энергии. Поскольку последняя равна в данном случае $\frac{1}{2}\int\rho_0\bar{v}^2 dV$, то мы находим, что полная средняя звуковая энергия есть

$$\int\bar{E} dV = \int\rho_0\bar{v}^2 dV. \quad (64,3)$$

Если представить немонахроматическую волну в виде наложения ряда монахроматических волн, то средняя энергия волны будет равна

сумме средних энергий каждой из монохроматических компонент. Действительно, если \mathbf{v} представлено в виде суммы ряда членов с различными частотами, то в $\overline{v^2}$ войдут наряду с квадратами каждого из таких членов также произведения членов с различными частотами. Эти произведения содержат множители вида

$$e^{i(\omega - \omega')t},$$

являющиеся периодическими функциями времени. Но среднее значение простой периодической функции равно нулю, так что члены такого вида исчезают. Таким образом, в средней энергии остаются только члены, содержащие средние квадраты каждой из монохроматических компонент.

Далее, рассмотрим некоторый объём жидкости, в которой распространяется звук, и определим средний поток энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объём. Плотность потока энергии в жидкости равна согласно (6,3) $\rho \mathbf{v} \left(\omega + \frac{v^2}{2} \right)$. В рассматриваемом случае можно пренебречь членом с v^2 как малым третьего порядка. Поэтому средняя плотность потока энергии в звуковой волне есть $\overline{\rho \mathbf{v} \omega}$. Подставляя сюда $\omega = \omega_0 + \omega'$, имеем:

$$\overline{\rho \omega \mathbf{v}} = \overline{\omega_0 \rho \mathbf{v}} + \overline{\rho \omega' \mathbf{v}}.$$

Для малого изменения ω' тепловой функции имеем $\omega' = \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s p'$.

Поскольку $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho}$, то $\omega' = \frac{p'}{\rho}$ и, далее,

$$\overline{\rho \omega \mathbf{v}} = \overline{\omega_0 \rho \mathbf{v}} + \overline{p' \mathbf{v}}.$$

Полный поток энергии через рассматриваемую поверхность равен интегралу

$$\oint (\omega_0 \overline{\rho \mathbf{v}} + \overline{p' \mathbf{v}}) d\mathbf{f}.$$

Но поскольку общее количество жидкости в данном объёме остаётся в среднем неизменным, то усреднённый по времени поток вещества $\oint \overline{\rho \mathbf{v}} d\mathbf{f}$ через замкнутую поверхность должен обращаться в нуль. Поэтому поток энергии есть просто

$$\oint \overline{p' \mathbf{v}} d\mathbf{f}.$$

Мы видим, что роль средней плотности потока звуковой энергии играет вектор

$$\overline{\mathbf{q}} = \overline{p' \mathbf{v}}. \quad (64,4)$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} p' \mathbf{v} = 0. \quad (64,5)$$

В таком виде это уравнение выражает закон сохранения звуковой энергии, причём роль плотности потока этой энергии играет как раз вектор $\mathbf{q} = p'\mathbf{v}$. Таким образом, это выражение справедливо не только для среднего значения потока, но и для его значения в каждый данный момент времени.

В бегущей плоской волне изменение давления связано со скоростью посредством $p' = c\rho_0 v$. Вводя единичный вектор \mathbf{n} в направлении распространения волны (совпадающем с направлением скорости \mathbf{v}), получим $\mathbf{q} = c\rho_0 v^2 \mathbf{n}$, или

$$\mathbf{q} = cE\mathbf{n}. \quad (64,6)$$

Таким образом, в плоской звуковой волне плотность потока энергии равна плотности энергии, помноженной на скорость звука, — результат, который естественно было ожидать.

Рассмотрим теперь звуковую волну, занимающую в каждый данный момент времени некоторую конечную область пространства¹⁾ («волновой пакет»), и определим полный импульс жидкости в такой волне. Импульс единицы объёма жидкости совпадает с плотностью потока массы $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Подставляя $\rho = \rho_0 + \rho'$, имеем $\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. Изменение плотности связано с изменением давления посредством $\rho' = \frac{p'}{c^2}$. С помощью (64,4) получаем поэтому

$$\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{c^2}. \quad (64,7)$$

Поскольку движение в звуковой волне потенциально, то можно написать $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ (подчеркнём, что это утверждение не связано с теми пренебрежениями, которые были сделаны в § 63 при выводе линейных уравнений движения, — решение с $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ является точным решением уравнений Эйлера). Поэтому имеем:

$$\mathbf{j} = \rho_0\nabla\varphi + \frac{\mathbf{q}}{c^2}.$$

Полный импульс волны равен интегралу $\int \mathbf{j} dV$ по всему занимаемому ею объёму. Но интеграл от $\nabla\varphi$ может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\int \nabla\varphi dV = \oint \varphi d\mathbf{f}$$

и обращается в нуль, так как вне занимаемого волной объёма $\varphi = 0$. Таким образом, полный импульс волны равен

$$\int \mathbf{j} dV = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{q} dV. \quad (64,8)$$

Эта величина, вообще говоря, отнюдь не обращается в нуль. Но наличие не равного нулю полного импульса означает, что имеет место

¹⁾ Нигде не ограниченную твёрдыми стенками.

перенос вещества. Мы приходим к результату, что распространение звукового волнового пакета сопровождается переносом вещества жидкости. Этот эффект является эффектом второго порядка малости (поскольку q есть величина второго порядка).

Наконец, вычислим среднее значение изменения p' давления в звуковой волне. В первом приближении, соответствующем обычным линейным уравнениям движения, p' является периодической знакопеременной функцией, и среднее значение p' обращается в нуль. Этот результат, однако, перестаёт иметь место, если обратиться к более высоким приближениям. Если ограничиться величинами второго порядка малости, то оказывается возможным выразить $\overline{p'}$ через величины, вычисляемые с помощью линейных уравнений звука, так что не приходится прибегать к непосредственному решению нелинейных уравнений движения, получающихся при учёте величин высших порядков.

Будем исходить из уравнения Бернулли:

$$\omega + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Усредним это равенство по времени. Среднее значение производной по времени $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ обращается в нуль¹⁾. Написав также $\omega = \omega_0 + \omega'$ и включив постоянную ω_0 в const., получаем:

$$\overline{\omega'} + \frac{\overline{v^2}}{2} = \text{const.}$$

Будем предполагать, что волна распространяется в неограниченном объёме жидкости, но на бесконечности затухает, т. е. v , ω' и тому подобные величины обращаются в нуль. Поскольку const. одинакова во всём пространстве, то ясно, что должно быть const. = 0, так что

$$\overline{\omega'} + \frac{\overline{v^2}}{2} = 0. \quad (64,9)$$

Разложим, далее, ω' в ряд по степеням p' ; с точностью до членов второго порядка имеем:

$$\omega' = \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s p' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \right)_s p'^2,$$

¹⁾ По общему определению средних величин имеем для среднего значения производной от какой-либо функции $f(t)$:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{df}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T) - f(-T)}{2T}.$$

Если функция $f(t)$ остаётся конечной при всех t , то этот предел равен нулю, так что $\overline{\frac{df}{dt}} = 0$.

и поскольку $\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = 1/\rho$, то

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Подставляя это в (64,9), получим:

$$\bar{p}' = -\frac{\rho_0 \bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{p}'^2}{2\rho_0 c^2} = -\frac{\rho_0 \bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{p}'^2 c^2}{2\rho_0}, \quad (64,10)$$

чем и определяется искомое среднее давление. Стоящее справа выражение является величиной второго порядка малости и для его вычисления надо пользоваться p' и v , получающимися при решении линейных уравнений движения. Для средней плотности имеем:

$$\bar{\rho}' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \bar{p}' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \bar{p}'^2. \quad (64,11)$$

Если в рассматриваемом объёме волну можно считать бегущей плоской, то $v = c \frac{p'}{\rho_0}$, так что $\bar{v}^2 = \frac{\bar{p}'^2}{\rho_0^2} c^2$, и выражение (64,10) обращается в нуль, т. е. в плоской волне среднее изменение давления является эффектом порядка более высокого, чем второй. Изменение же плотности $\bar{\rho}' = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \frac{\bar{p}'^2}{2}$ в нуль не обращается. (Отметим, что производная $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s$ фактически всегда отрицательна и поэтому в бегущей волне $\bar{\rho}' < 0$.) В этом же приближении имеем для среднего значения тензора плотности потока импульса в бегущей плоской волне

$$\bar{p} + \overline{\rho v_i v_k} = \rho_0 + \rho_0 \overline{v_i v_k}.$$

Первый член связан с равновесным давлением и не имеет отношения к звуковой волне. Во втором же члене вводим единичный вектор \mathbf{n} в направлении \mathbf{v} (совпадающем с направлением распространения волны) и, воспользовавшись соотношением (64,2), будем иметь для плотности потока импульса в звуковой волне

$$\bar{\Pi}_{ik} = \bar{E} n_i n_k. \quad (64,12)$$

Если волна распространяется вдоль оси x , то отлична от нуля только компонента $\bar{\Pi}_{xx} = \bar{E}$. Таким образом, в рассматриваемом приближении в плоской звуковой волне имеется средний поток только x -компоненты импульса, причём переносится он в направлении оси x .

§ 65. Отражение и преломление звуковых волн

Когда звуковая волна попадает на границу между двумя различными средами (жидкостями или газами), с ней происходят явления отражения и преломления. Это значит, что наряду с падающей волной возникает ещё две; одна из них — отражённая — распространяется обратно от поверхности раздела в первой среде, а вторая — преломлённая — распространяется от поверхности раздела во второй среде. Следовательно, движение в первой среде является наложением двух волн (падающей и отражённой); во второй среде имеется одна (преломлённая) волна.

Связь между падающей, отражённой и преломлённой волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела между обеими средами, требующими равенства давлений и нормальных к поверхности раздела компонент скорости.

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической продольной волны в случае плоской границы раздела. Плоскость y, z выберем в качестве граничной. Легко видеть, что все три волны — падающая, отражённая и преломлённая — будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z волнового вектора (но не компоненту k_x по направлению, перпендикулярному к плоскости раздела). Действительно, в неограниченной однородной среде монохроматическая волна с постоянными \mathbf{k} и ω является решением уравнений движения. При наличии границы раздела добавляются лишь граничные условия, которые в нашем случае относятся к $x = 0$, т. е. не зависят ни от времени, ни от координат y и z . Поэтому зависимость решения от t и от y, z остаётся неизменной во всём пространстве и времени, т. е. ω, k_y, k_z остаются теми же, какими они были в падающей волне.

Из этого результата могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения отражённой и преломлённой волн. Пусть x, y — плоскость падения волны. Тогда в падающей волне $k_z = 0$; то же самое должно иметь место и для отражённой и преломлённой волн. Таким образом, направления распространения падающей, отражённой и преломлённой волн лежат в одной плоскости.

Пусть θ есть угол между направлением волны и осью x . Тогда из равенства величин $k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ для падающей и отражённой волн следует, что

$$\theta_1 = \theta'_1, \quad (65,1)$$

т. е. угол падения θ_1 равен углу отражения θ'_1 . Из аналогичного же равенства для падающей и преломлённой волн следует соотношение

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (65,2)$$

между углом падения θ_1 и углом преломления θ_2 (c_1 и c_2 — скорости звука в обеих средах).

Для того чтобы получить количественное соотношение между интенсивностями падающей, отражённой и преломлённой волн, пишем потенциалы скорости в этих волнах соответственно в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\}, \\ \varphi_1' &= A_1' \exp \left\{ i\omega \left(-\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\}, \\ \varphi_2 &= A_2 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_2} \cos \theta_2 + \frac{y}{c_2} \sin \theta_2 - t \right) \right\}.\end{aligned}$$

На поверхности раздела ($x=0$) должны быть равными давления ($p = -\rho\dot{\varphi}$) и нормальные скорости ($v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$) в обеих средах; эти условия приводят к равенствам

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos \theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos \theta_2}{c_2} A_2.$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение средних (по времени) плотностей потока энергии в отражённой и падающей волнах. Поскольку плотность потока энергии в плоской волне равна crv^2 , то имеем:

$$R = \frac{c_1 \rho_1 \overline{v_1'^2}}{c_1 \rho_1 \overline{v_1^2}} = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}.$$

Простое вычисление приводит к результату

$$R = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1} \right)^2. \quad (65,3)$$

Углы θ_1 и θ_2 связаны друг с другом соотношением (65,2); выразив θ_1 через θ_2 , можно представить коэффициент отражения в виде

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}} \right]^2. \quad (65,4)$$

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) эта формула даёт просто

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2. \quad (65,5)$$

При угле падения, определяющемся из

$$\operatorname{tg}^2 \theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2 (c_1^2 - c_2^2)}, \quad (65,6)$$

коэффициент отражения обращается в нуль, т. е. звуковая волна целиком преломляется, не отражаясь вовсе; такой случай возможен, если $c_1 > c_2$, но $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ (или наоборот).

ЗАДАЧА

Определить давление, оказываемое звуковой волной на границу раздела между двумя жидкостями.

Решение. Сумма полных потоков энергии в отражённой и преломлённой волнах должна быть равна падающему потоку энергии. Относя поток энергии к единице площади поверхности раздела, напишем это условие в виде

$$c_1 E_1 \cos \theta_1 = c_1 E_1' \cos \theta_1 + c_2 E_2 \cos \theta_2,$$

где E_1 , E_1' , E_2 — плотности энергии в падающей, отражённой и преломлённой волнах. Вводя коэффициент отражения $R = \bar{E}_1' / \bar{E}_1$, имеем отсюда

$$\bar{E}_2 = \frac{c_1 \cos \theta_1}{c_2 \cos \theta_2} (1 - R) \bar{E}_1.$$

Искомое давление p определяется как x -компонента импульса, теряемого в единицу времени звуковой волной (отнесённая к единице площади границы раздела). С помощью выражения (64,12) для тензора плотности потока импульса в звуковой волне найдем:

$$p = \bar{E}_1 \cos^2 \theta_1 + \bar{E}_1' \cos^2 \theta_1 - \bar{E}_2 \cos^2 \theta_2.$$

Подставляя выражение для \bar{E}_2 , вводя R и используя (65,2), получим:

$$p = \bar{E}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 [\operatorname{ctg} \theta_1 \cdot (1 + R) - \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot (1 - R)].$$

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) найдём с помощью (65,5)

$$p = 2\bar{E}_1 \left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \right].$$

§ 66. Геометрическая акустика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление её распространения и её амплитуда одинаковы во всём пространстве. Произвольные звуковые волны этим свойством, конечно, не обладают. Однако возможны случаи, когда звуковую волну, не являющуюся плоской, в каждом небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести понятие о лучах как о линиях, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны, и можно говорить о распространении звука вдоль лучей, отвлекаясь при этом от его волновой природы. Изучение законов распространения звука в таких случаях составляет предмет геометрической акустики. Можно сказать, что геометрическая акустика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

Выведем основное уравнение геометрической акустики — уравнение, определяющее направление лучей. Напишем потенциал скорости волны в виде

$$\varphi = ae^{i\psi}. \quad (66,1)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая акустика применима, амплитуда a является медленно меняющейся функцией координат и времени, а фаза волны ψ есть «почти линейная» функция (напомним, что в плоской волне $\psi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha$ с постоянными \mathbf{k} и ω). В малых участках пространства и малых интервалах времени фазу ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \operatorname{grad} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} t.$$

Соответственно тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую, определяем волновой вектор и частоту волны в каждой точке как

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad} \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (66,2)$$

Величина ψ называется эйконалом.

В звуковой волне имеем $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Подставляя сюда (66,2), получим следующее основное уравнение геометрической акустики:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (66,3)$$

Если жидкость неоднородна, то коэффициент $\frac{1}{c^2}$ является функцией координат.

Как известно из механики, движение материальных частиц может быть определено с помощью уравнения Гамильтона-Якоби, являющегося, как и уравнение (66,3), уравнением в частных производных первого порядка. Аналогичной ψ величиной является при этом действие S частицы, а производные от действия определяют импульс \mathbf{p} и функцию Гамильтона H (энергию) частицы согласно формулам $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$, $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$, аналогичным формулам (66,2). Известно, далее, что уравнение Гамильтона-Якоби эквивалентно уравнениям Гамильтона, имеющим вид $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$. Вследствие указанной аналогии между механикой материальной частицы и геометрической акустикой мы можем непосредственно написать аналогичные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (66,4)$$

В однородной изотропной среде $\omega = ck$ с постоянным c , так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c \mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{k}), т. е. как

и должно было быть, лучи распространяются по прямым линиям, сохраняя при этом постоянную частоту ω .

Частота остаётся, разумеется, постоянной вдоль лучей вообще всегда, когда распространение звука происходит в стационарных условиях, т. е. свойства среды в каждой точке пространства не меняются со временем. Действительно, полная производная от частоты по времени, определяющая её изменение вдоль распространяющегося луча, равна

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial\omega}{\partial k} \dot{k}.$$

При подстановке (66,4) два последних члена взаимно сокращаются; в стационарном же случае $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$, а потому и $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

При стационарном распространении звука в неподвижной неоднородной среде $\omega = ck$, где c есть заданная функция координат. Уравнения (66,4) дают

$$\dot{r} = cn, \quad \dot{k} = -k\nabla c. \quad (66,5)$$

Абсолютная величина вектора k меняется вдоль луча просто по закону $k = \omega/c$ ($c = \text{const.}$). Для определения же изменения направления n полагаем во втором из уравнений (66,5) $k = \frac{\omega}{c} n$ и пишем:

$$\frac{\omega}{c} \dot{n} - \frac{\omega}{c^2} n (\nabla c \dot{r}) = -k\nabla c,$$

откуда

$$\frac{dn}{dt} = -\nabla c + n(n\nabla c).$$

Вводя элемент проходимой лучом длины $dl = c dt$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dn}{dl} = -\frac{\nabla c}{c} + \frac{n}{c} (n\nabla c). \quad (66,6)$$

Этим уравнением определяется форма лучей; n есть единичный вектор касательной к лучу¹⁾.

Если уравнение (66,3) решено и эйконал ψ как функция координат и времени известен, то можно найти также и распределение

1) Как известно из дифференциальной геометрии, производная $\frac{dn}{dl}$ вдоль луча равна N/R , где N — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Выражение же в правой стороне уравнения (66,6) есть, с точностью до множителя $1/c$, производная от скорости звука по направлению главной нормали; поэтому можно написать это уравнение в виде

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c} (N\nabla c).$$

Луч изгибается в сторону уменьшения скорости звука.

интенсивности звука в пространстве. В стационарных условиях оно определяется уравнением $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ (\mathbf{q} — плотность потока звуковой энергии), которое должно выполняться во всём пространстве вне источников звука. Написав $\mathbf{q} = cE \mathbf{n}$, где E — плотность звуковой энергии (см. (64,6)), и имея в виду, что \mathbf{n} есть единичный вектор в направлении $\mathbf{k} = \nabla\psi$, получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div} \left(cE \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \right) = 0, \quad (66,7)$$

которое и определяет распределение E в пространстве.

Вторая из формул (66,4) определяет скорость распространения волн по известной зависимости частоты от компонент волнового вектора. Это — весьма важная формула, относящаяся не только к звуковым, но и ко всяким волнам вообще (мы уже пользовались, например, этой формулой в § 12 в применении к гравитационным волнам). Приведём здесь ещё один вывод этой формулы, полезный для уяснения смысла определяемой ею скорости. Рассмотрим волну (или, как говорят, волновой пакет), занимающую некоторую конечную область пространства. Предположим, что волна такова, что в её спектральное разложение входят монохроматические компоненты с частотами, лежащими в некотором малом интервале; то же самое относится и к компонентам их волновых векторов. Пусть ω есть некоторая средняя частота волны и \mathbf{k} — средний волновой вектор. Тогда в некоторый начальный момент времени волна описывается функцией вида

$$\varphi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}). \quad (66,8)$$

Функция $f(\mathbf{r})$ заметно отлична от нуля только в некоторой малой (но большой по сравнению с длиной волны $1/k$) области пространства. Её разложение в интеграл Фурье содержит согласно сделанным предположениям компоненты вида $e^{i\mathbf{r}\Delta\mathbf{k}}$, где $\Delta\mathbf{k}$ — малые величины.

Таким образом, каждая из монохроматических компонент волны пропорциональна в начальный момент времени множителю вида

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const. } e^{i(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})\mathbf{r}}. \quad (66,9)$$

Соответствующая ей частота есть $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ (напоминаем, что частота является функцией волнового вектора). Поэтому в момент времени t та же компонента будет иметь вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const. } e^{i(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})t}.$$

Воспользуемся тем, что $\Delta\mathbf{k}$ мало, и разложим $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ в ряд, ограничившись первыми двумя членами:

$$\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \Delta\mathbf{k},$$

где $\omega = \omega(\mathbf{k})$ есть частота, соответствующая «среднему» волновому вектору. Тогда $\varphi_{\mathbf{k}}$ приобретает вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const. } e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} e^{i\Delta\mathbf{k} \left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t \right)}. \quad (66,10)$$

Если теперь произвести обратное суммирование всех монохроматических компонент волны со всеми имеющимися в ней $\Delta\mathbf{k}$, то, как видно из сравнения (66,9) и (66,10), мы получим:

$$\varphi = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} f \left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t \right), \quad (66,11)$$

где f — та же функция, что и в (66,8). Сравнение с (66,8) показывает, что за время t вся картина распределения амплитуды в волне передвинулась в пространстве на расстояние $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t$ (экспоненциальный множитель перед f в (66,11) влияет только на фазу волны). Следовательно, скорость её равна

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \quad (66,12)$$

Эта формула и определяет скорость распространения волны с произвольной зависимостью ω от \mathbf{k} ¹⁾. В случае $\omega = ck$ с постоянным c она приводит, конечно, к обычному результату $U = \omega/k = c$. В общем же случае произвольной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ скорость распространения волны является функцией её частоты и её направление может не совпадать с направлением волнового вектора.

З а д а ч а

Определить изменение с высотой амплитуды звука, распространяющегося в поле тяжести в изотермической атмосфере.

Решение. Вдоль изотермической атмосферы (рассматриваемой как идеальный газ) скорость звука постоянна. Плотность потока энергии, очевидно, падает вдоль луча обратно пропорционально квадрату расстояния r от источника:

$$\overline{c\rho v^2} \propto \frac{1}{r^2}.$$

1) Скорость, определяемую этой формулой, называют также групповой скоростью волны, а отношение ω/k — фазовой скоростью. Надо, однако, иметь в виду, что фазовая скорость не соответствует реальному физическому распространению чего бы то ни было.

По поводу приведённого в тексте вывода подчеркнём, что выражаемое формулой (66,11) передвижение волнового пакета без изменения его формы (т. е. распределения в пространстве его амплитуды) является приближённым и связано с предположенной малостью интервала $\Delta\mathbf{k}$. Вообще же говоря, при наличии зависимости U от ω волновой пакет по мере своего распространения «размазывается» — занимаемая им в пространстве область расширяется. Можно показать, что это «размазывание» пропорционально квадрату величины интервала $\Delta\mathbf{k}$ волновых векторов, входящих в разложение волнового пакета.

Отсюда следует, что амплитуда колебаний скорости в звуковой волне меняется вдоль луча обратно пропорционально $r \sqrt{\rho}$; согласно барометрической формуле $\rho \propto e^{-\mu g z / RT}$ (z — высота, μ — молекулярный вес газа, R — газовая постоянная).

§ 67. Распространение звука в движущейся среде

Соотношение $\omega = ck$ между частотой и волновым вектором имеет место только для монохроматической звуковой волны, распространяющейся в неподвижной среде. Нетрудно получить аналогичное соотношение для волны, распространяющейся в движущейся среде (и наблюдаемой в неподвижной системе координат).

Рассмотрим однородный поток жидкости со скоростью \mathbf{u} . Назовём неподвижную систему координат x, y, z системой K и введём также систему K' координат x', y', z' , движущуюся относительно системы K со скоростью \mathbf{u} . В системе K' жидкость неподвижна, и монохроматическая волна в ней имеет обычный вид:

$$\varphi = \text{const. } e^{i(kr' - kct)},$$

Радиус-вектор \mathbf{r}' в системе K' связан с радиусом-вектором \mathbf{r} в системе K равенством $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Поэтому в неподвижной системе координат волна имеет вид

$$\varphi = \text{const. } e^{i[kr - (kc + k\mathbf{u})t]}.$$

Коэффициент при t в показателе есть частота ω волны. Таким образом, в движущейся среде частота связана с волновым вектором \mathbf{k} соотношением

$$\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k}. \quad (67,1)$$

Скорость распространения волн равна

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}; \quad (67,2)$$

это есть геометрическая сумма скорости c в направлении \mathbf{k} и скорости \mathbf{u} «сноса» звука вместе с движущейся жидкостью.

С помощью формулы (67,1) можно рассмотреть так называемый эффект Доплера, заключающийся в том, что частота звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника, не совпадает с частотой колебаний последнего.

Пусть звук, испускаемый неподвижным (относительно среды) источником, воспринимается наблюдателем, движущимся со скоростью \mathbf{u} . В покоящейся относительно среды системе K' имеем $k = \omega_0/c$, где ω_0 — частота колебаний источника. В системе же K , движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$, и частота звука будет согласно (67,1) $\omega = ck - \mathbf{u}\mathbf{k}$. Вводя угол θ между направлением скорости \mathbf{u} и волнового вектора \mathbf{k} и полагая $k = \omega_0/c$,

найдем, что воспринимаемая движущимся наблюдателем частота звука равна

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right). \quad (67,3)$$

В некотором смысле обратным случаем является распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть u обозначает теперь скорость движения источника. Перейдем от неподвижной системы координат к системе K' , движущейся вместе с источником; в системе K' жидкость движется со скоростью $-u$. В системе K' , где источник покоится, частота излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте ω_0 колебаний, совершаемых источником. Изменив в (67,1) знак перед u и вводя угол θ между направлениями u и k , будем иметь:

$$\omega_0 = ck \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right).$$

С другой стороны, в исходной неподвижной системе K частота связана с волновым вектором равенством $\omega = ck$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}. \quad (67,4)$$

Этой формулой определяется связь между частотой ω_0 колебаний движущегося источника звука и частотой ω звука, слышимого неподвижным наблюдателем.

Если источник удаляется от наблюдателя, то угол θ между его скоростью и направлением приходящей в точку наблюдения волной заключён в пределах $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, так что $\cos \theta < 0$. Из (67,4) следует, таким образом, что если источник движется, удаляясь от наблюдателя, то частота слышимого наблюдателем звука уменьшается (по сравнению с ω_0).

Напротив, для приближающегося к наблюдателю источника $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, так что $\cos \theta > 0$, и частота $\omega > \omega_0$ и растёт при увеличении скорости u . При $u \cos \theta > c$ согласно формуле (67,4) ω делается отрицательной, что соответствует тому, что слышимый наблюдателем звук будет в действительности доходить до него в обратном порядке, т. е. звук, излучённый источником в более поздние моменты времени, дойдёт до наблюдателя раньше, чем звук, излучённый в более ранние моменты.

Как было указано в начале § 66, приближение геометрической акустики соответствует случаю достаточно малых длин волн, т. е. больших значений волнового вектора. Для этого, вообще говоря, частота звука должна быть достаточно велика. Однако в акустике

движущихся сред последнее условие становится не обязательным, если скорость движения среды превосходит скорость звука. Действительно, в этом случае k может быть большим даже при равной нулю частоте: из (67,1) получаем при $\omega = 0$ уравнение

$$ck = -uk, \quad (67,5)$$

которое имеет решения, если $u > c$. Таким образом, в среде, движущейся со сверхзвуковыми скоростями, могут существовать стационарные малые возмущения, описываемые (при достаточно больших k) геометрической акустикой. Это значит, что такие возмущения будут располагаться вдоль определённых линий — лучей.

Рассмотрим, например, однородный сверхзвуковой поток, движущийся с постоянной скоростью u , направление которой выберем в качестве оси x . Компоненты вектора k , лежащего в плоскости x, y , связаны соотношением

$$(u^2 - c^2) k_x^2 = c^2 k_y^2, \quad (67,6)$$

получаемся путём возведения в квадрат обеих частей равенства (67,5). Для определения формы лучей воспользуемся уравнениями геометрической акустики (66,4), согласно которым

$$\dot{x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}.$$

Разделив одно из этих уравнений на другое, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \omega / \partial k_y}{\partial \omega / \partial k_x}.$$

Но это отношение есть согласно правилу дифференцирования неявных функций не что иное как производная $-\frac{\partial k_x}{\partial k_y}$ (взятая при постоянной, в данном случае равной нулю частоте). Таким образом, уравнение, определяющее форму лучей по заданной зависимости между k_x и k_y , гласит:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial k_x}{\partial k_y}. \quad (67,7)$$

Подставив сюда (67,6), получим:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

При постоянном u это уравнение определяет два прямолинейных луча, пересекающих ось x под углами $\pm \alpha$, где $\sin \alpha = c/u$.

К подробному изучению этих лучей мы возвратимся в газодинамике, в которой они играют большую роль (см. в особенности §§ 79, 96, 109).

ЗАДАЧИ

1. Вывести уравнение, определяющее форму звуковых лучей, распространяющихся в стационарно движущейся однородной среде с распределением скоростей $\mathbf{u}(x, y, z)$, причём везде $u \ll c$ ¹⁾.

Решение. Подставляя (67,1) и (66,4), получим уравнения распространения лучей в виде

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u} - [\mathbf{k} \operatorname{rot} \mathbf{u}],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}.$$

С помощью этих уравнений вычислим с точностью до членов первого порядка по \mathbf{u} производную $\frac{d}{dt}(k\mathbf{v})$; при вычислении используем равенство

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} \approx \frac{c}{k}(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u}.$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}[\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{u}],$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{v} . С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = \mathbf{n} \frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) + k\mathbf{v} \frac{d\mathbf{n}}{dt}.$$

Поскольку \mathbf{n} и $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$ взаимно перпендикулярны (из $\mathbf{n}^2 = 1$ следует, что $\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}} = 0$)

то из сравнения обоих выражений находим $\dot{\mathbf{n}} = [\operatorname{rot} \mathbf{u} \mathbf{n}]$. Вводя элемент продольной лучом длины $dl = c dt$, пишем окончательно

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{c}[\operatorname{rot} \mathbf{u} \mathbf{n}]. \quad (1)$$

Этим уравнением определяется форма лучей; \mathbf{n} есть единичный вектор касательной к лучу (отнюдь не совпадающий теперь с направлением \mathbf{k} !)

2. Определить форму звуковых лучей в движущейся среде с распределением скоростей $u_x = u(x)$, $u_y = u_z = 0$.

Решение. Раскрывая уравнение (1), находим:

$$\frac{dn_x}{dl} = \frac{n_z}{c} \frac{du}{dz}, \quad \frac{dn_y}{dl} = 0$$

(уравнение для n_z можно не писать, так как $\mathbf{n}^2 = 1$). Второе уравнение даёт

$$n_y = \text{const.} \equiv n_{y0}.$$

В первом же пишем $n_z = \frac{dz}{dl}$, после чего интегрирование даёт

$$n_x = n_{x0} + \frac{u(z)}{c}.$$

Эти формулы решают поставленную задачу.

1) Предполагается, что скорость \mathbf{u} заметно меняется лишь на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны звука.

Предположим, что скорость u равна нулю при $z=0$ и возрастает по направлению вверх ($\frac{du}{dz} > 0$). Если звук распространяется «против ветра» ($n_x < 0$), то его траектория искривляется, загибаясь вверх. При распространении же «по ветру» ($n_x > 0$) луч искривляется, загибаясь вниз; в этом случае луч, вышедший из точки $z=0$ под малым углом наклона к оси x (n_{x0} близко к единице), поднимается лишь на конечную высоту $z = z_{\max}$, которую можно вычислить следующим образом. На высоте z_{\max} луч горизонтален, т. е. $n_z = 0$. Поэтому имеем здесь

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x0}^2 + n_{y0}^2 + 2n_{x0} \frac{u}{c} = 1,$$

так что

$$2n_{x0} \frac{u(z_{\max})}{c} = n_{z0}^2,$$

откуда по заданной функции $u(z)$ и начальному направлению луча \mathbf{n}_0 можно определить z_{\max} .

3. Получить выражение принципа Ферма для звуковых лучей в стационарно движущейся среде.

Решение. Принцип Ферма требует минимальности интеграла $\int \mathbf{k} d\mathbf{l}$, взятого вдоль луча между двумя заданными точками, причём \mathbf{k} предполагается выраженным как функция от частоты ω и направлением луча \mathbf{n} ¹⁾. Эту функцию можно найти, исключая v и k из соотношений $\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k}$ и $v\mathbf{n} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}$. В результате принцип Ферма приобретает вид

$$\delta \int \frac{1}{c^2 - u^2} (\sqrt{(c^2 - u^2) dl^2 + (\mathbf{u} d\mathbf{l})^2} - u dl) = 0.$$

В неподвижной среде этот интеграл сводится к обычному $\int \frac{dl}{c}$.

§ 68. Собственные колебания

До сих пор мы рассматривали только колебательное движение в неограниченных средах. Мы видели, в частности, что в таких средах могут распространяться волны с произвольными частотами.

Положение существенно меняется при переходе к жидкости, находящейся в сосуде конечных размеров. Самые уравнения движения (волновые уравнения) остаются при этом, конечно, теми же, но к ним необходимо добавить теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности твёрдых стенок (или на свободной поверхности жидкости). Мы будем рассматривать здесь только так называемые свободные колебания, т. е. колебания, происходящие при отсутствии переменных внешних сил (колебания, совершаемые под действием внешних сил, называются вынужденными).

Уравнения движения для ограниченной жидкости отнюдь не при всякой частоте имеют решение, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Такие решения существуют лишь для ряда вполне

¹⁾ См. «Теория поля», § 53, Гостехиздат, 1948.

определённых значений ω . Другими словами, в среде конечного объёма могут происходить свободные колебания лишь с вполне определёнными частотами. Эти частоты называются частотами собственных колебаний, или собственными частотами жидкости в данном сосуде.

Конкретные значения собственных частот зависят от формы и размеров сосуда. В каждом данном случае существует бесконечный ряд возрастающих собственных частот. Нахождение их требует конкретного исследования уравнения движения с соответствующими граничными условиями.

Что касается первой, т. е. наименьшей, из собственных частот, то её порядок величины очевиден непосредственно из соображений размерности. Единственным, входящим в задачу параметром с размерностью длины являются линейные размеры l тела. Ясно поэтому, что соответствующая первой собственной частоте длина волны λ_1 должна быть порядка величины l ; порядок величины самой частоты ω_1 получается делением скорости звука на λ_1 . Таким образом,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim \frac{c}{l}. \quad (68,1)$$

Выясним характер движения при собственных колебаниях. Если искать периодическое по времени решение волнового уравнения, скажем, для потенциала скорости, в виде $\varphi = \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$, то для φ_0 будем иметь уравнение

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0. \quad (68,2)$$

В неограниченной среде, когда не надо учитывать никаких граничных условий, это уравнение обладает как действительными, так и комплексными решениями. В частности, оно имеет решение, пропорциональное $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, приводящее к потенциалу вида $\varphi = \text{const. } e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Такое решение представляет собой волну, распространяющуюся с определённой скоростью, или, как говорят, бегущую волну.

Но для среды конечного объёма комплексные решения, вообще говоря, не могут существовать. В этом можно убедиться путём следующего рассуждения. Уравнение, которому удовлетворяет φ_0 , действительно, и то же самое относится к граничным условиям. Поэтому, если $\varphi_0(x, y, z)$ есть решение уравнений движения, то и комплексно сопряжённое φ_0^* тоже есть решение. Поскольку, с другой стороны, решение уравнений при заданных граничных условиях, вообще говоря, однозначно ¹⁾ (с точностью до постоянного множителя), то должно быть $\varphi_0^* = \text{const. } \varphi_0$, где const. — некоторая комплексная постоянная, модуль которой, очевидно, равен единице. Таким образом, φ_0 должно иметь вид

$$\varphi_0 = f(x, y, z) e^{-i\alpha}$$

¹⁾ Это может не иметь места в случае формы сосуда, обладающей высокой симметрией, например, в случае шара.

с действительной функцией f и действительной постоянной α . Потенциал φ имеет, следовательно, вид (берём действительную часть от $\varphi_0 e^{-i\omega t}$):

$$\varphi = f(x, y, z) \cos(\omega t + \alpha), \quad (68,3)$$

т. е. является произведением некоторой функции координат на простую периодическую функцию времени.

Такое решение имеет характер, совершенно отличный от бегущей волны. В бегущей волне [$\varphi = \text{const.} \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)$] фазы $\mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ колебаний в различных точках пространства в один и тот же момент времени различны, будучи равными только в точках, удалённых друг от друга на расстояние, равное длине волны. В волне же (68,3) в каждый момент времени все точки тела колеблются в одной и той же фазе ($\omega t + \alpha$). Ни о каком «распространении» такой волны, очевидно, нельзя говорить. Такие волны называются «стоячими». Таким образом, собственные колебания представляют собой стоячие волны.

Рассмотрим плоскую стоячую звуковую волну, в которой все величины являются функцией только от одной координаты, скажем, x (и от времени). Написав общее решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0$$

в виде $\varphi_0 = a \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right)$, будем иметь:

$$\varphi = a \cos(\omega t + \alpha) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right).$$

Надлежащим выбором начала координат и начала отсчёта времени можно обратить α и β в нуль, так что будет

$$\varphi = a \cos \omega t \cos \frac{\omega}{c} x. \quad (68,4)$$

Для скорости и давления в волне имеем:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a \frac{\omega}{c} \cos \omega t \sin \frac{\omega}{c} x;$$

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \omega \sin \omega t \cos \frac{\omega}{c} x.$$

В точках $x = 0, \frac{\pi c}{\omega}, \frac{2\pi c}{\omega}, \dots$, удалённых друг от друга на расстояние $\frac{\pi c}{\omega} = \frac{\lambda}{2}$, скорость v всегда равна нулю; эти точки называют «узлами» скорости. Посредине между ними (при $x = \frac{\pi c}{2\omega}, \frac{3\pi c}{2\omega}, \dots$) расположены точки, в которых амплитуда колебаний скорости со временем максимальна; эти точки называют «пучностями» волны. Что же касается давления p' , то для него, очевидно, первые точки являются

пучностями, а вторые — узлами. Таким образом, в стоячей плоской звуковой волне пучности давления совпадают с узлами скорости, и наоборот.

Интересным случаем собственных колебаний являются колебания газа, находящегося в сосуде, в котором имеется маленькое отверстие (такой сосуд называют резонатором). В замкнутом сосуде наименьшая из собственных частот, как мы знаем, — порядка величины $\frac{c}{l}$, где l — линейные размеры сосуда. При наличии же маленького отверстия появляется новый вид собственных колебаний со значительно меньшей частотой. Эти колебания связаны с тем, что если между газом внутри и вне сосуда появляется разность давлений, то эта разность может выравняться посредством входа и выхода газа из сосуда наружу. Таким образом, появляются колебания, сопровождающиеся обменом газа между резонатором и внешней средой. Поскольку отверстие мало, то этот обмен происходит медленно; поэтому период колебаний велик, а частота соответственно мала (см. задачу 2). Что касается обычных колебаний, имеющих в замкнутом сосуде, то их частоты под влиянием наличия малого отверстия практически не меняются.

З а д а ч и

1. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Ищем решние уравнения (68,2) в виде

$$\varphi_0 = \text{const.} \cos qx \cos ry \cos sz,$$

причём $q^2 + r^2 + s^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. На стенках сосуда имеем условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, c,$$

где a , b , c — длины сторон параллелепипеда. Отсюда находим $q = \frac{m\pi}{a}$,

$r = \frac{n\pi}{b}$, $s = \frac{p\pi}{c}$, где m , n , p — произвольные целые числа. Таким образом, собственные частоты равны

$$\omega^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} \right).$$

2. К отверстию резонатора присоединена тонкая трубочка (сечения S , длины l); определить собственную частоту колебаний.

Р е ш е н и е. Поскольку трубочка является тонкой, то при колебаниях, сопровождающихся входом и выходом газа из резонатора, можно считать, что заметной скоростью обладает только газ в трубочке, а скорость газа внутри сосуда практически равна нулю. Масса газа в трубочке есть Spl ,

а сила, действующая на него, есть $S(p_0 - p)$ (p, p_0 — давления газа соответственно внутри резонатора и во внешней среде); поэтому должно быть $S\rho\dot{v} = S(p - p_0)(v$ — скорость газа в трубочке). С другой стороны, для производной от давления по времени имеем $\dot{p} = c^2\dot{\rho}$, а уменьшение $-\rho$ плотности газа в резонаторе в единицу времени можно считать равным вытекающему в единицу времени количеству газа $S\rho v$, делённому на объём V резонатора. Таким образом, имеем $\dot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V}v$, откуда

$$\ddot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V}\dot{v} = -\frac{c^2 S}{lV}(p - p_0).$$

Это уравнение даёт $p - p_0 = \text{const.} \cos \omega_0 t$, где собственная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Эта частота мала по сравнению с c/L (L — линейные размеры сосуда), а длина волны соответственно велика по сравнению с L .

При решении мы подразумевали, что линейная амплитуда колебаний газа в трубочке мала по сравнению с её длиной l . В противном случае колебания сопровождаются выходом из трубочки наружу заметной доли находящегося в ней газа, и становится неприменимым использованное выше линейное уравнение движения газа в трубочке.

§ 69. Сферические волны

Рассмотрим звуковую волну, в которой распределение плотности, скорости и т. д. зависит только от расстояния до некоторого центра, т. е. обладает сферической симметрией. Такая волна называется сферической.

Определим общее решение волнового уравнения, описывающее сферическую волну. Будем писать волновое уравнение, например, для потенциала скорости:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку φ есть функция только от расстояния r до центра (и от времени t), то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (69,1)$$

Будем искать решение в виде

$$\varphi = \frac{f(r, t)}{r}.$$

Подстановка приводит после простого вычисления к следующему уравнению для f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Но это есть обычное волновое уравнение в одном измерении, в котором роль координаты играет радиус r . Решение этого уравнения имеет, как мы знаем, вид

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом, общее решение уравнения (69,1) имеет вид

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \quad (69,2)$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, распространяющуюся во все стороны из начала координат. Второй же член есть волна, сходящаяся к центру. В отличие от плоской волны, амплитуда которой остаётся постоянной, в сферической волне амплитуда падает обратно пропорционально расстоянию до центра. Интенсивность же волны, определяющаяся квадратом амплитуды, обратно пропорциональна квадрату расстояния, как и должно было быть, поскольку полный поток энергии в волне распределяется по поверхности, площадь которой растёт пропорционально r^2 .

Переменные части давления и плотности связаны с потенциалом посредством $p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\rho' = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, и их распределение определяется формулами того же вида, что и (69,2). Распределение же скорости (радиальной), определяющейся градиентом потенциала, имеет вид

$$v = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{f_1(ct - r) + f_2(ct + r)}{r} \right\}. \quad (69,3)$$

Если в начале координат нет источника звука, то потенциал (69,2) должен оставаться при $r = 0$ конечным. Для этого необходимо, чтобы было $f_1(ct) = -f_2(ct)$, т. е. φ имеет вид

$$\varphi = \frac{f(ct - r) - f(ct + r)}{r} \quad (69,4)$$

(стоячая сферическая волна). Если же в начале координат находится источник, то потенциал излучаемой им расходящейся волны есть $\varphi = \frac{f(ct - r)}{r}$ и не должен оставаться конечным при $r = 0$, поскольку это решение вообще относится только к области вне тела.

Монохроматическая стоячая сферическая волна имеет вид

$$\varphi = A e^{-i\omega t} \frac{\sin kr}{r}, \quad (69,5)$$

где $k = \omega/c$. Расходящаяся же монохроматическая сферическая волна даётся выражением

$$\varphi = A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}. \quad (69,6)$$

Полезно заметить, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi Ae^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \quad (69,7)$$

в правой части которого стоит δ -функция координат: $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Действительно, везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{r}) = 0$, и мы возвращаемся к однородному уравнению (69,1). Интегрируя же по объёму малой сферы вокруг начала координат (в этой области выражение (69,6) сводится к $\frac{A}{r}e^{-i\omega t}$), получим с обеих сторон — $4\pi Ae^{-i\omega t}$.

Рассмотрим сферическую расходящуюся волну, занимающую в пространстве область в виде шарового слоя, позади которого движение либо отсутствует вовсе, либо быстро затухает; такая волна может возникнуть от источника, действовавшего в течение конечного интервала времени, или от некоторой начальной области звукового возмущения (ср. конец § 71 и задачу 4 § 73). Перед приходом волны в некоторую заданную точку пространства потенциал в ней $\varphi \equiv 0$. После же её прохождения движение снова должно затухнуть; это значит, что во всяком случае должно стать $\varphi = \text{const}$. Но в сферической расходящейся волне потенциал есть функция вида $\varphi = \frac{f(ct-r)}{r}$; такая функция может обратиться в постоянную, только если функция f обращается в нуль. Таким образом, потенциал должен обращаться в нуль как до, так и после прохождения волны¹⁾. Из этого обстоятельства можно вывести важное следствие, касающееся распределения сгущений и разрежений в сферической волне.

Изменение давления в волне связано с потенциалом посредством $p' = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Ввиду сказанного выше ясно, что если проинтегрировать p' по всему времени при заданном r , то мы получим в результате нуль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p' dt = 0. \quad (69,8)$$

Это значит, что по мере прохождения сферической волны через заданную точку пространства в этой точке будут наблюдаться как сгущения ($p' > 0$), так и разрежения ($p' < 0$). В этом отношении сферическая волна существенным образом отличается от плоской, которая может состоять и из одних только сгущений или разрежений.

¹⁾ В противоположность плоской волне, после прохождения которой может быть $\varphi = \text{const} \neq 0$.

Такая же картина будет наблюдаться также и при рассмотрении хода изменения p' с расстоянием в заданный момент времени; вместо интеграла (69,8) будет при этом равен нулю интеграл

$$\int_0^{\infty} r p' dr = 0. \quad (69,9)$$

З а д а ч и

1. В начальный момент времени газ внутри сферического объема (радиуса a) сжат так, что $\rho' = \text{const.} \equiv \Delta$; вне этого объема $\rho' = 0$. Начальная скорость равна нулю во всём пространстве. Определить последующее движение газа.

Решение. Начальные условия для потенциала гласят: $\varphi|_{t=0} = 0$ при $r \leq a$; $\dot{\varphi}|_{t=0} = F(r)$, где $F(r) = 0$ при $r > a$ и $F(r) = -\Delta \frac{c^2}{\rho}$ при $r < a$.

Ищем φ в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{f(ct - r) - f(ct + r)}{r}.$$

Из начальных условий получаем:

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = \frac{r}{c} F(r).$$

Из первого уравнения имеем $f'(-r) + f'(r) = 0$ и вместе со вторым оно даёт $f'(r) = -f'(-r) = -\frac{r}{2c} F(r)$. Наконец, подставляя значение $F(r)$, получаем для производной $f'(\xi)$ и для самой функции $f(\xi)$ следующий результат:

$$\begin{aligned} \text{при } |\xi| > a: & \quad f'(\xi) = 0, \quad f(\xi) = 0; \\ \text{при } |\xi| < a: & \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho} \xi, \quad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho} (\xi^2 - a^2), \end{aligned}$$

чем и определяется решение задачи. Рассмотрим точку с $r > a$, т. е. вне области начального сжатия; для плотности ρ' имеем здесь:

$$\begin{aligned} \text{при } t < \frac{r-a}{c} & \quad \rho' = 0; \\ \text{при } \frac{r-a}{c} < t < \frac{r+a}{c} & \quad \rho' = \frac{\Delta}{2} \frac{r-ct}{r}; \\ \text{при } t > \frac{r+a}{c} & \quad \rho' = 0. \end{aligned}$$

Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $\frac{2a}{c}$; другими словами, волна имеет форму шарового слоя толщины $2a$, заключённого в момент t между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя плотность меняется по линейному закону, причём в наружной его части ($r > ct$) газ сжат ($\rho' > 0$), а во внутренней ($r < ct$) — разрежен ($\rho' < 0$).

2. Определить собственные частоты центрально-симметрических звуковых колебаний в сферическом сосуде.

Решение. Из граничного условия $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ при $r = a$ (a — радиус сосуда, φ — из (69,5)) получим уравнение

$$\operatorname{tg} ka = ka,$$

определяющее собственные частоты. Первая (наименьшая) частота равна $\omega_1 = 4,49 c/a$.

§ 70. Цилиндрические волны

Рассмотрим теперь волну, в которой распределение всех величин однородно вдоль некоторого одного направления (которое мы выберем в качестве оси z) и обладает полной аксиальной симметрией вокруг этой оси. В такой, как говорят, цилиндрической волне имеем $\varphi = \varphi(R, t)$, где посредством R обозначается расстояние до оси z . Определим общий вид такого осесимметрического решения волнового уравнения. Это можно сделать, исходя из общего вида сферически симметричного решения (69,2). R связано с r посредством $r^2 = R^2 + z^2$, так что φ , определяемое формулой (69,2), зависит при заданных t и R также и от z . Функцию, зависящую только от R и t и в то же время удовлетворяющую волновому уравнению, можно получить интегрированием выражения (69,2) по всем значениям z от $-\infty$ до $+\infty$, или, что то же, от 0 до ∞ . Перейдём от интегрирования по z к интегрированию по r . Поскольку $z = \sqrt{r^2 - R^2}$, то $dz = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$; при изменении z от 0 до ∞ r меняется в пределах между R и ∞ . Поэтому находим окончательно общий вид осесимметричного решения:

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr, \quad (70,1)$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Первый член представляет собой расходящуюся, а второй — сходящуюся цилиндрическую волну.

Производя в этих интегралах замену переменных $ct \pm r = \xi$, перепишем формулу (70,1) в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{ct - R} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}} + \int_{ct + R}^\infty \frac{f_2(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - ct)^2 - R^2}}. \quad (70,2)$$

Мы видим, что значение потенциала в момент времени t (в точке R) в расходящейся цилиндрической волне определяется значениями функции $f_1(t)$ в течение всего времени от $-\infty$ до $t - \frac{R}{c}$; аналогично в сходящейся волне существенны значения функции $f_2(t)$ в течение всего времени от $t + \frac{R}{c}$ до ∞ .

Как и в сферическом случае, стоячие цилиндрические волны получаются при $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Можно показать, что стоячая цилиндрическая волна может быть представлена также и в следующем виде:

$$\varphi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi) d\xi}{\sqrt{R^2 - (\xi - ct)^2}}, \quad (70,3)$$

где $F(\xi)$ — снова произвольная функция.

Выведем выражение для потенциала монохроматической цилиндрической волны. Волновое уравнение для потенциала $\varphi(R, t)$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В монохроматической волне $\varphi = e^{-i\omega t} f(R)$ и для функции $f(R)$ получаем уравнение

$$f'' + \frac{1}{R} f' + k^2 f = 0.$$

Это есть уравнение функций Бесселя нулевого порядка. В стоячей цилиндрической волне φ должно оставаться конечным при $R=0$; соответствующим решением является $J_0(kR)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода. Таким образом, в стоячей цилиндрической волне

$$\varphi = Ae^{-i\omega t} J_0(kR). \quad (70,4)$$

При $R=0$ функция J_0 обращается в единицу, так что амплитуда волны стремится к конечной величине A . На больших же расстояниях R функцию J_0 можно заменить её известным асимптотическим выражением, в результате чего волна приобретёт вид

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kR}} e^{-i\omega t}. \quad (70,5)$$

Решение же, соответствующее монохроматической бегущей расходящейся волне, есть

$$\varphi = Ae^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR). \quad (70,6)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода. При $R \rightarrow 0$ это выражение имеет логарифмическую особенность:

$$\varphi \cong A \frac{2i}{\pi} \ln kR \cdot e^{-i\omega t}. \quad (70,7)$$

На больших же расстояниях имеет место асимптотическая формула

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\left(kR - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kR}}. \quad (70,8)$$

Мы видим, что амплитуда цилиндрической волны падает (на больших расстояниях) обратно пропорционально корню из расстояния до оси, а интенсивность соответственно как R . Этот результат является естественным, поскольку по мере распространения волны полный поток энергии в ней распределяется по цилиндрической поверхности, площадь которой растёт пропорционально R .

Цилиндрическая расходящаяся волна существенно отличается от сферической или плоской в том отношении, что она может иметь передний, но не может иметь заднего «фронта»: после того как звуковое возмущение дойдёт до заданной точки пространства, оно уже не прекращается в ней, лишь сравнительно медленно затухая асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Пусть функция $f_1(\xi)$ в первом члене в (70,2) отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале значений $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$. Тогда в моменты времени $ct > R + \xi_2$ будем иметь:

$$\varphi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ это выражение стремится к нулю по закону

$$\varphi = \frac{1}{ct} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi) d\xi,$$

т. е. обратно пропорционально времени.

Таким образом, потенциал расходящейся цилиндрической волны, возникшей от действовавшего в течение конечного времени источника, хотя и медленно, но обращается в нуль при $t \rightarrow \infty$. Это обстоятельство приводит, как и в сферическом случае, к равенству нулю интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p' dt = 0. \quad (70,9)$$

Поэтому цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать в себе как сгущения, так и разрежения.

§ 71. Общее решение волнового уравнения

Выведем теперь общую формулу, определяющую решение волнового уравнения в неограниченной жидкости по заданным начальным условиям, т. е. определяющую распределение скоростей и давления в жидкости в произвольный момент времени по их распределению в начальный момент.

Предварительно получим некоторые вспомогательные формулы. Пусть будут $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ — два каких-либо решения

волнового уравнения, обращающиеся на бесконечности в нуль. Рассмотрим интеграл

$$I = \int (\varphi \dot{\psi} - \dot{\varphi} \psi) dV,$$

взятый по всему пространству, и вычислим его производную по времени. Помня, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0$ и $\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi} = 0$, имеем:

$$\frac{dI}{dt} = \int (\varphi \ddot{\psi} - \ddot{\varphi} \psi) dV = c^2 \int (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) dV = c^2 \int \operatorname{div}(\varphi \nabla\psi - \psi \nabla\varphi) dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован в интеграл по бесконечно удалённой поверхности и потому обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к результату, что $\frac{dI}{dt} = 0$, т. е. I есть не зависящая от времени постоянная:

$$\int (\varphi \dot{\psi} - \dot{\varphi} \psi) dV = \text{const.} \quad (71,1)$$

Рассмотрим, далее, следующее частное решение волнового уравнения:

$$\psi = \frac{\delta[r - c(t_0 - t)]}{r}, \quad (71,2)$$

где r — расстояние от некоторой заданной точки O пространства, t_0 — некоторый определённый момент времени, а δ обозначает δ -функцию. Вычислим интеграл от ψ по пространству. Имеем:

$$\int \psi dV = \int_0^\infty 4\pi\psi r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty r \delta[r - c(t_0 - t)] dr.$$

Аргумент у δ -функции обращается в нуль при $r = c(t_0 - t)$ (предполагается, что $t_0 > t$). Поэтому в силу свойств δ -функции имеем:

$$\int \psi dV = 4\pi c(t_0 - t). \quad (71,3)$$

Дифференцируя это равенство по t , получаем:

$$\int \dot{\psi} dV = -4\pi c. \quad (71,4)$$

Подставим теперь в интеграл (71,1) в качестве ψ функцию (71,2), а под φ будем понимать искомое общее решение волнового уравнения. Согласно (71,1) I есть величина постоянная; на этом основании напишем выражения для I в моменты времени $t = 0$ и $t = t_0$ и приравняем их друг другу. При $t = t_0$ обе функции ψ и $\dot{\psi}$ отличны от нуля только

при $r = 0$. Поэтому при интегрировании можно положить r в φ и $\dot{\varphi}$ равным нулю (т. е. взять значения в точке O) и вынести φ и $\dot{\varphi}$ из-под знака интеграла:

$$I = \varphi(x, y, z, t_0) \int \dot{\varphi} dV - \dot{\varphi}(x, y, z, t_0) \int \varphi dV$$

(посредством x, y, z обозначены координаты точки O). Согласно (71,3), (71,4) второй член здесь обращается при $t = t_0$ в нуль, а первый даёт

$$I = -4\pi c \varphi(x, y, z, t_0).$$

Вычислим теперь I при $t = 0$. Написав $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$ и обозначая посредством φ_0 значение функции φ при $t = 0$, имеем:

$$I = - \int \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \dot{\varphi}_0 \varphi \right) dV = - \frac{\partial}{\partial t_0} \int \varphi_0 \varphi \Big|_{t=0} dV - \int \dot{\varphi}_0 \varphi \Big|_{t=0} dV.$$

Элемент объёма пишем в виде $dV = r^2 dr d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, и в силу свойств δ -функции получаем:

$$\int \varphi_0 \varphi \Big|_{t=0} dV = \int \varphi_0 r \delta(r - ct_0) dr d\omega = ct_0 \int \varphi_0 \Big|_{r=ct_0} d\omega$$

и аналогично для интеграла от $\dot{\varphi}_0 \varphi$. Таким образом,

$$I = - \frac{\partial}{\partial t_0} \left(ct_0 \int \varphi_0 \Big|_{r=ct_0} d\omega \right) - ct_0 \int \dot{\varphi}_0 \Big|_{r=ct_0} d\omega.$$

Наконец, приравнявая оба выражения для I и опуская индекс нуль у t_0 , получаем окончательно:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int \varphi_0 \Big|_{r=ct} d\omega \right) + t \int \dot{\varphi}_0 \Big|_{r=ct} d\omega \right\}. \quad (71,5)$$

Эта формула, называемая формулой Пуассона, определяет распределение потенциала в пространстве в любой момент времени, если задано распределение потенциала и его производной по времени (что эквивалентно заданию распределения скорости и давления) в некоторый начальный момент времени. Мы видим, что значение потенциала в момент времени t определяется значениями φ и $\dot{\varphi}$, которые они имели в момент времени $t = 0$ на поверхности сферы с радиусом $r = ct$ и центром в точке O .

Предположим, что в начальный момент времени φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ были отличны от нуля только в некоторой конечной области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 34). Рассмотрим значения, которые будет принимать φ в последующие моменты в неко-

торой точке O . Эти значения определяются значениями $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ на расстоянии $r = ct$ от точки O . Но сферы радиусов ct проходят через область внутри поверхности только при $\frac{d}{c} \leq t \leq \frac{D}{c}$, где d и D — наименьшее и наибольшее расстояния от точки O до поверхности S . В другие моменты времени подинтегральные выражения в (71,5) обратятся в нуль. Таким образом, движение в точке O начнётся в момент $t = d/c$ и закончится в момент $t = D/c$. Распространяющаяся из области S волна имеет два фронта: передний и задний. Движение в жидкости начинается, когда к данной её точке подходит поверхность переднего фронта, на заднем же фронте колебавшиеся ранее точки приходят в состояние покоя.

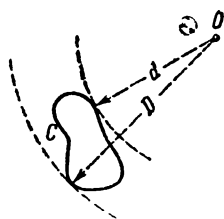


Рис. 34.

ЗАДАЧА

Вывести формулу, определяющую потенциал по начальным условиям для волны, зависящей только от двух координат: x и y .

Решение. Элемент поверхности сферы радиуса $r = ct$ можно, с одной стороны, написать в виде $df = c^2 t^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла. С другой стороны, проекция df на плоскость x, y равна $dx dy = df \frac{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{ct}$, где ρ есть расстояние от центра шара до точки x, y . Сравнивая оба выражения, можно написать $d\omega = \frac{dx dy}{ct \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}$. Обозначая координаты точки, в которой мы ищем значение φ , посредством x, y , а координаты переменной точки в области интегрирования посредством ξ, η , мы можем, следовательно, в рассматриваемом случае заменить $d\omega$ в общей формуле (71,5) на $\frac{d\xi d\eta}{ct \sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}$, удвоив при этом получающееся выражение, поскольку $dx dy$ представляет собой проекцию двух элементов поверхности сферы, находящихся по разные стороны от плоскости x, y . Таким образом, окончательно получаем:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \frac{1}{2\pi c} \iint \frac{\dot{\varphi}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}},$$

где интегрирование производится по поверхности круга с центром в точке O и радиусом $r = ct$. Если в начальный момент $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ отличны от нуля только в конечной области S плоскости x, y (точнее — в некоторой цилиндрической области пространства с образующими, параллельными оси z), то колебания в точке O (рис. 34) начнутся в момент времени $t = \frac{d}{c}$, где d — ближайшее расстояние от O до этой области. Но в дальнейшем круги радиуса $ct > d$ с центром в точке O всегда будут заключать в себе часть или всю площадь области S , и φ будет стремиться к нулю только асимптотически. Таким образом, в отличие от «трёхмерных» волн рассмотренные здесь двумерные волны имеют передний, но не имеют заднего фронта (ср. § 70).

§ 72. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения так называемой боковой волны.

Пусть Q (рис. 35) есть источник сферической звуковой волны, находящийся (в первой среде) на расстоянии l от плоской неограниченной поверхности раздела между двумя средами 1 и 2. Расстояние l произвольно и отнюдь не должно быть большим по сравнению с длиной волны λ . Плотности двух сред и скорости звука в них пусть будут ρ_1, ρ_2 и c_1, c_2 .

Предположим сначала, что $c_1 > c_2$. Тогда на больших (по сравнению с λ) расстояниях от источника движение в первой среде будет представлять собой совокупность двух расходящихся волн. Одна из них есть сферическая волна, непосредственно испускаемая источником («прямая волна»); её потенциал

$$\zeta_1^{(0)} = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (72,1)$$

где r — расстояние от источника, а амплитуду мы условно полагаем равной единице; множители $e^{-i\omega t}$ во всех выражениях мы будем в этом параграфе для краткости опускать.

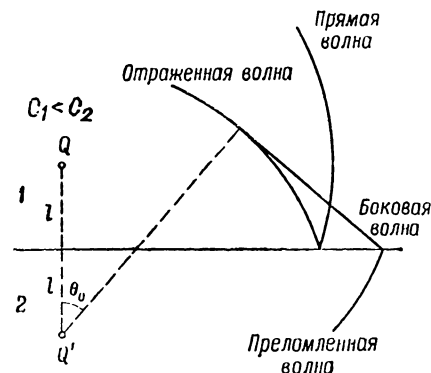


Рис. 35.

Вторая же — отражённая — волна имеет волновые поверхности, представляющие собой сферы с центром в точке Q' («зеркальное отображение» источника Q в плоскости раздела); это есть геометрическое место точек P , до которых в один и тот же промежуток времени доходят лучи, одновременно вышедшие из точки Q и отразившиеся по законам геометрической акустики от поверхности раздела (на рис. 36 луч QAP с углами падения и отражения θ). Амплитуда отражённой волны убывает обратно пропорционально расстоянию r' от точки Q' (последнюю называют иногда «мнимым источником»), но зависит, кроме того, и от угла θ — так, как если бы каждый луч отражался с коэффициентом, соответствующим отражению

плоской волны с данным углом падения θ . Другими словами, на больших расстояниях отражённая волна описывается формулой

$$\varphi'_1 = \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[\frac{c_2 \rho_2 - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta}}{c_2 \rho_2 + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta}} \right] \quad (72,2)$$

(ср. формулу (65,4) для коэффициента отражения плоской волны). Эта формула, справедливость которой (для больших r') сама по себе естественна, может быть строго выведена указанным ниже способом.

Более интересен случай, когда

$$c_1 < c_2.$$

Здесь наряду с обычной отражённой волной (72,2) в первой среде появляется ещё одна волна, основные свойства которой можно усмотреть уже из следующих простых соображений.

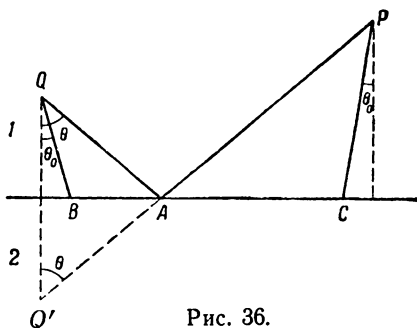


Рис. 36.

Обычный отражённый луч QAP (рис. 36) удовлетворяет принципу

Ферма в том смысле, что это есть путь наиболее быстрого пробега из точки Q в P из всех путей, лежащих целиком в среде 1 и испытывающих однократное отражение. Но принципу Ферма удовлетворяет (при $c_1 < c_2$) и другой путь: луч падает на границу под углом полного внутреннего отражения θ_0 ($\sin \theta_0 = c_1/c_2$), затем распространяется по среде 2 вдоль границы раздела и, наконец, снова переходит в среду 1 под углом θ_0 ($QBSP$ на рис. 36; очевидно, что должно быть $\theta > \theta_0$). Легко видеть, что такой путь тоже обладает экстремальным свойством: время пробега по нему меньше, чем по любому другому пути из Q в P , частично проходящему во второй среде.

Геометрическое место точек P , до которых в один и тот же момент времени доходят лучи, одновременно вышедшие из Q вдоль пути QB и затем перешедшие снова в среду 1 в различных точках C , есть, очевидно, коническая поверхность, образующие которой перпендикулярны к прямым, проведённым из «мнимого источника» Q' под углом θ_0 .

Таким образом, если $c_1 < c_2$, то наряду с обычной отражённой волной со сферическим фронтом в первой среде будет распространяться ещё одна волна с коническим фронтом, простирающимся от плоскости раздела (на котором он смыкается с фронтом преломлённой волны во второй среде) до касания фронта сферической отражённой волны (последнее происходит по линии пересечения с конусом, с углом раствора θ_0 и осью вдоль линии QQ' , см. рис. 35). Эту коническую волну называют боковой.

Путём простого подсчёта легко убедиться в том, что время пробега вдоль пути $QBCP$ (рис. 36) меньше, чем время пробега по пути QAP , ведущему в ту же точку наблюдения P . Это значит, что звуковой сигнал из источника Q доходит до точки наблюдения P сначала в виде боковой волны, и лишь затем в эту точку приходит обычная отражённая волна.

Следует иметь в виду, что боковая волна представляет собой эффект волновой акустики, несмотря на то, что она допускает изложенное наглядное истолкование с помощью представлений геометрической акустики. Мы увидим ниже, что амплитуда боковой волны обращается в нуль в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

Переходим теперь к количественному расчёту. Распространение монохроматической звуковой волны, создаваемой точечным источником, описывается уравнением (69,7):

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}), \quad (72,3)$$

где $k = \omega/c$, а \mathbf{l} — радиус-вектор источника. Коэффициент при δ -функции выбран таким, чтобы прямая волна имела вид (72,1). Ниже мы выбираем систему координат с плоскостью x, y в плоскости раздела и осью z вдоль QQ' : первой среде соответствуют $z > 0$. На границе раздела должны быть непрерывными давление и z -компонента скорости, или, что то же, величины $\rho\varphi$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Следуя общему методу Фурье, имеем решение в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \varphi_x(z) e^{i(x_x x + x_y y)} dx_x dx_y, \quad (72,4)$$

где

$$\varphi_x(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \varphi e^{-i(x_x x + x_y y)} dx dy. \quad (72,5)$$

Из симметрии в плоскости x, y заранее очевидно, что φ_x может зависеть только от абсолютной величины $x^2 = x_x^2 + x_y^2$. Воспользовавшись известной формулой

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \varphi) d\varphi,$$

можно поэтому представить (72,4) в виде

$$\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi_x(z) J_0(xR) x dx, \quad (72,6)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ — цилиндрическая координата (расстояние от оси z).

Для дальнейших вычислений будет удобно преобразовать эту формулу к виду, в котором интеграл берётся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, выразив подинтегральное выражение через функцию Ганкеля $H_0^{(1)}(u)$. Последняя имеет, как известно, логарифмическую особенность в точке $u = 0$; если усилиться переходить от положительных к отрицательным действительным значениям u , обходя (в плоскости комплексного переменного u) точку $u = 0$ сверху, то будет справедливо соотношение

$$H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u).$$

С его помощью можно переписать (72,6) в виде

$$\varphi = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(z) H_0^{(1)}(xR) x dx. \quad (72,7)$$

Из уравнения (72,3) находим для функции φ_x уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dz^2} - \left(x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \varphi_x = -\frac{1}{\pi} \delta(z-l). \quad (72,8)$$

δ -функцию в правой стороне уравнения можно исключить, наложив на функцию $\varphi_x(z)$ (удовлетворяющую однородному уравнению) граничные условия при $z = l$:

$$\varphi_x(z)|_{l-0}^{l+0} = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} \Big|_{l-0}^{l+0} = -\frac{1}{\pi}. \quad (72,9)$$

Граничные же условия при $z = 0$ гласят:

$$\varphi_x|_{-0}^{+0} = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} \Big|_{-0}^{+0} = 0. \quad (72,10)$$

Ищем решение в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= Ae^{-\mu_1 z} && \text{при } z > l, \\ \varphi_x &= Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_1 z} && \text{при } l > z > 0, \\ \varphi_x &= De^{\mu_2 z} && \text{при } 0 > z. \end{aligned} \right\} \quad (72,11)$$

Здесь

$$\mu_1^2 = x^2 - k_1^2, \quad \mu_2^2 = x^2 - k_2^2$$

($k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$), причём надо полагать:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= +\sqrt{x^2 - k^2} && \text{при } x > k, \\ \mu &= -i\sqrt{k^2 - x^2} && \text{при } x < k; \end{aligned} \right\} \quad (72,12)$$

первое необходимо для того, чтобы искомое φ не возрастало на бесконечности, а второе — чтобы φ представляло собой расходящуюся

волну. Условия (72,9) и (72,10) дают четыре уравнения, определяющие коэффициенты A , B , C , D . Простое вычисление приводит к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} B &= C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & C &= \frac{1}{2\pi\mu_1} e^{-\mu_1 l}, \\ D &= C \frac{2\rho_1 \mu_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & A &= B + C e^{2\mu_1 l}. \end{aligned} \right\} \quad (72,13)$$

При $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = c_1$ (т. е. если бы всё пространство было заполнено одной средой), B обращается в нуль и $A = C e^{2\mu_1 l}$; соответствующий член в φ представляет собой, очевидно, прямую волну (72,1); поэтому интересующая нас отражённая волна есть

$$\varphi'_1 = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) e^{-\mu_1 z} H_0^{(1)}(xR) x dx. \quad (72,14)$$

В этом выражении надо ещё уточнить путь интегрирования. Особая точка $x=0$ обходится (в плоскости комплексного x), как уже указывалось, сверху. Кроме

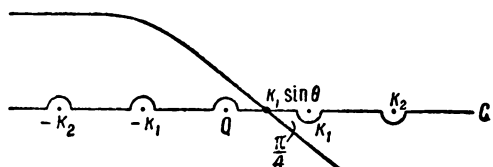


Рис. 37.

того, подинтегральное выражение имеет особые точки (точки разветвления) $x = \pm k_1$, $\pm k_2$, в которых μ_1 или μ_2 обращаются в нуль. В соответствии с условиями (72,10) точки $+k_1$, $+k_2$ должны обходиться снизу, а точки $-k_1$, $-k_2$ сверху.

Произведём исследование полученного выражения на больших расстояниях от источника. Заменяя функцию Ганкеля её известным асимптотическим выражением, получим:

$$\varphi'_1 = \int_C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1 (\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1)} \sqrt{\frac{x}{2i\pi R}} e^{-\mu_1(z+l) + ixR} dx. \quad (72,15)$$

На рис. 37 изображён путь интегрирования C для случая $c_1 > c_2$. Интеграл может быть вычислен с помощью известного метода перевала. Показатель

$$i[(z+l)\sqrt{k_1^2 - x^2} + xR]$$

имеет экстремум в точке, в которой

$$\frac{x}{\sqrt{k_1^2 - x^2}} = \frac{R}{z+l} = \frac{r' \sin \theta}{r' \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta,$$

т. е. $x = k_1 \sin \theta$, где θ — угол падения (см. рис. 35). Переходя к пути интегрирования C' , пересекающему эту точку под углом $\pi/4$ к оси абсцисс, получим формулу (72,2).

В случае же $c_1 < c_2$ (т. е. $k_1 > k_2$) точка $x = k_1 \sin \theta$ лежит между точками k_2 и k_1 , если $\sin \theta > \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \sin \theta_0$, т. е. если $\theta > \theta_0$ (рис. 35). В этом случае контур C' должен содержать ещё петлю вокруг точки k_2 , и к обычной отражённой волне (72,2) добавляется волна φ_1'' , определяемая интегралом (72,15), взятым по этой петле (назовём её C''); это и есть боковая волна. Этот интеграл легко вычислить, если точка $k_1 \sin \theta$ не слишком близка к k_2 , т. е. если угол θ не слишком близок к углу полного внутреннего отражения θ_0 ¹⁾.

Вблизи точки $x = k_2$ μ_2 мало; разлагаем предэкспоненциальный множитель в подинтегральном выражении в (72,15) по степеням μ_2 .

Нулевой член разложения вообще не обладает особенностью при $x = k_2$ и его интеграл по C'' обращается в нуль. Поэтому имеем:

$$\varphi_1'' = - \int_{C''} \frac{2i\mu_2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2} \sqrt{\frac{x}{2\pi i r}} e^{-\mu_1(z+l) + ixR} dx. \quad (72,16)$$

Разлагая показатель по степеням $x - k_2$ и интегрируя по вертикальной петле C'' , получим после простого вычисления следующее выражение для потенциала боковой волны

$$\varphi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp\{ik_1 r' \cos(\theta_0 - \theta)\}}{r'^2 \rho_2 k_1^2 [\cos \theta_0 \sin \theta \sin^3(\theta_0 - \theta)]^{1/2}}. \quad (72,17)$$

В согласии со сказанным выше волновые поверхности представляют собой конусы

$$r' \cos(\theta - \theta_0) = R \sin \theta_0 + (z + l) \cos \theta_0 = \text{const.}$$

Вдоль заданного направления амплитуда волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r' . Мы видим также, что эта волна исчезает в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$. При $\theta \rightarrow \theta_0$ выражение (72,17) становится неприменимым; в действительности в этой области амплитуда боковой волны убывает с расстоянием как $r'^{-3/4}$.

¹⁾ Исследование боковой волны во всей области углов θ см. Л. Бреховских, ЖТФ, 18, 455, 1948. Там же дан следующий член разложения обычной отражённой волны по степеням λ/R ; отметим здесь, что для углов θ , близких к θ_0 (в случае $c_1 < c_2$), отношение поправочного члена к основному убывает с расстояниями как $(\lambda/R)^{1/4}$, а не как λ/R .

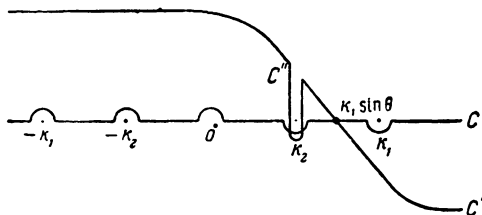


Рис. 38.

§ 73. Излучение звука

Колеблущееся в жидкости тело производит вокруг себя периодическое сжатие и разрежение жидкости и таким образом приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия движущегося тела. Таким образом, можно говорить об излучении звука колеблющимися телами ¹⁾.

В общем случае произвольно колеблющегося тела произвольной формы задача об излучении звуковых волн должна решаться следующим образом. Выберем в качестве основной величины потенциал скорости φ . Он удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (73,1)$$

На поверхности тела нормальная составляющая скорости жидкости должна быть равна соответствующей компоненте скорости \mathbf{u} тела:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n. \quad (73,2)$$

На больших же расстояниях от тела волна должна переходить в расходящуюся сферическую волну. Решение уравнения (73,1), удовлетворяющее этим граничным условиям и условию на бесконечности, определяет излучаемую телом звуковую волну.

Рассмотрим более подробно два предельных случая. Предположим сначала, что частота колебаний тела настолько велика, что длина излучаемой волны очень мала по сравнению с размерами l тела:

$$\lambda \ll l. \quad (73,3)$$

В таком случае можно разделить поверхность тела на участки, размеры которых, с одной стороны, настолько малы, что их можно приближённо считать плоскими, но, с другой стороны, всё же велики по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что каждый такой участок излучает при своём движении плоскую волну, скорость жидкости в которой равна просто нормальной компоненте u_n скорости данного участка поверхности. Но средний поток энергии в плоской волне равен (см. § 64) $cr\bar{v}^2$, где v — скорость жидкости в волне. Подставляя $v = u_n$ и интегрируя по всей поверхности тела, мы приходим к результату, что средняя излучаемая телом в единицу времени в виде звуковых волн энергия, т. е. полная интенсивность излучае-

¹⁾ Ниже мы везде предполагаем, что скорость u колеблющегося тела мала по сравнению со скоростью звука. Поскольку $u \sim a\omega$ (где a — линейная амплитуда колебаний тела), то это значит, что $a \ll \lambda$.

Амплитуда колебаний предполагается, вообще говоря, малой также и по сравнению с размерами тела, в противном случае движение вблизи тела не будет потенциальным (ср. § 9). Это условие не обязательно лишь для чисто пульсационных колебаний, для которых используемое ниже решение (73,7) является по существу следствием уже непосредственно уравнения непрерывности.

мого звука, есть

$$I = c\rho \int \overline{u_n^2} df. \quad (73,4)$$

Она не зависит от частоты колебаний (при заданной амплитуде скорости).

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда длина излучаемой волны велика по сравнению с размерами тела:

$$\lambda \gg l. \quad (73,5)$$

Тогда вблизи тела (на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны) в общем уравнении (73,1) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Действительно, этот член — порядка величины $\frac{\omega^2}{c^2} \varphi \sim \frac{\varphi}{\lambda^2}$, между тем как вторые производные по координатам в рассматриваемой области — порядка $\frac{\varphi}{l^2}$.

Таким образом, вблизи тела движение определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Но это есть уравнение, определяющее потенциальное движение несжимаемой жидкости. Следовательно, вблизи тела жидкость движется в рассматриваемом случае как несжимаемая. Собственно звуковые волны, т. е. волны сжатия и разрежения, возникают лишь на больших расстояниях от тела.

На расстояниях, меньших и порядка размеров тела, искомое решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ не может быть написано в общем виде и зависит от конкретной формы колеблющегося тела. Для расстояний же, больших по сравнению с l , но малых по сравнению с λ (так что уравнение $\Delta\varphi = 0$ ещё применимо), можно найти общий вид решения, воспользовавшись тем, что φ должно убывать с увеличением расстояния. С такими решениями уравнения Лапласа нам уже приходилось иметь дело в § 11. Как и там, пишем общий вид решения в форме

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \nabla \frac{1}{r} \quad (73,6)$$

(r — расстояние до начала координат, выбранного где-нибудь внутри тела). При этом, конечно, существенно, что расстояния, о которых идёт речь, всё же велики по сравнению с размерами тела. Только по этой причине можно ограничиться в φ членами, наименее быстро убывающими с ростом r . Мы оставляем в (73,6) оба написанных члена, имея в виду, что первый член не во всех случаях присутствует (см. ниже).

Выясним, в каких случаях этот член — $\frac{a}{r}$ отличен от нуля. В § 11 было выяснено, что потенциал — $\frac{a}{r}$ приводит к наличию отличного от нуля потока жидкости через поверхность, окружающую тело; этот поток равен $4\pi ra$. Но в несжимаемой жидкости такой поток может

иметь место только за счёт изменения общего объёма жидкости, заключённой внутри замкнутой поверхности. Другими словами, должно происходить изменение объёма тела, что и будет приводить к вытеснению жидкости из рассматриваемого объёма пространства или, наоборот, к «засасыванию» жидкости в него. Таким образом, первый член в (73,6) присутствует в тех случаях, когда излучающее тело производит пульсации, сопровождающиеся изменением его объёма.

Предположим, что это имеет место, и определим полную интенсивность излучаемого звука. Объём $4\pi a$ жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть согласно сказанному выше равен изменению объёма V тела в единицу времени, т. е. производной $\frac{dV}{dt}$ (объём V является заданной функцией времени):

$$4\pi a = \dot{V}.$$

Таким образом, на расстояниях r , удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$, движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}.$$

С другой стороны, на расстояниях $r \gg \lambda$ (в «волновой зоне») φ должно представлять расходящуюся сферическую волну, т. е. должно иметь вид

$$\varphi = -\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (73,7)$$

Поэтому мы непосредственно приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с l) вид

$$\varphi = -\frac{\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}, \quad (73,8)$$

получающийся заменой в $\dot{V}(t)$ аргумента t на $t - \frac{r}{c}$.

Скорость $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ направлена в каждой точке по радиусу-вектору и по величине равна $v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$. При дифференцировании (73,8) надо (для расстояний $r \gg \lambda$) брать производную только от числителя; дифференцирование знаменателя привело бы к члену высшего порядка по $1/r$, которым следует пренебречь. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c} \ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

то мы получаем (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}):

$$\mathbf{v} = -\frac{\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi cr} \mathbf{n}. \quad (73,9)$$

Интенсивность излучения, определяющаяся квадратом скорости, оказывается здесь не зависящей от направления излучения, т. е. излучение симметрично по всем направлениям. Среднее значение полной излучаемой в единицу времени энергии есть

$$I = \rho c \oint \overline{v^2} df = \frac{\rho}{16c\pi^2} \oint \frac{\overline{\dot{V}^2}}{r^2} df,$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности вокруг начала координат. Выбирая в качестве этой поверхности сферу радиуса r и замечая, что подинтегральное выражение зависит только от расстояния до центра, получаем окончательно:

$$I = \frac{\rho \overline{\dot{V}^2}}{4\pi c}. \quad (73,10)$$

Это есть полная интенсивность излучаемого звука. Мы видим, что она определяется квадратом второй производной по времени от объёма тела.

Если тело совершает пульсационные колебания по гармоническому закону с частотой ω , то вторая производная от объёма по времени пропорциональна частоте и амплитуде скорости колебаний; средний же её квадрат пропорционален квадрату частоты. Таким образом, интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату частоты при заданном значении амплитуды скорости точек поверхности тела. При заданной же амплитуде самих колебаний амплитуда скорости в свою очередь пропорциональна частоте, так что интенсивность излучения будет пропорциональна ω^4 .

Рассмотрим теперь излучение звука телом, колеблющимся без изменения объёма. Тогда в (73,6) остаётся только второй член, который мы напомним в виде

$$\varphi = \operatorname{div} \left(\mathbf{A}(t) \frac{1}{r} \right).$$

Как и в предыдущем случае, заключаем, что общий вид решения на всех расстояниях $r \gg l$ есть

$$\varphi = \operatorname{div} \frac{\mathbf{A} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

То, что это выражение действительно является решением волнового уравнения, видно непосредственно из того, что функция $\frac{\mathbf{A} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}$ удовлетворяет этому уравнению, а потому удовлетворяют ему и производные указанной функции по координатам. Дифференцируя опять только числитель, получаем (для расстояний $r \gg \lambda$):

$$\varphi = - \frac{\dot{\mathbf{A}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{n}}{cr}. \quad (73,11)$$

При вычислении скорости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ снова надо дифференцировать только \mathbf{A} . Поэтому имеем согласно известным из векторного анализа правилам дифференцирования функций от скалярного аргумента

$$\mathbf{v} = - \frac{\ddot{\mathbf{A}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{n}}{c^2 r} \nabla \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

и, подставляя $\nabla \left(t - \frac{r}{c} \right) = - \frac{1}{c} \nabla r = - \frac{\mathbf{n}}{c}$, получаем окончательно

$$\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 r} \mathbf{n} (\mathbf{n} \ddot{\mathbf{A}}). \quad (73,12)$$

Интенсивность излучения будет теперь пропорциональна квадрату косинуса угла между направлением излучения (направление \mathbf{n}) и вектором $\ddot{\mathbf{A}}$ (такое излучение называют «дипольным»). Полное же излучение равно интегралу

$$I = \frac{\rho}{c^3} \int \frac{(\mathbf{n} \ddot{\mathbf{A}})^2}{r} df.$$

Опять выбираем в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r , причём введём сферические координаты с полярной осью вдоль вектора \mathbf{A} . Простое интегрирование приводит к окончательной формуле для полного излучения в единицу времени:

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3} \ddot{\mathbf{A}}^2. \quad (73,13)$$

Компоненты вектора \mathbf{A} являются линейными функциями компонент скорости \mathbf{u} тела (см. § 11). Таким образом, интенсивность излучения является здесь квадратичной функцией вторых производных от компонент скорости тела по времени.

Если тело совершает гармоническое колебательное движение с частотой ω , то, подобно предыдущему случаю, заключаем, что интенсивность излучения пропорциональна ω^4 при заданном значении амплитуды скорости. При заданной же линейной амплитуде колебаний тела амплитуда скорости сама пропорциональна частоте, и потому излучение пропорционально ω^6 .

Совершенно аналогичным образом решается вопрос об излучении «цилиндрических» звуковых волн пульсирующим или колеблющимся перпендикулярно к своей оси цилиндром произвольного сечения. Выпишем здесь соответствующие формулы, имея в виду их дальнейшие применения.

Рассмотрим сначала пульсационные малые колебания цилиндра, и пусть $S = S(t)$ есть переменная площадь его сечения. На расстояниях r от оси цилиндра, таких, что $l \ll r \ll \lambda$ (l — поперечные размеры цилиндра), получим аналогично (73,8)

$$\varphi = \frac{\dot{S}(t)}{2\pi} \ln fr, \quad (73,14)$$

где $f(t)$ — функция времени (коэффициент при $\ln rf$ выбран так, чтобы получить правильное значение потока жидкости через коаксиальную цилиндрическую поверхность). В соответствии с формулой для потенциала расходящейся цилиндрической волны (первый член формулы (70,2)) заключаем теперь, что на всех расстояниях $r \gg l$ потенциал определяется выражением

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{c}} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}. \quad (73,15)$$

При $r \rightarrow 0$ главный член этого выражения совпадает с (73,14), причём автоматически определится также и функция $f(t)$ в последнем (предполагаем, что при $t \rightarrow -\infty$ производная $\dot{S}(t)$ достаточно быстро обращается в нуль). При очень же больших значениях r (в «волновой зоне» основную роль в интеграле (73,15) играет область значений $t-t' \sim r/c$; поэтому в знаменателе подинтегрального выражения можно положить:

$$(t-t')^2 - \frac{r^2}{c^2} \approx 2 \frac{r}{c} \left(t-t' - \frac{r}{c} \right),$$

и мы получим:

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi \sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{c}} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \quad (73,16)$$

Наконец, скорость $v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$; для осуществления дифференцирования удобно сделать в интеграле подстановку $t-t' - \frac{r}{c} = \xi$:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{2r}} \int_0^{\infty} \frac{\dot{S}\left(t - \frac{r}{c} - \xi\right)}{\sqrt{\xi}} d\xi,$$

после чего пределы интегрирования не будут содержать r . Множитель $1/\sqrt{r}$ перед интегралом не дифференцируется, так как это дало бы член более высокого порядка по $1/r$. Производя дифференцирование под знаком интеграла и перейдя затем обратно к переменной t' , получим:

$$v = \frac{1}{2\pi \sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{c}} \frac{\ddot{S}(t') dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \quad (73,17)$$

Интенсивность излучения определится произведением $2\pi r c v^2$. Обратим внимание на то, что в отличие от сферического случая здесь

интенсивность излучения в каждый момент времени определяется всем ходом изменения функции $S(t)$ за время от $-\infty$ до $t - \frac{r}{c}$.

Наконец, для поступательных колебаний бесконечного цилиндра в направлении, перпендикулярном к его оси, на расстояниях $l \ll r \ll \lambda$ потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{div} (\mathbf{A} \ln fr), \quad (73,18)$$

где $\mathbf{A}(t)$ определяется путём решения уравнения Лапласа для обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью. Отсюда снова заключаем, что на всех расстояниях $r \gg l$

$$\varphi = -\operatorname{div} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{c}} \frac{\mathbf{A}(t') dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{r^2}{c^2}}}. \quad (73,19)$$

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Мы полностью пренебрегали здесь влиянием вязкости жидкости и соответственно этому считали движение в излучаемой волне потенциальным. В действительности, однако, в слое жидкости толщины порядка $\sqrt{\nu/\omega}$ вокруг колеблющегося тела движение не является потенциальным (см. § 24). Поэтому для применимости всех полученных формул необходимо, чтобы толщина этого слоя была мала по сравнению с размерами l тела:

$$\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \ll l. \quad (73,20)$$

Это условие может не выполняться при слишком малых частотах или слишком малых размерах тела.

З а д а ч и

1. Определить полную интенсивность излучения звука шаром, совершающим поступательные малые (гармонические) колебания с частотой ω , причём длина волны сравнима по величине с радиусом R шара.

Решение. Скорость шара пишем в виде $\mathbf{u} = u_0 e^{-i\omega t}$, тогда φ зависит от времени тоже посредством множителя $e^{-i\omega t}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$, где $k = \omega/c$. Ищем решение в виде $\varphi = \mathbf{u} \nabla f(\mathbf{r})$ (начало координат выбрано в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Для f получаем уравнение $(\mathbf{u} \nabla)(\Delta f + k^2 f) = 0$, откуда $\Delta f + k^2 f = \operatorname{const}$. С точностью до несущественной аддитивной постоянной имеем отсюда $f = A \frac{e^{ikr}}{r}$.

Постоянная A определяется из условия $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_r$ при $r = R$, и в результате получаем:

$$\varphi = u_0 e^{ik(r-R)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2 R^2}.$$

Излучение имеет, следовательно, дипольный характер. На достаточно больших расстояниях от шара можно пренебречь единицей по сравнению с ikr , и φ приобретает вид (73,11) с вектором \mathbf{A} , равным

$$\dot{\mathbf{A}} = -u e^{ik(r-R)} R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2 R^2}.$$

Замечая, что $\overline{(\operatorname{Re} \{\ddot{\mathbf{A}}\})^2} = \frac{|\ddot{\mathbf{A}}|^2}{2}$, получаем для полного излучения согласно (72,13)

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3} |u_0|^2 \frac{R^6 \omega^4}{4 + \frac{\omega^4 R^4}{c^4}}.$$

При $\frac{\omega}{c} R \ll 1$ это выражение переходит в

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3} |u_0|^2 \omega^4$$

(это может быть получено и непосредственно подстановкой в (73,13) выражения $\mathbf{A} = \frac{R^3}{2} \mathbf{u}$ из задачи 1 § 11). При $\frac{\omega}{c} R \gg 1$ имеем:

$$I = \frac{2\pi\rho c}{3} R^2 |u_0|^2,$$

что соответствует формуле (73,4).

Действующая на шар сила сопротивления жидкости получается интегрированием проекции сил давления ($p' = -\rho\varphi'|_{r=R}$) на направление \mathbf{u} по поверхности шара и равна

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho\omega R^3 \mathbf{u} \frac{-k^3 R^3 + i(2 + k^2 R^2)}{4 + k^4 R^4}$$

(о смысле комплексной силы сопротивления см. конец § 24).

2. То же, если радиус R шара сравним по величине с $\sqrt{v/\omega}$ (но в то же время $\lambda \gg R$).

Решение. Если размеры тела невелики по сравнению с $\sqrt{v/\omega}$, то для определения излучаемой волны надо исходить не из уравнения $\Delta\varphi = 0$, а из уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Соответствующее решение этого уравнения для шара определяется формулами (1), (2) в задаче 5 § 24. При переходе к большим расстояниям первый член в (1), экспоненциально затухающий с r , можно опустить. Второй же член приводит к скорости

$$\mathbf{v} = -b(\mathbf{u}\nabla)\nabla\frac{1}{r}.$$

Сравнение с (73,6) показывает, что

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \frac{R^3}{2} \left[1 - \frac{3}{(i-1)\kappa} - \frac{3}{2i\kappa^2} \right] \mathbf{u},$$

где $\kappa = R\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$, т. е. отличается от соответствующего выражения для идеальной жидкости множителем, стоящим в скобках. В результате получаем:

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3} \omega^4 \left(1 + \frac{3}{\kappa} + \frac{9}{2\kappa^2} + \frac{9}{2\kappa^3} + \frac{9}{4\kappa^4} \right) |u_0|^2.$$

При $\chi \gg 1$ это выражение переходит в приведённую в задаче 1 формулу, а при $\chi \ll 1$ получаем:

$$I = \frac{3\pi\rho R^2 \nu^2}{2c^3} \omega^2 |u_0|^2,$$

т. е. излучение пропорционально не четвёртой, а второй степени частоты.

3. Определить интенсивность излучения звука сферой, совершающей малые (гармонические) пульсационные колебания с произвольной частотой.

Решение. Ищем звуковую волну в виде

$$\varphi = \frac{au}{r} e^{ik(r-R)}$$

(R — равновесный радиус шара) и определяем постоянную a из условия

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = u = u_0 e^{-i\omega t},$$

где u — радиальная скорость точек поверхности сферы:

$$a = \frac{R^2}{ikR - 1}.$$

Интенсивность излучения:

$$I = 2\pi\rho c |u_0|^2 \frac{k^2 R^4}{1 + k^2 R^2}.$$

При $kR \ll 1$

$$I = \frac{2\pi\rho}{c} \omega^2 R^4 |u_0|^2$$

в соответствии с (73,10), а при $kR \gg 1$

$$I = 2\pi\rho c R^2 |u_0|^2$$

в соответствии с (73,4).

4. Определить волну, излучаемую шаром (радиуса R), совершающим малые пульсационные колебания; радиальная скорость точек его поверхности есть произвольная функция времени $u(t)$.

Решение. Решение ищем в виде $\varphi = \frac{f(t')}{r}$, где $t' = t - \frac{r-R}{c}$, и определяем f из граничного условия $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = u(t)$, которое приводит к уравнению

$$\frac{df}{dt} + \frac{cf(t)}{R} = -Rcu(t).$$

Решая это линейное уравнение и заменяя в решении аргумент t на t' , получаем:

$$\varphi(r, t) = -\frac{cR}{r} e^{-\frac{ct'}{R}} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) e^{\frac{c\tau}{R}} d\tau. \quad (1)$$

Если колебания шара прекращаются, например, в момент времени $t = 0$ (т. е. $u(\tau) = 0$ при $\tau > 0$), то на расстоянии r от центра, начиная с момента времени $t = \frac{r-R}{c}$, потенциал как функция времени будет иметь вид $\varphi = \text{const} \cdot e^{-ct/R}$, т. е. движение будет затухать экспоненциально.

Пусть T — время, в течение которого происходит существенное изменение скорости $u(t)$. Если $T \gg R/c$ (т. е. длина излучаемых волн $\lambda \sim cT \gg R$), то в (1) можно вынести медленно меняющийся множитель $u(\tau)$ из-под знака интеграла, заменив его на $u(t')$. На расстояниях $r \gg R$ мы получим тогда

$$\varphi = -\frac{R^2}{r} u\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

что совпадает с формулой (73,8). Если же $T \ll R/c$, то аналогично получаем:

$$\varphi = -\frac{cR}{r} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) d\tau, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{R}{r} u(t'),$$

что соответствует формуле (73,4).

5. Определить движение, возникающее в идеальной сжимаемой жидкости при произвольном поступательном движении в ней шара радиуса R (скорость движения мала по сравнению со скоростью звука).

Решение. Ищем решение в виде

$$\varphi = \operatorname{div} \frac{\mathbf{f}(t')}{r} \quad (1)$$

(r — расстояние от начала координат, выбранного в точке нахождения центра шара в момент времени $t' = t - \frac{r-R}{c}$); поскольку скорость шара мала по сравнению со скоростью звука, то эффектом перемещения начала координат можно пренебречь). Скорость жидкости равна

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{3(\mathbf{f}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}'\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{f}'')}{c^2r} \quad (2)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления \mathbf{r} ; $'$ означает дифференцирование по его аргументу). Граничное условие $v_r = u\mathbf{n}$ при $r = R$, откуда

$$f''(t) + \frac{2c}{R} f'(t) + \frac{2c^2}{R^2} f(t) = Rc^2 u(t).$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, получаем для функции $\mathbf{f}(t)$ общее выражение:

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-\frac{ct}{R}} \int_{-\infty}^t \mathbf{u}(\tau) \sin \frac{c(t-\tau)}{R} e^{\frac{c\tau}{R}} d\tau. \quad (3)$$

При подстановке в (1) здесь надо писать t' вместо t . В качестве нижнего предела выбрано $-\infty$, так чтобы было $\mathbf{f} = 0$ при $t = -\infty$.

6. Шар радиуса R в момент времени $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью u_0 . Определить возникающее в момент начала движения звуковое излучение.

Решение. Полагая в формуле (3) задачи 5 $\mathbf{u}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\mathbf{u}(\tau) = u_0$ при $\tau > 0$ и подставляя в формулу (2) (сохранив в последней только последний, наименее быстро убывающий с расстоянием член), найдём скорость движения жидкости вдали от шара:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{n}u_0) \frac{R\sqrt{2}}{r} e^{-\frac{ct'}{R}} \sin\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(где $t' > 0$). Полная интенсивность излучения будет убывать со временем по закону

$$I = \frac{8\pi}{3} c \rho R^2 u_0^2 e^{-\frac{2et'}{R}} \sin^2\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Всего за все время будет излучена энергия

$$\frac{\pi}{3} \rho R^3 u_0^2.$$

7. Определить интенсивность излучения звука бесконечным цилиндром (радиуса R), совершающим пульсационные гармонические колебания; длина волны $\lambda \gg R$.

Решение. Согласно формуле (73,14) находим сначала, что на расстояниях $r \ll \lambda$ (в задачах 7, 8 r — расстояние от оси цилиндра) потенциал

$$\varphi = Ru \ln kr,$$

где $u = u_0 e^{-i\omega t}$ — скорость точек поверхности цилиндра. Из сравнения с формулами (70,7) и (70,8) находим теперь, что на больших расстояниях потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -Ru \sqrt{\frac{i\pi}{2kr}} e^{ikr}.$$

Отсюда скорость

$$v = Ru \sqrt{\frac{\pi k}{2ir}} \mathbf{n} e^{ikr}$$

(\mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный к оси цилиндра) и интенсивность излучения (на единицу длины цилиндра)

$$I = \frac{\pi^2}{2} \rho \omega R^2 |u_0|^2.$$

8. Определить излучение звука цилиндром, совершающим гармонические поступательные колебания в направлении, перпендикулярном к своей оси.

Решение. На расстояниях $r \ll \lambda$ имеем:

$$\varphi = -\operatorname{div}(R^2 \mathbf{u} \ln kr)$$

(ср. формулу (73,18) и задачу 3 § 10). Отсюда заключаем, что на больших расстояниях

$$\varphi = R^2 \sqrt{\frac{i\pi}{2k}} \operatorname{div} \frac{e^{ikr} \mathbf{u}}{\sqrt{r}} = -R^2 (\mathbf{u}\mathbf{n}) \sqrt{\frac{\pi k}{2ir}} e^{ikr},$$

откуда скорость

$$\mathbf{v} = -kR^2 \sqrt{\frac{i\pi k}{2r}} \mathbf{n} (\mathbf{u}\mathbf{n}) e^{ikr}.$$

Интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату косинуса угла между направлениями колебаний и излучения. Полная интенсивность

$$I = \frac{\pi^2}{4c^2} \rho \omega^3 R^4 |u_0|^2.$$

9. Определить интенсивность излучения звука от плоской поверхности с периодически колеблющейся температурой; частота колебаний $\omega \ll c^2/\chi$, где χ — температуропроводность жидкости.

Решение. Пусть переменная часть температуры поверхности есть $T_0 e^{-i\omega t}$. Эти колебания температуры создают в жидкости затухающую тепловую волну (52,17):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t} e^{-(1-i)\sqrt{\omega/2\chi} x},$$

в результате чего будет испытывать колебания и плотность жидкости: $\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' = -\beta \rho T'$, где β — коэффициент теплового расширения. Это в свою очередь приводит к возникновению движения, определяющегося уравнением непрерывности:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -i\omega \beta \rho T'.$$

На твёрдой поверхности скорость $v_x = v = 0$, а при удалении от неё стремится к пределу

$$v = -i\omega \beta \int_0^{\infty} T' dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \beta \sqrt{\omega \chi} T_0' e^{-i\omega t}.$$

Это значение достигается на расстояниях $\sim \sqrt{\chi/\omega}$, малых по сравнению с c/ω , и служит граничным условием для возникающей звуковой волны. Отсюда находим интенсивность излучения звука с 1 см^2 поверхности:

$$I = \frac{1}{2} c \rho \beta^2 \omega \chi |T_0'|^2.$$

10. Точечный источник, излучающий сферическую волну, находится на расстоянии l от твёрдой (полностью отражающей звук) стенки, ограничивающей заполненное жидкостью полупространство. Определить отношение полной интенсивности излучаемого источником звука к интенсивности излучения, которое имело бы место в неограниченной среде, а также зависимость интенсивности от направления на больших расстояниях от источника.

Решение. Совокупность излучаемой и отражённой от стенки волн описывается решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию равенства нулю нормальной скорости $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на стенке. Таким решением является

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t}$$

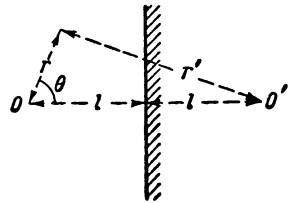


Рис. 39.

(постоянный множитель для краткости опускаем), где r — расстояние от источника звука O (рис. 39), а r' — расстояние от точки O' , расположенной относительно поверхности стенки симметрично с O . На больших расстояниях от источника имеем: $r' \approx r - 2l \cos \theta$, так что

$$\varphi = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (1 + e^{-2i7lk \cos \theta}).$$

Зависимость интенсивности излучения от направления определяется здесь множителем $\cos^2(kl \cos \theta)$.

Для определения полной интенсивности излучения интегрируем поток энергии $q = p'v = -\rho \dot{\varphi} \nabla \varphi$ (см. (64,4)) по поверхности сферы сколь угодно

малого радиуса с центром в точке O . Это даёт $2\pi r k \omega \left(1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}\right)$. В неограниченной же среде мы имели бы чисто сферическую волну $\varphi = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$ с полным потоком энергии $2\pi r k \omega$. Таким образом, искомое отношение интенсивностей равно

$$1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

11. То же в жидкости, ограниченной свободной поверхностью.

Решение. На свободной поверхности должно выполняться условие $p' = -\rho \dot{\varphi} = 0$; в монохроматической волне это эквивалентно требованию $\varphi = 0$. Соответствующее решение волнового уравнения есть

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t}.$$

На больших расстояниях от источника интенсивность излучения определяется множителем $\sin^2(kl \cos \theta)$.

Искомое отношение интенсивностей равно

$$1 - \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

§ 74. Принцип взаимности

При выводе уравнений звуковой волны в § 63 предполагалось, что волна распространяется в однородной среде. В частности, плотность среды ρ_0 и скорость звука в ней c рассматривались как постоянные величины. Имея в виду получить некоторые общие соотношения, применимые и в общем случае произвольной неоднородной среды, выведем предварительно уравнение распространения звука в такой среде.

Напишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Но в силу адиабатичности звука имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p \right),$$

и уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Положим, как обычно, $\rho = \rho_0 + \rho'$, причём ρ_0 является теперь заданной функцией координат. Что же касается давления, то в $p = p_0 + p'$ должно попрежнему быть $p_0 = \text{const.}$, поскольку в равновесии давление должно быть постоянно вдоль всей среды (если, конечно, отсутствует внешнее поле). Таким образом, с точностью до величин вто-

рого порядка малости имеем:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением (63,5), но коэффициент $\rho_0 c^2$ в нём есть функция координат. Что касается уравнения Эйлера, то мы имеем, как и в § 63:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}.$$

Исключая \mathbf{v} из обоих этих уравнений (и опуская индекс у ρ_0), получаем окончательно уравнение распространения звука в неоднородной среде:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (74,1)$$

Если речь идёт о монохроматической волне с частотой ω , то $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, так что

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \quad (74,2)$$

Рассмотрим звуковую волну, излучаемую источником небольших размеров, совершающим пульсационные колебания (такое излучение, как мы видели в § 73, изотропно). Обозначим точку, в которой находится источник, посредством A , а давление p' в излучаемой им волне в точке B ¹⁾ посредством $p_A(B)$. Если тот же самый источник помещён в точку B , то создаваемое им в точке A давление обозначим соответственно посредством $p_B(A)$. Выведем соотношение между $p_A(B)$ и $p_B(A)$.

Для этого воспользуемся уравнением (74,2), применив его один раз к излучению источника, находящегося в точке A , а другой раз — к излучению источника, находящегося в B :

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'_A}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_A = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\nabla p'_B}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_B = 0.$$

Умножим первое уравнение на p'_B , а второе на p'_A , и вычтем второе из первого. Получаем:

$$p'_B \operatorname{div} \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \operatorname{div} \frac{\nabla p'_B}{\rho} = \operatorname{div} \left(\frac{p'_B \nabla p'_A}{\rho} - \frac{p'_A \nabla p'_B}{\rho} \right) = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение по объёму, заключённому между бесконечно удалённой замкнутой поверхностью S и двумя малыми сферами S_A и S_B , окружающими соответственно точки A и B .

¹⁾ Размеры источника должны быть малыми по сравнению с расстоянием между A и B , а также по сравнению с длиной волны.

Объёмный интеграл преобразуется в интеграл по этим трём поверхностям, причём интеграл по C обращается в нуль, поскольку на бесконечности звуковое поле исчезает. Таким образом, получим:

$$\int_{C_A + C_B} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) d\mathbf{f} = 0. \quad (74,3)$$

Внутри малой сферы C_A давление p'_A в волне, создаваемой источником, находящимся в A , быстро меняется с расстоянием от A , и потому градиент $\nabla p'_A$ велик. Давление же p'_B , создаваемое источником, находящимся в B , в области вблизи точки A , значительно удалённой от B , является медленно меняющейся функцией координат, так что его градиент $\nabla p'_B$ относительно мал. При достаточно малом радиусе

сферы C_A интегралом $\int_{C_A} p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} d\mathbf{f}$ можно поэтому пренебречь по

сравнению с интегралом $\int_{C_A} p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f}$, а в последнем можно вынести

почти постоянную величину p'_B из-под знака интеграла, заменив её значением в точке A . Аналогичные рассуждения применимы к интегралу по сфере C_B , и в результате мы получаем из (74,3) следующее соотношение:

$$p'_B(A) \int_{C_A} \frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f} = p'_A(B) \int_{C_B} \frac{\nabla p'_B}{\rho} d\mathbf{f}.$$

Но $\frac{\nabla p'}{\rho} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$; поэтому это равенство можно переписать в виде

$$p'_B(A) \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f} = p'_A(B) \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_B} \mathbf{v}_B d\mathbf{f}.$$

Интеграл $\int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f}$ представляет собой количество жидкости, протекающей через поверхность сферы C_A в единицу времени, т. е. изменение (в 1 сек.) объёма пульсирующего источника звука. Поскольку

источники в точках A и B тождественны, то ясно, что

$$\int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f} = \int_{C_B} \mathbf{v}_B d\mathbf{f}$$

и, следовательно,

$$p'_A(B) = p'_B(A). \quad (74,4)$$

Это равенство представляет собой содержание так называемого принципа взаимности: давление, создаваемое в точке B источником,

находящимся в точке A , равно давлению, создаваемому в A таким же источником, находящимся в B . Подчеркнём, что этот результат относится, в частности, и к тому случаю, когда среда представляет собой совокупность нескольких различных областей, каждая из которых однородна. При распространении звука в такой среде на поверхностях раздела различных областей происходит отражение и преломление. Таким образом, принцип взаимности применим и в тех случаях, когда на пути своего распространения от точки A к B и обратно волна испытывает отражения и преломления.

З а д а ч а

Вывести принцип взаимности для дипольного звукового излучения, создаваемого источником, совершающим колебания без изменения своего объёма.

Р е ш е н и е. В этом случае интеграл $\int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f}$ тождественно равен нулю,

и при вычислении интегралов в (74,3) необходимо учесть следующее приближение. Для этого пишем с точностью до членов первого порядка

$$p'_B = p'_B(A) + \mathbf{r} \nabla p'_B,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор из точки A . В интеграле

$$\int_{C_A} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) d\mathbf{f} \quad (1)$$

оба члена имеют теперь одинаковый порядок величины. Подставляя сюда для p'_B написанное выше разложение и помня, что интеграл $\int_{C_A} \frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f}$ обращается теперь в нуль, получаем:

$$\int_{C_A} \left\{ (\mathbf{r} \nabla p'_B) \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right\} d\mathbf{f}.$$

Далее, выносим почти постоянную величину $\nabla p'_B = -\rho \dot{\mathbf{v}}_B$ из-под знака интеграла, заменив её значением в точке A :

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_B(A) \int_{C_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} d\mathbf{f} - \mathbf{r} \left(\frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f} \right) \right\}$$

(ρ_A — плотность среды в точке A). Для вычисления этого интеграла замечаем, что вблизи источника жидкость можно считать несжимаемой (см. § 73), и потому для давления внутри малой сферы C_A можно написать согласно (11,1)

$$p'_A = -\rho \dot{\Phi} = \rho \frac{\dot{\mathbf{A}} \mathbf{r}}{r^3}.$$

В монохроматической волне $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}} = -i\omega\mathbf{A}$; вводя также единичный вектор \mathbf{n}_A в направлении вектора \mathbf{A} для источника, находящегося в точке A , найдём, что интеграл (1) пропорционален по величине

$$\rho_A v_B(A) \mathbf{n}_A.$$

Аналогично интеграл по сфере C_B будет пропорционален

$$-\rho_B v_A(B) \mathbf{n}_B$$

с тем же коэффициентом пропорциональности. Приравнявая их сумму нулю, найдём искомое соотношение

$$\rho_A v_B(A) \mathbf{n}_A = \rho_B v_A(B) \mathbf{n}_B,$$

выражающее собой принцип взаимности для дипольного звукового излучения.

§ 75. Распространение звука по трубке

Рассмотрим распространение звуковой волны вдоль длинной узкой трубки. Под узкой подразумевается трубка, ширина которой мала по сравнению с длиной волны. Сечение трубки может меняться вдоль её длины как по форме, так и по площади. Важно только, чтобы это изменение происходило достаточно медленно, — площадь S сечения должна мало меняться на расстояниях порядка ширины трубки.

В этих условиях можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубки все величины (скорость, плотность и т. п.) постоянны. Направление же распространения волны можно считать везде совпадающим с направлением оси трубки. Уравнение, определяющее распространение такой волны, удобнее всего вывести методом, аналогичным применённому в § 13 для вывода уравнения распространения гравитационных волн в каналах.

В единицу времени через сечение трубки проходит масса $S\rho v$ жидкости. Поэтому количество (масса) жидкости в объёме между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями трубки уменьшается в 1 сек. на

$$(S\rho v)_{x+\Delta x} - (S\rho v)_x = \frac{\partial (S\rho v)}{\partial x} dx$$

(координата x вдоль оси трубки). Поскольку самый объём между обоими сечениями остаётся неизменным, то это уменьшение может произойти только за счёт изменения плотности жидкости. Изменение плотности в единицу времени есть $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, а соответствующее уменьшение массы жидкости в объёме $S dx$ между двумя сечениями равно

$$-S \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

Приравнявая оба выражения, получаем уравнение

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (S\rho v)}{\partial x}, \quad (75,1)$$

представляющее собой «уравнение непрерывности» для жидкости в трубке.

Далее, напишем уравнение Эйлера, опуская в нём квадратичный по скорости член:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (75,2)$$

Продифференцируем (75,1) по времени; при дифференцировании правой части этого уравнения надо считать ρ не зависящим от времени, так как при дифференцировании ρ возникает член, содержащий $v \frac{\partial \rho}{\partial t} = v \frac{\partial \rho'}{\partial t}$ и потому малый второго порядка. Таким образом,

$$S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(S \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right).$$

Подставляем сюда для $\frac{\partial v}{\partial t}$ выражение (75,2), а стоящую слева производную от плотности выражаем через производную от давления согласно $\ddot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \ddot{p} = \frac{1}{c^2} \ddot{p}$.

В результате получаем следующее уравнение распространения звука в трубке:

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (75,3)$$

В монохроматической волне p^1) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, и (75,3) переходит в

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k^2 p = 0 \quad (75,4)$$

($k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор).

Наконец, остановимся на вопросе об излучении звука из открытого конца трубки. Разность давлений между газом в конце трубки и газом в окружающем трубку пространстве мала по сравнению с разностями давлений внутри трубки. Поэтому в качестве граничного условия на открытом конце трубки надо, с достаточной точностью, потребовать обращения давления p в нуль. Скорость же газа v у конца трубки при этом оказывается отличной от нуля; пусть v_0 есть её значение здесь. Произведение Sv_0 есть количество (объём) газа, выходящего в единицу времени из конца трубки.

Мы можем теперь рассматривать открытый конец трубки как некоторый «источник» газа с «производительностью» Sv_0 . Задача об излучении из трубки делается эквивалентной задаче об излучении пульсирующего тела, определяющемся формулой (73,10). Вместо

¹⁾ Здесь и в задачах к этому параграфу под p подразумевается везде переменная часть давления (которую мы раньше обозначали посредством p').

производной \dot{V} от объёма тела по времени мы должны теперь писать величину Sv_0 . Таким образом, полная интенсивность излучаемого звука есть

$$I = \frac{\rho S^2 \dot{v}_0^2}{4\pi c}. \quad (75,5)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить коэффициент прохождения звука при переходе его из трубки сечения S_1 в трубку сечения S_2 .

Решение. В первой трубке имеем две волны: падающую $p_1 = a_1 e^{i(kx - \omega t)}$ и отражённую $p'_1 = a'_1 e^{-i(kx + \omega t)}$. Во второй трубке имеется прошедшая волна $p_2 = a_2 e^{i(kx - \omega t)}$. В месте соединения трубок ($x = 0$) должны быть равными давления и количества Sv газа, переходящие из одной трубки в другую. Эти условия дают

$$a_1 + a'_1 = a_2, \quad S_1(a_1 - a'_1) = S_2 a_2,$$

откуда $a_2 = a_1 \frac{2S_1}{S_1 + S_2}$. Отношение D потока энергии в прошедшей волне

к потоку энергии в падающей волне $\left(D = \frac{S_2 \rho c |v_2|^2}{S_1 \rho c |v_1|^2} = \frac{S_2 |v_2|^2}{S_1 |v_1|^2} \right)$ равно

$$D = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} = 1 - \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2.$$

2. Определить количество энергии, излучаемой из открытого конца цилиндрической трубки.

Решение. В граничном условии $p = 0$ на открытом конце трубки можно приблизительно пренебречь излучаемой волной (мы увидим, что интенсивность излучения из конца трубки мала). Тогда имеем условия $p_1 = -p'_1$, где p_1 и p'_1 — давления в падающей волне и в волне, отражённой обратно в трубку; для скоростей будем соответственно иметь $v_1 = v'_1$, так что суммарная скорость на выходе из трубки есть $v_0 = v_1 + v'_1 = 2v_1$. Поток энергии в падающей волне равен $cS\rho v_1^2 = \frac{1}{4} cS\rho v_0^2$. С помощью (75,5) получаем для отношения излучаемой энергии к потоку в падающей волне

$$D = \frac{S\omega^2}{\pi c^2}.$$

Для трубки кругового сечения (радиуса R) имеем $D = \frac{R^2 \omega^2}{c^2}$. Поскольку по предположению $R \ll c/\omega$, то $D \ll 1$.

3. Одно из отверстий цилиндрической трубки закрыто излучающей звук мембраной, совершающей заданное колебательное движение; другой конец трубки открыт. Определить излучение звука из трубки.

Решение. В общем решении $p = (ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$ определяем постоянные a и b из условий $v = u$ ($u = u_0 e^{-i\omega t}$ — заданная скорость колебаний мембраны) на закрытом конце трубки ($x = 0$) и условия $p = 0$ на открытом конце ($x = l$). Эти условия дают

$$ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0 \quad a - b = cu_0.$$

Определяя a и b , находим для скорости газа на открытом конце трубки величину $v_0 = \frac{u}{\cos kl}$. Если бы трубки не было, то интенсивность излучения колеблющейся мембраной определялась бы средним квадратом $S^2 \overline{|\dot{u}|^2} = S^2 \omega^2 |u|^2$ согласно формуле (73,10) с Su вместо \dot{V} ; S — площадь поверхности мембраны. Излучение же из конца трубки пропорционально $S^2 |v_0|^2 \omega^2$. Определяя «коэффициент усиления» звука трубкой как $A = \frac{S^2 |v_0|^2}{S^2 |u|^2}$, получаем:

$$A = \frac{1}{\cos^2 kl}.$$

Он обращается в бесконечность при частотах колебаний мембраны, равных собственным частотам трубки (резонанс); в действительности, конечно, он всё же остаётся конечным благодаря наличию эффектов, которыми мы пренебрегли (например, трения, влияния излучения звука).

4. То же для конической трубки (мембрана закрывает меньшее из отверстий трубки).

Решение. Для сечения трубки имеем $S = S_0 x^2$, меньшему и большему отверстиям трубки пусть соответствуют значения x_1 и x_2 координаты x , так что длина трубки есть $l = x_2 - x_1$. Общее решение уравнения (75,4) есть

$$p = \frac{1}{x} (a e^{ikx} + b e^{-ikx}) e^{-i\omega t};$$

a и b определяются из условий $v = u$ при $x = x_1$ и $p = 0$ при $x = x_2$. Для коэффициента усиления получаем:

$$A = \frac{S_0 x_2^2 |v_2|^2}{S_0 x_1^2 |u|^2} = \frac{k^2 x_1^2}{(\sin kl + kx_1 \cos kl)^2}.$$

5. То же для трубки, сечение которой меняется вдоль её длины по экспоненциальному закону $S = S_0 e^{\alpha x}$.

Решение. Уравнение (75,4) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

откуда

$$p = e^{-\frac{\alpha}{2}x} (a e^{imx} + b e^{-imx}) e^{-i\omega t}, \quad m = \sqrt{k^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Определяя a и b из условий $v = u$ при $x = 0$ и $p = 0$ при $x = l$, находим для коэффициента усиления

$$A = \frac{S_0 e^{\alpha l} |v_0|^2}{S_0 |u|^2} = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2} \frac{\sin ml}{m} + \cos ml\right)^2}$$

при $k > \frac{\alpha}{2}$ и

$$A = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2} \frac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \quad m' = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - k^2}$$

при $k < \frac{\alpha}{2}$.

§ 76. Рассеяние звука

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит, как говорят, рассеяние звука: наряду с падающей волной появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние звуковой волны происходит уже благодаря самому факту наличия тела на её пути. Кроме того, под влиянием падающей волны само тело приходит в движение; это движение в свою очередь обуславливает некоторое дополнительное излучение звука телом, т. е. некоторое дополнительное рассеяние. Однако, если плотность тела велика по сравнению с плотностью среды, в которой происходит распространение звука, а его сжимаемость мала, то рассеяние, связанное с движением тела, представляет собой лишь малую поправку к основному рассеянию, обусловленному самим наличием тела. Этой поправкой мы будем в дальнейшем пренебрегать и потому будем считать рассеивающее тело неподвижным.

Будем предполагать, что длина волны звука λ велика по сравнению с размерами l тела; тогда для вычисления рассеянной волны можно воспользоваться формулами (73,8) и (73,11)¹⁾. Рассеянную волну мы при этом рассматриваем как волну, излучаемую телом; разница заключается только в том, что вместо движения тела в жидкости мы имеем теперь дело с движением жидкости относительно тела. Обе задачи, очевидно, эквивалентны.

Для потенциала излучаемой волны мы получили выражение

$$\varphi = -\frac{\dot{V}}{4\pi r} - \frac{\dot{A}r}{cr^2}.$$

В этой формуле V было объёмом тела. Теперь же объём самого тела остаётся неизменным, и под \dot{V} надо подразумевать не скорость изменения объёма тела, а то количество (объём) жидкости, которое вошло бы в единицу времени в объём, занимаемый телом (этот объём обозначим посредством V_0), если бы этого тела вообще не было. Действительно, при наличии тела это количество жидкости не проникает внутрь занимаемого телом объёма, что эквивалентно выбрасыванию этого же количества из объёма V_0 . Коэффициент же при $\frac{1}{4\pi r}$ в первом члене в φ должен, как мы видели в предыдущем параграфе, быть равен как раз количеству «выбрасываемой» в 1 сек. из начала координат жидкости. Это количество легко вычислить. Изменение массы жидкости в единицу времени в объёме, равном объёму тела, равно $V_0 \dot{\rho}$, где функция ρ определяет изменение со временем плотности жидкости

¹⁾ В то же время требуется, чтобы размеры тела были велики по сравнению с амплитудой смещений частиц жидкости в волне; в противном случае движение жидкости не будет, вообще говоря, потенциальным.

в падающей звуковой волне (поскольку длина волны велика по сравнению с размерами тела, то на протяжении расстояний порядка этих размеров плотность ρ можно считать постоянной; поэтому мы можем писать изменение массы жидкости в объёме V_0 просто в виде $V_0 \dot{\rho}$, где $\dot{\rho}$ одинаково вдоль всего объёма V_0). Изменение объёма жидкости, соответствующее изменению массы $\dot{\rho} V_0$, есть, очевидно, $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$. Таким образом, вместо \dot{V} надо писать в выражении для φ величину $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$. В падающей плоской волне переменная часть плотности ρ' связана со скоростью посредством $\rho' = \rho \frac{v}{c}$; поэтому $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho \frac{\dot{v}}{c}$, и вместо $V_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ мы можем писать $V_0 \frac{\dot{v}}{c}$.

Что касается вектора \mathbf{A} , то при движении тела в жидкости он определяется формулами (11,5), (11,6): $4\pi\rho A_i = m_{ik} u_k + \rho V_0 u_i$. Теперь же мы должны писать вместо скорости \mathbf{u} тела взятую с обратным знаком скорость \mathbf{v} жидкости в падающей волне (которую она имела бы в месте нахождения тела, если бы тела вовсе не было). Таким образом,

$$A_i = -\frac{1}{4\pi\rho} m_{ik} v_k - \frac{V_0}{4\pi} v_i. \quad (76,1)$$

Окончательно получаем для потенциала рассеянной волны

$$\varphi_p = -\frac{V_0 \dot{v}}{4\pi c r} - \frac{\dot{\mathbf{A}} \mathbf{r}}{c r^2} \quad (76,2)$$

с вектором \mathbf{A} , определяющимся формулой (76,1). Для распределения скоростей в рассеянной волне получаем отсюда

$$\mathbf{v}_p = \frac{V_0 \ddot{\mathbf{v}} \mathbf{n}}{4\pi r c^2} + \frac{\mathbf{n} (\mathbf{n} \dot{\mathbf{A}})}{r c^2} \quad (76,3)$$

(см. § 73; \mathbf{n} — единичный вектор в направлении рассеяния).

Среднее количество рассеиваемой (в 1 сек.) в данном элементе do телесного угла энергии определяется потоком энергии, равным $c \rho \overline{v_p^2} r^2 do$. Полная интенсивность I_p рассеяния получается интегрированием этого выражения по всем направлениям. При этом интегрировании удвоенное произведение обоих членов в (76,3), пропорциональное первой степени косинуса угла между направлением рассеяния и направлением распространения падающей волны, исчезает и остаётся (ср. (73,10) и (73,13)):

$$I_p = \frac{V_0^2 \rho}{4\pi c^3} \overline{\dot{v}^2} + \frac{4\pi\rho}{3c^3} \overline{\dot{\mathbf{A}}^2}. \quad (76,4)$$

Рассеяние принято характеризовать его так называемым эффективным сечением. Эффективным сечением $d\sigma$ называется отношение сред-

ней (по времени) рассеиваемой в данном элементе телесного угла энергии к средней плотности потока энергии в падающей волне. Полное эффективное сечение σ равно интегралу от $d\sigma$ по всем направлениям рассеяния, т. е. равно отношению полной интенсивности рассеяния к плотности падающего потока энергии. Эффективное сечение имеет, очевидно, размерность площади.

Средняя плотность потока энергии в падающей волне есть $c\rho\bar{v}^2$. Поэтому дифференциальное эффективное сечение рассеяния равно отношению $\frac{c\rho\bar{v}_p^2}{c\rho v^2} r^2 d\omega$, т. е.

$$d\sigma = \frac{\bar{v}_p^2}{v^2} r^2 d\omega. \quad (76,5)$$

Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{V_0^2}{4\pi c^4} \frac{\bar{v}^2}{v^2} + \frac{4\pi}{3c^4} \frac{\bar{A}^2}{v^2}. \quad (76,6)$$

Для монохроматической падающей волны среднее значение квадрата второй производной от скорости по времени пропорционально четвёртой степени частоты. Таким образом, эффективное сечение рассеяния звука телом, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, пропорционально четвёртой степени частоты.

Наконец, остановимся коротко на обратном предельном случае, когда длина волны рассеиваемого звука мала по сравнению с размерами тела. В этом случае всё рассеяние, за исключением лишь рассеяния на очень малые углы, сводится к простому отражению от поверхности тела. Соответствующая часть полного эффективного сечения рассеяния равна, очевидно, просто площади S сечения тела плоскостью, перпендикулярной к направлению падающей волны. Рассеяние же на малые углы (углы порядка λ/L) представляет собой диффракцию от краёв тела. Мы не станем излагать здесь теорию этого явления, полностью аналогичную теории диффракции света¹⁾. Укажем лишь, что согласно принципу Бабиня полная интенсивность диффрагировавшего звука равна полной интенсивности отражённого звука. Поэтому диффракционная часть эффективного сечения рассеяния равна той же площади S , а полное сечение равно, следовательно, $2S$.

З а д а ч и

1. Определить эффективное сечение рассеяния плоской звуковой волны твёрдым шариком, радиус R которого мал по сравнению с длиной волны.
Решение. Для скорости в плоской волне имеем $v = a \cos \omega t$ (в данной точке пространства). Вектор A равен в случае шара (см. задачу 1 § 11)

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, §§ 59—61.

$A = -v \frac{R^3}{2}$. Для дифференциального эффективного сечения получаем:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4} \left(1 - \frac{3 \cos \theta}{2}\right)^2 d\theta$$

(θ — угол между направлением падающей волны и направлением рассеяния). Интенсивность рассеяния максимальна в направлении $\theta = \pi$, противоположном направлению падения. Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{7\pi}{9} \left(\frac{R^3 \omega^2}{c^2}\right)^2. \quad (1)$$

Здесь (а также ниже в задачах 3, 4) предполагается, что плотность ρ_0 шарика велика по сравнению с плотностью ρ газа; в противном случае надо учитывать увлечение шарика действующими на него со стороны колеблющегося газа силами давления.

2. Определить эффективное сечение рассеяния звука жидкой каплей с учётом сжимаемости жидкости и движения капли под влиянием падающей волны.

Решение. При адиабатическом изменении давления газа, в котором находится капля, на p' объём капли уменьшается на $\frac{V_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p}\right)_s p'$ (плотность жидкости в капле). Но $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s$ есть квадрат скорости звука c_0 в жидкости, а изменение давления в плоской волне связано со скоростью посредством $p' = v c \rho$ (ρ — плотность газа). Таким образом, уменьшение объёма капли в 1 сек. равно $V_0 \frac{\dot{v} c \rho}{c_0^2 \rho_0}$. В выражениях (76,2), (76,3) вместо $V_0 \frac{\ddot{v}}{c}$

надо писать теперь разность $V_0 \frac{\ddot{v}}{c} - \frac{\ddot{v} c \rho}{c_0^2 \rho_0}$. Далее, в выражении для A

надо писать теперь вместо $-v$ разность $u - v$, где u — скорость тела, приобретаемая им под влиянием падающей волны. Для шара получаем с помощью результатов задачи 1 § 11

$$A = R^3 v \frac{\rho - \rho_0}{2\rho_0 + \rho}.$$

Подстановка этих выражений приводит к эффективному сечению

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4} \left\{ \left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0}\right) - 3 \cos \theta \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0 + \rho} \right\}^2 d\theta.$$

Полное эффективное сечение равно

$$\sigma = \frac{4\pi \omega^4 R^6}{9c^4} \left\{ \left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0}\right)^2 + \frac{3(\rho_0 - \rho)^2}{(2\rho_0 + \rho)^2} \right\}.$$

3. Определить эффективное сечение рассеяния звука твёрдым шариком, радиус R которого мал по сравнению с $\sqrt{v/\omega}$. Теплоемкость шарика предполагается настолько большой, что его температуру можно считать неизменной.

Решение. В этом случае должно быть учтено влияние вязкости газа на движение шарика, и вектор A должен быть видоизменён указанным

в задаче 2 § 73 образом; при $R \sqrt{\omega/\nu} \ll 1$ имеем:

$$A = -i \frac{3R\nu}{2\omega} v.$$

Кроме того, к рассеянию того же порядка величины приводит теплопроводность газа. Пусть $T'_0 e^{-i\omega t}$ — колебания температуры в заданной точке звуковой волны. Распределение температуры вблизи шарика будет (ср. задачу 2 § 52):

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t} \left[1 - \frac{R}{r} e^{-(1-i)(r-R)\sqrt{\omega/2\chi}} \right]$$

при $r = R$ должно быть $T' = 0$). Количество тепла, передаваемое в единицу времени от газа к шарика, есть (при $R \sqrt{\omega/\chi} \ll 1$):

$$q = 4\pi R^2 \kappa \frac{dT'}{dr} \Big|_{r=R} = 4\pi R^2 \kappa T'_0 e^{-i\omega t}.$$

Передача этого тепла приводит к изменению объёма газа, которое можно воспринимать в смысле его влияния на рассеяние как соответствующее эффективное изменение объёма шарика, равное

$$\dot{V} = -4\pi R^3 \beta T'_0 e^{-i\omega t} = -\frac{4\pi R}{c} \chi (\gamma - 1) v,$$

где β — коэффициент теплового расширения газа, а $\gamma = c_p/c_v$; мы воспользовались также формулами (63,13) и (77,2).

Учитывая оба эффекта, получим дифференциальное эффективное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\omega^2 R^2}{c^4} \left[\chi (\gamma - 1) - \frac{3}{2} \nu \cos \theta \right]^2 d\phi.$$

Полное эффективное сечение:

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^2 R^2}{c^4} \left[\chi^2 (\gamma - 1)^2 + \frac{3}{4} \nu^2 \right].$$

Эти формулы применимы лишь постольку, поскольку стоковая сила трения мала по сравнению с инерционными силами, т. е. $\eta R \ll M\omega$, где $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$ — масса шарика; в противном случае становится существенным увлечение шарика вязкими силами.

4. Определить среднюю силу, действующую на твёрдый шарик, рассеивающий плоскую звуковую волну ($\lambda \gg R$).

Решение. Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарика импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне. Из падающей волны рассеивается поток энергии, равный $\sigma \bar{E}_0$, где E_0 — плотность энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c , т. е. равен $\sigma \bar{E}_0/c$. В рассеянной волне поток импульса в телесном угле $d\phi$ равен $\bar{E}_p r^2 d\phi = \bar{E}_0 d\sigma$; проектируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это

направление) и интегрируя по всем углам, получим $\bar{E}_0 \int \cos \theta d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$F = \bar{E}_0 \int (1 - \cos \theta) d\sigma.$$

Подставляя сюда $d\sigma$ из задачи 1, получим:

$$F = \bar{E}_0 \frac{11\pi\omega^4 R^6}{9c^4}.$$

§ 77. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем звук поглощается, т. е. его интенсивность постепенно уменьшается. Для вычисления диссипируемой в единицу времени энергии $\dot{E}_{\text{мех}}$ воспользуемся следующими общими соображениями. Механическая энергия представляет собой не что иное, как максимальную работу, которую можно получить при переходе из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия. Как известно из термодинамики¹⁾, максимальная работа совершается, если переход происходит обратимым образом (т. е. без изменения энтропии), и равна соответственно этому

$$E_{\text{мех}} = E_0 - E(S),$$

где E_0 есть заданное начальное значение энергии тела в исходном состоянии, а $E(S)$ — энергия тела в состоянии равновесия с той же энтропией S , которую тело имело вначале. Дифференцируя по времени, получаем:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S} \dot{S}.$$

Производная от энергии по энтропии есть температура. Поэтому $\frac{\partial E}{\partial S}$ есть температура, которую имело бы тело, если бы оно находилось в состоянии термодинамического равновесия (с заданным значением энтропии). Обозначая эту температуру как T_0 , имеем, следовательно:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -T_0 \dot{S}.$$

Воспользуемся для \dot{S} выражением (49,6), включающим в себя возрастание энтропии, обусловленное как теплопроводностью, так и вязкостью. Поскольку температура T мало меняется вдоль жидкости и мало отличается от T_0 , то можно вынести её из-под знака интеграла и писать T вместо T_0 :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{мех}} = & -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV - \\ & - \zeta \int (\text{div } \mathbf{v})^2 dV. \end{aligned} \quad (77,1)$$

¹⁾ См., например, «Статистическая физика», § 19, Гостехиздат, 1951.

Эта формула представляет собой обобщение формулы (16,3) на случай сжимаемой жидкости и наличия теплопроводности.

Пусть ось x совпадает с направлением распространения звуковой волны. Тогда

$$v_x = v_0 \cos(kx - \omega t), \quad v_y = v_z = 0.$$

Два последних члена в (59,2) дают

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t) dV.$$

Нас, конечно, интересует среднее по времени значение величин; усреднение даёт

$$-k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) \frac{1}{2} v_0^2 V_0$$

(V_0 — объём жидкости).

Далее, вычислим первый член в (77,1). Отклонение T' температуры в звуковой волне от своего равновесного значения связано со скоростью формулой (63,13), так что градиент температуры равен

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \beta \frac{c_T}{c_p} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta c_T}{c_p} v_0 k \sin(kx - \omega t).$$

Для среднего по времени значения от первого члена в (77,1) получаем:

$$-\frac{\kappa^2 T \beta^2}{2c_p^2} v_0^2 k^2 V_0.$$

С помощью известных термодинамических формул

$$c_p - c_v = T\beta^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = T\beta^2 \frac{c_v}{c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = T\beta^2 c^2 \frac{c_v}{c_p} \quad (77,2)$$

можно переписать это выражение в виде

$$-\frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) k^2 v_0^2 V_0.$$

Собирая полученные выражения, находим среднее значение диссипации энергии в виде

$$\bar{E}_{\text{мех}} = -\frac{k^2 v_0^2 V_0}{2} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \right]. \quad (77,3)$$

Полная же энергия звуковой волны равна

$$\bar{E} = \frac{\rho v_0^2}{2} V_0. \quad (77,4)$$

Введённый в § 25 коэффициент затухания волны определяет закон уменьшения интенсивности со временем. Для звука, однако, обычно приходится иметь дело с несколько иной постановкой задачи, в которой звуковая волна распространяется вдоль жидкости и её

интенсивность падает с увеличением пройденного расстояния x . Очевидно, что это уменьшение будет происходить по закону $e^{-2\gamma x}$, а для амплитуды — как $e^{-\gamma x}$, где «коэффициент поглощения» γ определяется посредством

$$\gamma = \frac{|\dot{E}_{\text{мех}}|}{2c\bar{E}}. \quad (77,5)$$

Подставляя сюда (77,3) и (77,4), находим, таким образом, следующее выражение для коэффициента поглощения звука:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2fc^3} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + x \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (77,6)$$

Отметим, что он пропорционален квадрату частоты звука¹⁾.

Эта формула применима постольку, поскольку определяемый ею коэффициент поглощения мал: должно быть мало относительное убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны (т. е. должно быть $\gamma c/\omega \ll 1$). На этом предположении по существу основан изложенный вывод, так как мы вычисляли диссипацию энергии с помощью незатухающего выражения для звуковой волны. Для газов это условие фактически всегда выполнено. Рассмотрим, например, первый член в (77,6). Условие $\gamma c/\omega \ll 1$ означает, что должно быть $\nu\omega/c^2 \ll 1$. Но, как известно из кинетической теории газов, коэффициент вязкости ν газа — порядка величины произведения длины свободного пробега l на среднюю тепловую скорость молекул; последняя совпадает по порядку величины со скоростью звука в газе, так что $\nu \sim lc$. Поэтому имеем:

$$\frac{\nu\omega}{c^2} \sim \frac{l\omega}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1, \quad (77,7)$$

так как заведомо $l \ll \lambda$. Член с теплопроводностью в (77,6) дает то же самое, поскольку $\chi \sim \nu$.

Что же касается жидкостей, то и здесь условие малости поглощения выполняется всегда, когда вообще имеет смысл задача о поглощении звука в той постановке, о которой здесь шла речь. Поглощение (на длине волны) может стать большим, лишь если силы вязких напряжений сравнимы с силами давления, возникающими при сжатии вещества. Но в таких условиях становится неприменимым уже самое уравнение Навье-Стокса (с не зависящими от частоты коэффициентами

¹⁾ Специфический механизм поглощения должен иметь место, как указал М. А. Исакович, при распространении звука в двухфазной системе — эмульсии. Ввиду различия в термодинамических свойствах компонент эмульсии изменения их температуры при прохождении звуковой волны будут, вообще говоря, различны. Возникающий при этом между ними теплообмен приведет к дополнительному поглощению звука. Вследствие сравнительной медленности этого теплообмена уже сравнительно рано возникает и существенная дисперсия звука. Подробные расчёты этих явлений см. М. А. Исакович, ЖЭТФ 18, 907, 1948.

вязкости) и возникает существенная, связанная с процессами внутреннего трения дисперсия звука ¹⁾.

При поглощении звука соотношение между волновым вектором и частотой можно, очевидно, написать в виде

$$k = \frac{\omega}{c} + ia\omega^2 \quad (77,8)$$

(где посредством a обозначен коэффициент при ω^2 в коэффициенте поглощения $\gamma = a\omega^2$). Легко сообразить соответственно этому, каким образом надо видоизменить уравнение бегущей звуковой волны для того, чтобы учесть в нём эффект поглощения. Для этого замечаем, что в отсутствии поглощения дифференциальное уравнение для, скажем, давления $p' = p'(x - ct)$ можно написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Уравнение же, решением которого была бы функция $e^{i(kx - \omega t)}$ с k из (77,8), надо, очевидно, написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} + a \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad (77,9)$$

Если ввести вместо t переменную $\tau = t - \frac{x}{c}$, то это уравнение перейдёт в

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

т. е. уравнение типа одномерного уравнения теплопроводности.

Общее решение этого уравнения можно написать в виде (см. § 51)

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ax}} \int p'_0(\tau') e^{-\frac{(\tau' - \tau)^2}{4ax}} d\tau' \quad (77,10)$$

(где $p'_0(\tau) = p'(0, \tau)$). Если волна излучалась в течение ограниченного промежутка времени, то на достаточно больших расстояниях от источника это выражение переходит в

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ax}} e^{-\frac{\tau^2}{4ax}} \int p'_0(\tau') d\tau'. \quad (77,11)$$

Другими словами, на больших расстояниях профиль волны определяется гауссовой кривой. Её «ширина» — порядка величины \sqrt{ax} , т. е. растёт пропорционально корню из пройденного волной расстояния,

¹⁾ Особый случай, когда возможно сильное поглощение звука, которое может быть рассмотрено обычными методами, — газ с аномально большой (по сравнению с его вязкостью) теплопроводностью, связанной с посторонними причинами, например, с лучистой теплопроводностью при очень высоких температурах (см. задачу 3 этого параграфа).

«амплитуда» же волны падает обратно пропорционально \sqrt{x} . Отсюда легко заключить, что полная энергия волны тоже падает как $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Легко вывести аналогичные формулы и для шаровых волн; при этом надо учитывать тот факт, что для такой волны $\int p' dt = 0$ (см. § 69). Вместо (77,11) получим теперь

$$p'(r, \tau) = \text{const.} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{\tau^2}{4ar}},$$

или

$$p'(r, \tau) = \text{const.} \cdot \frac{\tau}{r^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4ar}}. \quad (77,12)$$

Сильное поглощение должно происходить, как было указано *Б. П. Константиновым* (1939), при отражении звуковой волны от твёрдой стенки. Причина этого явления заключается в следующем.

В звуковой волне наряду с плотностью и давлением испытывает периодические колебания около своего среднего значения также и температура. Поэтому вблизи твёрдой стенки имеется периодически меняющаяся по величине разность температур между жидкостью и стенкой, даже если средняя температура жидкости равна температуре стенки. Между тем на самой поверхности температуры соприкасающихся жидкости и стенки должны быть одинаковыми. В результате в тонком пристеночном слое жидкости возникает большой градиент температуры; температура быстро меняется от своего значения в звуковой волне до температуры стенки. Наличие же больших градиентов температуры приводит к большой диссипации энергии путём теплопроводности. По аналогичной причине к большому поглощению звука приводит при наклонном падении волны также и вязкость жидкости. При таком падении скорость жидкости в волне (направленная по направлению распространения волны) имеет отличную от нуля касательную к поверхности стенки компоненту. Между тем на самой поверхности жидкость должна полностью «прилипнуть» к стенке. Поэтому в пристеночном слое жидкости возникает большой градиент касательной составляющей скорости¹⁾, что и приводит к большой вязкой диссипации энергии (см. задачу 1).

Задачи

1. Определить долю энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твёрдой стенки. Плотность вещества стенки предполагается настолько большой, что звук практически не проникает в него, а теплоёмкость — настолько большой, что температуру стенки можно считать постоянной.

¹⁾ Что касается нормальной составляющей скорости, то на стенке она равна нулю уже в силу граничных условий для идеальной жидкости.

Решение. Выбираем плоскость стенки в качестве плоскости $x = 0$, а плоскость падения в качестве плоскости x, y . Угол падения (равный углу отражения) есть θ . Изменение плотности в падающей волне в некоторой точке на поверхности (скажем, в точке $x = y = 0$) есть $\rho'_1 = Ae^{-i\omega t}$. Отражённая волна имеет ту же амплитуду, так что у стенки в ней $\rho'_2 = \rho'_1$. Реальное изменение плотности жидкости, в которой распространяются одновременно обе волны (падающая и отражённая), есть $\rho' = 2Ae^{-i\omega t}$. Скорость жидкости в волне определяется согласно $v_1 = \frac{c}{\rho} \rho'_1 n_1$, $v_2 = \frac{c}{\rho} \rho'_2 n_2$. Полная скорость на стенке $v = v_1 + v_2$ есть поэтому

$$v = v_y = 2A \sin \theta \frac{c}{\rho} e^{-i\omega t}$$

(вернее, это есть то значение скорости, которое она имеет без учёта верных граничных условий на поверхности стенки при наличии вязкости). Истинный ход скорости v_y вблизи стенки определяется формулой (24,13), а связанная с вязкостью диссипация энергии — формулой (24,14), в которые надо вместо $v_0 e^{-i\omega t}$ подставить полученное выше выражение для v .

Отклонение T' температуры от своего среднего значения (равного температуре стенки) без учёта правильных граничных условий на стенке получилось бы равным (см. (63,13))

$$T' = 2A \frac{c^2 T_0}{c_p \rho} e^{-i\omega t}.$$

В действительности же распределение температуры определяется уравнением теплопроводности с граничным условием $T' = 0$ при $x = 0$ и соответственно этому изображается формулой, в точности аналогичной (24,13).

Вычисляя связанную с теплопроводностью диссипацию энергии согласно первому члену формулы (77,1), получим в результате для полной диссипации энергии, отнесённой к единице площади поверхности стенки:

$$\bar{E}_{\text{мех}} = - \frac{A^2 c^2 \sqrt{2\omega}}{\rho} \left[\sqrt{\chi} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) + \sin^2 \theta \sqrt{\nu} \right].$$

Средняя плотность потока энергии, падающего на единицу поверхности стенки с падающей волной, равна $c \rho v_1^2 \cos \theta = \frac{c^3 A^2}{2\rho} \cos \theta$. Поэтому доля энергии, поглощающейся при отражении, есть

$$2 \frac{\sqrt{2\omega}}{c \cos \theta} \left[\sin^2 \theta \sqrt{\nu} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \sqrt{\chi} \right].$$

Это выражение справедливо лишь до тех пор, пока оно мало (при выводе мы считали амплитуды падающей и отражённой волн одинаковыми). Это условие означает, что угол падения θ не должен быть слишком близким к $\pi/2$).

2. Определить коэффициент поглощения звука, распространяющегося по цилиндрической трубе.

Решение. Основная доля поглощения обусловлена эффектом, происходящим от наличия стенок. Коэффициент поглощения γ равен энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности стенок единицы длины трубы,

1) Вычисление поглощения звука при отражении под произвольным углом см. Б. П. Константинов, ЖТФ 9, 226, 1939.

делённой на удвоенный полный поток энергии через поперечное сечение трубы. Вычисление, полностью аналогичное произведённому в задаче 1, приводит к результату (R — радиус трубы):

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}Rc} \left[\sqrt{\nu} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \sqrt{\chi} \right].$$

3. Найти закон дисперсии для звука, распространяющегося в среде с очень большой теплопроводностью.

Решение. При наличии большой теплопроводности движение в звуковой волне не адиабатично. Поэтому вместо условия постоянства энтропии имеем теперь уравнение

$$\dot{s}' = \frac{x}{\rho T} \Delta T' \quad (1)$$

(линеаризованное уравнение (49,4) без вязких членов). В качестве второго уравнения берём

$$\ddot{\rho}' = \Delta \rho', \quad (2)$$

получающееся путём исключения ν из уравнений (63,2) и (63,3). Выбирая в качестве основных переменных ρ' и T' , пишем ρ' и s' в виде

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p', \quad s' = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T p'.$$

Эти выражения подставляем в (1) и (2), после чего ищем T' , p' в виде, пропорциональном $e^{i(kx - \omega t)}$. Условие совместимости получающихся таким образом двух уравнений для p' и T' можно привести (путём использования ряда известных соотношений между производными от термодинамических величин) к виду

$$k^4 - k^2 \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} + \frac{i\omega}{\chi} \right) + \frac{i\omega^3}{\chi c_s^2} = 0, \quad (3)$$

чем и определяется искомая зависимость k от ω . Здесь введены обозначения

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma}$$

(γ — отношение теплоёмкостей c_p/c_v).

В предельном случае малых частот ($\omega \ll c^2/\chi$) уравнение (3) даёт

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i \frac{\omega^2 \gamma}{2c_s} \left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_s^2} \right),$$

что соответствует распространению звука с обычной «адиабатической» скоростью c_s и малым коэффициентом поглощения, совпадающим со вторым членом в (77,6). Так и должно было быть, поскольку условие $\omega \ll c^2/\chi$ означает, что за время одного периода тепло успевает распространиться лишь на расстояние $\sim \sqrt{\chi/\omega}$ (ср. (51,7)), малое по сравнению с длиной волны c/ω .

В обратном предельном случае больших частот из (3) находим:

$$k = \frac{\omega}{c_T} + i \frac{c_T}{2\chi c_s^2} (c_s^2 - c_T^2).$$

В этом случае звук распространяется с «изотермической» скоростью c_T (всегда меньшей скорости c_s). Коэффициент же поглощения оказывается

снова малым (по сравнению с обратной длиной волны), причём он не зависит от частоты и обратно пропорционален теплопроводности¹⁾.

4. Определить дополнительное поглощение звука, распространяющегося в смеси двух веществ, связанное с диффузией (И. Г. Шапошников и З. А. Гольдберг, 1952).

Решение. В смеси имеется дополнительный источник поглощения звука, связанный с тем, что возникающие в звуковой волне градиенты температуры и давления приводят к появлению необратимых процессов термодиффузии (градиента же массовой концентрации, а с ней и чистой диффузии, очевидно, не возникает). Это поглощение определяется членом

$$\frac{1}{T\rho D} \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{p, T} \int i^2 dV$$

в скорости изменения энтропии (58,13) (мы обозначаем здесь концентрацию посредством C в отличие от скорости звука c). Диффузионный поток

$$i = -\rho D \left(\frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right)$$

с k_p из (58,10). Вычисление, аналогичное произведённому в тексте, с использованием ряда соотношений между производными термодинамических величин приводит к следующему результату: к выражению (77,6) для коэффициента поглощения добавляется член

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{p, T}} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p, T} + \frac{k_T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, C} \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{p, T} \right\}^2.$$

5. Определить эффективное сечение поглощения звука шариком, радиус которого мал по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$.

Решение. Полное поглощение складывается из эффектов вязкости и теплопроводности газа. Первый определяется работой стоксовой силы трения при обтекании шарика движущимся в звуковой волне газом (как и в задаче 3 § 76, предполагается, что шарик не увлекается этой силой). Второй эффект определяется количеством тепла q , передаваемым в единицу времени от газа шариком (задача 3 § 76): диссипация энергии при передаче тепла q при разности температур T' между газом (вдали от шарика) и шариком равна $\frac{qT'}{T}$. Для суммарного эффективного сечения поглощения получается выражение

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c} \left[3\nu + 2\chi \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \right].$$

¹⁾ Второй корень квадратного по k^2 уравнения (3) соответствует быстро затухающим с x «тепловым волнам». В предельном случае $\omega\chi \ll c^2$ этот корень даёт

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

в согласии с (52,17). В случае же $\omega\chi \gg c^2$ получается

$$k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega c_v}{2\chi c_p}}.$$

§ 78. Вторая вязкость

Второй коэффициент вязкости ζ (мы будем говорить о нём просто как о второй вязкости) имеет обычно тот же порядок величины, что и коэффициент вязкости η . Существуют, однако, случаи, когда ζ может достигать значений, значительно превышающих значения η . Как мы знаем, вторая вязкость проявляется в тех процессах, которые сопровождаются изменением объёма (т. е. плотности) жидкости. При сжатии или расширении, как и при всяком другом быстром изменении состояния, в жидкости нарушается термодинамическое равновесие, в связи с чем в ней начинаются внутренние процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Обычно эти процессы настолько быстры (т. е. их время релаксации настолько мало), что восстановление равновесия успеваает практически полностью следовать за ходом изменения объёма, если только, конечно, скорость этого изменения не слишком велика.

Существуют случаи, когда время релаксации процессов установления равновесия в теле велико, т. е. эти процессы протекают сравнительно медленно. Так, если мы имеем дело с жидкостью или газом, представляющими собой смесь веществ, между которыми может происходить химическая реакция, то при каждом данных плотности и температуре существует определённое состояние химического равновесия, характеризующееся определёнными концентрациями веществ в смеси. Если, например, сжать жидкость, то состояние равновесия нарушится и начнёт происходить реакция, в результате которой концентрации веществ будут стремиться принять равновесные значения, соответствующие новому значению плотности (и температуры). Если скорость этой реакции не слишком велика, то установление равновесия происходит сравнительно медленно и не будет поспевать за изменением сжатия. Процесс сжатия будет сопровождаться тогда внутренними процессами приближения к состоянию равновесия. Но процессы установления равновесия являются процессами необратимыми; они сопровождаются возрастанием энтропии и, следовательно, диссипацией энергии. Поэтому, если время релаксации этих процессов велико, то при сжатии или расширении жидкости происходит значительная диссипация энергии, и поскольку эта диссипация должна определяться второй вязкостью, то мы приходим к выводу, что ζ будет велико ¹⁾.

Интенсивность процессов диссипации, а с ними и величина ζ , зависит, естественно, от соотношения между скоростью процессов сжатия и расширения и временем релаксации. Если, например, речь идёт о сжатиях и расширениях, вызываемых звуковой волной, то вторая вязкость будет зависеть от частоты волны. Таким образом,

¹⁾ Медленным процессом, приводящим к большим ζ , часто является также передача энергии от поступательных степеней свободы молекул к колебательным (внутримолекулярным) степеням свободы.

значение второй вязкости не будет просто константой, характеризующей данное вещество, а само будет зависеть от частоты того движения, в котором она проявляется. О зависимости величины ζ от частоты говорят как о её дисперсии.

Излагаемый ниже метод общего рассмотрения всех этих явлений принадлежит *Л. И. Мандельштаму* и *М. А. Леонтовичу* (1937).

Пусть ξ есть некоторая физическая величина, характеризующая состояние тела, а ξ_0 — её значение в состоянии равновесия; ξ_0 является функцией от плотности и температуры. Так, для жидких (или газовых) смесей величиной ξ может являться концентрация одного из веществ в смеси, а ξ_0 есть тогда значение концентрации при химическом равновесии.

Если тело не находится в состоянии равновесия, то величина ξ будет меняться со временем, стремясь принять значение ξ_0 . В состояниях, близких к равновесному, разность $\xi - \xi_0$ мала, и можно разложить скорость $\dot{\xi}$ изменения ξ в ряд по этой разности. Член нулевого порядка в этом разложении отсутствует, так как $\dot{\xi}$ должно обратиться в нуль в состоянии равновесия, т. е. при $\xi = \xi_0$. Поэтому с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau}(\xi - \xi_0). \quad (78,1)$$

Коэффициент пропорциональности между $\dot{\xi}$ и $\xi - \xi_0$ должен быть отрицательным, так как в противном случае ξ не стремилось бы к конечному пределу. Положительная постоянная τ имеет размерность времени и может рассматриваться как время релаксации для данного процесса; чем τ больше, тем медленнее происходит приближение к равновесию.

В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, в которых жидкость подвергается периодическому адиабатическому¹⁾ сжатию и расширению, так что переменная часть плотности (и других термодинамических величин) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$; речь идёт о звуковой волне в жидкости. Вместе с плотностью и другими величинами меняется также и положение равновесия, так что ξ_0 можно написать в виде $\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0$, где ξ_{00} — постоянное значение ξ_0 , соответствующее среднему значению плотности, а ξ'_0 — периодическая часть, пропорциональная $e^{-i\omega t}$. Написав истинное значение ξ в виде $\xi = \xi_{00} + \xi'$, мы заключаем из уравнения (78,1), что ξ' тоже является периодической функцией времени и связано с ξ'_0 посредством

$$\xi' = \frac{\xi'_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (78,2)$$

¹⁾ Изменение энтропии (в состояниях, близких к равновесному) является величиной второго порядка малости. Поэтому с точностью до величин первого порядка можно говорить об адиабатичности процесса.

Вычислим производную от давления по плотности при рассматриваемом процессе. Давление должно теперь рассматриваться как функция от значений плотности и величины ξ в данном состоянии, а также от энтропии, которая предполагается постоянной и которую мы будем для краткости просто опускать. Имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

Согласно (78,2) подставляем сюда

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi'_0}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

и получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} \right\}.$$

Сумма

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

есть не что иное, как производная от p по ρ при процессе настолько медленном, что жидкость находится всё время в состоянии равновесия; обозначая её посредством $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}$, имеем окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} \right]. \quad (78,3)$$

Пусть, далее, p_0 есть давление в состоянии термодинамического равновесия; p_0 связано с другими термодинамическими величинами уравнением состояния жидкости и является при заданных плотности и энтропии вполне определённой величиной. Давление же p в неравновесном состоянии отлично от p_0 и является функцией также и от ξ . Если плотность получает адиабатическое приращение $\delta\rho$, то равновесное давление меняется на $\delta p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} \delta\rho$, между тем как полное приращение давления есть $\frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho$, где $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ определяется формулой (78,3). Поэтому разность $p - p_0$ между истинным и равновесным давлениями в состоянии с плотностью $\rho + \delta\rho$ равна

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} \right] \delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} \right] \delta\rho.$$

Нас интересуют здесь те изменения плотности, которые обусловлены движением жидкости. Тогда $\delta\rho$ связано со скоростью уравнением непрерывности, которое мы напомним в виде

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает полную производную по времени. При периодическом движении имеем: $\frac{d\delta\rho}{dt} = -i\omega\delta\rho$, и поэтому

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в $p - p_0$, получаем:

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_0^2 - c_\infty^2) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (78,4)$$

где введены обозначения

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}, \quad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi, \quad (78,5)$$

смысл которых выяснится ниже.

Для того чтобы связать полученные выражения с вязкостью жидкости, напомним тензор напряжений σ_{ik} . В этот тензор давление входит в виде члена $-\rho\delta_{ik}$. Выделяя отсюда давление p_0 , определяющееся уравнением состояния, находим, что в неравновесном состоянии в σ_{ik} входит дополнительный член

$$-(p - p_0)\delta_{ik} = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

С другой стороны, сравнивая это с общим выражением (15,2) и (15,3) для тензора напряжений, в которое $\operatorname{div} \mathbf{v}$ входит в виде $\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}$, мы приходим к результату, что наличие медленных процессов установления равновесия макроскопически эквивалентно наличию второй вязкости, равной

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau} (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (78,6)$$

На обычную же вязкость η эти процессы не влияют. При процессах, настолько медленных, что $\tau\omega < 1$, ζ равно

$$\zeta_0 = \tau\rho (c_\infty^2 - c_0^2). \quad (78,7)$$

ζ растёт с увеличением времени релаксации τ в согласии со сказанным выше. При больших частотах ζ оказывается функцией частоты, т. е. обнаруживает дисперсию.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом влияет наличие процессов с большим временем релаксации (для определённости будем говорить о химических реакциях) на распространение звука в жидкости. Для этого можно было бы исходить из уравнения движения вязкой жидкости с ζ , определяемым формулой (78,6). Проще, однако, рассматривать движение формально как не вязкое, но с давлением p , определяющимся не уравнением состояния, а полученными здесь формулами. Тогда все известные нам уже из § 63 общие соотношения остаются формально применимыми. В частности, связь волнового век-

тора с частотой попережнему определяется формулой $k = \frac{\omega}{c}$, где $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$, причём производная $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ равна выражению (78,3). (Величина c не имеет, однако, теперь смысла скорости звука уже хотя бы потому, что она комплексна.) Таким образом, получаем:

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau}}. \quad (78,8)$$

Определяемый этой формулой «волновой вектор» является величиной комплексной. Легко выяснить смысл этого обстоятельства. В плоской волне все величины зависят от координаты x (в направлении распространения) посредством множителя e^{ikx} . Написав k в виде $k = k_1 + ik_2$ с действительными k_1 и k_2 , получаем $e^{ikx} = e^{ik_1x} e^{-k_2x}$, т. е. наряду с периодическим множителем e^{ik_1x} получается также затухающий множитель e^{-k_2x} (k_2 должно быть, конечно, положительным). Таким образом, комплексность волнового вектора является формальным выражением того, что волна затухает, т. е. имеет место поглощение звука. При этом действительная часть комплексного «волнового вектора» определяет изменение фазы волны с расстоянием, а мнимая его часть есть коэффициент поглощения.

Нетрудно отделить в (78,8) действительную и мнимую части; в общем случае произвольных ω выражения для k_1 и k_2 довольно громоздки, и мы не выписываем их здесь. Существенно, что k_1 (как и k_2) является функцией частоты. Таким образом, если в жидкости могут происходить химические реакции, то распространение звука (с достаточно большими частотами) сопровождается дисперсией.

В предельном случае малых частот ($\omega\tau \ll 1$) формула (78,8) даёт в первом приближении $k = \frac{\omega}{c_0}$, что соответствует распространению звука со скоростью c_0 . Так, разумеется, и должно было быть: условие $\omega\tau \ll 1$ означает, что период $1/\omega$ звуковой волны велик по сравнению со временем релаксации; другими словами, установление химического равновесия практически успеваеет следовать за колебаниями плотности в звуковой волне, и поэтому скорость звука должна определяться равновесной производной $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}$. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i \frac{\omega^2\tau}{2c_0^3} (c_\infty^2 - c_0^2), \quad (78,9)$$

т. е. появляется затухание с коэффициентом, пропорциональным квадрату частоты. С помощью (78,7) мнимую часть k можно написать в виде $k_2 = \frac{\omega^2\tau_0}{2\rho c_0^3}$; это совпадает с зависящей от ζ частью коэффициента поглощения γ (77,6), полученного без учёта дисперсии.

В обратном предельном случае больших частот ($\omega\tau \gg 1$) имеем в первом приближении $k = \frac{\omega}{c_\infty}$, т. е. распространение звука со скоростью c_∞ — результат опять-таки естественный, поскольку при $\omega\tau \gg 1$ можно считать, что за время одного периода реакция вовсе не успевает произойти; поэтому скорость звука должна определяться производной $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi$, взятой при постоянных концентрациях. В следующем приближении имеем:

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}. \quad (78,10)$$

Коэффициент поглощения оказывается не зависящим от частоты. При переходе от $\omega \ll 1/\tau$ к $\omega \gg 1/\tau$ этот коэффициент монотонно возрастает, стремясь к постоянному значению, определяемому формулой (78,10). Заметим, что величина k_2/k_1 , характеризующая поглощение на расстоянии, равном длине волны, оказывается в обоих предельных случаях малой ($k_2/k_1 \ll 1$); она имеет максимум при некоторой промежуточной частоте (равной $\omega\tau = \sqrt{c_0/c_\infty}$).

Уже из формулы, например, (78,7) видно, что

$$c_\infty > c_0 \quad (78,11)$$

(поскольку должно быть $\zeta > 0$). В том же самом можно убедиться с помощью простых рассуждений на основании принципа Ле-Шателье.

Предположим, что под влиянием внешнего воздействия объём системы уменьшается (а плотность увеличивается). Этим система выводится из состояния равновесия, и согласно принципу Ле-Шателье в ней должны начаться процессы, стремящиеся уменьшить давление.

Это значит, что величина $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ будет уменьшаться, и когда система вновь вернётся в состояние равновесия, значение $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ будет меньше, чем оно было в неравновесном состоянии.

При выводе всех формул мы предполагали, что имеется всего один медленный внутренний процесс релаксации. Возможны также и случаи, когда имеется одновременно несколько различных таких процессов. Все формулы могут быть без труда обобщены на такой случай. Вместо одной величины ξ мы будем иметь теперь ряд величин ξ_1, ξ_2, \dots , характеризующих состояние тела, и соответственно ряд времён релаксации τ_1, τ_2, \dots . Выберем величины ξ_n таким образом, чтобы каждая из производных $\dot{\xi}_n$ зависела только от соответствующего ξ_n , т. е. чтобы было

$$\dot{\xi}_n = -\frac{1}{\tau_n}(\xi_n - \xi_{0n}), \quad (78,12)$$

Вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приводят тогда к формуле

$$c^2 = c_\infty^2 + \sum_n \frac{a_n}{1 - i\omega\tau_n}, \quad (78,13)$$

где $c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi$, а постоянные a_n равны

$$a_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}. \quad (78,14)$$

При всего одной величине ξ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу (78,3).

ГЛАВА IX

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

§ 79. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

Когда скорость движения жидкости делается сравнимой со скоростью звука или превышает её, на передний план выдвигаются эффекты, связанные с сжимаемостью жидкости. С такого рода движениями приходится на практике иметь дело у газов. Поэтому о гидродинамике больших скоростей говорят обычно как о газодинамике.

Прежде всего следует заметить, что в газодинамике практически всегда приходится иметь дело с очень большими значениями числа Рейнольдса. Действительно, кинематическая вязкость газа, как известно из кинетической теории газов, — порядка величины произведения длины свободного пробега молекул l на их среднюю скорость теплового движения; последняя же совпадает по порядку величины со скоростью звука, так что $\nu \sim cl$. Если и характеристическая скорость газодинамической задачи — порядка величины скорости звука, то число Рейнольдса $R \sim \frac{Lc}{\nu} \sim \frac{L}{l}$, т. е. определяется заведомо очень большим отношением характеристических размеров L к длине свободного пробега (l). Как всегда при очень больших значениях R , вязкость оказывается не существенной для движения газа практически во всём пространстве, и в дальнейшем мы везде (за исключением лишь особо оговорённых мест) рассматриваем газ как «идеальную» (в гидродинамическом смысле слова) жидкость.

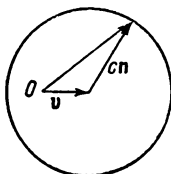
Движение газа имеет существенно различный характер в зависимости от того, является ли оно «дозвуковым» или «сверхзвуковым», т. е. меньше ли или больше его скорость, чем скорость звука. Одним из наиболее существенных принципиальных отличий сверхзвукового потока является возможность существования в нём так называемых

1) Мы не рассматриваем в этой книге вопроса о движении тел в очень разрежённых газах, в которых длина пробега молекул сравнима с размерами тел. Этот вопрос по существу не является гидродинамической проблемой и должен рассматриваться с помощью кинетической теории газов.

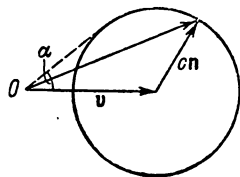
ударных волн, свойства которых будут подробно рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же мы рассмотрим другую характерную особенность сверхзвукового движения, связанную со свойствами распространения в газе малых возмущений.

Если в каком-нибудь месте стационарно движущийся газ подвергается слабому возмущению, то влияние этого возмущения распространяется затем по газу со скоростью (относительно самого газа), равной скорости звука. Скорость же распространения возмущения относительно неподвижной системы координат складывается из двух частей: во-первых, возмущение «сносится» потоком газа со скоростью v и, во-вторых, распространяется относительно газа со скоростью c в некотором направлении \mathbf{n} . Рассмотрим для простоты однородный плоско-параллельный поток газа с постоянной скоростью v . Пусть в некоторой (неподвижной в пространстве) точке O газ подвергается малому возмущению. Скорость $v + c\mathbf{n}$ распространения исходящего из точки O возмущения (относительно неподвижной системы координат) имеет различное значение в зависимости от направления единичного вектора \mathbf{n} . Все возможные её значения мы получим, отложив из точки O вектор v , а из его конца, как из центра, построив сферу радиуса c ; векторы, проведённые из O в точки этой

сферы, и определяют возможные величины и направления скорости распространения возмущения. Предположим сначала, что $v < c$. Тогда векторы $v + c\mathbf{n}$ могут иметь любое направление в пространстве (рис. 40, а). Другими словами, в дозвуковом потоке возмущение,



а)



б)

Рис. 40.

исходящее из некоторой точки, распространяется в конце концов по всему газу. Напротив, в сверхзвуковом потоке, $v > c$, направления векторов $v + c\mathbf{n}$, как видно из рис. 40, б, могут лежать только внутри конуса с вершиной в точке O , касающегося построенной из конца вектора v , как из центра, сферы. Для угла раствора 2α этого конуса имеем, как видно из чертежа:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}. \quad (79,1)$$

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение c/v . На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке O не отразится вовсе.

Определяемый равенством (79,1) угол α мы будем называть углом возмущений. Самое же отношение c/v сплошь и рядом

встречающееся в газодинамике, принято обозначать буквой M :

$$M = \frac{c}{v}. \quad (79,2)$$

Поверхность, ограничивающую область, куда достигает исходящее из данной точки возмущение, называют «поверхностью возмущений» или характеристической поверхностью.

В общем случае произвольного стационарного течения поверхность возмущений не является уже конической во всём объёме потока. Можно, однако, попрежнему утверждать, что эта поверхность пересекает в каждой своей точке линию тока под углом, равным углу возмущений. Значение же угла возмущений меняется от точки к точке соответственно изменению скоростей v и c . Подчеркнём здесь, кстати, то обстоятельство, что при движении с большими скоростями скорость звука различна в разных местах газа — она меняется вместе с термодинамическими величинами (давлением, плотностью и т. д.), функцией которых она является¹⁾. О скорости звука как функции координат точки говорят иногда как о «местной скорости звука».

Описанные свойства сверхзвукового течения придают ему характер, совершенно отличный от характера дозвукового движения. Если дозвуковой поток газа встречает на своём пути какое-либо препятствие, например, обтекает какое-либо тело, то наличие этого препятствия изменяет движение во всем пространстве как вверх, так и вниз по течению; влияние обтекаемого тела исчезает лишь асимптотически при удалении от тела. Сверхзвуковой же поток натекает на препятствие «слепо»; влияние обтекаемого тела простирается лишь на область вниз по течению²⁾, а во всей остальной области пространства вверх по течению газ движется так, как если бы никакого тела вообще не было.

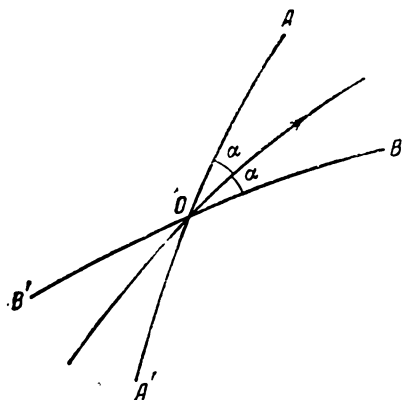


Рис. 41.

В случае плоского стационарного течения газа вместо характеристических поверхностей можно говорить о характеристических линиях (или просто характеристиках) в плоскости движения. Через всякую точку O этой плоскости проходит две характеристики (AA' и BB' на рис. 41), пересекающих проходящую через

¹⁾ При изучении звуковых волн в главе VIII мы могли считать скорость звука постоянной.

²⁾ Во избежание недоразумений оговорим, что если перед обтекаемым телом возникает ударная волна, то эта область несколько увеличивается (см. § 113).

эту же точку линию тока под углами, равными углу возмущений. Ветви OA и OB характеристик, направленные вниз по течению, можно назвать «исходящими» из точки O ; они ограничивают область AOB течения, на которую могут влиять исходящие из точки O возмущения. Ветви же $B'O$ и $A'O$ можно назвать «приходящими» в точку O ; область $A'OB'$ между ними есть та область течения, которая может влиять на движение в точке O .

Понятие о характеристиках (в трёхмерном случае — характеристических поверхностях) имеет и несколько иной аспект. Именно, это есть лучи, вдоль которых «распространяются» возмущения, удовлетворяющие условиям геометрической акустики. Если, например, стационарный сверхзвуковой поток газа обтекает достаточно малое препятствие, то вдоль отходящих от этого препятствия характеристик расположится стационарное возмущение движения газа. К этому результату мы пришли ещё в § 67 при изучении геометрической акустики движущихся сред.

Говоря о «возмущении» состояния газа, мы подразумеваем слабое изменение каких-либо характеризующих это состояние величин: скорости, плотности, давления и т. п. По этому поводу необходимо сделать следующую оговорку. Именно, со скоростью звука не распространяются возмущения значений энтропии газа (при постоянном давлении) и ротора его скорости. Эти возмущения, раз возникнув, не перемещаются вовсе относительно газа, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с газом со скоростью, равной скорости каждого данного его элемента. Для энтропии это является непосредственным следствием закона её сохранения (в идеальной жидкости):

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = 0,$$

что как раз и означает, что энтропия каждого элемента объёма газа остаётся неизменной при его перемещении, или, другими словами, каждое значение s переносится вместе с той точкой газа, к которому оно относится. Для ротора скорости то же самое следует из закона сохранения циркуляции.

Таким образом, можно сказать, что для возмущений энтропии и ротора скорости «характеристиками» являются линии тока. Это обстоятельство не меняет, разумеется, общей справедливости высказанных выше утверждений об «областях влияния», так как для них был существенен лишь факт существования наибольшей возможной (равной скорости звука) скорости распространения возмущений относительно самого газа.

§ 80. Стационарный поток сжимаемого газа

Уже непосредственно из уравнения Бернулли можно получить ряд общих результатов, касающихся произвольного адиабатического стационарного движения сжимаемого газа. Уравнение Бернулли для

стационарного движения гласит

$$\omega + \frac{v^2}{2} = \text{const.},$$

где const. есть величина, постоянная вдоль каждой из линий тока (если же движение потенциально, то const. одинакова и для разных линий тока, т. е. во всем объеме жидкости). Если на данной линии тока есть точка, в которой скорость газа равна нулю, то можно написать уравнение Бернулли в виде

$$\omega + \frac{v^2}{2} = \omega_0, \quad (80,1)$$

где ω_0 — значение тепловой функции в точке с $v = 0$.

Уравнение сохранения энтропии при стационарном движении сводится к $\mathbf{v} \nabla s = v \frac{\partial s}{\partial l} = 0$, т. е. $s = \text{const.}$, где const. есть опять величина, постоянная вдоль линии тока. Мы напишем это уравнение в виде, аналогичном (80,1):

$$s = s_0. \quad (80,2)$$

Из уравнения (80,1) видно, что скорость v больше в тех местах, где тепловая функция ω меньше. Максимальное (вдоль данной линии тока) значение скорости имеет в точке, в которой ω минимально. Но при постоянной энтропии имеем $d\omega = dp/\rho$; поскольку $\rho > 0$, то дифференциалы $d\omega$ и dp имеют одинаковые знаки и потому изменение ω и p направлено всегда в одну сторону. Следовательно, можно сказать, что вдоль линии тока скорость всегда падает с увеличением давления, и наоборот.

Наименьшее возможное значение давления и тепловая функция получают (при адиабатическом процессе) при равной нулю абсолютной температуре $T = 0$. Соответствующее значение давления есть $p = 0$, а значение ω при $T = 0$ примем условно за нулевое значение, от которого отсчитывается энергия; тогда будет и $\omega = 0$ при $T = 0$. Из (74,1) заключаем теперь, что наибольшее возможное значение скорости (при заданном значении термодинамических величин в точке с $v = 0$) равно

$$v_{\max} = \sqrt{2\omega_0}. \quad (80,3)$$

Эта скорость может достигаться при стационарном вытекании газа в вакуум¹⁾.

Выясним теперь характер изменения вдоль линии тока плотности потока жидкости $j = \rho v$. Из уравнения Эйлера $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$ нахо-

¹⁾ В действительности, конечно, при сильном понижении температуры должна произойти конденсация газа и образование двухфазной системы — «тумана». Это обстоятельство, однако, практически не сказывается скольконбудь существенным образом на излагаемых результатах.

дим, что вдоль линии тока имеет место соотношение

$$v dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

между дифференциалами dv и dp . Написав $dp = c^2 d\rho$, имеем отсюда

$$\frac{d\rho}{d v} = -\frac{\rho v}{c^2} \quad (80,4)$$

и, подставляя это в $d(\rho v) = \rho dv + v d\rho$, получаем:

$$\frac{d(\rho v)}{d v} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (80,5)$$

Отсюда видно, что по мере возрастания скорости вдоль линии тока плотность потока возрастает до тех пор, пока скорость остаётся дозвуковой. В области же сверхзвукового движения плотность потока падает с увеличением скорости и обращается в нуль вместе с ρ при $v = v_{\max}$ (рис. 42). Это существенное различие между до- и сверх-

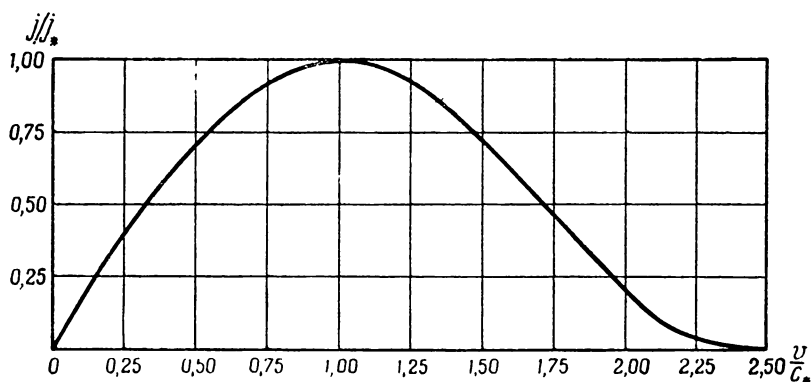


Рис. 42.

звуковыми стационарными потоками может быть истолковано наглядно ещё и следующим образом. В дозвуковом потоке линии тока сближаются друг с другом в направлении увеличения скорости. При сверхзвуковом же движении линии тока расходятся по мере увеличения скорости.

Поток j имеет максимальное значение j_* в точке, в которой скорость газа равна местному значению скорости звука:

$$j_* = \rho_* c_*, \quad (80,6)$$

где буквы с индексом * обозначают значения соответствующих величин в этой точке. Скорость $v_* = c_*$ называют «критической». В общем случае произвольного газа «критические» значения величин могут быть выражены через значения величин в точке с $v = 0$ в результате

совместного решения уравнений

$$s_* = s_0, \quad w_* + \frac{c_*^2}{2} = w_0. \quad (80,7)$$

Очевидно, что всякий раз, когда число $M = v/c < 1$, мы будем также иметь $v/c_* < 1$, а когда $M > 1$, то и $v/c_* > 1$. Поэтому в данном случае отношение $M_* = v/c_*$ может служить критерием, аналогичным числу M , и даже более удобным, поскольку c_* есть величина постоянная в противоположность скорости c , меняющейся вдоль потока.

В применениях общих уравнений газодинамики особое место занимает идеальный газ¹⁾. Для идеального газа известны из термодинамики все соотношения между различными термодинамическими величинами, выражающиеся к тому же весьма простыми формулами. Это даёт возможность во многих случаях полностью конкретно решать уравнения газодинамики.

Выпишем здесь для справочных целей соотношения между различными термодинамическими величинами идеального газа, имея в виду, что нам придётся часто пользоваться ими в дальнейшем. Говоря об идеальном газе, мы будем всегда (за исключением только случаев, оговорённых особо) считать, что имеем дело с газом, теплоёмкость которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры.

Уравнение состояния идеального газа гласит:

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}, \quad (80,8)$$

где $R = 8,314 \cdot 10^7$ эрг/град — газовая постоянная, а μ — молекулярный вес газа. Скорость звука в идеальном газе была вычислена в § 63 и равна

$$c^2 = \gamma \frac{RT}{\mu} = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (80,9)$$

где введено постоянное отношение теплоёмкостей

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Число γ всегда больше единицы; для одноатомных газов $\gamma = 5/3$, а для двухатомных $\gamma = 7/5$ (при обычных температурах).

Внутренняя энергия идеального газа с точностью до несущественной аддитивной постоянной равна

$$e = c_v T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}. \quad (80,10)$$

¹⁾ Во избежание недоразумений напомним, что слово «идеальный» употребляется здесь в известном из термодинамики смысле, а не в смысле «идеальности» жидкости в гидродинамике.

Для тепловой функции имеют место аналогичные формулы

$$\omega = c_p T = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}. \quad (80,11)$$

Здесь учтено известное соотношение $c_p - c_v = R/\mu$. Наконец, энтропия газа

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = c_p \ln \frac{p^{1/\gamma}}{\rho}. \quad (80,12)$$

Вернёмся к изучению стационарного движения и применим полученные выше общие соотношения к идеальному газу.

Подставив (80,11) в (80,3), найдём, что максимальная скорость стационарного вытекания равна

$$v_{\max} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}. \quad (80,13)$$

Для критической же скорости из второго из уравнений (80,7) получим:

$$\frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \frac{c_*^2}{2} = \omega_0 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1},$$

откуда ¹⁾

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}. \quad (80,14)$$

Уравнение Бернулли (80,1) после подстановки выражения (80,11) для тепловой функции даст соотношение между температурой и скоростью в произвольной точке линии тока; аналогичные соотношения для давления и плотности можно затем написать непосредственно с помощью уравнения адиабаты Пуассона:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (80,15)$$

Таким образом, получим следующие важные формулы:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2} \right), \\ \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \\ p &= p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (80,16)$$

¹⁾ На рис. 42 дан график отношения j/j_* в функции от v/c_* для воздуха ($\gamma = 1,4$, $v_{\max} = 2,45c_*$).

Иногда удобно пользоваться этими соотношениями в виде, определяющем скорость через другие величины:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (80,17)$$

Выпишем также соотношение, связывающее скорость звука со скоростью v :

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} v^2 = \frac{\gamma+1}{2} c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2} v^2. \quad (80,18)$$

Отсюда найдём, что числа M и M_* связаны друг с другом посредством

$$M_*^2 = \frac{\gamma+1}{\frac{2}{M^2} + \gamma - 1}. \quad (80,19)$$

Когда M растёт от 0 до ∞ , M_*^2 растёт от 0 до $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.

Наконец, приведём выражения для критических значений температуры, давления и плотности; они получаются при $v = c_*$ из формул (80,16)¹⁾:

$$T_* = \frac{2T_0}{\gamma+1}, \quad p_* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (80,20)$$

Подчеркнём в заключение, что полученные здесь результаты относятся к движению, при котором не возникают так называемые ударные волны. При наличии ударных волн не имеет места уравнение (80,2): при прохождении линии тока через ударную волну энтропия газа возрастает. Мы увидим, однако, что уравнение Бернулли (80,1) остаётся справедливым и при наличии ударной волны, так как $\omega + \frac{v^2}{2}$ является как раз одной из величин, сохраняющихся при прохождении через поверхность разрыва (§ 82); вместе с ним остаётся, например, справедливой и формула (80,14).

ЗАДАЧА

Выразить температуру, давление и плотность вдоль линии тока через число $M = v/c$.

Решение. С помощью полученных в тексте формул получим:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

¹⁾ Так, для воздуха ($\gamma = 1,4$)

$$c_* = 0,913 c_0, \quad p_* = 0,528 p_0, \quad \rho_* = 0,634 \rho_0, \quad T_* = 0,833 T_0.$$

§ 81. Поверхности разрыва

В предыдущих главах мы рассматривали только такие течения, при которых распределение всех величин (скорости, давления, плотности и т. д.) в газе непрерывно. Возможны, однако, и такие движения, при которых возникают разрывы непрерывности в распределении этих величин.

Разрыв непрерывности в движении газа имеет место вдоль некоторых поверхностей; при прохождении через такую поверхность указанные величины испытывают скачок. Эти поверхности называются поверхностями разрыва. При нестационарном движении газа поверхности разрыва не остаются, вообще говоря, неподвижными; необходимо при этом подчеркнуть, что скорость движения поверхности разрыва не имеет ничего общего со скоростью движения самого газа. Частицы газа при своём движении могут проходить через эту поверхность, пересекая её.

На поверхностях разрыва должны выполняться определённые граничные условия. Для формулирования этих условий рассмотрим какой-нибудь элемент поверхности разрыва и воспользуемся связанной с этим элементом системой координат с осью x , направленной по нормали к нему ¹⁾.

Во-первых, на поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества: количество газа, входящего с одной стороны, должно быть равно количеству газа, выходящему с другой стороны поверхности. Поток газа через рассматриваемый элемент поверхности (отнесённый на единицу площади) равен ρv_x . Поэтому должно выполняться условие $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$, где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва.

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва мы будем ниже обозначать посредством квадратных скобок; так,

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

и полученное условие напишется в виде

$$[\rho v_x] = 0. \quad (81,1)$$

Далее, должен быть непрерывным поток энергий. Поток энергии определяется выражением (6,3). Поэтому мы получаем условие

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] = 0. \quad (81,2)$$

Наконец, должен быть непрерывен поток импульса, т. е. должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по

¹⁾ Если движение нестационарно, то мы рассматриваем элемент поверхности в течение малого интервала времени.

обеим сторонам поверхности разрыва. Поток импульса через единицу площади равен (см. § 7)

$$\rho n_i + \rho v_i v_k n_k.$$

Вектор нормали \mathbf{n} направлен по оси x . Поэтому непрерывность x -компоненты потока импульса приводит к условию

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \quad (81,3)$$

а непрерывность y - и z -компонент даёт

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \quad (81,4)$$

Уравнения (81,1)—(81,4) представляют собой полную систему граничных условий на поверхности разрыва. Из них можно сразу сделать вывод о возможности существования двух типов поверхностей разрыва.

В первом случае через поверхность разрыва нет потока вещества. Это значит, что $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$. Поскольку ρ_1 и ρ_2 отличны от нуля, то это значит, что должно быть $v_{1x} = v_{2x} = 0$. Условия (81,2) и (81,4) в этом случае удовлетворяются автоматически, а условие (81,3) даёт $p_1 = p_2$. Таким образом, по поверхности разрыва в этом случае непрерывны нормальная компонента скорости и давление газа:

$$v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad [p] = 0. \quad (81,5)$$

Тангенциальные же скорости v_y , v_z и плотность (а также другие термодинамические величины, кроме давления) могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы мы будем называть тангенциальными.

Во втором случае поток вещества, а с ним и v_{1x} и v_{2x} отличны от нуля. Тогда из (81,1) и (81,4) имеем:

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \quad (81,6)$$

т. е. тангенциальная скорость непрерывна на поверхности разрыва. Плотность же, давление (а потому и другие термодинамические величины) и нормальная скорость испытывают скачок, причём скачки этих величин связаны соотношениями (81,1)—(81,3). В условии (81,2) мы можем в силу (81,1) сократить ρv_x , а вместо v^2 можно в силу непрерывности v_y и v_z писать v_x^2 . Таким образом, на поверхности разрыва в рассматриваемом случае должны иметь место условия:

$$[\rho v_x] = 0, \quad \left[\frac{v_x^2}{2} + w \right] = 0, \quad [p + \rho v_x^2] = 0. \quad (81,7)$$

Разрывы этого типа называют ударными волнами.

Если теперь вернуться к неподвижной системе координат, то вместо v_x надо везде писать разность между нормальной к поверхности разрыва компонентой v_n скорости газа и скоростью u самой

поверхности, направленной, по определению, по нормали к ней:

$$v_x = v_n - u. \quad (81,8)$$

(Скорости v_n и u берутся относительно неподвижной системы отсчёта.) Скорость v_x есть скорость движения газа относительно поверхности разрыва; иначе можно сказать, что $-v_x = u - v_n$ есть скорость распространения самой поверхности разрыва относительно газа. Обращаем внимание на то, что эта скорость различна по отношению к газу с обеих сторон поверхности (если v_x испытывает разрыв).

Тангенциальные разрывы, на которых испытывают скачок касательные компоненты скорости, рассматривались нами уже в § 30. Там было показано, что в несжимаемой жидкости такие разрывы абсолютно неустойчивы и должны размываться в турбулентную область. Аналогичное исследование для сжимаемой жидкости (см. задачу этого параграфа) показывает, что когда скачок скорости в разрыве становится больше некоторого определённого значения, то тангенциальный разрыв становится устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям. Этим, однако, отнюдь не исключается возможность того, что тангенциальные разрывы остаются неустойчивыми по отношению к возмущениям конечной величины. Этот вопрос не изучен ещё ни теоретически, ни экспериментально.

Частным, «вырожденным», случаем тангенциальных разрывов являются разрывы, в которых скорость непрерывна и испытывает скачок только плотность (а с ней и другие термодинамические величины за исключением давления). Всё сказанное выше о неустойчивости не относится к таким разрывам.

З а д а ч а

Вывести условие устойчивости (по отношению к бесконечно малым возмущениям) тангенциального разрыва в сжимаемом газе. Газ рассматривается как идеальный с не зависящей от температуры теплоёмкостью, причём отношение $\gamma = c_p/c_v$ одинаково для газов с обеих сторон поверхности разрыва (Л. Ландау, 1943).

Решение. Вычисления полностью аналогичны произведённым в § 30 для несжимаемой жидкости. Ось x направляем по нормали к поверхности.

В газе 2 (со скоростью $v_2 = 0$; $x < 0$) давление p_2' удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta p_2' - \frac{1}{c_2^2} \ddot{p}_2' = 0$$

(вместо уравнения Лапласа (30,2), имевшего место в несжимаемой жидкости). Ищем p_2' в виде

$$p_2' = \text{const.} \cdot e^{-i\omega t + iky + ix_2 x}$$

(если x_2 комплексно, то оно должно быть выбрано так, чтобы мнимая часть была отрицательна). Волновое уравнение приводит к соотношению

$$\frac{\omega^2}{c_2^2} = k^2 + x_2^2. \quad (1)$$

Совершенно так же, как и в § 30, получаем теперь вместо (30,7)

$$p'_2 = \zeta \frac{\rho_2 \omega^2}{i x_2}.$$

В газе 1 ($x > 0$) ищем p'_1 в виде

$$p'_1 = \text{const.} \cdot e^{-i\omega t + ik y - i x_1 x};$$

соотношение между ω , k и x_1 не может быть найдено непосредственно из волнового уравнения, так как последнее справедливо только в неподвижной как целое среде. Если перейти от системы координат x , y к системе $x' = x$, $y' = y - vt$, то в этой новой системе газ 1 будет покоиться, и волновое уравнение применимо. Для p'_1 имеем в этих координатах

$$p'_1 = \text{const.} \cdot e^{-i(\omega - vk)t + ik y' - i x_1 x'},$$

и волновое уравнение даёт

$$\frac{(\omega - vk)^2}{c_1^2} = k^2 + x_1^2.$$

Вместо (30,6) получаем теперь

$$p'_1 = -\zeta \frac{(\omega - kv)^2 \rho_1}{i x_1}. \quad (2)$$

Из условия $p'_1 = p'_2$ получаем:

$$\frac{x_1}{\rho_1 (\omega - kv)^2} + \frac{x_2}{\rho_2 \omega^2} = 0. \quad (3)$$

Для идеального газа $c^2 = \gamma p / \rho$; поскольку давления с обеих сторон разрыва должны быть одинаковыми, а γ одинаковы по условию, то $\rho_1 c_1^2 = \rho_2 c_2^2$. Учитывая это, получаем после исключения x_1 , x_2 из (1)—(3) следующее уравнение для ω (сокращён множитель, имеющий заведомо вещественные корни):

$$\frac{1}{c_1^2 c_2^2} = k^2 \left(\frac{1}{c_2^2 (\omega - kv)^2} + \frac{1}{c_1^2 \omega^2} \right). \quad (4)$$

Это уравнение четвёртой степени всегда имеет два вещественных корня, а другая пара корней вещественна только при v , превышающем некоторое значение v_k ; при $v = v_k$ имеется кратный корень. Значение v_k можно получить, исключая ω из уравнения (4) и уравнения, получающегося дифференцированием (4) по ω . В результате получаем условие устойчивости ($v > v_k$) в виде

$$v^{2/3} > c_1^{2/3} + c_2^{2/3}. \quad (5)$$

Если температура с обеих сторон разрыва одинакова, то $c_1 = c_2 \equiv c$ и разрыв устойчив при $v > 2 \sqrt{2} c$.

§ 82. Ударная адиабата

Перейдём теперь к подробному изучению ударных волн. Мы видели, что в этих разрывах тангенциальная компонента скорости газа непрерывна. Можно поэтому выбрать такую систему координат, в которой рассматриваемый элемент поверхности разрыва покоится,

а тангенциальная компонента газа по обе стороны поверхности равна нулю¹⁾. Тогда можно писать вместо нормальной компоненты v_x просто v и условия (81,7) напишутся в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \quad (82,1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (82,2)$$

$$\omega_1 + \frac{v_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{v_2^2}{2}, \quad (82,3)$$

где j обозначает плотность потока газа через поверхность разрыва. Мы условимся в дальнейшем всегда считать j положительным, причём газ переходит со стороны 1 на сторону 2. Другими словами, мы будем называть газом 1 тот, в сторону которого движется ударная волна, а газом 2 — газ, остающийся за ней. Сторону ударной волны, обращённую к газу 1, будем называть передней, а обращённую к газу 2 — задней.

Выведем ряд соотношений, являющихся следствием написанных условий. Введём удельные объёмы $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$ газа. Из (82,1) имеем:

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2 \quad (82,4)$$

и, подставляя в (82,2):

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \quad (82,5)$$

или

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (82,6)$$

Эта формула (вместе с (82,4)) связывает скорость распространения ударной волны с давлениями и плотностями газа по обеим сторонам поверхности.

Поскольку j^2 — величина положительная, то мы видим, что должно быть одновременно $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ или $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$; мы увидим в дальнейшем, что в действительности возможен лишь первый случай.

Отметим ещё следующую полезную формулу для разности скоростей $v_1 - v_2$. Подставляя (82,6) в $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, получаем²⁾:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \quad (82,7)$$

¹⁾ Такой выбор системы координат будет подразумеваться везде в §§ 82—85, 87, 88.

Неподвижную ударную волну часто называют скачком уплотнения. Если неподвижная ударная волна перпендикулярна к направлению потока, то говорят о прямом скачке уплотнения; если же она наклонна к направлению движения, то говорят о косом скачке уплотнения.

²⁾ Мы пишем здесь квадратный корень с положительным знаком, заранее имея в виду, что должно быть $v_1 - v_2 > 0$, как это будет выяснено ниже (§ 84).

Далее, пишем (82,3) в виде

$$\omega_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2} \quad (82,8)$$

и, подставляя j^2 из (82,6), получаем:

$$\rho_1 - \rho_2 + \frac{1}{2} (V_1 + V_2) (\rho_2 - \rho_1) = 0. \quad (82,9)$$

Если ввести вместо тепловой функции внутреннюю энергию ϵ согласно $\epsilon = \omega - pV$, то полученное соотношение можно написать в виде

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2} (V_1 - V_2) (\rho_1 + \rho_2) = 0. \quad (82,10)$$

Эти соотношения определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны поверхности разрыва.

Рис. 43.

При заданных p_1, V_1 уравнение (82,9) или (82,10) определяет зависимость между p_2 и V_2 . Об этой зависимости говорят как об ударной адиабате или адиабате Гюгонио (*В. Ранкин*, 1870, *Г. Гюгонио*, 1889). Графически она изображается (рис. 43) в плоскости p, V кривой, проходящей через заданную точку p_1, V_1 (при $p_1 = p_2, V_1 = V_2$ имеем также $\epsilon_1 = \epsilon_2$, так что (82,10) удовлетворяется тождественно). Отметим, что ударная адиабата не может пересечь вертикальной прямой $V = V_1$ нигде, кроме только точки p_1, V_1 . Действительно, наличие такого пересечения означало бы, что одному и тому же объёму соответствуют два различных давления, удовлетворяющих уравнению (82,10). Между тем, при $V_1 = V_2$ имеем из (82,10) также и $\epsilon_1 = \epsilon_2$, а при одинаковых объёмах и энергиях давления тоже должны быть одинаковыми. Таким образом, прямая $V = V_1$ делит ударную адиабату на две части, из которых каждая находится целиком по одну сторону от этой прямой. По аналогичной причине ударная адиабата пересекает только в одной точке (p_1, V_1) также и горизонтальную прямую $p = p_1$.

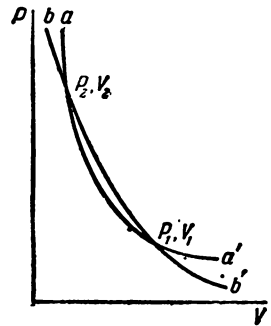


Рис. 44.

Пусть aa' (рис. 44) есть ударная адиабата, проведённая через точку p_1, V_1 в качестве состояния газа I . Выберем на ней какую-нибудь точку p_2, V_2 и проведём через неё другую адиабату (bb'), для которой бы значения p_2, V_2 соответствовали состоянию газа I . Очевидно, что пара значений p_1, V_1 будет удовлетворять также и уравнению этой второй адиабаты. Таким образом, адиабаты aa' и bb' пересекутся в обеих точках p_1, V_1 и p_2, V_2 . Подчеркнём, что обе

эти адиабаты отнюдь не совпадают полностью друг с другом, как это имело бы место для адиабат Пуассона, проведённых через заданную точку.

Это обстоятельство является одним из следствий того факта, что уравнение ударной адиабаты не может быть написано в виде $f(p, V) = \text{const.}$, где f есть некоторая функция своих аргументов, как это, например, имеет место для адиабаты Пуассона (уравнение которой есть $s(p, V) = \text{const.}$). В то время как адиабаты Пуассона (для заданного газа) составляют однопараметрическое семейство кривых, ударная адиабата определяется заданием двух параметров: начальных значений p_1, V_1 . С этим же связано и следующее важное обстоятельство: если две (или более) последовательные ударные волны переводят газ соответственно из состояния 1 в состояние 2 и из 2 в 3, то переход из состояния 1 в 3 путём прохождения какой-либо одной ударной волны, вообще говоря, невозможен.

При заданном начальном термодинамическом состоянии газа (т. е. заданных p_1, V_1) ударная волна определяется всего одним каким-либо параметром: если, например, задать давление p_2 за волной, то по адиабате Гюгонио определится V_2 , а затем по формулам (82,4) и (82,6) — плотность потока j и скорости v_1 и v_2 . Напомним, однако, что мы рассматриваем здесь ударную волну в системе координат, в которой газ движется нормально к её поверхности. Если же учесть возможность расположения ударной волны под косым углом к направлению потока, то понадобится ещё один параметр, например, значение касательной к её поверхности составляющей скорости.

Укажем здесь на следующее удобное графическое истолкование формулы (82,6). Если соединить хордой точку p_1, V_1 на ударной адиабате (рис. 43) с некоторой произвольной точкой p_2, V_2 на ней, то $\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = -j^2$ есть не что иное, как тангенс угла наклона этой хорды к оси абсцисс (к её положительному направлению). Таким образом, значение j , а с ним и скорости ударной волны, определяется в каждой точке ударной адиабаты углом наклона хорды, проведённой в эту точку из точки p_1, V_1 .

Наряду с другими термодинамическими величинами в ударной волне испытывает разрыв также и энтропия. В силу закона возрастания энтропии энтропия газа может лишь возрастать при его движении. Поэтому энтропия s_2 газа, прошедшего через ударную волну, должна быть больше его начальной энтропии s_1 :

$$s_2 > s_1. \quad (82,11)$$

Мы увидим ниже, что это условие налагает весьма существенные ограничения на характер изменения всех величин в ударной волне.

Подчеркнём здесь следующее обстоятельство. Наличие ударных волн приводит к возрастанию энтропии при таких движениях, которые можно рассматривать во всём пространстве как движение идеаль-

ной жидкости, не обладающей вязкостью и теплопроводностью. Возрастание энтропии означает необратимость движения, т. е. наличие диссипации энергии. Таким образом, разрывы представляют собой механизм, который приводит к диссипации энергии при движении «идеальной жидкости». В связи с этим для движения тел в «идеальной жидкости», сопровождающегося возникновением ударных волн, не имеет места «парадокс Даламбера» (§ 11) — при таком движении тело испытывает силу сопротивления.

Разумеется, истинный механизм возрастания энтропии в ударных волнах заключён в диссипативных процессах, происходящих в тех весьма тонких слоях вещества, которые в действительности представляют собой физические ударные волны (см. § 87). Замечательно, однако, что величина этой диссипации целиком определяется одними лишь законами сохранения массы, энергии и импульса, применёнными к обеим сторонам этих слоёв: их ширина устанавливается как раз такой, чтобы дать требуемое этими законами сохранения увеличение энтропии.

Возрастание энтропии в ударной волне оказывает ещё и другое существенное влияние на движение: если движение газа впереди ударной волны потенциально, то за ней оно, вообще говоря, становится вихревым; мы вернёмся к этому обстоятельству в § 106.

§ 83. Ударные волны слабой интенсивности

Рассмотрим ударную волну, в которой все величины испытывают лишь небольшой скачок; о таких разрывах мы будем говорить как об ударных волнах слабой интенсивности. Преобразуем соотношение (82,9), производя в нём разложение по степеням малых разностей $s_2 - s_1$ и $p_2 - p_1$. Мы увидим, что при таком разложении в (82,9) сокращаются члены первого и второго порядков по $p_2 - p_1$; поэтому необходимо производить разложение по $p_2 - p_1$ до членов третьего порядка включительно. По разности же $s_2 - s_1$ достаточно разложить до членов первого порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 = & \left(\frac{\partial w}{\partial s_1}\right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1}\right) (p_2 - p_1) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2}\right) (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

Но согласно термодинамическому тождеству $dw = T ds + V dp$ имеем для производных

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = V.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 = & T_1 (s_2 - s_1) + V_1 (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right) (p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

Объём V_2 достаточно разложить только по $p_2 - p_1$, поскольку во втором члене уравнения (82,9) уже имеется малая разность $p_2 - p_1$ и разложение по $s_2 - s_1$ дало бы член порядка $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, не интересующий нас. Таким образом,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2.$$

Подставляя эти разложения в (82,9), получим следующее соотношение:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \quad (83,1)$$

Таким образом, скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Во всех известных случаях адиабатическая сжимаемость $-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ падает с увеличением давления, т. е. вторая производная

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \quad (83,2)$$

Подчеркнём, однако, что это утверждение не является термодинамическим соотношением и не может быть получено термодинамическим путём. Поэтому принципиально возможны случаи, когда эта производная отрицательна. Как мы неоднократно увидим ниже, знак производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ весьма существенен в газодинамике. В дальнейшем мы будем всегда считать её положительной¹⁾.

Проведём через точку $I(p_1, V_1)$ на p, V -диаграмме две кривые — ударную адиабату и адиабату Пуассона. Уравнение адиабаты Пуассона есть $s_2 - s_1 = 0$. Из сравнения этого уравнения с уравнением (83,1) ударной адиабаты вблизи точки I видно, что обе кривые касаются в этой точке, причём имеет место касание второго порядка — совпадают не только первые, но и вторые производные. Для того чтобы выяснить взаимное расположение обеих кривых вблизи точки I , воспользуемся тем, что согласно (83,1) и (83,2) при $p_2 > p_1$ на ударной адиабате должно быть $s_2 > s_1$, между тем как на адиабате Пуассона остаётся $s_2 = s_1$. Поэтому абсцисса точки на ударной адиабате должна быть при той же ординате p_2 больше абсциссы точки на

¹⁾ Для идеального газа

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} \frac{V}{p^2}.$$

Это выражение проще всего можно получить путём дифференцирования уравнения адиабаты Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$.

адиабате Пуассона. Это непосредственно следует из того, что согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

энтропия растёт с увеличением объёма при постоянном давлении — для всех тел, которые расширяются при нагревании, т. е. у которых $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ положительно. Аналогично убеждаемся в том, что ниже точки I (т. е. при $p_2 < p_1$) абсциссы точек адиабаты Пуассона должны быть больше абсцисс ударной адиабаты. Таким образом, вблизи точки своего касания обе кривые расположены указанным на рис. 45 образом (HH' есть ударная адиабата, а PP' — адиабата Пуассона¹⁾), причём в силу (83,2) обе обращены вогнутостью вверх.

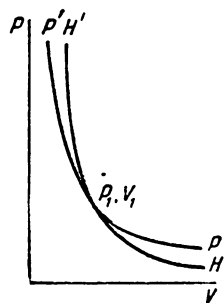


Рис. 45.

(мы пишем здесь производную при постоянной энтропии, имея в виду, что касательные к адиабате Пуассона и ударной адиабате в точке I совпадают). Далее, скорости v_1 и v_2 в том же приближении одинаковы и равны

$$v = jV = \sqrt{-V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Но это есть не что иное, как скорость звука c . Таким образом, скорость распространения ударных волн слабой интенсивности равна в первом приближении скорости звука:

$$v = c. \quad (83,3)$$

Из полученных свойств ударной адиабаты в окрестности точки I можно вывести ряд существенных следствий. Поскольку в ударной волне должно выполняться условие $s_2 > s_1$, то должно быть и

$$p_2 > p_1,$$

т. е. точки 2 (p_2, V_2) должны находиться выше точки I . Далее, поскольку хорда $I2$ идёт круче касательной к адиабате в точке I (рис. 43), а тангенс угла наклона этой касательной равен производ-

1) При отрицательном $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ расположение обеих кривых было бы обратным.

ной $\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_{s_1}$, имеем:

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}.$$

Умножая это неравенство с обеих сторон на V_1^2 , находим:

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial p_1}\right)_{s_1} = c_1^2,$$

где c_1 есть скорость звука, соответствующая точке 1. Таким образом,

$$v_1 > c_1.$$

Наконец, из того, что хорда 12 расположена менее круто, чем касательная в точке 2, аналогичным образом следует, что $v_2 < c_2$ ¹⁾.

§ 84. Направление изменения величин в ударной волне

Таким образом, мы видим, что в предположении положительности производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ для ударных волн слабой интенсивности можно весьма просто показать, что условие возрастания энтропии $s_2 > s_1$ с необходимостью приводит также и к неравенствам

$$p_2 > p_1, \quad (84,1)$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2. \quad (84,2)$$

Из замечания, сделанного по поводу формулы (82,6), следует, что если $p_2 > p_1$, то

$$V_1 > V_2, \quad (84,3)$$

а поскольку $\frac{v_1}{V_1} = \frac{v_2}{V_2} = j$, то и

$$v_1 > v_2. \quad (84,4)$$

Мы покажем теперь, что все эти неравенства справедливы в действительности (при том же предположении о производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$) и для ударных волн произвольной интенсивности. Таким образом, мы убедимся, в частности, в том, что при прохождении газа через ударную волну происходит его сжатие — его давление и плотность

¹⁾ Тем же путём легко показать, что при отрицательной производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ из условия $s_2 > s_1$ для ударных волн слабой интенсивности следовало бы

$$p_2 < p_1,$$

а для скоростей — те же неравенства $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

возрастают (Э. Жуге, 1904; Цеμπлен, 1905)¹⁾. Графически это обстоятельство означает, что реальным смыслом обладает лишь верхняя (над точкой I (p_1, V_1)) часть ударной адиабаты; ударные волны, соответствующие точкам на нижней части кривой, существовать не могут. Укажем также следующий важный вывод, который можно сделать из неравенств (84,2). Поскольку ударная волна движется относительно находящегося перед ней газа со скоростью $v_1 > c_1$, то ясно, что в этот газ не могут проникнуть никакие исходящие от ударной волны возмущения. Другими словами, наличие ударной волны вовсе не отражается на состоянии находящегося впереди неё газа.

Переходя к доказательству высказанных утверждений, произведём предварительно следующее вычисление. Продифференцируем соотношения (82,5) и (82,8) по величинам, относящимся к газу 2, считая состояние газа 1 неизменным. Это значит, что p_1, V_1, w_1 рассматриваются как постоянные, а дифференцируются p_2, V_2, w_2 и j (поток j тоже зависит от величин p_2, V_2). Из (82,5) получаем:

$$V_1 d(j^2) = dp_2 + j^2 dV_2 + V_2 d(j^2),$$

или

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2) d(j^2), \quad (84,5)$$

а из (82,8)

$$dw_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} d(j^2),$$

или, раскрывая дифференциал dw_2 :

$$T_2 ds_2 + V_2 dp_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} d(j^2).$$

Рис. 46.

Подставляя это равенство в (84,5), получим соотношение

$$T_2 ds_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2} d(j^2). \quad (84,6)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d(j^2)}{ds_2} > 0, \quad (84,7)$$

т. е. j^2 растёт с увеличением s_2 .

Покажем теперь, что на ударной адиабате не может быть точек, в которых бы она касалась проведённой из точки I прямой (как это имело бы место в точке O на рис. 46).

В такой точке угол наклона хорды (проведённой из точки I) имеет минимум, а j^2 — соответственно максимум, и потому

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0.$$

¹⁾ Если перейти в систему координат, в которой газ 1 перед ударной волной покоится, а волна движется, то неравенство $v_1 > v_2$ означает, что газ позади ударной волны будет двигаться (со скоростью $v_1 - v_2$) в ту же сторону, куда движется сама волна.

Из соотношения (84,6) видно, что в таком случае будет и

$$\frac{ds_2}{dp_2} = 0.$$

Далее, подставив в соотношение (84,5) дифференциал dV_2 в виде

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2,$$

взяв для ds_2 выражение (84,6) и разделив всё равенство на dp_2 , получим:

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = (V_1 - V_2) \left[1 - \frac{j^2 (V_1 - V_2)}{T_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} \right] \frac{d(j^2)}{dp_2}.$$

Отсюда видно, что при $\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0$ должно быть

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = 1 - \frac{v_2^2}{c_2^2} = 0,$$

т. е. $v_2 = c_2$; обратно, из $v_2 = c_2$ следует, что $\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0$ ¹⁾.

Таким образом, все три равенства

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0, \quad \frac{ds_2}{dp_2} = 0, \quad v_2 = c_2 \quad (84,8)$$

являются следствиями друг друга и имели бы одновременно место в точке O на кривой рис. 46. Наконец, для производной от

$j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = -\frac{v_2^2}{c_2^2}$ в точке O имеем:

$$\frac{d}{dp_2} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right) = -j^2 \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

Ввиду предполагаемой везде положительности производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$ имеем, следовательно, в точке O :

$$\frac{d}{dp_2} \left(\frac{v_2}{c_2}\right) < 0. \quad (84,9)$$

Теперь уже легко доказать невозможность существования на ударной адиабате такой точки. В точках, лежащих вблизи точки I над ней, имеем $\frac{v_2}{c_2} < 1$ (см. конец предыдущего параграфа). Поэтому равенство $\frac{v_2}{c_2} = 1$ может быть достигнуто только при увеличении $\frac{v_2}{c_2}$; дру-

¹⁾ Одновременное с $v_2 = c_2$ обращение в нуль выражения, стоящего в квадратных скобках, могло бы произойти лишь чисто случайно и потому невероятно.

гими словами, в точке O должно было бы быть $\frac{d}{dp_2} \left(\frac{v_2}{c_2} \right) > 0$, между тем как согласно (84,9) мы имеем как раз обратное неравенство. Совершенно аналогичным образом можно показать, что невозможно обращение $\frac{v_2}{c_2}$ в единицу и на нижней части ударной адиабаты, под точкой I .

Имея в виду доказанную таким образом невозможность существования точек типа точки O , мы можем заключить непосредственно из графика ударной адиабаты, что угол наклона хорды из точки $I (p_1, V_1)$ в точку $2 (p_2, V_2)$ уменьшается с передвижением вверх по кривой, а j^2 соответственно увеличивается. Из этого свойства ударной адиабаты и из неравенства (84,7) непосредственно следует, что при соблюдении необходимого условия $s_2 > s_1$ имеет место и $p_2 > p_1$.

Легко, далее, убедиться в том, что на верхней части ударной адиабаты справедливы также и неравенства $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. Первое следует непосредственно из того, что оно справедливо вблизи точки I , а сделаться равным единице отношение v_2/c_2 нигде не может. Второе следует из того, что ввиду невозможности такого перегиба адиабаты, какой изображён на рис. 46, всякая хорда из точки I в находящуюся над ней точку 2 расположена более круто, чем касательная к адиабате в точке I .

Таким образом, на верхней части ударной адиабаты выполняются условие $s_2 > s_1$ и все три неравенства (84,1)—(84,2). Наоборот, на нижней части адиабаты все эти условия не выполняются. Следовательно, все эти условия оказываются эквивалентными друг другу, и выполнение одного из них автоматически влечёт за собой также и выполнение всех остальных.

В предыдущих рассуждениях мы всё время предполагали выполненным условие положительности производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$. Если эта производная могла бы менять знак, то из необходимого неравенства $s_2 > s_1$ уже нельзя было бы сделать никаких универсальных заключений о неравенствах для остальных величин. Весьма существенно, однако, что неравенства (84,2) для скоростей могут быть получены также и из совершенно иных соображений, показывающих, что ударные волны, в которых эти неравенства не выполняются, всё равно не могли бы существовать, даже если бы это не противоречило изложенным выше чисто термодинамическим соображениям.

Именно, необходимо исследовать ещё вопрос об устойчивости ударных волн. Представим себе, что неподвижная ударная волна подвергается бесконечно малому смещению в направлении, перпендикулярном к её плоскости. Может оказаться, что в результате такого смещения ударная волна начнёт неограниченно ускоряться в том или другом направлении; ясно, что это свидетельствовало бы об абсолютной неустойчивости волны и невозможности её существования.

Смещение ударной волны сопровождается бесконечно малым возмущением также и других величин — давления, скорости и т. д. газа по обеим сторонам поверхности разрыва. Эти возмущения, возникнув вблизи волны, будут затем распространяться от неё, переносясь (относительно газа) со скоростью звука; это не относится лишь к возмущению энтропии, которое будет переноситься только с самим газом. Таким образом, произвольное возмущение данного типа можно рассматривать как совокупность звуковых возмущений, распространяющихся в газах 1 и 2 по обе стороны ударной волны, и возмущения энтропии; последнее, перемещаясь вместе с газом, будет, очевидно, существовать лишь в газе 2 позади ударной волны. В каждом из звуковых возмущений изменения всех величин связаны друг с другом определёнными соотношениями, следующими из уравнений движения (как в любой звуковой волне; § 63); поэтому каждое такое возмущение определяется всего лишь одним параметром.

Подсчитаем теперь число возможных звуковых возмущений. Оно зависит от относительной величины скоростей газа v_1 , v_2 и скоростей звука c_1 , c_2 . Выберем направление движения газа (со стороны 1 на сторону 2) в качестве положительного направления оси x . Скорость распространения возмущения в газе 1 относительно неподвижной ударной волны есть $u_1 = v_1 \pm c_1$, а в газе 2 $u_2 = v_2 \pm c_2$. Тот факт, что эти возмущения должны распространяться по направлению от ударной волны, означает, что должно быть $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

Предположим, что $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Тогда ясно, что оба значения $u_1 = v_1 \pm c_1$ будут положительными, а из двух значений u_2 будут положительными лишь $v_2 + c_2$. Это значит, что в газе 1 вообще не сможет быть интересующих нас звуковых возмущений, а в газе 2 — всего одно, распространяющееся относительно самого газа со скоростью $+c_2$. Аналогичным образом производится подсчёт в других случаях.

Результат изображён на рис. 47, где каждая стрелка соответствует одному звуковому возмущению, распространяющемуся относительно газа в указываемую стрелкой сторону. Каждое же звуковое возмущение определяется, как было выше указано, одним параметром. Кроме того, во всех четырёх случаях имеется ещё по два параметра: параметр, определяющий распространяющееся в газе 2 возмущение энтропии, и параметр, определяющий самое смещение ударной волны.

Для каждого из четырёх случаев на рис. 47 цифрой в кружке указано получающееся таким образом полное число параметров, определяющих произвольное возмущение, возникающее при смещении ударной волны.

С другой стороны, число необходимых граничных условий, которым должно удовлетворять возмущение на поверхности разрыва, равно трём (условия непрерывности потоков массы, энергии и импульса). Ход решения задачи об устойчивости заключается в том, что смещение ударной волны (а с ней и возмущений всех остальных величин)

задаётся в виде, пропорциональном e^{st} , и возможные значения Ω определяются с помощью граничных условий; наличие вещественных положительных значений Ω свидетельствовало бы об абсолютной неустойчивости. Во всех изображённых на рис. 47 случаях, за исключением лишь первого, число имеющихся в нашем распоряжении параметров

превышает число уравнений (граничных условий на разрыве). Поэтому в этих случаях граничные условия допускают любое, в том числе любое положительное, значение Ω , и ударная волна была бы абсолютно неустойчива. В случае же $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$ число параметров как раз равно числу уравнений, которые должны, следовательно, дать определённое значение Ω . Уже без выписывания этих уравнений заранее ясно, что это значение должно быть $\Omega = 0$; это ясно уже хотя бы из тех соображений, что в задаче нет никакого параметра размерности обратного времени, который мог бы определить не произвольное,

отличное от нуля, значение Ω . Никакой неустойчивости рассматриваемого типа в этом случае, следовательно, не возникает.

Таким образом, мы видим, что неравенства (84,2) для скорости ударной волны являются совершенно необходимыми для существования ударной волны вне зависимости от термодинамических свойств газа.

Что касается вопроса об устойчивости ударных волн, удовлетворяющих необходимому условию (84,2), то для его решения необходимо исследовать устойчивость по отношению к возмущениям рассмотренного в § 30 типа (эти возмущения характеризуются периодичностью в направлении вдоль поверхности разрыва и представляют собой как бы «рябь» на этой поверхности). Мы не будем приводить здесь соответствующих вычислений и укажем лишь, что ударные волны практически всегда устойчивы по отношению к таким возмущениям; неустойчивость может иметь место лишь при некоторых весьма специальных формах ударной адиабаты, которые практически, по видимому, не осуществляются в природе.

§ 85. Ударные волны в идеальном газе

Применим полученные в предыдущих параграфах общие соотношения к ударным волнам в идеальном газе.

Тепловая функция идеального газа определяется простой формулой $w = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1}$. Подставляя это выражение в (82,9), получим после простого преобразования следующую формулу:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}. \quad (85,1)$$

По этой формуле можно определить по трём из величин p_1 , V_1 , p_2 , V_2 четвёртую. Отношение $\frac{V_2}{V_1}$ является монотонно убывающей функцией отношения $\frac{p_2}{p_1}$, стремящейся к конечному пределу $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. Кривая, изображающая зависимость между p_2 и V_2 при заданных p_1 , V_1 (удар-

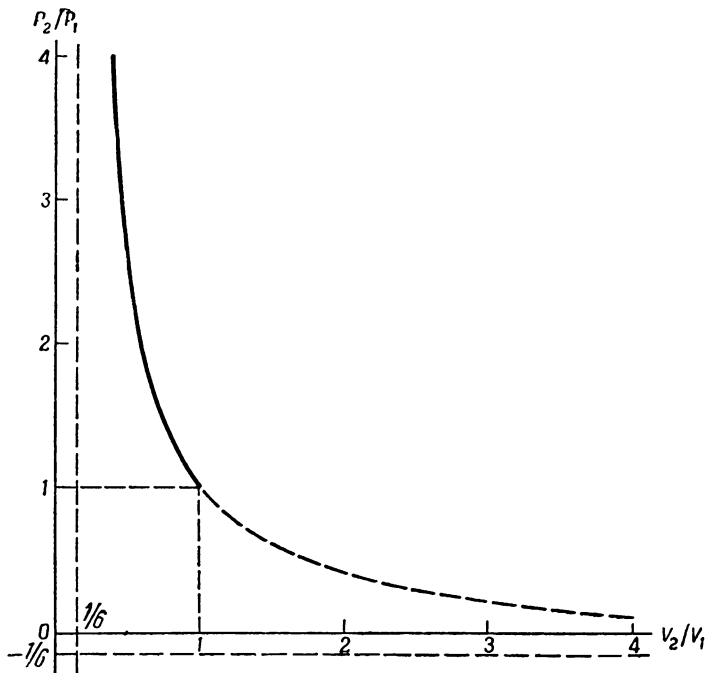


Рис. 48.

ная адиабата), представлена на рис. 48. Это есть равнобочная гипербола с асимптотами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Реальным смыслом обладает, как мы знаем, только верхняя часть кривой над точкой $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} = 1$, изображённая на рис. 48 (для $\gamma = 1,4$) сплошной линией.

Для отношения температур с обеих сторон разрыва имеем согласно уравнению состояния идеального газа $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$, так что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2} \right]. \quad (85,2)$$

Для потока j получаем из (82,6) и (85,1)

$$j^2 = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{2V_1} \quad (85,3)$$

и отсюда для скорости распространения ударной волны относительно газов впереди и позади неё соответственно

$$\left. \begin{aligned} v_1^2 &= \frac{V_1}{2} [(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2], \\ v_2^2 &= \frac{V_1}{2} \frac{[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]^2}{[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]} \end{aligned} \right\} \quad (85,4)$$

Выпишем предельные формулы для ударных волн очень большой интенсивности, в которых p_2 очень велико по сравнению с p_1 ¹⁾. Имеем из (85,1) и (85,2)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_2}{p_1}. \quad (85,5)$$

Отношение T_2/T_1 неограниченно растёт вместе с p_2/p_1 , т. е. скачок температуры, как и скачок давления, в ударной волне может быть сколь угодно большим. Отношение же плотностей стремится к постоянному пределу; так, для одноатомного газа предельное значение $\rho_2 = 4\rho_1$, для двухатомного $\rho_2 = 6\rho_1$. Скорости распространения ударной волны большой интенсивности равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} p_2 V_1}. \quad (85,6)$$

Они растут пропорционально корню из давления p_2 .

Наконец, выпишем полезные в применениях формулы, выражающие отношения плотностей, давлений и температур в ударной волне через число $M_1 = \frac{v_1}{c_1}$; эти формулы без труда выводятся из полученных выше соотношений и гласят:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}, \quad (85,7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (85,8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}. \quad (85,9)$$

Число же M_2 выражается через число M_1 посредством

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}. \quad (85,10)$$

1) Необходимо, чтобы было не просто $p_2 \gg p_1$, а

$$p_2 \gg \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1.$$

ЗАДАЧИ

1. Получить формулу

$$v_1 v_2 = c_*^2,$$

где c_* — критическая скорость.

Решение. Поскольку величина $w + \frac{v^2}{2}$ непрерывна на ударной волне, можно ввести критическую скорость, одинаковую для газов 1 и 2 согласно

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1) \rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1) \rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2$$

(ср. (80,7)). Определяя из этих равенств $\frac{p_2}{\rho_2}$ и $\frac{p_1}{\rho_1}$ и подставляя их в уравнение

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

(результат комбинирования (82,1) и (82,2), получим:

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} (v_1 - v_2) \left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2} \right) = 0.$$

Ввиду того что $v_1 \neq v_2$, отсюда следует искомое соотношение.

2. Определить отношение $\frac{p_2}{p_1}$ по заданным температурам T_1, T_2 для разрыва в идеальном газе с непостоянной теплоёмкостью.

Решение. В общем случае идеального газа с непостоянной теплоёмкостью можно лишь утверждать, что w (как и ϵ) есть функция только от температуры и что p, V, T связаны уравнением состояния $pV = RT/\mu$. Решая уравнение (82,9) относительно p_2/p_1 , получаем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT} (w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left[\frac{\mu}{RT_1} (w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} \right]^2 + \frac{T_2}{T_1}},$$

где $w_1 = w(T_1), w_2 = w(T_2)$.

3. На ударную волну (в идеальном газе) падает распространяющаяся навстречу ей плоская звуковая волна. Определить интенсивность звука, прошедшего через ударную волну (Д. И. Блохинцев, 1945).

Решение. Поскольку ударная волна распространяется относительно находящегося перед ней газа со сверхзвуковой скоростью, то отражённой от неё звуковой волны не может быть. В газе же 2 позади разрыва распространяется прошедшая обычная изэнтропическая звуковая волна и, кроме того, возмущение энтропии (при постоянном давлении), переносимое вместе с самим движущимся газом.

Будем рассматривать процесс в системе координат, в которой ударная волна покоится, газ движется через неё в положительном направлении оси x , и в том же направлении распространяется падающая звуковая волна. Возмущения с обеих сторон разрыва связаны друг с другом условиями, получающимися варьированием граничных условий (82,1) — (82,3). Под влиянием звукового возмущения ударная волна тоже начинает колебаться; обозначив скорость её колебаний посредством δu , мы должны поэтому писать

изменения скоростей v_1, v_2 в граничных условиях в виде $\delta v_1 - \delta u, \delta v_2 - \delta u$. Таким образом 1):

$$\begin{aligned} v_1 \delta \rho_1 + \rho_1 (\delta v_1 - \delta u) &= v_2 \delta \rho_2 + \rho_2 (\delta v_2 - \delta u), \\ \delta p_1 + v_1^2 \delta \rho_1 + 2\rho_1 v_1 (\delta v_1 - \delta u) &= \delta p_2 + v_2^2 \delta \rho_2 + 2\rho_2 v_2 (\delta v_2 - \delta u), \\ \delta w_1 + v_1 (\delta v_1 - \delta u) &= \delta w_2 + v_2 (\delta v_2 - \delta u). \end{aligned}$$

В падающей звуковой волне имеем:

$$\delta s_1 = 0, \quad \delta v_1 = \frac{c_1}{\rho_1} \delta \rho_1 = \frac{\delta p_1}{c_1 \rho_1}, \quad \delta w_1 = \frac{\delta p_1}{\rho_1}.$$

Возмущение же в среде 2 складывается из звуковой волны и «энтропийной волны»; отмечая их соответственно одним и двумя штрихами, имеем:

$$\begin{aligned} \delta s_2' &= 0, \quad \delta v_2' = \frac{c_2}{\rho_2} \delta \rho_2' = \frac{\delta p_2'}{c_2 \rho_2}, \quad \delta w_2 = \frac{\delta p_2'}{\rho_2}, \\ \delta p_2'' &= 0, \quad \delta v_2'' = 0, \quad \delta w_2'' = T_2 \delta s_2'' = -\frac{c_2^2 \delta \rho_2''}{\rho_2 (\gamma - 1)} \end{aligned}$$

$$\left(\text{для идеального газа } \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_p = -\frac{c_p}{p} \right).$$

Написанные соотношения позволяют выразить все величины в прошедших волнах через соответствующие величины в падающей волне. Для отношения давлений в звуковых волнах получается

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} = \frac{M_1 + 1}{M_2 + 1} \left[\frac{2(\gamma - 1) M_1 M_2^2 (M_1^2 - 1) - (M_1 + 1) [(\gamma - 1) M_1^2 + 2]}{2(\gamma - 1) M_2^2 (M_1^2 - 1) - (M_2 + 1) [(\gamma - 1) M_1^2 + 2]} \right].$$

При слабой интенсивности ударной волны ($p_2 - p_1 \ll p_1$) можно получить отсюда

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

а в обратном случае большой интенсивности

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx \frac{1}{\gamma + \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}} \frac{p_2}{p_1}.$$

В обоих случаях амплитуда давления в прошедшей волне возрастает по сравнению с давлением в падающей волне.

§ 86. Косая ударная волна

Рассмотрим стационарную ударную волну, отказавшись при этом от подразумевавшегося везде выше выбора системы координат, в которой скорость газа направлена перпендикулярно к данному элементу поверхности волны. Линии тока могут пересекать поверхность такой волны под произвольным углом 2), причём пересечение сопровождается

1) Мы обозначаем здесь переменные части величины посредством δ вместо штриха, как мы обычно делали.

2) Ограниченным лишь условием, чтобы нормальная составляющая скорости v_{1n} была $v_{1n} > c_1$.

определённым «преломлением» линий тока. Касательная составляющая скорости газа не меняется при прохождении через ударную волну, а нормальная составляющая согласно (84,4) падает:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad v_{1n} > v_{2n}.$$

Поэтому ясно, что при прохождении через ударную волну линии тока «приближаются» к ней (как это изображено на рис. 49). Таким образом, преломление линий тока на ударной волне происходит всегда в определённом направлении.

Движение позади ударной волны может быть как до-, так и сверхзвуковым (меньше скорости звука c_2 должна быть лишь нормальная компонента скорости); движение же перед ударной волной — непременно сверхзвуковое. Если движение газа по обе стороны от ударной волны является сверхзвуковым, то все возмущения могут распространяться вдоль её поверхности лишь в ту сторону, куда направлена касательная к ней составляющая скорости газа. В этом смысле можно говорить о «направлении» ударной волны и различать по отношению к какому-либо месту «исходящие» из него и «приходящие» волны (подобно тому как мы это уже делали для характеристик, вокруг которых движение всегда является сверхзвуковым; см. § 79). Если же движение позади ударной волны является дозвуковым, то понятие о её «направлении» теряет, строго говоря, смысл, так как возмущения могут распространяться вдоль её поверхности во все стороны.

Выведем соотношение, связывающее друг с другом две компоненты скорости газа после его прохождения через косую ударную волну; при этом мы будем предполагать газ идеальным. Выберем направление скорости v_1 газа перед волной в качестве оси x , и пусть φ есть угол между волной и осью x (рис. 49).

Непрерывность касательной к волне составляющей скорости означает, что $v_1 \cos \varphi = v_{2x} \cos \varphi + v_{2y} \sin \varphi$, или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \quad (86,1)$$

Далее, воспользуемся формулой (85,7); в этой формуле v_1 и v_2 обозначают нормальные к плоскости ударной волны составляющие скорости и должны быть теперь заменены на $v_1 \sin \varphi$ и $v_{2x} \sin \varphi$ — $v_{2y} \cos \varphi$, так что имеем:

$$\frac{v_{2x} \sin \varphi - v_{2y} \cos \varphi}{v_1 \sin \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)v_1^2 \sin^2 \varphi}. \quad (86,2)$$

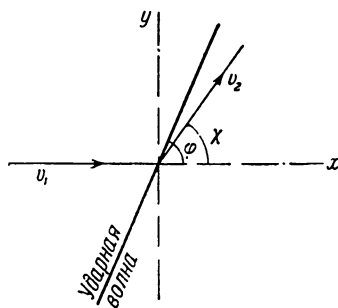


Рис. 49.

Из двух написанных соотношений можно исключить угол φ . После простых преобразований получим следующую формулу, определяющую связь между v_{2x} и v_{2y} (при заданных v_1 и c_1):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{2}{\gamma + 1} \left(v_1 - \frac{c_1^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x}) \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_1^2}{v_1}. \quad (86,3)$$

Этой формуле можно придать более изящный вид, если ввести в неё критическую скорость. Согласно уравнению Бернулли и определению критической скорости имеем:

$$v_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{v_1^3}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2$$

(ср. задачу 1 § 85), откуда

$$c_*^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} c_1^2. \quad (86,4)$$

Введя эту величину в (86,3), получим:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\frac{2}{\gamma + 1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \quad (86,5)$$

Уравнение (86,5) называют уравнением ударной поляры. На рис. 50 изображён график этой зависимости; это есть кривая третьего порядка (так называемая строфоида). Она пересекает ось абсцисс в точках P и Q (рис. 50), соответствующих значениям $v_{2x} = c_*^2/v_1$ и $v_{2x} = v_1$.

Проведя из начала координат луч (OB на рис. 50) под углом χ к оси абсцисс по длине его отрезка до точки пересечения с кривой ударной поляры, мы определяем скорость газа за скачком, поворачивающим поток на угол χ . Таких точек пересечения имеется две (A и B), т. е. заданному значению χ отвечают две

различные ударные волны. Направление ударной волны тоже может быть сразу определено графически по этой же диаграмме — оно опре-

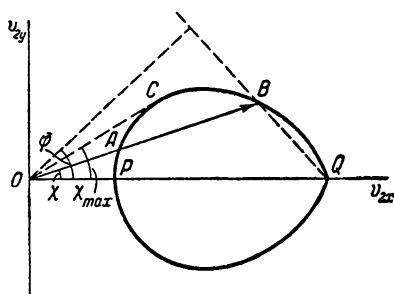


Рис. 50.

1) От точки $v_{2x} = v_1$, являющейся двойной точкой кривой, строфоида в действительности продолжается ещё в виде двух уходящих к бесконечным v_{2y} ветвей, не изображённых на рис. 50 (с общей асимптотой $v_{2x} = \frac{c_*^2}{v_1} + \frac{2v_1}{\gamma + 1}$). Однако точки этих ветвей не имеют физического смысла; они дали бы для v_{2x} и v_{2y} такие значения, что получилось бы $v_{2x}/v_1 > 1$, что невозможно.

деляется перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, проведённую из точки Q соответственно через точку B или A (на рис. 50 изображён угол φ для волны, соответствующей точке B). При уменьшении χ точка A приближается к точке P , отвечающей прямому ($\varphi = \pi/2$) скачку с $v_2 = c_*^2/v_1$. Точка же B приближается при этом к точке Q , причём интенсивность ударной волны (скачок скорости в ней) стремится к нулю; в пределе, в самой точке Q , угол φ равен, как и следовало, углу возмущений $\alpha = \arcsin \frac{c_1}{v_1}$ (угол наклона к оси абсцисс, касательной к поляре в этой точке, равен $\frac{\pi}{2} + \alpha$).

Из диаграммы ударной поляры сразу можно вывести важное заключение, что угол отклонения χ потока в ударной волне не может превышать некоторого максимального значения χ_{\max} , соответствующего лучу, проведённому из точки O касательно к кривой. χ_{\max} является, конечно, функцией числа $M_1 = v_1/c_1$; мы не приводим её здесь ввиду её громоздкости. При $M_1 = 1$ имеем $\chi_{\max} = 0$, а при возрастании M_1 угол χ_{\max} монотонно растёт и при $M_1 \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Легко рассмотреть оба предельных случая. Если скорость v_1 близка к c_* , то вместе с ней близка к c_* и скорость v_2 , а угол χ мал; уравнение ударной поляры (86,5) можно тогда приближённо переписать в виде¹⁾

$$\chi^2 = \frac{\gamma+1}{2c_*^3} (v_1 - v_2)^2 (v_1 + v_2 - 2c_*) \quad (86,6)$$

(ввиду малости угла χ здесь положено $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_* \chi$). Отсюда элементарным путём найдём²⁾

$$\chi_{\max} = \frac{4\sqrt{\gamma+1}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{v_1}{c_*} - 1\right)^{3/2} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}(\gamma+1)} (M_1 - 1)^{3/2}. \quad (86,7)$$

В обратном предельном случае, при $M_1 = \infty$ (т. е. $M_{1*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$), ударная поляра вырождается в окружность, пересекающую ось абсцисс в точках $c_* \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ и $c_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$. Легко видеть, что при этом

$$\chi_{\max} = \arcsin \frac{1}{\gamma} \quad (86,8)$$

¹⁾ Можно легко убедиться в том, что уравнение (86,6) будет справедливым и для любого (не идеального) газа, если только заменить в нём величину $\gamma+1$ на $2\alpha_*$ (95,2).

²⁾ Заметим, что эта зависимость χ_{\max} от $M_1 - 1$ находится в согласии с общим законом подобия (117,7) для околосзвуковых течений.

(для воздуха это значение равно $45,6^\circ$). На рис. 51 изображён график зависимости χ_{\max} от M_1 для воздуха (верхняя кривая — аналогичный график для обтекания конуса; см. § 105).

Окружность $v_2 = c_*$ пересекает ось абсцисс между точками P и Q и поэтому делит ударную поляру на две части, соответствующие до- и сверхзвуковым скоростям газа позади разрыва. Точка пересечения окружности $v_2 = c_*$ с полярной лежит правее точки C , но очень близко к ней; поэтому весь участок PC соответствует переходам к дозвуковым скоростям, а участок CQ (за исключением лишь очень небольшого участка вблизи точки C) — переходам к сверхзвуковым скоростям.

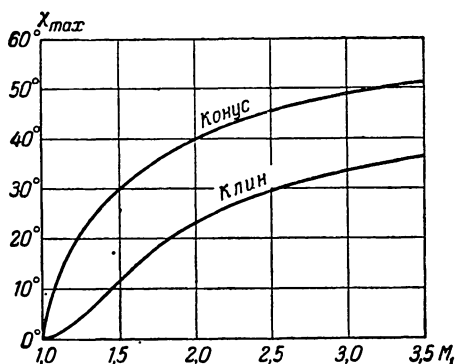


Рис. 51.

При заданных числе M_1 и угле φ изменение давления в ударной волне определяется формулой

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (86,9)$$

(формула (85,8) с $M_1 \sin \varphi$ вместо M_1). Это отношение моно-

тонно возрастает, когда угол φ увеличивается от своего наименьшего возможного значения $\arcsin \frac{1}{M_1}$ (когда $\frac{p_2}{p_1} = 1$) до $\frac{\pi}{2}$, т. е. по мере перемещения по ударной поляре от точки Q к точке P .

Две ударные волны, определяемые ударной полярной для заданного угла χ поворота скорости, часто называют волнами «слабого» и «сильного» семейства.

Ударная волна «сильного» семейства (участок PC поляры) обладает большей интенсивностью (большим отношением p_2/p_1), образует больший угол φ с направлением скорости v_1 и превращает течение из сверх- в дозвуковое. Волна же «слабого» семейства (участок QC поляры) обладает меньшей интенсивностью, наклонена к потоку под меньшим углом и практически всегда оставляет течение сверхзвуковым.

Задачи

1. Вывести формулу, определяющую угол поворота χ скорости в косой ударной волне (в идеальном газе) по числу $M_1 = v_1/c_1$ и углу φ наклона ударной волны к направлению скорости v_1 (рис. 49):

$$\operatorname{ctg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2(M_1^2 \sin^2 \varphi - 1)} - 1 \right].$$

2. Вывести формулу, определяющую число $M_2 = v_2/c_2$ по числу M_1 и углу φ :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi - (\gamma - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \varphi}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varphi}.$$

§ 87. Ширина ударных волн

Мы говорили до сих пор об ударных волнах как о геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что ударные волны с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в ударной волне не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (82,1) — (82,3) на ударной волне были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (82,1) не меняется:

$$\rho v \equiv j = \text{const.} \quad (87,1)$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси x), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой — σ'_{xx} вязкого тензора напряжений; согласно общему выражению (15,3) для этого тензора имеем:

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx}.$$

Условие (82,2) приобретает теперь вид

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx} = \text{const.}$$

Как и в § 82, введём вместо скорости v удельный объём V согласно $v = jV$. Поскольку $j = \text{const.}$, то $\frac{dv}{dx} = j \frac{dV}{dx}$, так что

$$p + j^2 V - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) j \frac{dV}{dx} = \text{const.}$$

На большом расстоянии от ударной волны термодинамические величины постоянны, т. е. не зависят от x ; в частности, и $\frac{dV}{dx} = 0$. Обозначим буквами с индексом 1 значения величин на большом расстоянии впереди ударной волны. Тогда в написанном условии можно положить $\text{const.} = p_1 + j^2 V_1$, так что оно приобретает вид

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)j \frac{dV}{dx} = 0. \quad (87,2)$$

Далее, плотность потока энергии, обусловленного теплопроводностью, есть $-x \frac{dT}{dx}$. Поток же энергии, связанный с внутренним трением, равен $-\sigma'_{xx} v$, или, поскольку скорость направлена тоже вдоль оси x , равен

$$-\sigma'_{xx} v = -\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v \frac{dv}{dx}.$$

Таким образом, условие (82,3) напишется в виде

$$\rho v \left(\omega + \frac{v^2}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v \frac{dv}{dx} - x \frac{dT}{dx} = \text{const.}$$

Вводя опять $v = jV$, пишем окончательно это условие в виде

$$\omega + \frac{j^2 V^2}{2} - j \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) V \frac{dV}{dx} - x \frac{dT}{dx} = \omega_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2}. \quad (87,3)$$

Мы будем рассматривать здесь ударные волны, в которых все величины испытывают небольшой скачок. Тогда и все разности: $V - V_1$, $p - p_1$ и т. д. между значениями величин внутри переходного слоя и вне него тоже малы.

Разложим в (87,2) $V - V_1$ по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$, выбрав давление и энтропию в качестве основных независимых переменных. Из получающихся ниже соотношений видно, что $1/\delta$ (где δ — ширина разрыва) есть величина первого порядка малости по $p - p_1$, а разность $s - s_1$ является малой величиной второго порядка¹⁾. Поэтому с точностью до величин второго порядка пишем:

$$V - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s (p - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s - s_1).$$

Во всех коэффициентах подразумеваются, конечно, их значения вне переходного слоя (т. е. при $p = p_1$, $s = s_1$). Подставляя это раз-

¹⁾ Полный скачок энтропии $s_2 - s_1$ является, как мы видели в § 83, величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления $p_2 - p_1$, между тем как $s - s_1$ всего лишь второго порядка по $p - p_1$. Это связано с тем, что, как будет ниже показано, давление в переходном слое монотонно меняется от значения p_1 до значения p_2 , в то время как ход изменения энтропии не является монотонным; при своём изменении энтропия обнаруживает максимум, достигая наибольшего значения внутри слоя.

ложение в (87,2), имеем:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right] (p - p_1) + \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s - s_1) j^2 = \\ = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) j \frac{dV}{dx}.$$

Производную $\frac{dV}{dx}$ напишем здесь в виде

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}.$$

Дифференцирование по x увеличивает порядок малости величин на единицу (поскольку $1/\delta$ — первого порядка); поэтому производная $\frac{dp}{dx}$ есть величина второго порядка малости, а производная $\frac{ds}{dx}$ — третьего порядка. Ввиду этого член с производной от энтропии можно опустить. В результате получаем условие (87,2) в виде

$$\left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right] (p - p_1) + \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p - p_1)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s - s_1) j^2 = \\ = \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} j. \quad (87,4)$$

Далее, умножим уравнение (87,2) почленно на $\frac{1}{2}(V + V_1)$ и вычтем из уравнения (87,3). Тогда мы получим:

$$(\omega - \omega_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - \\ - \frac{j}{2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) (V - V_1) \frac{dV}{dx} - \frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = 0.$$

Третий член здесь, содержащий произведение $(V - V_1) \frac{dV}{dx}$, является малой величиной третьего порядка и может быть опущен:

$$(\omega - \omega_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - \frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = 0.$$

Первые два члена представляют собой как раз то выражение, которое мы разлагали по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$ в § 83 при выводе формулы (83,1). Члены первого и второго порядков по $p - p_1$ в этом разложении выпадают и с точностью до членов второго порядка остаётся просто $T(s - s_1)$. Производную же $\frac{dT}{dx}$ пишем в виде

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx}.$$

В результате получаем:

$$T(s - s_1) = \frac{\kappa}{j} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx}. \quad (87,5)$$

Подставляя это выражение для $s - s_1$ в (87,4), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s j^2 \right] (p - p_1) = \\ = \left\{ -\frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right\} \frac{dp}{dx} j. \end{aligned} \quad (87,6)$$

Поток j равен в первом приближении $j = \frac{v}{V} \approx \frac{c}{V}$ (см. (83,3)).

Это выражение можно подставить в правую сторону (87,6). В левой же стороне оно недостаточно, и нужно учесть члены следующего порядка в j^2 . Эти члены можно было бы получить, например, из (87,2). Проще, однако, воспользоваться следующими соображениями. На больших расстояниях по обе стороны от поверхности разрыва правая сторона (87,6) обращается в нуль вместе с $\frac{dp}{dx}$. На этих расстояниях давление равно соответственно p_1 и p_2 . Другими словами, можно сказать, что квадратный (по p) трёхчлен, стоящий в левой стороне (87,6), имеет корни $p = p_1$ и $p = p_2$. Согласно известной теореме алгебры он может быть поэтому написан в виде произведения $(p - p_1)(p - p_2)$, умноженного на коэффициент $\frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$, стоящий перед p^2 в трёхчлене.

Таким образом, получаем окончательно следующее дифференциальное уравнение, определяющее функцию $p(x)$ 1):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2) = -\frac{V^3}{c^3} \left\{ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p c^2 p^2 \right\} \frac{dp}{dx}.$$

Согласно термодинамическим формулам преобразования производных $\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s$; легко видеть, что коэффициент при $-\frac{dp}{dx}$ в правой стороне этого уравнения равен $2V^2 a$, где a связано с коэффициентом поглощения звука γ (77,6) соотношением $\gamma = a\omega^2$. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4V^2 a} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2). \quad (87,7)$$

Интегрирование даёт:

$$\begin{aligned} x = -\frac{4V^2 a}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s} \int \frac{dp}{(p - p_1)(p - p_2)} = \\ = \frac{4aV^2}{\frac{p_2 - p_1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s} \text{Arth} \frac{p - \frac{p_1 + p_2}{2}}{\frac{p_2 - p_1}{2}} + \text{const.} \end{aligned}$$

1) Рассматривая ударную волну слабой интенсивности, мы можем считать коэффициенты вязкости и теплопроводности постоянными.

Полагая $\text{const.} = 0$, имеем:

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta}, \quad (87,8)$$

где введено обозначение

$$\delta = \frac{8aV^2}{(p_2 - p_1) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s}. \quad (87,9)$$

Этим определяется ход изменения давления между значениями p_1 и p_2 , которые оно имеет на больших расстояниях по обе стороны ударной волны. Точка $x = 0$ соответствует месту, в котором давление равно полусумме $1/2(p_1 + p_2)$. При $x \rightarrow \pm \infty$ давление приближается асимптотически к значениям p_1 и p_2 . Практически всё изменение от p_1 до p_2 происходит на протяжении расстояния порядка величины δ , которое можно назвать шириной ударной волны. Мы видим, что эта ширина тем меньше, чем больше интенсивность волны, т. е. скачок давления в ней.

Для хода изменения энтропии внутри разрыва имеем из (87,5) и (87,8):

$$s - s_1 = \frac{\kappa}{16caVT} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{\delta}}. \quad (87,10)$$

Отсюда видно, что энтропия меняется не монотонно, а имеет максимум внутри ударной волны (при $x = 0$). При $x = \pm \infty$ эта формула даёт одинаковые значения $s = s_1$: это связано с тем, что полное изменение энтропии $s_2 - s_1$ является величиной третьего порядка по $p_2 - p_1$ (ср. (83,1)), в то время как $s - s_1$ — второго.

Формула (87,8) применима количественно только при достаточно малых разностях $p_2 - p_1$. Однако качественно мы можем применить формулу (87,9) для определения порядка величины ширины ударной волны и в тех случаях, когда разность $p_2 - p_1$ — порядка величины самих давлений p_1, p_2 . Скорость звука в газе — порядка величины тепловой скорости v молекул. Кинематическая же вязкость, как известно из кинетической теории газов, $\nu \sim l v \sim l c$, где l — длина свободного пробега молекул. Поэтому $a \sim l c^2$ (оценка члена с теплопроводностью даёт то же самое). Наконец, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \sim \frac{V}{p^2}$ и $pV \sim c^2$. Внося эти выражения в (87,9), получаем:

$$\delta \sim l. \quad (87,11)$$

Таким образом, ширина ударных волн большой интенсивности оказывается порядка величины длины свободного пробега молекул газа¹⁾.

¹⁾ Сильная ударная волна сопровождается значительным увеличением температуры; под l надо понимать длину пробега, соответствующую некоторой средней температуре газа в волне.

Но в макроскопической газодинамике, трактующей газ как сплошную среду, длина свободного пробега должна рассматриваться как равная нулю. Поэтому, строго говоря, чисто газодинамические методы непригодны для исследования внутренней структуры ударных волн большой интенсивности.

К значительному расширению ударной волны может привести наличие в газе сравнительно медленно протекающих релаксационных процессов (медленно протекающие химические реакции, замедленная передача энергии между различными степенями свободы молекулы и т. п.). Этот вопрос был рассмотрен *Я. Б. Зельдовичем* (1946).

Пусть τ — порядок величины времени релаксации. Как начальное, так и конечное состояния газа должны быть полностью равновесными; поэтому прежде всего ясно, что полная ширина ударной волны будет порядка величины τv_1 — расстояния, проходимого газом в течение времени τ . Кроме того, оказывается, что если интенсивность волны превышает определённый предел, то структура волны усложняется, в чём можно убедиться следующим образом.

На рис. 52 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведённая через заданную начальную точку I , в предположении полной равновесности конечных состояний газа; наклон касательной к этой

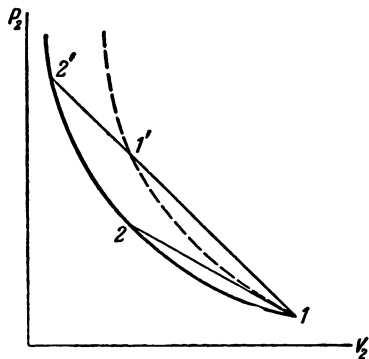


Рис. 52.

кривой в точке I определяется «равновесной» скоростью звука, которую мы обозначали в § 78 посредством c_0 . Пунктиром же изображена ударная адиабата, проведённая через ту же точку I , в предположении, что релаксационные процессы «заморожены» и не происходят вовсе; наклон касательной к этой кривой в точке I определяется значением скорости звука, которое было обозначено в § 78 как c_∞ .

Если скорость ударной волны такова, что $c_0 < v_1 < c_\infty$, то хорда $I2$ расположена так, как указано на рис. 52 нижним отрезком. В этом случае мы получим простое расширение ударной волны, причём все промежуточные состояния между начальным состоянием I и конечным состоянием 2 изображаются в плоскости p, V точками на отрезке $I2^1$.

¹) Это следует из того, что (при пренебрежении обычными вязкостью и теплопроводностью) все последовательно проходимые газом состояния удовлетворяют уравнениям сохранения вещества $\rho v = j = \text{const.}$ и сохранения импульса в виде $p + j^2 V = \text{const.}$ (ср. подробнее аналогичные соображения в § 120).

Если же $v_1 > c_\infty$, то хорда занимает положение $11'2'$. Все точки, лежащие на её отрезке между точками 1 и $1'$, вообще не соответствуют каким-либо реальным состояниям газа; первой (после 1) реальной точкой является точка $1'$, отвечающая состоянию с вполне несмещённым относительно состояния 1 релаксационным равновесием. Сжатие газа от состояния 1 до состояния $1'$ совершается скачком, вслед за чем уже происходит (на расстояниях $\sim v_1\tau$) постепенное сжатие до конечного состояния $2'$.

§ 88. Изотермический скачок

Рассматривая в предыдущем параграфе строение ударной волны, мы по существу предполагали, что коэффициенты вязкости и температуропроводности — одного порядка величины, как это обычно всегда и бывает. Возможен, однако, и такой случай, когда $\chi \gg \nu$. Именно, если температура вещества достаточно высока, то в теплопроводности будет участвовать добавочный механизм — лучистая теплопроводность, осуществляемая находящимся в равновесии с веществом тепловым излучением. На вязкости же (т. е. на переносе импульса) наличие излучения сказывается в несравненно меньшей степени, в результате чего ν и может оказаться малым по сравнению с χ . Мы увидим сейчас, что наличие такого неравенства приводит к весьма существенному изменению структуры ударной волны.

Пренебрегая членами, содержащими вязкость, напишем уравнения (87,2) и (87,3), определяющие структуру переходного слоя, в виде

$$p + j^2 V = p_1 + j^2 V_1, \quad (88,1)$$

$$\frac{x}{j} \frac{dT}{dx} = w + \frac{j^2 V^2}{2} - w_1 - \frac{j^2 V_1^2}{2}. \quad (88,2)$$

Правая сторона второго из этих уравнений обращается в нуль лишь на границах слоя. Поскольку температура позади ударной волны должна быть выше, чем впереди неё, то отсюда следует, что на протяжении всей ширины переходного слоя

$$\frac{dT}{dx} > 0, \quad (88,3)$$

т. е. температура возрастает монотонно.

Все величины в слое являются функцией одной переменной — координаты x , а потому являются и определёнными функциями друг от друга. Продифференцировав соотношение (88,1) по V , получим:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dT}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + j^2 = 0.$$

Производная $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ у газов всегда положительна. Поэтому знак производной $\frac{dT}{dV}$ определяется знаком суммы $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + j^2$. В состоянии 1

имеем $j^2 > -\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_s$ (так как $v_1 > c_1$), а поскольку адиабатическая сжимаемость всегда меньше изотермической, то во всяком случае и

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_T.$$

Следовательно, на стороне 1 производная

$$\frac{dT_1}{dV_1} < 0.$$

Если эта производная отрицательна и на всём протяжении ширины переходного слоя, то по мере сжатия вещества (уменьшения V) при переходе со стороны 1 на сторону 2 температура будет монотонно возрастать в согласии с неравенством (88,3). Другими словами, мы будем иметь дело с ударной волной, сильно расширенной благодаря большой теплопроводности (расширение может оказаться столь большим, что самое представление об ударной волне станет условным).

Если же интенсивность ударной волны настолько велика, что

$$j^2 < -\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_T, \quad (88,4)$$

то в состоянии 2 будем иметь $\frac{dT_2}{dV_2} > 0$, так что где-то между значениями $V = V_1$ и $V = V_2$ функция $T(V)$ будет иметь максимум (рис. 53). Ясно, что переход от состояния 1 к состоянию 2 с непрерывным изменением V станет невозможным, так как при этом неизбежно нарушилось бы неравенство (88,3).

В результате мы получим следующую картину перехода от начального состояния 1 к конечному состоянию 2. Сначала идёт область, в которой происходит постепенное сжатие вещества от удельного объёма V_1 до объёма V' (значение V , при котором впервые становится $T(V') = T_2$; см. рис. 53); ширина этой области, определяемая теплопроводностью, может быть весьма значительной. Сжатие же от V' до V_2 происходит затем скачком при постоянной (равной T_2) температуре. Этот разрыв можно назвать изотермическим скачком.

В результате мы получим следующую картину перехода от начального состояния 1 к конечному состоянию 2. Сначала идёт область, в которой происходит постепенное сжатие вещества от удельного объёма V_1 до объёма V' (значение V , при котором впервые становится $T(V') = T_2$; см. рис. 53); ширина этой области, определяемая теплопроводностью, может быть весьма значительной. Сжатие же от V' до V_2 происходит затем скачком при постоянной (равной T_2) температуре. Этот разрыв можно назвать изотермическим скачком.

Определим изменения давления и плотности в изотермическом скачке, предполагая газ идеальным. Условие непрерывности по гога импульса (88,1), применённое к обоим сторонам скачка, даёт

$$p' + j^2 V' = p_2 + j^2 V_2.$$

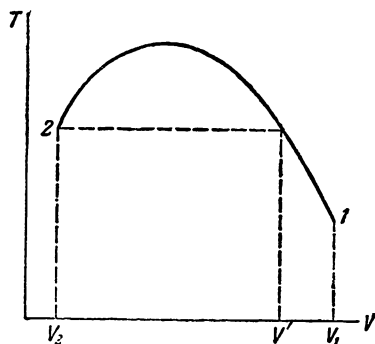


Рис. 53.

Для идеального газа пишем $V = \frac{RT}{\mu p}$ и, имея в виду, что $T' = T_2$, получим:

$$p' + \frac{j^2 R T_2}{\mu p'} = p_2 + \frac{j^2 R T_2}{\mu p_2}.$$

Это квадратное уравнение для p' имеет (помимо тривиального корня $p' = p_2$) решение

$$p' = \frac{j^2 R T_2}{\mu p_2} = j^2 V_2. \quad (88,5)$$

Выражаем j^2 согласно формуле (82,6):

$$p' = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_2,$$

после чего, подставив сюда V_2/V_1 из (85,1), получим:

$$p' = \frac{1}{2} [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]. \quad (88,6)$$

Поскольку должно быть $p_2 > p'$, то мы находим, что изотермический скачок возникает лишь при отношениях давлений p_2 и p_1 , удовлетворяющих условию

$$\frac{p_2}{p_1} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \quad (88,7)$$

(Рэлей, 1910). Это условие можно, конечно, получить и непосредственно из (88,4).

Поскольку при данной температуре плотность газа пропорциональна давлению, то отношение плотностей в изотермическом скачке равно отношению давлений:

$$\frac{p'}{p_2} = \frac{V_2}{V'} = \frac{p'}{p_2}. \quad (88,8)$$

§ 89. Слабые разрывы

Наряду с поверхностями разрывов, на которых испытывают скачок величины ρ , p , v и т. п., могут существовать также и такие поверхности, на которых эти величины как функции координат обладают какими-либо особенностями, оставаясь сами непрерывными. Эти особенности могут быть самого разнообразного характера. Так, на поверхности разрыва могут испытывать скачок первые производные по координатам от величин ρ , p , v , ... или же эти производные могут обращаться в бесконечность. Наконец, то же самое может иметь место для производных не первого, а более высоких порядков. Все такие поверхности мы будем называть поверхностями слабого разрыва в противоположность сильным разрывам (ударным волнам и тангенциальным разрывам), в которых испытывают скачок сами величины ρ , p , v , ...

Легко убедиться при помощи простых рассуждений в том, что поверхности слабого разрыва распространяются относительно газа (по обе стороны поверхности) со скоростью, равной скорости звука. Действительно, поскольку функции p , ρ , v , ... сами не испытывают скачка, то их можно «сгладить», заменив функциями, совпадающими с ними везде, кроме окрестности поверхности разрыва, а в этой окрестности отличающимися лишь на сколь угодно малые величины, но так, что «сглаженные» функции не имеют уже никаких особенностей. Истинное распределение, скажем, давления, можно, таким образом, представить в виде наложения совершенно плавного распределения p_0 без всяких особенностей и очень малого нарушения p' этого распределения вблизи поверхности разрыва. Последнее же, как и всякое малое возмущение, распространяется относительно газа со скоростью звука.

Подчеркнём, что в случае ударной волны «сглаженные» функции отличались бы от истинных на величины, вообще говоря, отнюдь не малые, и предыдущие рассуждения поэтому неприменимы. Однако если скачок величин в ударной волне достаточно мал, то эти рассуждения вновь делаются применимыми, и такие разрывы тоже должны распространяться со скоростью звука, — этот результат был уже получен в § 83 другим способом.

Если движение стационарно относительно данной системы координат, то поверхность разрыва неподвижна относительно этой системы, а газ «протекает» через неё. При этом нормальная к поверхности разрыва компонента скорости газа должна быть равна скорости звука. Если обозначить посредством α угол между направлением скорости газа и касательной плоскостью к поверхности, то должно быть $v_n = v \sin \alpha = c$, или

$$\sin \alpha = \frac{c}{v},$$

т. е. поверхность слабого разрыва пересекает линию тока под углом, равным углу возмущений. Другими словами, поверхность слабого разрыва совпадает с одной из характеристических поверхностей, — результат вполне естественный, если иметь в виду физический смысл последних как поверхностей, вдоль которых распространяются малые возмущения (§ 79). Ясно, что при стационарном движении газа слабые разрывы могут появиться только при скоростях, равных или превышающих скорость звука.

В отношении способов возникновения слабые разрывы существенно отличаются от сильных. Мы увидим, что ударные волны могут образовываться сами по себе, непосредственно в результате движения газа, при непрерывных граничных условиях (например, образование ударных волн в звуковой волне; § 95). В противоположность им слабые разрывы не могут возникать сами по себе; их появление всегда связано с какими-либо особенностями в граничных или началь-

ных условиях движения. Особенности эти могут быть, как и сами слабые разрывы, самого различного характера. Так, причиной образования слабого разрыва может являться наличие углов на поверхности обтекаемого тела; на возникающем в этом случае слабом разрыве испытывают скачок первые производные скорости по координатам. К образованию слабого разрыва приводит также и скачок кривизны поверхности тела без угла на ней (причём испытывают разрыв вторые производные скорости по координатам) и т. п. Наконец, всякая особенность в изменении движения со временем влечёт за собой возникновение нестационарного слабого разрыва.

Касательная к поверхности слабого разрыва компонента скорости протекающего через неё газа направлена всегда по направлению от того места (например, угла на поверхности тела), откуда исходят возмущения, вызывающие возникновение этого разрыва; мы будем говорить, что разрыв «исходит» из этого места. Это есть одно из проявлений направленности распространения возмущений вниз по течению в сверхзвуковом потоке.

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к возникновению «ширины» у слабого разрыва, так что слабые разрывы, как и сильные, представляют собой в действительности некоторые переходные слои. Однако в отличие от ударных волн, ширина которых зависит только от их интенсивности и постоянна во времени, ширина слабого разрыва растёт со временем, начиная от момента образования разрыва. Легко определить закон, по которому происходит это возрастание. Для этого снова воспользуемся сделанным в начале этого параграфа замечанием о том, что движение каждого участка поверхности слабого разрыва происходит по тем же уравнениям, как и распространение любого слабого возмущения в газе. При наличии вязкости и теплопроводности возмущение, сконцентрированное первоначально в малом элементе объёма («волновой пакет»), по мере своего перемещения с течением времени расширяется; закон этого расширения был определён в § 77. Поэтому мы можем сразу заключить, что ширина δ слабого разрыва — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{act}, \quad (89,1)$$

где t — время, прошедшее с момента возникновения разрыва, а a — коэффициент при квадрате частоты в коэффициенте поглощения звука. Если мы имеем дело со стационарной картиной, в которой разрыв покоится, то вместо времени t надо говорить о расстоянии l от места, из которого «исходит» разрыв (например, для слабого разрыва, возникающего от угла на поверхности обтекаемого тела, l есть расстояние от вершины этого угла); тогда $\delta \sim \sqrt{al}$. Таким образом, ширина слабого разрыва растёт пропорционально корню из времени с момента его возникновения или корню из расстояния от места, откуда он исходит.

В заключение этого параграфа необходимо сделать замечание, аналогичное замечанию в конце § 79. Там было отмечено, что среди различных возмущений состояния движущегося газа исключительными по своим свойствам являются возмущения энтропии (при постоянном давлении) и ротора скорости. Эти возмущения покоятся относительно газа, а не распространяются со скоростью звука. Поэтому поверхности, на которых испытывают какой-либо «слабый» разрыв непрерывности энтропия и ротор скорости¹⁾, покоятся относительно газа, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с самим газом. Такие разрывы мы будем называть «тангенциальными» слабыми разрывами; они проходят через линии тока и в этом отношении вполне аналогичны «сильным» тангенциальным разрывам.

1) Слабый разрыв ротора скорости означает слабый разрыв касательной к поверхности разрыва скорости; например, могут испытывать скачок производные от скорости, взятые по направлению нормали к поверхности.

ГЛАВА X

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 90. Истечение газа через сопло

Рассмотрим стационарное вытекание газа из большого сосуда через трубку переменного сечения, или, как говорят, через сопло. Мы будем предполагать, что движение газа можно считать в каждом месте трубы однородным по её сечению, а скорость — направленной практически вдоль оси трубы. Для этого труба должна быть не слишком широка, и площадь S её сечения должна достаточно медленно меняться вдоль её длины. Таким образом, все величины, характеризующие течение, будут функциями только от координаты вдоль оси трубы. При этих условиях можно применять полученные в § 80 соотношения, имеющие место вдоль линии тока, непосредственно к изменению величин вдоль длины трубы.

Количество (масса) газа, проходящего в единицу времени через поперечное сечение трубы, или, как говорят, расход газа, равно $Q = \rho v S$; эта величина должна, очевидно, оставаться постоянной вдоль всей трубы:

$$Q = \rho v S = \text{const.} \quad (90,1)$$

Линейные размеры самого сосуда предполагаются очень большими по сравнению с диаметром трубы. Поэтому скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, и соответственно этому все величины с индексом нуль в формулах § 80 будут представлять собой значения соответствующих величин внутри сосуда.

Мы видели, что плотность потока $j = \rho v$ не может превышать некоторого предельного значения j_* . Ясно поэтому, что и возможные значения полного расхода газа Q будут иметь (для данной трубы и при заданном состоянии газа внутри сосуда) верхнюю границу Q_{max} , которую легко определить. Если бы значение j_* плотности потока было достигнуто не в самом узком месте трубы, то в сечениях с меньшим S было бы $j > j_*$, что невозможно. Поэтому значение $j = j_*$ может быть достигнуто только в самом узком месте трубы, площадь

сечения которого обозначим посредством S_{\min} . Таким образом, верхняя граница полного расхода газа есть

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1+\gamma}{2}} S_{\min}. \quad (90,2)$$

Рассмотрим сначала сопло, монотонно суживающееся по направлению к своему внешнему концу, так что минимальная площадь сечения достигается на этом конце (рис. 54). В силу (90,1) плотность потока j монотонно возрастает вдоль трубы. То же самое касается

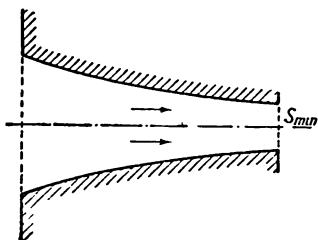


Рис. 54.

скорости газа v , а давление соответственно монотонно падает. Наибольшее возможное значение j будет достигнуто, если скорость v достигает значения c как раз на выходном конце трубы, т. е. если будет $v_1 = c_1 = v_*$ (буквы с индексом 1 обозначают значения величин на выходном конце трубы). Одновременно будет и $p = p_*$.

Проследим за изменением режима вытекания газа при уменьшении давления p_e внешней среды, в которую газ выпускается.

При уменьшении внешнего давления от значения, равного давлению p_0 в сосуде, и вплоть до значения p_* одновременно с ним падает также и давление p_1 в выходном сечении трубы, причём оба эти давления (p_1 и p_e) остаются равными друг другу; другими словами, всё падение давления от p_0 до внешнего происходит внутри сопла. Выходная же скорость v_1 и полный расход газа $Q = j_1 S_{\min}$ монотонно возрастают. При $p_e = p_*$ выходная скорость делается равной местному значению скорости звука, а расход газа — значению Q_{\max} . При дальнейшем понижении внешнего давления выходное давление перестаёт падать и остаётся всё время равным p_* ; падение же давления от p_* до p_e происходит уже вне трубы, в окружающем пространстве. Другими словами, ни при каком внешнем давлении падение давления газа в трубе не может быть большим, чем от p_0 до p_* ; так, для воздуха ($p_* = 0,53 p_0$) максимальное падение давления составляет $0,47 p_0$. Выходная скорость и расход газа тоже остаются (при $p_e < p_*$) постоянными. Таким образом, при истечении через суживающееся сопло газ не может приобрести сверхзвуковой скорости.

Что касается движения газа после выхода из конца трубы, то если рассматривать только движение в непосредственной близости края отверстия, мы будем по существу иметь дело с обтеканием угла, — краем угла является здесь край отверстия; это обтекание будет подробно изучено в § 104.

Невозможность достижения сверхзвуковых скоростей при выпуске газа через суживающееся сопло связана с тем, что скорость, равная местной скорости звука, может достигаться только на самом выходном конце такой трубы. Ясно, что сверхзвуковая скорость смо-

жет быть достигнута с помощью сопла сначала суживающегося, а затем вновь расширяющегося (рис. 55). Такие сопла называются соплами Лаваля.

Максимальная плотность потока j_* , если и достигается, то опять-таки только в наиболее узком сечении, так что и в таком сопле расход газа не может превышать значения $S_{\min} j_*$. В суживающейся части сопла плотность потока возрастает (а давление падает); на кривой рис. 56, изображающей зависимость j от p^1 , это соответствует передвижению от точки c по направлению к b . Если в сечении S_{\min} достигается максимальный поток (точка b на рис. 56), то в расширяющейся части сопла давление будет продолжать падать и начнёт падать также и j соответственно перемещению по кривой рис. 56 от точки b по направлению к a . На выходном конце трубы поток j приобретает тогда вполне определённое значение, равное

$$j_{1 \max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1},$$

а давление — соответствующее этому потоку значение, обозначенное на рис. 56 посредством p'_1 (некоторая точка d на кривой). Если же

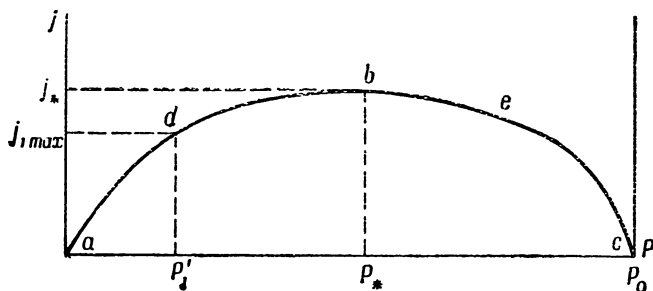


Рис. 56.

в сечении S_{\min} достигается лишь некоторая точка e , то в расширяющейся части сопла давление будет возрастать соответственно обратному перемещению по кривой вниз от точки e . На первый взгляд могло бы показаться, что с ветви cb кривой можно перейти на ветвь ab скачком, минуя точку b , посредством образования ударной

¹⁾ Согласно формулам (80,15)—(80,17) уравнение этой зависимости есть

$$i = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 p_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}.$$

волны; это, однако, невозможно, так как «втекающий» в ударную волну газ не может иметь дозвуковой скорости.

Имея в виду все эти замечания, проследим теперь за изменением режима вытекания по мере постепенного увеличения внешнего давления p_e . При малых давлениях, начиная от нуля и до значения $p_e = p'_1$, устанавливается режим, при котором в сечении S_{\min} достигается давление p_* и скорость $v_* = c_*$. В расширяющейся части сопла скорость продолжает расти, так что осуществляется сверхзвуковое течение газа, а давление продолжает соответственно падать, достигая на выходном конце значения p'_1 вне зависимости от величины p_e . Падение давления от p'_1 до p_e происходит вне сопла, в отходящей от края его отверстия волне разрежения (как это будет описано в § 104).

Когда p_e начинает превышать значение p'_1 , появляется отходящая от края отверстия сопла косая ударная волна, сжимающая газ от выходного давления p'_1 до давления p_e (§ 104). Мы увидим, однако, что стационарная ударная волна может отходить от твёрдой поверхности лишь постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§ 103). Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причём перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв. При некотором значении p_e ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла. Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трёхмерный характер.

§ 91. Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Рассмотрим течение сжимаемого газа по трубе (постоянного сечения) настолько длинной, что нельзя пренебрегать трением газа о стенки, т. е. вязкостью газа. Стенки трубы мы будем предполагать теплоизолированными, так что никакого обмена теплом между газом и внешней средой не происходит.

При скоростях течения порядка или превышающих скорость звука (о которых только и идёт здесь речь) течение газа по трубе является, конечно, турбулентным (если только радиус трубы не слишком мал). Турбулентность движения будет существенна здесь для нас только в одном отношении. Именно, мы видели в § 43, что при турбулентном течении скорость (средняя) практически постоянна почти по всему сечению трубы и быстро падает до нуля лишь на очень близких расстояниях от стенок. На этом основании мы будем считать скорость течения v просто постоянной по всему сечению трубы, определив её так, чтобы произведение $S\rho v$ (S — площадь сечения) было равно полному расходу газа через сечение трубы.

Поскольку полный расход газа $S\rho v$ постоянен вдоль всей длины трубы, а S постоянно по предположению, то должна быть постоянной также и плотность потока газа

$$j = \rho v = \text{const.} \quad (91,1)$$

Далее, поскольку труба теплоизолирована, то вдоль неё должен быть постоянным также и полный поток энергии, переносимой газом через поперечное сечение трубы. Этот поток равен $S\rho v \left(w + \frac{v^2}{2} \right)$, и ввиду (91,1) можно написать:

$$w + \frac{v^2}{2} = w + \frac{j^2 V^2}{2} = \text{const.} \quad (91,2)$$

Что же касается энтропии газа s , то благодаря наличию внутреннего трения она, конечно, отнюдь не остаётся постоянной, а возрастает по мере движения газа вперёд по трубе. Если x есть координата вдоль оси трубы, причём положительное направление оси x совпадает с направлением течения, то можно написать:

$$\frac{ds}{dx} > 0. \quad (91,3)$$

Продифференцируем теперь соотношение (91,2) по x . Помня, что $dw = T ds + V dp$, имеем:

$$T \frac{ds}{dx} + V \frac{dp}{dx} + j^2 V \frac{dV}{dx} = 0.$$

Далее, подставляя сюда

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dx}, \quad (91,4)$$

получаем:

$$\left[T + j^2 V \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \right] \frac{ds}{dx} = - V \left[1 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right] \frac{dp}{dx}. \quad (91,5)$$

Согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Коэффициент теплового расширения газов положителен. Поэтому в силу (91,3) заключаем, что положительно также и всё выражение в левой стороне равенства (91,5). Знак же производной $\frac{dp}{dx}$ совпадёт, следовательно, со знаком выражения

$$- \left[1 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right] = \frac{v^2}{c^2} - 1.$$

Мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} < 0 & \text{ при } v < c, \\ \frac{dp}{dx} > 0 & \text{ при } v > c. \end{aligned} \quad (91,6)$$

Таким образом, при дозвуковом течении давление падает вниз по течению (как и для несжимаемой жидкости). При сверхзвуковом же движении давление возрастает вдоль трубы.

Аналогичным образом можно установить знак производной $\frac{dv}{dx}$. Ввиду того что $j = v/V = \text{const.}$, знак $\frac{dv}{dx}$ совпадает со знаком производной $\frac{dV}{dx}$. Последняя же может быть выражена через положительную производную $\frac{ds}{dx}$ с помощью (91,4), (91,5). В результате мы найдём, что

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} > 0 & \text{ при } v < c, \\ \frac{dv}{dx} < 0 & \text{ при } v > c. \end{aligned} \quad (91,7)$$

т. е. скорость возрастает вниз по течению при дозвуковом и падает при сверхзвуковом движении.

Любые две термодинамические величины текущего вдоль трубы газа являются функциями друг от друга, совершенно не зависящими, в частности, от закона сопротивления трубы. Эти функции зависят как от параметра от значения постоянной j и определяются уравнением $w + \frac{j^2 V^2}{2} = \text{const.}$, получающимся путём исключения скорости из уравнений сохранения массы и энергии газа.

Выясним характер, который имеют кривые зависимости, например, энтропии от давления. Переписав (91,5) в виде

$$\frac{ds}{dp} = V \frac{\frac{v^2}{c^2} - 1}{T + j^2 V \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p},$$

мы видим, что в точке, где $v = c$, энтропия имеет экстремум. Легко видеть, что этот экстремум является максимумом. Действительно, для значения второй производной от s по p имеем в этой точке

$$\left. \frac{d^2 s}{dp^2} \right|_{v=c} = - \frac{j^2 V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s}{T + j^2 V \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p} < 0$$

(что связано с предполагающейся везде положительностью производной $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$).

Таким образом, кривые зависимости s от p имеют вид, изображённый на рис. 57. Справа от максимумов лежит область дозвуковых, а слева — сверхзвуковых скоростей. При увеличении параметра j мы переходим от более высоких к более низко расположенным кривым. Действительно, продифференцировав уравнение (91,2) по j при постоянном p , получим:

$$\frac{ds}{dj} = - \frac{jV^2}{T + j^2V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0.$$

Из полученных результатов можно сделать интересный вывод. Пусть на входе трубы скорость газа меньше скорости звука. По направлению вниз по течению энтропия растёт, а давление падает; это

соответствует передвижению по правой ветви кривой $s = s(p)$ по направлению от B к O (рис. 57). Так может, однако, продолжаться лишь до тех пор, пока энтропия не достигнет своего максимального значения. Дальнейшее передвижение по кривой за точку O (т. е. в область сверхзвуковых скоростей) невозможно, так как оно соответствовало бы уменьшению энтропии газа по мере его течения по трубе. Переход с ветви BO на ветвь OA кривой не может произойти также и посредством возникновения ударной волны, так как скорость «втекающего» в ударную волну газа не может быть дозвуковой.

Таким образом, мы приходим к выводу, что если на входе трубы скорость газа меньше скорости звука, то движение остаётся дозвуковым и на всём дальнейшем её протяжении. Скорость, равная местной скорости звука, если и достигается вообще, то только на выходном конце трубы (при достаточно низком давлении во внешней среде, в которую выпускается газ).

Для того чтобы осуществить сверхзвуковое течение газа по трубе, необходимо впускать газ в трубу уже со сверхзвуковой скоростью. В связи с общими свойствами сверхзвукового движения (невозможностью распространения возмущений вверх по течению) дальнейшее течение газа будет происходить совершенно независимо от условий на выходе из трубы. В частности, будет происходить совершенно определённым образом возрастание энтропии вдоль длины трубы, и максимальное её значение будет достигнуто на определённом расстоянии $x = l_k$ от входа. Если полная длина трубы $l < l_k$, то течение

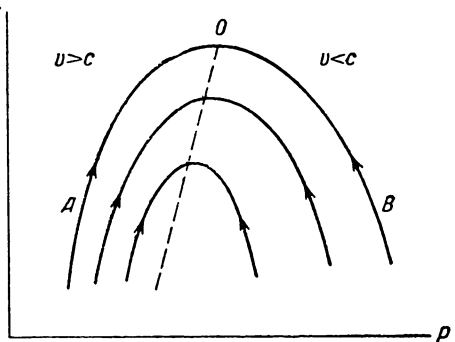


Рис. 57.

будет сверхзвуковым на всём её протяжении (чему соответствует перемещение по ветви AO по направлению от A к O). Если же $l > l_k$, то течение не может быть сверхзвуковым на всём протяжении трубы и в то же время не может перейти плавным образом в дозвуковое, так как передвигаться по ветви OB кривой можно лишь в направлении, указанном стрелкой. Поэтому в этом случае неизбежно возникновение ударной волны, переводящей движение скачком из сверх- в дозвуковое. При этом давление возрастает, мы переходим с ветви AO на ветвь BO , минуя точку O , и на всём остальном протяжении трубы течение будет дозвуковым¹⁾.

§ 92. Одномерное автомодельное движение

Важную категорию одномерных нестационарных движений сжимаемого газа составляют течения, происходящие в условиях, характеризующихся какими-либо параметрами скорости, но не длины. Простейший пример такого движения представляет движение газа в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой, возникающее, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью.

Наряду с параметром скорости такое течение определяется ещё и параметрами, дающими, скажем, давление и плотность газа в начальный момент времени. Однако из всех этих параметров нельзя составить никаких комбинаций с размерностью длины или времени. Отсюда следует, что распределения всех величин могут зависеть от координаты x и времени t только в виде их отношения x/t , имеющего размерность скорости. Другими словами, эти распределения в различные моменты времени будут подобны друг другу, отличаясь лишь своим масштабом вдоль оси x , увеличивающимся пропорционально времени. Можно сказать, что если измерять длины в единицах, растущих пропорционально t , то картина движения вообще не будет меняться. Движение, картина которого при надлежащем изменении масштаба длин остаётся со временем неизменной, называют **автомодельным**.

Уравнение сохранения энтропии для движения, зависящего только от одной координаты x , гласит:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Считая, что все величины зависят только от переменной $\xi = x/t$, и замечая, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi},$$

¹⁾ Более подробное изложение вопроса о течении газа по длинным трубам (в том числе при наличии теплообмена) см. в книгах: «Прикладная газодинамика» под ред. С. А. Христиановича, 1948; Л. А. Булис, Термодинамика газовых потоков, Госэнергоиздат, 1950.

будем иметь $(v_x - \xi)s' = 0$ (означает дифференцирование по ξ). Отсюда $s' = 0$, т. е. $s = \text{const.}$ ¹⁾; таким образом, автомодельное одномерное движение непременно изэнтропично. Аналогично из y - и z -компонент уравнения Эйлера

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

найдем, что v_y и v_z постоянны; не ограничивая общности, мы можем положить их в дальнейшем равными нулю.

Далее, уравнение непрерывности и x -компонента уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (92,1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (92,2)$$

(здесь и ниже пишем просто v вместо v_x). После введения переменной ξ они примут вид

$$(v - \xi)\rho' + \rho v' = 0, \quad (92,3)$$

$$(v - \xi)v' = -\frac{p'}{\rho} = -\frac{c^2}{\rho} \rho'. \quad (92,4)$$

(Имея в виду постоянство энтропии, пишем во втором уравнении $\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \rho' = c^2 \rho'$.)

Эти уравнения имеют, прежде всего, тривиальное решение $v = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ — однородный поток с постоянной скоростью. Для нахождения же нетривиального решения исключаем из уравнений ρ' и v' и получаем равенство $(v - \xi)^2 = c^2$, откуда $\xi = v \pm c$. Мы будем писать это соотношение со знаком плюс:

$$\frac{x}{t} = v + c \quad (92,5)$$

(выбор знака означает, что мы принимаем определенное условие для выбора положительного направления оси x , смысл которого выяснится ниже). Наконец, подставляя $v - \xi = -c$ в (92,3), получим $c\rho' = \rho v'$ или $\rho dv = c d\rho$. Скорость звука является функцией термодинамического состояния газа; выбрав в качестве основных термодинамических величин энтропию s и плотность ρ , мы можем представить скорость звука в виде функции плотности $c(\rho)$ при заданном постоянном

¹⁾ Предположение же $v_x - \xi = 0$ противоречило бы остальным уравнениям движения: из (92,3) получилось бы $v_x = \text{const.}$ в противоречие со сделанным предположением.

значении энтропии. Подразумевая под c такую функцию, пишем на основании полученного равенства

$$v = \int \frac{c \, d\rho}{\rho} = \int \frac{d\rho}{c\rho}. \quad (92,6)$$

Эту формулу можно написать также и в виде

$$v = \int \sqrt{V - d\rho \, dV}, \quad (92,7)$$

где не предпрещается выбор независимого переменного.

Формулы (92,5), (92,6) определяют искомое решение уравнений движения. Если функция $c(\rho)$ известна, то по формуле (92,6) вычисляем скорость v как функцию плотности. Уравнение (92,5) определит тогда в неявном виде зависимость плотности от x/t , после чего определится зависимость также и всех остальных величин от x/t .

Выясним некоторые общие свойства полученного решения. Дифференцируя уравнение (92,5) по x , получаем:

$$t \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d(v+c)}{d\rho} = 1. \quad (92,8)$$

Для производной от $v+c$ имеем с помощью (92,6)

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

Но

$$\rho c = \rho \sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial \rho}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial \rho}{\partial V}}};$$

дифференцируя это выражение, получим:

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho} = c^2 \frac{d(\rho c)}{d\rho} = \frac{\rho^3 c^5}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_s. \quad (92,9)$$

Таким образом:

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{\rho^2 c^5}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_s > 0. \quad (92,10)$$

Из (92,8) следует поэтому, что при $t > 0$ будет $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ ¹⁾. Замечая, что $\frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$, заключаем, что и $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$. Наконец, имеем

¹⁾ Рассматривать времена $t < 0$ для изучаемого автомодельного движения вообще не имеет смысла. Такое движение может возникнуть лишь в результате наличия некоторой особенности в начальных условиях движения в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ и соответственно будет происходить при $t > 0$ (так, в примере с поршнем в момент $t = 0$ скачком меняется скорость поршня; см. также следующий параграф).

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, так что $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$. Таким образом, имеем неравенства:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0. \quad (92,11)$$

Смысл этих неравенств становится более ясным, если следить не за изменением величин вдоль оси x (при заданном t), а за их изменением с течением времени у данного передвигающегося в пространстве элемента газа. Эти изменения определяются полными производными по времени; так, для плотности имеем, воспользовавшись уравнением непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Согласно третьему из неравенств (92,11) эта величина отрицательна; вместе с ней, разумеется, отрицательна и производная $\frac{d\rho}{dt}$:

$$\frac{d\rho}{dt} < 0, \quad \frac{dp}{dt} < 0. \quad (92,12)$$

Аналогичным образом (используя уравнение Эйлера (92,2)) можно убедиться, что $\frac{dv}{dt} < 0$; это, однако, не означает, что абсолютная величина скорости падает со временем, так как v может быть отрицательной.

Неравенства (92,12) показывают, что плотность и давление каждого элемента газа падают по мере его передвижения в пространстве. Другими словами, передвижение газа сопровождается его монотонным разрежением. Поэтому рассматриваемое движение можно назвать нестационарной волной разрежения.

Волна разрежения может простирается лишь на конечное расстояние вдоль оси x ; это видно уже из того, что формула (92,5) привела бы при $x \rightarrow \pm \infty$ к бессмысленному результату — бесконечной скорости.

Применим формулу (92,5) к плоскости, ограничивающей занимаемую волной разрежения область пространства. При этом x/t будет представлять собой скорость движения этой границы относительно выбранной неподвижной системы координат. Скорость же её относительно самого газа есть разность $\frac{x}{t} - v$ и согласно (92,5) равна как раз местной скорости звука. Это значит, что границы волны разрежения представляют собой слабые разрывы. Картина автомодельного движения в различных конкретных случаях складывается, следовательно, из волн разрежения и областей постоянного течения, разделённых между собой поверхностями слабых разрывов ¹⁾.

1) Кроме того, конечно, могут иметься и различные области постоянного течения, разделённые между собой ударными волнами.

Сделанный нами выбор знака в формуле (92,5) соответствует, как теперь видно, тому, что эти слабые разрывы предполагаются движущимися относительно газа в положительном направлении оси x . Неравенства (92,11) связаны именно с таким выбором; неравенства же (92,12), разумеется, от выбора направления оси x вообще не зависят.

Обычно приходится иметь дело с такой постановкой конкретных задач, при которой волна разрежения с одной стороны граничит с областью неподвижного газа. Пусть эта область (I на рис. 58) находится справа от волны разрежения. Область II есть волна разрежения, а III — газ, движущийся с постоянной скоростью; стрелками на рисунке показаны направления движения газа и перемещения ограничивающих волну разрежения слабых разрывов (разрыв a движется

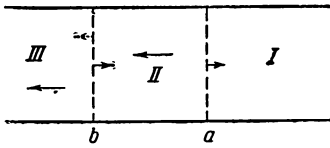


Рис. 58.

непрерывно в сторону покоящегося газа, а разрыв b может двигаться в обоих направлениях в зависимости от величины достигаемой в волне разрежения скорости; ср. задачу 2). Выпишем в явном виде соотношения между различными величинами в такой волне разрежения, предполагая газ идеальным. При адиабатическом процессе $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{const}$. Поскольку скорость звука пропорциональна \sqrt{T} , то можно написать это соотношение в виде

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (92,13)$$

Подставляя это выражение в интеграл (92,6), получаем:

$$v = \frac{2}{\gamma-1} \int dc = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0);$$

постоянная интегрирования выбрана так, что $c = c_0$ при $v = 0$ (индексом нуль отличаем значения величин в точке, в которой газ покоится). Будем выражать все величины через v , причём надо иметь в виду, что при условленном расположении областей скорость газа направлена в отрицательную сторону оси x , так что $v < 0$. Таким образом:

$$c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} |v|, \quad (92,14)$$

чем определяется местная скорость звука через скорость газа. Подставляя в (92,13), находим для плотности

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{|v|}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (92,15)$$

и аналогично для давления

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|v|}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (92,16)$$

Наконец, подставляя (92,14) в формулу (92,5), получаем:

$$|v| = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right), \quad (92,17)$$

чем определяется зависимость v от x и t .

Величина c не может быть, по самому своему существу, отрицательной. Поэтому из формулы (92,14) можно сделать существенное заключение, что скорость должна удовлетворять неравенству

$$|v| \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}; \quad (92,18)$$

при достижении скоростью этого предельного значения плотность газа (а также p и c) обращается в нуль. Таким образом, первоначально покоившийся газ при нестационарном расширении в волне разрежения может ускориться лишь до скорости, не превышающей $\frac{2c_0}{\gamma - 1}$.

Мы уже упомянули в начале параграфа простой пример автомодельного движения, возникающего в цилиндрической трубе, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. Если поршень «выдвигается» из трубы, он создаёт за собой разрежение, и возникает описанная выше волна разрежения. Если же поршень «вдвигается» в трубу, он производит перед собой сжатие газа, а переход к более низкому первоначальному давлению может произойти лишь в ударной волне, которая и возникает перед поршнем, распространяясь вперёд по трубе (см. задачи к этому параграфу)¹⁾.

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой. В начальный момент времени поршень начинает вдвигаться в трубу с постоянной скоростью U . Определить возникающее движение газа (считая газ идеальным).

1) Упомянем об аналогичной трёхмерной автомодельной задаче: центрально-симметрическом движении газа, создаваемом равномерно расширяющейся сферой. Перед сферой возникает сферическая же ударная волна, расширяющаяся с постоянной скоростью. В отличие от одномерного случая скорость движения газа между сферой и волной не постоянна; уравнение, определяющее её как функцию от отношения r/t (а вместе с тем и скорость распространения ударной волны), не может быть проинтегрировано в аналитическом виде.

Эта задача впервые рассматривалась Л. И. Седовым (1945). См. по этому поводу его книгу «Методы подобия и размерности в механике», Гостехиздат, 1951.

Решение. Перед поршнем возникает ударная волна, передвигающаяся вперёд по трубе. В начальный момент времени положения этой волны и поршня совпадают, а в дальнейшем волна «обгоняет» поршень и возникает область газа между ней и поршнем (область 2). В области впереди от ударной волны (область 1) давление газа равно его первоначальному значению p_1 , а скорость (относительно трубы) равна нулю. В области же 2 газ движется с постоянной скоростью, равной скорости поршня U (рис. 59). Разность скоростей газов 1 и 2 равна, следовательно, тому же U и согласно формулам (82,7) и (85,1) можно написать:

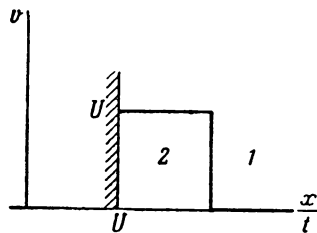


Рис. 59.

$$U = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = \\ = (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}$$

Отсюда получаем для давления p_2 газа между поршнем и ударной волной

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16c_1^2}}$$

Зная p_2 , можно вычислить согласно формулам (85,4) скорость ударной волны относительно газов впереди и позади неё. Поскольку газ 1 покоится, то скорость волны относительно него есть скорость её распространения по трубе. Если координата x вдоль длины трубы отсчитывается от начального места нахождения поршня (причём газ находится со стороны $x > 0$), то для положения ударной волны в момент t получим:

$$x = t \left\{ \frac{\gamma + 1}{4} U + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} U^2 + c_1^2} \right\}$$

(положение же поршня есть $x = Ut$).

2. То же, если поршень выдвигается из трубы со скоростью U .

Решение. К поршню примыкает область газа (1 на рис. 60, а), движущегося в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью $-U$, равной скорости поршня. Далее следует волна разрежения 2, в которой газ движется в отрицательном направлении оси x со скоростью, меняющейся от значения $-U$ до нуля по линейному закону (92,17). Давление же меняется по закону (92,16) от значения

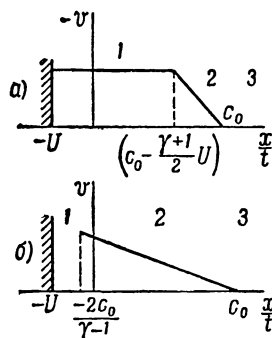


Рис. 60.

$$p_1 = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

в газе 1 до p_0 в неподвижном газе 3. Граница области 2 с областью 1 определяется условием $v = -U$; согласно (92,17) получим:

$$x = \left(c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U \right) t = (c - U) t$$

(c — скорость звука в газе 1). На границе же с областью 3 $v = 0$, откуда $x = c_0 t$. Обе эти границы представляют собой слабые разрывы, из которых второй всегда распространяется вправо (т. е. в сторону от поршня); первый же (граница 1—2) может распространяться как вправо (как это изображено на рис. 60, а), так и влево — если скорость поршня $U > \frac{2c_0}{\gamma + 1}$.

Описанная картина может иметь место только при условии $U < \frac{2c_0}{\gamma - 1}$.

Если же $U > \frac{2c_0}{\gamma - 1}$, то перед поршнем образуется область вакуума (газ как бы «не успевает» двигаться за поршнем), простирающаяся от поршня до точки с координатой $x = -\frac{2c_0}{\gamma - 1} t$ (1 на рис. 60, б). В этой точке $v = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}$; за ней следует область 2, в которой скорость падает до нуля (в точке $x = c_0 t$), а дальше область 3 неподвижного газа.

3. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой заслонкой с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ заслонка открывается, и газ выпускается в наружную среду, давление p_e которой меньше первоначального давления p_0 в трубе. Определить возникающее движение газа.

Решение. Пусть $-v_e$ есть скорость газа, соответствующая по формуле (92,16) внешнему давлению p_e ; при $x = 0$, $t > 0$ должно быть $v = -v_e$. Если $v_e < \frac{2c_0}{\gamma + 1}$, то полу-

чается картина распределения скорости, изображённая на рис. 61, а. При $v_e = \frac{2c_0}{\gamma + 1}$ (что соответствует скорости вытекания, равной местной скорости звука на выходе трубы, — в этом легко убедиться, положив $v = c$ в формулу (92,14)) область постоянной скорости исчезает и получается картина, изображённая на рис. 61, б. Величина $\frac{2c_0}{\gamma + 1}$ представляет собой наибольшую возможную скорость вытекания газа из трубы в рассматриваемых условиях. Если внешнее давление

$$p_e < p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (1)$$

то соответствующая ему скорость v_e сделалась бы больше, чем $\frac{2c_0}{\gamma + 1}$. В действительности при этом давление на выходе трубы будет продолжать оставаться равным предельному значению (1), а скорость вытекания — равной $\frac{2c_0}{\gamma + 1}$; остальное падение давления (до p_e) происходит во внешней среде.

4. Бесконечная труба перегорожена поршнем, по одну сторону от которого ($x < 0$) в начальный момент времени находится газ под давлением p_0 , а по другую сторону ($x > 0$) — вакуум. Определить движение поршня под влиянием расширяющегося газа.

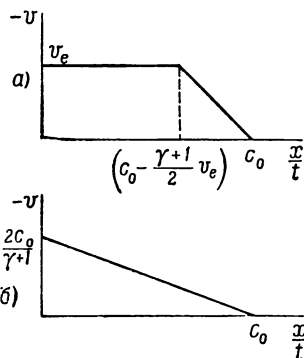


Рис. 61.

Решение. В газе возникает волна разрежения, одна из границ которой перемещается вместе с поршнем вправо, а другая — влево. Уравнение движения поршня

$$m \frac{dU}{dt} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

(U — скорость поршня, m — масса, приходящаяся на единицу его площади). Интегрируя, получим:

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(\gamma + 1)p_0}{2mc_0} t \right]^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right\}.$$

5. Определить движение в изотермической автомодельной волне разрежения.

Решение. Изотермическая скорость звука

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

и при постоянной температуре $c_T = \text{const.} = c_{T_0}$. Согласно (92,5) и (92,6) находим поэтому

$$v = c_{T_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = c_{T_0} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{x}{t} - c_{T_0}.$$

§ 93. Разрывы в начальных условиях

Одной из возможных причин возникновения поверхностей разрыва в газе могут являться разрывы в начальных условиях движения. Начальные условия (т. е. начальные распределения скорости, давления и т. п.) могут быть заданы, вообще говоря, произвольным образом. В частности, эти начальные распределения отнюдь не должны быть непременно везде непрерывными функциями и могут испытывать разрывы на некоторых поверхностях. Так, например, если в некоторый момент времени привести в соприкосновение две массы газа, сжатых до различных давлений, то поверхность их соприкосновения будет поверхностью разрыва в начальном распределении давления.

Существенным является то обстоятельство, что скачки различных величин в разрывах в начальных условиях (или, как мы будем говорить, в начальных разрывах) могут быть совершенно произвольными; между ними не должно существовать никаких соотношений. Между тем, мы знаем, что на поверхностях разрывов, которые могут существовать в газе в качестве устойчивых образований, должны соблюдаться определённые условия; так, скачки плотности и давления в ударной волне связаны друг с другом ударной адиабатой. Поэтому ясно, что если в начальном разрыве эти необходимые условия не соблюдаются, то в дальнейшем он во всяком случае не сможет продолжать существовать как таковой. Вместо этого начальный разрыв, вообще говоря, распадается на несколько разрывов, каждый из которых является каким-нибудь из возможных типов разрывов (ударная

волна, тангенциальный разрыв, слабый разрыв); с течением времени эти возникшие разрывы будут отходить друг от друга. Общее исследование вопроса о поведении произвольного разрыва было дано *Н. Е. Кочиным* (1926).

В течение малого промежутка времени, начиная от начального момента $t = 0$, разрывы, на которые распадается начальный разрыв, ещё не успеют разойтись на большие расстояния друг от друга, и потому вся исследуемая картина движения будет ограничена сравнительно узким объёмом, прилегающим к поверхности начального разрыва. Как обычно, достаточно рассматривать в общем случае отдельные участки поверхности начального разрыва, каждый из которых можно считать плоским. Поэтому можно ограничиться рассмотрением плоской поверхности разрыва. Мы выберем эту плоскость в качестве плоскости y, z . Из соображений симметрии очевидно, что разрывы, на которые распадется начальный разрыв при $t > 0$, будут тоже плоскими и перпендикулярными к оси x . Вся картина движения будет зависеть только от одной координаты x (и времени), так что задача сводится к одномерной. Благодаря отсутствию каких бы то ни было характеристических параметров длины и времени, задача автомодельна, и мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе результатами.

Разрывы, возникающие при распаде начального разрыва, должны, очевидно, двигаться от места их образования, т. е. от места нахождения начального разрыва. Легко видеть, что при этом в каждую из двух сторон (в положительном и отрицательном направлениях оси x) может двигаться либо одна ударная волна, либо одна пара слабых разрывов, ограничивающих волну разрежения. Действительно, если бы, скажем, в положительном направлении оси x распространялись две образовавшиеся в одном и том же месте в момент $t = 0$ ударные волны, то передняя из них должна была бы двигаться со скоростью большей, чем скорость задней волны. Между тем согласно общим свойствам ударных волн первая должна двигаться относительно остающегося за ней газа со скоростью, меньшей скорости звука c в этом газе, а вторая должна двигаться относительно того же газа со скоростью, превышающей ту же величину c (в области между двумя ударными волнами $c = \text{const.}$), т. е. должна догонять первую. По такой же причине не могут следовать друг за другом в одну и ту же сторону ударная волна и волна разрежения (достаточно заметить, что слабые разрывы движутся относительно газов впереди и позади них со звуковой скоростью). Наконец, две одновременно возникшие волны разрежения не могут разойтись, так как скорость заднего фронта первой равна скорости заднего фронта второй.

Наряду с ударными волнами и волнами разрежения при распаде начального разрыва должен, вообще говоря, возникнуть так же и тангенциальный разрыв. Такой разрыв во всяком случае необходим, если в начальном разрыве испытывали скачок поперечные компоненты

скорости v_y, v_z . Поскольку эти компоненты скорости не меняются ни в ударной волне, ни в волне разрежения, то их скачок будет всегда происходить на тангенциальном разрыве, остающемся на том же месте, где находился начальный разрыв; с каждой стороны от этого разрыва v_y, v_z будут оставаться постоянными (в действительности, конечно, благодаря неустойчивости тангенциального разрыва со скачком скорости он, как всегда, с течением времени размоется в турбулентную область).

Тангенциальный разрыв, однако, должен возникнуть даже и в том случае, когда v_y, v_z не имеют скачка в начальном разрыве (не ограничивая общности, можно считать в этом случае, что постоянные v_y и v_z равны нулю, что и будет подразумеваться ниже). Это показывают следующие соображения. Возникающие в результате распада разрывы должны дать возможность перейти от заданного состояния 1 газа с одной стороны начального разрыва к заданному состоянию 2 с другой стороны. Состояние газа определяется тремя независимыми величинами, например, p, ρ и $v_x = v$. Поэтому необходимо иметь в распоряжении три произвольных параметра для того, чтобы посредством некоторого набора разрывов перейти, скажем, от состояния 1 к произвольно заданному состоянию 2. Но мы знаем, что ударная волна (перпендикулярная к направлению потока), распространяющаяся по газу, термодинамическое состояние которого задано, полностью определяется одним параметром (§ 82). То же самое относится к волне разрежения (как видно из формул (92,14) — (92,16), при заданном состоянии входящего в волну разрежения газа состояние выходящего газа полностью определится заданием одной из величин в нём). С другой стороны, мы видели, что в результате распада в каждую сторону может пойти не более одной волны — ударной или разрежения. Таким образом, мы будем иметь в нашем распоряжении всего два параметра, что недостаточно.

Возникающий на месте начального разрыва тангенциальный разрыв как раз и представляет этот недостающий третий параметр. На этом разрыве остаётся непрерывным давление; плотность же (а с ней и температура, энтропия) испытывает скачок. Тангенциальный разрыв неподвижен относительно газа по обеим его сторонам, и потому к нему не относятся использованные выше соображения о взаимном «обгоне» двух распространяющихся в одном направлении волн.

Газы, находящиеся по обе стороны тангенциального разрыва, не перемешиваются друг с другом, так как движения газа через тангенциальный разрыв нет; во всех перечисленных ниже вариантах эти газы могут даже быть газами различных веществ.

На рис. 62 схематически изображены все возможные типы распада начального разрыва. Сплошной линией изображён ход изменения давления вдоль оси x (изменение плотности изобразилось бы линией такого же характера, с той лишь разницей, что имелся бы скачок также и на тангенциальном разрыве). Вертикальные отрезки изобра-

жают образовавшиеся разрывы, а стрелками указаны направления их распространения и направления движения газа. Система координат выбрана везде та, в которой тангенциальный разрыв покоится; вместе с ним покоится также и газ в прилегающих к нему областях 3, 3'. Давления, плотности и скорости газов в крайних слева и справа областях 1 и 2 — это те значения соответствующих величин, которые они имеют в момент времени $t=0$ на обеих сторонах начального разрыва.

В первом случае (который мы условно записываем в виде $H \rightarrow Y \leftarrow TY \rightarrow$, рис. 62, а) из начального разрыва H возникают две ударные волны Y , распространяющиеся в противоположные стороны, и расположенный между ними тангенциальный разрыв T . Этот случай осуществляется при столкновении двух масс газа, движущихся с большой скоростью навстречу друг другу.

В случае $H \rightarrow Y \leftarrow TP \rightarrow$ (рис. 62, б) по одну сторону от тангенциального разрыва распространяется ударная волна, а по другую — волна разрежения P . Этот случай осуществляется, например, если в начальный момент времени приводятся в соприкосновение две неподвижные друг относительно друга массы газа ($v_2 - v_1 = 0$), сжатые до различных давлений. Действительно, из всех четырёх случаев, изображённых на рис. 62, только во втором из них газы 1 и 2 движутся в одинаковом направлении и потому может быть $v_1 = v_2$.

Далее, в третьем случае ($H \rightarrow P \leftarrow TP \rightarrow$) в обе стороны от тангенциального разрыва распространяются по волне разрежения. Если газы 1 и 2 разлетаются друг от друга с достаточно большой скоростью $v_2 - v_1$, то в волнах разрежения давление может достичь при своём падении значения нуля. Тогда возникает картина, изображённая на рис. 62, г; между областями 4 и 4' образуется область вакуума 3.

Выведем аналитические условия, определяющие характер распада начального разрыва в зависимости от его параметров. Будем считать во всех случаях, что $p_2 > p_1$, а положительное направление оси x

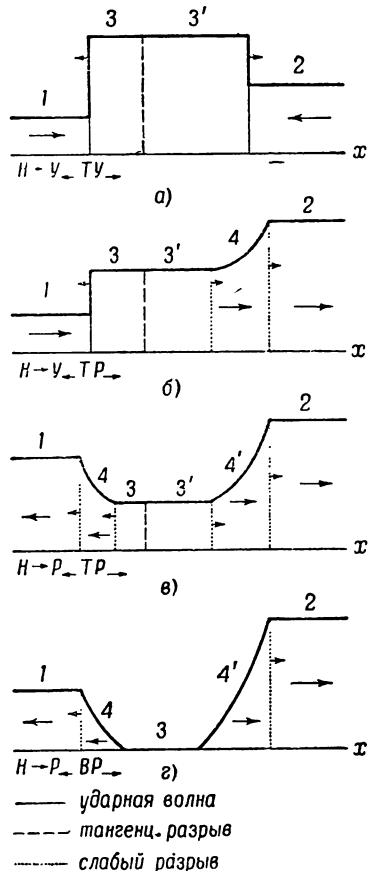


Рис. 62.

выбираем везде в направлении от области 1 к области 2 (в соответствии с рис. 62).

Имея в виду, что газы по обеим сторонам начального разрыва могут быть газами различных веществ, будем различать их, называя соответственно газами 1 и 2.

1. Распад $H \rightarrow Y \leftarrow TV \rightarrow$. Если $p_3 = p'_3$, $v_3 = v'_3$, V_3 , V'_3 — давление, скорость и удельные объёмы в образовавшихся после распада областях 3 и 3', то имеем $p_3 > p_2 > p_1$, а объёмы V_3 и V'_3 определяются как абсциссы точек с ординатами p_3 на ударных адиабатах, проведённых соответственно через точки p_1, V_1 и p_2, V_2 в качестве исходных. Поскольку газы в областях 3 и 3' в выбранной системе координат неподвижны, то согласно формуле (82,7) можно написать для скоростей v_1 и v_2 , направленных соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x :

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)}, \quad v_2 = -\sqrt{(p_3 - p_2)(V_2 - V'_3)}.$$

Наименьшее значение, которое может иметь давление p_3 при заданных p_1 и p_2 так, чтобы не противоречить исходному предположению ($p_3 > p_2 > p_1$), есть $p_3 = p_2$. Имея также в виду, что разность $v_1 - v_2$ есть монотонно возрастающая функция p_3 , находим искомое неравенство

$$v_1 - v_2 > \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}, \quad (93,1)$$

где посредством V' обозначен объём, являющийся абсциссой точки с ординатой p_2 на ударной адиабате газа 1, проведённой через точку p_1, V_1 в качестве начальной. Вычислив V' по формуле (85,1) (написав в ней V' вместо V_2), получим для идеального газа условие (93,1) в виде

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}. \quad (93,2)$$

Отметим, что условия (93,1) — (93,2), устанавливающие границу возможных значений разности скоростей $v_1 - v_2$, не зависят, очевидно, от выбора системы координат.

2. Распад $H \rightarrow Y \leftarrow TP \rightarrow$. Здесь $p_1 < p_3 = p'_3 < p_2$. Для скорости газа в области 1 имеем опять

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)},$$

а полное изменение скорости в волне разрежения 4 равно согласно (92,7)

$$v_2 = \int_{p_3}^{p_2} \sqrt{-dp dV}.$$

При заданных p_1 и p_2 значения p_3 могут лежать в пределах от p_1 до p_2 . Заменяя p_3 в разности $v_2 - v_1$ один раз на p_1 , а другой —

на p_2 , получим условие:

$$-\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp dV} < v_1 - v_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V)}. \quad (93,3)$$

Здесь V' имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае; выражение, определяющее верхний предел разности $v_1 - v_2$, должно вычисляться для газа 1, а нижний предел — для газа 2. Для идеального газа получим:

$$-\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \right] < v_1 - v_2 < (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}, \quad (93,4)$$

где $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$ — скорость звука в газе 2 в состоянии p_2, V_2 .

3. Распад $H \rightarrow P \leftarrow TP \rightarrow$. Здесь $p_2 > p_1 > p_3 = p'_3 > 0$. Тем же путём найдём следующее условие осуществления этого случая:

$$-\int_0^{p_1} \sqrt{-dp dV} - \int_0^{p_2} \sqrt{-dp dV} < v_1 - v_2 < -\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp dV}. \quad (93,5)$$

Интеграл в правой стороне неравенства вычисляется для газа 2, а в левой стороне первый интеграл — для газа 1, а второй — для газа 2. Для идеального газа получим:

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} < v_1 - v_2 < -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \right], \quad (93,6)$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma_1 p_1 V_1}$, $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$. Если

$$v_1 - v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}, \quad (93,7)$$

то между волнами разрежения возникает область вакуума (распад $H \rightarrow P \leftarrow BP \rightarrow$).

К задаче о разрыве в начальных условиях сводятся, в частности, задачи о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов. В момент столкновения обе плоскости совпадают и представляют собой некоторый «начальный разрыв», в дальнейшем распадающийся одним из описанных выше способов. Так, в результате столкновения двух ударных волн снова возникают две ударные же волны, расходящиеся от остающегося между ними тангенциального разрыва:

$$V \rightarrow V \leftarrow \rightarrow V \leftarrow TV \rightarrow.$$

Когда одна ударная волна догоняет другую, возможны два случая:

$$V \rightarrow V \rightarrow \rightarrow V \leftarrow TV \rightarrow, \quad V \rightarrow V \rightarrow \rightarrow P \leftarrow TV \rightarrow.$$

В обоих случаях вперёд продолжает распространяться ударная же волна.

К этой же категории относится задача об отражении и прохождении ударной волны через тангенциальный разрыв (границу двух сред). Здесь возможны два случая:

$$V \rightarrow T \rightarrow \rightarrow V \leftarrow TV \rightarrow, \quad V \rightarrow T \rightarrow \rightarrow P \leftarrow TV \rightarrow.$$

Прошедшая во вторую среду волна всегда является ударной (см. также задачи к этому параграфу.¹⁾

ЗАДАЧИ

1. Плоская ударная волна отражается от плоской поверхности абсолютно твёрдого тела. Определить давление газа позади отражённой волны (С. В. Измайлов, 1935).

Решение. В результате падения ударной волны на твёрдую стенку возникает отражённая ударная волна, распространяющаяся от стенки. Будем отмечать индексами 1, 2, 3 соответственно невозмущённый газ перед падающей ударной волной, газ позади падающей волны (он же является газом впереди отражённой волны) и газ позади отражённой волны (рис. 63; стрелками показано направление движения ударных волн и самого газа). Газ в граничащих с твёрдой стенкой областях 1 и 3 покоится (относительно неподвижной стенки). Поэтому относительная скорость газов по обе стороны разрыва друг относительно друга в обоих случаях — в падающей и отражённой ударных волнах — одинакова (равна одной и той же величине — скорости газа 2). Воспользовавшись формулой (82,7) для относительной скорости, получим поэтому

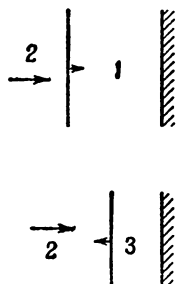


Рис. 63.

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3).$$

Уравнение же ударной адиабаты (85,1) для каждой из ударных волн даёт

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_3}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3}.$$

Из этих трёх уравнений можно исключить удельные объёмы, в результате чего получается:

$$(p_3 - p_2)^2 [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] = (p_2 - p_1)^2 [(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2].$$

Это есть квадратное уравнение для p_3 , имеющее тривиальный корень $p_3 = p_1$; после сокращения на $(p_3 - p_1)$ получим искомую формулу

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}.$$

¹⁾ Для полноты упомянем, что при столкновении ударной волны со слабым разрывом (эта задача не относится к рассматриваемому здесь автомодельному типу) ударная волна продолжает распространяться в прежнем направлении, а в пространстве позади неё остаётся один слабый разрыв первоначального типа и один «тангенциальный» (см. конец § 89) слабый разрыв.

определяющую p_3 по p_1 и p_2 . В предельном случае большой интенсивности падающей волны

$$p_3 = \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} p_2,$$

а в предельном случае малой интенсивности:

$$p_3 - p_2 = p_2 - p_1,$$

что соответствует звуковому приближению.

2. Найти условие, определяющее результат отражения ударной волны от плоской границы между двумя газами.

Решение. Пусть $p_1 = p_2'$, V_1 , V_2' — давления и удельные объёмы обеих сред до падения ударной волны (распространяющейся в газе 2) на их поверхность раздела, а p_2 , V_2 — давление и удельный объём позади ударной волны. Условие того, чтобы отражённая волна была ударной, определяется неравенством (93,2), в котором надо в данном случае положить $v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_2')(V_2' - V_2)}$. Выражая все величины через отношение давлений p_2/p_1 и начальные удельные объёмы V_1 и V_2' , получим следующее условие:

$$\frac{V_1}{(\gamma_1 + 1)\frac{p_2}{p_1} + (\gamma_1 - 1)} < \frac{V_2'}{(\gamma_2 + 1)\frac{p_2}{p_1} + (\gamma_2 - 1)}.$$

§ 94. Одномерные бегущие волны

При изучении звуковых волн в § 63 амплитуда колебаний в волне предполагалась малой. В результате уравнения движения оказывались линейными и могли быть легко решены. Решением этих уравнений является, в частности, функция от $x \pm ct$ (плоская волна), что соответствует «бегущей волне» с профилем, перемещающимся со скоростью c без изменения своей формы (под профилем волны понимают распределение различных величин — плотности, скорости и т. п. — вдоль направления её распространения). Поскольку скорость v , плотность ρ и давление p (как и другие величины) в такой волне являются функциями от одной и той же комбинации $x \pm ct$, то они могут быть выражены как функции друг от друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координаты, ни времени (например, $p = p(\rho)$, $v = v(\rho)$ и т. д.).

В случае произвольной, не малой, амплитуды волны эти простые соотношения уже не имеют места. Оказывается, однако, возможным найти общее решение точных уравнений движения, представляющее собой бегущую плоскую волну и являющееся обобщением решения $f(x \pm ct)$ приближённых уравнений, применимых в случае малых амплитуд. Для отыскания этого решения будем исходить из требования, чтобы в общем случае волны с произвольной амплитудой плотность и скорость могли быть выражены в виде функции друг от друга.

При отсутствии ударных волн движение адиабатично. Если в некоторый начальный момент времени газ был однороден (так что, в частности,

было $s = \text{const.}$), то и в дальнейшем будет всё время $s = \text{const.}$, что и предполагается ниже.

В плоской звуковой волне, распространяющейся вдоль оси x , все величины зависят только от x и t , а для скорости имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0,$$

а уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Воспользовавшись тем, что v может быть представлено в виде функции только от ρ , напишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (94,1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (94,2)$$

Замечая, что

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{\frac{\partial \rho}{\partial x}} = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho,$$

получаем из (94,1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{d\rho},$$

а из (94,2) аналогично

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv}. \quad (94,3)$$

Но поскольку значение ρ определяет однозначным образом значение v , то безразлично, берётся ли производная при постоянном ρ или v , так что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v,$$

откуда

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv}.$$

Написав в этом уравнении $\frac{dp}{dv} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dv} = c^2 \frac{d\rho}{dv}$, получим $\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho}$,

откуда

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}. \quad (94,4)$$

Этим определяется общая связь между скоростью и плотностью или давлением в волне ¹⁾.

Далее, комбинируя (94,3) с (94,4), пишем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv} = v \pm c(v),$$

или, интегрируя,

$$x = t[v \pm c(v)] + f(v), \quad (94,5)$$

где $f(v)$ — произвольная функция скорости, а функция $c(v)$ определяется равенством (94,4).

Формулы (94,4) — (94,5) представляют собой искомое общее решение (Б. Риман, 1860). Они определяют неявным образом скорость (а с нею и остальные величины) как функцию от x и t , т. е. профиль волны в каждый момент времени. Для каждого определённого значения v имеем $x = at + b$, т. е. точка, в которой скорость имеет определённое значение, передвигается в пространстве с постоянной скоростью; в этом смысле найденное решение представляет собой бегущую волну. Два знака в (94,5) соответствуют волнам, распространяющимся (относительно газа) в положительном и отрицательном направлениях оси x .

Движение, описываемое решением (94,4) — (94,5), часто называют простой волной; ниже мы будем пользоваться этим термином. Отметим, что изученное в § 92 автомодельное движение является частным случаем простой волны, соответствующим равной нулю функции $f(v)$ в (94,5).

Выпишем в явном виде соотношения для простой волны в идеальном газе; для определённости будем считать, что в волне есть точка, в которой $v = 0$, как это обычно бывает в различных конкретных задачах. Поскольку формула (94,4) совпадает с формулой (92,6), то аналогично формулам (92,14) — (92,16) имеем:

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} v, \quad (94,6)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \quad p = p_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (94,7)$$

Подставляя (94,6) в (94,5), получим:

$$x = t\left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) + f(v). \quad (94,8)$$

¹⁾ В волне с малой амплитудой имеем $\rho = \rho_0 + \rho'$, и (94,4) даёт в первом приближении $v = c_0 \rho' / \rho_0$ (где $c_0 = c(\rho_0)$), т. е. обычную формулу (63,12).

Иногда бывает удобным писать это решение в виде

$$v = F \left[x - \left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) t \right], \quad (94,9)$$

где F — опять произвольная функция.

Из формул (94,6), (94,7) снова (как и в § 92) видно, что скорость, направленная в сторону, противоположную направлению распространения волны (относительно самого газа), ограничена по своей абсолютной величине; для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , имеем:

$$-v \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}. \quad (94,10)$$

Бегущая волна, описываемая формулами (94,4) и (94,5), существенно отличается от волны, получающейся в предельном случае малых амплитуд. Скорость, с которой перемещаются точки профиля волны, равна

$$u = v \pm c; \quad (94,11)$$

её можно рассматривать наглядно как результат наложения распространения возмущения относительно газа со звуковой скоростью и перемещения самого газа со скоростью v . Скорость u является теперь функцией плотности и потому различна для разных точек профиля. Таким образом, в общем случае плоской волны произвольной амплитуды не существует определённой постоянной «скорости волны». Благодаря различию в скоростях точек профиля волны последний не остаётся неизменным и меняет со временем свою форму.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x ; для неё $u = v + c$. В § 92 была вычислена производная от $v + c$ по плотности (см. (92,10)). Мы видели, что

$$\frac{du}{d\rho} > 0.$$

Таким образом, скорость распространения заданной точки профиля волны тем больше, чем больше плотность. Если обозначить посредством c_0 скорость звука для плотности, равной равновесной плотности ρ_0 , то в местах, где имеется сжатие, $\rho > \rho_0$ и $c > c_0$; в точках разрежения, напротив, $\rho < \rho_0$ и $c < c_0$.

Неодинаковость скорости перемещения точек профиля приводит к изменению его формы со временем; точки сжатия выдвигаются вперёд, а точки разрежения оказываются отстающими (рис. 64, б). В конце концов профиль волны может настолько выгнуться, что кривая $\rho(x)$ (при заданном t) оказывается неоднозначной, — некоторым x соответствует по три различных значения ρ (рис. 64, в, пунктирная линия). Физически, разумеется, такое положение невозможно. В действительности, в местах неоднозначности ρ возникают разрывы,

в результате чего ρ оказывается везде (за исключением самих точек разрыва) однозначной функцией. Профиль волны приобретает при этом вид, изображённый на рис. 64, в сплошной линией. Поверхности разрыва возникают, таким образом, на протяжении каждой длины волны.

После возникновения разрывов волна перестаёт быть простой. Наглядная причина этого заключается в том, что при наличии поверхностей разрыва происходит «отражение» волны от этих поверхностей, в результате чего волна перестаёт быть «бегущей» в одном направлении, а потому и лежащее в основе всего вывода предположение об однозначной зависимости между различными величинами не имеет, вообще говоря, места.

Наличие разрывов (ударных волн) приводит, как было указано в § 82, к диссипации энергии. Поэтому возникновение разрывов приводит к сильному затуханию волны. Наличие такого затухания видно уже непосредственно из рис. 64. При возникновении разрыва как бы «отсекается» наиболее высокая часть профиля волны. С течением времени, по мере продолжающегося выгибания профиля, его высота всё более уменьшается. Происходит «сглаживание» профиля с уменьшением его амплитуды, что и означает постепенное затухание волны.

Из сказанного выше ясно, что образование в конце концов разрывов должно произойти во всякой простой волне, в которой имеются участки, на которых плотность убывает в направлении распространения волны. Единственный случай, когда разрывы вообще не образуются, — волна, в которой плотность монотонно возрастает в направлении распространения на всём её протяжении (такова, например, волна, возникающая при выдвигании поршня из заполненной газом бесконечной трубы; см. задачи к этому параграфу).

Хотя после образования разрыва волна и перестаёт быть простой, но самые момент и место образования разрыва могут быть определены аналитически. Мы видели, что с математической точки зрения возникновение разрывов связано с тем, что в простой волне величины ρ , ρ , σ как функции x (при заданном t) становятся многозначными

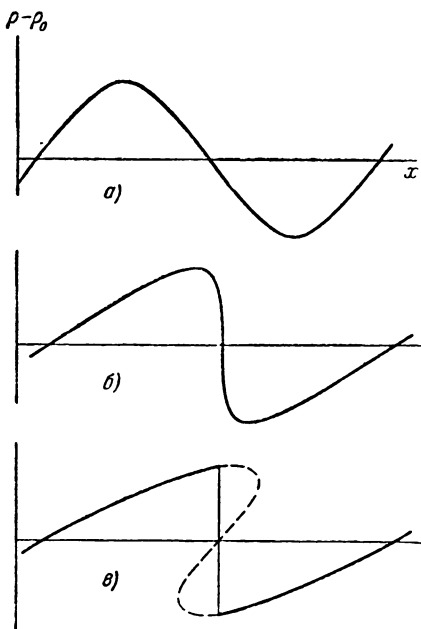


Рис. 64.

для моментов времени, превышающих некоторое определённое значение t_0 , между тем как при $t < t_0$ эти функции однозначны. Момент t_0 есть момент образования разрыва. Уже из чисто геометрических соображений ясно, что в самый момент t_0 кривая зависимости, скажем, v от x , должна сделаться в некоторой точке $x = x_0$ вертикальной — как раз в той точке, вблизи которой функция стала бы затем многозначной. Аналитически это означает обращение производной $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t$ в бесконечность или же, наоборот, производной $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t$ в нуль. Ясно также, что в момент t_0 кривая $v = v(x)$ должна лежать по обе стороны от вертикальной касательной, в противном случае зависимость $v(x)$ была бы многозначной уже и в этот момент времени. Другими словами, точка $x = x_0$ должна быть не точкой экстремума функции $x(v)$, а точкой перегиба, и следовательно, должна обратиться в нуль также и вторая производная $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t$. Таким образом, место и момент образования ударной волны определяются совместным решением двух уравнений:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t = 0. \quad (94,12)$$

Для идеального газа эти уравнения гласят:

$$t = -\frac{2}{\gamma + 1} f'(v), \quad f''(v) = 0, \quad (94,13)$$

где $f(v)$ — функция, входящая в общее решение (94,8).

Эти условия должны быть видоизменены, если простая волна граничит с неподвижным газом и ударная волна возникает как раз на этой границе. И здесь в момент возникновения разрыва кривая $v = v(x)$ должна стать вертикальной, т. е. производная $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t$ должна обратиться в нуль. Обращение же в нуль второй производной не обязательно; вторым условием здесь является просто равенство нулю скорости на границе с неподвижным газом, так что имеем условие

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t \Big|_{v=0} = 0.$$

Из этого условия время и место образования разрыва могут быть найдены в явном виде. Дифференцируя выражение (94,5), получим:

$$t = -\frac{f'(0)}{\alpha_0}, \quad x = \pm c_0 t + f(0), \quad (94,14)$$

где α_0 — значение при $v=0$ величины α , определяемой формулой (95,2). Для идеального газа

$$t = -\frac{2f'(0)}{\gamma + 1}. \quad (94,15)$$

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой поршнем с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться равноускоренно со скоростью $U = \pm at$. Определить возникающее движение газа (считая газ идеальным).

Решение. Если поршень выдвигается из трубы ($U = -at$), то возникает простая волна разрежения, передний фронт которой распространяется вправо по неподвижному газу со скоростью c_0 ; в области $x > c_0 t$ газ неподвижен. На поверхности поршня скорость газа должна совпадать со скоростью поршня, т. е. должно быть $v = -at$ при $x = -\frac{at^2}{2}$, $t > 0$. Это условие даёт для функции $f(v)$ в (94,8)

$$f(-at) = -c_0 t + \frac{\gamma at^2}{2}.$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} x - \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v\right) t &= f(v) = \\ &= \frac{c_0}{a} v + \frac{\gamma}{2a} v^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} -v &= \frac{1}{\gamma} \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right) - \\ &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right)^2 - 2a\gamma(c_0 t - x)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Эта формула определяет изменение скорости в области от поршня до переднего фронта волны $x = c_0 t$ (рис. 65, а) в течение времени от $t = 0$ до $t = \frac{2c_0}{(\gamma-1)a}$. Скорость газа направлена везде влево, в сторону движения поршня, и монотонно убывает по абсолютной величине в положительном направлении оси x ; в этом же направлении монотонно возрастают плотность и давление. При $t > \frac{2c_0}{(\gamma-1)a}$ для скорости поршня не выполняется неравенство (94,10), а потому газ не может двигаться вместе с ним. Между поршнем и газом возникнет область вакуума, а дальше скорость газа будет меняться по формуле (1) от значения $-\frac{2c_0}{\gamma-1}$ до нуля.

Если поршень вдвигается в трубу ($U = at$), то возникает простая волна сжатия; соответствующее решение получается просто изменением знака у a в формуле (1) (рис. 65, б). Оно применимо, однако, лишь до момента образования ударной волны; этот момент определяется по формуле (94,15) и равен

$$t = \frac{2c_0}{a(\gamma+1)}.$$

2. То же при произвольном законе движения поршня.

Решение. Пусть поршень в момент $t = 0$ начинает двигаться по закону $x = X(t)$ (причём $X(0) = 0$); его скорость $U = X'(t)$. Граничное

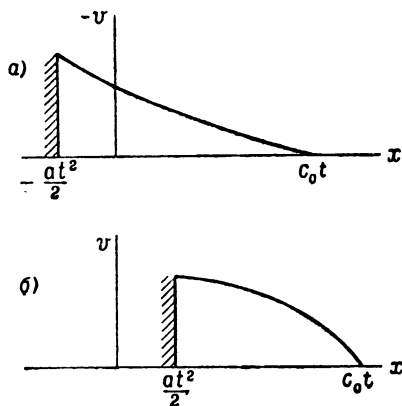


Рис. 65.

условие на поршне ($v = U$ при $x = X$) даёт

$$v = X'(t), \quad f(v) = X(t) - t \left[c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(t) \right].$$

Если рассматривать теперь t как параметр, то эти два уравнения определяют в параметрическом виде функцию $f(v)$. Обозначая ниже этот параметр посредством τ , можем написать окончательное решение в виде

$$\begin{aligned} v &= X'(\tau), \\ x &= X(\tau) + (t - \tau) \left[c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(\tau) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

чем и определяется в параметрическом виде искомая функция $v(t, x)$ в возникающей при движении поршня простой волне.

3. Определить время и место образования ударной волны при движении поршня по закону $U = at^n$, $n > 0$.

Решение. Если $a < 0$, т. е. поршень выдвигается из трубы, то возникает простая волна разрежения, в которой ударные волны вообще не образуются. Ниже предполагается $a > 0$, т. е. поршень вдвигается в трубу, создавая простую волну сжатия.

При параметрическом задании функции $v(x, t)$ формулами (2) с $X = \frac{a}{n+1} \tau^{n+1}$, момент и место образования ударной волны определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_t &= -c_0 + t\tau^{n-1} an \frac{\gamma+1}{2} - \frac{a\tau^n}{2} [\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)_t &= t\tau^{n-2} an(n-1) \frac{\gamma+1}{2} - \frac{an}{2} \tau^{n-1} [\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

причём второе уравнение надо заменить просто равенством $\tau = 0$, если речь идёт об образовании разрыва на переднем фронте простой волны.

При $n = 1$ находим:

$$\tau = 0, \quad t = \frac{2c_0}{a(\gamma + 1)},$$

т. е. ударная волна образуется на переднем фронте через конечное время после начала движения, в согласии с результатом задачи 1.

При $n < 1$ производная $\left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_t$ как функция от τ оказывается знакопеременной (а потому функция $v(x)$ при заданном t — многозначной) уже при всяком $t > 0$. Это значит, что ударная волна образуется на поршне уже в самый момент начала его движения.

При $n > 1$ ударная волна возникает не на переднем фронте простой волны, а в некоторой промежуточной точке, определяемой уравнениями (3). Определив из (3) значения τ и t , можно затем по (2) найти и место образования разрыва. Вычисление даёт

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{2c_0}{a} \right)^{1/n} \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{n+1}{n-1} \gamma + 1 \right]^{\frac{n-1}{n}}, \\ x &= 2c_0 \left(\frac{2c_0}{a} \right)^{1/n} \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{n-1}{n+1} \right] \frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n} [\gamma - 1 + n(\gamma + 1)]^{1/n}}. \end{aligned}$$

§ 95. Образование разрывов в звуковой волне

Плоская бегущая звуковая волна как точное решение уравнений движения тоже представляет собой простую волну. Мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе общими результатами для того, чтобы выяснить некоторые свойства звуковых волн малой амплитуды во втором приближении (понимая под первым приближением то, которое соответствует обычному линейному волновому уравнению).

Прежде всего отметим, что по истечении достаточно долгого времени в звуковой волне на протяжении каждого её периода должен возникнуть разрыв. Этот эффект приведёт затем к весьма сильному затуханию волны, как это было объяснено в § 94. Необходимо, однако, оговорить, что фактически это может относиться, разумеется, лишь к достаточно сильному звуку; в противном случае звуковая волна успеет поглотиться благодаря обычному эффекту вязкости и теплопроводности газа раньше, чем в ней успеют развиваться эффекты высших порядков по амплитуде.

Эффект искажения профиля волны проявляется и в другом отношении. Если в некоторый момент времени волна была чисто гармонической, то с течением времени соответственно изменению формы её профиля она перестанет быть таковой. Движение, однако, останется периодическим с прежним периодом. В разложение этой волны в ряд Фурье войдут теперь наряду с членом с основной частотой ω также и члены с кратными частотами $n\omega$ (n — целые числа). Таким образом, искажение профиля по мере распространения звуковой волны можно воспринимать как появление в ней наряду с основным тоном также и обертонов.

Скорость u перемещения точек профиля волны (распространяющейся в положительном направлении оси x) в первом приближении получается, если положить в (94,11) $\sigma = 0$, т. е. $u = c_0$, что соответствует распространению волны без изменения формы профиля. В следующем приближении имеем:

$$u = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \rho' = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \frac{\rho_0}{c_0} \sigma,$$

или с помощью выражения (92,10) для производной $\frac{\partial u}{\partial \rho}$:

$$u = c_0 + \alpha_0 \sigma, \quad (95,1)$$

где для краткости введено обозначение

$$\alpha = \frac{c^4}{2V^3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right)_s. \quad (95,2)$$

Для идеальных газов $\alpha = \frac{\gamma + 1}{2}$, и формула (95,1) совпадает с точной формулой (см. (94,8)) для скорости u .

В общем случае произвольной амплитуды волна перестаёт быть простой после появления в ней разрывов. Существенно, однако, что волна малой амплитуды во втором приближении остаётся простой и при наличии разрывов. Убедиться в этом можно следующим образом. Изменения скорости, давления и удельного объёма в ударной волне связаны друг с другом соотношением

$$v_2 - v_1 = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)(V_1 - V_2)}.$$

Изменение же скорости v вдоль некоторого участка длины оси x в простой волне равно интегралу

$$v_2 - v_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}} dp.$$

Простое вычисление с помощью разложения в ряд показывает, что оба написанных выражения отличаются друг от друга только в членах третьего порядка (при вычислении следует иметь в виду, что изменение энтропии в разрыве есть величина третьего порядка малости, а в простой волне энтропия вообще постоянна). Отсюда следует, что с точностью до членов второго порядка звуковая волна с каждой стороны от образовавшегося в ней разрыва остаётся простой, причём на самом разрыве будет выполнено надлежащее граничное условие. В следующих же приближениях это уже не будет иметь места, что связано с появлением отражённых от поверхности разрыва волн.

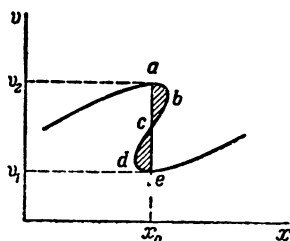


Рис. 66.

Выведем теперь условие, с помощью которого можно определить местонахождение разрывов в бегущей звуковой волне (всё в том же втором приближении). Пусть u есть скорость движения разрыва (относительно неподвижной системы координат), а v_1, v_2 — скорости газа по обеим его сторонам. Тогда условие непрерывности потока вещества запишется:

$$\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u),$$

откуда

$$u = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

С точностью до членов первых двух порядков эта величина равна значению производной $\frac{d(\rho v)}{d\rho}$, взятому в точке, где аргумент v равен полусумме $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$:

$$u = \left. \frac{d(\rho v)}{d\rho} \right|_{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}.$$

Поскольку же в простой волне $\frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + c$, то согласно (95,1) имеем:

$$u = c_0 + \alpha \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (95,3)$$

Отсюда можно получить следующее простое геометрическое условие, определяющее местонахождение ударной волны. На рис. 66 кривой линией изображён профиль распределения скоростей, соответствующий простой волне, и пусть отрезок ae есть возникающий в волне разрыв. Разность заштрихованных на рисунке площадей abc и cde определяется интегралом $\int_{v_1}^{v_2} (x - x_0) dv$, взятым по кривой $abcde$. С течением времени профиль волны смещается; вычислим производную по времени от написанного интеграла. Поскольку скорость $\frac{dx}{dt}$ точек профиля волны определяется формулой (95,1), а скорость $\frac{dx_0}{dt}$ разрыва — формулой (95,3), то мы получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1}^{v_2} (x - x_0) dv = \alpha \left\{ \int_{v_1}^{v_2} v dv - \frac{v_1 + v_2}{2} \int_{v_1}^{v_2} dv \right\} = 0$$

(при дифференцировании интеграла надо иметь в виду, что хотя сами пределы интегрирования v_1 и v_2 тоже меняются со временем, но значение $x - x_0$ на них всегда есть нуль и потому достаточно дифференцировать только под знаком интеграла).

Таким образом, интеграл $\int (x - x_0) dv$ остаётся с течением времени постоянным. Поскольку же в начальный момент возникновения ударной волны он равен нулю (точки a и e совпадают), то и всегда

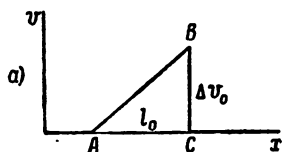
$$\int_{abcde} (x - x_0) dv = 0. \quad (95,4)$$

Геометрически это означает, что площадь abc равна площади cde . Этим условием определяется положение разрыва.

Рассмотрим одиночный одномерный звуковой импульс сжатия газа, в котором уже успела образоваться ударная волна, и выясним, по какому закону будет происходить окончательное затухание этой волны. Тем самым мы найдём закон затухания всякой вообще плоской ударной волны после достаточно длительного времени её распространения.

На поздних стадиях своего распространения звуковой импульс с ударной волной будет иметь трёхугольный профиль скоростей.

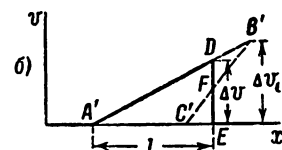
Пусть в некоторый момент времени (который примем за момент $t=0$) профиль изображается трёхугольником ABC (рис. 67, а). Перемещая точки этого профиля со скоростями (95,1), мы получили бы по истечении времени t профиль вида $A'B'C'$ (рис. 67, б). В действительности разрыв переходит в точку E , и истинный профиль будет $A'DE$. Площади $DB'F$ и $C'FE$ равны друг другу согласно условию (95,4); поэтому площадь $A'DE$ нового профиля равна площади ABC исходного профиля. Пусть l — длина звукового импульса в момент времени t , а Δv — скачок скорости в ударной волне. За время t точка B смещается относительно точки C на расстояние



$\alpha t \Delta v_0$; поэтому тангенс угла $B'A'C'$ равен $\frac{\Delta v_0}{l_0 + \alpha t \Delta v_0}$, и мы получаем условие равенства площадей ABC и $A'DE$ в виде

$$l_0 \Delta v_0 = \frac{l^2 \Delta v_0}{l_0 + \alpha t \Delta v_0},$$

откуда



$$l = l_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha \Delta v_0}{l_0} t},$$

$$\Delta v = \frac{\Delta v_0}{\sqrt{1 + \frac{\alpha \Delta v_0}{l_0} t}}. \quad (95,5)$$

Рис. 67.

При $t \rightarrow \infty$ интенсивность ударной волны затухает со временем асимптотически, как $1/\sqrt{t}$ (или, что то же, как $1/\sqrt{x}$ — с расстоянием). Полная энергия бегущего звукового импульса (отнесённая к единице площади её фронта) равна

$$E = \rho_0 \int v^2 dx = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{\alpha \Delta v_0}{l_0} t}}, \quad (95,6)$$

где E_0 — энергия в момент времени $t=0$. При $t \rightarrow \infty$ энергия стремится к нулю тоже, как $1/\sqrt{t}$.

Если мы имеем сферическую расходящуюся звуковую волну, то на достаточно больших расстояниях r от начала координат в каждом небольшом участке её можно рассматривать как плоскую. Скорость перемещения каждой точки профиля волны будет тогда определяться формулой (95,1). Однако, если мы хотим проследить с помощью этой формулы за смещением точки профиля волны на протяжении больших промежутков времени, то необходимо учесть тот факт, что амплитуда сферической волны уже в первом приближении падает с расстоянием обратно пропорционально r . Это значит, что для каждой данной точки профиля v будет не постоянной, как для плоской волны, а будет убывать как $1/r$. Если v_0 есть значение v (для данной точки профиля)

на расстоянии (большом) r_0 , то можно написать $v = \frac{v_0 r_0}{r}$. Таким образом, для скорости u точек профиля волны будем иметь:

$$u = c_0 + \frac{\alpha v_0 r_0}{r}.$$

Первый член представляет собой обычную скорость звука и соответствует перемещению волны «без изменения формы профиля» (отвлекаясь от общего уменьшения амплитуды пропорционально $1/r$). Второй же член приводит к искажению профиля. Величина δr этого дополнительного смещения точек профиля в течение времени $t = \frac{r - r_0}{c}$ получится умножением на $\frac{dr}{c_0}$ и интегрированием в пределах от r_0 до r ; это даёт

$$\delta r = \frac{\alpha v_0 r_0}{c_0} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (95,7)$$

Таким образом, искажение профиля сферической волны увеличивается с расстоянием, как его логарифм, т. е. гораздо медленнее, чем у плоской волны, где искажение δx растёт пропорционально самому проходимому волной расстоянию x .

Искажение профиля волны приводит в конце концов к образованию в ней разрывов. Рассмотрим ударные волны, образующиеся в достаточно далеко удалившемся от источника (начала координат) одиночном сферическом звуковом импульсе. Сферический случай существенным образом отличается от плоского прежде всего тем, что за областью сжатия непременно должна следовать также и область разрежения; вместе с избыточным давлением должна быть знакопеременной также и скорость газовых частиц в волне (см. § 69). Эффект искажения профиля приведёт в конце концов к тому, что образуются две ударные волны: одна в области сжатия, а другая — в области разрежения (рис. 68)¹⁾. В передней ударной волне давление скачком возрастает, затем следует область постепенного уменьшения сжатия, сменяющегося разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во втором разрыве (однако не до своего невозмущённого значения, которое достигается лишь асимптотически позади второго разрыва).

Закон, по которому будет происходить окончательно затухание ударных волн со временем (или, что то же, с расстоянием r от

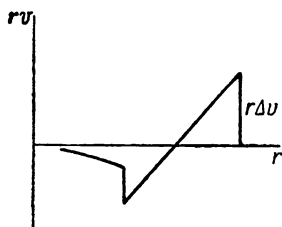


Рис. 68.

¹⁾ Следует оговорить, что поскольку фактически при распространении в газе всегда имеет место обычное поглощение звука, связанное с вязкостью и теплопроводностью, то ввиду медленности возрастания искажения в сферической волне она может поглотиться раньше, чем успеют образоваться разрывы.

источника), легко найти вполне аналогично тому, как это было сделано выше для плоского случая. Используя закон искажения профиля (95,7), мы найдём, что на достаточно больших расстояниях ширина l звукового импульса (расстояние между обоими разрывами) будет возрастать, как $\sqrt{\ln \frac{r}{a}}$ вместо закона \sqrt{x} в плоском случае (a — некоторая постоянная размерности длины). Интенсивность передней ударной волны затухает по закону $r \Delta v \propto 1/\sqrt{\ln \frac{r}{a}}$, или

$$\Delta v \propto \frac{1}{r \sqrt{\ln \frac{r}{a}}}. \quad (95,8)$$

Наконец, рассмотрим цилиндрический случай. Общее убывание амплитуды расходящейся звуковой волны происходит обратно пропорционально \sqrt{r} (r — расстояние от оси). Повторяя все изложенные для сферического случая рассуждения, получим теперь для скорости u точек профиля волны

$$u = c_0 + \alpha v_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}},$$

после чего найдём смещение δr точек профиля на пути от r_0 до r :

$$\delta r = 2\alpha \frac{v_0}{c_0} \sqrt{r_0} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}). \quad (95,9)$$

Цилиндрическое распространение импульса сжатия должно сопровождаться, как и в сферическом случае, следующим за сжатием разрежением газа. Поэтому и здесь должны образоваться две ударные волны. Тем же способом найдём предельный закон возрастания ширины импульса: $l \propto r^{1/4}$, и предельный закон затухания интенсивности ударной волны: $\Delta v \sqrt{r} \propto r^{-1/4}$, или

$$\Delta v \propto \frac{1}{r^{3/4}}. \quad (95,10)$$

Образование разрывов в звуковой волне представляет собой пример самопроизвольного возникновения ударных волн в отсутствии каких бы то ни было особенностей во внешних условиях движения. Следует подчеркнуть, что хотя ударная волна может самопроизвольно возникнуть в некоторый дискретный момент времени, она не может столь же дискретным образом исчезнуть. Раз возникнув, ударная волна затухает в дальнейшем лишь асимптотически при неограниченном увеличении времени.

Задачи

1. В начальный момент профиль волны состоит из неограниченного ряда зубцов, изображённых на рис. 69. Определить изменение профиля и энергии волны со временем.

Решение. Заранее очевидно, что в последующие моменты времени t профиль волны будет состоять из зубцов такого же вида, с той же длиной l_0 ,

но меньшей высотой v_t . Рассмотрим один из зубцов: в момент $t = 0$ абсцисса точки профиля с $v = v_t$ отсекает часть $\frac{v_t}{v_0} l_0$ от основания треугольника. В течение же времени t эта точка выдвигается вперёд на расстояние $\alpha v_t t$. Условие неизменности длины основания треугольника есть $v_t \frac{l_0}{v_0} + \alpha v_t t = l_0$, откуда

$$v_t = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha v_0 t}{l_0}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ амплитуда волны затухает, как $1/t$. Для энергии находим:

$$E = \frac{E_0}{\left(1 + \frac{\alpha v_0 t}{l_0}\right)^2},$$

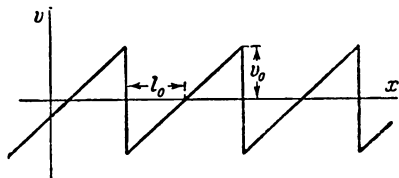


Рис. 69.

т. е. энергия затухает при $t \rightarrow \infty$, как $1/t^2$.

2. Определить интенсивность второй гармоники, возникающей в монохроматической сферической волне благодаря искажению её профиля.

Решение. Написав волну в виде $rv = A \cos(kr - \omega t)$, мы можем учесть искажение в первом приближении, прибавив δr к r в правой стороне равенства и разлагая по степеням δr . Это даёт с помощью (95,7)

$$rv = A \cos(kr - \omega t) - \frac{ak}{2c_0} A^2 \ln \frac{r}{r_0} \sin 2(kr - \omega t)$$

(под r_0 надо понимать здесь расстояние, на котором волну можно ещё рассматривать с достаточной точностью как строго монохроматическую). Второй член в этой формуле определяет вторую гармонику спектрального разложения волны. Её полная (средняя по времени) интенсивность I_2 равна

$$I_2 = \frac{\alpha^2 k^2}{8\pi c_0^3 \rho_0} \left(\ln \frac{r}{r_0}\right)^2 I_1^2,$$

где $I_1 = 2\pi c_0 \rho_0 A^2$ есть интенсивность основной, первой, гармоники.

§ 96. Характеристики

Данное в § 79 определение характеристик как линий, вдоль которых распространяются (в приближении геометрической акустики) малые возмущения, имеет общее значение, и не ограничено применением к плоскому стационарному сверхзвуковому течению, о котором шла речь в § 79.

Для одномерного нестационарного движения можно ввести характеристики как линии в плоскости x, t , угловой коэффициент которых $\frac{dx}{dt}$ равен скорости распространения малых возмущений относительно неподвижной системы координат. Возмущения, распространяющиеся относительно газа со скоростью звука в положительном или отрицательном направлении оси x , перемещаются относительно неподвижной системы со скоростью $v + c$ или $v - c$. Соответственно

дифференциальные уравнения двух семейств характеристик, которые мы будем условно называть характеристиками C_+ и C_- , гласят:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v + c, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = v - c. \quad (96,1)$$

Возмущения же, переносимые вместе с веществом газа, «распространяются» в плоскости x, t по характеристикам третьего семейства C_0 , для которых

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v. \quad (96,2)$$

Это — просто «линии тока» в плоскости x, t (ср. конец § 79)¹⁾. Подчеркнём, что для существования характеристик здесь отнюдь не требуется, чтобы движение газа было сверхзвуковым. Выражаемая характеристиками «направленность» распространения возмущений соответствует здесь просто причинной связи движения в последующие моменты времени с предыдущим движением.

В качестве примера рассмотрим характеристики простой волны. Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , имеем согласно (94,5) $x = t(v + c) + f(v)$. Дифференцируя это соотношение, имеем:

$$dx = (v + c) dt + dv [t + tc'(v) + f'(v)].$$

С другой стороны, вдоль характеристики C_+ имеем $dx = (v + c) dt$; сравнивая оба равенства, найдём, что вдоль характеристики $dv [t + tc'(v) + f'(v)] = 0$. Выражение в квадратных скобках не может быть равно нулю тождественно. Поэтому должно быть $dv = 0$, т. е. $v = \text{const}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что вдоль каждой из характеристик C_+ остаётся постоянной скорость, а с нею и все остальные величины (в волне, распространяющейся влево, таким же свойством обладают характеристики C_-). Мы увидим в следующем параграфе, что это обстоятельство не случайно, а органически связано с математической природой простых волн.

Из этого свойства характеристик C_+ простой волны можно в свою очередь заключить, что они представляют собой семейство прямых линий в плоскости x, t ; скорость имеет постоянные значения вдоль прямых $x = t[v + c(v)] + f(v)$ (94,5). В частности, в автомодельной волне разрежения (простая волна с $f(v) = 0$) эти прямые образуют пучок с общей точкой пересечения — началом координат плоскости x, t . Ввиду этого свойства автомодельную простую волну иногда называют **центрированной**.

¹⁾ Точно такими же уравнениями (96,1) и (96,2) определяются характеристики и для нестационарного сферически симметричного движения, причём только надо заменить x на сферическую координату r (характеристики будут теперь линиями в плоскости r, t).

На рис. 70 изображено семейство характеристик C_+ для простой волны разрежения, образующейся при ускоренном выдвигании поршня из трубы. Это есть семейство расходящихся прямых, начинающихся на кривой $x = X(t)$, изображающей движение поршня. Справа от характеристики $x = c_0 t$ простирается область покоящегося газа, в которой все характеристики параллельны друг другу.

На рис. 71 дан аналогичный чертёж для простой волны сжатия, образующейся при ускоренном вдвигании поршня в трубу. В этом случае характеристики представляют собой сходящийся пучок прямых, которые в конце концов должны пересечься друг с другом.

Поскольку каждая характеристика несёт своё постоянное значение v , их пересечение друг с другом означает физически бессмысленную многозначность функции $v(x, t)$. Это есть геометрическая интерпретация результата о невозможности неограниченного существования простой волны сжатия и неизбежности возникновения в ней ударной волны, к которому мы пришли уже аналогичным путём в § 94. Геометрическое же истолкование условий (94,12), определяющих время и место образования ударной волны, заключается в следующем. Пересекающееся семейство прямолинейных характеристик имеет огибающую, заканчивающуюся со стороны малых t угловой точкой, которая и определяет первый момент возникновения многозначности (вся область между двумя ветвями огибающей трижды покрыта характеристиками C_+). Если уравнения характеристик заданы в параметрическом виде $x = x(v)$, $t = t(v)$, то положение угловой точки как раз и определяется уравнениями (94,12)¹⁾.

Покажем теперь коротко, каким образом данное нами физическое определение характеристик как линий распространения возмущений соответствует известному из теории дифференциальных уравнений

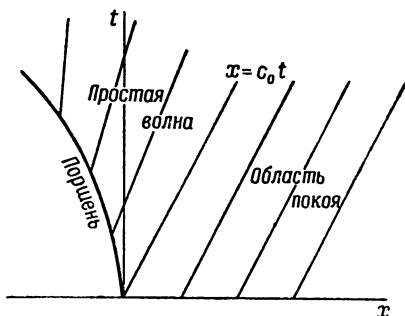


Рис. 70.

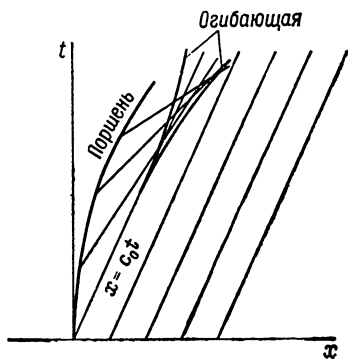


Рис. 71.

¹⁾ Особому случаю, когда ударная волна возникает на границе с областью покоя, соответствует вырождение одной из ветвей огибающей в отрезок характеристики $x = c_0 t$.

в частных производных чисто математическому аспекту этого понятия. Рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + D = 0, \quad (96,3)$$

линейное по вторым производным (коэффициенты же A , B , C , D могут быть любыми функциями как от независимых переменных x , t , так и от неизвестной функции φ и её первых производных¹⁾). Уравнение (96,3) относится к эллиптическому типу, если везде $B^2 - AC < 0$, и к гиперболическому, если $B^2 - AC > 0$. В последнем случае уравнение

$$A dt^2 - 2B dx dt + C dx^2 = 0, \quad (96,4)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \quad (96,5)$$

определяет в плоскости x , t два семейства кривых—характеристик (для заданного решения $\varphi(x, y)$ уравнения (96,3)). Укажем, что если коэффициенты A , B , C в уравнении являются функциями только от x , t , то характеристики не зависят от конкретного решения уравнения.

Пусть данное течение описывается некоторым решением $\varphi = \varphi_0(x, t)$ уравнения (96,3), и наложим на него малое возмущение φ_1 . Это возмущение предполагаем удовлетворяющим условиям, соответствующим геометрической акустике: оно слабо меняет движение (φ_1 мало вместе со своими первыми производными), но сильно меняется на протяжении малых расстояний (вторые производные от φ_1 относительно велики). Полагая в уравнении (96,3) $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, получим тогда для φ_1 уравнение

$$A \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0,$$

причём в коэффициентах A , B , C положено $\varphi = \varphi_0$. Следуя методу, принятому для перехода от волновой к геометрической оптике, пишем φ_1 в виде $\varphi_1 = ae^{i\psi}$, где функция ψ (эйконал)—большая величина, и получаем для последней уравнение

$$A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (96,6)$$

Уравнение распространения лучей в геометрической акустике получается приравнением $\frac{dx}{dt}$ групповой скорости:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk},$$

¹⁾ Для одномерного нестационарного движения уравнению такого вида удовлетворяет потенциал скорости.

где

$$k = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Дифференцируя соотношение

$$Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0,$$

получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\omega - Ak}{C\omega - Bk},$$

а исключая отсюда с помощью того же соотношения k/ω , мы снова придём к уравнению (96,5).

З а д а ч а

Найти уравнение второго семейства характеристик в центрированной простой волне.

Решение. В центрированной простой волне, распространяющейся в сторону находящегося справа от неё неподвижного газа, имеем:

$$\frac{x}{t} = v + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v.$$

Характеристики C_+ изображаются пучком прямых $x = \text{const. } t$. Характеристики же C_- определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma + 1} c_0.$$

Интегрируя, находим:

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0 t^\gamma + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3 - \gamma}{\gamma + 1}},$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы характеристика C_- проходила через точку $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ на характеристике C_+ ($x = c_0 t$), граничной между простой волной и областью покоя.

«Линии тока» в плоскости x, t даются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0\right),$$

откуда

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0 t^\gamma + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

§ 97. Инварианты Римана

Произвольное малое возмущение распространяется, вообще говоря, по всем трём характеристикам (C_+ , C_- , C_0), исходящим из данной точки плоскости x, t . Можно, однако, разложить произвольное возмущение на такие части, каждая из которых распространяется лишь по одной из характеристик.

Рассмотрим сначала изэнтропическое движение газа. Напишем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0;\end{aligned}$$

в уравнении непрерывности мы заменили производные от плотности на производные от давления согласно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Разделив первое уравнение на $\pm \rho c$ и сложив его со вторым, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) (v \pm c) = 0. \quad (97,1)$$

Далее, введём в качестве новых неизвестных функций величины

$$J_+ = v + \int \frac{dp}{\rho c}, \quad J_- = v - \int \frac{dp}{\rho c}, \quad (97,2)$$

называемые инвариантами Римана. Напомним, что при изэнтропическом движении ρ и c являются определёнными функциями от p , и потому стоящие здесь интегралы имеют определённый смысл. Для идеального газа

$$J_+ = v + \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad J_- = v - \frac{2}{\gamma - 1} c. \quad (97,3)$$

После введения этих величин уравнения движения приобретают простой вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_- = 0. \quad (97,4)$$

Дифференциальные операторы, действующие на J_+ и J_- , представляют собой не что иное, как операторы дифференцирования в плоскости x, t вдоль характеристик C_+ и C_- . Таким образом, мы видим, что вдоль каждой из характеристик C_+ и C_- остаётся постоянной соответственно величина J_+ или J_- . Мы можем также сказать, что малые возмущения величины J_+ распространяются только вдоль характеристик C_+ , а возмущения J_- — вдоль C_- .

В общем случае неизэнтропического движения уравнения (97,1) не могут быть написаны в виде (97,4), так как $\frac{dp}{\rho c}$ не является полным дифференциалом. Эти уравнения, однако, попрежнему позволяют выделить возмущения, распространяющиеся по характеристикам лишь одного семейства. Именно, таковыми являются возмущения вида

$$\delta v \pm \frac{\delta p}{\rho c},$$

где δv и δp — произвольные малые возмущения скорости и давления. Для того чтобы получить полную систему уравнений движения, к уравнениям (97,1) надо добавить уравнение адиабатичности

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] s = 0, \quad (97,5)$$

показывающее, что возмущения δs распространяются вдоль характеристик C_0 . Произвольное малое возмущение всегда можно разложить на независимые части указанных трёх видов.

Сравнение с формулой (94,4) показывает, что инварианты Римана (97,2) совпадают с теми величинами, которые в простых волнах постоянны вдоль всей области движения в течение всего времени: в простой волне, распространяющейся вправо, постоянно J_- , а в волне, бегущей влево, постоянно J_+ . С математической точки зрения это есть основное свойство простых волн. Из него следует, в частности, и указанное в предыдущем параграфе свойство — прямолинейность одного из семейств характеристик. Пусть, например, волна распространяется вправо. Каждая из характеристик C_+ несёт своё постоянное значение J_+ и, кроме того, на ней постоянна являющаяся постоянной во всей области величина J_- . Но из постоянства двух величин J_+ и J_- следует, что постоянны также и v и p (а с ними и все остальные величины), и мы приходим к найденному в § 96 свойству характеристик C_+ , непосредственно ведущему к их прямолинейности.

Если в двух смежных областях плоскости x, t течение описывается двумя аналитически различными решениями уравнений движения, то граница между этими областями есть характеристика. Действительно, эта граница представляет собой разрыв производных каких-либо величин, т. е. некоторый слабый разрыв; последние же непременно совпадают с какой-либо характеристикой.

Весьма существенное значение в теории изэнтропического одномерного движения имеет следующее свойство простых волн: течение в области, граничащей с областью постоянного течения (течения с $v = \text{const.}$, $p = \text{const.}$), есть непременно простая волна.

Доказательство этого утверждения очень просто. Пусть интересующая нас область I плоскости x, t граничит справа с областью 2 постоянного течения (рис. 72). В последней, очевидно, постоянны оба инварианта J_+ и J_- , а оба семейства характеристик прямолинейны. Граница между обеими областями есть одна из характеристик C_+ , и линии C_+ одной области не переходят в другую область,

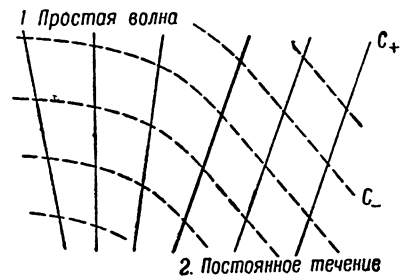


Рис. 72.

Характеристики же C_- непрерывно продолжаютя из одной области в другую и, покрывая область I , приносят в неё из области 2 постоянное значение J_- . Таким образом, величина J_- будет постоянна и вдоль всей области I , так что последняя есть простая волна.

Свойство характеристик «переносить» вдоль себя постоянные значения определённых величин проливает свет на общую постановку вопроса о задании начальных и граничных условий к уравнениям гидродинамики. В различных конкретных физических задачах выбор этих условий обычно не вызывает сомнений и диктуется непосредственно физическими соображениями. В более сложных случаях могут, однако, оказаться полезными и чисто математические соображения, основанные на общих свойствах характеристик.

Будем для определённости говорить об изэнтропическом одномерном движении газа. С чисто математической точки зрения постановка газодинамической задачи сводится обычно к определению двух искомым функций (например, v и p) в области плоскости x, t , лежащей между двумя заданными кривыми (OA и OB на рис. 73, *а*), на которых задаются граничные значения. Вопрос заключается в том, значения скольких величин должны быть заданы на этих кривых. В этом смысле оказывается весьма существенным, как расположена каждая кривая по отношению к направлениям исходящих¹⁾ из каждой её точки двух ветвей характеристик C_+ и C_- (показанным на рис. 73 стрелками). Могут представиться два случая; либо оба

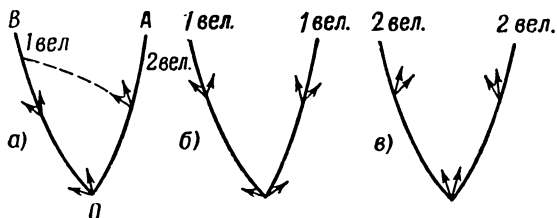


Рис. 73.

направления характеристик лежат по одну сторону от кривой, либо кривая расположена между ними. На рис. 73, *а* кривая OA относится к первому, а OB — ко второму случаю. Ясно, что для полного определения искомым функций в области AOB на кривой OA должны быть заданы значения двух величин (например, обоих инвариантов J_+ и J_-), а на кривой OB — всего одной. Действительно, значения второй величины будут «перенесены» на кривую OB с кривой OA характеристиками соответствующего семейства и потому не могут быть

¹⁾ В плоскости x, t «исходящими» из заданной точки ветвями характеристик являются ветви, направленные в сторону возрастания t .

заданы произвольным образом¹⁾. Аналогично, на рис. 73, б, в изображены случаи, когда на обеих граничных кривых должны быть заданы по одной или по две величины.

Следует также указать, что если граничная кривая совпадает с какой-либо характеристикой, то на ней вообще невозможно произвольное задание двух независимых величин, так как их значения связаны друг с другом одним условием — условием постоянства соответствующего инварианта Римана.

Совершенно аналогичным образом может быть разобран вопрос о задании граничных условий в общем случае не изэнтропического движения.

Наконец, сделаем ещё следующее замечание. Выше мы говорили везде о характеристиках одномерного движения как о линиях в плоскости x, t . Характеристики могут, однако, быть определены и в плоскости любых других двух переменных, описывающих движение. Можно, например, рассматривать характеристики в плоскости переменных v, c . Для изэнтропического движения уравнения этих характеристик даются просто равенствами $J_+ = \text{const.}$, $J_- = \text{const.}$

с произвольными постоянными в их правых частях (будем называть их условно характеристиками Γ_+ и Γ_-). Так, для идеального газа это есть согласно (97,3) два семейства параллельных прямых (рис. 74).

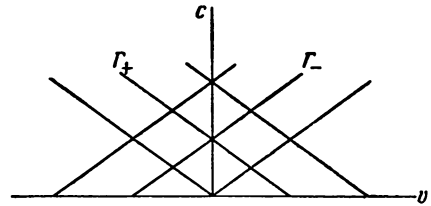


Рис. 74.

Замечательно, что эти характеристики всецело определяются свойствами движущейся среды (газа) как таковой и не зависят от конкретного решения уравнений движения. Это связано с тем, что уравнение изэнтропического движения в переменных v, c есть (как мы увидим в следующем параграфе) линейное уравнение в частных производных второго порядка с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных.

Характеристики в плоскостях x, t и v, c являются отображениями друг друга с помощью заданного решения уравнений движения. Это отображение, однако, отнюдь не должно быть взаимно однозначным. В частности, заданной простой волне соответствует всего одна характеристика в плоскости v, c , на которую отображаются

¹⁾ Для иллюстрации укажем пример такого случая: задача о движении газа при выдвижении или выдвигании поршня из бесконечной трубы. Здесь речь идёт о нахождении решения газодинамических уравнений в области плоскости x, t между двумя линиями: правой полуосью x и линией $x = X(t)$, изображающей движение поршня (рис. 70, 71). На первой линии задаются значения двух величин (начальные условия $v = 0, p = p_0$ при $t = 0$), а на второй — всего одной величины ($v = u$, где $u(t)$ — скорость поршня).

все характеристики плоскости x, t . Так, для волны, бегущей вправо, это есть одна из характеристик Γ_- ; характеристики C_- отображаются на всю линию Γ_- , а характеристики C_+ — на отдельные её точки.

З а д а ч а

Найти общее решение уравнений одномерного изэнтропического движения идеального газа с $\gamma = 3$ ¹⁾.

Р е ш е н и е. При $\gamma = 3$ имеем $J_{\pm} = v \pm c$, и уравнения (97,4) имеют общий интеграл:

$$\begin{aligned}x &= (v + c)t + f_1(v + c), \\x &= (v - c)t + f_2(v - c)\end{aligned}$$

(f_1, f_2 — произвольные функции). Эти два уравнения определяют в неявном виде искомые функции $v(x, t)$, $c(x, t)$, а с ними и все остальные величины. Можно сказать, что в этом случае две величины $v \pm c$ распространяются независимо друг от друга в виде двух невзаимодействующих простых волн.

§ 98. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа

Рассмотрим теперь общую задачу о произвольном одномерном изэнтропическом движении сжимаемого газа (без ударных волн) и покажем прежде всего, что эта задача может быть сведена к решению некоторого линейного дифференциального уравнения.

Всякое одномерное движение (движение, зависящее всего от одной пространственной координаты) непременно потенциально, так как всякую функцию $v(x, t)$ можно представить в виде производной $v(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$. Поэтому мы можем воспользоваться в качестве первого интеграла уравнения Эйлера уравнением Бернулли (9,3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

С помощью этого равенства получаем для дифференциала $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = v dx - \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dt.$$

Независимыми переменными являются здесь x и t ; произведём теперь переход к новым независимым переменным, выбрав в качестве таковых v и w . Для этого производим преобразование Лежандра; написав

$$d\varphi = d(xv) - x dv - d\left[t\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\right] + td\left(w + \frac{v^2}{2}\right).$$

1) Уравнение $pV^3 = \text{const.}$ пригодно в качестве приближённого уравнения адиабаты для конденсированных продуктов детонации взрывчатых веществ (см. Л. Д. Л а н д а у, К. П. С т а н ю к о в и ч, ДАН СССР 46, 399, 1945).

и введя вместо потенциала φ новую вспомогательную функцию

$$\chi = \varphi - xv + t\left(\omega + \frac{v^2}{2}\right),$$

получаем:

$$d\chi = -x dv + t d\left(\omega + \frac{v^2}{2}\right) = t d\omega + (vt - x) dv,$$

где χ рассматривается как функция от v и ω . Сравнивая это соотношение с равенством $d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\omega} d\omega + \frac{\partial\chi}{\partial v} dv$, имеем:

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial\omega}, \quad vt - x = \frac{\partial\chi}{\partial v},$$

или

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial\omega}, \quad x = v \frac{\partial\chi}{\partial\omega} - \frac{\partial\chi}{\partial v}. \quad (98,1)$$

Если функция $\chi(v, \omega)$ известна, то по этим формулам определится зависимость v и ω от координаты x и времени t .

Выведем теперь уравнение, определяющее χ . Для этого исходим из неиспользованного ещё уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Преобразуем это уравнение к переменным v, ω . Написав частные производные в виде якобианов, имеем:

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(t, x)} + v \frac{\partial(t, \rho)}{\partial(t, x)} + \rho \frac{\partial(t, v)}{\partial(t, x)} = 0,$$

или, умножая на $\frac{\partial(t, x)}{\partial(\omega, v)}$:

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(\omega, v)} + v \frac{\partial(t, \rho)}{\partial(\omega, v)} + \rho \frac{\partial(t, v)}{\partial(\omega, v)} = 0.$$

При раскрытии этих якобианов надо иметь в виду следующее. Согласно уравнению состояния газа плотность ρ есть функция каких-либо двух других независимых термодинамических величин; например, можно рассматривать ρ как функцию от ω и s . При $s = \text{const.}$ тогда будет просто $\rho = \rho(\omega)$; существенно при этом, что в переменных v, ω плотность оказывается не зависящей от v . Раскрывая якобианы, получаем поэтому

$$\frac{d\rho}{d\omega} \frac{\partial x}{\partial v} - v \frac{d\rho}{d\omega} \frac{\partial t}{\partial v} + \rho \frac{\partial t}{\partial \omega} = 0.$$

Подставляя сюда для t и x выражения (98,1), получаем после сокращений

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\omega} \left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2\chi}{\partial \omega^2} = 0.$$

При $s = \text{const.}$ имеем $d\omega = \frac{1}{\rho} dp$, откуда $\frac{d\omega}{dp} = \frac{1}{\rho}$. Поэтому можно написать: $\frac{dp}{d\omega} = \frac{dp}{dp} \frac{dp}{d\omega} = \frac{\rho}{c^2}$. Окончательно получаем для χ следующее уравнение:

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \omega} = 0 \quad (98,2)$$

(скорость звука c надо рассматривать здесь как функцию от ω). Задача об интегрировании нелинейных уравнений движения приведена, таким образом, к решению линейного уравнения.

Применим полученное уравнение к идеальному газу. Здесь $c^2 = (\gamma - 1)\omega$, и основное уравнение (98,2) принимает вид

$$(\gamma - 1)\omega \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \omega} = 0. \quad (98,3)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано в общем виде элементарным образом, если число $\frac{3-\gamma}{\gamma-1}$ является целым чётным числом:

$$\frac{3-\gamma}{\gamma-1} = 2n, \quad \gamma = \frac{3+2n}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (98,4)$$

Этому условию как раз удовлетворяют одноатомный ($\gamma = 5/3$, $n = 1$) и двухатомный ($\gamma = 7/5$, $n = 2$) газы. Вводя n вместо γ , переписываем (98,3) в виде

$$\frac{2}{2n+1} \omega \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \omega} = 0. \quad (98,5)$$

Будем обозначать функцию, удовлетворяющую этому уравнению при заданном n , посредством χ_n . Для функции χ_0 имеем:

$$2\omega \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \omega^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi_0}{\partial \omega} = 0.$$

Введя вместо ω переменную $u = \sqrt{2\omega}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} = 0.$$

Но это есть обычное волновое уравнение, общее решение которого есть: $\chi_0 = f_1(u+v) + f_2(u-v)$, где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\chi_0 = f_1(\sqrt{2\omega} + v) + f_2(\sqrt{2\omega} - v). \quad (98,6)$$

Покажем теперь, что если известна функция χ_n , то функцию χ_{n+1} можно получить простым дифференцированием. В самом деле, дифференцируя уравнение (98,5) по ω , получаем после перегруппировки членов

$$\frac{2}{2n+1} \omega \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \right) + \frac{2n+3}{2n+1} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \right) = 0.$$

Если ввести вместо v переменную

$$v' = v \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}},$$

то получим для $\frac{\partial \chi_n}{\partial w}$ уравнение

$$\frac{2}{2(n+1)+1} w \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) - \frac{\partial^2}{\partial v'^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) = 0,$$

совпадающее с уравнением (98,5) для функции $\chi_{n+1}(w, v')$. Таким образом, мы приходим к результату, что

$$\chi_{n+1}(w, v') = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n(w, v) = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n \left(w, \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} v' \right). \quad (98,7)$$

Применяя эту формулу n раз к функции χ_0 (98,6), получаем искомое общее решение уравнения (98,5):

$$\chi = \frac{\partial^n}{\partial w^n} \left\{ f_1 \left(\sqrt{2(2n+1)} w + v \right) + f_2 \left(\sqrt{2(2n+1)} w - v \right) \right\},$$

или

$$\chi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}} \left\{ \frac{F_1 \left(\sqrt{2(2n+1)} w + v \right) + F_2 \left(\sqrt{2(2n+1)} w - v \right)}{\sqrt{w}} \right\}, \quad (98,8)$$

где F_1, F_2 — снова две произвольные функции.

Если ввести вместо w скорость звука согласно

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{2n+1}{2} c^2,$$

то решение (98,8) примет вид

$$\chi = \left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} F_1 \left(c + \frac{v}{2n+1} \right) + \frac{1}{c} F_2 \left(c - \frac{v}{2n+1} \right) \right\}. \quad (98,9)$$

Выражения

$$c \pm \frac{v}{2n+1} = c \pm \frac{\gamma-1}{2} v,$$

стоящие в качестве аргумента в произвольных функциях, представляют собой не что иное, как инварианты Римана (97,3), постоянные на характеристиках.

В применениях часто возникает необходимость в вычислении значений функции $\chi(v, c)$ на характеристике. Для этой цели служат

следующая формула ¹⁾:

$$\left(\frac{\partial}{c \partial c}\right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} F\left(c \pm \frac{v}{2n+1}\right) \right\} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}} \frac{F(2c+a)}{c^n} \quad (98,10)$$

при

$$\pm \frac{v}{2n+1} = c + a$$

(a — произвольная постоянная).

Выясним теперь, в каком взаимоотношении с найденным здесь общим решением газодинамических уравнений находится решение, описывающее простую волну. Последнее отличается тем свойством, что в нём v и w являются определённой функцией друг от друга, $v = v(w)$, и поэтому обращается тождественно в нуль якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, t)}.$$

Между тем при преобразовании к переменным v, w нам пришлось разделить уравнение движения на этот якобиан, в результате чего решение, для которого $\Delta \equiv 0$, оказалось «потерянным». Таким образом, простая волна не содержится непосредственно в общем интеграле уравнений движения, а является их особым интегралом.

Для понимания природы этого особого интеграла существенно, однако, что он может быть получен из общего интеграла путём своеобразного предельного перехода, тесно связанного с физическим смыслом характеристик как линий распространения малых возмущений. Представим себе, что область плоскости v, w , в которой функция $\chi(v, w)$ отлична от нуля, стягивается к очень узкой (в пределе — к бесконечно узкой) полосе вдоль одной из характеристик. Производные от χ в поперечных к характеристике направлениях пробегают

¹⁾ Проще всего эту формулу можно вывести с помощью теории функций комплексного переменного, используя теорему Коши. Для произвольной функции $F(c+u)$ имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{c \partial c}\right)^{n-1} \frac{F(c+u)}{c} &= 2^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial c^2}\right)^{n-1} \frac{F(c+u)}{c} = \\ &= 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint \frac{F(\sqrt{z+u})}{\sqrt{z}(z-c^2)^n} dz, \end{aligned}$$

где интеграл берётся в плоскости комплексного переменного z по контуру, охватывающему точку $z = c^2$. Положив теперь $u = c + a$ и произведя в интеграле подстановку $\sqrt{z} = 2\zeta - c$, получим:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint \frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^n (\zeta-c)^n} d\zeta,$$

где теперь контур интегрирования по ζ охватывает точку $\zeta = c$; снова применяя теорему Коши, находим, что этот интеграл совпадает с написанным в тексте выражением,

при этом значения в очень широком (в пределе — бесконечном) интервале, поскольку χ очень быстро убывает в этих направлениях. Такого рода решения $\chi(v, w)$ уравнений движения заведомо должны существовать. Действительно, рассматриваемые как «возмущение» в плоскости v, w они удовлетворяют условиям геометрической акустики и, как должно быть для таких возмущений, расположены вдоль характеристики.

Из сказанного ясно, что при такой функции χ время $t = \frac{\partial \chi}{\partial w}$ будет пробегать сколь угодно большой интервал значений. Производная же от χ вдоль характеристики будет некоторой конечной величиной. Но вдоль характеристики (например, одной из характеристик Γ_-) имеем:

$$\frac{dJ_-}{dv} = 1 - \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dw} \frac{dw}{dv} = 1 - \frac{1}{c} \frac{dw}{dv} = 0.$$

Поэтому производная от χ по v вдоль характеристики (обозначим её как $-f(v)$) есть

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial w} \frac{dw}{dv} = \frac{\partial \chi}{\partial v} + c \frac{\partial \chi}{\partial w} = -f(v).$$

Выражая частные производные от χ через x и t согласно (98,1), получим отсюда соотношение $x = (v + c)t + f(v)$, т. е. как раз уравнение (94,5) простой волны. Соотношение же (94,4), устанавливающее связь между v и c в простой волне, автоматически выполняется в силу постоянства J_- вдоль характеристики Γ_- .

В § 97 было показано, что если в некоторой части плоскости x, t решение уравнений движения сводится к постоянному течению, то в граничащих с нею областях должна иметься простая волна. Поэтому движение, описываемое общим решением (98,8), может следовать за постоянным движением (в частности, за областью покоя) лишь через промежуточную стадию простой волны. Граница между простой волной и общим решением, как и всякая граница между областями двух аналитически различных решений, есть характеристика. При решении различных конкретных задач возникает необходимость в определении значения функции $\chi(w, v)$ на этой граничной характеристике.

Условие «сшивания» простой волны с общим решением на граничной характеристике получается подстановкой выражений (98,1) для x и t в уравнение простой волны $x = (v \pm c)t + f(v)$; это даёт

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} \pm c \frac{\partial \chi}{\partial w} + f(v) = 0.$$

Кроме того, в простой волне (и на граничной характеристике) имеем:

$$dv = \pm \frac{dp}{\rho c} = \pm \frac{dw}{c},$$

или $\pm c = \frac{dw}{dv}$. Подставив это в написанное условие, получим:

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial w} \frac{dw}{dv} + f(v) = \frac{d\chi}{dv} + f(v) = 0,$$

откуда окончательно

$$\chi = - \int f(v) dv, \quad (98,11)$$

чем и определяется искомое граничное значение χ . В частности, если простая волна центрирована в начале координат, т. е. $f(v) \equiv 0$, то $\chi = \text{const.}$; поскольку функция χ вообще определена лишь с точностью до аддитивной постоянной, то в этом случае можно, не уменьшая общности, положить на граничной характеристике $\chi = 0$.

Задачи

1. Определить движение, возникающее при отражении центрированной волны разрежения от твёрдой стенки.

Решение. Пусть волна разрежения возникает в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ и распространяется в положительном направлении оси x ; она дойдёт до стенки через промежуток времени $t = l/c_0$, где l — расстояние до стенки.

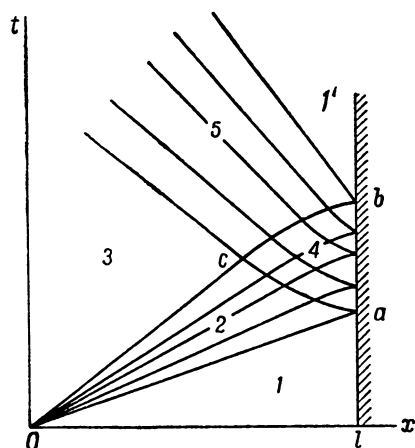


Рис. 75.

На рис. 75 изображена диаграмма характеристик для процесса отражения волны. В областях 1 и 1' газ неподвижен, в области 3 движется с постоянной скоростью $v = -U$. Область 2 есть падающая волна разрежения (с прямолинейными характеристиками C_+), а 5 — отражённая волна (с прямолинейными характеристиками C_-). Область 4 есть «область взаимодействия», в которой должно быть найдено решение; попадая в эту область, прямолинейные характеристики искривляются. Это решение вполне определяется граничными условиями на отрезках ab и ac . На ab (т. е. на стенке) должно быть $v = 0$ при $x = l$; ввиду (98,1) имеем отсюда условие

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = -l \quad \text{при} \quad v = 0.$$

Граница же ac с волной разрежения есть отрезок характеристики C_- ; поэтому на нём

$$c - \frac{\gamma - 1}{2} v = c - \frac{v}{2n + 1} = \text{const.},$$

1) Если волна разрежения возникает от поршня, который начинает выдвигаться из трубы с постоянной скоростью, то U есть скорость поршня.

а поскольку в точке a имеем $v = 0$, $c = c_0$, то $\text{const.} = c_0$. На этой границе должно быть $\chi = 0$, так что имеем условие

$$\chi = 0 \text{ при } c - \frac{v}{2n+1} = c_0.$$

Легко убедиться в том, что функция вида (98,9), удовлетворяющая этим условиям, есть

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!} \left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} \left[\left(c - \frac{v}{2n+1} \right)^2 - c_0^2 \right]^n \right\}, \quad (1)$$

чем и определяется искомое решение.

Уравнение характеристики ac есть (см. задачу § 96)

$$x = -(2n+1)c_0 t + 2(n+1)l \left(\frac{tc_0}{l} \right)^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}.$$

Её пересечение с характеристикой Oc

$$\frac{x}{t} = c_0 - \frac{\gamma+1}{2} U = c_0 - \frac{2(n+1)}{2n+1} U$$

определяет момент исчезновения падающей волны:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1} c_0^n}{[(2n+1)c_0 - U]^{n+1}}.$$

На рис. 75 предполагается, что $U < \frac{2c_0}{\gamma+1}$; в противном случае характеристика Oc направлена в сторону отрицательных x (рис. 76). Процесс

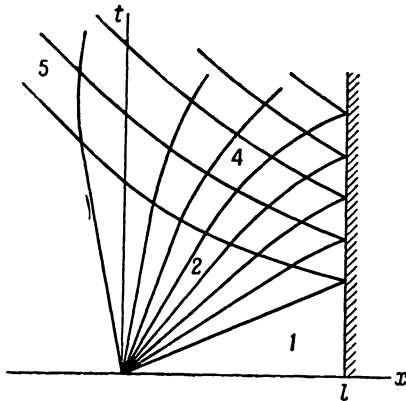


Рис. 76.

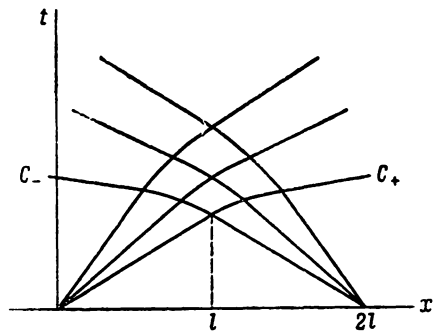


Рис. 77.

взаимодействия падающей и отражённой волн длится при этом бесконечное (а не конечное, как на рис. 75) время.

Функция (1) описывает также и взаимодействие двух одинаковых центрированных волн разрежения, вышедших в момент времени $t = 0$ из точек $x = 0$

и $x = 2l$ и распростирающихся навстречу друг другу, как это очевидно из соображений симметрии (рис. 77) ¹⁾.

2. Вывести уравнение, аналогичное уравнению (98,3), для одномерного изотермического движения идеального газа.

Решение. Для изотермического движения в уравнении Бернулли вместо тепловой функции w стоит величина

$$\mu = \int \frac{dp}{\rho} = c_T^2 \int \frac{d\rho}{\rho} = c_T^2 \ln \rho,$$

где $c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$ — квадрат изотермической скорости звука; у идеального газа в изотермическом случае $c_T = \text{const}$. Выбрав эту величину (вместо w) в качестве независимой переменной, получим тем же способом, что и в тексте, для функции χ следующее линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma^2} = 0.$$

§ 99. Распространение сильных ударных волн

Рассмотрим распространение сферической ударной волны большой интенсивности, возникшей в результате сильного взрыва, т. е. мгновенного выделения в некотором небольшом объёме большого количества энергии (которую мы обозначим E); газ, в котором происходит распространение, будем считать идеальным. Изложенное ниже решение этой задачи принадлежит *Л. И. Седову* (1946).

Мы будем рассматривать волну на расстояниях, не слишком далёких от источника, в той области, где волна обладает ещё большой интенсивностью. В то же время эти расстояния предполагаются большими по сравнению с размерами источника; это даёт возможность считать, что выделение энергии E произошло в одной точке (в начале координат).

Большая интенсивность ударной волны означает, что скачок давления в ней очень велик. Мы будем считать, что давление p_2 позади разрыва настолько велико по сравнению с давлением p_1 невозмущённого газа впереди него, что

$$\frac{p_2}{p_1} \gg \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

Это даёт возможность везде пренебрегать p_1 по сравнению с p_2 , причём отношение плотностей $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ будет равно своему предельному значению $\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ (см. § 85).

Таким образом, вся картина движения газа будет определяться всего двумя параметрами: начальной плотностью газа ρ_1 и выделяю-

¹⁾ Более общий случай столкновения двух волн разрежения, возникших в различные моменты времени, см., К. Станюкович, Теория неустановившихся движений газа, Изд. бюро нов. техники, 1948.

щейся при взрыве энергией E . Из этих параметров и двух независимых переменных: времени t и координаты (расстояния от центра) r , можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, которую мы напомним в виде

$$\xi = r \left(\frac{\rho_1}{Et^3} \right)^{1/5}. \quad (99,1)$$

В результате всё движение будет обладать определённой автомодельностью.

Прежде всего можно утверждать, что положение самой ударной волны в каждый момент времени должно соответствовать определённому постоянному значению ξ_0 безразмерной комбинации ξ . Тем самым сразу определяется закон перемещения ударной волны со временем; обозначая посредством r_0 расстояние волны от центра, имеем:

$$r_0 = \xi_0 \left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5}. \quad (99,2)$$

Отсюда находим скорость распространения ударной волны (скорость относительно невозмущённого газа, т. е. относительно неподвижной системы координат):

$$u_1 = \frac{dr_0}{dt} = \frac{2r_0}{5t}. \quad (99,3)$$

Она убывает со временем, как $t^{-3/5}$.

Давление p_2 , плотность ρ_2 и скорость $v_2 = u_1 - u_2$ газа (относительно неподвижной системы координат) на «задней стороне» разрыва могут быть выражены через u_1 по полученным в § 85 формулам. Согласно (85,5) и (85,6)¹⁾ имеем:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} u_1, \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 u_1^2. \quad (99,4)$$

Плотность остаётся постоянной во времени, а v_2 и p_2 убывают соответственно как $t^{-3/5}$ и $t^{-6/5}$. Отметим также, что создаваемое волной давление p_2 растёт с увеличением полной энергии взрыва пропорционально $E^{2/5}$.

Перейдём, далее, к определению движения газа во всей области за волной. Введём вместо скорости v , плотности ρ и давления p газа безразмерные переменные v' , ρ' , p' , определив их посредством

$$v = \frac{4}{5(\gamma + 1)} \frac{r}{t} v', \quad \rho = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho', \quad p = \frac{8\rho_1}{25(\gamma + 1)} \frac{r^2}{t^2} p'. \quad (99,5)$$

1) Определяемые формулами (85,6) скорости ударной волны относительно газа мы обозначаем здесь как u_1 и u_2 .

Величины v' , ρ' , p' могут быть функциями только одной безразмерной переменной ξ . На поверхности разрыва (т. е. при $\xi = \xi_0$) они должны принимать значения

$$v' = \rho' = p' = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0. \quad (99,6)$$

Уравнения центрально-симметрического адиабатического движения газа гласят:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} + \frac{2\rho v}{r} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \ln \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99,7)$$

Последнее уравнение есть уравнение сохранения энтропии, в которое подставлено выражение (80,12) для энтропии идеального газа. После подстановки выражений (99,5) получается система уравнений в полных производных для функций v' , ρ' , p' . Интегрирование этой системы облегчается тем, что один из её интегралов может быть написан непосредственно из следующих соображений.

Тот факт, что мы пренебрегаем давлением p_1 невозмущённого газа, означает, другими словами, что мы пренебрегаем первоначальной энергией газа по сравнению с энергией E , приобретаемой им в результате взрыва. Поэтому ясно, что полная энергия газа внутри ограниченной ударной волной сферы постоянна (и равна E). Более того, ввиду автомодельности движения очевидно, что должна оставаться неизменной энергия газа и внутри любой сферы меньшего радиуса, расширяющейся со временем по закону $\xi = \text{const.}$ с любым (а не только равным ξ_0) значением const. ; радиальная скорость перемещения точек этой сферы равна $v_n = \frac{2r}{5t}$ [ср. (99,3)].

Легко написать уравнение, выражающее это постоянство энергии. С одной стороны, в течение времени dt через поверхность сферы (площади $4\pi r^2$) уходит энергия

$$dt 4\pi r^2 \rho v \left(w + \frac{v^2}{2} \right).$$

С другой стороны, за это же время объём сферы увеличивается на элемент $dt v_n 4\pi r^2$, внутри которого заключён газ с энергией

$$dt 4\pi r^2 v_n \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right).$$

Приравняв эти два выражения друг другу, подставив $\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$, $w = \gamma \varepsilon$ и вводя безразмерные функции согласно (99,5), получим соотношение

$$\frac{p'}{\rho'} = \frac{(\gamma+1-2v')v'^2}{(2\gamma v' - \gamma - 1)}, \quad (99,8)$$

которое и является искомым интегралом системы уравнений. Он авто-

матически удовлетворяет граничным условиям (99,6) на поверхности разрыва.

После установления интеграла (99,8) интегрирование системы уравнений элементарно, хотя довольно громоздко. Второе и третье из уравнений (99,7) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv'}{d \ln \xi} + \left(v' - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{d \ln p'}{d \ln \xi} &= -3v', \\ \frac{d}{d \ln \xi} \left(\ln \frac{p'}{\rho'^{\gamma}} \right) &= \frac{5(\gamma + 1) - 4v'}{2v' - (\gamma + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (99,9)$$

Из этих двух уравнений с помощью соотношения (99,8) выражаем производные $\frac{dv'}{d \ln \xi}$ и $\frac{d \ln p'}{dv'}$ в виде функций только от v' , после чего интегрирование с учётом граничных условий (99,6) приводит к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^5 &= v'^2 \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{v_1} \left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right]^{v_2}, \\ \rho' &= \left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right]^{v_3} \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{v_4} \left[\frac{\gamma + 1 - 2v'}{\gamma - 1} \right]^{v_5}, \\ v_1 &= \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}, \quad v_2 = -\frac{5(\gamma - 1)}{2\gamma + 1}, \quad v_3 = \frac{3}{2\gamma + 1}, \\ v_4 &= \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2 - \gamma)(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}, \quad v_5 = \frac{1}{\gamma - 2}. \end{aligned} \right\} \quad (99,10)$$

Формулы (99,8), (99,10) дают полное решение поставленной задачи. Входящая сюда постоянная ξ_0 определяется условием

$$E = \int_0^{r_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) 4\pi r^2 dr,$$

выражающим равенство полной энергии газа энергии взрыва E . После введения безразмерных величин это условие приобретает вид

$$\xi_0^5 \frac{32\pi}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 (\xi^4 \rho' v'^2 + \xi^9 p') d\xi = 1. \quad (99,11)$$

Так, для воздуха ($\gamma = 7/5$) эта постоянная оказывается равной $\xi_0 = 1,033$.

Отношения $\frac{v}{v_2}$ и $\frac{\rho}{\rho_2}$ как функции отношения $\frac{r}{r_0} = \frac{\xi}{\xi_0}$ стремятся, как легко видеть из полученных формул, при $r/r_0 \rightarrow 0$ к нулю по законам

$$\frac{v}{v_2} \propto \frac{r}{r_0}, \quad \frac{\rho}{\rho_2} \propto \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3}{\gamma-1}}; \quad (99,12)$$

отношение же давлений p/p_2 стремится к постоянному пределу, а отношение температур — соответственно к бесконечности.

На рис. 78 изображены графически величины $\frac{v}{v_2}$, $\frac{p}{p_2}$ и $\frac{\rho}{\rho_2}$ как функции $\frac{r}{r_0}$ для воздуха ($\gamma = 1,4$). Обращает на себя внимание очень быстрое убывание плотности по направлению внутрь сферы: почти всё вещество сконцентрировано в сравнительно узком слое позади

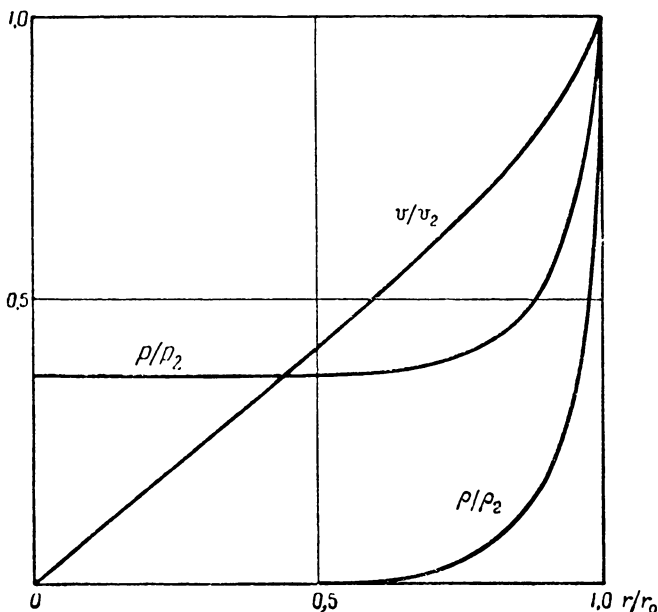


Рис. 78.

фронта ударной волны. Это обстоятельство является естественным следствием того, что по поверхности наибольшего, равного r_0 , радиуса должно быть распределено вещество с шестикратной по сравнению с нормальной плотностью ¹⁾.

§ 100. Теория «мелкой воды»

Замечательную аналогию движению сжимаемого газа представляет движение в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала (мала по

¹⁾ Результаты вычислений для других значений γ приведены Л. И. Седовым в книге «Методы подобия и размерности в механике», гл. IV, § 7, Гостехиздат, 1951. Там же дано аналогичное решение задачи о сильном взрыве в случае цилиндрической симметрии.

сравнению с характеристическими размерами задачи, например, по сравнению с размерами неровностей дна водоёма). В этом случае поперечной компонентой скорости жидкости можно пренебречь по сравнению с продольной (вдоль слоя) скоростью, а последнюю можно считать постоянной вдоль толщины слоя. В этом приближении (называемом «гидравлическим») жидкость можно рассматривать как «двухмерную» среду, обладающую в каждой точке определённой скоростью v и, кроме того, характеризующуюся в каждой точке значением величины h — толщины слоя.

Соответствующие общие уравнения движения отличаются от уравнений, полученных в § 13, лишь тем, что изменения величин при движении не должны предполагаться малыми, как это делалось в § 13 при изучении длинных гравитационных волн малой амплитуды; в связи с этим в уравнении Эйлера должны быть сохранены члены второго порядка по скорости. В частности, для одномерного движения жидкости в канале, зависящего только от одной координаты x (и времени), эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (100,1)$$

(глубина h предполагается здесь постоянной вдоль ширины канала).

Длинные гравитационные волны представляют собой, с общей точки зрения, малые возмущения движения рассматриваемой системы. Результаты § 13 показывают, что такие возмущения распространяются относительно жидкости с конечной скоростью, равной

$$c = \sqrt{gh}. \quad (100,2)$$

Эта скорость играет здесь роль скорости звука в газодинамике. Так же, как это было сделано в § 79, мы можем заключить, что если жидкость движется со скоростями $v < c$ (так называемое «спокойное течение»), то влияние возмущений распространяется на весь поток как вниз, так и вверх по течению. При движении же со скоростями $v > c$ («стремительное течение») влияние возмущений распространяется лишь на определённые области потока вниз по течению.

Давление p (отсчитываемое от атмосферного давления на свободной поверхности) меняется по глубине жидкости согласно гидростатическому закону $p = \rho g(h - z)$, где z — высота точки над дном. Полезно заметить, что если ввести величины:

$$\bar{p} = \rho h, \quad \bar{p} = \int_0^h p \, dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 = \frac{g}{2\rho} \bar{p}^2, \quad (100,3)$$

то уравнения (100,1) примут вид

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v \bar{p} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (100,4)$$

формально совпадающий с видом уравнений адиабатического течения идеального газа с $\gamma = 2$ ($\bar{p} \propto \bar{\rho}^3$). Это обстоятельство позволяет непосредственно переносить в теорию «мелкой воды» все газодинамические результаты, относящиеся к движению без образования ударных волн. Для последних соотношения в теории «мелкой воды» отличаются от газодинамических соотношений для идеального газа.

«Ударная волна» в текущей по каналу жидкости представляет собой резкий скачок высоты жидкости h , а с нею и её скорости v (так называемый «прыжок воды»). Соотношения между значениями этих величин по обе стороны разрыва можно получить с помощью условий непрерывности потоков массы и импульса жидкости. Плотность потока массы (отнесённая к 1 см ширины канала) есть $j = \rho v h$. Плотность же потока импульса получается интегрированием $p + \rho v^2$ по глубине жидкости и равна

$$\int_0^h (p + \rho v^2) dz = \frac{\rho g h^2}{2} + \rho v^2 h.$$

Поэтому условия их непрерывности дают два уравнения:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \quad (100,5)$$

$$v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2}. \quad (100,6)$$

Эти соотношения устанавливают связь между четырьмя величинами: v_1 , v_2 , h_1 , h_2 , две из которых могут быть заданы произвольно. Выражая скорости v_1 , v_2 через высоты h_1 , h_2 , получим:

$$v_1^2 = \frac{g}{2} \frac{h_2}{h_1} (h_1 + h_2), \quad v_2^2 = \frac{g}{2} \frac{h_1}{h_2} (h_1 + h_2). \quad (100,7)$$

Потоки же энергии по обе стороны разрыва неодинаковы; их разность определяет количество энергии, диссипируемой (в 1 сек.) в разрыве. Плотность потока энергии вдоль канала равна

$$q = \int_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dz = \frac{1}{2} j (gh + v^2).$$

Воспользовавшись выражениями (100,7), получим для искомой разности

$$q_1 - q_2 = \frac{g j}{4 h_1 h_2} (h_1^2 + h_2^2) (h_2 - h_1).$$

Пусть жидкость движется через разрыв со стороны 1 на сторону 2. Тогда тот факт, что энергия диссипируется, означает, что должно быть $q_1 - q_2 > 0$, и мы приходим к выводу, что

$$h_2 > h_1, \quad (100,8)$$

т. е. жидкость движется со стороны меньшей на сторону большей высоты. Из (100,7) можно теперь заключить, что

$$v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2} \quad (100,9)$$

в полной аналогии с газодинамическими ударными волнами. Неравенства (100,9) можно было бы найти и как необходимое условие устойчивости разрыва, подобно тому как это было сделано в § 84.

ГЛАВА XI

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

§ 101. Волна разрежения

Линия пересечения двух ударных волн является в математическом отношении особой линией для функций, описывающих движение газа. Такой же особой линией является край всякого острого угла на поверхности обтекаемых газом тел. Оказывается возможным исследовать движение газа вблизи особой линии в самом общем виде (*Прандтль* и *Майер*, 1908).

Рассматривая область вблизи небольшого участка особой линии, мы можем считать последнюю прямой, которую мы выберем в качестве оси z цилиндрической системы координат r, φ, z . Вблизи особой линии все величины существенным образом зависят от угла φ . Напротив, от координаты r они зависят лишь слабо, и при достаточно малых r зависимость от r можно вообще пренебречь. Несущественна также зависимость величин от координаты z , — изменением картины течения вдоль небольшого участка особой линии можно пренебречь.

Таким образом, мы должны исследовать стационарное движение, при котором все величины являются функциями только от φ . Уравнение сохранения энтропии $\mathbf{v}\nabla s = 0$ даёт $v_\varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$, откуда $s = \text{const.}$ ¹⁾, т. е. движение изэнтропично. Поэтому в уравнении Эйлера можно писать ∇w вместо $\frac{\nabla p}{\rho}$: $(\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla w$. В цилиндрических координатах получаем три уравнения:

$$\frac{v_\varphi}{r} \frac{dv_r}{d\varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0, \quad \frac{v_\varphi}{r} \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{d\varphi}, \quad v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0.$$

¹⁾ Если положить $v_\varphi = 0$ (вместо $\frac{ds}{d\varphi} = 0$), то, как легко заключить из написанных ниже уравнений движения, получится $v_r = 0, v_z \neq 0$. Такое движение соответствовало бы пересечению поверхностей тангенциальных разрывов (со скачком скорости v_z) и ввиду неустойчивости таких разрывов не представляет интереса.

Из последнего имеем $v_z = \text{const.}$; без ограничения общности можно положить $v_z = 0$ и рассматривать движение как плоское, — это сводится просто к соответствующему выбору скорости движения системы координат вдоль оси z . Первые два уравнения переписываем в виде

$$v_\varphi = \frac{dv_r}{d\varphi}, \quad (101,1)$$

$$v_\varphi \left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\varphi} = - \frac{d\omega}{d\varphi}. \quad (101,2)$$

Подставляя (101,1) в (101,2), получаем:

$$v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \frac{dv_r}{d\varphi} = - \frac{d\omega}{d\varphi},$$

или, интегрируя:

$$\omega + \frac{v_\varphi^2 + v_r^2}{2} = \text{const.} \quad (101,3)$$

Заметим, что равенство (101,1) означает, что $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, т. е. движение потенциально; в связи с этим и имеет место уравнение Бернулли (101,3).

Далее, уравнение непрерывности $\text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0$ даёт

$$\rho v_r + \frac{d}{d\varphi} (\rho v_\varphi) = \rho \left(v_r + \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right) + v_\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} = 0. \quad (101,4)$$

Используя (101,2), получим отсюда

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - v_\varphi^2 \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = 0.$$

Но производная $\frac{d\rho}{d\varphi}$, которую правильнее писать в виде $\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)_s$, есть квадрат скорости звука. Таким образом,

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \right) \left(1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2} \right) = 0. \quad (101,5)$$

Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами. Во-первых, может быть

$$\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r = 0.$$

Тогда из (101,2) имеем $p = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, а из (101,3) получаем, что и $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \text{const.}$, т. е. скорость постоянна по абсолютной величине. Легко видеть, что и направление скорости в этом случае

постоянно. Угол χ , образуемый скоростью с некоторым заданным направлением в плоскости движения, равен (рис. 79)

$$\chi = \varphi + \arctg \frac{v_\varphi}{v_r}. \quad (101,6)$$

Дифференцируя это выражение по φ и используя (101,1) и (101,2), получаем после простого преобразования

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = -\frac{v_r}{\rho v_\varphi v^2} \frac{dp}{d\varphi}. \quad (101,7)$$

При $p = \text{const.}$ имеем, действительно, $\chi = \text{const.}$ Таким образом, приравнявая нулю первый множитель в (101,5), мы получаем просто тривиальное решение — однородный поток.

Во-вторых, уравнению (101,5) можно удовлетворить, положив $1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2} = 0$, т. е. $v_\varphi = \pm c$. Радиальная же скорость определится из (101,3). Обозначая в этом уравнении const. посредством w_0 , получаем:

$$v_\varphi = \pm c, \quad v_r = \pm \sqrt{2(w_0 - w) - c^2}.$$

В этом решении перпендикулярная к радиус-вектору составляющая v_φ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука. Полная же скорость $v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$, следовательно, больше скорости звука. Как абсолютная величина скорости, так и её направление меняются от точки к точке. Поскольку скорость звука не может пройти через нуль, то ясно, что непрерывная функция $v_\varphi(\varphi)$ должна быть равна везде $+c$ или же везде $-c$. Выбирая соответствующим образом направление отсчёта угла φ , мы можем условиться считать, что $v_\varphi = c$. Что касается выбора знака у v_r , то мы увидим ниже, что он диктуется физическими соображениями и должен быть положительным. Таким образом:

$$v_\varphi = c, \quad v_r = \sqrt{2(w_0 - w) - c^2}. \quad (101,8)$$

Из уравнения непрерывности (101,4) имеем $d\varphi = -\frac{d(\rho v_\varphi)}{\rho v_r}$. Подставив сюда (101,8) и интегрируя, получим:

$$\varphi = - \int \frac{d(\rho c)}{\rho \sqrt{2(w_0 - w) - c^2}}. \quad (101,9)$$

Если известно уравнение состояния газа и уравнение адиабаты (напомним, что $s = \text{const.}$), то с помощью этой формулы можно опре-

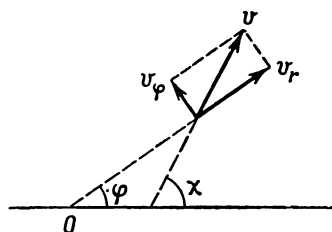


Рис. 79.

делить зависимость всех величин от угла φ . Таким образом, формулы (101,8) и (101,9) полностью определяют движение газа.

Займёмся теперь более подробным изучением полученного решения. Прежде всего заметим, что прямые $\varphi = \text{const.}$ пересекают в каждой точке линии тока под углом возмущений (его синус равен $\frac{v_\varphi}{v} = \frac{c}{v}$), т. е. являются характеристиками. Таким образом, одно из двух семейств характеристик (в плоскости x, y) представляет собой пучок выходящих из особой точки прямых и обладает в данном случае важным свойством — вдоль каждой из них все величины остаются постоянными. В этом смысле рассматриваемое решение играет в теории плоского стационарного движения такую же роль, какую играет изученное в § 92 автомодельное движение в теории нестационарных одномерных течений. Мы вернёмся ещё к этому вопросу в § 107.

Из (101,9) видно, что $(\rho c)' < 0$ ($'$ обозначает дифференцирование по φ). Написав

$$(\rho c)' = \frac{d(\rho c)}{d\rho} \rho'$$

и замечая, что производная $\frac{d(\rho c)}{d\rho}$ положительна (см. (92,9)), мы находим, что производная $\rho' < 0$; вместе с нею отрицательны и производные $\rho' = c^2 \rho'$, $\omega' = \rho'/\rho$. Далее, из того, что производная ω' отрицательна, следует, что абсолютная величина скорости $v = \sqrt{2(\omega_0 - \omega)}$ — возрастающая функция φ . Наконец, из (101,7) следует, что $\chi' > 0$. Таким образом, получаем следующие неравенства:

$$\frac{dv}{d\varphi} < 0, \quad \frac{d\rho}{d\varphi} < 0, \quad \frac{d\omega}{d\varphi} > 0, \quad \frac{d\chi}{d\varphi} > 0. \quad (101,10)$$

Другими словами, в направлении обхода вокруг особой точки, совпадающем с направлением оттекания, плотность и давление падают, а вектор скорости возрастает по абсолютной величине и поворачивается в направлении обхода.

Описанное движение часто называют волной разрежения; ниже мы будем пользоваться этим термином.

Легко видеть, что волна разрежения не может иметь места во всей области вокруг особой линии. Действительно, поскольку v есть монотонно возрастающая функция φ , то при полном обходе вокруг начала координат (т. е. при изменении φ на 2π) мы получили бы для v значение, отличное от исходного, что нелепо. Ввиду этого истинная картина движения вокруг особой линии должна представлять собой совокупность секториальных областей, разделённых плоскостями $\varphi = \text{const.}$, являющимися поверхностями разрывов. В каждой из таких областей происходит либо движение, описываемое волной разрежения, либо движение с постоянной скоростью. Число и характер этих областей для различных конкретных случаев будут установлены в следующих параграфах. Сейчас укажем лишь, что граница

между волной разрежения и областью однородного течения должна быть непременно слабым разрывом. Действительно, эта граница не может быть тангенциальным разрывом (разрывом скорости v_r), так как на ней не обращается в нуль нормальная к ней компонента скорости $v_\varphi = c$. Она не может также быть ударной волной, так как нормальная компонента скорости (v_φ) по одну сторону от такого разрыва должна была бы быть больше, а по другую — меньше скорости звука, между тем как в данном случае с одной из сторон границы мы во всяком случае имеем $v_\varphi = c$.

Из сказанного можно вывести важное следствие. Возмущения, вызывающие образование слабых разрывов, исходят, очевидно, от особой линии (оси z) и распространяются по направлению от неё. Это значит, что ограничивающие волну разрежения слабые разрывы должны быть «исходящими» по отношению к этой линии, т. е. касательная к слабому разрыву компонента скорости v_r должна быть положительна. Таким образом, мы оправдали сделанный в (101,8) выбор знака у v_r .

Применим теперь полученные формулы к идеальному газу. В идеальном газе $w = \frac{c^2}{\gamma - 1}$; уравнение же адиабаты Пуассона можно написать в виде

$$\rho c^{\frac{2}{\gamma-1}} = \text{const.}, \quad \rho c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \text{const.} \quad (101,11)$$

(ср. (92,13)). Пользуясь этими формулами, представим интеграл (101,9) в виде

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{dc}{\sqrt{c_*^2 - c^2}},$$

где c_* — критическая скорость (см. (80,14)). Отсюда

$$\varphi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c}{c_*} + \text{const.},$$

или, выбирая начало отсчёта φ так, чтобы было $\text{const.} = 0$:

$$v_\varphi = c = c_* \cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \quad (101,12)$$

Согласно формуле (101,8) получаем отсюда

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_* \sin \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \quad (101,13)$$

Далее, воспользовавшись уравнением адиабаты Пуассона в виде (101,11), находим зависимость давления от угла φ :

$$p = p_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (101,14)$$

Наконец, для угла χ (101,6) имеем:

$$\chi = \varphi + \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) \quad (101,15)$$

(угол χ отсчитывается от того же направления, от которого отсчитывается φ).

Поскольку должно быть $v_r > 0$, $c > 0$, то угол φ в этих фор-

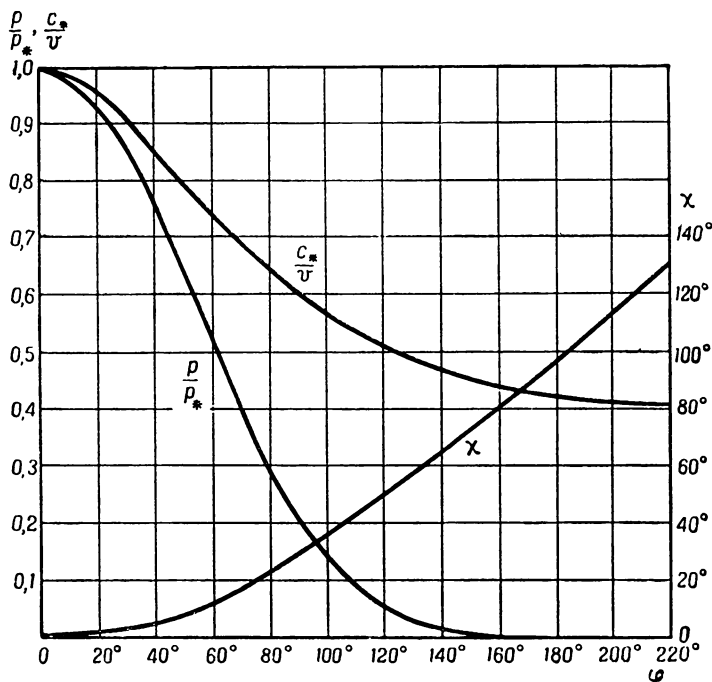


Рис. 80.

мулах может меняться только в пределах между $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_{\max}$, где

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \quad (101,16)$$

Это значит, что волна разрежения может занимать сектор с углом раствора, не превышающим φ_{\max} ; так, для двухатомного газа (воздух) этот угол равен $219,3^\circ$. При изменении φ от 0 до φ_{\max} угол χ меняется от $\frac{\pi}{2}$ до φ_{\max} . Таким образом, направление скорости в волне разрежения может повернуться на угол, не превышающий $\varphi_{\max} - \frac{\pi}{2}$ (для воздуха $129,3^\circ$).

При $\varphi = \varphi_{\max}$ давление обращается в нуль. Другими словами, если волна разрежения простирается вплоть до этого угла, то ограничивающий её с этой стороны слабый разрыв представляет собой границу с вакуумом. При этом он, естественно, совпадает с одной из линий тока: имеем здесь

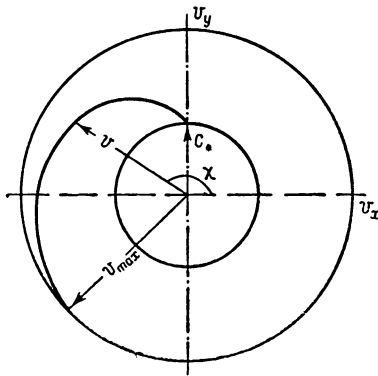


Рис. 81.

Полезно заметить форму, которую имеет определяемая формулами (101,12) и (101,13) кривая в плоскости v_x, v_y (так называемый годограф скоростей). Это есть дуга эпициклоиды, построенной между окружностями радиусов $v = c_*$ и $v = c_* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = v_{\max}$ (рис. 81).

Задачи

1. Определить форму линий тока в волне разрежения.

Решение. Уравнение линий тока для двухмерного движения в полярных координатах есть $\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\varphi}{v_\varphi}$. Подставляя сюда (101,12) и (101,13) и интегрируя, получаем:

$$r = r_0 \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Эти линии тока представляют собой семейство подобных кривых, обращённых своей вогнутостью в сторону начала координат, являющегося центром подобия.

2. Определить наибольший возможный угол между слабыми разрывами, ограничивающими волну разрежения, при заданных значениях v_1, c_1 скорости газа и скорости звука на первом из них.

Решение. Для соответствующего первому разрыву значения угла φ находим из (101,12)

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*}.$$

Значение же $\varphi_2 = \varphi_{\max}$, так что искомым угол равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsin \frac{c_1}{c_*}.$$

Критическая скорость c_* выражается через v_1 , c_1 уравнением Бернулли

$$\omega_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2.$$

Наибольший возможный угол поворота скорости газа в волне разрежения получится соответственно с помощью (101,15) как разность $\chi_{\max} = \chi(\varphi_1) - \chi(\varphi_2)$:

$$\chi_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arcsin \frac{c_1}{c_*} - \arcsin \frac{c_1}{v_1}.$$

Как функция от v_1/c_1 , χ_{\max} имеет наибольшее значение при $v_1/c_1 = 1$

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} - 1 \right).$$

При $\frac{v_1}{c_1} \rightarrow \infty$ χ_{\max} стремится к нулю, как

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_1}{v_1}.$$

§ 102. Пересечение ударных волн

Ударные волны могут пересекаться друг с другом; это пересечение происходит вдоль некоторой линии. Рассматривая движение в окрестности небольших участков этой линии, мы можем считать её прямой, а поверхности разрывов — плоскими. Таким образом, достаточно рассмотреть пересечение плоских ударных волн.

Линия пересечения разрывов представляет собой в математическом отношении особую линию (как уже указывалось в начале § 101). Вся картина движения вокруг неё складывается из ряда секториальных областей, в каждой из которых имеется либо однородный поток, либо описанная в § 101 волна разрежения. Оказывается возможным дать общую классификацию возможных типов пересечения поверхностей разрывов (*Л. Ландау, 1944*).

Прежде всего необходимо сделать следующее замечание. Если по обе стороны ударной волны движение газа является сверхзвуковым, то (как было указано в начале § 86) можно говорить о «направлении» ударной волны и соответственно этому различать ударные волны, «исходящие» от линии пересечения, и волны, «приходящие» к ней. В первом случае касательная составляющая скорости направлена от линии пересечения, и можно сказать, что возмущения, вызывающие образование разрыва, «исходят» от этой линии. Во втором же случае возмущения исходят из какого-то места, постороннего по отношению к линии пересечения.

Если по одну из сторон от ударной волны движение является дозвуковым, то возмущения распространяются в обе стороны вдоль её поверхности, и понятие о «направлении» волны теряет, строго говоря, смысл. Для нижеследующих рассуждений существенно, однако, что вдоль такого разрыва могут распространяться исходящие от

места пересечения возмущения. В этом смысле эти ударные волны в излагаемых ниже рассуждениях играют ту же роль, что и чисто сверхзвуковые исходящие волны, и под «исходящими» ударными волнами ниже подразумеваются обе эти категории волн.

На следующих ниже рисунках изображаются картины течения в плоскости, перпендикулярной к линии пересечения. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в этой плоскости. Параллельная линии пересечения (а потому и всем плоскостям разрывов) компонента скорости должна быть одинакова во всех областях вокруг линии пересечения и поэтому надлежащим выбором системы координат может быть всегда обращена в нуль.

Легко видеть, что не может быть такого пересечения ударных волн, при котором нет хотя бы одной «приходящей» волны. Так,

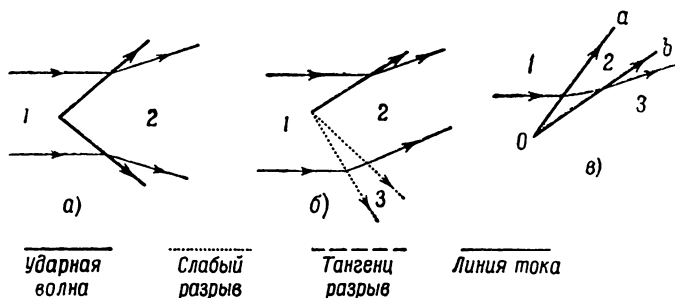


Рис. 82.

при изображённом на рис. 82, а пересечении двух «уходящих» ударных волн линии тока натекающего слева потока отклонились бы в разные стороны, между тем как во всей области 2 скорость должна быть постоянной; это затруднение не может быть преодолено введением в область 2 ещё каких-либо других разрывов¹⁾. Аналогичным образом убеждаемся в невозможности изображённого на рис. 82, б пересечения «уходящей» ударной волны с «уходящей» же волной разрежения; хотя в такой картине и можно добиться постоянства направления скорости в области 2, но при этом не сможет быть выполнено условие постоянства давления, так как в ударной волне давление возрастает, а в волне разрежения — падает.

Далее, поскольку пересечение не может оказывать обратного влияния на «приходящие» ударные волны, то одновременное пересечение (вдоль общей линии) более чем двух таких волн, возникающих от каких-то посторонних причин, было бы невероятной случайностью.

¹⁾ Чтобы не загромождать текст однообразными рассуждениями, мы не будем приводить аналогичные соображения для случаев, когда имеются области дозвукового движения и «уходящей» волной является в действительности ударная волна, граничащая с дозвуковой областью.

Таким образом, в картине пересечения могут участвовать всего лишь одна или две приходящие ударные волны.

Весьма существенно следующее обстоятельство: протекающий мимо точки пересечения газ может пройти лишь через одну исходящую из этой точки ударную волну или волну разрежения. Пусть, например, газ проходит через следующие друг за другом две исходящие из точки O ударные волны, как это показано на рис. 82, в. Поскольку позади волны Oa нормальная компонента скорости $v_{2n} < c_2$, то тем более была бы меньше c_2 нормальная к волне Ob компонента скорости в области 2 в противоречии с основным свойством ударных волн. Аналогичным образом убеждаемся в невозможности прохождения газа через следующие одна за другой исходящие из точки O две волны разрежения или волну разрежения и ударную волну.

Эти соображения, очевидно, не распространяются на приходящие к точке пересечения ударные волны.

Теперь мы можем приступить к перечислению возможных типов пересечений.

На рис. 83 изображено пересечение, в котором участвует всего одна приходящая ударная волна Oa ; две другие ударные волны Ob и Oc являются исходящими. Этот случай можно рассматривать как разветвление одной ударной волны на две¹⁾. Легко видеть, что наряду с двумя уходящими ударными волнами должен возникнуть ещё и один расположенный между ними тангенциальный разрыв Od , разделяющий потоки газа, протекшего соответственно через Ob или Oc ²⁾. Действительно, волна Oa возникает от посторонних причин и потому является полностью заданной. Это значит, что имеют определённые заданные значения термодинамические величины (скажем, p , ρ) и скорость v в областях 1 и 2. Поэтому в нашем распоряжении остаются всего две величины — углы, определяющие направления разрывов Ob и Oc . С их помощью, однако, вообще говоря, нельзя удовлетворить четырём условиям (постоянство p , ρ и двух компонент скорости) в области 3—4, которые требовались бы

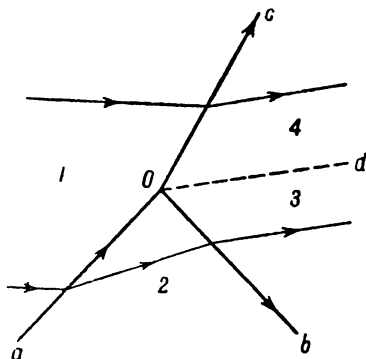


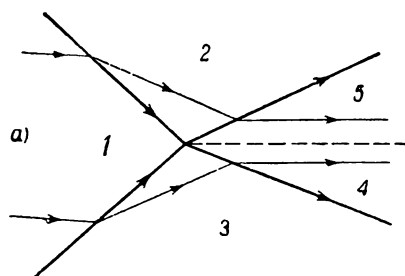
Рис. 83.

1) Следует отметить, что разветвление ударной волны на одну ударную же волну и одну волну разрежения невозможно (можно без труда убедиться в том, что при таком пересечении нельзя было бы согласовать друг с другом изменения давления и изменения направлений скорости в обеих исходящих волнах).

2) Как всегда, тангенциальный разрыв в действительности размывается в турбулентную область.

при отсутствии тангенциального разрыва Od . Введение же последнего уменьшает число условий до двух (постоянство давления и направления скорости).

Разветвиться может, однако, отнюдь не произвольная ударная волна. Приходящая ударная волна определяется (при заданном термодинамическом состоянии газа I)



двумя параметрами, например числом M_1 натекающего потока и отношением давлений p_1/p_2 . Разветвление оказывается возможным лишь в определённой области плоскости этих двух переменных¹⁾.

Пересечения, содержащие две приходящие ударные волны, можно рассматривать как результат «столкновения» двух волн, возникших где-то от посторонних причин. При этом возможны два существенно различных случая, изображённых на рис. 84.

В первом случае столкновение двух ударных волн приводит к возникновению двух ударных же волн, исходящих из точки пересечения. Выполнение всех необходимых условий снова требует возникновения тангенциального разрыва, расположенного между уходящими ударными волнами.

Во втором случае вместо двух ударных волн возникают одна ударная волна и одна волна разрежения.

Две сталкивающиеся ударные волны определяются тремя параметрами (например, M_1 и отношениями p_1/p_2 , p_1/p_3).

Описанные типы пересечений возможны лишь в определённых областях значений этих

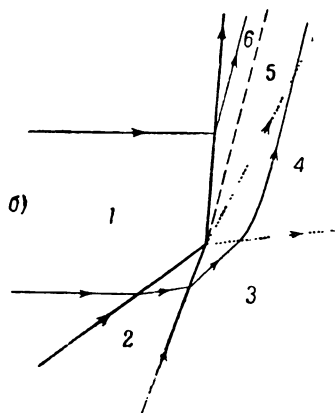


Рис. 84.

¹⁾ Определение этой области требует весьма громоздких алгебраических вычислений. Имеющиеся по этому поводу в литературе результаты (см., например, Р. Курант и К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, гл. IV, ИЛ, 1950), к сожалению, в значительной мере обесцениваются тем, что в них не проводится различие между приходящими и уходящими ударными волнами. В связи с этим в число тройных конфигураций попадают и такие, в которых имеются две приходящие ударные волны и одна уходящая. Но такой случай представляет собой пересечение двух волн, возникающих от посторонних причин и потому приходящих к точке пересечения с заданными значениями всех параметров. Их «слияние» в одну волну возможно лишь при вполне определённом соотношении между этими произвольными параметрами, что являлось бы невероятной случайностью.

параметров. Если же значения параметров лежат вне этих областей, то до столкновения ударных волн должно произойти их разветвление.

Ещё один тип пересечения разрывов представляет отражение ударной волны от тангенциального разрыва. На рис. 85 область 5 есть область неподвижного газа, отделённая от движущегося газа тангенциальным разрывом. В обоих граничащих с нею областях 1 и 4 давление должно быть одинаковым (равным p_6). Поскольку же в ударной волне давление возрастает, то ясно, что ударная волна должна отразиться от тангенциального разрыва в виде волны разрежения 3, понижающей давление до первоначального значения.

Наконец, скажем несколько слов о пересечении ударной волны с при-

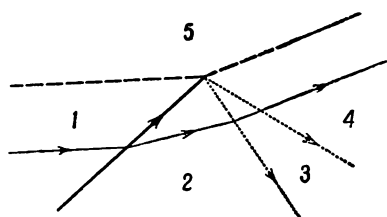


Рис. 85.

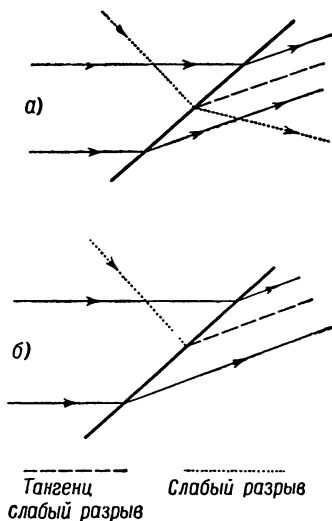


Рис. 86.

ходящим от постороннего источника слабым разрывом. Здесь могут представиться два случая в зависимости от того, является ли движение за ударной волной сверх- или дозвуковым. В первом случае (рис. 86, а) слабый разрыв «преломляется» на ударной волне, проходя в пространство позади неё (сама же ударная волна в точке пересечения излома не имеет; её форма имеет лишь особенность более высокого порядка — того же характера, что и особенность на слабом разрыве). Кроме того, изменение энтропии в ударной волне должно привести к возникновению позади неё ещё и «слабого тангенциального разрыва», на котором испытывают скачок производные энтропии.

Если же позади ударной волны течение становится дозвуковым, то слабый разрыв не может проникнуть в эту область и оканчивается в точке пересечения (рис. 86, б). Последняя является в этом случае особой точкой (можно показать, что распределение скоростей позади ударной волны имеет в этой точке особенность логарифмического типа). Кроме того, как и в предыдущем случае, позади ударной волны возникает слабый тангенциальный разрыв энтропии.

§ 103. Пересечение ударных волн с поверхностью твёрдого тела

Фундаментальную роль в явлении стационарного пересечения ударных волн с поверхностью обтекаемого тела играет их взаимодействие с пограничным слоем. Свойства этого взаимодействия весьма сложны и до настоящего времени ещё недостаточно изучены как с экспериментальной, так и с теоретической стороны. Однако уже простые общие соображения позволяют высказать некоторые существенные утверждения, которые мы здесь и изложим ¹⁾.

В ударной волне давление испытывает скачок, возрастаая по направлению движения газа. Поэтому, если бы ударная волна пересекла поверхность тела, то вблизи места пересечения имелось бы конечное возрастание давления на отрезке очень малой длины, т. е. имелся бы очень большой положительный градиент давления. Но мы знаем, что такое резкое возрастание давления вблизи твёрдой стенки невозможно (см. конец § 40); оно должно вызвать явление отрыва, в результате чего картина обтекания изменится таким образом, чтобы отодвинуть ударную волну на достаточное расстояние от поверхности тела.

Эти соображения, однако, не относятся к случаю, когда ударная волна обладает достаточно слабой интенсивностью. Из изложенного в конце § 40 доказательства ясно, что невозможность положительного скачка давления на границе пограничного слоя связана с предположением о достаточно большой величине этого скачка: он должен превосходить некоторый предел, зависящий от значения R и убывающий с его увеличением ²⁾.

Таким образом, мы приходим к следующим важным выводам. Стационарное пересечение достаточно сильных ударных волн с поверхностью твёрдого тела невозможно. С твёрдой поверхностью могут пересекаться лишь ударные волны не слишком большой интенсивности, тем меньшей, чем выше R . Предельная допустимая интенсивность ударной волны зависит также и от того, является ли пограничный слой ламинарным или турбулентным. Турбулизация погранич-

1) В пограничном слое непременно имеется прилегающая к поверхности тела дозвуковая часть, в которую ударная волна вообще не может проникнуть. Говоря условно о «пересечении», мы отвлекаемся от этого обстоятельства, несущественного для нижеследующих рассуждений.

2) В задаче к § 40 определена наименьшая величина изменения давления Δp на расстоянии Δx , необходимая для возникновения отрыва в ламинарном пограничном слое. В применении к данному случаю речь идёт об изменении давления на протяжении расстояния порядка величины толщины δ пограничного слоя, и мы находим следующий закон убывания Δp с увеличением числа Рейнольдса:

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{R_x^{1/3}} \sim \frac{1}{R_\delta^{2/3}}.$$

ного слоя затрудняет возникновение отрыва (§ 45). Поэтому при турбулентном пограничном слое от поверхности тела могут отходить более сильные ударные волны, чем при ламинарном пограничном слое ¹⁾.

Во избежание недоразумений подчеркнём, что для всех изложенных рассуждений существенно, чтобы пограничный слой имелся перед ударной волной (т. е. вверх по течению от неё). Поэтому полученные результаты относятся, в частности, и к ударным волнам, отходящим от заднего края, но не относятся к волнам, отходящим от переднего края тела, как это может, например, иметь место при обтекании острого клина (о чём будет подробно идти речь в следующем параграфе). В последнем случае газ подходит к краю угла извне, т. е. из пространства, в котором никакого пограничного слоя не существует; ясно поэтому, что изложенные соображения ни в какой мере не затрагивают возможности существования ударных волн, отходящих от края такого угла.

При дозвуковом движении отрыв может произойти лишь при возрастании давления в основном потоке вниз по течению вдоль обтекаемой поверхности. При сверхзвуковом же движении появляется своеобразная возможность возникновения отрыва и в области, где давление падает вниз по течению. Такое явление может осуществляться путём комбинирования ударной волны слабой интенсивности с отрывом, причём необходимое для возникновения отрыва повышение давления происходит в самой ударной волне; в области же перед ударной волной давление может при этом как возрасти, так и падать вниз по течению.

Имеющиеся в настоящее время данные не позволяют нарисовать сколь угодно детальной картины сложных явлений, связанных с «отражением» ударной волны от дозвуковой части пограничного слоя (или турбулентной области за линией отрыва). Существенную роль в этих явлениях должен играть тот факт, что связанные с ударной волной возмущения могут распространяться вдоль дозвуковой области пограничного слоя как вниз, так и вверх по течению и вызывать там возникновение новых разрывов. В частности, образование новой слабой ударной волны в области вверх по течению может представлять собой тот механизм, который приводит к возникновению отрыва, «отодвигающего» падающую извне на поверхность тела сильную ударную волну. На схеме рис. 87 линия *a* есть падающая ударная волна, а *b* — возникшая вверх по течению волна, вызывающая отрыв в точке *O*. При «отражении» падающей волны от

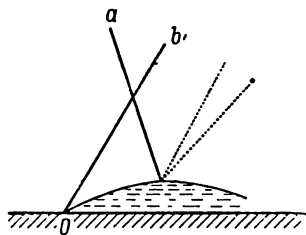


Рис. 87.

¹⁾ Имеющиеся в литературе данные не дают возможности указать, каковы именно допустимые интенсивности ударных волн.

дозвуковой части турбулентной области естественно ожидать, в частности, возникновения волны разрежения.

Все сказанное выше относится только к стационарному пересечению, при котором ударная волна и твёрдое тело покоятся друг относительно друга. Перейдём к рассмотрению нестационарного пересечения, при котором на твёрдое тело падает приходящая извне движущаяся ударная волна, так что линия её пересечения с поверхностью тела передвигается вдоль последней. Такое пересечение сопровождается отражением ударной волны: наряду с падающей волной возникает ещё одна, отражённая, волна, отходящая от тела.

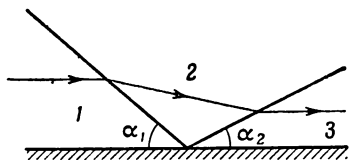


Рис. 88.

Будем рассматривать явление в системе координат, движущейся вместе с линией пересечения; в этой системе ударные волны стационарны. Наиболее простая картина отражения заключается в том, что отражённая волна отходит непосредственно от линии пересечения;

такое отражение называется правильным (рис. 88). Заданием угла падения α_1 и интенсивности падающей волны однозначно определяется движение в области 2. В отражённой волне скорость газа должна повернуться на определённый угол так, чтобы снова стать параллельной поверхности тела. По этому углу положение и интенсивность отражённой волны определяются уравнением ударной поляры. Но при заданном угле поворота скорости ударная поляра определяет две различные ударные волны: волны «слабого» и «сильного» семейства (§ 86). Опытные данные показывают, что фактически отражённая волна всегда относится к «слабому» семейству, и ниже будет подразумеваться именно этот выбор. Следует указать, что при таком выборе при предельном переходе к бесконечно слабой интенсивности падающей волны интенсивность отражённой волны тоже стремится к нулю, а угол отражения α_2 — к углу падения α_1 , как и должно было быть в соответствии с акустическим приближением. В пределе же $\alpha_1 \rightarrow 0$ отражённая волна «слабого» семейства непрерывно переходит в волну, получающуюся для отражения при «лобовом» падении ударной волны (задача 1 § 93).

Математический расчёт правильного отражения (в идеальном газе) не представляет никаких принципиальных затруднений, но алгебраически весьма громоздок. Мы ограничимся здесь лишь изложением некоторых результатов¹⁾.

Из общих свойств ударной поляры ясно, что правильное отражение возможно отнюдь не при произвольных значениях параметров

¹⁾ Более подробное изложение вопроса об отражении ударных волн см. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, гл. IV, ИЛ, 1950,

падающей волны (угла падения α_1 и отношения p_2/p_1). При заданном значении p_2/p_1 существует предельный допустимый угол α_{1k} ¹⁾; при

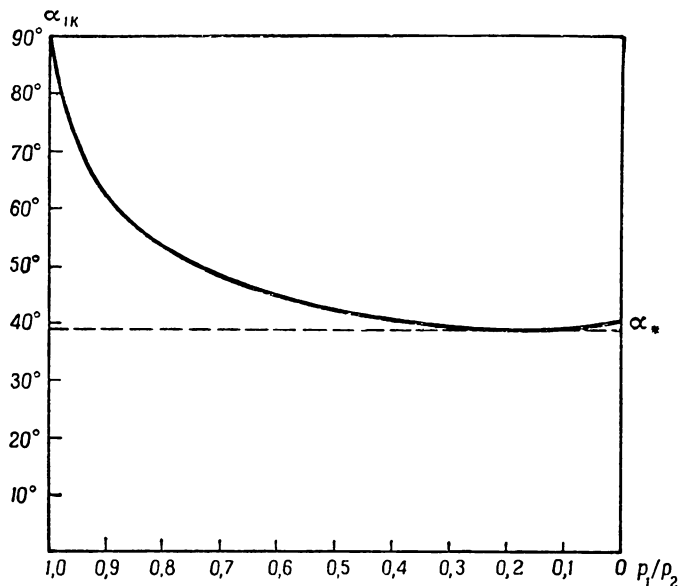


Рис. 89.

$\alpha_1 > \alpha_{1k}$ правильное отражение невозможно. При $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ предельный угол стремится к значению $\arcsin \frac{1}{\gamma}$ (для воздуха это есть 40°). В пределе же $p_2/p_1 \rightarrow 1$ он стремится к 90° , т. е. правильное отражение возможно при всяком угле падения. На рис. 89 дан график α_{1k} как функции p_1/p_2 для воздуха.

Угол отражения α_2 , вообще говоря, не совпадает с углом падения. Существует определённое значение α_* угла падения, такое, что при $\alpha_1 < \alpha_*$ угол отражения $\alpha_2 < \alpha_1$; если же $\alpha_1 > \alpha_*$, то $\alpha_2 > \alpha_1$. Значение α_* есть

$$\alpha_* = \frac{1}{2} \arcsin \cos \frac{\gamma - 1}{2}$$

(для воздуха $\alpha_* = 39,2^\circ$); замечательно, что оно не зависит от интенсивности падающей волны.

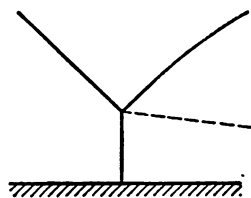


Рис. 90.

¹⁾ Это есть то значение угла падения, при котором «сильная» и «слабая» отражённые волны совпадают.

При $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ правильное отражение невозможно, и падающая ударная волна должна разветвиться на некотором расстоянии от поверхности тела, так что возникает картина изображённого на рис. 90 типа с тройной конфигурацией ударных волн и отходящим от точки разветвления тангенциальным разрывом.

§ 104. Сверхзвуковое обтекание угла

При исследовании движения вблизи края угла на поверхности обтекаемого тела снова достаточно рассматривать лишь небольшие участки вдоль края угла и потому можно считать этот край прямым, а самый угол образованным двумя пересекающимися плоскостями. Мы будем говорить об обтекании выпуклого угла, если течение происходит в угле, большем, чем π , и об обтекании вогнутого угла, если газ движется внутри угла, меньшего, чем π .

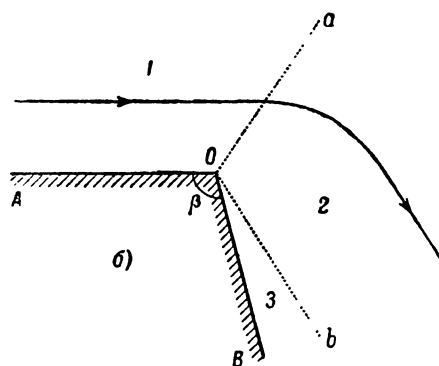
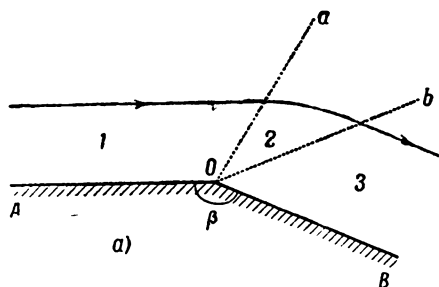


Рис. 91.

Дозвуковое обтекание угла по своему характеру ничем не отличается от обтекания несжимаемой жидкостью. Сверхзвуковое же обтекание обладает совершенно иным характером; существенной его особенностью является возникновение отходящих от края угла разрывов.

Рассмотрим сначала возможные режимы обтекания, когда сверхзвуковой поток газа подходит к краю угла, двигаясь вдоль одной из его сторон. В соответствии с общими свойствами сверхзвукового тече-

ния поток остаётся однородным вплоть до самого края угла. Поворот течения, переводящий его в направлении, параллельное другой стороне угла, осуществляется в отходящей от края угла волне разрежения, и вся картина движения складывается из трёх областей, разделённых друг от друга слабыми разрывами (Oa и Ob на рис. 91): однородный поток газа 1, движущийся вдоль стороны угла AO , поворачивает в волне разрежения 2, после чего снова движется с постоянной скоростью вдоль другой стороны угла. Обратим внимание на то, что при таком обтекании не образуется никаких турбу-

лентных областей; при аналогичном же обтекании несжимаемой жидкостью непременно возникает турбулентная область с линией отрыва по краю угла (рис. 16).

Пусть v_1 — скорость натекающего потока (1 на рис. 91), а c_1 — скорость звука в нём. Положение слабого разрыва Oa определяется непосредственно по числу $M_1 = v_1/c_1$ условием, чтобы он пересекал линии тока под углом, равным углу возмущений. Изменение скорости и давления в волне разрежения определяется полученными в § 101 формулами (101,12)—(101,15), причём надо только установить направление, от которого должен производиться отсчёт угла φ в этих формулах. Прямому лучу $\varphi = 0$ соответствует $v = c = c_*$; при $M_1 > 1$ такой линии фактически нет, так как везде $v/c > 1$. Представляя себе, однако, волну разрежения формально продлённой в область левее Oa и воспользовавшись формулой (101,12), найдём, что разрыву Oa надо приписать значение угла φ , равное

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

и затем увеличивать φ в направлении от Oa к Ob . Положение разрыва Ob определяется моментом, когда направление скорости станет параллельным стороне угла OB .

Угол поворота течения в волне разрежения не может превышать значения χ_{\max} , вычисленного в задаче 2 § 101. Если величина обтекаемого угла $\beta < \pi - \chi_{\max}$, то волна разрежения не может повернуть поток на требуемый угол и возникает картина, изображённая на

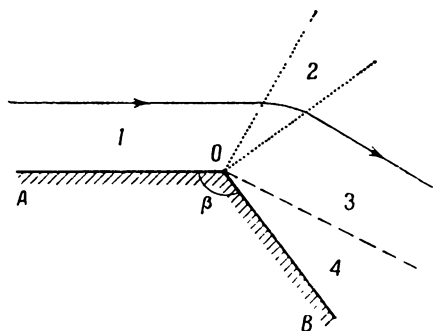


Рис. 92.

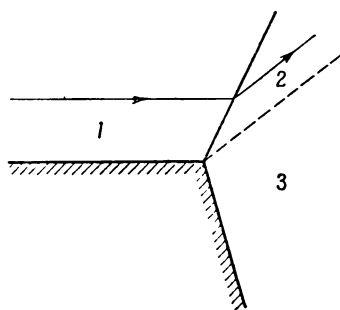


Рис. 93.

рис. 91, б. Разрежение в волне 2 происходит тогда вплоть до равного нулю давления (достигаемого на линии Ob), так что волна разрежения отделена от стенки областью вакуума 3.

Описанный режим обтекания, однако, не является единственным возможным. На рис. 92 и 93 изображены режимы, при которых ко второй стороне угла прилегает область неподвижного газа, отделённая от движущегося тангенциальным разрывом; как всегда, тангенциаль-

ный разрыв размывается в турбулентную область, так что этот случай соответствует наличию отрыва ¹⁾. Поворот течения на некоторый угол происходит в волне разрежения (рис. 92) или в ударной волне (рис. 93). Последний случай, однако, возможен лишь при не слишком большой интенсивности ударной волны (согласно общим соображениям, изложенным в предыдущем параграфе).

Какой из описанных режимов осуществляется в том или ином конкретном случае, зависит, вообще говоря, от условий течения вдали от края угла. Так, при вытекании газа из сопла (краем угла является при этом край отверстия сопла) существенно взаимоотношение между выходным давлением газа p_1 и давлением во внешней среде p_e . Если $p_e < p_1$, то обтекание происходит по типу рис. 92; положение и угол раствора волны разрежения определяются при этом условием, чтобы давление в областях 3—4 совпадало с p_e ; чем меньше p_e , тем на больший угол должно повернуться течение. Однако если обтекаемый угол (β на рис. 92) слишком велик, то давление газа может «не успеть» дойти до требуемого значения p_e — направление скорости станет параллельным стороне OB угла раньше, чем давление упадёт до этого значения. Движение вблизи края сопла будет тогда происходить по типу рис. 90. Давление вблизи внешней стороны OB отверстия целиком определяется при этом углом β и не зависит от значения p_e ; окончательное же падение давления до p_e произойдёт лишь на некотором расстоянии от отверстия.

Если же $p_e > p_1$, то обтекание края отверстия сопла происходит по типу рис. 93 с образованием отходящей от края отверстия ударной волны, повышающей давление от p_1 до p_e . Это возможно, однако, лишь при не слишком больших превышениях p_e над p_1 , когда интенсивность ударной волны не слишком велика; в противном случае отрыв возникает на внутренней поверхности сопла и ударная волна перемещается вместе с ним внутрь сопла, о чём уже шла речь в § 90.

Далее, рассмотрим обтекание вогнутого угла. В дозвуковом случае такое обтекание сопровождается возникновением отрыва на некотором расстоянии, не доходя до края угла (см. конец § 40). При натекании же сверхзвукового потока изменение его направления может осуществиться в отходящей от края угла ударной волне (рис. 94). Здесь снова необходимо оговорить, что фактически такой простой безотрывный режим возможен лишь при не слишком сильной ударной волне. Интенсивность ударной волны возрастает по мере увеличения угла χ осуществляемого ею поворота течения; поэтому можно ска-

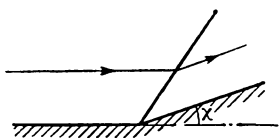


Рис. 94.

¹⁾ Согласно экспериментальным данным сжимаемость газа несколько уменьшает угол раствора турбулентной области, в которую размывается тангенциальный разрыв.

зять, что безотрывное обтекание возможно лишь при не слишком больших значениях χ .

Обратимся теперь к картине движения, возникающей, когда на край угла натекает свободный сверхзвуковой поток (рис. 95). Поворот течения в направлении, параллельное сторонам угла, происходит в отходящих от края угла ударных волнах. Как уже было объяснено в предыдущем параграфе, это есть как раз тот исключительный случай, когда от поверхности твёрдого тела может отходить ударная волна произвольной интенсивности.

Зная скорости v_1 и c_1 в натекающем потоке 1, можно определить положение ударных волн и движение газа в областях, расположенных за ними. Направление скорости v_2 должно быть параллельно стороне OB угла:

$$\frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \operatorname{tg} \chi.$$

Поэтому определение v_2 и угла φ ударной волны производится непосредственно по диаграмме ударной поляры с помощью луча, проведённого из начала координат под заданным углом χ к оси абсцисс (см. рис. 50), как это было подробно объяснено в § 86. Мы видели, что при заданном угле χ ударная поляра определяет две различные ударные волны с различными углами φ . Одна из них (соответствующая точке B на рис. 50), более слабая, оставляет течение, вообще говоря, сверхзвуковым; другая же, более сильная, превращает его в дозвуковое. В данном случае, для обтекания углов на поверхности конечных тел¹⁾, следует всегда выбирать первую из них, волну «слабого» семейства. Необходимо иметь в виду, что в действительности этот выбор определяется условиями обтекания вдали от угла. При обтекании очень острого угла (малое χ) образующаяся ударная волна должна, очевидно, обладать очень малой интенсивностью. Естественно считать, что по мере увеличения этого угла интенсивность волны будет расти монотонно; этому соответствует как раз перемещение по участку QC кривой ударной поляры (рис. 50) от точки Q к точке C .

Мы видели также в § 86, что угол поворота вектора скорости в ударной волне не может превосходить некоторого определённого

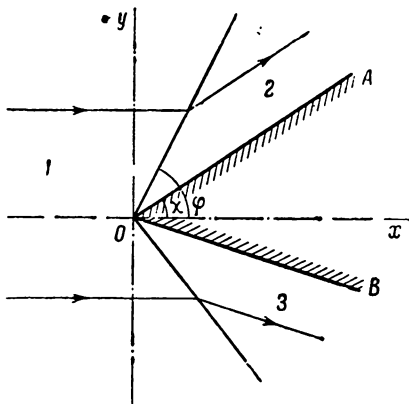


Рис. 95.

¹⁾ Чисто формальный же вопрос об обтекании клина, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями, не представляет физического интереса.

(зависящего от M_1) значения χ_{\max} . Поэтому описанная картина обтекания невозможна, если какая-либо из сторон обтекаемого угла наклонена к направлению натекающего потока под углом, превышающим χ_{\max} (в таком случае движение газа в области вблизи угла должно быть дозвуковым, что фактически осуществляется путём возникновения ударной волны где-либо впереди тела; см. § 113). Поскольку χ_{\max} есть монотонно возрастающая функция M_1 , то можно также сказать, что при заданном значении угла χ число M_1 натекающего потока должно превышать определённое значение $M_{1\min}$.

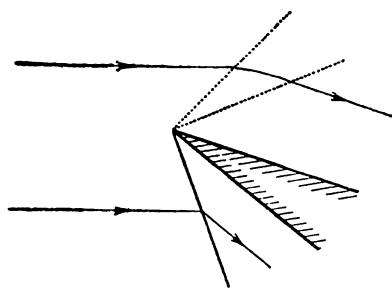


Рис. 96.

Наконец, укажем, что если стороны угла расположены по отношению к натекающему потоку, как показано на рис. 96, то ударная волна возникает, разумеется, лишь по одну сторону угла; поворот же потока по другую сторону осуществляется в волне разрежения.

Задача

Определить положение и интенсивность ударной волны при обтекании очень малого угла ($\chi \ll 1$) при очень больших значениях числа M_1 : $M_1 \gg 1/\chi$.

Решение. При $\chi \ll 1$ ударная поляра определяет два значения φ : близкое к нулю и близкое к $\pi/2$. Интересующей нас волне «слабого» семейства соответствует первое из них, равное

$$\varphi = \frac{\gamma + 1}{2} \chi$$

(см. формулу, приведённую в задаче 1 § 86). Для отношения давлений имеем согласно (86,9):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} M_1^2 \chi^2.$$

Значение числа M позади волны равно

$$M_2 = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}},$$

т. е. остаётся большим по сравнению с единицей (но не по сравнению с $1/\chi$).

§ 105. Обтекание конического острия

Исследование сверхзвукового стационарного течения вблизи острия на поверхности обтекаемого тела представляет собой трёхмерную задачу, и потому несравненно сложнее исследования обтекания угла с линейным краем. Полного исследования этой задачи в общем случае до настоящего времени не существует. Полностью решена лишь задача об осесимметрическом обтекании острия, которое мы здесь и рассмотрим.

Вблизи своего конца осесимметрическое остриё можно рассматривать как прямой конус кругового сечения, и таким образом, задача состоит в исследовании обтекания конуса однородным потоком, натекающим в направлении оси конуса. С качественной стороны картина выглядит следующим образом.

Как и при аналогичном обтекании плоского угла, должна возникнуть ударная волна (А. Бузман, 1929); из соображений симметрии очевидно, что эта волна будет представлять собой коническую поверхность, коаксиальную с обтекаемым конусом и имеющую общую с ним вершину (на рис. 97 изображён разрез конуса плоскостью, проходящей через его ось). Однако в отличие от плоского случая ударная волна не осуществляет здесь поворота скорости газа на полный угол χ , необходимый для течения вдоль поверхности конуса (2χ — угол раствора конуса). После перехода через поверхность разрыва линии тока искривляются, асимптотически приближаясь к образующим обтекаемого конуса. Это искривление сопровождается непрерывным уплотнением (добавочным к уплотнению в самой волне) и соответственным падением скорости. Непосредственно за ударной волной скорость остаётся, вообще говоря, сверхзвуковой (как и в плоском случае, она определяется «сверхзвуковой» частью ударной поляры), на поверхности же конуса скорость может стать и дозвуковой. Как и в плоском случае, для каждого значения числа $M_1 = v_1/c_1$ натекающего потока существует определённое предельное значение χ_{max} угла раствора конуса, за которым такое обтекание становится невозможным.

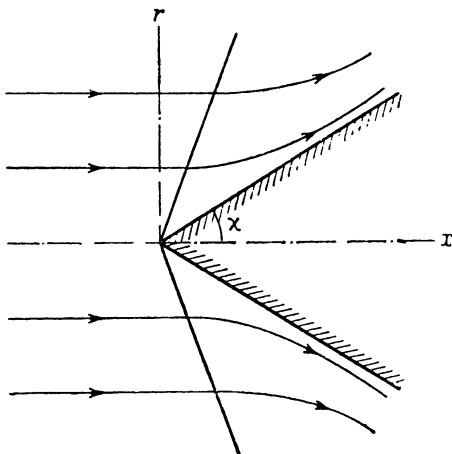


Рис. 97.

Коническая ударная волна пересекает все линии тока натекающего потока под одинаковым углом, а потому обладает постоянной интенсивностью. Отсюда следует (см. ниже § 106), что и за ударной волной течение будет изэнтропическим и потенциальным.

В силу симметрии задачи и её «автомодельности» (отсутствия в её условиях какой-либо характеристической постоянной длины) очевидно, что распределение всех величин (скорости, давления) в потоке за ударной волной будет функцией только от угла θ наклона к оси конуса (оси x на рис. 97) радиус-вектора, проведённого в данную точку из вершины конуса. Соответственно уравнения движения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; граничные условия

к этим уравнениям на ударной волне определяются уравнением ударной поляры, а на поверхности конуса — требуют параллельности скорости образующим конуса. Эти уравнения, однако, не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде и должны решаться численным образом. Отсылая за результатами таких вычислений к другим источникам¹⁾, мы ограничимся лишь кривой (рис. 51), дающей зависимость предельного допустимого угла раствора конуса $2\chi_{\max}$ как функции от числа M_1 . Укажем также, что при $M_1 \rightarrow 1$ угол χ_{\max} стремится к нулю по закону

$$\chi_{\max} = \text{const.} \sqrt{\frac{M_1 - 1}{\gamma + 1}}, \quad (105,1)$$

как это можно заключить на основании общего околзвукowego закона подобия (117,11) (const. есть число, не зависящее ни от M_1 , ни от рода газа).

Замкнутое аналитическое решение задачи об обтекании конуса возможно лишь в предельном случае малых углов раствора конуса. Очевидно, что в таком случае скорость газа во всём пространстве будет лишь незначительно отличаться от скорости v_1 натекающего потока. Обозначив посредством v малую разность между скоростью газа в данной точке и скоростью v_1 и введя её потенциал φ , мы можем применить для последнего линейаризованное уравнение (106,4); если ввести цилиндрические координаты x, r, ω с осью вдоль оси конуса (ω — полярный угол), это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (105,2)$$

или для осесимметрического движения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (105,3)$$

где введено обозначение

$$\beta = \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}. \quad (105,4)$$

Для того чтобы распределение скорости было функцией только от угла θ , потенциал должен иметь вид $\varphi = x f(\xi)$, где $\xi = \frac{r}{x} = \text{tg } \theta$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1 - \beta^2 \xi^2) f'' + f' = 0,$$

которое решается элементарно. Тривиальное решение $f = \text{const.}$ соот-

¹⁾ См., например, Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, Гостехиздат, 1948, стр. 193. Результаты численного интегрирования для воздуха см. G. I. Taylor, J. W. Massol, Proc. Roy. Soc., 139, 278, 1933.

ветствует однородному потоку, а второе решение есть

$$f = \text{const.} \left(\sqrt{1 - \beta^2 \xi^2} - \text{Arch} \frac{1}{\beta \xi} \right).$$

Граничное условие на поверхности конуса (т. е. при $\xi = \text{tg } \chi \approx \chi$) гласит:

$$\frac{v_r}{v_1 + v_x} \approx \frac{1}{v_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \chi, \quad (105,5)$$

или $f' = v_1 \chi$. Отсюда $\text{const.} = v_1 \chi^2$, и в результате получим следующее окончательное выражение для потенциала (в области $x > \beta r^1$):

$$\varphi = v_1 \chi^2 \left[\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2} - x \text{Arch} \frac{x}{\beta r} \right]. \quad (105,6)$$

Обратим внимание на то, что φ имеет при $r \rightarrow 0$ логарифмическую особенность.

Отсюда находим компоненты скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -v_1 \chi^2 \text{Arch} \frac{x}{\beta r}, \\ v_r &= \frac{v_1 \chi^2}{r} \sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (105,7)$$

Давление на поверхности конуса вычисляется с помощью формулы (106,5); благодаря логарифмической особенности φ при $r \rightarrow 0$ скорость v_r на самой поверхности конуса (т. е. при малых r) велика по сравнению с v_x , и потому в формуле для давления должен быть сохранён член с v_r^2 . В результате получим:

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2 \chi^2 \left(\ln \frac{2}{\beta \chi} - \frac{1}{2} \right). \quad (105,8)$$

Все эти формулы, полученные с помощью линеаризованной теории, теряют применимость при слишком больших значениях M_1 , сравнимых с $1/\chi$ (см. § 118).

В заключение сделаем несколько замечаний о сверхзвуковом обтекании произвольного конуса. Течение вокруг конуса произвольного сечения (причём угол атаки может быть отличным от нуля) обладает такой же автомодельностью, как и симметричное течение вокруг кругового конуса. Оно не характеризуется никакими параметрами длины, и потому распределение скоростей может быть функцией только отношений $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ координат, т. е. постоянно вдоль всякого прямого луча, проведённого из начала координат (вершины конуса); такие автомодельные течения называют коническими. Для конических течений, допускающих линеаризацию уравнений, задача может быть сведена (путём специального преобразования переменных, принадлежащего *В. И. Смирнову* и *С. Л. Соболеву*, 1933) к решению двухмерного уравнения Лапласа с надлежащими граничными условиями. Этим

¹⁾ В рассматриваемом приближении конус $x = \beta r$ представляет собой поверхность слабого разрыва.

методом можно, в частности, решить задачу об обтекании плоского треугольного крыла (с произвольным углом при вершине), наклонённого под малым углом атаки к направлению движения (*М. И. Гуревич, 1946*)¹).

З а д а ч а

Определить течение вокруг конуса с малым углом раствора 2χ , обтекаемого под малым углом атаки α (*К. Феррари, 1937*)²).

Решение. Выбираем ось x по оси конуса (а не по направлению набегающего потока!); линеаризованное уравнение (105,2) для потенциала при условии пренебрежения малыми величинами более высокого порядка ($\sim \alpha\varphi$) при этом не меняется, а потенциал φ определяет скорость газа как сумму $v_1 + \nabla\varphi$. Граничное условие на поверхности конуса напишется в виде

$$\frac{v_1 \sin \alpha \cos \omega + v_r}{v_1 \cos \alpha + v_x} \approx \alpha \cos \omega + \frac{1}{v_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx \chi.$$

Ищем φ в виде суммы

$$\varphi = \varphi^{(1)}(x, r) + \cos \omega \varphi^{(2)}(x, r), \quad (1)$$

где $\varphi^{(1)}$ есть выражение (105,6), а $\varphi^{(2)}$ удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} = -v_1 \alpha$. Функцию $\varphi^{(2)}$ пишем в виде $r f\left(\frac{r}{x}\right)$ и, подставив $r \cos \omega f$ в уравнение (105,2), получим для f уравнение

$$\xi f'' (\xi^2 - 1) + f' (2\xi^2 - 3) = 0.$$

Тривиальное решение $f = \text{const.}$ соответствует однородному потоку, набегающему (со скоростью $v_1 \alpha$) в поперечном к оси конуса направлении, а второе решение даёт окончательно

$$\varphi^{(2)} = v_1 \beta \chi^2 \alpha \left[\frac{x}{\beta r} \sqrt{x^2 - \xi^2 r^2} - \beta r \operatorname{Arch} \frac{x}{\beta r} \right].$$

Скорость газа равна $v_1 + v^{(1)} + v^{(2)}$, где $v^{(2)} = \nabla \varphi^{(2)}$, а $v^{(1)}$ даётся формулами (105,7). Давление вычисляется по формуле

$$p - p_1 = -\frac{\rho_1}{2} \left\{ \left(v_1 \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v_1 \sin \alpha \cos \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(-v_1 \sin \alpha \sin \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)^2 - v_1^2 \right\},$$

причём надо сохранять члены второго порядка по α и χ . Для давления на поверхность конуса получим:

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2 \left\{ \chi^2 \ln \frac{2}{\beta \chi} - \frac{\chi^2 + \alpha^2}{2} - 2\alpha \chi \cos \omega + \alpha^2 \cos 2\omega \right\}.$$

¹) Изложение этих работ можно найти в книгах: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, часть 2, 3-е изд., Гостехиздат, 1948, гл. I, § 27; Ф. И. Франкль, Е. А. Карпович, Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, гл. V, 1948.

²) Решение такой же задачи для произвольного тонкого тела вращения можно найти в книге Ф. И. Франкля и Е. А. Карпович, § 7.

ГЛАВА XII

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 106. Потенциальное движение сжимаемого газа

Мы встретимся в дальнейшем с многочисленными важными случаями, когда движение сжимаемого газа можно рассматривать как потенциальное практически во всём пространстве. Здесь мы выведем общие уравнения потенциального течения и рассмотрим в общем виде вопрос об их применимости.

Потенциальность течения сжимаемого газа нарушается, вообще говоря, ударными волнами; после прохождения через ударную волну потенциальный поток становится в общем случае вихревым. Исключения представляют, однако, случаи, когда стационарный потенциальный поток проходит через ударную волну постоянной (вдоль всей её поверхности) интенсивности; таковы, например, случаи, когда однородный поток проходит волну, пересекающую все линии тока под одинаковым углом¹⁾. В таких случаях течение остаётся потенциальным и позади ударной волны.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся уравнением Эйлера, написанным в виде

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

(ср. (2,10)), или

$$\nabla \left(w + \frac{v^2}{2} \right) - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = T \nabla s,$$

где учтено термодинамическое тождество $dw = T ds + \frac{dp}{\rho}$. Но в потенциальном потоке перед ударной волной $w + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$, а на ударной волне эта величина непрерывна; поэтому она останется постоянной и во всём пространстве позади ударной волны, так что будем иметь:

$$[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -T \nabla s. \quad (106,1)$$

¹⁾ С такими случаями мы уже встречались при изучении сверхзвукового обтекания клина и конуса (§§ 104, 105).

Потенциальный поток перед ударной волной изэнтропичен. В общем случае произвольной ударной волны с переменным вдоль её поверхности скачком энтропии в пространстве за волной градиент $\nabla s \neq 0$, а вместе с ним будет отличаться от нуля и $\text{rot } \mathbf{v}$. Однако если ударная волна обладает постоянной интенсивностью, то и скачок энтропии в ней постоянен, так что течение за ней тоже будет изэнтропическим, т. е. $\nabla s = 0$. Отсюда следует, что либо $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, либо векторы $\text{rot } \mathbf{v}$ и \mathbf{v} везде параллельны друг другу. Но последний случай невозможен: на самой ударной волне \mathbf{v} во всяком случае имеет отличную от нуля нормальную компоненту, а нормальная компонента $\text{rot } \mathbf{v}$ во всяком случае равна нулю (нормальная компонента $\text{rot } \mathbf{v}$ определяется тангенциальными производными от тангенциальных компонент скорости, непрерывных на поверхности разрыва).

Другой важный случай, когда потенциальность течения можно считать не нарушающейся ударными волнами, — это случай волн малой интенсивности. Мы видели (§ 83), что в таких ударных волнах скачок энтропии есть величина третьего порядка по сравнению со скачком давления или скорости. Из соотношения (106,1) видно поэтому, что величиной третьего порядка будет и $\text{rot } \mathbf{v}$ за разрывом. Это и даёт возможность считать, с точностью до малых величин высших порядков, течение потенциальным и позади ударной волны.

Выведем общее уравнение для потенциала скорости для произвольного стационарного потенциального течения сжимаемого газа. Для этого исключаем плотность из уравнения непрерывности $\text{div } \rho \mathbf{v} \equiv \equiv \rho \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0$ с помощью уравнения Эйлера

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} = - \frac{c^2}{\rho} \nabla \rho$$

и получаем:

$$c^2 \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0.$$

Вводя сюда потенциал согласно $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ и раскрывая векторные выражения, найдём искомое уравнение:

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} + (c^2 - \varphi_z^2) \varphi_{zz} - \\ - 2(\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_x \varphi_z \varphi_{xz} + \varphi_y \varphi_z \varphi_{yz}) = 0 \quad (106,2)$$

(нижние индексы обозначают здесь частные производные). В частности, для плоского движения

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} = 0. \quad (106,3)$$

В этих уравнениях скорость звука сама должна быть выражена как функция скорости, что может быть, принципиально, сделано с помощью уравнения Бернулли $w + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$ и уравнения изэнтропичности $s = \text{const.}$ (для идеального газа зависимость c от v даётся формулой (80,18)).

Уравнение (106,2) очень упрощается в случае, когда во всём пространстве скорость газа лишь незначительно отличается по величине и направлению от скорости натекающего из бесконечности потока ¹⁾. Тем самым подразумевается и что ударные волны (если они вообще есть) обладают слабой интенсивностью, а потому не нарушают потенциальности течения.

Как мы неоднократно делали в аналогичных случаях в предыдущих главах, будем обозначать посредством \mathbf{v} малую разность между скоростью газа в данной точке и скоростью натекающего потока. Обозначив последнюю посредством \mathbf{v}_1 , будем, следовательно, писать полную скорость в виде $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}$. Под потенциалом же φ будем понимать теперь потенциал скорости ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$). Уравнение для этого потенциала получится из уравнения (106,2) заменой

$$\varphi \rightarrow \varphi + xv_1$$

(ось x выбираем в направлении вектора \mathbf{v}_1). Рассматривая после этого φ как малую величину и опуская все члены выше первого порядка, получим следующее линейное уравнение:

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (106,4)$$

где $M_1 = v_1/c_1$; для скорости звука здесь подставлено, естественно, её заданное значение на бесконечности.

Давление в любой точке потока определяется в этом же приближении через скорость по формуле, которую можно получить следующим образом. Рассматривая p как функцию ω (при заданном s) и учитывая, что $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho}$, пишем:

$$p - p_1 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)_s (\omega - \omega_1) = \rho_1 (\omega - \omega_1).$$

Согласно же уравнению Бернулли имеем:

$$\omega - \omega_1 = -\frac{1}{2} [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})^2 - v_1^2] \approx -\frac{1}{2} (v_y^2 + v_z^2) - v_1 v_x,$$

так что

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 v_x - \frac{\rho_1}{2} (v_y^2 + v_z^2). \quad (106,5)$$

В этом выражении надо, вообще говоря, сохранить член с квадратами поперечной скорости, так как в области вблизи оси x (в частности, на самой поверхности обтекаемого газом тонкого тела) производные $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ могут стать большими по сравнению с $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

¹⁾ С таким случаем мы встретились уже в § 105 (обтекание тонкого конуса) и встретимся ещё при изучении обтекания сжимаемым газом произвольных тонких тел.

Уравнение (106,4), однако, неприменимо, если число M_1 очень близко к единице (околозвуковое движение), так что коэффициент в первом члене становится малым. Ясно, что в таком случае в уравнении должны быть сохранены также и члены более высокого порядка по производным потенциала по координате x . Для вывода соответствующего уравнения снова вернёмся к исходному уравнению (106,2), которое после пренебрежения заведомо малыми членами сводится к следующему:

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (106,6)$$

В рассматриваемом случае скорость $v_x \cong v$ и скорость звука c близки к критической скорости c_* (v снова обозначает полную скорость). Поэтому можно написать:

$$c - c_* = (v - c_*) \frac{dc}{dv} \Big|_{v=c_*},$$

или

$$c - v = (c_* - v) \left(1 - \frac{dc}{dv} \Big|_{v=c_*}\right).$$

Воспользовавшись тем, что при $v = c = c_*$ согласно (80,4) имеем $\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c}$, пишем (при $v = c_*$):

$$\frac{dc}{dv} = \frac{dc}{d\rho} \frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c} \frac{dc}{d\rho},$$

так что

$$c - v = (c_* - v) \frac{1}{c} \frac{d(\rho c)}{d\rho} = \alpha_* (c_* - v). \quad (106,7)$$

Мы воспользовались здесь для производной $\frac{d(\rho c)}{d\rho}$ выражением (92,9), а α_* обозначает значение величины α (95,2) при $v = c_*$ (для идеального газа α есть просто постоянная, так что $\alpha_* = \alpha = \frac{\gamma + 1}{2}$). С той же точностью это равенство можно переписать в виде

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_* \left(\frac{v}{c_*} - 1\right). \quad (106,8)$$

Это соотношение устанавливает в общем виде связь между числами M и M_* в околозвуковом случае.

С помощью этой формулы пишем:

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 2 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\alpha_* \left(1 - \frac{v}{c_*}\right).$$

Наконец, вводим новый потенциал, производя замену

$$\varphi \rightarrow c_* (x + \varphi),$$

так что теперь будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_x}{c_*} - 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{v_y}{c_*}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{v_z}{c_*}. \quad (106,9)$$

Внося всё это в (106,6), получим окончательно следующее уравнение для потенциала околосзвукового течения (с направлением скорости, везде близким к оси x):

$$2\alpha_* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (106,10)$$

Свойства газа входят сюда только через постоянную α_* . Мы увидим в дальнейшем, что зависимость всех вообще свойств околосзвукового течения от конкретного рода газа целиком определяется этой постоянной.

Линеаризованное уравнение (106,4) становится неприменимым и в другом предельном случае — очень больших значений M_1 , не говоря уже о том, что благодаря возникновению сильных ударных волн реальное течение при таких M_1 фактически вообще нельзя считать потенциальным (см. § 118).

§ 107. Стационарные простые волны

Определим общий вид решений уравнений стационарного плоского сверхзвукового движения газа, описывающих течения, при которых на бесконечности имеется однородный плоско-параллельный поток, в дальнейшем своём течении поворачивающийся, обтекая искривлённый профиль. С частным случаем такого решения нам уже приходилось иметь дело при изучении движения вблизи угла, — при этом мы по существу рассматривали плоско-параллельный поток, текущий вдоль одной из сторон угла и поворачивающийся вокруг края этого угла. В этом частном решении все величины — две компоненты скорости, давление, плотность — были функциями всего лишь от одной переменной — от угла φ . Поэтому каждая из этих величин могла бы быть выражена в виде функции одной из них. Поскольку это решение должно содержаться в виде частного случая в искомом общем решении, то естественно искать это последнее, исходя из требования, чтобы и в нём каждая из величин p , ρ , v_x , v_y (плоскость движения выбираем в качестве плоскости x , y) могла бы быть выражена в виде функции одной из них. Такое требование представляет собой, конечно, весьма существенное ограничение, налагаемое на решение уравнений движения, и получающееся таким образом решение отнюдь не является общим интегралом этих уравнений. В общем случае каждая из величин p , ρ , v_x , v_y , являющихся функцией двух координат x , y , могла бы быть выражена лишь через две из них.

Поскольку на бесконечности имеется однородный поток, в котором все величины, в частности и энтропия s , постоянны, а при

стационарном движении идеальной жидкости энтропия сохраняется вдоль линий тока, то ясно, что и во всём пространстве будет $s = \text{const.}$, если только в газе нет ударных волн, что и предполагается ниже.

Уравнения Эйлера и уравнение непрерывности имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0.$$

Написав частные производные в виде якобианов, переписываем эти уравнения в виде

$$v_x \frac{\partial (v_x, y)}{\partial (x, y)} - v_y \frac{\partial (v_x, x)}{\partial (x, y)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p, y)}{\partial (x, y)},$$

$$v_x \frac{\partial (v_y, y)}{\partial (x, y)} - v_y \frac{\partial (v_y, x)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p, x)}{\partial (x, y)};$$

$$\frac{\partial (\rho v_x, y)}{\partial (x, y)} - \frac{\partial (\rho v_y, x)}{\partial (x, y)} = 0.$$

Выберем теперь в качестве независимых переменных, например, x и p . Для того чтобы произвести соответствующее преобразование, достаточно умножить написанные уравнения на $\frac{\partial (x, y)}{\partial (x, p)}$, в результате чего получим уравнения в точности того же вида, с той лишь разницей, что в знаменателях всех якобианов будет стоять $\partial (x, p)$ вместо $\partial (x, y)$. Раскроем эти якобианы; при этом надо иметь в виду, что в независимых переменных x и p все величины ρ , v_x , v_y являются, по предположению, функциями только от p , и потому их частные производные по x равны нулю. Тогда получаем:

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{dp}{dp} + \rho \left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dv_x}{dp} \right) = 0$$

(где $\frac{\partial y}{\partial x}$ обозначает $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_p$). Все величины в этих уравнениях, за исключением лишь $\frac{\partial y}{\partial x}$, являются функциями только от p уже по сделанному предположению, а x вовсе не входит в уравнение явным образом. Поэтому прежде всего можно заключить на основании этих уравнений, что и $\frac{\partial y}{\partial x}$ есть некоторая функция только от p :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_p = f_1(p),$$

откуда

$$y = x f_1(p) + f_2(p), \quad (107,1)$$

где $f_2(p)$ — произвольная функция давления.

Дальнейших вычислений можно не производить вовсе, если непосредственно воспользоваться известным уже нам частным решением для волны разрежения при обтекании угла (§§ 101, 104). Напомним, что в этом решении все величины (в том числе и давление) постоянны вдоль каждой прямой (характеристики), проходящей через вершину угла. Это частное решение, очевидно, соответствует случаю, когда в общем выражении (107,1) произвольная функция $f_2(p)$ тождественно равна нулю. Функция же $f_1(p)$ определяется полученными в § 101 формулами.

Уравнение (107,1) при постоянных значениях p определяет семейство прямых линий в плоскости x, y . Эти прямые пересекают в каждой своей точке линии тока под углом, равным углу возмущений. Это непосредственно очевидно из того, что таким свойством обладают прямые $y = x f_1(p)$ в частном решении с $f_2 \equiv 0$. Таким образом, и в общем случае одно из семейств характеристик (характеристики, «исходящие» от поверхности тела) представляет собой прямые лучи, вдоль которых все величины остаются постоянными; эти прямые, однако, не имеют теперь общей точки пересечения.

Изложенные свойства рассматриваемого движения в математическом отношении полностью аналогичны свойствам одномерных простых волн, у которых одно из семейств характеристик представляет собой семейство прямых линий в плоскости x, t (см. §§ 94, 96, 97). Поэтому рассматриваемый класс течений играет в теории стационарного плоского (сверхзвукового) движения такую же роль, какую играют простые волны в теории нестационарного одномерного движения. Ввиду этой аналогии эти течения тоже называют простыми волнами. В частности, волну разрежения, соответствующую случаю $f_2 \equiv 0$, называют центрированной простой волной.

Как и в нестационарном случае, одно из важнейших свойств стационарных простых волн заключается в том, что течение во всякой области плоскости x, y , граничащей с областью однородного потока, есть простая волна (ср. § 97).

Покажем теперь, каким образом может быть построена простая волна для обтекания заданного профиля.

На рис. 98 изображён обтекаемый профиль; слева от точки O он прямолинеен, далее от точки O начинается закругление. В сверхзвуковом потоке влияние закругления распространяется, разумеется, лишь на область потока вниз по течению от исходящей из точки O характеристики OA . Поэтому всё течение слева от этой характеристики будет представлять собой однородный поток (относящиеся к нему значения величин отличаем индексом 1). Все характеристики в этой области параллельны друг другу и наклонены к оси x под углом, равным углу возмущений $\alpha_1 = \arcsin \frac{c_1}{v_1}$.

В формулах (101,12) — (101,15) угол наклона характеристик φ отсчитывается от луча, на котором $v = c = c_*$. Это значит (ср. § 104),

что характеристике OA надо приписать значение угла φ , равное

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

и в дальнейшем отсчитывать углы φ для всех характеристик от направления OA' (рис. 98). Угол наклона характеристик к оси x будет

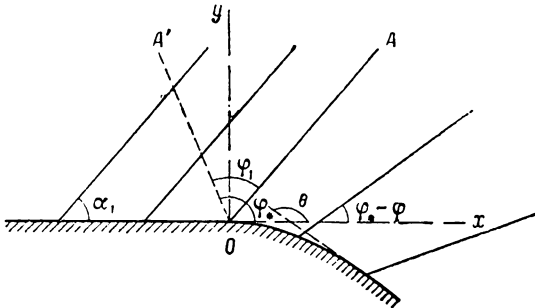


Рис. 98.

тогда равен $\varphi_* - \varphi$, где $\varphi_* = \alpha_1 + \varphi_1$. Согласно формулам (101,12) — (101,15) скорость и давление выразятся через угол φ посредством

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad (107,2)$$

$$v^2 = c_*^2 \left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \sin^2 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right], \quad (107,3)$$

$$\theta = \varphi_* - \varphi - \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right), \quad (107,4)$$

$$p = p_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (107,5)$$

Уравнение же характеристик напишется в виде

$$y = x \operatorname{tg} (\varphi_* - \varphi) + F(\varphi). \quad (107,6)$$

Произвольная функция $F(\varphi)$ определится по заданной форме профиля следующим образом. Пусть форма профиля задана уравнением $Y = Y(X)$, где X и Y — координаты его точек. На самой поверхности скорость газа направлена по касательной к ней, т. е.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dY}{dX}. \quad (107,7)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку X, Y и наклонённой под углом $\varphi_* - \varphi$ к оси x , есть

$$y - Y = (x - X) \operatorname{tg} (\varphi_* - \varphi).$$

Это уравнение совпадает с (107,6), если в последнем положить

$$F(\varphi) = Y - X \operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi). \quad (107,8)$$

Исходя из заданного уравнения $Y = Y(X)$ и уравнения (107,7), представляем форму профиля в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, где параметром является угол θ наклона касательной к профилю. Подставляя сюда θ , выраженное через φ согласно (107,4), получаем X и Y в виде функций от φ ; наконец, подставляя их в (107,8), получим искомую функцию $F(\varphi)$.

При обтекании выпуклой поверхности угол θ наклона вектора скорости к оси x уменьшается вниз по течению (рис. 98). Вместе с ним монотонно убывает также и угол $\varphi_* - \varphi$ наклона характеристик (речь идёт везде о характеристиках, исходящих от тела). Благодаря этому характеристики нигде (в области течения) не пересекаются друг с другом. Таким образом, в области вниз по течению от характеристики OA , которая будет представлять собой слабый разрыв, мы будем иметь непрерывный (без ударных волн) монотонно разрежающийся поток.

Иначе обстоит дело при обтекании вогнутого профиля. Здесь наклон θ касательной к профилю, а с ним и наклон характеристик возрастают в направлении течения. В результате характеристики пересекаются друг с другом (в области течения). Но на различных не параллельных друг другу характеристиках все величины (скорость, давление и т. п.) имеют различные значения. Поэтому в точках пересечения характеристик все эти функции оказываются многозначными, что физически нелепо. Аналогичное явление мы имели уже в нестационарной одномерной простой волне сжатия (§ 94). Как и там, оно означает здесь, что в действительности возникает ударная волна. Положение этого разрыва не может быть определено полностью из рассматриваемого решения, выведенного в предположении его отсутствия. Единственное, что может быть определено, — это место начала ударной волны (точка O на рис. 99; ударная волна изображена сплошной линией OB). Именно, она определяется как точка пересечения характеристик, лежащая на наиболее близкой к поверхности тела линии тока. На линиях тока, проходящих под точкой O (ближе к телу), решение везде однозначно; в точке же O «начинается» его многозначность. Уравнения, определяющие координаты x_0, y_0 этой точки, могут быть получены аналогично тому, как были найдены соответствующие уравнения для определения момента и места образования

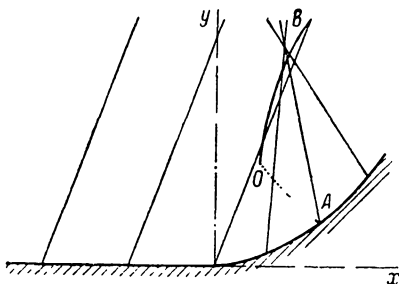


Рис. 99.

единственное, что может быть определено, — это место начала ударной волны (точка O на рис. 99; ударная волна изображена сплошной линией OB). Именно, она определяется как точка пересечения характеристик, лежащая на наиболее близкой к поверхности тела линии тока. На линиях тока, проходящих под точкой O (ближе к телу), решение везде однозначно; в точке же O «начинается» его многозначность. Уравнения, определяющие координаты x_0, y_0 этой точки, могут быть получены аналогично тому, как были найдены соответствующие уравнения для определения момента и места образования

разрыва в одномерной нестационарной простой волне. Если рассматривать угол наклона характеристик как функцию координат x и y точек, через которые они проходят, то при значениях x и y , превышающих некоторые определённые x_0, y_0 , эта функция делается многозначной. В § 94 мы имели совершенно аналогичное положение для функции $\varphi(x, t)$; поэтому, не повторяя заново всех рассуждений, напомним сразу уравнения

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)_x = 0, \quad (107,9)$$

определяющие здесь место начала ударной волны. В чисто математическом отношении эта точка есть угловая волна огибающей семейства прямолинейных характеристик (ср. § 96).

Что касается области существования простой волны при обтекании вогнутого профиля, то вдоль линий тока, проходящих над точкой O , оно применимо вплоть до места пересечения этих линий с ударной волной. Линии же тока, проходящие под точкой O , с ударной волной вообще не пересекаются. Однако отсюда нельзя сделать заключения о том, что вдоль них рассматриваемое решение применимо везде. Дело в том, что возникающая ударная волна оказывает возмущающее влияние и на газ, текущий вдоль этих линий тока, и таким образом нарушает движение, которое должно было бы иметь место в её отсутствии. В силу свойства сверхзвукового потока эти возмущения будут, однако, проникать лишь в область газа, находящуюся вниз по течению от характеристики OA , исходящей из точки начала ударной волны (одна из характеристик второго семейства). Таким образом, рассматриваемое здесь решение будет применимым во всей области слева от линии AOB . Что касается самой линии OA , то она будет представлять собой слабый разрыв. Мы видим, что непрерывная (без ударных волн) во всей области простая волна сжатия вдоль вогнутой поверхности, аналогичная простой волне разрежения вдоль выпуклой поверхности, невозможна.

В ударной волне, возникающей при обтекании вогнутого профиля, мы имеем пример волны, «начинающейся» от некоторой точки, расположенной в самом потоке вдали от твёрдых стенок. Такая точка «начала» ударной волны обладает некоторыми общими свойствами, которые мы здесь отметим. В самой точке начала интенсивность ударной волны обращается в нуль, а вблизи неё мала. Но в ударной волне слабой интенсивности скачок энтропии и ротора скорости — величины третьего порядка малости, и потому изменение течения при прохождении через волну отличается от непрерывного потенциального изэнтропического изменения лишь в величинах третьего порядка. Отсюда следует, что в отходящих от точки начала ударной волны слабых разрывах должны испытывать скачок лишь производные третьего порядка от различных величин. Таких разрывов будет, вообще говоря, два: слабый разрыв, совпадающий с характеристикой, и «тангенциальный» слабый разрыв, совпадающий с линией тока (см. конец § 89).

§ 108. Уравнение Чаплыгина (общая задача о двухмерном стационарном движении сжимаемого газа)

Рассмотрев стационарные простые волны, перейдём теперь к общей задаче о произвольном стационарном плоском потенциальном движении. Говоря о потенциальном течении, мы подразумеваем, что движение изэнтропично и что в нём отсутствуют ударные волны.

Как было показано впервые *С. А. Чаплыгиным* в 1902 г., оказывается возможным свести поставленную задачу к решению всего одного линейного уравнения в частных производных. Это осуществляется путём введённого Чаплыгиным преобразования к новым независимым переменным — компонентам скорости v_x, v_y (это преобразование часто называют преобразованием годографа; плоскость переменных v_x, v_y называют при этом плоскостью годографа, а плоскость x, y — физической плоскостью).

Для потенциального движения вместо уравнений Эйлера можно написать сразу их первый интеграл, т. е. уравнение Бернулли:

$$w + \frac{v^2}{2} = w_0. \quad (108,1)$$

Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0. \quad (108,2)$$

Для дифференциала потенциала φ скорости имеем:

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy.$$

Произведём преобразование от независимых переменных x, y к независимым переменным v_x, v_y путём преобразования Лежандра. Для этого пишем:

$$d\varphi = d(xv_x) - x dv_x + d(yv_y) - y dv_y.$$

Вводя функцию

$$\Phi = -\varphi + xv_x + yv_y, \quad (108,3)$$

получаем:

$$d\Phi = x dv_x + y dv_y,$$

где Φ рассматривается как функция от v_x и v_y . Отсюда имеем:

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v_y}. \quad (108,4)$$

Удобнее, однако, пользоваться не декартовыми компонентами скорости, а её абсолютной величиной v и углом θ , образуемым ею

с осью x :

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta. \quad (108,5)$$

Произведя соответствующее преобразование производных, легко получаем вместо (108,4) следующие соотношения:

$$x = \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\cos \theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (108,6)$$

Связь между потенциалом φ и функцией Φ даётся при этом простой формулой

$$\varphi = -\Phi + v \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \quad (108,7)$$

Наконец, для того чтобы получить уравнение, определяющее функцию $\Phi(v, \theta)$, надо преобразовать к новым переменным уравнение непрерывности (108,2). Написав производные в виде якобианов:

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0,$$

умножив на $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, \theta)}$ и подставив (108,5), имеем:

$$\frac{\partial(\rho v \cos \theta, y)}{\partial(v, \theta)} - \frac{\partial(\rho v \sin \theta, x)}{\partial(v, \theta)} = 0.$$

При раскрытии этих якобианов надо подставить для x и y выражения (108,6). Кроме того, поскольку энтропия s является заданной постоянной величиной, то, выразив плотность в виде функции от s и w и подставив для w выражение $w = w_0 - \frac{v^2}{2}$, мы найдём, что плотность может быть написана в виде функции только от скорости: $\rho = \rho(v)$. Имея всё это в виду, мы получим после простых преобразований следующее уравнение:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \rho v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

Согласно (80,5) имеем:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

и в результате получим окончательно для функции $\Phi(v, \theta)$ следующее уравнение С. А. Чаплыгина:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \quad (108,8)$$

Здесь скорость звука является заданной функцией скорости, $c = c(v)$, определяемой уравнением состояния газа и уравнением Бернулли.

Уравнение (108,8) вместе с соотношениями (108,6) заменяет собой уравнения движения. Таким образом, задача о решении нелинейных уравнений движения сводится к решению линейного уравнения для функции $\Phi(v, \theta)$. Правда, нелинейными оказываются зато граничные условия для этого уравнения. Эти условия заключаются в следующем. На поверхности обтекаемого тела скорость газа направлена по касательной к ней. Выразив координаты уравнения поверхности в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (как это было объяснено в предыдущем параграфе) и подставив X и Y в (108,6) вместо x и y , мы получим два уравнения, которые должны удовлетворяться при всех значениях θ , что возможно отнюдь не при всякой функции $\Phi(v, \theta)$. Граничное условие как раз и будет заключаться в требовании, чтобы оба эти уравнения были совместными при всех θ , т. е. одно из них должно быть автоматическим следствием другого.

Удовлетворения граничных условий, однако, ещё не достаточно для того, чтобы гарантировать пригодность полученного решения уравнения Чаплыгина для определения реального течения во всей области движения в физической плоскости. Необходимо ещё выполнение следующего требования: якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, v)}$$

нигде не должен менять знак, проходя через нуль (за исключением лишь тривиального случая, когда обращаются в нуль все четыре составляющие его производные). Легко видеть, что если это условие нарушается, то при прохождении через определённую равенством $\Delta = 0$ (так называемую «предельную») линию в плоскости x, y решение, вообще говоря, становится комплексным¹⁾. Действительно, пусть на линии $v = v_0(\theta)$ имеем $\Delta = 0$ и пусть при этом $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_v \neq 0$. Тогда имеем:

$$-\Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, \theta)} \frac{\partial(v, \theta)}{\partial(v, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y = 0.$$

Отсюда видно, что вблизи предельной линии v как функция от x (при заданном y) определяется уравнением вида

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y (v - v_0)^2,$$

¹⁾ Прохождение же через нуль путём обращения Δ в бесконечность не запрещается. Если на некоторой линии $1/\Delta = 0$, то это приводит лишь к тому, что соответствие между плоскостями x, y и v, θ становится не взаимно однозначным в том смысле, что при обходе плоскости x, y некоторая часть плоскости v, θ пройдёт дважды или трижды.

и по одну из сторон от предельной линии v становится комплексной ¹⁾.

Легко видеть, что предельная линия может появиться лишь в областях сверхзвукового движения. Непосредственное вычисление с использованием соотношений (108,6) и уравнения (108,8) даёт

$$\Delta = \frac{1}{v} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)^2 \right]. \quad (108,9)$$

Ясно, что при $v \leq c$ всегда $\Delta > 0$, и лишь при $v > c$ Δ может изменить знак, пройдя через нуль.

Появление в решении уравнения Чаплыгина предельных линий свидетельствует о том, что в данных конкретных условиях невозможен непрерывный во всей области движения режим обтекания, и в потоке должны возникать ударные волны. Следует, однако, подчеркнуть, что положение этих волн отнюдь не совпадает с предельными линиями.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частный случай сверхзвукового стационарного двухмерного течения (простую волну), характерный тем, что в нём величина скорости является функцией только её направления: $v = v(\theta)$. Это решение не могло бы быть получено из уравнения Чаплыгина; для него тождественно $1/\Delta \equiv 0$, и оно «теряется», когда при преобразовании к плоскости годографа приходится умножать уравнение движения (уравнение непрерывности) на якобиан Δ . Положение здесь в точности аналогично тому, что мы имели в теории одномерного нестационарного движения. Всё сказанное в § 98 о взаимоотношении между простой волной и общим интегралом уравнения (98,2) полностью относится и ко взаимоотношению между стационарной простой волной и общим интегралом уравнения Чаплыгина.

Положительность якобиана Δ при дозвуковом движении позволяет установить интересную теорему, принадлежащую А. А. Никольскому и Г. И. Таганову (1946). Имеем тождественно:

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, v)} \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)},$$

или

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_x. \quad (108,10)$$

В дозвуковом потоке $\Delta > 0$, и мы видим, что производные $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_v$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_x$ имеют одинаковый знак. Этот результат имеет простой гео-

¹⁾ Это утверждение остаётся, очевидно, справедливым и в тех случаях когда одновременно с Δ обращается в нуль и $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right)_y$, но производная $\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_y$ попрежнему меняет знак при $v = v_0$, т. е. разность $x - x_0$ пропорциональна более высокой чётной степени $v - v_0$.

метрический смысл: если передвигаться вдоль линии $v = \text{const.} \equiv v_0$ так, чтобы область $v < v_0$ лежала справа, то угол θ будет монотонно возрастать, т. е. вектор скорости монотонно поворачивается против часовой стрелки. Этот результат относится, в частности, и к линии перехода из до- в сверхзвуковое течение, вдоль которой $v = c = c_*$.

В заключение выпишем уравнение Чаплыгина для идеального газа, выразив в нём в явном виде c через v :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + v^2 \frac{1 - \gamma - 1 \frac{v^2}{c_*^2}}{1 - \frac{v^2}{c_*^2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \quad (108,11)$$

Это уравнение обладает семейством частных интегралов, выражающихся через гипергеометрические функции ¹⁾.

§ 109. Характеристики плоского стационарного течения

Некоторые общие свойства характеристик плоского стационарного (сверхзвукового) движения были рассмотрены уже в § 79. Выведем теперь уравнения, определяющие эти линии по заданному решению уравнений движения.

В плоском стационарном сверхзвуковом потоке имеется в общем случае три семейства характеристик. По двум из них (которые мы будем называть характеристиками C_+ и C_-) распространяются все малые возмущения, за исключением лишь возмущений энтропии и ротора скорости; последние распространяются по характеристикам третьего семейства C_0 , совпадающим с линиями тока. Для заданного течения линии тока известны, и вопрос заключается в определении характеристик первых двух семейств.

Направления проходящих через каждую точку плоскости характеристик C_+ и C_- расположены по обе стороны от проходящей через ту же точку линии тока и образуют с ней угол, равный местному значению угла возмущений α (рис. 41). Обозначим посредством m_0 тангенс угла наклона к оси («угловой коэффициент») линии тока в данной её точке, а посредством m_+ и m_- — угловые коэффициенты характеристик C_+ и C_- . Тогда по формуле сложения тангенсов напишем:

$$\frac{m_+ - m_0}{1 + m_0 m_+} = \text{tg } \alpha, \quad \frac{m_- - m_0}{1 + m_0 m_-} = - \text{tg } \alpha,$$

откуда

$$m_{\pm} = \frac{m_0 \pm \text{tg } \alpha}{1 \mp m_0 \text{tg } \alpha}$$

1) См., например, Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

(верхние знаки относятся везде к C_+ , а нижние — к C_-). Подставив сюда

$$m_0 = \frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

и произведя сокращения, получим следующее выражение для угловых коэффициентов характеристик:

$$m_{\pm} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{v_x v_y \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}. \quad (109,1)$$

Если распределение скоростей в потоке известно, то это есть дифференциальное уравнение, определяющее характеристики C_+ и C_- 1).

Наряду с характеристиками в плоскости x, y можно рассматривать также и характеристики в плоскости годографа, в особенности полезные при изучении изэнтропического потенциального течения, о котором мы и будем ниже говорить. С математической точки зрения это — характеристики уравнения Чаплыгина (108,8) (принадлежащего при $v > c$ к гиперболическому типу). Следуя известному из математической физики общему методу (см. § 96), с помощью коэффициентов этого уравнения составляем уравнение характеристик:

$$dv^2 + d\theta^2 \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,$$

или

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_{\pm} = \pm \frac{1}{v} \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}. \quad (109,2)$$

Определяемые этим уравнением характеристики не зависят от конкретного решения уравнения Чаплыгина, что связано с независимостью коэффициентов последнего от Φ . Характеристики в плоскости годографа, являющиеся отображением характеристик C_+ и C_- в физической плоскости, мы будем условно называть соответственно характеристиками Γ_+ и Γ_- (знаки в (109,2) соответствуют этому условию).

Интегрирование уравнения (109,2) даёт соотношения вида $J_+(v, \theta) = \text{const.}$, $J_-(v, \theta) = \text{const.}$ Функции J_+ и J_- представляют собой величины, остающиеся постоянными соответственно вдоль характеристик C_+ и C_- (инварианты Римана). Для идеального газа уравнение (109,2) может быть проинтегрировано в явном виде. Нет, однако, необходимости производить эти вычисления заново, так как результат может быть написан заранее с помощью формул (107,3) и (107,4). Действительно, согласно общим свойствам простых волн

1) Уравнение (109,1) определяет характеристики и для стационарного осесимметричного течения, если только заменить v_y и y на v_r и r , где r — цилиндрическая координата (расстояние от оси симметрии — оси x); ясно, что весь вывод не изменится, если вместо плоскости x, y рассматривать проходящую через ось симметрии плоскость x, r .

(см. § 97) зависимость v от θ в простой волне как раз и определяется условием постоянства во всём пространстве одного из инвариантов Римана. Произвольной постоянной в формулах (107,3) и (107,4) является φ_* ; исключая из этих формул параметр φ , получим:

$$J_{\pm} = \theta \pm \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \left(1 - \frac{c_*^2}{v^2}\right)} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v^2}{c_*^2} - 1\right)} \right\}. \quad (109,3)$$

Характеристики в плоскости годографа представляют собой семейство эпициклоид, заполняющих пространство между двумя окружностями радиусов (рис. 100):

$$v = c_* \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_*.$$

Для изэнтропического потенциального движения характеристики Γ_+ , Γ_- обладают следующим важным свойством: семейства характеристик Γ_+ и Γ_- ортогональны соответственно характеристикам C_- и C_+ (предполагается, что оси координат x , y изображены параллельными осям v_x , v_y)¹⁾.

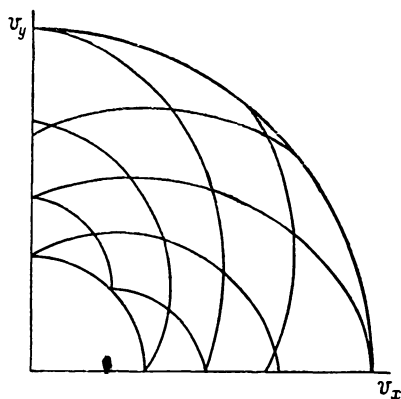


Рис. 100.

Для доказательства этого утверждения исходим из уравнения (106,3) для потенциала плоского течения, имеющего вид

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (109,4)$$

(существенно, что в нём отсутствует свободный член).

Угловые коэффициенты m_{\pm} характеристик C_{\pm} определяются как корни квадратного уравнения

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Рассмотрим выражение $dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^-$, в котором дифференциалы скорости берутся вдоль характеристики Γ_+ , а дифференциалы координат — вдоль C_- . Имеем тождественно:

$$\begin{aligned} dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^- = \\ = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^+ dx^- + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (dx^+ dy^- + dx^- dy^+) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^+ dy^-. \end{aligned}$$

1) Это утверждение не относится к характеристикам осесимметрического движения в плоскости x , r !

Разделив это выражение на $dx^+ dx^-$, получим в качестве коэффициентов при $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ соответственно $m_+ + m_- = 2B/A$ и $m_+ m_- = C/A$, после чего ясно, что в силу уравнения (109,4) выражение обращается в нуль. Таким образом,

$$dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^- = dv^+ dr^- = 0.$$

Аналогично получим:

$$dv^- dr^+ = 0.$$

Эти равенства и выражают собой сделанное выше утверждение.

§ 110. Уравнение Эйлера-Трикоми. Переход через звуковую скорость

Существенный принципиальный интерес имеет исследование особенностей течения, возникающих при переходе из до- в сверхзвуковую область, или обратно. Стационарные течения, сопровождающиеся таким переходом, называются смешанными, или трансзвуковыми, а самую границу перехода называют переходной, или звуковой, поверхностью.

Для исследования течения вблизи границы перехода в особенности удобно уравнение Чаплыгина, сильно упрощающееся в этой области.

На границе перехода $v = c = c_*$, а вблизи неё (в «околозвуковой» области) разности $v - c_*$ и $c - c_*$ малы и связаны друг с другом соотношением (106,8):

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_* \left(\frac{v}{c_*} - 1 \right).$$

Произведём соответствующие упрощения в уравнении Чаплыгина. Третий член уравнения (108,8) мал по сравнению со вторым, содержащим $1 - \frac{v^2}{c^2}$ в знаменателе. Во втором же члене полагаем приближённо

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{c_*^2}{2 \left(1 - \frac{v}{c} \right)} = \frac{c_*}{2 \alpha_* \left(1 - \frac{v}{c_*} \right)}.$$

Наконец, вводя вместо скорости v новую переменную

$$\eta = (2\alpha_*)^{1/3} \frac{v - c_*}{c_*}, \quad (110,1)$$

получим искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (110,2)$$

Уравнение такого вида в математической физике называется уравнением Эйлера-Трикоми ¹⁾. В полуплоскости $\eta > 0$ оно относится к гиперболическому, а в полуплоскости $\eta < 0$ — к эллиптическому типу. Мы рассмотрим здесь ряд чисто математических свойств этого уравнения, которые существуют для исследования тех или иных конкретных физических случаев.

Характеристики уравнения (110,2) определяются уравнением

$$\eta d\eta^2 - d\theta^2 = 0,$$

имеющим общий интеграл:

$$\theta \pm \frac{2}{3} \eta^{3/2} = C, \quad (110,3)$$

где C — произвольная постоянная. Это уравнение изображает в плоскости η, θ два семейства характеристик, представляющих собой ветви полукубических парабол, расположенных в правой полуплоскости с точками возврата на оси θ (рис. 101).

При исследовании движения в небольшой области пространства, в которой направление скорости газа меняется значительно ²⁾, всегда можно выбрать направление оси x так, чтобы отсчитываемый от неё угол θ во всей рассматриваемой области был малым. Тогда сильно упрощаются также и уравнения (108,6), определяющие координаты x, y по функции $\Phi(\eta, \theta)$ ³⁾:

$$x = (2\alpha_*)^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Для того чтобы избежать появления в формулах лишнего множителя $(2\alpha_*)^{1/2}$, мы будем ниже, в §§ 110—112, пользоваться вместо координаты x величиной $x(2\alpha_*)^{-1/2}$, обозначая её той же буквой x . Тогда

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (110,4)$$

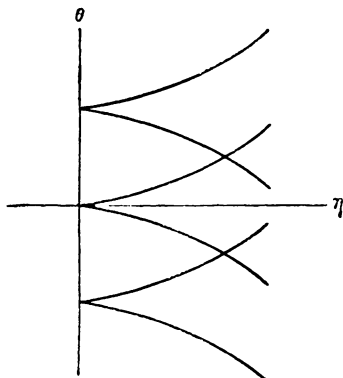


Рис. 101.

¹⁾ К рассматриваемой газодинамической проблеме уравнение Трикоми было впервые привлечено Ф. И. Франклем (1945). Математическая теория уравнения (110,2) изложена в книге Ф. Трикоми «О линейных уравнениях смешанного типа», Гостехиздат, 1947.

²⁾ Слова «небольшая область» не следует, разумеется, понимать буквально. Речь может идти и об исследовании «окрестности бесконечно удалённой точки», т. е. о течении на достаточно больших расстояниях от обтекаемого тела.

³⁾ Мы опустили в правых сторонах равенства множители $1/c_*$; это означает лишь замену функции Φ на $c_*\Phi$, не меняющую уравнения (110,2) и потому всегда допустимую.

Полезно заметить, что ввиду такой простой связи с Φ функция $y(\eta, \theta)$ (но не $x(\eta, \theta)$) тоже удовлетворяет уравнению Эйлера-Трикоми. Имея это в виду, можно написать якобиан преобразования из физической плоскости в плоскость годографа в виде

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = \Phi_{\eta\theta}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - \eta \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2. \quad (110,5)$$

Как уже сказано, уравнение Эйлера-Трикоми приходится обычно применять для исследования свойств решения в окрестности начала координат в плоскости η, θ . В физически интересных случаях эта точка представляет собой особую точку решения. В связи с этим особое значение приобретает семейство частных интегралов уравнения Эйлера-Трикоми, обладающих определёнными свойствами однородности. Именно, речь идёт о решениях, однородных по отношению к переменным θ^2 и η^3 ; такие решения должны существовать, поскольку преобразование $\theta^2 \rightarrow a\theta^2$, $\eta^3 \rightarrow a\eta^3$ оставляет инвариантным уравнение (110,2). Будем искать эти решения в виде

$$\Phi = \theta^{2k} f(\xi), \quad \xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2},$$

где k — постоянная (степень однородности функции Φ по отношению к указанному преобразованию). Переменную ξ мы выбрали такой, что она обращается в нуль на характеристиках, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1-\xi)f'' + \left[\frac{5}{6} - 2k - \xi\left(\frac{3}{2} - 2k\right)\right]f' - k\left(k - \frac{1}{2}\right)f = 0.$$

Это есть частный случай гипергеометрического уравнения. С помощью известного выражения для двух независимых интегралов гипергеометрического уравнения находим искомое решение (при нецелом числе $2k + \frac{1}{6}$) в виде

$$\Phi_k = \theta^{2k} \left[AF\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + \right. \\ \left. + B\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k + \frac{1}{6}} F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}, 2k + \frac{7}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \right]. \quad (110,6)$$

С помощью известных соотношений между гипергеометрическими функциями от аргументов z , $\frac{1}{z}$, $1-z$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z}{1-z}$ можно представить это решение ещё в пяти других видах; при исследовании различных конкретных случаев приходится пользоваться всеми этими

видами. Мы приведём здесь лишь следующие два вида:

$$\Phi_k = \theta^{2k} \left[AF \left(-k, -k + \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2} \right) + \right. \\ \left. + B \frac{\eta}{\theta^{2/3}} F \left(-k + \frac{1}{3}, -k + \frac{5}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2} \right) \right], \quad (110,7)$$

$$\Phi_k = \eta^{3k} \left[AF \left(-k, -k + \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{9\theta^2}{4\eta^3} \right) + \right. \\ \left. + B \frac{\theta}{\eta^{3/2}} F \left(-k + \frac{1}{2}, -k + \frac{5}{6}, \frac{3}{2}; \frac{9\theta^2}{4\eta^3} \right) \right] \quad (110,8)$$

(постоянные A , B в формулах (110,6)—(110,8), конечно, не совпадают). Из этих выражений сразу вытекает следующее важное свойство функций Φ_k , не видное непосредственно из выражения (110,6): линии $\eta = 0$ и $\theta = 0$ не являются их особыми линиями (из (110,7) видно, что вблизи $\eta = 0$ Φ_k разлагается по целым степеням η , а из (110,8)—то же самое по θ). Из выражения же (110,6) видно, что характеристики, напротив, являются особыми линиями общего (т. е. содержащего обе постоянные A и B) однородного интеграла Φ_k уравнения Эйлера-Трикоми: при нецелом $2k + \frac{1}{6}$ точками разветвления обладает множитель $(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k + \frac{1}{6}}$, а при целом $2k + \frac{1}{6}$ один из членов в (110,6) вообще теряет смысл ¹⁾ (либо, при $2k + \frac{1}{6} = 0$, совпадает с другим) и должен быть заменён вторым независимым решением гипергеометрического уравнения, имеющим, как известно, в этом случае логарифмическую особенность.

Между интегралами Φ_k с различными значениями k имеются следующие соотношения:

$$\Phi_k = \Phi_{-k - \frac{1}{6}} (9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k + \frac{1}{6}}, \quad (110,9)$$

$$\Phi_{k - \frac{1}{2}} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \theta}. \quad (110,10)$$

Первое следует непосредственно из выражения (110,6), а второе — из того, что функция $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \theta}$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Трикоми и имеет ту же степень однородности, что и $\Phi_{k - \frac{1}{2}}$. В этих формулах под Φ_k подразумевается, конечно, общее выражение с двумя произвольными постоянными.

¹⁾ Напомним, что ряд $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ при $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ теряет смысл.

При исследовании решения в окрестности точки $\eta = \theta = 0$ приходится следить за его изменением при обходе вокруг этой точки. Пусть, например, функция Φ_k (110,6) изображает решение в точке A вблизи характеристики $\theta = \frac{2}{3} \eta^{3/2}$ (рис. 102) и требуется найти форму

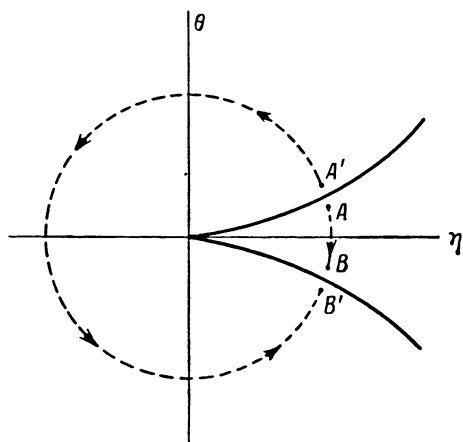


Рис. 102.

решения вблизи характеристики $\theta = -\frac{2}{3} \eta^{3/2}$ (в точке B). Переход вдоль AB связан с пересечением оси абсцисс; между тем значение $\theta = 0$ есть особая точка гипергеометрических функций в выражении (110,6), так как их аргумент обращается в бесконечность. Поэтому для совершения перехода необходимо сначала применить к гипергеометрическим функциям преобразование, переводящее их в функции обратного аргумента $\left(\frac{9\theta^2}{9\theta^2 - 4\eta^3}\right)$, для которых $\theta = 0$ уже не будет особой точкой,

после чего меняем знак θ и повторным таким же преобразованием переводим их в функции прежнего аргумента. Таким способом получим для функций, входящих в выражение (110,6) следующие формулы преобразования:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\rightarrow \frac{F_1}{2 \sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} + F_2 \cdot 2^{-4k - \frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(-2k - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(-2k + \frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k) \Gamma\left(-2k + \frac{2}{3}\right)}, \\ F_2 &\rightarrow -\frac{F_2}{2 \sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} + F_1 \cdot 2^{4k + \frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(2k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k + 1) \Gamma\left(2k + \frac{1}{3}\right)}, \end{aligned} \right\} (110,11)$$

причём под F_1 и F_2 подразумеваются выражения

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= |\theta|^{2k} F\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \\ F_2 &= |\theta|^{2k} \left|1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k + \frac{1}{6}} F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}, 2k + \frac{7}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \end{aligned} \right\} (110,12)$$

в которых θ и $1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}$ в коэффициентах при гипергеометрических функциях берутся по их абсолютным значениям.

Аналогичным образом можно получить формулы преобразования при переходе из точки A' в точку B' (рис. 102) путём обхода начала координат в обратном направлении. Вычисления при этом более громоздки, так как приходится проходить через три особые точки гипергеометрических функций — точку с $\theta = 0$ и два раза точки с $\eta = 0$ (напомним, что особыми точками гипергеометрической функции аргумента z являются точки $z = 1$ и $z = \infty$). Окончательные формулы гласят:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\rightarrow -\frac{\sin \pi \left(4k - \frac{1}{6}\right)}{\sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} F_1 + \\ &+ F_2 \cdot 2^{-4k + \frac{2}{3}} \cos \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma\left(-2k - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(-2k + \frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k) \Gamma\left(-2k + \frac{2}{3}\right)}, \\ F_2 &\rightarrow \frac{\sin \pi \left(4k - \frac{1}{6}\right)}{\sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} F_2 + \\ &+ F_1 \cdot 2^{4k + \frac{4}{3}} \cos \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma\left(2k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k + 1) \Gamma\left(2k + \frac{1}{3}\right)}. \end{aligned} \right\} (110,13)$$

Наряду с рассмотренным семейством однородных решений можно построить, конечно, и другие семейства частных интегралов уравнения Эйлера-Трикоми. Укажем здесь семейство решений, возникающих в связи с разложением Фурье по углу θ . Если искать Φ в виде

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta) e^{\pm i\nu\theta}, \quad (110,14)$$

где ν — произвольная постоянная, то для функции g_ν получим уравнение

$$g_\nu'' + \nu^2 \eta g_\nu = 0.$$

Это есть уравнение функций Эйри; его общий интеграл есть

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta} Z_{\nu/3} \left(\frac{2\nu}{3} \eta^{3/2} \right), \quad (110,15)$$

где $Z_{\nu/3}$ — произвольная линейная комбинация функций Бесселя порядка $\frac{1}{3}$.

Наконец, полезно иметь в виду, что общий интеграл уравнения Эйлера-Трикоми может быть написан в виде

$$\Phi = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) dz, \quad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \quad (110,16)$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, а интегрирование производится в плоскости комплексного переменного z по любому контуру C , на концах которого производная $f'(\zeta)$ принимает одинаковые значения. Действительно, непосредственная подстановка выражения (110,16) в уравнение даёт

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 9 \int_C (z^2 - \eta) f''(\zeta) dz = 3 \int f''(\zeta) d\zeta = 3f'(\zeta) \Big| = 0,$$

т. е. уравнение удовлетворяется.

§ 111. Решения уравнения Эйлера-Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Выясним теперь, какие решения Φ_k соответствуют тем случаям, когда в окрестности границы перехода течение газа не обладает никакими физическими особенностями (нет никаких слабых разрывов или ударных волн). Для этого, однако, удобнее исходить не непосредственно из уравнения Эйлера-Трикоми, а из уравнения для потенциала скорости в физической плоскости. Такое уравнение было выведено в § 106; для плоского движения уравнение (106,10) после введения новой координаты согласно $x \rightarrow x(2\alpha_*)^{1/3}$ принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (111,1)$$

Напомним, что потенциал φ определён здесь таким образом, что его производные по координатам дают скорость согласно равенствам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \eta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \theta. \quad (111,2)$$

Заметим также, что уравнение Эйлера-Трикоми можно получить и непосредственно из уравнения (111,1), переходя к независимым переменным θ, η с помощью преобразования Лежандра, причём будет $\Phi = -\varphi + x\eta + y\theta$, или

$$\varphi = -\Phi + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (111,3)$$

Выбрав начало координат x, y в точке линии перехода, окрестность которой мы исследуем, разложим φ по степеням x и y . В общем случае первый член разложения, удовлетворяющего уравнению (111,1), есть

$$\varphi = \frac{1}{a} xy. \quad (111,4)$$

При этом $\theta = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$, так что

$$\Phi = a\theta\eta. \quad (111,5)$$

По степени однородности этой функции ясно, что ему соответствует одна из функций $\Phi_{5/6}$; это есть второй член выражения (110,7), в котором гипергеометрическая функция с $k = 5/6$ сводится просто к 1:

$$\eta^{\theta} F\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \eta^{\theta}.$$

Если мы хотим найти уравнение линии перехода в физической плоскости, то написанный первый член разложения недостаточен. Следующий член разложения Φ имеет степень однородности 1, т. е. соответствует одной из функций Φ_1 ; это есть первый член выражения (110,7), сводящийся при $k = 1$ к полиному:

$$\theta^2 F\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \theta^2 + \frac{\eta^3}{3}.$$

Таким образом, первые два члена разложения Φ :

$$\Phi = a\eta^{\theta} + b\left(\theta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right). \tag{111,6}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x &= a\theta + b\eta^2, \\ y &= a\eta + 2b\theta. \end{aligned} \right\} \tag{111,7}$$

Линия перехода ($\eta = 0$) есть прямая $y = \frac{2b}{a}x$.

Для нахождения же уравнения характеристик в физической плоскости достаточен первый член разложения. Подставляя $\theta = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ в уравнение годографических характеристик $\theta = \pm \frac{2}{3} \eta^{3/2}$, получим:

$$x = \pm \frac{2}{3\sqrt{a}} y^{3/2},$$

т. е. снова две ветви полукубической параболы с точкой возврата на линии перехода. Это свойство характеристик заранее очевидно из следующих простых соображений. В точках линии перехода угол возмущений равен $\pi/2$. Это значит, что касательные к характеристикам обоих семейств совпадают, что и означает наличие здесь точки возврата (рис. 103). Линии же тока пересекают линию перехода перпендикулярно к характеристикам, не имея здесь никаких особенностей.

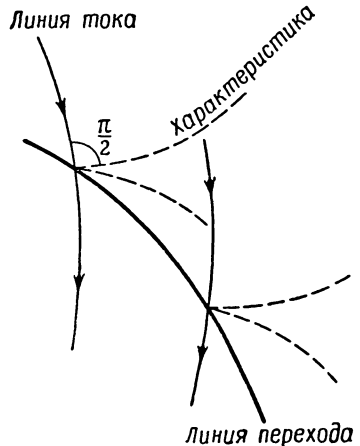


Рис. 103.

Решение (111,6) неприменимо в том исключительном случае, когда в рассматриваемой точке линии перехода линия тока перпендикулярна

к ней¹⁾ Вблизи такой точки течение, очевидно, симметрично относительно оси x . Этот случай требует особого рассмотрения (такое исследование производилось Ф. И. Франклем и С. В. Фальковичем, 1945).

Симметрия течения означает, что при изменении знака u скорость v_y меняет знак, а v_x остаётся неизменной. Другими словами, потенциал φ должен быть чётной функцией y (а потенциал Φ — чётной функцией θ). Первые члены разложения φ будут поэтому в этом случае иметь следующий вид:

$$\varphi = \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2xy^2}{2} + \frac{a^3y^4}{24} \quad (111,8)$$

(относительный порядок малости x и y не predetermined, так что все три написанных члена могут быть одинакового порядка). Отсюда находим следующие формулы преобразования из физической плоскости в плоскость годографа:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= ax + \frac{a^2y^2}{2}, \\ \theta &= a^2xy + \frac{a^3y^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (111,9)$$

Уже не решая этих уравнений относительно x и y в явном виде, легко видеть, что степень однородности функции $y(\theta, \eta)$ равна $1/6$. Поэтому соответствующая функция Φ имеет $k = 1/6 + 1/2 = 2/3$, т. е. заключена в общем интеграле $\Phi_{2/3}$.

Исключив из уравнений (111,9) x , получим для определения функции $y(\theta, \eta)$ кубическое уравнение

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \quad (111,10)$$

При $\theta^2 - \frac{4}{9}\eta^3 > 0$, т. е. во всей области слева от годографических характеристик, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$ (в том числе во всей дозвуковой области, $\eta < 0$; рис. 104), это уравнение имеет всего один вещественный корень, который и должен быть взят в качестве функции $y(\theta, \eta)$. В области же справа от характеристик вещественны все три корня; из них должен быть взят тот, который является продолжением вещественного в левой области корня.

Характеристики в физической плоскости (проходящие через начало координат) получаются подстановкой выражений (111,9) в уравнение $4\eta^3 = 9\theta^2$. Это даёт две параболы:

$$\left. \begin{aligned} \text{характеристики 23 и 56: } x &= -\frac{ay^2}{4}, \\ \text{характеристики 34 и 45: } x &= \frac{ay^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (111,11)$$

¹⁾ В решении (111,6) этому соответствовало бы равенство нулю постоянной a ; но при $a = 0$ это решение теряет смысл, так как на линии $\eta = 0$ обращается в нуль якобиан Δ .

(цифры указывают, какие две области в физической плоскости разделяет данная характеристика). Линия же перехода ($\eta = 0$ в плоскости годографа) в физической плоскости есть парабола $x = -\frac{ay^2}{2}$ (рис. 104). Отметим следующую особенность точки пересечения линии перехода с осью симметрии: из этой точки исходят четыре ветви характеристик, между тем как из всякой другой точки линии перехода — всего две.

На рис. 104 одинаковыми цифрами отмечены соответствующие

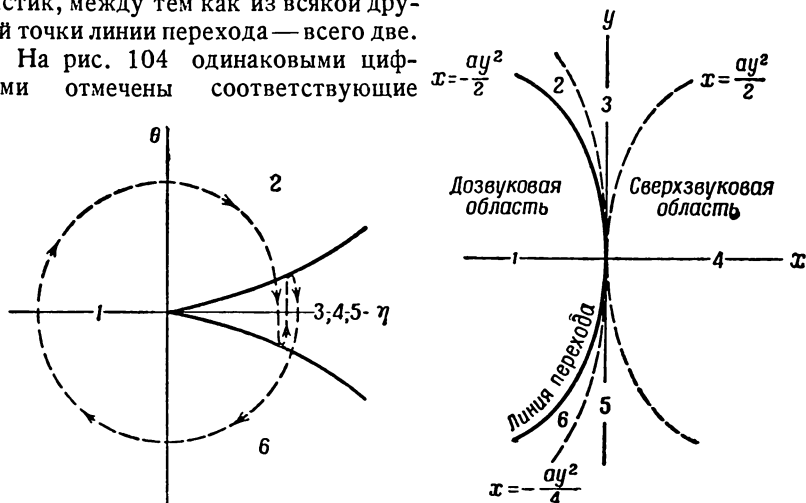


Рис. 104.

друг другу области плоскости годографа и физической плоскости. Это соответствие — не взаимно однозначное¹⁾; при полном обходе вокруг начала координат в физической плоскости область между двумя характеристиками в плоскости годографа проходится трижды, как это указано пунктирной линией на рис. 104, дважды «отражающейся» от характеристик.

Поскольку функция $y(\theta, \eta)$ сама удовлетворяет уравнению Эйлера-Трикоми, то она должна содержаться в общем интеграле $\Phi_{1/6}$. Вблизи характеристики 23 в физической плоскости это есть

$$y = \frac{1}{a} \left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \quad (111,12)$$

(первый член выражения (110,6), не имеющий особенности на характеристике). Производя её аналитическое продолжение в окрестность характеристики 56 (по пути, проходящему через дозвуковую область 1, т. е. с помощью формул (110,13)), мы получим там такую же

¹⁾ В соответствии с тем, что на характеристике $x = ay^2/2$ в физической плоскости имеем $\Delta = \infty$ (см. примечание на стр. 525).

функцию. Вблизи же характеристик 34 и 45 у (θ , η) представится линейными комбинациями этой функции и функции

$$\theta^{1/3} \sqrt{\frac{4\eta^3}{9\theta^2} - 1} F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \quad (111,13)$$

(второй член выражения (110,6)); эти комбинации получаются путём аналитического продолжения с помощью формул (110,11) (причём надо иметь в виду, что при каждом «отражении» от годографической характеристики квадратный корень в функции (111,13) меняет знак).

С чисто математической точки зрения полученные результаты показывают, что функции $\Phi_{1/6}$ являются линейными комбинациями корней кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \quad (111,14)$$

т. е. сводятся к алгебраическим функциям¹⁾. Вместе с $\Phi_{1/6}$ сводятся к алгебраическим функциям также и все Φ_k с

$$k = \frac{1}{6} \pm \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (111,15)$$

получающиеся согласно формулам (110,9) и (110,10) из $\Phi_{1/6}$ путём последовательных дифференцирований (это обстоятельство было отмечено Ф. И. Франклем, 1947).

К алгебраическим функциям сводятся также те функции Φ_k с

$$k = \pm \frac{n}{2}, \quad k = \frac{1}{3} \pm \frac{n}{2}, \quad (111,16)$$

в которых гипергеометрическая функция сводится к полиному²⁾ (так, при $k = n/2$ это есть первый член, а при $k = -n/2$ — второй член выражения (110,6)).

К этим трём семействам алгебраических функций Φ_k относятся, в частности, все те функции, которые могут соответствовать (в качестве потенциала Φ) течениям, не имеющим никаких особенностей в физической плоскости. Именно, для таких течений все члены разложения Φ вблизи несимметричной точки линии перехода (первые два члена которого даются формулой (111,6)) могут иметь лишь $k = \frac{5}{6} \pm \frac{n}{2}$ или $k = 1 \pm \frac{n}{2}$. Разложение же Φ вблизи симметричной точки (начинающееся с члена с $k = 2/3$) может, кроме того, содержать ещё функции с $k = \frac{2}{3} \pm \frac{n}{2}$.

¹⁾ Пользоваться явным выражением этих функций, получаемым из (111,14) с помощью формулы Кардана, фактически неудобно.

²⁾ Здесь надо иметь в виду, что $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ сводится к полиному, если для α (или β) имеет место $\alpha = -n$ или $\gamma - \alpha = -n$,

§ 112. Обтекание со звуковой скоростью

Упрощённое уравнение Чаплыгина в форме уравнения Эйлера-Трикоми должно играть фундаментальную роль в газодинамике стационарного обтекания тел, так как с его помощью должны исследоваться основные качественные особенности таких течений. Сюда относятся в первую очередь вопросы, связанные с возникновением ударных волн. Так, если ударная волна образуется при дозвуковом обтекании (в местной сверхзвуковой зоне, примыкающей к поверхности обтекаемого тела ¹⁾), то она должна заканчиваться на конечном расстоянии от тела, и возникает вопрос о свойствах такого окончания. Другая аналогичная проблема — вопрос о свойствах только что образовавшейся ударной волны вблизи её пересечения с поверхностью тела. В обоих этих случаях ударная волна обладает слабой интенсивностью, т. е. находится в околосвуковой зоне, а потому исследование должно производиться (до настоящего времени оно ещё не было произведено) с помощью уравнения Эйлера-Трикоми ²⁾.

Мы рассмотрим здесь другой теоретически важный вопрос — о характере стационарного плоского обтекания, когда скорость набегающего потока равна в точности скорости звука. Мы увидим, в частности, что при таком обтекании непременно имеется простирающаяся от тела до бесконечности ударная волна. Отсюда можно сделать важное заключение о том, что ударная волна должна впервые возникнуть при числе M_∞ , во всяком случае меньшем единицы.

Итак, рассмотрим плоское обтекание тела с бесконечно длинным размахом («крыла») произвольного, не обязательно симметричного сечения. При этом мы будем интересоваться картиной течения на достаточно больших (по сравнению с размерами) расстояниях от тела. Для удобства изложения мы сначала опишем качественно получающиеся результаты, а затем перейдём к количественному расчёту.

На рис. 105 AB и $A'B'$ — линии перехода, так что слева от них (вверх по течению) лежит целиком дозвуковая область; стрелкой изображено направление натекающего потока (которое мы ниже

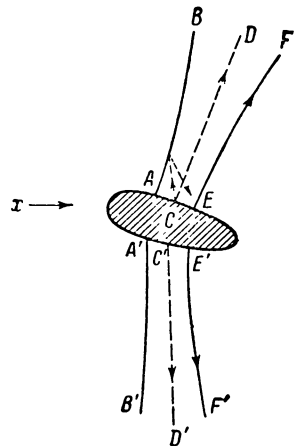


Рис. 105.

¹⁾ Число $M_\infty < 1$ набегающего потока, при котором впервые в какой-либо точке местное число M достигает единицы, иногда называют критическим.

²⁾ Напомним, что в слабой ударной волне изменение энтропии и ротора скорости — величины более высоких порядков малости. Поэтому в первом приближении движение можно считать изэнтропическим и потенциальным и позади разрыва.

выбираем в качестве оси x с началом где-либо в районе тела). На некотором расстоянии от линии перехода возникают «исходящие» от тела ударные волны (EF и $E'F'$ на рис. 105). Оказывается, что все «исходящие» от тела характеристики (в области между линией перехода и ударной волной) можно разделить на две группы. Характеристики первой группы достигают звуковой линии, оканчиваясь на ней (или, иначе говоря, «отражаясь» от неё в виде характеристики, «приходящей» к телу; на рис. 105 изображена одна из таких характеристик). Характеристики же второй группы оканчиваются на ударной волне. Обе эти группы разделены «предельными характеристиками» — единственными, уходящими на бесконечность и никогда не достигающими ни линии перехода, ни ударной волны (CD и $C'D'$ на рис. 105). Поскольку возмущения (связанные, например, с изменением контура обтекаемого тела), распространяющиеся от тела по характеристикам первой группы, достигают границы дозвуковой области, то ясно, что часть сверхзвукового потока, лежащая между линией перехода и предельной характеристикой, влияет на дозвуковую область; весь же поток в области справа от предельных характеристик никакого влияния на поток слева не оказывает: течение слева никак не изменится при возмущении потока справа (в том числе при изменении профиля тела справа от точек C , C'). Течение позади ударной волны, как мы знаем, никак не влияет на течение перед ней. Таким

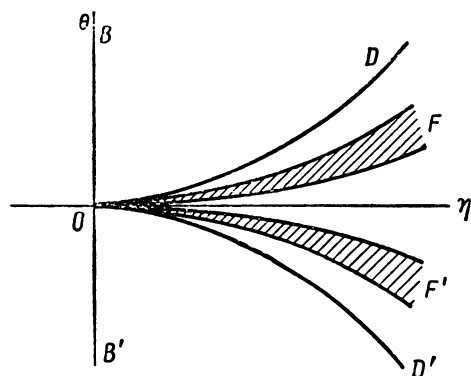


Рис. 106.

образом, весь поток можно разделить на три части (слева от $DCC'D'$ между $DCC'D'$ и $FEE'F'$, справа от $FEE'F'$), причём течение во второй никак не влияет на течение в первой, а течение в третьей — на течение во второй. Началом координат в плоскости годографа ($\theta = \eta = 0$) соответствует бесконечно удалённой области в физической плоскости, а выходящие из начала координат годографические характеристики соответствуют предельным характеристикам CD и CD' . На рис. 106 изображена окрестность начала координат, причём буквы соответствуют обозначениям на рис. 105. Ударная волна изображается в плоскости годографа не одной линией, а двумя (соответствующими движению газа по обеим сторонам разрыва), причём области между ними (заштрихованной на рис. 106) не соответствуют никакой области в физической плоскости.

Перейдём теперь к количественному расчёту описанной картины (являющемуся в то же время её проверкой).

Начало координат в плоскости годографа ($\theta = \eta = 0$)

Прежде всего необходимо выяснить, какой из общих интегралов Φ_k соответствует данному случаю обтекания. Если $\Phi(\theta, \eta)$ имеет порядок однородности k , то функции $x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ и $y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ будут однородными — соответственно порядков $k - \frac{1}{3}$ и $k - \frac{1}{2}$. При стремлении θ и η к нулю мы должны, вообще говоря, попасть на бесконечность в физической плоскости, т. е. x и y должны стремиться к бесконечности. Очевидно, что для этого должно быть $k < \frac{1}{3}$. С другой стороны, предельные характеристики в физической плоскости не должны лежать целиком на бесконечности, т. е. не должно быть $y = \pm \infty$ по всей линии $9\theta^2 = 4\eta^3$. Для этого (при $2k + \frac{1}{6} < \frac{5}{6}$) второй член в квадратных скобках в выражении (110,6) должен вообще отсутствовать. Таким образом, функция $\Phi(\theta, \eta)$ должна изображаться первым членом выражения (110,6):

$$\Phi = A\theta^{2k}F\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \quad (112,1)$$

Функция $y(\theta, \eta)$ (тоже удовлетворяющая уравнению Эйлера-Трикоми) будет иметь такой же вид с $k - \frac{1}{2}$ вместо k .

Но если выражение (112,1) имеет место, например, вблизи верхней характеристики ($\theta = +\frac{2}{3}\eta^{3/2}$), то при произвольном $k < \frac{1}{3}$ оно отнюдь не будет иметь место также и вблизи второй характеристики ($\theta = -\frac{2}{3}\eta^{3/2}$). Поэтому мы должны потребовать также, чтобы вид (112,1) функции $\Phi(\theta, \eta)$ оставался таким же при обходе вокруг начала координат в плоскости годографа от одной характеристики к другой, причём обход должен происходить через полуплоскость $\eta < 0$ (путь $A'B'$ на рис. 102). Такой обход соответствует в физической плоскости переходу от удалённых точек одной из предельных характеристик к удалённым точкам другой предельной характеристики, причём путь перехода проходит через дозвуковую область и потому нигде не пересекает ударную волну, нарушающую непрерывность течения. Преобразование гипергеометрической функции в (112,1) при таком переходе даёт первой из формул (110,13), и мы должны потребовать обращения в нуль коэффициента перед F_2 в этой формуле. Это условие выполняется при следующих значениях $k < \frac{1}{3}$:

$$k = \frac{1}{6} - \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из всех этих значений должно быть окончательно выбрано лишь одно:

$$k = -\frac{1}{3}. \quad (112,2)$$

Можно показать, что все значения k с $n > 1$ приводят к неоднозначному отображению плоскости годографа на физическую плоскость

(при однократном обходе первой вторая обходится несколько раз), т. е. к неоднозначности физического течения, что, разумеется, нелепо. Значение же $k = 1/6$ даёт решение, в котором не по всем направлениям в физической плоскости стремление θ и η к нулю означает уход на бесконечность; ясно, что такое решение тоже физически не пригодно.

При $k = -1/6$ коэффициент при F_1 в правой стороне формулы (110,13) равен $+1$, т. е. при обходе от одной характеристики к другой функция Φ вообще не меняется. Это значит, что Φ есть чётная функция θ , а координата $y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ — соответственно нечётная функция. Физически это означает, что в рассматриваемом нами первом приближении картина течения на больших расстояниях от тела оказывается симметрично относительно плоскости $y = 0$ независимо от формы тела, в частности от наличия или отсутствия подъёмной силы.

Таким образом, мы выяснили характер особенности, которую имеет $\Phi(\eta, \theta)$ в точке $\eta = \theta = 0$. Уже непосредственно отсюда можно сделать заключение о форме линии перехода, предельных характеристик и ударной волны на больших расстояниях от тела. Каждая из этих линий должна соответствовать определённому значению отношения θ^2/η^3 , и поскольку Φ имеет вид $\Phi = \theta^{-2/3} f\left(\frac{\eta^3}{\theta^2}\right)$, то с помощью формул (110,4) мы найдём, что $x \propto \theta^{-4/3}$, $y \propto \theta^{-2/3}$. Поэтому форма перечисленных линий определяется уравнениями вида

$$x = \text{const. } y^{4/3} \quad (112,3)$$

со своим значением const. для каждой из них. Вдоль этих линий θ и η падают по законам:

$$\theta = \frac{\text{const.}}{y^{3/2}}, \quad \eta = \frac{\text{const.}}{y^{1/2}}. \quad (112,4)$$

Эти результаты были впервые получены Ф. И. Франклем (1947).

Ниже мы будем для определённости писать формулы со знаками, соответствующими верхней полуплоскости ($y > 0$).

Покажем, как могут быть вычислены коэффициенты в этих формулах. Значение $k = -1/6$ есть одно из тех, при которых Φ_k сводится к алгебраическим функциям (см. предыдущий параграф). Тот частный интеграл, который в данном случае определяет Φ , может быть написан в виде $\Phi = \frac{a_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$, где a_1 — произвольная положительная постоянная, а f есть тот корень кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \quad (112,5)$$

который при $\theta^2 - 4/9\eta^3 > 0$ совпадает с единственным вещественным корнем. Отсюда

$$\Phi = \frac{a_1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{a_1}{2(f^2 - \eta)}, \quad (112,6)$$

а также для координат

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{a_1 (f^2 + \eta)}{2 (f^2 - \eta)^3}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{a_1 f}{(f^2 - \eta)^3}. \quad (112,7)$$

Эти формулы можно представить в удобном параметрическом виде, введя в качестве параметра величину $s = \frac{f^2}{f^2 - \eta}$; тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y^{4/3}} &= a_1^{1/3} \frac{2s-1}{2s^{2/3}}, & \eta y^{2/3} &= a_1^{2/3} s^{1/3} (s-1), \\ \theta y^{2/3} &= \frac{a_1^{3/3}}{3} s^{1/3} (3-2s), \end{aligned} \right\} \quad (112,8)$$

чем определяется в параметрическом виде зависимость η и θ от координат. Параметр s пробегает положительные значения, начиная от нуля ($s=0$ соответствует $x=-\infty$, т. е. натекающему с бесконечности потоку). В частности, значение $s=1/2$ соответствует $x=0$, т. е. даёт распределение скоростей при больших y в перпендикулярной к оси x плоскости, проходящей в районе обтекаемого тела. Значение $s=1$ соответствует линии перехода ($\eta=0$), а $s=4/3$, как легко убедиться, — предельной характеристике. Значение же постоянной a_1 зависит от конкретной формы обтекаемого тела и могло бы быть определено лишь путём точного решения задачи во всём пространстве.

Формулы (112,8) относятся лишь ко всей области перед ударной волной. Неизбежность появления последней видна уже из следующих соображений. Простое вычисление по формуле (110,5) даёт для якобиана Δ выражение

$$\Delta = a_1^2 \frac{4f^2 - \eta}{(f^2 - \eta)^3}.$$

Легко видеть, что на характеристиках и во всей области слева от них (что соответствует области вверх по течению от предельных характеристик в физической плоскости) $\Delta > 0$ и нигде в нуль не обращается. В области же справа от характеристик Δ проходит через нуль, откуда и видна неизбежность возникновения здесь ударной волны.

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения Эйлера-Трикоми на ударной волне, заключаются в следующем. Пусть, θ_1 , η_1 и θ_2 , η_2 — значения θ и η по обеим сторонам разрыва. Прежде всего они должны соответствовать одной и той же кривой в физической плоскости, т. е.

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \quad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \quad (112,9)$$

Далее, условие непрерывности касательной к разрыву компоненты скорости (т. е. условие непрерывности производной от потенциала Φ

вдоль линии разрыва) эквивалентно условию непрерывности самого потенциала:

$$\varphi(\theta_1, \eta_1) = \varphi(\theta_2, \eta_2) \quad (112,10)$$

(потенциал φ определяется по функции Φ формулой (111,3)). Нако-

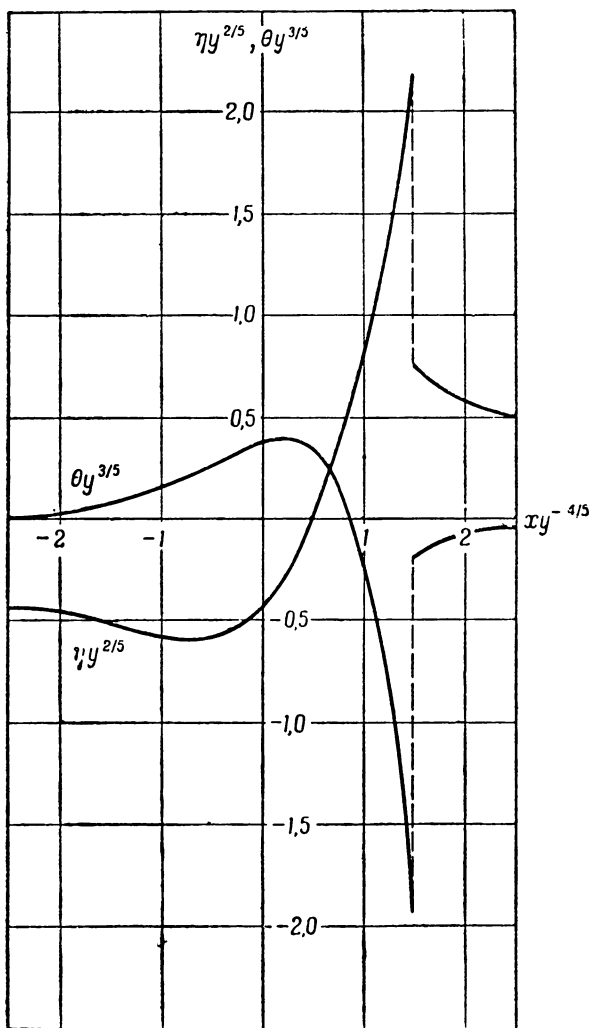


Рис. 107.

нец, последнее условие можно получить из предельной формы уравнения ударной поляры (86,6), устанавливающей определённую связь

между компонентами скорости по обеим сторонам разрыва. Заменяя в (86,6) угол χ на $\theta_2 - \theta_1$ и введя η_1, η_2 вместо v_1, v_2 , получим следующее соотношение:

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2 (\eta_2 + \eta_1). \quad (112,11)$$

В данном случае решение уравнения Эйлера-Трикоми позади ударной волны (область между OF и OF' в плоскости годографа; рис. 106) имеет тот же вид (112,5) и (112,6), но, конечно, с другим постоянным коэффициентом (обозначим его как $-a_2$) вместо a_1 . Четыре уравнения (112,9)—(112,11) определяют отношение a_2/a_1 и связывают между собой величины: $\eta_1, \theta_1, \eta_2, \theta_2$. В результате довольно сложного их совместного решения получаются следующие результаты. Ударной волне соответствует значение

$$s = \frac{5\sqrt{3} + 8}{6} = 2,58$$

параметра s в формулах (112,8), дающих при этом форму волны и распределение скорости на передней стороне разрыва. В области позади (вниз по течению) от ударной волны коэффициент $-a_2$ оказывается отрицательным, а параметр $f^2/(f^2 - \eta)$ пробегает отрицательные значения. Вводя здесь в качестве s положительную величину $s = \frac{f^2}{\eta - f^2}$, получим вместо (112,8) формулы

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y^{1/3}} &= a_2^{1/3} \frac{2s+1}{2s^{2/3}}, & \eta y^{2/3} &= a_2^{2/3} s^{1/3} (s+1), \\ \theta y^{2/3} &= -\frac{a_2^{2/3}}{3} s^{1/3} (2s+3), \end{aligned} \right\} \quad (112,12)$$

причём

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9\sqrt{3}+1}{9\sqrt{3}-1} = 1,14,$$

а s пробегает значения от

$$s = \frac{5\sqrt{3}-8}{6} = 0,11$$

(на ударной волне) до нуля (на бесконечности вниз по течению).

На рис. 107 изображены графики зависимости $\eta y^{2/3}$ и $\theta y^{2/3}$ от $xy^{-1/3}$, вычисленные по формулам (112,8) и (112,12) (постоянная a_1 условно положена равной единице).

ГЛАВА XIII ОБТЕКАНИЕ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ

§ 113. Образование ударных волн при сверхзвуковом обтекании тел

Простые соображения показывают, что при обтекании произвольного тела сверхзвуковым потоком перед телом непременно возникает ударная волна. Действительно, в сверхзвуковом потоке возмущения, обусловленные наличием обтекаемого тела, распространяются только вниз по течению. Поэтому натекающий на тело однородный сверхзвуковой поток должен был бы доходить до самого переднего конца тела невозмущённым. Но тогда на поверхности этого конца нормальная компонента скорости газа была бы отличной от нуля в противоречии с необходимым граничным условием. Выходом из этого

положения может являться только возникновение ударной волны, в результате чего движение газа между нею и передним концом тела становится дозвуковым.

Таким образом, при сверхзвуковом обтекании тела перед ним возникает ударная волна, вообще говоря, не соприкасающаяся с самим телом (её часто называют головной волной). Спереди от ударной волны поток однороден, а позади неё движение меняется, и поток огибает обтекаемое тело (рис. 108, а). Поверхность ударной волны уходит в беско-

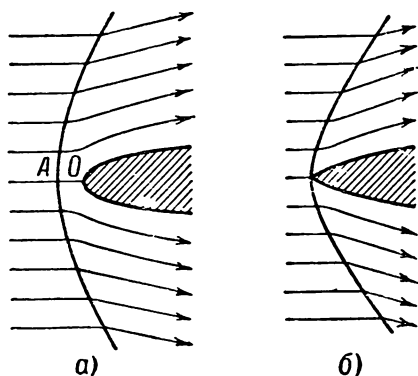


Рис. 108.

нечность, причём на больших расстояниях от тела, где интенсивность волны мала, она пересекает направление набегающего потока под углом, близким к углу возмущений.

Ударная волна может соприкоснуться с телом только в тех случаях, когда передний край тела заострён. Тогда поверхность разрыва тоже обладает точкой заострения, совпадающей с остриём тела

(рис. 108, б); надо иметь в виду, что при несимметричном обтекании часть этой поверхности может являться поверхностью слабого разрыва.

Для тела заданной формы такой режим обтекания оказывается, однако, возможным лишь при скоростях, превышающих некоторый определённый предел; при меньших скоростях ударная волна «отрывается» от носика тела, несмотря на наличие острия (см. §§ 104, 105).

Рассмотрим сверхзвуковое обтекание тела вращения (в направлении, параллельном его оси) и определим давление газа на переднем закруглённом конце тела (в критической точке, точка O на рис. 108, а). Из соображений симметрии очевидно, что линия тока, заканчивающаяся в точке O , пересекает ударную волну в нормальном к ней направлении, так что в точке A нормальная к поверхности разрыва компонента скорости совпадает с полной скоростью. Значения величин в набегающем потоке отмечаем, как обычно, индексом 1, а значения величин в точке A на задней стороне ударной волны — индексом 2. Последние определяются непосредственно по формулам (85,7) и (85,8) в виде

$$p_2 = \frac{p_1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)],$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1}, \quad p_2 = p_1 \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}.$$

Давление p_0 в точке O (в которой скорость газа $v = 0$) можно получить теперь с помощью формул, определяющих изменение величин вдоль линии тока. Имеем (см. задачу к § 80):

$$p_0 = p_2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_2^2}{c_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

и простое вычисление приводит к следующему результату:

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{M_1^2}{\left[\gamma - \frac{\gamma - 1}{2M_1^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}}. \quad (113,1)$$

Этим и определяется давление на переднем конце тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком ($M_1 > 1$).

Для сравнения приведём формулу для давления в точке остановки, которое бы получилось в результате непрерывного адиабатического торможения газа без ударной волны (как это было бы при дозвуковом обтекании):

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (113,2)$$

При $M_1 = 1$ обе формулы дают одинаковое значение p_0 , а при $M_1 > 1$ давление, определенное по формуле (113,2), всегда превышает истинное давление p_0 , даваемое формулой (113,1)¹⁾.

В предельном случае очень больших скоростей ($M_1 \gg 1$) формула (113,1) даёт

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma-1}} M_1^2, \quad (113,3)$$

т. е. давление p_0 пропорционально квадрату скорости обтекания. На основании этого результата можно сделать заключение о том, что и полная испытываемая телом сила сопротивления при скоростях, больших по сравнению со скоростью звука, пропорциональна квадрату скорости. Обращаем внимание на то, что этот закон — такой же, по которому меняется сила сопротивления при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, но настолько больших, чтобы число Рейнольдса было достаточно велико (см. § 45).

Полного исследования основных свойств сверхзвукового обтекания произвольных тел до настоящего времени не существует. Помимо самого факта необходимости возникновения ударных волн, можно ещё утверждать, что на больших расстояниях от тела во всяком случае должны иметься две следующие друг за другом ударные волны (Л. Ландау, 1945). Действительно, на больших расстояниях от тела вызываемые им возмущения слабы и поэтому их можно рассматривать как цилиндрическую звуковую волну, расходящуюся от оси x , проходящей через тело параллельно направлению обтекания; рассматривая, как это мы везде делаем, движение в той системе координат, в которой тело покоится, мы будем иметь волну, в которой роль времени играет x/v_1 , а роль скорости распространения $c_1/\sqrt{M_1^2} - 1$ (см. ниже § 114). Поэтому мы можем непосредственно применить результаты, полученные в § 95 для цилиндрической волны на больших расстояниях от источника. Таким образом, мы приходим к следующей картине ударных волн на далёком расстоянии от тела: в первой удар-

1) Это утверждение не связано с предполагаемой идеальностью газа и имеет общий характер. Действительно, при наличии ударной волны энтропия газа в точке O $s_0 > s_1$, между тем как в её отсутствие энтропия была бы равна s_1 . Тепловая же функция в обоих случаях равна $w_0 = w_1 + \frac{v_1^2}{2}$, так как при пересечении линией тока прямого скачка уплотнения величина $w + \frac{v^2}{2}$ не меняется. Но из термодинамического тождества $dw = T ds + \frac{1}{\rho} dp$ следует, что производная

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_w = -\rho T < 0,$$

т. е. увеличение энтропии при постоянном w уменьшает давление, чем и доказывается сделанное утверждение.

ной волне давление испытывает скачок вверх, так что за ней возникает сгущение; затем следует область постепенного уменьшения давления, и сгущение сменяется разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во второй ударной волне. Интенсивность передней волны падает с увеличением расстояния от тела, как $r^{-3/4}$, а расстояние между обеими волнами возрастает, как $r^{1/4}$.

Проследим теперь за появлением и развитием ударных волн при постепенном увеличении числа M_1 . Сверхзвуковая область в газовом потоке появляется впервые при некотором значении $M_1 < 1$ в виде области, прилегающей к поверхности обтекаемого тела. В этой области появляется по крайней мере одна ударная волна. Неизвестно, однако, должна ли она появиться немедленно после возникновения сверхзвуковой зоны или же при несколько больших (но всё ещё меньших единицы) значениях M_1 . Неизвестно также, должна ли она в момент своего появления (будучи ещё очень слабой) отходить от самой поверхности тела или же начинаться на некотором расстоянии от неё. На границе сверхзвуковой зоны ударная волна, разумеется, оканчивается; вопрос о свойствах ударной волны вблизи точки её окончания тоже ещё не исследован (об этом уже была речь в начале § 112).

По мере увеличения M_1 сверхзвуковая область расширяется, а вместе с нею удлиняется и ударная волна; при $M_1 = 1$ они достигают бесконечности. Это есть та ударная волна, существование которой при $M_1 = 1$ было доказано (для плоского случая) в § 112; тем самым была доказана необходимость первого появления ударной волны уже при $M_1 < 1$.

Как только M_1 начинает превышать единицу, появляется ещё одна ударная волна — головная волна, пересекающая весь бесконечно широкий натекающий поток газа. При M_1 , в точности равном единице, всё течение впереди тела является дозвуковым (§ 112). Поэтому при $M_1 > 1$, но сколь угодно близком к единице, сверхзвуковая часть натекающего потока, а с нею и головная ударная волна находятся сколь угодно далеко впереди тела. По мере дальнейшего увеличения M_1 головная волна постепенно приближается к телу.

§ 114. Сверхзвуковое обтекание заострённого тела

Форма, которой должно обладать тело для того, чтобы при сверхзвуковом движении быть хорошо обтекаемым, т. е. испытывать по возможности малую силу сопротивления, существенно отличается от соответствующей формы для дозвукового движения. Напомним, что в дозвуковом случае хорошо обтекаемыми являются продолговатые тела, закруглённые спереди и заострённые сзади. При сверхзвуковом же обтекании такого тела перед ним появилась бы сильная ударная волна, что привело бы к сильному возрастанию сопротивления. Поэтому

в сверхзвуковом случае хорошо обтекаемое удлиненное тело должно иметь заостренным не только задний, но и передний конец, причём угол заострения должен быть малым; если ось тела наклонена к направлению движения, то угол наклона (угол атаки) тоже должен быть малым.

При стационарном сверхзвуковом обтекании тела такой формы скорость газа даже вблизи тела будет везде лишь незначительно отличаться по величине и направлению от скорости натекающего потока, а образующиеся ударные волны будут обладать малой интенсивностью (интенсивность головной волны убывает вместе с уменьшением раствора обтекаемого угла). Вдали от тела движение газа будет представлять собой расходящиеся звуковые волны. Основную часть сопротивления газа можно представлять себе как обусловленную переходом кинетической энергии движущегося тела в энергию излучаемых им звуковых волн. Это сопротивление, специфическое для сверхзвукового движения, называют волновым¹⁾; оно может быть вычислено в общем виде при любой форме сечения тела (*Т. Карман*, 1936).

Описанный характер течения делает возможным применение линеаризованного уравнения для потенциала (106,4):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (114,1)$$

где для краткости введена положительная постоянная

$$\beta^2 = \frac{v_1^2}{c_1^2} - 1 \quad (114,2)$$

(ось x направлена по направлению движения, индекс 1 отличает величины, относящиеся к натекающему потоку); $1/\beta$ есть не что иное, как тангенс угла возмущений.

Уравнение (114,1) формально совпадает с двухмерным волновым уравнением, причём x/v_1 играет роль времени, а v_1/β — роль скорости распространения волн. Это обстоятельство не случайно и имеет глубокий физический смысл, так как движение газа вдали от тела представляет собой, как уже указано, именно «излучаемые» телом расходящиеся звуковые волны. Если представить себе газ на бесконечности покоящимся, а тело движущимся, то площадь поперечного сечения тела в заданном месте пространства будет меняться со временем, причём расстояние, до которого к моменту t распространятся возмущения (т. е. расстояние до «конуса возмущений»), будет расти как $v_1 t/\beta$; таким образом, мы будем иметь дело с «двухмерным» излучением звука (распространяющегося со скоростью v_1/β) пульсирующим контуром.

¹⁾ Полная сила сопротивления получается прибавлением к волновому сопротивлению сил, связанных с трением и с отрывом у заднего конца тела.

Руководствуясь этой «звуковой аналогией», мы можем сразу же написать искомое выражение для потенциала скорости газа, воспользовавшись выражением (73,15) для потенциала излучаемых пульсирующим источником цилиндрических звуковых волн (на расстояниях, больших по сравнению с размерами источника), заменив в последнем ct на x/β . Пусть $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостями, перпендикулярными к направлению обтекания (оси x), а длина тела в этом направлении пусть будет l ; начало координат выберем в переднем конце тела. Тогда будем иметь:

$$\varphi(x, r) = -\frac{v_1}{2\pi} \int_0^{x-\beta r} \frac{S'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}}; \quad (114,3)$$

в качестве нижнего предела написан нуль, так как при $x < 0$ (как и при $x > l$) надо положить тождественно $S(x) \equiv 0$.

Таким образом, мы полностью определили движение газа на расстояниях r от оси, больших по сравнению с толщиной тела¹⁾. Исходящие от тела возмущения в сверхзвуковом потоке распространяются, разумеется, только в область позади конуса $x - \beta r = 0$ с вершиной в переднем конце тела; перед этим конусом имеем просто $\varphi = 0$ (однородный поток). Между конусами $x - \beta r = 0$ и $x - \beta r = l$ потенциал определяется формулой (114,3); позади же конуса $x - \beta r = l$ (с вершиной в заднем конце тела) в этой формуле верхний предел заменяется, очевидно, постоянной величиной l . Оба указанных конуса представляют собой в рассматриваемом приближении слабые разрывы; в действительности это — ударные волны слабой интенсивности.

Действующая на тело сила сопротивления есть не что иное, как уносимая звуковыми волнами в единицу времени x -компонента импульса. Выберем в качестве контрольной поверхности цилиндрическую поверхность достаточно большого радиуса r с осью вдоль оси x . Плотность потока x -компоненты импульса через эту поверхность есть

$$\Pi_{xr} = \rho v_r (v_x + v_1) \cong \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

При интегрировании по всей поверхности первый член исчезает, так как интеграл от ρv_r есть равный нулю полный поток массы газа через контрольную поверхность. Поэтому остаётся

$$F_x = -2\pi r \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{xr} dx = -2\pi r \rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx. \quad (114,4)$$

¹⁾ Для осевого обтекания осесимметрического тела формула (114,3) справедлива для всех вообще r вплоть до самой поверхности тела. Из неё можно, в частности, получить снова формулу (105,6) для обтекания тонкого конуса,

На больших расстояниях (в «волновой зоне») производные от потенциала вычисляются так, как это было сделано в § 73 (см. формулу (73,17)), и получается:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi} \sqrt{\frac{x-\beta r}{2r}} \int_0^{x-\beta r} \frac{S''(\xi) d\xi}{\sqrt{x-\xi-\beta r}}.$$

Это выражение подставляем в (114,4), причём квадрат интеграла переписываем в виде двойного интеграла; обозначая для краткости $x - \beta r = X$, получим:

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^X \int_0^X \frac{S''(\xi_1) S''(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dX}{\sqrt{(X-\xi_1)(X-\xi_2)}}.$$

Произведём интегрирование по dX ; после изменения порядка интегрирования оно должно производиться в пределах от большего из ξ_1 и ξ_2 до $+\infty$. В качестве верхнего предела берём сначала некоторое большое, но конечное L , которое затем можно устремить к бесконечности. Таким образом, получим:

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) [\ln(\xi_2 - \xi_1) - \ln 4L] d\xi_1 d\xi_2.$$

Интеграл от члена с постоянным множителем $\ln 4L$ тождественно исчезает, так как на заострённых концах тела обращается в нуль не только площадь $S(x)$, но и её производная $S'(x)$. Таким образом, окончательно получим:

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2,$$

или

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_0^l \int_0^l S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln|\xi_2 - \xi_1| d\xi_1 d\xi_2. \quad (114,5)$$

Это и есть искомая формула для волнового сопротивления тонкого заострённого тела¹⁾. Порядок величины стоящего здесь интеграла есть $\left(\frac{S}{l^2}\right)^2 l^3$, где S — некоторая средняя площадь сечения тела. Поэтому

$$F_x \sim \frac{\rho_1 v_1^2 S^2}{l^2}.$$

1) Что касается подъёмной силы (для несимметрического тела или при наличии угла атаки), то в рассматриваемом здесь приближении таковая вообще отсутствует,

Коэффициент сопротивления удлинённого тела мы условимся определять как

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 l^2},$$

относя его к квадрату длины тела. В данном случае

$$C_x \sim \frac{S^2}{l^4}; \quad (114,6)$$

он пропорционален квадрату площади поперечного сечения тела.

Обратим внимание на полную формальную аналогию между формулой (114,5) и формулой (47,4) для индуктивного сопротивления тонкого крыла: вместо функции $\Gamma(z)$ в (47,4) здесь стоит функция $v_1 S'(x)$. Ввиду этой аналогии для вычисления интеграла (114,5) можно пользоваться тем же методом, который был изложен в конце § 47.

Следует также заметить, что определяемое формулой (114,5) волновое сопротивление не изменится, если изменить направление обтекания на обратное, — стоящий в этой формуле интеграл не зависит от того, в каком направлении проходит длина тела. Это свойство силы сопротивления характерно именно для линеаризованной теории¹⁾.

Наконец, несколько слов об области применимости полученной формулы. К этому вопросу можно подойти следующим образом. Амплитуда колебаний газовых частиц в «излучаемых» телом звуковых волнах — порядка величины толщины тела, которую мы обозначим посредством δ . Скорость же колебаний — соответственно порядка величины отношения $\frac{\delta}{(l/v_1)}$ амплитуды δ к периоду волны l/v_1 . Но линейное приближение для распространения звуковых волн (т. е. линеаризованное уравнение для потенциала) во всяком случае требует малости скорости движения газа в волне по сравнению со скоростью звука, т. е. должно быть $\frac{v_1}{\beta} \gg \frac{v_1 \delta}{l}$, или, что фактически то же:

$$M_1 \ll \frac{l}{\delta}. \quad (114,7)$$

Таким образом, изложенная теория становится неприменимой при значениях M_1 , сравнимых с отношением длины тела к его толщине.

Она неприменима, разумеется, и в обратном предельном случае слишком близких к единице значений M_1 , когда тоже недопустима линеаризация уравнений.

З а д а ч а

Определить форму удлинённого тела вращения, испытывающего минимальную силу сопротивления при заданных его объёме V и длине l .

¹⁾ Оно имеет место и в изложенной в § 116 теории волнового сопротивления тонких крыльев.

Решение. Ввиду указанной в тексте аналогии вводим переменную θ согласно $x = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$; начало отсчёта x — в переднем конце тела) и пишем функцию $f(x) = S'(x)$ в виде

$$f = -l \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

(условие $S = 0$ при $x = 0$, l допускает в этой сумме, как легко убедиться лишь значения $n \geq 2$). Для коэффициента сопротивления имеем при этом

$$C_x = \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2.$$

Площадь $S(x)$ и полный объём тела V вычисляются по функции $f(x)$, как

$$S = \int_0^l f(x) dx, \quad V = \int_0^l S(x) dx.$$

Простое вычисление даёт

$$V = \frac{\pi l^3}{16} A_2,$$

т. е. объём определяется одним лишь коэффициентом A_2 . Поэтому минимальное F_x достигается при равных нулю A_n с $n \geq 3$. В результате получаем:

$$C_{x \min} = \frac{128}{\pi} \left(\frac{V}{l^3} \right)^2 = \frac{9\pi}{2} \left(\frac{S_{\max}}{l} \right)^2.$$

При этом для площади сечения тела имеем $S = 1/3 l^2 A_2 \sin^3 \theta$, откуда радиус тела как функция координаты x выражается в виде

$$R(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{V}{3l^3} \right)^{1/2} [x(l-x)]^{3/4}.$$

Тело симметрично относительно плоскости $x = \frac{l}{2}$.

§ 115. Дозвуковое обтекание тонкого крыла

Рассмотрим обтекание хорошо обтекаемого тонкого «крыла» дозвуковым потоком сжимаемого газа. Как и в несжимаемом газе, хорошо обтекаемое дозвуковым потоком крыло должно быть тонким и иметь заострённую заднюю и закруглённую переднюю кромки; угол атаки должен быть малым. Выберем направление обтекания в качестве оси x , а ось z — в направлении размаха крыла.

1) Хотя $R(x)$ и обращается в нуль на концах тела, но производная $R'(x)$ обращается в бесконечность, т. е. тело оказывается незаострённым; поэтому, строго говоря, лежащее в основе метода приближение вблизи самых концов неприменимо.

Скорость газа во всём пространстве ¹⁾ будет лишь незначительно отличаться от скорости v_1 натекающего потока, так что можно применять линеаризованное уравнение (106,4) для потенциала:

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (115,1)$$

На поверхности крыла (которую будем называть поверхностью S) скорость должна быть направлена по касательной к ней; вводя единичный вектор \mathbf{n} нормали к поверхности крыла, напомним это условие в виде

$$\left(v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z = 0.$$

Поскольку крыло обладает уплощённой формой и угол атаки мал, то нормаль \mathbf{n} направлена почти параллельно оси y , так что $|n_y|$ близко к единице, а n_x , n_z малы. В написанном условии мы можем поэтому опустить малые члены второго порядка $\frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z$, а вместо n_y написать ± 1 ($+1$ на верхней поверхности крыла и -1 на нижней). Таким образом, граничное условие к уравнению (115,1) приобретает вид

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (115,2)$$

В силу предположенной тонкости крыла значение $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ на его поверхности можно вычислять просто как предел при $y \rightarrow 0$.

Задачу о решении уравнения (115,1) с условием (115,2) можно легко привести к задаче об обтекании несжимаемой жидкостью. Для этого введём вместо координат x , y , z переменные

$$x' = x, \quad y' = y \sqrt{1 - M_1^2}, \quad z' = z \sqrt{1 - M_1^2}. \quad (115,3)$$

В этих переменных уравнение (115,1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0, \quad (115,4)$$

т. е. переходит в уравнение Лапласа. Что касается формы обтекаемой поверхности, то введём вместо неё другую, S' , оставив неизменным профиль сечений крыла поверхностями, параллельными плоскости x , y , уменьшив только в отношении $\sqrt{1 - M_1^2}$ все размеры вдоль размаха крыла (оси z).

Граничное условие (115,2) приобретает тогда вид

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \sqrt{1 - M_1^2} = 0,$$

¹⁾ За исключением лишь небольшой области вблизи передней кромки крыла — вблизи линии остановки газа.

и для приведения его к обычному виду введём вместо φ новый потенциал φ' согласно

$$\varphi' = \varphi \sqrt{1 - M_1^2}. \quad (115,5)$$

Для φ' будем иметь то же уравнение Лапласа и граничное условие

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = 0, \quad (115,6)$$

которое должно удовлетворяться при $y' = 0$.

Но уравнение (115,4) с граничным условием (115,6) есть уравнение, которому должен удовлетворять потенциал скорости несжимаемой жидкости, обтекающей тело с поверхностью C' . Таким образом, задача об определении распределения скоростей при обтекании крыла с поверхностью C сжимаемой жидкостью сводится к нахождению распределения скоростей при обтекании несжимаемой жидкостью крыла с формой поверхности C' .

Рассмотрим, далее, действующую на крыло подъёмную силу F_y . Раньше всего замечаем, что произведённый в § 30 вывод формулы Жуковского (37,4) полностью применим и к сжимаемой жидкости, поскольку вместо переменной плотности ρ жидкости всё равно надо в том же приближении писать постоянную величину ρ_1 . Таким образом,

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma dz, \quad (115,7)$$

где интегрирование производится по всей длине l_z размаха крыла. Из соотношения (115,5) и одинаковости поперечных профилей крыльев C и C' следует, что циркуляция Γ скорости при обтекании крыла C сжимаемой жидкостью связана с циркуляцией Γ' скорости при обтекании крыла C' несжимаемой жидкостью соотношением

$$\Gamma' = \Gamma \sqrt{1 - M_1^2}. \quad (115,8)$$

Подставляя это в (115,7) и переходя от интегрирования по dz к интегрированию по dz' , получим:

$$F_y = \frac{-\rho_1 v_1 \int \Gamma' dz'}{1 - M_1^2}.$$

Величина, стоящая в числителе, представляет собой подъёмную силу, действующую на крыло C' в несжимаемой жидкости. Обозначая её посредством F'_y , имеем:

$$F_y = \frac{F'_y}{1 - M_1^2}. \quad (115,9)$$

Вводя коэффициенты подъёмной силы

$$C_y = \frac{F_y}{1/2 \rho_1 v_1^2 l_x l_z}, \quad C'_y = \frac{F'_y}{1/2 \rho_1 v_1^2 l_x l'_z}$$

(где l_x , l_z и l_x , $l'_z = l_z \sqrt{1 - M_1^2}$ — длины крыльев C и C' вдоль осей x и z), перепишем это равенство в виде

$$C_y = \frac{C'_y}{\sqrt{1 - M_1^2}}. \quad (115,10)$$

Для крыльев достаточно большого размаха (с постоянным вдоль размаха профилем сечения) коэффициент подъёмной силы в несжимаемой жидкости пропорционален углу атаки и не зависит от длины и ширины крыла:

$$C'_y = \text{const. } \alpha, \quad (115,11)$$

где const. зависит только от формы профиля сечения (см. § 46). В этом случае можно поэтому написать вместо (115,10)

$$C_y = \frac{C_y^{(0)}}{\sqrt{1 - M_1^2}}, \quad (115,12)$$

где C_y и $C_y^{(0)}$ — коэффициенты подъёмной силы одного и того же крыла соответственно в потоках сжимаемого и несжимаемого газа. Таким образом, мы получим такое правило: подъёмная сила, действующая на длинное крыло в потоке сжимаемого газа, в $1/\sqrt{1 - M_1^2}$ раз больше подъёмной силы, действующей на такое же крыло (при том же, в частности, угле атаки) в потоке несжимаемого газа (*Л. Прандтль*, 1922, *Г. Глауэрт*, 1928).

Аналогичные соотношения можно получить и для силы сопротивления. Наряду с формулой Жуковского для подъёмной силы полностью переносится в теорию сжимаемой жидкости также и формула (47,4) для индуктивного сопротивления крыла. Произведя в ней те же преобразования (115,3) и (115,8), получим:

$$F_x = \frac{F'_x}{1 - M_1^2}, \quad (115,13)$$

где F'_x — сопротивление крыла C' в несжимаемой жидкости. При увеличении длины размаха индуктивное сопротивление стремится к постоянному пределу (§ 47). Поэтому для достаточно длинных крыльев можно заменить F'_x на $F_x^{(0)}$ (сопротивление в несжимаемой жидкости того же крыла C , к которому относится F_x). Тогда для

коэффициента сопротивления имеем:

$$C_x = \frac{C_x^{(0)}}{1 - M_1^2}. \quad (115,14)$$

Сравнивая с (115,12), мы видим, что при переходе от несжимаемой жидкости к сжимаемой остаётся неизменным отношение C_y^2/C_x .

Все изложенные здесь результаты, разумеется, неприменимы при слишком близких к единице значениях M_1 , когда вообще становится неприменимой линеаризованная теория.

§ 116. Сверхзвуковое обтекание крыла

Для того чтобы быть хорошо обтекаемым в сверхзвуковом потоке, крыло должно иметь заострёнными как заднюю, так и переднюю кромки, подобно тому как должны быть заострены тонкие тела, рассматривавшиеся в § 114.

Здесь мы ограничимся изучением обтекания тонкого крыла с очень большим размахом, с постоянным вдоль размаха профилем сечения¹⁾. Рассматривая длину размаха как бесконечную, мы будем иметь дело с плоским (в плоскости x, y) течением газа. Вместо уравнения (114,1) будем иметь теперь для потенциала уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (116,1)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \pm 0} = \mp v_1 n_x \quad (116,2)$$

(знаки \mp в правой стороне равенства имеют место соответственно для верхней и нижней поверхностей крыла). Уравнение (116,1) есть уравнение типа одномерного волнового уравнения, и его общее решение имеет вид

$$\varphi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y).$$

Тот факт, что влияющие на движение жидкости возмущения исходят от тела, означает, что в пространстве над крылом ($y > 0$) должно быть $f_2 \equiv 0$, так что $\varphi = f_1(x - \beta y)$, а в пространстве под крылом ($y < 0$): $\varphi = f_2(x + \beta y)$. Будем для определённости рассматривать пространство над крылом, где

$$\varphi = f(x - \beta y).$$

1) Общее решение задачи о сверхзвуковом обтекании крыла конечного размаха было дано Е. А. Красильщиковой (1947). Подробное изложение этих работ дано ею в «Учёных записках МГУ», вып. 154, 1951. См. также книгу: Ф. И. Франкль и Е. А. Карпович, «Газодинамика тонких тел», Гостехиздат, 1948.

Функцию f определим из граничного условия (116,2), написав в нём $n_x \approx -\zeta_2(x)$, где $y = \zeta_2(x)$ есть уравнение верхней части линии профиля крыла (рис. 109). Имеем:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y \rightarrow +0} = -\beta f'(x) = \sigma_1 \zeta_2'(x),$$

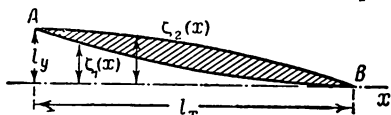


Рис. 109.

откуда $f = -\frac{v_1}{\beta} \zeta_2(x)$. Таким образом, распределение скоростей определяется (при $y > 0$) потенциалом

$$\varphi(x, y) = -\frac{v_1}{\beta} \zeta_2(x - \beta y). \quad (116,3)$$

Аналогично при $y < 0$ мы получили бы $\varphi = \frac{v_1}{\beta} \zeta_1(x + \beta y)$, где $y = \zeta_1(x)$ — уравнение нижней части профиля. Отметим, что потенциал, а с ним и остальные величины постоянны вдоль прямых $x \pm \beta y = \text{const.}$ (характеристик) в соответствии с результатами § 107,

частным случаем которых является и полученное здесь решение.

Качественно картина течения выглядит следующим образом. От задней и передней заостренных кромок отходят слабые разрывы (aAa' и bBb' на рис. 110)¹⁾. В пространстве впереди разрыва aAa' и позади bBb' поток однороден, а в области между ними поток поворачивает, огибая поверхность крыла;

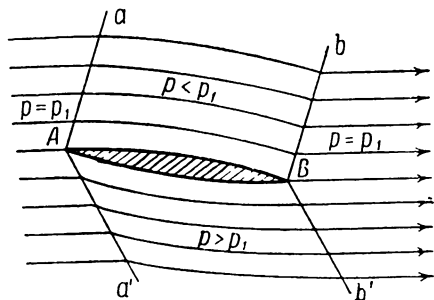


Рис. 110.

это есть простая волна, причём в рассматриваемом линеаризованном приближении все характеристики в ней имеют одинаковый наклон, равный углу возмущений натекающего потока.

Распределение давления получается по формуле

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(в общей формуле (106,5) членом с v_y^2 можно в данном случае пренебречь, так как v_x и v_y — одинакового порядка величины). Подставив

¹⁾ Это справедливо лишь в принятом здесь приближении. В действительности это есть не слабые разрывы, а ударные волны слабой интенсивности или узкие центрированные волны разрежения, смотря по тому, в какую сторону поворачивает в них направление скорости. Так, для изображённого на рис. 110 профиля Aa и Bb' будут волнами разрежения, а Aa' и Bb — ударными волнами.

Линия же тока, исходящая от задней кромки (точка B на рис. 110), представляет собой в действительности тангенциальный разрыв скорости (фактически размывающийся в тонкий турбулентный след).

сюда (116,3) и вводя так называемый коэффициент давления C_p , получим в верхней полуплоскости

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2} = \frac{2}{\beta} \zeta'_2(x - \beta y).$$

В частности, коэффициент давления, действующего на верхнюю поверхность крыла, есть

$$C_{p2} = \frac{2}{\beta} \zeta'_2(x). \quad (116,4)$$

Аналогично найдём для нижней поверхности

$$C_{p1} = -\frac{2}{\beta} \zeta'_1(x). \quad (116,5)$$

Отметим, что давление в каждой точке профиля сечения крыла оказывается зависящим только от наклона его контура в этой же точке.

Поскольку угол наклона линии контура профиля к оси x везде мал, то вертикальная проекция сил давления равна с достаточной точностью самому давлению. Результирующая действующая на крыло подъёмная сила равна разности сил давления, действующих на её нижнюю и верхнюю поверхности. Поэтому коэффициент подъёмной силы

$$C_y = \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} (C_{p1} - C_{p2}) dx = \frac{4l_y}{\beta l_x}$$

(определение длин l_x , l_y см. рис. 109). Определим угол атаки α как угол наклона к оси x хорды AB , проведённой через вершины острых кромок (рис. 109): $\alpha \approx l_y/l_x$; тогда получим окончательно следующую простую формулу:

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (116,6)$$

(Аккерет, 1925). Мы видим, что подъёмная сила определяется одним только углом атаки и не зависит от формы сечения крыла в отличие от того, что имеет место при дозвуковом обтекании (см. § 48, формулу (48,7)).

Определим, далее, действующую на крыло силу сопротивления (это есть волновое сопротивление, имеющее такую же природу, как и волновое сопротивление тонких тел; см. § 114). Для этого надо спроектировать силы давления на направление оси x и проинтегрировать эту проекцию по всему контуру профиля. Для коэффициента силы сопротивления получим тогда:

$$C_x = \frac{2}{\beta l_x} \int_0^{l_x} (\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2) dx. \quad (116,7)$$

Введём углы наклона $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ верхней и нижней частей контура к его хорде AB ; тогда $\zeta_1 = \theta_1 - \alpha$, $\zeta_2' = \theta_2 - \alpha$. Интегралы от θ_1 и θ_2 обращаются, очевидно, в нуль, так что окончательно получим следующую формулу:

$$C_x = \frac{4x^2 + 2(\overline{\theta_1^2} + \overline{\theta_2^2})}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (116,8)$$

(черта обозначает усреднение по x).

При заданном угле атаки коэффициент сопротивления, очевидно, минимален для крыла, представляющего собой плоскую пластинку (так что $\theta_1 = \theta_2 = 0$). В этом случае $C_x = \alpha C_y$.

Если применить формулу (116,8) к шероховатой поверхности, то мы найдём, что шероховатость может привести к значительному увеличению сопротивления, даже если высота отдельных неровностей мала ¹⁾. Действительно, сопротивление оказывается не зависящим от высоты отдельных неровностей, если не меняется средний наклон их поверхности, т. е. среднее отношение высоты неровностей к расстоянию между ними.

Наконец, сделаем ещё следующее замечание. Здесь, как и везде, говоря о крыле, мы подразумеваем, что оно расположено своими кромками перпендикулярно к движению. Обобщение на случай любого угла γ между направлением движения и кромкой («угол скольжения») вполне очевидно. Ясно, что силы, действующие на бесконечное крыло постоянного сечения, зависят только от нормальной к его кромкам составляющей скорости натекающего потока; в невязкой жидкости составляющая скорости, параллельная кромкам, не вызывает никаких сил. Поэтому силы, действующие на крыло со скольжением в потоке с числом M_1 , — такие же, которые действовали бы на то же крыло без скольжения в потоке с числом M_1 , равным $M_1 \sin \gamma$. В частности, если $M_1 > 1$, но $M_1 \sin \gamma < 1$, то специфическое для сверхзвукового обтекания волновое сопротивление будет отсутствовать.

§ 117. Околозвуковой закон подобия

Развитая в §§ 114—116 теория сверх- и дозвуковых обтеканий тонких тел неприменима в случае околозвукового движения, когда становится несправедливым линеаризованное уравнение для потенциала. В этом случае картина течения во всём пространстве определяется нелинейным уравнением (106,10):

$$2\alpha_* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (117,1)$$

(или, при плоском движении, эквивалентным ему уравнением Эйлера-Трикоми). Решение этих уравнений для конкретных случаев, однако,

¹⁾ Но всё же больше толщины пограничного слоя.

весьма затруднительно. Поэтому существенный интерес представляют правила подобия, которые можно установить для таких течений, не прибегая к их конкретному решению.

Рассмотрим сначала плоское течение, и пусть

$$Y = \delta f\left(\frac{x}{l}\right) \quad (117,2)$$

есть уравнение, определяющее форму обтекаемого тонкого контура, причём l есть его длина (в направлении обтекания), а δ характеризует его толщину ($\delta \ll l$). Изменением двух параметров l и δ получим семейство подобных контуров.

Уравнение движения гласит:

$$2\alpha_* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (117,3)$$

со следующими граничными условиями. На бесконечности скорость равна скорости v_1 невозмущённого потока, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M_{1*} - 1 = \frac{M_1 - 1}{\alpha_*} \quad (117,4)$$

(см. определение потенциала φ согласно (106,9)). На профиле же скорость должна быть направлена по касательной к нему:

$$\frac{v_y}{v_x} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dY}{dx} = \frac{\delta}{l} f'\left(\frac{x}{l}\right); \quad (117,5)$$

ввиду тонкости профиля можно требовать выполнения этого условия при $y = 0$.

Введём новые безразмерные переменные согласно

$$x = l\bar{x}, \quad y = \frac{l}{(\theta\alpha_*)^{1/3}} \bar{y}, \quad \varphi = \frac{l\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (117,6)$$

(мы ввели угол $\theta = \delta/l$, характеризующий «угол раствора» тела или угол атаки). Тогда мы получим уравнение

$$2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = K, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{на} \quad \infty,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = f'(\bar{x}) \quad \text{при} \quad \bar{y} = 0,$$

где

$$K = \frac{M_1 - 1}{(\alpha_* \theta)^{1/3}}. \quad (117,7)$$

Эти условия содержат лишь один параметр: K . Таким образом, мы получили искомый закон подобия: плоские околозвуковые течения с одинаковыми значениями числа K подобны, как это устанавливается формулами (117,6) (этот закон был найден С. В. Фальковичем, 1947).

Обратим внимание на то, что в выражение (117,7) входит также и единственный параметр α_* , характеризующий свойства самого газа. Поэтому полученное правило определяет также и подобие по изменению рода газа.

В условиях рассматриваемого приближения давление определяется формулой

$$p - p_1 \approx -\rho_1 v_1 (v_x - v_1).$$

Вычисление с помощью выражений (117,6) показывает, что коэффициент давления на профиль будет функцией вида

$$C_p = \frac{p - p_1}{1/2 \rho_1 v_1^2} = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} P\left(K, \frac{x}{l}\right).$$

Коэффициенты силы сопротивления и подъёмной силы определяются интегралами по контуру профиля:

$$C_x = \frac{1}{l} \int C_p \frac{dY}{dx} dx, \quad C_y = \frac{1}{l} \oint C_p dx$$

и, следовательно, являются функциями вида ¹⁾

$$C_x = \frac{\theta^{7/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \quad C_y = \frac{\theta^{7/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \quad (117,8)$$

Совершенно аналогичным образом можно получить закон подобия для трёхмерного обтекания тонкого тела, форма которого задаётся уравнениями вида

$$Y = \delta f_1\left(\frac{x}{l}\right), \quad Z = \delta f_2\left(\frac{x}{l}\right) \quad (117,9)$$

с двумя параметрами δ и l ($\delta \ll l$). Существенное отличие от плоского случая связано с тем, что потенциал имеет при $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ логарифмическую особенность (см., например, формулы обтекания тонкого конуса в § 105). Поэтому граничное условие на оси x должно

¹⁾ Область применимости этих формул определяется неравенством $|M_1 - 1| \ll 1$. Линеаризованной же теории соответствуют большие значения K , т. е. $|M_1 - 1| \gg \theta^{2/3}$. В области $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^{1/3}$ формулы (117,8) должны, следовательно, переходить в формулы (116,6)–(116,8) линеаризованной теории. Это значит, что при больших K функции f_x и f_y должны быть пропорциональны $K^{-1/2}$.

определять не сами производные $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, а остающиеся конечными произведения:

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Y \frac{dY}{dx}, \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = Z \frac{dZ}{dx}.$$

Легко убедиться в том, что преобразование подобия в этом случае является (снова вводим угол $\theta = \delta/l$)

$$x = \bar{l}x, \quad y = \frac{l}{\theta \alpha_*^{1/2}} \bar{y}, \quad z = \frac{l}{\theta \alpha_*^{1/2}} \bar{z}, \quad \varphi = l^2 \bar{\varphi}, \quad (117,10)$$

причём параметр подобия

$$K = \frac{M_1 - 1}{\theta^2 \alpha_*} \quad (117,11)$$

(Т. Карман, 1947). Для коэффициента давления на поверхность тела получим выражение вида

$$C_p = \theta^2 P\left(K, \frac{x}{l}\right),$$

а для коэффициента силы сопротивления соответственно ¹⁾

$$C_x = \theta^4 f(K). \quad (117,12)$$

Все полученные формулы относятся, конечно, как к малым положительным, так и к малым отрицательным значениям $M_1 - 1$. Если в точности $M_1 = 1$, то параметр подобия $K = 0$ и функции в формулах (117,8) и (117,12) сводятся к постоянным, так что эти формулы полностью определяют зависимость C_x и C_y от угла θ и свойств газа α_* .

§ 118. Закон подобия при очень больших значениях числа М

Для сверхзвукового обтекания тонких тел при очень больших значениях числа M_1 натекающего потока линеаризованная теория неприменима, как уже было указано в конце § 106. Поэтому представляет интерес простое правило подобия, которое можно установить для этого случая (Х. Тзян, 1946).

Возникающие при таком обтекании ударные волны наклонены к направлению движения под малым углом — порядка величины отношения $\theta = \delta/l$ толщины тела к его длине. Эти волны, вообще говоря, искривлены и в то же время обладают большой интенсивностью — хотя скачок скорости на них относительно мал, но скачок давления (а с ним и энтропии) велик. Поэтому течение газа в общем случае отнюдь не является потенциальным.

¹⁾ В области $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$ должна получаться формула (114,6) линеаризованной теории, согласно которой $C_x \sim \theta^4$; это значит, что при увеличении K функция $f(K)$ должна стремиться к постоянной.

Будем считать, что число M_1 — порядка величины $1/\theta$ или больше. Ударная волна понижает значение местного числа М, но оно во всяком случае остаётся порядка величины $1/\theta$ (см. задачу § 104), так что число М велико во всём пространстве.

Воспользуемся указанной в § 114 «звуковой аналогией»: трёхмерная задача о стационарном обтекании тонкого тела с переменным сечением $S(x)$ эквивалентна нестационарной двумерной задаче об излучении звуковых волн контуром, площадь которого меняется со временем по закону $S(v_1 t)^2$; роль скорости звука играет при этом величина $v_1/\sqrt{M_1^2 - 1}$ или при больших M_1 просто c_1 . Подчёркнём, что единственное условие, обеспечивающее эквивалентность обеих задач, заключается в малости отношения δ/l , что даёт возможность рассматривать небольшие вдоль длины тела кольцевые участки его поверхности как цилиндрические. При больших M_1 , однако, скорость распространения «излучаемых» волн сравнима по величине со скоростью частиц газа в них (ср. конец § 114), и погому задача должна решаться на основе точных, нелинеаризованных уравнений.

В этой двумерной задаче линейная скорость источника — порядка величины $v_1 \theta$; кроме неё в задачу входят в качестве независимых параметров ещё только скорость звука c_1 и размеры источника δ (и параметр плотности ρ_1)²⁾. Из них можно составить всего одну безразмерную комбинацию

$$K = M_1 \theta, \quad (118,1)$$

которая и является критерием подобия³⁾. В качестве масштабов длины для координат y, z и масштаба времени надо при этом взять величины соответствующей размерности, составленные из тех же параметров, например δ и $\frac{\delta}{v_1 \theta} = \frac{l}{v_1}$. Возвращаясь теперь к координате x , получим окончательно, что $\frac{v}{c_1}$ и C_p являются функциями безразмерных переменных $\frac{x}{l}, \frac{y}{\delta}, \frac{z}{\delta}$ и параметра K .

¹⁾ Так, например, задача об обтекании тонкого конуса эквивалентна задаче об излучении цилиндрических волн от равномерно расширяющегося кругового цилиндра.

²⁾ Мы имеем в виду, конечно, не только уравнения движения газа, но граничные условия к ним на поверхности тела и условия, которые должны выполняться на возникающих ударных волнах. Газ предполагается идеальным, так что его газодинамические свойства зависят только от безразмерного параметра γ ; получаемое ниже правило подобия не определяет, однако, характера зависимости движения от этого параметра.

³⁾ Если не предполагать M_1 большим, то получилось бы правило подобия с параметром $K = \theta \sqrt{M_1^2 - 1}$. Оно, однако, не представляет интереса, поскольку при небольших M_1 линеаризованная теория в действительности полностью определяет зависимость всех величин от этого параметра.

Для коэффициента сопротивления тонкого тела без труда получим отсюда формулу вида

$$C_x = \theta^4 f(K). \quad (118,2)$$

Такой же самый закон подобия получается, очевидно, и в плоском случае — для обтекания тонкого крыла бесконечной протяжённости. Для коэффициентов сопротивления и подъёмной силы получаются при этом формулы вида

$$C_x = \theta^3 f_x(K), \quad C_y = \theta^2 f_y(K). \quad (118,3)$$

Задача

Определить подъёмную силу, действующую на плоское крыло бесконечного размаха, наклонённое к направлению движения под малым углом атаки α , при больших значениях числа M_1 ($M_1 \lesssim 1/\alpha$).

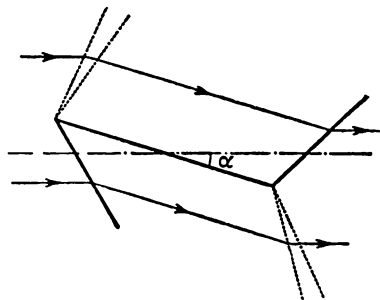


Рис. 111.

Решение. Картина обтекания выглядит, как показано на рис. 111: от переднего и от заднего краёв пластинки отходят по ударной волне и по волне разрежения, в которых поток поворачивает сначала на угол α , а затем на такой же угол в обратном направлении.

Согласно акустической аналогии задача о стационарном обтекании такой пластинки эквивалентна задаче о нестационарном одномерном движении газа впереди и позади поршня, движущегося равномерно со скоростью αv_1 . Впереди поршня образуется ударная волна, а позади — волна разрежения (см. задачи 1, 2 § 92). Воспользовавшись полученными там результатами, найдем искомую подъёмную силу как разность давлений, действующих на обе стороны пластинки. Коэффициент подъёмной силы:

$$C_y = \alpha^2 \left[\frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma + 1}{2} + \sqrt{\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^2} - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} K \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \right]$$

(где $K = \alpha M_1$). При $K \geq 2/(\gamma - 1)$ под пластинкой образуется область вакуума и второй член должен быть опущен. В области $1 \ll M_1 \ll 1/\alpha$ эта формула переходит в формулу $C_y = 4\alpha/M_1$, даваемую линеаризованной теорией, в соответствии с тем, что здесь перекрываются области применимости той и другой.

ГЛАВА XIV ГИДРОДИНАМИКА ГОРЕНИЯ

§ 119. Медленное горение

Скорость химической реакции (измеряемая, скажем, числом прореагировавших в единицу времени молекул) зависит от температуры газовой смеси, в которой она происходит, увеличиваясь вместе с ней. Во многих случаях эта зависимость очень сильная¹⁾. Скорость реакции может при этом оказаться при обычных температурах настолько малой, что реакция практически вовсе не идёт, несмотря на то, что состоянию термодинамического (химического) равновесия соответствовала бы газовая смесь, компоненты которой прореагировали друг с другом. При достаточном же повышении температуры реакция протекает со значительной скоростью. Если реакция эндотермична, то для её протекания необходим непрерывный подвод тепла извне; если ограничиться одним только начальным повышением температуры смеси, то прореагирует лишь незначительное количество вещества, вслед за чем температура газа настолько понизится, что реакция снова прекратится. Совсем иначе будет обстоять дело при сильно экзотермической реакции, сопровождающейся значительным выделением тепла. Здесь достаточно повысить температуру хотя бы в одном каком-нибудь месте смеси; начавшаяся в этом месте реакция в результате выделения тепла сама будет производить нагревание окружающего газа и, таким образом, реакция, раз начавшись, будет сама собой распространяться по газу. В таких случаях говорят о «медленном горении» или просто о горении газовой смеси²⁾.

¹⁾ Скорость реакции обычно зависит от температуры по экспоненциальному закону, будучи в основном пропорциональна множителю вида $e^{-U/RT}$, где U есть характерная для каждой данной реакции постоянная, называемая её энергией активации. Чем больше U , тем сильнее зависимость скорости реакции от температуры.

²⁾ Следует иметь в виду, что в смеси, самой по себе способной к горению, в известных условиях самопроизвольное распространение горения может оказаться невозможным. Соответствующие пределы определяются тепловыми потерями, связанными с такими факторами, как отвод тепла через стенки трубы (при горении газа в трубе), потери на излучение и т. п. Поэтому, например, горение оказывается невозможным в трубках слишком малого радиуса.

Горение газовой смеси непременно сопровождается также и движением газа. Другими словами, процесс горения представляет собой, отвлекаясь от его химической стороны, также и газодинамический процесс. В общем случае для определения режима горения необходимо совместное решение системы уравнений, включающей в себя как уравнения химической кинетики данной реакции, так и уравнения движения газовой смеси.

Положение, однако, существенно упрощается в том весьма важном случае (с которым обычно и приходится иметь дело), когда характеристические размеры l , определяющие условия данной конкретной задачи, достаточно велики (по сравнению с чем именно, будет выяснено ниже). Мы увидим, что в таких случаях чисто газодинамическая задача может быть в известном смысле отделена от задачи химической кинетики.

Область сгоревшего газа (т. е. область, в которой реакция уже закончилась и газ представляет собой смесь продуктов горения) отделена от газа, в котором горение ещё не началось, некоторым переходным слоем, где как раз и происходит самая реакция (зона горения или «пламя»); с течением времени этот слой передвигается вперёд со скоростью, которую можно назвать скоростью распространения горения в газе. Величина скорости распространения зависит от интенсивности теплопередачи из зоны горения в ненагретую исходную газовую смесь. Основным механизмом теплопередачи заключается в обычной теплопроводности. Теория этого режима распространения горения была впервые развита *В. А. Михельсоном* (1890).

Обозначим порядок величины ширины зоны горения посредством δ . Он определяется средним расстоянием, на которое успевает распространиться выделяющееся в реакции тепло за то время τ , в течение которого длится эта реакция (в данном участке газа). Время τ есть величина, характерная для данной реакции, и зависит лишь от термодинамического состояния горящего газа (но не от характеристических параметров l задачи). Если χ есть температуропроводность газа, то имеем (см. (51,7)):

$$\delta \sim \sqrt{\chi \tau}. \quad (119,1)$$

Уточним теперь сделанное выше предположение: мы будем считать, что характеристические размеры задачи велики по сравнению с толщиной зоны горения ($l \gg \delta$). При соблюдении этого условия можно выделить чисто газодинамическую задачу. При определении движения газа можно пренебречь толщиной зоны горения и рассматривать её просто как поверхность, разделяющую продукты горения и несгоревший газ. На этой поверхности («фронт пламени») состояние газа испытывает скачок, т. е. она представляет собой своеобразную поверхность разрыва.

Скорость перемещения v_1 этого разрыва относительно самого газа (в нормальном к фронту направлении) называют нормально́й скоро-

стью пламени. За время τ горение успевает распространиться на расстояние порядка величины δ ; поэтому искомая скорость пламени ¹⁾:

$$v_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}. \quad (119,2)$$

Обычная температуропроводность газа — порядка величины произведения длины свободного пробега молекул на их тепловую скорость, или, что то же, произведения времени свободного пробега $\tau_{св}$ на квадрат скорости. Имея в виду, что тепловая скорость молекул совпадает по порядку величины со скоростью звука, найдём:

$$\frac{v_1}{c} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau c^2}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{св}}{\tau}}.$$

Отнюдь не каждое столкновение молекул сопровождается химической реакцией между ними; напротив, в реакцию вступает лишь очень незначительная доля сталкивающихся молекул. Это значит, что $\tau_{св} \ll \tau$ и потому $v_1 \ll c$. Таким образом, в рассматриваемом режиме скорость распространения пламени мала по сравнению со скоростью звука ²⁾.

На поверхности разрыва, заменяющего собой зону горения, как и на всяком вообще разрыве, должны выполняться условия непрерывности потоков вещества, импульса и энергии. Первое из этих условий, как обычно, определяет отношение нормальных к поверхности разрыва компонент скорости газа относительно разрыва: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2}, \quad (119,3)$$

где V_1 , V_2 — удельные объёмы несгоревшего газа и продуктов горения. Согласно общим результатам, полученным в § 81 для произвольных разрывов, при наличии скачка нормальной скорости касательная компонента скорости должна быть непрерывна. Поэтому линии тока «преломляются» на поверхности разрыва.

Благодаря малости нормальной скорости распространения пламени по сравнению со скоростью звука условие непрерывности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии — к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2. \quad (119,4)$$

¹⁾ Для примера укажем, что скорость распространения пламени в смеси 60% CH_4 и 94% воздуха составляет всего 5 см/сек, а в гремучей смеси ($2\text{H}_2 + \text{O}_2$) — 1000 см/сек; ширина зоны горения в этих двух случаях — соответственно $\sim 5 \cdot 10^{-2}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ см.

²⁾ Определённую роль в процессе распространения горения играет также и взаимная диффузия различных компонент горячей смеси; это обстоятельство, однако, не меняет порядков величины скорости и ширины пламени.

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга.

Считая газ идеальным, имеем: $w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1$, $w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2$; аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчёта энергии), поскольку здесь w_{01} и w_{02} различны. Введём обозначение $w_{01} - w_{02} = q$; q есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесённая к единице массы), если бы она происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ 1) и сгоревшего (газ 2) газов:

$$p_1 = p_2, \quad T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}} T_1, \quad V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (119,5)$$

Наличие определённой нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения самого газа, приводит к установлению определённой формы фронта пламени при стационарном горении в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если v есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что $v_1 S_1 = v S$, где S — площадь поперечного сечения трубки, а S_1 — полная площадь поверхности фронта пламени.

Для того чтобы описанный режим мог реально осуществляться, он должен быть устойчивым по отношению к малым возмущениям, и возникает вопрос о границах этой устойчивости. Исследование устойчивости фронта пламени можно произвести аналогично тому, как было произведено в § 30 исследование устойчивости тангенциального разрыва. Благодаря малости скорости движения газа по сравнению со скоростью звука можно рассматривать газ как несжимаемую идеальную (невязкую) жидкость, причём нормальная скорость распространения фронта пламени предполагается заданной постоянной величиной. Такое исследование (см. задачу 1 этого параграфа) приводит к результату об абсолютной неустойчивости фронта, ввиду чего должна была бы происходить самопроизвольная турбулизация пламени (*Л. Ландау, 1944*). В таком виде это исследование относится лишь к достаточно большим значениям числа Рейнольдса. Учет вязкости газа, однако, в данных условиях сам по себе не может привести к очень большому критическому значению этого числа.

Между тем экспериментальные данные свидетельствуют о том, что «автотурбулизации» пламени не происходит вплоть до очень больших значений числа Рейнольдса ¹⁾. Это значит, что существуют ещё

¹⁾ При сферическом распространении горения в свободном пространстве автотурбулизация, если и возникает, то при $R \sim 10^5$, где характеристический

какие-то другие факторы, стабилизирующие фронт пламени и отодвигающие его автотурбулилизацию до очень больших значений R . Возможно, что играет роль изменение нормальной скорости при деформации фронта: на вогнутых местах v_1 повышается (благодаря улучшению условий теплопередачи в охватываемую вогнутостью свежую смесь), а на выпуклых местах v_1 уменьшается (Я. Б. Зельдович). Весь этот важный вопрос в настоящее время ещё не ясен ¹⁾.

Распространяющееся по горючей смеси пламя приводит в движение окружающий газ на значительном протяжении. Неизбежность возникновения сопутствующего горению движения видна уже из того, что ввиду различия между скоростями v_1 и v_2 продукты горения должны двигаться относительно несгоревшего газа со скоростью $v_1 - v_2$. В ряде случаев это движение приводит также и к возникновению ударных волн. Эти волны не имеют непосредственного отношения к процессу горения, и их возникновение связано с невозможностью удовлетворить иным образом необходимым граничным условиям. Рассмотрим, например, горение, распространяющееся от закрытого конца трубы. На рис. 112 ab есть зона горения. Газ в областях 1 и 3 есть исходная несгоревшая газовая смесь, а в области 2 — продукты горения. Скорость v_1 передвижения зоны горения относительно находящегося перед ним газа 1 есть согласно предыдущему величина, определяющаяся свойствами реакции и условиями теплопередачи, и должна рассматриваться как заданная. Скорость v_2 движения пламени относительно газа 2 определится после этого непосредственно условием (119,3). На закрытом конце трубы скорость газа должна обращаться в нуль; поэтому во всей области 2 газ будет неподвижным. Газ же 1 должен, следовательно, двигаться относительно трубы с постоянной скоростью, равной $v_2 - v_1$. В передней части трубы вдали от пламени газ тоже должен быть неподвижным. Удовлетворить этому условию можно только вводя ударную волну (cd на рис. 112), в которой скорость газа испытывает скачок так, что газ 3 оказывается неподвижным. По заданному скачку скорости определяются также и скачки остальных величин, и скорость распространения самой волны. Таким образом, мы видим, что распространяющийся фронт пламени

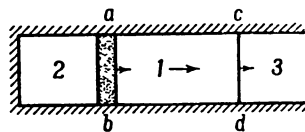


Рис. 112.

размер — радиус сферического пламени (Я. Б. Зельдович и А. И. Розловский, 1947). При горении же газа в трубе автотурбулилизация вообще не успевает возникнуть, предваряясь турбулентностью, возникающей при больших значениях R от влияния стенок трубы на сопутствующее горению движение газа (т. е. от неустойчивости ламинарного Пуазейлевского движения).

¹⁾ Особые причины для стабилизации пламени имеются при горении газа, испаряющегося с поверхности жидкости (речь идёт о реакции, происходящей в самом веществе пара, без участия каких-либо посторонних компонент, например кислорода воздуха). Стабилизирующими факторами в этом случае являются капиллярные силы и поле тяжести (см. задачу 2).

действует как поршень, толкающий находящийся перед ним газ. Ударная волна движется быстрее пламени, так что количество вовлекаемого в движение газа с течением времени возрастает.

При достаточно больших значениях числа Рейнольдса сопутствующее горению движение газа в трубе становится турбулентным, что в свою очередь оказывает обратное действие на вызвавшее движение пламя. Согласно *К. И. Щелкину* структура зоны горения имеет при этом следующий характер. Турбулентные пульсации, основной масштаб которых велик по сравнению с обычной толщиной пламени δ , приводят к нерегулярному искривлению его фронта. Это искривление может быть весьма значительным, поскольку степень устойчивости фронта по отношению к его деформациям согласно сказанному выше, вероятно, невелика. В результате возникает сравнительно широкая «зона горения», представляющая собой нерегулярно «сложенный в гармошку» тонкий фронт пламени. Скорость горения при этом значительно возрастает за счёт значительного увеличения общей поверхности, на которой оно фактически происходит. Следует заметить, что описанная картина существенно отличается от той, которая должна была бы возникнуть в результате автотурбуликации пламени: зона горения представляла бы собой однородную область, активно перемешиваемую турбулентными пульсациями малых по сравнению с радиусом трубы масштабов.

Задачи

1. Исследовать устойчивость плоского фронта пламени (распространяющегося со скоростью, малой по сравнению со скоростью звука) по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Решение. Выбираем плоскость разрыва в качестве плоскости y, z ; невозмущённая скорость газа направлена в положительном направлении оси x . На движение с постоянными скоростями v_1, v_2 (по обе стороны разрыва) накладываем возмущение, периодическое по времени и по координате y . Из уравнений движения

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (1)$$

(под \mathbf{v} и ρ подразумеваются \mathbf{v}_1, ρ_1 или \mathbf{v}_2, ρ_2) получаем, как и в § 30, уравнение

$$\Delta p' = 0. \quad (2)$$

На поверхности разрыва (т. е. при $x \approx 0$) должны выполняться следующие условия: условие непрерывности давления

$$p'_1 = p'_2, \quad (3)$$

условие непрерывности касательной к поверхности компоненты скорости

$$v'_{1y} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v'_{2y} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4)$$

(где $\zeta(y, t)$ — малое смещение поверхности разрыва вдоль оси x при возмущении) и условие неизменности нормальной скорости газа относительно

разрыва

$$v'_{1x} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_{2x} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

В области $x < 0$ (исходный газ 1) решение уравнений (1) и (2) пишем в виде

$$\left. \begin{aligned} v'_{1x} &= A e^{iky+kx-i\omega t}, & v'_{1y} &= iA e^{iky+kx-i\omega t}, \\ p'_1 &= A \rho_1 \left(\frac{i\omega}{k} - v_1 \right) e^{iky+kx-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В области же $x > 0$ (газ 2, продукты горения) наряду с решением вида $\text{const. } e^{iky-kx-i\omega t}$ должно быть учтено ещё и другое частное решение уравнений (1) и (2), в котором зависимость величин от y и t определяется тем же множителем $e^{iky-i\omega t}$. Это решение получится, если положить $p' = 0$; тогда в уравнении Эйлера правая часть исчезает, а остающееся однородное уравнение имеет решение, в котором v'_x и v'_y пропорциональны $e^{iky-i\omega t + \frac{i\omega}{v} x}$.

Причина, по которой это решение должно быть учтено только для газа 2, а не для газа 1, заключается в том, что нашей конечной целью является определение возможности существования таких «частот» ω , у которых мнимая часть положительна; но для таких ω множитель $e^{i\omega x/v}$ неограниченно возрастал бы с $|x|$ при $x < 0$, и потому в области газа 1 такое решение должно быть отброшено. Подбирая опять соответствующим образом постоянные коэффициенты, ищем решение при $x > 0$ в виде

$$\left. \begin{aligned} v'_{2x} &= B e^{iky-kx-i\omega t} + C e^{iky-i\omega t + \frac{i\omega}{v_2} x}, \\ v'_{2y} &= -iB e^{iky-kx-i\omega t} - \frac{\omega}{k v_2} C e^{iky-i\omega t + \frac{i\omega}{v_2} x}, \\ p'_2 &= -B \rho_2 \left(v_2 + \frac{i\omega}{k} \right) e^{iky-kx-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Положив также

$$\zeta = D e^{iky-i\omega t} \quad (8)$$

и подставив все полученные выражения в условия (3) — (5), получим четыре однородных уравнения для коэффициентов A, B, C, D . Простое вычисление приводит к следующему условию совместности этих уравнений (при вычислении следует помнить, что $j \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$):

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0, \quad (9)$$

где $\Omega = -i\omega$. Если $v_1 > v_2$, то это уравнение имеет либо два отрицательных действительных корня, либо два комплексно сопряжённых корня с отрицательными действительными частями. Если же $v_1 < v_2$, то оба корня действительны и различны по знаку. Таким образом, при $v_1 > v_2$ всегда $\text{Re}(\Omega) < 0$, и движение устойчиво. Если же $v_1 < v_2$, то имеются такие Ω , у которых $\text{Re}(\Omega) > 0$, т. е. основное движение неустойчиво. Плотность продуктов горения ρ_2 фактически всегда меньше плотности исходного газа ρ_1 в связи со значительным нагреванием при горении. Поэтому из $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ следует, что $v_2 > v_1$, и мы приходим к выводу о неустойчивости фронта пламени в рассматриваемых условиях.

2. На поверхности жидкости происходит горение, причём самая реакция происходит в испаряющемся с поверхности паре. Определить условие устойчивости такого режима горения с учётом влияния поля тяжести и капиллярных сил (Л. Д. Ландау, 1944).

Решение. Рассматриваем зону горения в паре вблизи поверхности жидкости как поверхность разрыва, но приписываем теперь этой поверхности поверхностное натяжение α . Дальнейшие вычисления полностью аналогичны произведённым в задаче 1 с той лишь разницей, что вместо граничного условия (3) имеем теперь

$$p'_1 - p'_2 = -\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (\rho_1 - \rho_2) g \zeta$$

(средой 1 является жидкость, а средой 2 — сгоревший газ). Условия же (4) и (5) не меняются. Вместо уравнения (9) получаем теперь

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + \left[k^2 (v_1 - v_2) + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^3}{j} \right] v_1 v_2 = 0.$$

Условие устойчивости рассматриваемого режима заключается в требовании, чтобы корни этого уравнения имели отрицательную действительную часть, т. е. свободный член уравнения должен быть положительным при произвольном k . Это требование приводит к условию устойчивости:

$$j^4 < \frac{4\alpha g \rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Поскольку плотность газообразных продуктов горения мала по сравнению с плотностью жидкости ($\rho_1 \gg \rho_2$), то это условие фактически сводится к неравенству

$$j^4 < 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2.$$

3. Определить распределение температуры в газе перед плоским фронтом пламени.

Решение. В системе координат, движущейся вместе с фронтом, распределение температуры стационарно, а газ движется со скоростью $-v_1$. Уравнение теплопроводности

$$v \nabla T = -v_1 \frac{dT}{dx} = \chi \frac{d^2 T}{dx^2}$$

имеет решение

$$T = T_0 e^{-\frac{v_1 x}{\chi}},$$

где T_0 — температура на фронте пламени, отсчитываемая от температуры вдали от него.

§ 120. Детонация

В описанном выше режиме медленного горения его распространение по газу обуславливается нагреванием, происходящим путём непосредственной передачи тепла от горящего к ещё не воспламенившемуся газу. Наряду с таким возможен и совсем иной механизм распространения горения, связанный с ударными волнами. Ударная волна вызывает при своём прохождении нагревание газа — температура газа позади волны выше, чем впереди неё. Если интенсивность ударной волны

достаточно велика, то вызываемое ею повышение температуры может оказаться достаточным для того, чтобы в газе могло начаться горение. Ударная волна при своём движении будет тогда как бы «поджигать» газовую смесь, т. е. горение будет распространяться со скоростью, равной скорости волны, — гораздо быстрее, чем при обычном горении. Такой механизм распространения горения называется детонацией.

Когда через некоторое место газа проходит ударная волна, в этом месте начинается реакция, после чего она будет продолжаться здесь до тех пор, пока не сгорит весь газ в этом месте, т. е. в течение некоторого характерного для кинетики данной реакции времени τ . Поэтому ясно, что за ударной волной будет следовать передвигающийся вместе с нею слой, в котором и происходит горение, причём толщина этого слоя равна произведению скорости распространения волны на время τ . Существенно, что она не зависит от размеров тел, фигурирующих в данной конкретной задаче. Поэтому при достаточно больших характеристических размерах задачи можно рассматривать ударную волну вместе со следующей за ней областью горения как одну поверхность разрыва, отделяющую сгоревший газ от несгоревшего. О такой «поверхности разрыва» мы будем говорить как о детонационной волне.

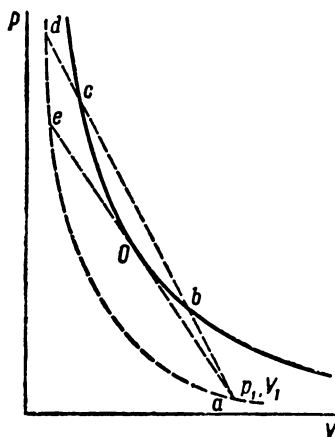


Рис. 113.

На детонационной волне должны выполняться условия непрерывности плотностей потоков массы, энергии и импульса и остаются справедливыми все выведенные ранее для ударных волн соотношения (82,1)—(82,10), являющиеся следствием одних только этих условий. Остаётся, в частности, справедливым уравнение

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{V_1 + V_2}{2} (p_2 - p_1) = 0 \quad (120,1)$$

(буквы с индексом 1 будут везде относиться к исходному, несгоревшему, газу, а с индексом 2 — к продуктам горения). Кривую зависимости p_2 от V_2 , определяемую этим уравнением, мы будем называть детонационной адиабатой. В противоположность рассматривавшейся ранее ударной адиабате эта кривая не проходит через исходную заданную точку p_1, V_1 . Свойство ударной адиабаты проходить через эту точку было связано с тем, что ω_1 и ω_2 были одинаковыми функциями соответственно от p_1, V_1 и p_2, V_2 , что теперь ввиду химического различия обоих газов не имеет места. На рис. 113 сплошной линией изображена детонационная адиабата. Через точку p_1, V_1 проведена

пунктиром в качестве вспомогательной кривой обычная ударная адиабата для исходной горючей смеси. Детонационная адиабата всегда расположена над ударной в связи с тем, что при горении развивается высокая температура и давление газа увеличивается по сравнению с тем, которое имел бы несгоревший газ при том же удельном объеме.

Для плотности потока вещества имеет место прежняя формула (82,6)

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, \quad (120,2)$$

так что графически — j^2 есть попрежнему тангенс угла наклона к оси абсцисс хорды, проведенной из точки p_1, V_1 в произвольную точку p_2, V_2 детонационной адиабаты (например, хорда ac на рис. 113). Из чертежа сразу видно, что j^2 не может быть меньше значения, соответствующего наклону касательной aO . Поток j представляет собой не что иное, как количество сгорающего в единицу времени вещества (отнесённое к 1 см^2 поверхности детонационной волны); мы видим, что при детонации это количество не может быть меньше определённого предела j_{\min} (зависящего от начального состояния исходного газа).

Формула (120,2) является следствием одних лишь условий непрерывности потоков массы и импульса. Поэтому уравнение (120,2) справедливо (при заданном исходном состоянии газа) не только для окончательного состояния продуктов горения, но и для всех промежуточных состояний, в которых выделилась ещё лишь часть энергии реакции. Другими словами, давление p и удельный объём V вещества во всех этих состояниях связаны друг с другом линейным соотношением

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V), \quad (120,3)$$

которое графически изображается точками хорды ad . Это важно для теории детонации утверждение было впервые высказано В. А. Михельсоном (1890).

Проследим теперь, следуя выдвинутым Я. Б. Зельдовичем (1940) идеям, за ходом изменения состояния вещества вдоль слоя конечной ширины, которым в действительности является детонационная волна. Передний фронт детонационной волны представляет собой истинную ударную волну в газе I (исходной горючей смеси). В ней вещество подвергается сжатию и нагреванию, приводящему его в состояние, изображающееся точкой d (рис. 113) на ударной адиабате газа I . В сжатом веществе начинается химическая реакция, по мере протекания которой состояние вещества изображается точкой, передвигающейся вниз по хорде da ; при этом выделяется тепло, вещество расширяется, а его давление падает. Так продолжается до тех пор, пока не закончится горение и не выделится всё тепло реакции. Этому моменту соответствует точка c , лежащая на детонационной адиабате, изображающей конечные состояния продуктов горения. Что же касается нижней точки b пересечения хорды ad с детонационной адиабатой,

то она оказывается недостижимой для вещества, в котором горение вызвано его сжатием и разогреванием в ударной волне ¹⁾).

Таким образом, мы приходим к важному результату, что детонации соответствует не вся кривая детонационной адиабаты, а лишь её верхняя часть, лежащая над точкой O , в которой адиабата касается прямой aO , проведённой из начальной точки a .

В § 84 было показано, что в точке, где $\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0$, т. е. там, где ударная адиабата касается прямой, проведённой из точки p_1 , V_1 , скорость v_2 равна соответствующему значению скорости звука c_2 , а при больших p_2 , т. е. над этой точкой, имеется $v_2 < c_2$. Эти результаты были получены, исходя из одних только законов сохранения на поверхности разрыва, и потому в полной мере применимы и к детонационной волне. На обычной ударной адиабате для одного газа точек с $\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0$ нет, как это было показано в § 84. На детонационной же адиабате такая точка имеется — именно точка O . Поскольку детонации соответствует только верхняя часть адиабаты над точкой O , то мы приходим к результату, что

$$v_2 \leq c_2, \quad (120,4)$$

т. е. детонационная волна движется относительно остающегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной или меньшей скорости звука; равенство $v_2 = c_2$ имеет место для детонации, соответствующей точке O (так называемая точка Жуге)²⁾.

Что касается скорости волны относительно газа I , то она всегда в том числе и для точки O) является сверхзвуковой:

$$v_1 > c_1. \quad (120,5)$$

В этом проще всего можно убедиться непосредственно из рис. 113. Скорость звука c_1 графически определяется наклоном касательной к ударной адиабате газа I (пунктирная кривая) в точке a . Скорость же v_1 определяется наклоном хорды ac . Поскольку все рассматриваемые хорды идут круче указанной касательной, то всегда $v_1 > c_1$. Перемещаясь со сверхзвуковой скоростью, детонационная волна, как и ударная волна, никак не влияет на состояние находящегося перед нею газа. Скорость v_1 перемещения волны относительно исходного неподвижного газа и есть та скорость, о которой надо говорить как о скорости распространения детонации в горючей смеси.

1) Для полноты рассуждений следует также указать, что скачкообразный переход из состояния c в состояние b в ещё одной ударной волне тоже невозможен, так как газ пересекал бы такую волну в направлении от большего давления к меньшему, что невозможно.

2) Напомним, что под скоростями v_1 , v_2 везде подразумеваются скорости в нормальном к поверхности разрыва направлении.

Поскольку $\frac{v_1}{V_1} = \frac{v_2}{V_2} \equiv j$, а $V_1 > V_2$, то $v_1 > v_2$. Разность же $v_1 - v_2$ есть, очевидно, скорость движения продуктов горения относительно несгоревшего газа. Эта разность положительна, т. е. продукты горения движутся в сторону распространения детонационной волны.

Отметим ещё следующее обстоятельство. В том же § 84 было показано, что $\frac{ds_2}{d(j^2)} > 0$. Поэтому в той точке, где j^2 имеет минимум, минимально также и s_2 . Такой точкой является как раз точка O , и мы заключаем, что она соответствует наименьшему значению энтропии s_2 на детонационной адиабате. Энтропия s_2 имеет экстремум в точке O также и если следить за изменением состояния вдоль прямой ae (поскольку наклоны кривой и касательной в точке O совпадают). Этот экстремум, однако, является максимумом, как впервые было указано В. А. Михельсоном. Действительно, перемещению от точки e к O соответствует изменение состояния по мере протекания в сжатой смеси реакции горения, сопровождающейся выделением тепла и ростом энтропии; переход же из O в a соответствовал бы эндотермическому превращению продуктов горения в исходное вещество, обладающее меньшей энтропией.

Если детонация вызывается ударной волной, возникшей от какого-либо постороннего источника и падающей на горючую смесь, то такой детонации может соответствовать любая точка, лежащая на верхней части детонационной адиабаты. В особенности интересна, однако, детонация, возникающая самопроизвольно, в результате самого процесса горения. В следующем параграфе мы увидим, что в ряде важных случаев такая детонация непременно должна соответствовать точке Жуге, так что скорость детонационной волны относительно остающихся непосредственно за ней продуктов горения равна как раз скорости звука, а скорость относительно исходного газа $v_1 = jV_1$ имеет наименьшее возможное значение. Это утверждение было высказано гипотетически ещё Д. Чепменом (1899) и Э. Жуге (1905), а его полное теоретическое обоснование принадлежит Я. Б. Зельдовичу (1940).

Выведем теперь соотношения между различными величинами в детонационной волне в идеальном газе. Подставляя в общее уравнение (120,1) тепловую функцию в виде

$$w = w_0 + c_p T = w_0 + \frac{\gamma p V}{\gamma - 1},$$

получаем:

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} p_2 V_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} p_1 V_1 - V_1 p_2 + V_2 p_1 = 2q, \quad (120,6)$$

где посредством $q = w_{01} - w_{02}$ опять обозначена теплота реакции (приведённая к абсолютному нулю температуры). Определяемая этим уравнением кривая $p_2(V_2)$ является равнобочной гиперболой. При

$p_2/p_1 \rightarrow \infty$ отношение плотностей стремится к конечному пределу

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1};$$

это есть наибольшее сжатие вещества, которое может быть достигнуто в детонационной волне.

Формулы сильно упрощаются в важном случае сильных детонационных волн, получающихся, когда выделяющаяся теплота реакции велика по сравнению с внутренней тепловой энергией исходного газа, т. е. $q \gg c_{v1} T_1$. В этом случае можно пренебречь в (120,6) членами, содержащими p_1 , и получается

$$p_2 \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} V_2 - V_1 \right) = 2q. \quad (120,7)$$

Рассмотрим более подробно детонацию, соответствующую точке Жуге, представляющую согласно сказанному выше особый интерес. В этой точке имеем:

$$j^2 = \frac{c_2^2}{V_2^2} = \frac{\gamma_2 p_2}{V_2}.$$

Из этого соотношения и соотношения (120,2) можно выразить p_2 и V_2 в виде

$$p_2 = \frac{p_1 + j^2 V_1}{\gamma_2 + 1}, \quad V_2 = \frac{\gamma_2 (p_1 + j^2 V_1)}{j^2 (\gamma_2 + 1)}. \quad (120,8)$$

Подставляя теперь эти выражения в уравнение (120,6) и вводя вместо потока j скорость $v_1 = j V_1$, получаем после простого приведения следующее биквадратное уравнение для v_1 :

$$v_1^4 - 2v_1^2 (\gamma_2^3 - 1) q + (\gamma_2^2 - \gamma_1) c_{v1} T_1 v_1 + \gamma_2^2 (\gamma_1 - 1)^2 c_{v1}^2 T_1^2 = 0$$

(температура введена здесь согласно $T = \frac{pV}{c_p - c_v} = \frac{pV}{c_v(\gamma - 1)}$). Отсюда имеем 1):

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{2} [(\gamma_2 + 1) q + (\gamma_1 + \gamma_2) c_{v1} T_1]} + \sqrt{\frac{\gamma_2 + 1}{2} [(\gamma_2 - 1) q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1]}. \quad (120,9)$$

1) Если $x^4 - 2px^2 + q = 0$, то

$$x = \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}} = \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2}}.$$

Два знака перед корнем соответствуют в данном случае тому, что из точки a можно провести две касательные к детонационной адиабате — одну вверх, как это изображено на рисунке, а другую вниз. Интересующая нас верхняя касательная является более крутой и соответственно этому мы выбираем знак плюс перед корнем.

Эта формула определяет скорость распространения детонации по температуре T_1 исходной газовой смеси.

Перепишем формулы (120,8) в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2 + (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1}{(\gamma_2 + 1) (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2 [v_1^2 + (\gamma_1 - 1) c_{v1} T_1]}{(\gamma_2 + 1) v_1^2}. \quad (120,10)$$

Вместе с (120,9) они определяют отношения давлений и плотностей продуктов горения и исходного вещества по температуре T_1 .

Скорость v_2 вычисляется как $v_2 = \frac{V_2}{V_1} v_1$ с помощью формул (120,9) и (120,10). В результате вычисления получается:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{2} [(\gamma_2 + 1) q + (\gamma_1 + \gamma_2) c_{v1} T_1] + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \sqrt{\frac{\gamma_2 + 1}{2} [(\gamma_2 - 1) q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1]}}. \quad (120,11)$$

Разность же $v_1 - v_2$, т. е. скорость сгоревшего газа относительно несгоревшего, равна

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{2 [(\gamma_2 - 1) q + (\gamma_2 - \gamma_1) c_{v1} T_1]}{\gamma_2 + 1}}. \quad (120,12)$$

Температура продуктов горения вычисляется по формуле

$$c_{v2} T_2 = \frac{v_2^2}{\gamma_2 (\gamma_2 - 1)} \quad (120,13)$$

(напомним, что $v_2 = c_2$).

Все эти довольно сложные формулы очень упрощаются для сильных детонационных волн. В этом случае получаем для скоростей следующие простые формулы:

$$v_1 = \sqrt{2 (\gamma_2^2 - 1) q}, \quad v_1 - v_2 = \frac{v_1}{\gamma_2 + 1}. \quad (120,14)$$

Термодинамическое же состояние продуктов горения определяется формулами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2 (\gamma_2 - 1) q}{\gamma_1 - 1 c_{v1} T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2 + 1) c_1^2},$$

$$|T_2 = \frac{2 \gamma_2 q}{\gamma_2 + 1 c_{v2}}. \quad (120,15)$$

Сравнивая формулы (120,15) с аналогичными формулами (119,5) для медленного горения, можно отметить, что в предельном случае $q \gg c_{v1} T_1$ отношение температур продуктов горения, которые они приняли бы соответственно после медленного горения и после дето-

нации, равно

$$\frac{T_2^{\text{дет}}}{T_2^{\text{гор}}} = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1}.$$

Это отношение всегда больше единицы (так как всегда $\gamma_2 > 1$).

Во всех предыдущих рассуждениях, основанных на изображённом на рис. 113 графике, молчаливо подразумевалось, что химическая реакция горения от начала и до конца (т. е. на всех своих промежуточных стадиях между исходным веществом и конечными продуктами горения) идёт экзотермически. В большинстве случаев это предположение соответствует истине. Принципиально возможны, однако, и такие реакции, которые идут сначала экзотермически, а на некоторых конечных стадиях эндотермически (Я. Б. Зельдович и С. Б. Ратнер, 1941). Тогда промежуточной смеси, отвечающей моменту перехода от выделения к поглощению тепла, будет соответствовать адиабата, расположенная выше детонационной адиабаты, изображающей состояния конечных продуктов горения (рис. 114).

Всякая хорда, вдоль которой меняется состояние детонирующей смеси, должна проходить через эту промежуточную адиабату. Поэтому наименьшее возможное значение j_{\min} скорости горения определяется наклоном касательной aO' . Детонационным волнам с $j > j_{\min}$ соответствуют точки, лежащие на детонационной адиабате выше точки b ; при этом $v_2 < c_2$. Если же $j = j_{\min}$, то состояние вещества меняется вдоль прямой ca от точки c к O' и затем дальше вниз до точки O , которая и заменяет собой (в качестве точки, соответствующей самопроизвольной детонации) обычную точку Жуге; в отличие от обычного случая при этом будет $v_2 > c_2$.

З а д а ч а

Определить термодинамические величины газа непосредственно за ударной волной, являющейся передним фронтом сильной детонационной волны, соответствующей точке Жуге.

Решение. Непосредственно за ударной волной имеется ещё несгоревшая газовая смесь, и её состояние изображается точкой e пересечения продолжения касательной aO (рис. 113) с изображённой пунктиром ударной адиабатой газа l . Обозначая координаты этой точки посредством p_1' , V_1' , имеем, с одной стороны, согласно уравнению (85,1) ударной адиабаты газа l :

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)p_1 + (\gamma_1 - 1)p_1'}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_1'}$$

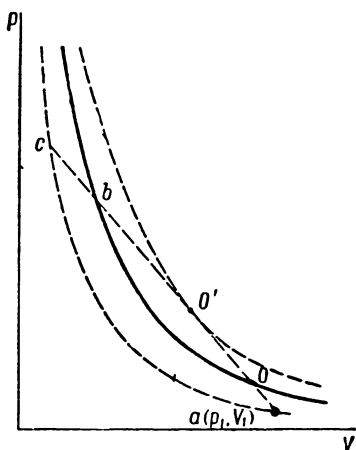


Рис. 114.

и, с другой стороны,

$$\frac{p'_1 - p_1}{V_1 - V'_1} = j^2 = \frac{v_1^2}{V_1^2}.$$

Взяв для v_1 значение из (120,14), получим:

$$p'_1 = p_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1}, \quad V'_1 = V_1 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad T'_1 = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

Отношение давления p'_1 к давлению p_2 позади детонационной волны равно

$$\frac{p'_1}{p_2} = 2 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1 + 1}.$$

§ 121. Распространение детонационной волны

Рассмотрим теперь несколько конкретных случаев распространения детонационных волн в газе, который первоначально покоился. Начнём с детонации в газе, находящемся в трубе, один из концов которой ($x = 0$) закрыт. Граничные условия в этом случае требуют равенства нулю скорости газа как впереди детонационной волны (детонационная волна не влияет на состояние газа, находящегося перед нею), так и на закрытом конце трубы. Поскольку при прохождении детонационной волны газ приобретает отличную от нуля скорость, то в пространстве между волной и закрытым концом трубы должно происходить падение его скорости. Для того чтобы определить возникающую при этом картину движения газа, замечаем, что в рассматриваемой задаче нет никаких параметров длины, которые бы характеризовали условия движения вдоль длины трубы (оси x). Мы видели в § 92, что в таком случае изменение скорости газа может произойти либо в ударной волне (разделяющей две области постоянной скорости), либо в автотемпературной волне разрежения.

Предположим сначала, что детонационная волна не соответствует точке Жуге адиабаты. Тогда скорость её распространения относительно остающегося за нею газа $v_2 < c_2$. Легко видеть, что в таком случае за детонационной волной не могут следовать ни ударная волна, ни слабый разрыв (передний фронт волны разрежения). Действительно первая должна перемещаться относительно находящегося перед нею газа со скоростью, превышающей c_2 , а второй — со скоростью, равной c_2 ; в обоих случаях они «перегоняли» бы детонационную волну. Таким образом, при сделанном предположении оказывается невозможным уменьшить скорость движущегося за детонационной волной газа, т. е. невозможно удовлетворить граничному условию при $x = 0$.

Удовлетворить этому условию можно лишь с детонационной волной, соответствующей точке Жуге. В этом случае $v_2 = c_2$, и за дето-

национной волной может следовать волна разрежения. Возникнув в точке $x=0$ одновременно с началом детонации, волна разрежения будет иметь передний фронт совпадающим с детонационной волной.

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что детонационная волна, распространяющаяся по трубе в подожжённом у её закрытого конца газе, должна непременно соответствовать точке Жуге. Она движется относительно находящегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной местной скорости звука. От самой детонационной волны начинается область волны разрежения, в которой скорость газа (относительно трубы) монотонно падает до нуля. Точка, в которой скорость впервые обращается в нуль, является слабым разрывом. Позади слабого разрыва газ неподвижен (рис. 115).

Рассмотрим теперь детонационную волну, распространяющуюся по трубе от открытого её конца. Давление газа, находящегося перед детонационной волной, должно быть равно первоначальному давлению исходного газа, совпадающему, очевидно, с внешним давлением. Ясно, что и в этом случае где-то позади детонационной волны должно происходить падение скорости. Если бы на всём протяжении от начала трубы до волны скорость газа была постоянной, то это значило бы, что на открытом конце трубы происходит засасывание газа извне; между тем давление газа в трубе было бы выше внешнего (так как за детонационной волной давление выше, чем перед нею), и потому такое засасывание невозможно. По таким же причинам, как и в предыдущем случае, детонационная волна должна непременно соответствовать точке Жуге. В результате получается картина движения, схематически изображённая на рис. 116. Непосредственно за детонационной волной начинается область авто-модельной волны разрежения, в которой скорость монотонно падает по направлению к началу трубы, причём меняет в некоторой точке знак. Это значит, что в некотором начальном участке трубы газ будет двигаться в направлении к открытому концу трубы, из которого и будет вытекать наружу; выходная скорость этого вытекания равна местному значению скорости звука, а выходное давление превышает внешнее (мы видели в § 90, что такой режим вытекания возможен)¹⁾.

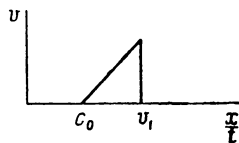


Рис. 115.

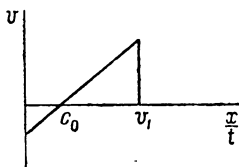


Рис. 116.

¹⁾ Более подробное рассмотрение одномерного распространения детонационной волны — см. задачи к этому параграфу.

К. П. Станюковичем решён ряд задач об одномерном движении (разлёте) продуктов горения после того, как детонационная волна доходит до конца цилиндрического заряда, занимающего часть длины цилиндрической трубы (см. К. П. Станюкович, Теория неустановившихся движений газа, Москва, 1948).

Рассмотрим, далее, сферически симметричную детонационную волну, расходящуюся от точки начального воспламенения газа как из центра. Поскольку газ должен быть неподвижным как впереди детонационной волны, так и вблизи центра, то и здесь скорость газа должна падать по направлению от волны к центру. Как и в случае движения в трубе, здесь также нет никаких заданных характеристических параметров размерности длины. Поэтому возникающее движение газа должно быть автомодельным, с той разницей, что роль координаты x играет теперь расстояние r от центра; таким образом, все величины должны быть функциями только отношения r/t . Этот важный случай распространения детонации был исследован *Я. Б. Зельдовичем* (1942).

Для центрально-симметричного движения ($v_r = v(r, t)$, $v_\varphi = v_\theta = 0$) уравнения движения имеют следующий вид. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0;$$

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

и уравнение сохранения энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Вводя переменную $\xi = \frac{r}{t}$ ($\xi > 0$) и считая, что все величины являются функциями только от ξ , получим следующую систему уравнений:

$$(\xi - v) \frac{\rho'}{\rho} = v' + \frac{2v}{\xi}, \quad (121,1)$$

$$(\xi - v) v' = \frac{p'}{\rho}, \quad (121,2)$$

$$(\xi - v) s' = 0 \quad (121,3)$$

($'$ означает дифференцирование по ξ). Положить здесь $v = \xi$ нельзя, так как это противоречит первому уравнению. Поэтому из третьего сразу имеем $s' = 0$, т. е.

$$s = \text{const.}$$

Имея в виду постоянство энтропии, можем написать $p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' = c^2 \rho'$, и уравнение (121,2) приобретает вид

$$(\xi - v) v' = c^2 \frac{\rho'}{\rho}. \quad (121,4)$$

Подставляя сюда $\frac{\rho'}{\rho}$, взятое из (121,1), получаем следующее соот-

ношение:

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right] v' = \frac{2v}{\xi}. \quad (121,5)$$

Уравнения (121,4) и (121,5) не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде, но свойства их решения могут быть исследованы.

Область, в которой газ совершает движение рассматриваемого типа, ограничена, как мы увидим ниже, двумя сферами, из которых наружная представляет собой поверхность самой детонационной волны, а внутренняя является поверхностью слабого разрыва, причём скорость обращается на ней в нуль.

Изучим прежде всего свойства решения вблизи точки, где v обращается в нуль. Легко видеть, что в той точке, где $v = 0$, непременно должно быть одновременно $\xi = c$:

$$v = 0, \quad \xi = c. \quad (121,6)$$

Действительно, при стремлении v к нулю $\ln v$ стремится к $-\infty$; поэтому, когда ξ , уменьшаясь, стремится к значению, соответствующему внутренней границе рассматриваемой области, производная $\frac{d \ln v}{d \xi}$ должна стремиться к $+\infty$. Между тем из (121,5) имеем при $v = 0$

$$\frac{d \ln v}{d \xi} = \frac{2}{\xi \left(\frac{\xi^2}{c^2} - 1 \right)}.$$

Это выражение может стремиться к $+\infty$ лишь при $\xi \rightarrow c$.

В самом начале координат радиальная скорость должна обратиться в нуль уже непосредственно в силу симметрии. Таким образом, вокруг начала координат будет находиться область неподвижного газа (область внутри сферы $\xi = c_0$, где c_0 — значение скорости звука при $v = 0$).

Выясним свойства функции $v(\xi)$ вблизи точки (121,6). Из (121,5) имеем:

$$v \frac{d\xi}{dv} = \frac{\xi}{2} \left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right].$$

С точностью до величин первого порядка малости (каковыми являются v , $\xi - c_0$, $c - c_0$) получаем после простого вычисления:

$$v \frac{d(\xi - c_0)}{dv} = (\xi - c_0) - (v + c - c_0).$$

Согласно (95,1) имеем $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, где α_0 — положительная постоянная (значение при $v = 0$ величины (95,2)), и мы получаем для

$\xi - c_0$ как функции от v следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$v \frac{d(\xi - c_0)}{dv} - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \ln \frac{\text{const.}}{v}. \quad (121,7)$$

Этим определяется в неявном виде функция $v(\xi)$ вблизи точки, где $v = 0$.

Мы видим, что внутренняя граница является поверхностью слабого разрыва: скорость обращается на ней в нуль, не испытывая скачка. Кривая зависимости $v(\xi)$ имеет на этой границе горизонтальную касательную ($\frac{dv}{d\xi} = 0$). Мы имеем здесь дело со слабым разрывом весьма своеобразного типа: первая производная на нём непрерывна, а все производные высших порядков обращаются в бесконечность (в чём легко убедиться на основании (121,7)). Отношение $\frac{r}{\xi}$ при $v = 0$ есть, очевидно, не что иное, как скорость перемещения границы области относительно газа; согласно (121,6) она равна местному значению скорости звука, как и должно быть для слабого разрыва.

Далее имеем при малых v согласно (121,7):

$$\xi - v - c = (\xi - c_0) - (v + c - c_0) = \alpha_0 v \left(\ln \frac{\text{const.}}{v} - 1 \right).$$

Эта величина при малых v положительна:

$$\xi - v - c > 0.$$

Покажем, что нигде внутри области рассматриваемого движения разность $(\xi - v) - c$ не может изменить знак. Рассмотрим точку, в которой было бы

$$\xi - v = c, \quad v \neq 0. \quad (121,8)$$

Из (121,5) видно, что в такой точке производная v' должна обратиться в бесконечность, т. е.

$$\frac{d\xi}{dv} = 0. \quad (121,9)$$

Что касается второй производной $\frac{d^2\xi}{dv^2}$, то простое вычисление даёт для неё (при условиях (121,8) и (121,9)) значение

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = -\frac{\alpha_0}{c_0} \frac{\xi}{v},$$

отличное от нуля. Но это значит, что в рассматриваемой точке ξ как функция от v имеет максимум. Иначе можно сказать, что функ-

ция $v(\xi)$ существует лишь при ξ , лежащих только по нижнюю сторону от значения, соответствующего условиям (121,8); это значение является второй границей, за которую не может простираться рассматриваемая область. Из того, что $\xi - v - c$ может обратиться в нуль только на границе области, а при малых v во всяком случае $\xi - v - c > 0$, мы заключаем, что

$$\xi - v > c \quad (121,10)$$

везде внутри этой области.

Теперь уже легко видеть, что реальная передняя граница области рассматриваемого движения непременно должна совпадать с точкой, где выполняются условия (121,8). Для этого замечаем, что разность $\frac{r}{t} - v$, где r — координата границы, есть не что иное, как скорость перемещения этой границы относительно остающегося за ней газа. Но поверхность, на которой $\frac{r}{t} - v > c$, не может быть поверхностью детонационной волны (на которой должно быть $\frac{r}{t} - v \leq c$). Поэтому мы приходим к результату, что передней границей рассматриваемой области может быть только точка, в которой имеет место (121,8). На этой границе v падает скачком до нуля, а скорость её распространения относительно остающегося непосредственно за нею газа равна местной скорости звука. Это значит, что детонационная волна непременно должна соответствовать точке Жуге детонационной адиабаты ¹⁾.

Мы приходим к следующей картине движения газа при сферическом распространении детонации. Детонационная волна, как и при детонации в трубе, непременно соответствует точке Жуге. Непосредственно за нею начинается область сферической автомодельной волны разрежения, в которой скорость газа падает до нуля. Падение происходит монотонно, так как согласно (121,5) производная $\frac{dv}{d\xi}$ может обратиться в нуль лишь в той точке, где одновременно $v = 0$. Вместе со скоростью монотонно убывают также и давление и плотность газа (согласно (121,4) и (121,10) производная p' имеет везде тот же знак, что и v'). Кривая зависимости v от r/t имеет на передней границе вертикальную (согласно (121,9)), а на внутренней — горизонтальную касательную (рис. 117). Внутренняя граница является слабым разрывом, вблизи которого зависимость v от r/t определяется уравнением (121,7). Внутри сферы, ограниченной поверхностью слабого разрыва, газ неподвижен. Общее количество (по массе) неподвижного вещества, однако, весьма незначительно (ср. соображения, приведённые в конце § 99).

¹⁾ Отметим для полноты рассуждений, что $v = \text{const.}$ не является решением уравнений центрально-симметрического движения. Поэтому за детонационной волной не может следовать область постоянной скорости.

Таким образом, во всех рассмотренных нами типичных случаях самопроизвольного одномерного и сферического распространения детонации граничные условия в области позади детонационной волны приводят к однозначному отбору скорости последней, соответствующей точке Жуге (после того как вся область детонационной адиабаты ниже этой точки была исключена по соображениям, изложенным в § 120). Осуществление в трубе постоянного сечения детонации, соответствующей

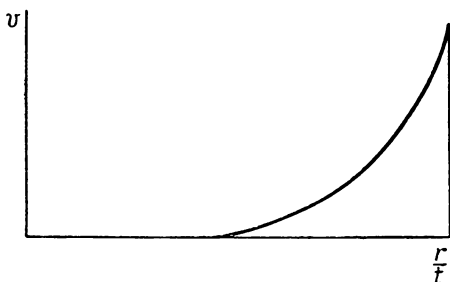


Рис. 117.

расположенной выше точки Жуге части адиабаты¹⁾, требовало бы искусственного «поджатия» продуктов горения движущимся со сверхзвуковой скоростью поршнем (см. задачу 3 этого параграфа).

Следует, однако, подчеркнуть, что эти выводы не являются универсальными, и можно представить себе и такие случаи распространения детонации, когда самопроизвольно возникает

«пересжатая» детонационная волна. Такой случай был указан, в частности, *Б. В. Айвазовым* и *Я. Б. Зельдовичем* (1947): «пересжатая» волна возникает при переходе детонационной волны из широкой трубки в узкую; это явление связано с тем, что когда детонационная волна доходит до места сужения, происходит её частичное «отражение», в результате чего давление продуктов горения, втекающих из широкой в узкую часть трубы, резко возрастает (ср. задачу 4).

Выше мы везде полностью отвлеклись от тепловых потерь, которыми может сопровождаться распространение детонационной волны. Как и в случае медленного горения, эти потери могут сделать невозможным распространение детонации. При детонации газа в трубе источником потерь являются в первую очередь отвод тепла через стенки трубы и замедление газа благодаря трению. Детонация в тонком стержне твёрдого взрывчатого вещества ограничивается главным образом явлением разлёта продуктов горения; при слишком малом диаметре стержня, сравнимом с шириной зоны горения, часть вещества разлетается раньше, чем в нём успеет произойти реакция, и распространение детонации оказывается невозможным (*Ю. Б. Харитон*, 1940).

В условиях, близких к пределу распространения детонации, наблюдается весьма своеобразное явление «детонационного спина». Согласно исследованиям *К. И. Щелкина* (1945) при спиновой детонации распространяющаяся вдоль трубы ударная волна теряет

¹⁾ Такие детонационные волны иногда называют «пересжатыми», так как вещество сжимается в них до более высоких давлений, чем в «нормальной» волне, соответствующей точке Жуге.

аксиально-симметричную (обычно почти плоскую) форму и одновременно со своим поступательным перемещением вращается вокруг оси трубы. Самовоспламенение проходящего через волну газа происходит в основном в эксцентрично расположенном (и движущемся по спирали) резком изломе фронта ударной волны. Количественная теория детонационного спина до настоящего времени не разработана ¹⁾.

Задачи

1. Определить движение газа при распространении детонационной волны по трубе от закрытого её конца.

Решение. Скорости детонационной волны относительно находящегося перед нею неподвижного газа v_1 и относительно остающегося непосредственно за нею сгоревшего газа v_2 определяются по температуре T_1 по формулам (120,11), (120,12). v_1 есть в то же время скорость перемещения волны относительно трубы, так что её координата определяется как $x = v_1 t$. Скорость (относительно трубы) продуктов горения на детонационной волне равна $v_1 - v_2$. Скорость же v_2 совпадает с местной скоростью звука. Поскольку в автомоделной волне разрежения скорость звука связана со скоростью газа v посредством $c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} v$, то имеем:

$$v_2 = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} (v_1 - v_2),$$

откуда

$$c_0 = \frac{\gamma_2 + 1}{2} v_2 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} v_1.$$

Для сильной детонационной волны с помощью (120,14) получаем просто $c_0 = v_1/2$. Величина c_0 и есть скорость перемещения задней границы волны разрежения. Между обеими границами скорость меняется по линейному закону (рис. 115).

2. То же для трубы с открытым концом.

Решение. Скорости v_1 и v_2 определяются так же, как и в предыдущем случае; поэтому той же оказывается и скорость c_0 . Область волны разрежения простирается, однако, теперь не до точки, где $v = 0$, а до самого начала трубы ($x = 0$, рис. 116). Из формулы $\frac{x}{t} = v + c$ (92,5) видим, что газ вытекает из отверстия трубы со скоростью $v = -c$, равной местной скорости звука. Написав

$$-v = c = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} v,$$

получим поэтому для скорости вытекания газа следующее значение:

$$-v|_{x=0} = \frac{2c_0}{\gamma_2 + 1}.$$

Для сильной детонационной волны эта скорость равна $\frac{v_1}{\gamma_2 + 1}$.

¹⁾ Качественные соображения развиты Я. Б. Зельдовичем (см. ДАН СССР 52, 147, 1946).

3. То же при распространении детонационной волны от конца трубы закрытого поршнем, начинающим в начальный момент времени двигаться вперёд с постоянной скоростью U .

Решение. Если $U < v_1$, то распределение скорости в газе имеет вид, изображённый на рис. 118, а. Скорость газа падает от значения $v_1 - v_2$ при $\frac{x}{t} = v_1$ до значения U при

$$\frac{x}{t} = c_0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} U$$

с прежним значением c_0 . Далее следует область газа, движущегося с постоянной скоростью U .

Если же $U > v_1$, то детонационная волна уже не может соответствовать точке Жуге (поршень «обгонял» бы её). В этом случае возникает «пережатая» детонационная волна, соответствующая точке на адиабате, расположенной выше точки Жуге. Она определяется тем, что скачок скорости в ней должен быть равен как раз скорости поршня: $v_1 - v_2 = U$. Во всей области между детонационной волной и поршнем газ движется с постоянной скоростью U .

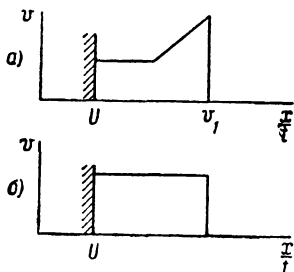


Рис. 118.

4. Определить давление, возникающее у абсолютно твёрдой стенки при отражении падающей на неё в нормальном направлении плоской сильной детонационной волны (К. П. Станюкович, 1946).

Решение. При падении детонационной волны на стенку возникает отражённая ударная волна, распространяющаяся в обратном направлении по продуктам горения. Вычисления в точности аналогичны произведённым в задаче 1 § 93. С теми же обозначениями, что и там, имеем в данном случае три соотношения:

$$p_2 (V_1 - V_2) = (p_3 - p_2) (V_2 - V_3),$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_3}{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_3}$$

(мы пренебрегаем p_1 по сравнению с p_2 , но p_2 и p_3 — одного порядка величины). Исключая объёмы, получим для p_3 квадратное уравнение, причём должен быть выбран тот из его корней, для которого $p_3 > p_2$:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{17\gamma_2^2 + 3\gamma_2 + 1}}{4\gamma_2}.$$

Отметим, что это отношение почти не зависит от значения γ_2 , меняясь всего в пределах от 2,6 до 2,3 при изменении γ_2 от 1 до ∞ .

§ 122. Соотношение между различными режимами горения

В § 120 было показано, что детонации соответствуют точки на верхней части детонационной адиабаты для данного процесса горения. Поскольку уравнение этой адиабаты есть следствие одних лишь необходимых законов сохранения массы, импульса и энергии (применённых к начальному и конечному состояниям горящего газа), то ясно,

что на эту же кривую должны лечь точки, изображающие состояние продуктов реакции также и при всяком другом режиме горения, в котором зону горения можно рассматривать как некоторую «поверхность разрыва». Выясним теперь, каков именно физический смысл остальных участков этой кривой.

Проведём через точку p_1, V_1 (точка I на рис. 119) вертикальную и горизонтальную прямые IA и IA' и две касательные IO и IO' к адиабате. Точки A, A', O, O' касания или пересечения этих прямых с кривой разделят адиабату на пять частей. Часть кривой, лежащая над точкой O , соответствует, как указано, детонации. Рассмотрим теперь другие участки кривой.

Прежде всего легко видеть, что участок AA' вовсе не имеет никакого физического смысла. Действительно, на этом участке имеем $p_2 > p_1, V_2 > V_1$, и поэтому поток вещества $j = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}$ оказался бы мнимым.

В точках касания O и O' производная $\frac{d(j^2)}{dp_2}$ обращается в нуль; в § 84 было показано, что в таких точках имеют одновременно место равенство $\frac{v_2}{c_2} = 1$ и неравенство $\frac{d}{dp_2} \left(\frac{v_2}{c_2} \right) < 0$. Отсюда следует, что над точками касания $\frac{v_2}{c_2} < 1$, а под ними $\frac{v_2}{c_2} > 1$. Что касается взаимоотношения между скоростями v_1 и c_1 , то его всегда легко установить из рассмотрения наклона соответствующих хорд и касательных, подобно тому как это было сделано в § 120 для участка кривой над точкой O . В результате такого рассмотрения найдём, что на отдельных участках адиабаты имеют место следующие неравенства:

над точкой O :	$v_1 > c_1,$	$v_2 < c_2;$	(122,1)
на отрезке AO :	$v_1 > c_1,$	$v_2 > c_2;$	
на отрезке $A'O'$:	$v_1 < c_1,$	$v_2 < c_2;$	
под точкой O' :	$v_1 < c_1,$	$v_2 > c_2.$	

В точках O и O' имеем $v_2 = c_2$. При приближении к точке A поток j , а вместе с ним и скорости v_1, v_2 стремятся к бесконеч-

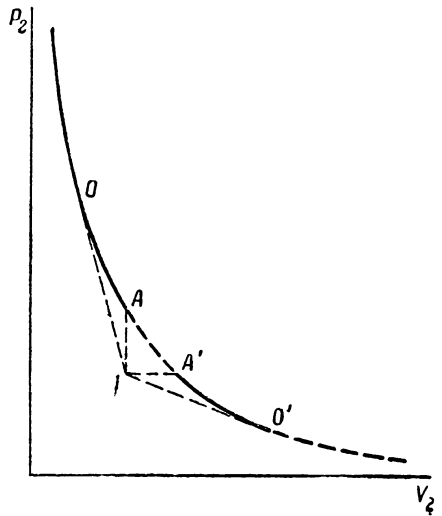


Рис. 119.

ности. При приближении же к точке A' поток j и скорости v_1, v_2 стремятся к нулю.

В § 84 было произведено исследование устойчивости ударных волн по отношению к бесконечно малым смещениям в направлении, перпендикулярном к их плоскости. Мы видели, что вопрос об устойчивости решается в зависимости от соотношения между числом параметров, определяющих возмущение, и числом граничных условий, которым должно удовлетворять возмущение на самой поверхности разрыва.

Все эти соображения можно применить и к рассматриваемым здесь «поверхностям разрыва». В частности, остаётся в силе и произведённый в § 84 подсчёт числа параметров возмущения для каждого из четырёх случаев (122,1), представленный на рис. 47. Разница заключается лишь в следующем. При недетонационном режиме горения скорость его распространения целиком определяется свойствами самой химической реакции и условиями теплопередачи из зоны горения в находящуюся перед ней ненагретую газовую смесь. Это значит, что поток вещества j через зону горения равен определённой заданной величине (точнее, определённой функции состояния исходного газа I), между тем как в ударной или детонационной волне j может иметь произвольное значение. Отсюда следует, что на разрыве, представляющем зону недетонационного горения, число граничных условий на единицу больше, чем на ударной волне, — добавляется условие определённого значения j . Всего, таким образом, оказывается четыре условия, и тем же образом, как это было сделано в § 84, заключаем теперь, что абсолютная неустойчивость разрыва имеет место лишь в случае $v_1 < c_1, v_2 > c_2$, изображающемся точками на участке адиабаты под точкой O' . Мы приходим к выводу, что этот участок кривой не соответствует каким бы то ни было реально осуществляющимся режимам горения.

Участок $A'O'$ адиабаты, на котором обе скорости v_1 и v_2 — дозвуковые, соответствует обычному режиму медленного горения. Увеличению скорости горения j соответствует на участке $A'O'$ адиабаты перемещение от точки A' (в которой $j=0$) к O' . Написанные в § 119 формулы (119,5) соответствуют точке A' (в которой $p_1=p_2$) и применимы постольку, поскольку j достаточно мало, т. е. поскольку скорость распространения горения мала по сравнению со скоростью звука. Точка же O' отвечает предельному «наиболее быстрому» режиму рассматриваемого типа. Выпишем здесь формулы, относящиеся к этому предельному случаю.

Точка O' , как и точка O , есть точка касания кривой с проведённой из точки I касательной. Поэтому формулы, относящиеся к точке O' , можно получить непосредственно из формул (120,8) — (120,11), относящихся к точке O , сделав в них лишь соответствующую перемену знака (см. сноску на стр. 581). Именно, в формулах (120,9) и (120,11) для v_1 и v_2 надо изменить знак перед вторым

корнем, в связи с чем меняет знак также и выражение (120,12) для $v_1 - v_2$. Формулы (120,10) остаются неизменными, если понимать в них под v_1 новое значение. Все эти формулы сильно упрощаются в том случае, когда теплота реакции велика ($q \gg c_{v1}T_1$). Тогда получим:

$$v_1 = \frac{\gamma_2 p_1 V_1}{\sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(\gamma_2 - 1)q}{\gamma_2 + 1}}, \quad (122,2)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma_2 + 1}, \quad c_{v2}T_2 = \frac{2q}{\gamma_2(\gamma_2 + 1)}.$$

Необходимо сделать здесь следующую оговорку. Мы видели, что при медленном горении в закрытой трубе впереди зоны горения непременно возникает ударная волна. При больших скоростях горения интенсивность этой волны велика и она существенным образом меняет состояние подходящей к зоне горения газовой смеси. Поэтому не имеет, собственно говоря, смысла следить за изменением режима горения при увеличении его скорости при заданном состоянии p_1, V_1 исходной горючей смеси. Для того чтобы достигнуть точки O' , необходимо создать такие условия горения, при которых бы не возникла ударная волна. Это можно, например, осуществить при горении в открытой с обеих сторон трубе, причём с заднего конца производится непрерывный «отсос» продуктов горения. Скорость «отсоса» должна быть подобрана так, чтобы зона горения оставалась неподвижной, и потому не возникала бы ударная волна.

При наличии очень хороших условий теплопередачи (например, путём лучистой теплопроводности) скорость горения j может, принципиально, превысить значение, соответствующее точке O' . Возникающий тогда режим горения должен соответствовать точкам на отрезке AO адиабаты, поскольку режимы, соответствующие расположенным выше O точкам адиабаты, вообще говоря, не могут самопроизвольно осуществляться по тем же причинам, что и для детонации.

Обычное медленное горение может самопроизвольно перейти в детонацию. Этот переход происходит путём самопроизвольного ускорения пламени, сопровождающегося усилением интенсивности идущей впереди фронта ударной волны, пока последняя не станет настолько сильной, чтобы вызвать воспламенение сжатого ею газа. Вопрос о механизме такого самопроизвольного ускорения пламени в настоящее время ещё не вполне ясен; возможно, играет роль турбулизация пламени, вызванная стенками трубы (*К. И. Щелкин*). Не исключена также и возможность того, что стационарное распространение пламени вообще является неустойчивым в условиях, когда его фронт искривляется благодаря трению газа о стенки трубы (*Я. Б. Зельдович*).

В заключение обратим внимание на следующие общие отличия (помимо отличий, заключённых в неравенствах (122,1)) между режимами,

изображающимися соответственно верхней и нижней частями адиабаты. Выше точки A имеем:

$$p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1, \quad v_2 < v_1.$$

Другими словами, продукты реакции сжаты до более высоких давлений и плотности, чем исходное вещество, и движутся вслед за фронтом горения (со скоростью $v_1 - v_2$). В области же ниже точки A имеем обратные неравенства:

$$p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1, \quad v_2 < v_1;$$

продукты горения разрежены по сравнению с исходным веществом.

§ 123. Конденсационные скачки

Формальным сходством с детонационными волнами обладают так называемые конденсационные скачки, возникающие при движении газа, содержащего, например, находящийся в пересыщенном состоянии водяной пар. Эти скачки представляют собой результат внезапной конденсации паров, причём процесс конденсации происходит очень быстро в очень узкой зоне, которую можно рассматривать как некоторую поверхность разрыва («конденсационный скачок»), разделяющую области исходного газа и газа, содержащего сконденсированные пары («туман»). Следует подчеркнуть, что конденсационные скачки представляют собой самостоятельное физическое явление, а не результат сжатия газа в обычной ударной волне; последнее вообще не может привести к конденсации паров, так как эффект увеличения давления в ударной волне перекрывается в смысле его влияния на степень пересыщения обратным эффектом повышения температуры. Теоретически исследование конденсационных скачков было впервые произведено *С. З. Бельским* (1945).

Как и реакция горения, конденсация пара представляет собой экзотермический процесс. Роль теплоты реакции q играет при этом количество тепла, выделяющегося при конденсации пара, заключённого в единице массы газа¹⁾. «Конденсационная адиабата», определяющая зависимость p_2 от V_2 при заданном состоянии p_1, V_1 исходного газа с неконденсированными парами, выглядит так же, как и изображённая на рис. 119 адиабата для реакции горения. Взаимоотношение между скоростями распространения скачка v_1, v_2 и скоростями звука c_1, c_2 на различных участках конденсационной адиабаты определяется неравенствами (122,1). Однако не все из перечисленных в (122,1) четырёх случаев могут реально осуществиться.

¹⁾ Тепло q не совпадает, строго говоря, с обычной скрытой теплотой конденсации, так как совершающийся в зоне конденсации процесс включает в себя не только изотермическую конденсацию пара, но и некоторое общее изменение температуры газа. Однако если степень пересыщения пара не слишком мала (как это обычно и имеет место), то эта разница несущественна.

Прежде всего возникает вопрос об устойчивости конденсационных скачков по отношению к малым возмущениям в направлении, перпендикулярном к их плоскости. В этом отношении их свойства полностью аналогичны свойствам разрывов, представляющих зону горения. Мы видели (§ 122), что отличие устойчивости последних от устойчивости обычных ударных волн связано с наличием одного дополнительного условия (заданное значение потока j), которое должно выполняться на их поверхности. В данном случае тоже имеется одно дополнительное условие — термодинамическое состояние газа l перед скачком должно быть как раз тем, которое соответствует началу быстрой конденсации пара¹⁾. Поэтому мы сразу можем заключить, что весь участок адиабаты под точкой O' , на котором $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, исключается как не соответствующий устойчивым скачкам.

Легко видеть, что не могут реально осуществляться также и скачки, соответствующие участку над точкой O . Такой скачок перемещался бы относительно находящегося перед ним газа со сверхзвуковой скоростью, а потому его возникновение никак не огражалось бы на состоянии этого газа. Это значит, что скачок должен был бы возникнуть вдоль поверхности, заранее определяемой условиями обтекания (поверхность, на которой при непрерывном течении достигались бы необходимые условия начала быстрой конденсации). С другой стороны, скорость скачка относительно остающегося позади него газа в данном случае была бы дозвуковой. Но уравнения дозвукового движения не имеют, вообще говоря, решений, в которых все величины принимают заранее определённые значения на произвольно заданной поверхности²⁾.

Таким образом, оказываются возможными конденсационные скачки всего двух типов: 1) сверхзвуковые скачки (отрезок AO адиабаты), на которых

$$v_1 > c_1, \quad v_2 > c_2, \quad p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1 \quad (123,1)$$

и конденсация сопровождается в них сжатием вещества; 2) дозвуковые скачки (отрезок $A'O'$ адиабаты), на которых

$$v_1 < c_1, \quad v_2 < c_2, \quad p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1 \quad (123,2)$$

и конденсация сопровождается разрежением газа.

Значение потока j («скорости конденсации») монотонно возрастает вдоль отрезка $A'O'$ от точки A' (в которой $j=0$) к точке O' , а вдоль отрезка AO — монотонно падает от A (где $j=\infty$) к O . Интервал же значений j (а с ним и соответствующий интервал значений скорости $v_1 = jV_1$) между теми, которые j принимает в точках O и O' ,

¹⁾ Это условие представляет собой определённое соотношение между давлением и температурой газа l .

²⁾ Аналогичные соображения остаются в силе и в том случае, когда полная скорость v_2 (от которой $v_2 < c_2$ есть нормальная к скачку компонента) является сверхзвуковой.

является «запрещённым» и не может быть осуществлён в конденсационных скачках. Общее количество (масса) конденсирующегося пара обычно весьма мало по сравнению с количеством основного газа. Поэтому можно с одинаковым правом рассматривать оба газа 1 и 2 как идеальные; по этой же причине можно считать одинаковыми теплоёмкости обоих газов. Тогда значение v_1 в точке O определится формулой (120,9), а в точке O' — такой же формулой с обратным знаком перед вторым корнем; положив в этих формулах $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ и введя скорость звука c_1 согласно $c_1^2 = \gamma(\gamma - 1)c_v T_1$, найдём следующий «запрещённый» интервал значений v_1 :

$$\begin{aligned} \sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2} q} - \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2} q} < v_1 < \\ < \sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2} q} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2} q}. \end{aligned} \quad (123,3)$$

ЗАДАЧА

Определить предельные значения отношения давлений p_2/p_1 в конденсационном скачке, считая, что $q/c_1^2 \ll 1$.

Решение. На участке $A'O'$ конденсационной адиабаты (рис. 119) отношение p_2/p_1 монотонно возрастает по направлению от O' к A' , пробегая значения в интервале

$$1 - \gamma \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}} \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 1.$$

На участке же AO это отношение возрастает по направлению от A к O , пробегая значения в интервале

$$1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)q}{c_1^2} \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 1 + \gamma \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}}.$$

ГЛАВА XV

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

§ 124. Тензор энергии-импульса жидкости

Принципиальный интерес имеет установление уравнений движения жидкости в релятивистской механике. Необходимость в учёте релятивистских эффектов может быть связана не только с большой (сравнимой со скоростью света) величиной скорости макроскопического движения жидкости. Мы увидим ниже, что гидродинамические уравнения существенно меняются и в том случае, когда эта скорость не велика, но велики скорости микроскопического движения входящих в состав жидкости частиц.

Прежде всего необходимо установить вид 4-тензора энергии-импульса движущейся жидкости (T_{ik} ¹⁾). Поток импульса через элемент df поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $T_{\alpha\beta}df^3$ есть α -я компонента силы, действующей на элемент поверхности²⁾). Рассмотрим некоторый элемент объёма жидкости и воспользуемся системой отсчёта, в которой этот элемент покоится («собственная» система). В такой системе отсчёта имеет место закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком жидкости одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно

1) Обозначения этой главы соответствуют обозначениям в главах X—XI «Теории поля» (изд. 2-е). Латинские индексы i, k, l, \dots пробегают значения 0, 1, 2, 3, причём $x^0 = ct$ есть вещественная временная координата. Греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ пробегают значения 1, 2, 3. Метрический тензор определяется выражением

$$-ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

для интервала, причём галилеевы значения g_{ik} :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{00} = -1.$$

2) Напомним, что в галилеевых координатах $T_{00} = T^{00} = -T_0^0$ есть плотность энергии, а $\frac{1}{c} T_\alpha^0 = -\frac{1}{c} T_{0\alpha} = \frac{1}{c} T^{0\alpha}$ — плотность компонент импульса; величины же $T_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} = T_\alpha^\beta$ составляют тензор плотности потока импульса.

к площадке, на которую оно производится. Поэтому можно написать

$$T_{\alpha\beta} df^\beta = p df^\alpha,$$

откуда ¹⁾

$$T_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta}.$$

Что касается компонент $T_{0\alpha}$, изображающих плотность импульса, то для данного элемента объёма в его собственной системе отсчёта они равны нулю. Компонента же T_{00} равна «собственной» плотности внутренней энергии жидкости, которую мы будем обозначать в этой главе посредством e .

Таким образом, в собственной системе отсчёта тензор энергии-импульса (для данного участка жидкости) имеет вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}. \quad (124,1)$$

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса жидкости в любой системе отсчёта. Для этого введём 4-скорость u^i движения жидкости. В собственной системе отсчёта данного элемента компоненты его 4-скорости равны $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$. Выражение для T_{ik} , обращающееся в (124,1) при этих значениях u^i , есть

$$T_{ik} = wu_i u_k + pg_{ik}, \quad (124,2)$$

где

$$w = e + p$$

есть тепловая функция единицы объёма ²⁾. Это и есть искомое выражение для тензора энергии-импульса.

Компоненты T_{ik} , написанные в трёхмерном виде, равны

$$T_{\alpha\beta} = \frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{\alpha\beta}, \quad (124,3)$$

$$T_{\alpha 0} = - \frac{wv_\alpha}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \quad T_{00} = \frac{w}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - p = \frac{e + p \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Нерелятивистскому случаю соответствуют малые скорости $v \ll c$ и малые скорости внутреннего (микроскопического) движения частиц

¹⁾ Мы пишем все выражения в ковариантном виде, имея в виду воспользоваться ими и в случае наличия существенных гравитационных полей, т. е. в общей теории относительности.

²⁾ Во всех формулах в этой главе под термодинамическими величинами понимаются их значения в собственной системе отсчёта каждого данного элемента жидкости. Такие величины, как внутренняя энергия, тепловая функция и энтропия, отнесены к единице собственного объёма и обозначаются соответственно e , w , σ .

в жидкости. При совершении предельного перехода следует иметь в виду, что релятивистская внутренняя энергия e содержит в себе также и энергию покоя mc^2 составляющих жидкость частиц (m — масса покоя отдельной частицы). Кроме того, надо учесть, что плотность числа частиц n отнесена к единице собственного объёма; в нерелятивистских же выражениях плотность энергии относится к единице объёма в «лабораторной» системе отсчёта, в которой данный элемент жидкости движется. Поэтому при предельном переходе надо заменить

$$mn \rightarrow \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2},$$

где ρ — обычная нерелятивистская плотность массы. По сравнению с ρc^2 мала как нерелятивистская плотность энергии (обозначим её $\rho\varepsilon$), так и давление.

Имея всё это в виду, найдём, что предельное значение T_{00} равно $T_{00} = \rho c^2 + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}$, т. е. совпадает, за вычетом ρc^2 , с нерелятивистской плотностью энергии. Соответствующее предельное значение тензора $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + \rho \delta_{\alpha\beta},$$

т. е. совпадает, как и следовало, с обычным выражением для плотности потока импульса, который мы обозначали в § 7 посредством $\Pi_{\alpha\beta}$.

Релятивистская плотность импульса $-\frac{1}{c} T_{\alpha 0}$ является в то же время плотностью потока энергии (умноженной на $\frac{1}{c^2}$). Такая простая связь теряется, однако, при переходе к нерелятивистскому пределу благодаря тому, что в нерелятивистскую энергию не включается энергия покоя. Действительно, имеем:

$$-\frac{1}{c} T_{\alpha 0} \cong \rho v_\alpha + \frac{v_\alpha}{c^2} \left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2} \right).$$

Отсюда видно, что предельное значение плотности импульса есть, как и следовало, просто ρv_α ; для плотности же потока энергии $-c T_{\alpha 0}$ имеем, опуская член $\rho c^2 v_\alpha$, выражение $\left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2} \right) v_\alpha$, совпадающее с обычным выражением, полученным в § 6.

§ 125. Релятивистские гидродинамические уравнения

Уравнения движения содержатся, как известно, в уравнениях

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad (125,1)$$

выражающих собой законы сохранения энергии и импульса той физической системы, к которой относится тензор T_{ik} . Воспользовавшись

выражением (124,2) для T_{ik} , мы получим отсюда уравнения движения жидкости; при этом необходимо, однако, дополнительно учесть закон сохранения числа частиц, не содержащийся в уравнениях (125,1).

Выведем уравнение, выражающее сохранение числа частиц в жидкости (уравнение непрерывности). Для этого вводим 4-вектор «тока частиц» n^i . Его временная компонента есть плотность числа частиц, а три пространственные компоненты составляют трёхмерный вектор тока частиц. Очевидно, что вектор n^i должен быть пропорционален 4-скорости u^i , т. е. иметь вид

$$n^i = nu^i, \quad (125,2)$$

где n — скаляр; из определения n ясно, что этот скаляр является не чем иным, как плотностью числа частиц в той системе отсчёта, в которой данный элемент объёма жидкости покоится¹⁾. Уравнение непрерывности получается просто путём приравнивания нулю 4-дивергенции вектора тока²⁾:

$$\frac{\partial (nu^i)}{\partial x^i} = 0. \quad (125,3)$$

Возвратимся теперь к уравнениям (125,1). Дифференцируя выражение (124,2) для тензора энергии-импульса, получим:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial (wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \quad (125,4)$$

Умножим это уравнение на u^i , т. е. «спроектируем» его на направление 4-скорости. Помня, что

$$u_i u^i = -1, \quad u_i \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = 0,$$

находим:

$$-\frac{\partial (wu^k)}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

Переписываем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} nu^k \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} nu^k = 0$$

и в силу уравнения непрерывности (125,3) получаем отсюда:

$$nu^k \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right] = 0.$$

1) При очень высоких температурах в веществе может происходить возникновение новых частиц (например, электронных пар), так что полное число частиц каждого рода будет меняться. В таком случае под n надо понимать, например, число электронов, которое осталось бы после полной аннигиляции всех пар.

2) Ср. уравнение непрерывности электродинамики (см., например, «Теория поля», 2-е изд., § 28).

Но $1/n$ есть не что иное, как молекулярный объём вещества, а w/n — его отнесённая к одной частице тепловая функция. Ввиду термодинамического тождества $d \frac{w}{n} - \frac{1}{n} dp = T d \frac{\sigma}{n}$ (T — температура, σ — отнесённая к единице собственного объёма энтропия) имеем поэтому:

$$n T u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\sigma}{n} = 0,$$

или

$$\frac{d}{ds} \frac{\sigma}{n} = 0, \quad (125,5)$$

где производная берётся вдоль мировой линии движения данного элемента жидкости.

Ввиду уравнения непрерывности (125,3) уравнение (125,5) можно написать также и в виде равенства нулю 4-дивергенции «потока энтропии» σu^i :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sigma u^i = 0. \quad (125,6)$$

Оба эти уравнения выражают собой адиабатичность движения (напомним, что тензор энергии-импульса (124,2) не учитывает процессов внутреннего трения и теплопроводности, т. е. речь идёт о движении идеальной жидкости).

«Спроектируем» теперь уравнение (125,1) на направление, «перпендикулярное» к u^i . Такая проекция вектора $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}$ равна, очевидно,

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + u_i u^k \frac{\partial T_k^l}{\partial x^l};$$

она даёт нуль при скалярном умножении на u^i . Простое вычисление приводит к уравнению

$$w u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \quad (125,7)$$

Три пространственные компоненты этого уравнения представляют собой релятивистское обобщение уравнения Эйлера (временная же компонента есть следствие первых трёх).

В качестве интересного применения рассмотрим распространение звука в веществе с релятивистским уравнением состояния (т. е. в котором давление сравнимо с плотностью внутренней энергии, включающей в себя энергию покоя). Гидродинамические уравнения звуковых волн могут быть линеаризованы; при этом удобнее исходить непосредственно из записи уравнений движения в исходном виде (125,1), а не из эквивалентных им уравнений (125,6) и (125,7). Подставляя выражения (124,3) для компонент тензора энергии-импульса и сохраняя везде лишь величины первого порядка малости по амплитуде

волны, получим систему

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = -w \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \frac{w}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p', \quad (125,8)$$

где штрихом отмечены переменные части величин в волне. Исключив отсюда \mathbf{v} , найдём:

$$\frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'.$$

Наконец, написав $e' = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_{\text{ад}} p'$, получим для p' волновое уравнение со скоростью звука

$$u = c \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_{\text{ад}}} \quad (125,9)$$

(индекс «ад» указывает, что производная должна быть взята для адиабатического процесса, т. е. при постоянном σ/n). Эта формула отличается от соответствующего нерелятивистского выражения тем, что вместо обычной плотности массы здесь стоит e/c^2 .

В ультрарелятивистском случае уравнение состояния всякого вещества гласит, как известно, $p = e/3$. Для скорости звука в этом случае получается значение

$$u = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

в $\sqrt{3}$ раз меньше скорости света.

Наконец, остановимся коротко на гидродинамических уравнениях при наличии существенных гравитационных полей. Они получаются из уравнений (125,6) и (125,7) просто путём замены обычных производных ковариантными:

$$w u^k u_{i;k} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \quad (\sigma u^i)_{;i} = 0. \quad (125,10)$$

Выведем из этих уравнений условие механического равновесия в гравитационном поле. При равновесии гравитационное поле статично; можно выбрать такую систему отсчёта, в которой вещество неподвижно ($u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/\sqrt{-g_{00}}$), все величины не зависят от времени, а смешанные компоненты метрического тензора равны нулю ($g_{0\alpha} = 0$). Пространственные компоненты уравнения (125,10) дают тогда

$$-w \Gamma_{\alpha 0}^0 u^0 u_0 = \frac{1}{2} \frac{w}{g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha},$$

или

$$\frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{-g_{00}}. \quad (125,11)$$

Это и есть искомое уравнение равновесия. В нерелятивистском предельном случае $w \cong \rho c^2$, $-g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ (φ — ньютоновский грави-

тационный потенциал), и уравнение (125,11) переходит в

$$\nabla p = -\rho \nabla \varphi,$$

т. е. в обычное гидростатическое уравнение.

З а д а ч и

1. Найти решение гидродинамических уравнений, описывающее одномерную нестационарную простую волну.

Р е ш е н и е. В простой волне все величины могут быть выражены в виде функций любой одной из них (см. § 94). Написав уравнения движения в виде

$$\frac{\partial T_{00}}{c \partial t} + \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{01}}{c \partial t} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

и считая T_{00} , T_{01} , T_{11} функциями друг от друга, получим соотношение $dT_{00}dT_{11} = (dT_{01})^2$. В него надо подставить

$$T_{00} = \epsilon u_0^2 + \rho u_1^2, \quad T_{01} = \omega u_0 u_1, \quad T_{11} = \epsilon u_1^2 + \rho u_0^2,$$

учитывая при этом, что $u_1^2 - u_0^2 = -1$ (при вычислении удобно ввести параметр η согласно $u_0 = \text{ch } \eta$, $u_1 = \text{sh } \eta$). В результате вычисления получается:

$$\text{Arth } \frac{v}{c} = \pm \frac{1}{c} \int \frac{u}{w} de \quad (2)$$

(u — скорость звука). Далее, из (1) находим:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c \frac{dT_{01}}{dT_{10}}$$

и, вычисляя эту производную, получим:

$$x = t \frac{v \pm u}{1 \pm \frac{uv}{c^2}} + f(v). \quad (3)$$

Формулы (2), (3) и определяют искомое решение.

2. Найти релятивистское обобщение уравнения Бернулли.

Р е ш е н и е. При стационарном движении жидкости все величины не зависят от времени. Пространственные компоненты уравнения (125,7) дают:

$$\frac{w}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v \nabla) \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -c^2 \nabla p - \frac{v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (v \nabla p).$$

Умножив это уравнение скалярно на v/n и воспользовавшись тем, что при постоянной энтропии σ/n имеем $d \frac{e}{n} = -pd \frac{1}{n}$, получим после преобразования:

$$(v \nabla) \frac{w/n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

откуда следует, что вдоль каждой из линий тока постоянна величина

$$\frac{w/n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.}$$

При $v \ll c$ это уравнение переходит в обычное уравнение Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

§ 126. Релятивистские уравнения диссипативных процессов

Установление релятивистских гидродинамических уравнений при наличии диссипативных процессов (вязкости и теплопроводности) сводится к вопросу об определении вида соответствующих дополнительных членов в тензоре энергии-импульса и в векторе плотности потока вещества. Обозначая эти члены соответственно как τ_{ik} и v_i , напишем:

$$T_{ik} = p g_{ik} + w u_i u_k + \tau_{ik}, \quad (126,1)$$

$$n_i = n u_i + v_i. \quad (126,2)$$

Уравнения движения попрежнему содержатся в

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0.$$

Прежде всего, однако, возникает вопрос о более точном определении самого понятия скорости u^i . В релятивистской механике всякий поток энергии неизбежно связан также и с потоком массы. Поэтому при наличии, например, теплового потока определение скорости по потоку массы (как в нерелятивистской гидродинамике) теряет непосредственный смысл. Мы определим здесь скорость условием, чтобы в собственной системе отсчёта каждого данного элемента жидкости его импульс был равен нулю, а его энергия выражалась через другие термодинамические величины теми же формулами, как и при отсутствии диссипативных процессов. Это значит, что в указанной системе отсчёта должны обращаться в нуль компоненты τ_{00} и $\tau_{0\alpha}$ тензора τ_{ik} ; поскольку в этой системе и $u^\alpha = 0$, то имеем в ней (а потому и в любой другой системе) тензорное соотношение

$$\tau_{ik} u^k = 0. \quad (126,3)$$

Аналогичное соотношение

$$v_i u^i = 0 \quad (126,4)$$

должно выполняться и для вектора v_i , поскольку в собственной системе отсчёта компонента n^0 4-вектора потока частиц n^i должна, по определению, совпадать с плотностью числа частиц n .

Искомый вид тензора τ_{ik} и вектора v_i можно установить, исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии. Этот закон должен содержаться в уравнениях движения (подобно тому как в § 2 из этих уравнений получалось для идеальной жидкости условие постоянства энтропии). Путём простых преобразований с использованием уравнения непрерывности легко получить следующее уравнение:

$$u^i \frac{\partial T^k_i}{\partial x^k} = -T \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma u^i) + \mu \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial \tau^k_i}{\partial x^k}$$

($\mu = \frac{w - T\sigma}{n}$ — релятивистский химический потенциал вещества). Наконец, используя соотношение (126,3), это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T} v^i \right) = -v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\mu}{T} - \frac{\tau^k_i}{T} \frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \quad (126,5)$$

Стоящее слева выражение должно представлять собой 4-дивергенцию потока энтропии, а выражение справа — возрастание энтропии вследствие диссипативных процессов. Таким образом, 4-вектор плотности потока энтропии есть

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T} v^i, \quad (126,6)$$

а τ_{ik} и v^i должны выражаться линейно через градиенты скорости и термодинамических величин так, чтобы обеспечить существенную положительность правой стороны уравнения (126,5). Это условие вместе с условиями (126,3) и (126,4) однозначно определяет вид 4-тензора τ_{ik} и 4-вектора v_i :

$$\tau_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + u_k u^l \frac{\partial u_l}{\partial x^i} + u_i u^l \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \right) - \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial u_l}{\partial x^l} (g_{ik} + u_i u_k), \quad (126,7)$$

$$v_i = -\frac{\kappa}{c} \left(\frac{nT}{w} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\mu}{T} + u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\mu}{T} \right]. \quad (126,8)$$

Здесь η , ζ — два коэффициента вязкости, а κ — коэффициент теплопроводности, выбранные в соответствии с их нерелятивистским определением.

В частности, чистой теплопроводности соответствует поток энергии при отсутствии потока вещества. Условие отсутствия потока вещества есть $nu^\alpha + v^\alpha = 0$; тогда для плотности потока энергии имеем с точностью до членов первого порядка по градиентам

$$cT^0_\alpha = c\sigma u^0 u_\alpha = -\frac{c\omega}{n} v_\alpha = -\frac{\kappa n T^2}{w} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\mu}{T}.$$

Используя термодинамическое тождество

$$d \frac{\mu}{T} = - \frac{w}{nT^2} dT + \frac{dp}{nT},$$

получим поток энергии в виде

$$- \kappa \left(\nabla T - \frac{T}{w} \nabla p \right).$$

Мы видим, что в релятивистском случае теплопроводный поток тепла пропорционален не просто градиенту температуры, а определённой комбинации градиентов температуры и давления.

ГЛАВА XVI

ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

§ 127. Основные свойства сверхтекучей жидкости

При температурах, близких к абсолютному нулю, в свойствах жидкости на первый план выдвигаются квантовые эффекты. Фактически в природе существует лишь одно вещество, остающееся жидким вплоть до абсолютного нуля, — гелий; все другие жидкости затвердевают значительно раньше, чем в них становятся заметными квантовые эффекты. При температуре $2,19^\circ\text{K}$ жидкий гелий имеет так называемую λ -точку (фазовый переход второго рода); при температурах ниже этой точки жидкий гелий (гелий II) обладает рядом замечательных свойств, из которых наиболее существенным является открытая *П. Л. Капицей* в 1938 г. сверхтекучесть — свойство протекать по узким капиллярам или щелям, не обнаруживая никакой вязкости¹⁾.

Теория сверхтекучести была развита *Л. Ландау* (1941); здесь мы остановимся лишь на той части этой теории, в которой даётся макроскопическое описание гидродинамических свойств сверхтекучей жидкости.

Отправным пунктом гидродинамики гелия II является следующий основной результат микроскопической теории²⁾. При отличных от нуля температурах гелий II ведёт себя так, как если бы он представлял собой смесь двух различных жидкостей. Одна из них «сверхтекуча» и при движении вдоль твёрдой поверхности не обнаруживает никакой вязкости. Другая же ведёт себя, как обычная «нормальная» вязкая жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися «друг через друга» частями массы жидкости «нет трения», т. е. не происходит передачи импульса от одной из них к другой.

Следует, однако, самым решительным образом подчеркнуть, что рассмотрение жидкости как «смеси» нормальной и сверхтекучей её «частей» является не более чем способом наглядного описания

¹⁾ Сверхтекучим является лишь один из изотопов гелия — изотоп He_4 . Жидкий же изотоп He_3 не становится сверхтекучим ни при каких температурах.

²⁾ «См. Статистическая физика», 3-е изд., §§ 66, 67; см. также обзорную статью: *Е. М. Лифшиц*, УФН **34**, 512, 1948 (или «Дополнение» к книге *В. Кеезома* «Гелий», ИЛ, 1949).

явлений, происходящих в квантовой жидкости. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не вполне адекватно. В действительности надо говорить, что в квантовой жидкости—гелии II—может существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей «эффektивной массой» (так что сумма обеих этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений «нормально», т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной вязкой жидкости; другое же—«сверхтекуче». Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому. В определённом смысле можно говорить о сверхтекучей и нормальной частях массы жидкости, но это отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части.

Лишь имея в виду все эти оговорки относительно истинного характера происходящих в гелии II явлений, можно пользоваться терминами «сверхтекучая часть» и «нормальная часть» жидкости как наглядным способом краткого описания этих явлений. Мы, однако, будем предпочитать пользоваться более точными терминами «сверхтекучее движение» и «нормальное движение», не ассоциируя их с компонентами «смеси» двух «частей» жидкости.

Представление о двух видах движения даёт простое объяснение наблюдающимся на опыте основным свойствам течения гелия II. Отсутствие вязкости при протекании гелия II по узкой щели объясняется тем, что в щели имеет место сверхтекучее движение жидкости, не обнаруживающее трения; можно сказать, что «нормальная часть» задерживается в сосуде, протекая через щель несравненно медленнее, со скоростью, соответствующей её вязкости и ширине щели. Напротив, измерение вязкости гелия II по затуханию крутильных колебаний погружённого в жидкость диска должно давать отличные от нуля значения: вращение диска создаёт вокруг него нормальное движение жидкости, останавливающее диск благодаря свойственной этому движению вязкости. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру или щели обнаруживается сверхтекучее движение жидкости, а в опытах с вращением диска в гелии II обнаруживается её нормальное движение. В особенности наглядно существование двух движений жидкости проявляется при вращении вокруг своей оси цилиндрического сосуда, наполненного гелием II. Стенки вращающегося сосуда, создавая нормальное движение жидкости, увлекают за собой лишь часть массы жидкости, сверхтекучая же масса остаётся неподвижной. В результате полный момент инерции I вращающегося сосуда будет меньше момента инерции I_0 , вычисленного в предположении, что вся масса жидкости вращается вместе с сосудом, и измерение отношения I/I_0 даёт возможность непосредственного определения нормальной и сверхтекучей частей массы жидкости; такие измерения были впервые осуществлены Э. Л. Андроникашвили (1946).

Помимо отсутствия вязкости, сверхтекучее движение жидкости обладает ещё и следующими двумя важнейшими свойствами: оно не

сопровождается переносом тепла и всегда потенциально. Оба эти свойства тоже следуют из микроскопической теории, согласно которой нормальное движение жидкости представляет собой в действительности движение «газа возбуждений»; напомним, что коллективное тепловое движение атомов квантовой жидкости можно рассматривать как совокупность отдельных «элементарных возбуждений», ведущих себя как некоторые «квазичастицы», движущиеся в занимаемом жидкостью объеме и обладающие определёнными импульсами и энергиями.

Энтропия гелия II определяется статистическим распределением элементарных возбуждений. Поэтому при всяком движении жидкости, при котором «газ» квантов возбуждения остаётся неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии. Это и значит, что сверхтекучее движение не сопровождается переносом энтропии, или, другими словами, не переносит тепла. Отсюда в свою очередь следует, что течение гелия II, при котором имеет место лишь сверхтекучее движение, является термодинамически обратимым. Это обстоятельство было действительно обнаружено в опытах П. Л. Капицы.

Перенос тепла нормальным движением жидкости представляет собой механизм теплопередачи в гелии II. Он имеет, таким образом, своеобразный конвективный характер, принципиально отличный от обычной теплопроводности. Всякая разность температур в гелии II приводит к возникновению в нём внутренних нормальных и сверхтекучих движений; при этом оба потока (сверхтекучий и нормальный) могут компенсировать друг друга по количеству переносимой ими массы, так что никакого реального макроскопического переноса массы в жидкости может и не быть.

В дальнейшем мы будем обозначать скорости сверхтекучего и нормального движений соответственно как v_s и v_n . Описанный механизм переноса тепла означает, что плотность потока энтропии равна произведению $v_n \rho s$ скорости v_n на энтропию единицы объема жидкости (s — энтропия, отнесённая к единице её массы). Плотность потока тепла получается соответственно умножением потока энтропии на T , т. е. равна

$$\mathbf{q} = \rho T s v_n. \quad (127,1)$$

Свойство потенциальности сверхтекучего движения выражается равенством

$$\text{rot } v_s = 0, \quad (127,2)$$

которое должно иметь место в любой момент времени во всём объеме жидкости. Это свойство является макроскопическим выражением той особенности энергетического спектра гелия II, которая лежит в основе микроскопической теории сверхтекучести: элементарные возбуждения, обладающие большой длиной волны (т. е. малыми импульсами и энергиями), являются звуковыми квантами — фононами. Поэтому

макроскопическая гидродинамика сверхтекучего движения не должна допускать никаких других колебаний, кроме звуковых, что и обеспечивается условием (127,2).

В силу потенциальности сверхтекучее движение жидкости не оказывает никакой силы на стационарно обтекаемое твёрдое тело (парадокс Даламбера; см. § 11). Напротив, нормальное движение приводит к возникновению действующей на обтекаемое тело силы сопротивления. Если движение жидкости таково, что сверхтекучий и нормальный потоки массы взаимно компенсируются, то мы получим весьма своеобразную картину: на погружённое в гелий II тело будет действовать сила, в то время как никакого суммарного переноса массы жидкости нет (такой случай был фактически наблюден П. Л. Капицей).

§ 128. Термомеханический эффект

Так называемый термомеханический эффект в гелии II заключается в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание; наоборот, в месте втекания гелия из капилляра в другой сосуд наблюдается охлаждение¹⁾. Это явление естественным образом объясняется тем, что движение вытекающей через капилляр жидкости в основном сверхтекуче и потому не уносит с собой тепла, так что имеющееся в сосуде тепло распределяется на меньшее количество гелия II. При втекании гелия в сосуд имеет место обратное явление.

Легко найти количество тепла Q , поглощающееся при втекании в сосуд через капилляр 1 г гелия. Втекающая жидкость не приносит с собой энтропии. Для того чтобы находящийся в сосуде гелий остался при своей температуре T , надо было бы сообщить ему количество тепла Ts так, чтобы скомпенсировать уменьшение приходящейся на единицу массы энтропии благодаря введению 1 г гелия с равной нулю энтропией. Это значит, что при втекании 1 г гелия в сосуд с гелием при температуре T поглощается количество тепла

$$Q = Ts. \quad (128,1)$$

Наоборот, при вытекании 1 г гелия из сосуда с гелием при температуре T выделяется количество тепла Ts .

Рассмотрим теперь два сосуда с гелием II при температурах T_1 и T_2 , причём сосуды соединены друг с другом тонким капилляром.

¹⁾ Весьма слабый термомеханический эффект должен, строго говоря, иметь место и в обычных жидкостях; аномальным у гелия II является большая величина этого эффекта. Термомеханический эффект в обычных жидкостях представляет собой необратимое явление типа термоэлектрического эффекта Пельтье (фактически такой эффект наблюдается в разрежённых газах). Такого рода эффект должен существовать и в гелии II, однако в этом случае он перекрывается значительно превосходящим его описанным ниже другим эффектом, специфическим для гелия II и не имеющим ничего общего с необратимыми явлениями типа эффекта Пельтье.

Благодаря возможности свободного сверхтекучего перетекания по капилляру быстро установится механическое равновесие жидкости в обоих сосудах. Поскольку, однако, сверхтекучее движение не переносит тепла, тепловое равновесие (при котором температуры гелия в обоих сосудах сравниваются) установится лишь значительно позднее.

Условие механического равновесия легко написать, воспользовавшись тем, что установление этого равновесия происходит согласно предыдущему при постоянных энтропиях s_1 и s_2 гелия в обоих сосудах. Если ϵ_1 и ϵ_2 — внутренние энергии единицы массы гелия при температурах T_1 и T_2 , то условие механического равновесия (условие минимума энергии), осуществляемого сверхтекучим перетеканием жидкости, будет

$$\left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial N}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial \epsilon_2}{\partial N}\right)_{s_2},$$

где N — число атомов в 1 г гелия. Но производная $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial N}\right)_s$ есть химический потенциал μ . Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2) \quad (128,2)$$

(p_1, p_2 — давления в обоих сосудах).

В дальнейшем мы будем понимать под химическим потенциалом μ не термодинамический потенциал, отнесённый к одной частице (атому), как это обычно принято, а термодинамический потенциал, отнесённый к единице массы гелия; оба определения отличаются лишь постоянным множителем — массой атома гелия.

Если давления p_1, p_2 малы, то, разлагая по их степеням и помня, что $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T$ есть удельный объём (слабо зависящий от температуры), получаем:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} s dT,$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$. Если мала также и разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то, разлагая по степеням ΔT и замечая, что $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p = -s$, получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho s. \quad (128,3)$$

Поскольку $s > 0$, то и $\Delta p/\Delta T > 0$. Соотношение (128,3) было подтверждено опытами *П. Л. Капицы*.

§ 129. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Мы перейдём теперь к выводу полной системы гидродинамических уравнений, которые описывают движение гелия II макроскопическим (феноменологическим) образом. Согласно изложенным выше представлениям речь идёт о составлении уравнений движения, описывающегося в каждой точке не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями v_s и v_n . Оказывается, что искомая система уравнений может быть получена вполне однозначным образом, исходя из одних только требований, налагаемых принципом относительности Галилея и необходимыми законами сохранения (причём используются также свойства движения, выражаемые уравнениями (127,1) и (127,2)).

Следует иметь в виду, что фактически гелий II теряет свойство сверхтекучести при достаточно больших скоростях движения. Это явление «критических скоростей» до настоящего времени ещё совершенно недостаточно изучено как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении, и его природа не ясна. Однако ввиду самого факта существования критических скоростей уравнения гидродинамики гелия II обладают реальным физическим смыслом лишь для не слишком больших скоростей v_s и v_n . Тем не менее мы проведём сначала вывод этих уравнений, не делая никаких предположений о скоростях v_s и v_n , так как при пренебрежении высшими степенями скоростей теряется возможность последовательного вывода уравнений, исходя из законов сохранения. Переход к физически интересному случаю малых скоростей будет произведён в получающихся окончательных уравнениях.

Обозначим посредством j плотность потока массы жидкости; эта величина является в то же время импульсом единицы её объёма (ср. примечание на стр. 231). Напишем j в виде суммы

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n \quad (129,1)$$

потоков, связанных соответственно с сверхтекучим и нормальным движениями. Коэффициенты ρ_s и ρ_n можно назвать сверхтекучей и нормальной плотностями жидкости. Их сумма равна истинной плотности ρ гелия II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \quad (129,2)$$

Величины ρ_s и ρ_n являются, разумеется, функциями температуры; ρ_n обращается в нуль при абсолютном нуле, когда гелий II «целиком сверхтекуч»¹⁾, а ρ_s обращается в нуль в λ -точке, когда жидкость становится «целиком нормальной». Следует также иметь в виду, что величины ρ_n и ρ_s зависят, вообще говоря, также и от самих скоростей

¹⁾ Если гелий II содержит примесь постороннего вещества (например, изотопа He₃), то ρ_n остаётся отличным от нуля и при 0° К.

движения¹⁾; лишь при малых скоростях этой зависимостью можно пренебречь и считать ρ_n и ρ_s функциями только от температуры (и давления).

Плотность ρ и поток \mathbf{j} должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (129,3)$$

выражающему закон сохранения массы. Закон сохранения импульса представляется уравнением вида

$$\frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (129,4)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса.

Мы не будем рассматривать пока диссипативных процессов в жидкости; тогда движение обратимо и должна сохраняться также и энтропия жидкости. Имея в виду, что «поток энтропии» равен $\rho s \mathbf{v}_n$, напомним уравнение сохранения энтропии в виде

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s \mathbf{v}_n) = 0. \quad (129,5)$$

К уравнениям (129,3)—(129,5) должно ещё быть добавлено уравнение, определяющее производную по времени от скорости \mathbf{v}_s . Это уравнение должно быть составлено таким образом, чтобы обеспечить сохранение со временем потенциальности движения: это значит, что производная $\dot{\mathbf{v}}_s$ должна выражаться в виде градиента некоторого скаляра. Мы напомним это уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0, \quad (129,6)$$

где μ — некоторый скаляр.

Уравнения (129,4) и (129,6) приобретут реальный смысл, разумеется, лишь после того, как будет установлен вид пока не определённых величин Π_{ik} и μ . Для этой цели надо использовать закон сохранения энергии и соображения, основанные на принципе относительности Галилея. Именно, необходимо, чтобы гидродинамические уравнения (129,3)—(129,6) автоматически приводили к выполнению закона сохранения энергии, выражающегося уравнением вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (129,7)$$

где E — энергия единицы объёма жидкости и \mathbf{Q} — плотность потока энергии. Принцип же относительности Галилея даёт возможность

¹⁾ Точнее — от разности скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$; перенос жидкости как целого со скоростью $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$ не может, конечно, влиять на её термодинамические свойства.

определить зависимость всех величин от одной из скоростей (\mathbf{v}_s) при заданном значении относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ обоих одновременно происходящих в жидкости движений.

Введём наряду с исходной системой координат K ещё и другую систему, K_0 , в которой скорость сверхтекучего движения данного элемента жидкости равна нулю. Система K_0 движется относительно системы K со скоростью, равной скорости \mathbf{v}_s сверхтекучего движения в исходной системе. Значения всех величин в системе K связаны с их же значениями в системе K_0 (которые мы отличаем индексом нуль) следующими известными из механики формулами преобразования¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \\ E &= \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \mathbf{v}_s + E_0, \\ \mathbf{Q} &= \left(\frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \mathbf{v}_s + E_0 \right) \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_0 + (\Pi_0 \mathbf{v}_s) + \mathbf{Q}_0, \\ \Pi_{ik} &= \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \Pi_{0ik} \end{aligned} \right\} (129,8)$$

(здесь $(\Pi_0 \mathbf{v}_s)$ обозначает вектор с компонентами $\Pi_{0ik} v_{sk}$).

В системе K_0 данный элемент жидкости совершает лишь одно движение — нормальное движение со скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Поэтому все относящиеся к этой системе величины \mathbf{j}_0 , E_0 , \mathbf{Q}_0 , Π_{0ik} могут зависеть лишь от разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, а не от каждой из скоростей \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_s в отдельности; в частности, векторы \mathbf{j}_0 и \mathbf{Q}_0 должны быть направлены вдоль вектора $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ (поток массы \mathbf{j}_0 равен просто $\mathbf{j}_0 = = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$). Таким образом, формулы (129,8) определяют зависимость искомым величин от \mathbf{v}_s при заданном $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

Энергия E_0 , рассматриваемая как функция от ρ , s и импульса \mathbf{j}_0 единицы объёма жидкости, удовлетворяет термодинамическому тождеству

$$dE_0 = \mu d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) d\mathbf{j}_0, \quad (129,9)$$

где μ — химический потенциал (термодинамический потенциал единицы массы). Первые два члена соответствуют обычному термодина-

¹⁾ Эти формулы являются непосредственным следствием принципа относительности Галилея и потому справедливы вне зависимости от того, о какой именно конкретной системе идёт речь. Их можно вывести, рассмотрев, например, обычную жидкость. Так, в обычной гидродинамике тензор плотности потока импульса есть $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$. Скорость жидкости \mathbf{v} в системе K связана со скоростью \mathbf{v}_0 в системе K_0 посредством $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, где \mathbf{u} — скорость системы K_0 относительно системы K . Подстановка в Π_{ik} даёт

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k} + \rho v_{0i} u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k.$$

Введя $\Pi_{0ik} = p \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k}$ и $\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_0$, получим указанную в тексте формулу преобразования для тензора Π_{ik} . Остальные формулы получаются аналогичным образом.

мическому тождеству для неподвижной жидкости при постоянном (здесь равном единице) объёме, а последний член выражает тот факт, что производная от энергии по импульсу есть скорость движения.

Дальнейших довольно громоздких вычислений мы не будем приводить здесь, ограничившись лишь указанием их хода. В уравнение сохранения энергии (129,7) подставляем E и Q из (129,8), производную $\frac{\partial E_0}{\partial t}$ вычисляем с помощью тождества (129,9). Если после этого исключить все производные по времени ($\dot{\rho}$, $\dot{\mathbf{v}}_s$ и др.) с помощью гидродинамических уравнений (129,3)—(129,6), то уравнение сохранения энергии должно удовлетвориться тождественно. Если учесть, что потоки Q_0 , Π_{0ik} и скаляр μ в уравнении (129,6) должны зависеть лишь от термодинамических переменных и от скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, но не от каких-либо градиентов этих величин (поскольку мы не рассматриваем диссипативных процессов), то оказывается, что тождественного удовлетворения закона сохранения энергии можно добиться лишь при вполне определённом выборе выражений для указанных величин.

При этом оказывается, что скаляр μ совпадает с химическим потенциалом жидкости (имея это в виду, мы заранее обозначили его соответствующей буквой), а окончательные выражения для плотности потока энергии и тензора плотности потока импульса гласят:

$$Q = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) \mathbf{j} + T \rho_s \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (129,10)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}, \quad (129,11)$$

где

$$p = -E_0 + T \rho_s + \mu \rho + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (129,12)$$

Выражение для Π_{ik} имеет вид, являющийся естественным обобщением формулы $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$ обычной гидродинамики. При этом величину p , определённую формулой (129,12), естественно рассматривать как давление жидкости¹⁾.

Уравнения (129,3)—(129,6) с определениями \mathbf{j} и Π_{ik} согласно (129,10) и (129,11) представляют собой искомую полную систему

1) Обычное термодинамическое определение давления как средней силы, действующей на единичную площадку, относится к неподвижной среде. В обычной гидродинамике тем не менее не возникает вопроса об определении понятия давления (если не учитываются диссипативные процессы), так как всегда можно перейти к системе координат, в которой данный элемент объёма жидкости покоится. В гидродинамике же сверхтекучей жидкости надлежащим выбором системы координат можно исключить лишь одно из двух одновременно происходящих движений, и потому обычное определение давления вообще не может быть применено.

В полностью покоящейся жидкости определение (129,12) совпадает, разумеется, с обычным определением, так как при этом, по самому определению химического потенциала, $\mu \rho + T \rho_s - E_0 = p$.

гидродинамических уравнений¹⁾. Она очень сложна прежде всего ввиду того, что входящие в уравнения величины ρ_s , ρ_n , μ и т. д. являются функциями скоростей (точнее, разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$); вид этих функций может быть, принципиально, определен лишь исходя из микроскопической теории.

Уравнения, однако, сильно упрощаются в физически интересном случае не слишком больших скоростей²⁾.

Прежде всего в этом случае можно пренебречь, как уже было указано, зависимостью ρ_n и ρ_s от скоростей; выражение (129,1) для потока \mathbf{j} представляет собой при этом по существу первые члены разложения этой величины по степеням \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_n . Разложение по степеням скоростей надо произвести и для остальных термодинамических величин, входящих в уравнения.

Выберем в качестве независимых термодинамических переменных давление и температуру. Термодинамическое тождество для химического потенциала гласит:

$$d\mu = -s dT + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_n}{\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$$

(его можно получить, дифференцируя выражение (129,12) и используя тождество (129, 9)). Отсюда видно, что первые два члена разложения μ по степеням разности скоростей имеют вид

$$\mu(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \mu(p, T) - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (129,13)$$

где в правой стороне равенства стоят обычные химический потенциал $\mu(p, T)$ и плотность $\rho(p, T)$ неподвижной жидкости. Дифференцируя это выражение по температуре и давлению, найдём соответствующие разложения для энтропии и плотности

$$s(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx s(p, T) + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (129,14)$$

$$\rho(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \rho(p, T) + \frac{\rho^2}{2} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}. \quad (129,15)$$

Эти выражения и должны быть подставлены в гидродинамические уравнения, которые после этого будут справедливы с точностью до членов второго порядка по скоростям включительно.

Остановимся коротко на вопросе о диссипативных членах в гидродинамических уравнениях сверхтекучей жидкости. Вид этих членов ограничен лишь условиями, налагаемыми законом возрастания энтропии и принципом симметрии кинетических коэффициентов. Подробный

¹⁾ Система гидродинамических уравнений может быть установлена в общем виде и для смесей гелия II с посторонним веществом (таковым фактически может являться изотоп He_3) при произвольных концентрациях смеси. Это было сделано И. М. Халатниковым (ЖЭТФ 23, 169, 1952).

²⁾ Малой величиной предполагается отношение скоростей к скорости распространения «второго звука»; см. § 130.

анализ, произведённый *И. М. Халатниковым*¹⁾, показывает, что имеется всего пять независимых диссипативных коэффициентов (вместо трёх коэффициентов η , ζ , κ в обычной жидкости). Именно, имеется один коэффициент «первой вязкости» η , связанный с нормальным движением и вполне аналогичный вязкости обычной жидкости. Кроме того, в поток импульса Π_{ik} , а также в выражение, стоящее под знаком градиента в уравнении (129,6), входят дополнительные члены, пропорциональные $\text{div } \mathbf{v}_n$ и $\text{div} [\rho_s (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]$; из четырёх коэффициентов пропорциональности в этих членах два оказываются равными друг другу в силу принципа симметрии кинетических коэффициентов, так что всего имеется три различных коэффициента «второй вязкости», ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Наконец, в правой стороне энтропийного уравнения (129,5) появляется член вида $\frac{1}{T} \text{div} (\kappa \nabla T)$ с коэффициентом κ , формально аналогичным коэффициенту теплопроводности обычной жидкости, а также члены, квадратичные по градиентам скоростей и представляющие собой эффекты связанного с вязкостью нагревания (ср. уравнение (49,5) обычной гидродинамики).

Граничные условия к гидродинамическим уравнениям сверхтекучей жидкости заключаются в следующем. Прежде всего на всякой (неподвижной) твёрдой поверхности должна обращаться в нуль перпендикулярная к этой поверхности компонента потока массы \mathbf{j} . Для выяснения граничных условий, налагаемых на \mathbf{v}_n , надо вспомнить, что нормальное движение есть в действительности движение «газа» элементарных тепловых возбуждений в нём. При движении вдоль твёрдой поверхности кванты возбуждения взаимодействуют с ней, что должно быть описано макроскопически как «прилипание» нормальной части массы жидкости к стенке, подобно тому как это имеет место для обычных вязких жидкостей. Другими словами, на твёрдой поверхности должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости \mathbf{v}_n .

Что касается перпендикулярной к стенке компоненты \mathbf{v}_n , то надо иметь в виду, что кванты возбуждения могут поглощаться или испускаться твёрдым телом — это соответствует просто теплопередаче между жидкостью и твёрдым телом. Поэтому перпендикулярная к стенке компонента скорости \mathbf{v}_n не должна непременно обращаться в нуль; граничное условие требует лишь непрерывности перпендикулярной к стенке компоненты потока тепла. Температура же испытывает на границе скачок, пропорциональный тепловому потоку: $\Delta T = Kq$, с коэффициентом пропорциональности, зависящим от свойств как жидкости, так и твёрдого тела. Появление этого скачка связано с особенностями теплопередачи в гелии II. Всё теплоспротивление между твёрдым телом и жидкостью сконцентрировано в пристеночном слое жидкости, поскольку конвективное распространение тепла в объёме

1) См. ЖЭТФ 23, 265, 1952.

жидкости практически не связано с каким бы то ни было теплосопротивлением; в результате весь перепад температуры, вызывающий появление теплового потока, происходит практически у самой поверхности.

Интересным свойством описанных граничных условий является то, что теплообмен между твёрдым телом и движущейся жидкостью приводит к появлению тангенциальных сил, действующих на поверхность тела. Если ось x направлена по нормали, а ось y — по касательной к поверхности, то действующая на единицу площади касательная сила равна компоненте Π_{xy} тензора потока импульса. Имея в виду, что на поверхности должно быть $j_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$, находим для этой силы отличное от нуля выражение

$$\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx} (v_{ny} - v_{sy}).$$

Вводя тепловой поток $q = \rho_s T v_n$, можно переписать эту силу в виде

$$\Pi_{xy} = \frac{\rho_n}{\rho_s T} q_x (v_{ny} - v_{sy}),$$

где q_x — непрерывный на поверхности тепловой поток из твёрдого тела в жидкость.

При отсутствии теплопередачи между твёрдой стенкой и жидкостью граничное значение перпендикулярной к стенке компоненты v_n тоже обращается в нуль. Граничные условия $j_x = 0$ и $v_n = 0$ (ось x направлена по нормали к поверхности) эквивалентны условиям $v_{sx} = 0$ и $v_n = 0$. Другими словами, в этом случае мы получим обычные граничные условия идеальной жидкости для v_s и вязкой жидкости — для v_n .

Рассмотрим, наконец, такие движения гелия II, при которых его можно считать несжимаемой жидкостью, как это обычно имеет место для всякого рода обтеканий. Будем при этом учитывать также и вязкость нормального движения жидкости. Для этого надо прибавить в тензоре Π_{ik} член, выражающийся обычным образом через коэффициент вязкости η и производные от скорости v_n по координатам

$$\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho_s v_{st} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} - \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} \right); \quad (129,16)$$

для несжимаемой жидкости коэффициенты «второй вязкости» выпадают. Диссипативные же члены в энтропийном уравнении являются в данном случае малыми величинами высшего порядка и могут быть опущены. Считая плотности ρ_n , ρ_s и энтропию s постоянными, имеем из уравнения (129,5) $\text{div } v_n = 0$, а из (129,3) $\text{div } j = 0$, или, иначе:

$$\text{div } v_s = \text{div } v_n = 0.$$

Имея в виду эти равенства и подставляя (129,16) в (129,4), получим

уравнение

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}_n. \quad (129,17)$$

Уравнение же (129,6) остаётся неизменным.

Поскольку сверхтекучее движение потенциально, то можно ввести потенциал скорости согласно $\mathbf{v}_s = \nabla \varphi_s$ и ввиду $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0$ потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_s = 0. \quad (129,18)$$

Вводя φ_s в уравнение (129,17) и написав $(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla \frac{v_s^2}{2}$, получим:

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s \nabla \frac{v_s^2}{2} + \rho_s \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}_n.$$

Введём в качестве двух вспомогательных величин «давления» нормального и сверхтекучего движений p_n и p_s согласно уравнению

$$p = p_0 + p_n + p_s, \quad (129,19)$$

где p_0 — давление на бесконечности, а p_s определяется обычной для идеальной жидкости формулой

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}. \quad (129,20)$$

Уравнение для скорости \mathbf{v}_n приобретает тогда вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n} \nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n} \Delta \mathbf{v}_n. \quad (129,21)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением Навье-Стокса для жидкости с плотностью ρ_n и вязкостью η (и соответственно кинематической вязкостью η/ρ_n).

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II сводится к двум задачам обычной гидродинамики для идеальной и для вязкой жидкостей. Именно, сверхтекучее движение определяется уравнением Лапласа (129,18) с граничным условием для нормальной производной $\frac{\partial \varphi_s}{\partial n}$, как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Далее, нормальное движение определяется уравнением Навье-Стокса (129,21) с таким же граничным условием для \mathbf{v}_n (при отсутствии теплообмена между стенкой и жидкостью), как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем по формуле (129,19).

Задачи

1. Между концами капилляра с гелием II поддерживается малая разность температур ΔT . Определить тепловой поток, распространяющийся вдоль капилляра.

Решение. Согласно формуле (128,3) перепад давления между обоими концами капилляра $\Delta p = \rho s \Delta T$. Этот перепад создаёт в капилляре нормальное

движение, средняя (по сечению) скорость которого равна

$$\bar{v}_n = \frac{R^2 \Delta p}{8\eta l}$$

(R — радиус, l — длина капилляра, η — вязкость нормального движения; ср. формулу (17,10)). Полный тепловой поток равен

$$\bar{\rho} s \bar{v}_n \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T}{8\eta l}.$$

В обратном направлении возникает сверхтекучее движение, скорость которого определяется условием отсутствия суммарного переноса массы:

$$v_s = - \frac{\rho_n}{\rho_s} \bar{v}_n.$$

2. Вывести формулу, определяющую распределение температуры в потоке несжимаемого гелия II.

Решение. Написав в уравнении (129,6) (с μ из (129,13)) $v_s = \nabla \varphi_s$ и интегрируя, получим:

$$\mu(p, T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (v_n - v_s)^2 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \text{const.}$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости малы, и с точностью до членов первого порядка пишем:

$$\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + \frac{1}{\rho}(p - p_0)$$

(T_0, p_0 — температура и давление на бесконечности). Подставляя это выражение в написанный интеграл уравнения и вводя p_n и p_s , получим:

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s} \left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(v_n - v_s)^2}{2} \right].$$

§ 130. Распространение звука в сверхтекучей жидкости

Применим уравнения гидродинамики гелия II к распространению звука в этой жидкости. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда систему гидродинамических уравнений можно линеаризовать — в (129,11) и (129,13), (129,14) пренебрегаем квадратичными по скорости членами, а в уравнении (129,5) можно вынести в члене $\text{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$ энтропию ρs из-под знака div (поскольку этот член уже содержит малую величину v_n). Таким образом, система гидродинамических урав-

ний приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (130,1)$$

$$\frac{\partial (s\rho)}{\partial t} + s\rho \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad (130,2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (130,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (130,4)$$

Дифференцируя (130,1) по времени и подставляя (130,3), получаем:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (130,5)$$

Согласно термодинамическому тождеству $d\mu = -s dT + \frac{1}{\rho} dp$ имеем:

$$\nabla p = \rho s \nabla T + \rho \nabla \mu.$$

Подставляя сюда ∇p из (130,3) и $\nabla \mu$ из (130,4), получим:

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho s \nabla T = 0.$$

Применяем к этому уравнению операцию div , а для $\operatorname{div} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$ подставляем выражение

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s s} \frac{\partial s}{\partial t},$$

следующее из равенства

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (s\rho)}{\partial t} - \frac{s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{s}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{s\rho_s}{\rho} \operatorname{div} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T. \quad (130,6)$$

Уравнения (130,5) и (130,6) определяют распространение звука в сверхтекучей жидкости. Уже из того факта, что этих уравнений — два, видно, что существуют две скорости распространения звука.

Напишем s , p , ρ , T в виде $s = s_0 + s'$, $p = p_0 + p'$ и т. д., где буквы со штрихом представляют собой малые изменения соответствующих величин в звуковой волне, а величины с индексом нуль (который мы ниже для краткости опускаем) — их постоянные равновесные значения. Тогда можно написать:

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} T', \quad s' = \frac{\partial s}{\partial p} p' + \frac{\partial s}{\partial T} T',$$

и уравнения (130,5) и (130,6) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{s^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой p' и T' пропорциональны множителю $e^{-i\omega(t-x/u)}$ (скорость звука обозначаем здесь посредством u). В качестве условия совместности обоих уравнений получаем уравнение

$$u^4 \frac{\partial(s, \rho)}{\partial(T, p)} - u^2 \left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0$$

(где $\frac{\partial(s, \rho)}{\partial(T, p)}$ обозначает якобиан преобразования от s, ρ к T, p).

Путём простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0 \quad (130,7)$$

(c_v — теплоёмкость единицы массы). Это квадратное (по u^2) уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии II. При $\rho_s = 0$ один из корней этого уравнения обращается в нуль и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука $u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$.

Фактически теплоёмкости c_p и c_v гелия II при всех температурах очень близки друг к другу (ввиду малости коэффициента теплового расширения). Согласно известной термодинамической формуле в этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s.$$

Обозначив общее значение c_p и c_v посредством c , а общее значение $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ просто как $\frac{\partial p}{\partial \rho}$, получим из уравнения (130,7) следующие выражения для скоростей звука:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c \rho_n}}. \quad (130,8)$$

Одна из них, u_1 , почти постоянна, а другая, u_2 , сильно зависит от температуры, обращаясь вместе с ρ_s в нуль в λ -точке¹⁾.

При самых низких температурах, когда почти все «элементарные возбуждения» в жидкости являются фононами, величины ρ_n , c и s

¹⁾ Вопрос о распространении звука в растворах посторонних частиц в гелии II рассмотрен в работах: И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 19, 43, 1949 (случай малой концентрации раствора); И. М. Халатников, ЖЭТФ 23, 265 (общие формулы для произвольной концентрации смеси).

связаны друг с другом соотношениями ¹⁾).

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT}{3u_1^2} \rho,$$

а $\rho_s \cong \rho$. Подставив эти выражения в формулу (130,8) для u_2 , найдём:

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорости u_1 и u_2 стремятся к постоянному пределу, причём так, что их отношение стремится к $\sqrt{3}$.

Для лучшего выяснения физической природы обоих видов звуковых волн в гелии II рассмотрим плоскую звуковую волну (Е. Лифшиц, 1944). В такой волне скорости v_s , v_n и переменные части T' , p' температуры и давления пропорциональны друг другу. Введём коэффициенты пропорциональности согласно

$$v_n = av_s, \quad p' = bv_s, \quad T' = cv_s. \quad (130,9)$$

Простое вычисление с помощью уравнений (130,1) — (130,6), произведённое с должной степенью точности, даёт для «первого звука»

$$a_1 = 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \frac{\beta T u_1^3}{c(u_1^2 - u_2^2)}, \quad (130,10)$$

а для «второго звука»

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{s\rho_n} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_2 = \frac{\beta\rho u_1^3 u_2^3}{s(u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{s}; \quad (130,11)$$

здесь $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ — коэффициент теплового расширения; ввиду его малости величины, содержащие β , малы по сравнению с соответствующими величинами, не содержащими β .

Мы видим, что в звуковой волне первого типа $v_n \approx v_s$, т. е. в такой волне в каждом элементе объёма жидкость колеблется в первом приближении как целое; нормальная и сверхтекучая массы движутся вместе. Естественно, что эти волны соответствуют обычным звуковым волнам в обычных жидкостях.

В волне же второго типа имеем $v_n \approx -\frac{\rho_s}{\rho_n} v_s$, т. е. полная плотность потока вещества

$$\mathbf{j} = \rho_s v_s + \rho_n v_n \approx 0.$$

Таким образом, в волне «второго звука» сверхтекучая и нормальная массы жидкости колеблются «навстречу друг другу», так что в первом приближении их «центр инерции» в каждом элементе объёма

¹⁾ См. «Статистическая физика», 3-е изд., §§ 66, 67.

остаётся неподвижным и суммарный поток вещества отсутствует. Ясно, что этот вид волн специфичен для сверхтекучей жидкости.

Между обоими видами волн имеется и другое существенное отличие, видное из формул (130,10) и (130,11). В звуковой волне обычного звука амплитуда колебаний давления относительно велика, а амплитуда колебаний температуры мала. Напротив, в волне «второго звука» относительная амплитуда колебаний температуры велика по сравнению с относительной амплитудой колебаний давления. В этом смысле можно сказать, что волны второго звука представляют собой своеобразные незатухающие «температурные волны»¹⁾.

В приближении, в котором тепловое расширение пренебрегается вовсе, волны второго звука представляют собой чисто температурные колебания ($c_j = 0$), а волны первого звука — колебания давления ($c_{v_s} = v_n$). Соответственно их уравнения движения полностью разделяются: в уравнении (130,6) пишем $s' = \frac{c}{T} T'$ и получаем:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = u_2^2 \Delta T',$$

а в уравнении (130,5) полагаем $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p'$ и получаем:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = u_1^2 \Delta p'.$$

Вопрос о различных способах возбуждения звуковых волн в гелии II был рассмотрен *Е. М. Лифшицем* (1944). Оказывается (см. задачи к этому параграфу), что обычные механические способы возбуждения звука (колеблющимися твёрдыми телами) крайне невыгодны для получения второго звука в том смысле, что интенсивность излучаемого второго звука ничтожна по сравнению с интенсивностью одновременно излучаемого обычного звука. В гелии II возможны, однако, ещё и другие, специфические для него способы возбуждения звуковых волн. Таково излучение звука твёрдыми телами с периодически меняющейся температурой; интенсивность излучаемого второго звука оказывается здесь большой по сравнению с интенсивностью первого звука, что естественно ввиду указанного выше различия в характере колебаний температуры в этих волнах. В связи с этими теоретическими результатами *В. П. Пешковым* (1945) были поставлены опыты, впервые приведшие к экспериментальному доказательству существования второго звука в гелии II.

Задачи

1. Определить отношение интенсивностей излучения первого и второго звуков плоскостью, совершающей колебания в перпендикулярном к себе направлении.

¹⁾ Они не имеют, разумеется, ничего общего с затухающими «температурными волнами» в обычной теплопроводящей среде (§ 52).

Решение. Ищем скорости v_s (направленные по нормальной к плоскости оси x) в «первой» и «второй» излучаемых волнах соответственно в виде

$$v_{s1} = A_1 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u_1} \right), \quad v_{s2} = A_2 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u_2} \right).$$

На поверхности колеблющейся плоскости скорости v_s и v_n должны быть равными скорости её колебаний (которую обозначим посредством $v_0 \cos \omega t$). Это даёт уравнения

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = v_0$$

(коэффициенты a_1, a_2 — из (130,10) и (130,11)). Средняя (по времени) плотность энергии в звуковой волне в гелии II равна

$$\rho_s \overline{v_s^2} + \rho_n \overline{v_n^2} = \frac{1}{2} A^2 (\rho_s + \rho_n a^2);$$

поток энергии (интенсивность) получается последующим умножением на соответствующую скорость звука u . Для отношения интенсивностей излучаемых волн «второго» и «первого» звуков получаем:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2 (\rho_s + \rho_n a_2^2) u_2}{A_1^2 (\rho_s + \rho_n a_1^2) u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}$$

(здесь предположено, что $u_2 \ll u_1$, что справедливо вплоть до очень низких температур). Это отношение весьма мало.

2. То же для излучения звука от поверхности с периодически меняющейся температурой.

Решение. Достаточно написать граничное условие $j=0$, которое должно иметь место на неподвижной поверхности. Оно даёт

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \approx \frac{s}{\beta u_2^2}.$$

Для отношения интенсивностей находим:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{c}{T \beta^2 u_1 u_2}.$$

Это отношение весьма велико.

3. Определить скорость перемещения точек профиля бегущей одномерной волны второго звука большой амплитуды и скорость распространения разрывов, возникающих в волне в результате деформирования профиля (И. М. Халатников, 1952).

Решение. В одномерной бегущей волне все величины (ρ, p, T, v_s, v_n) могут быть выражены в виде функций от одного параметра, в качестве которого может быть выбрана, например, одна из этих величин (ср. § 94).

Скорость U перемещения точки профиля волны равна производной $\frac{dx}{dt}$, взятой при определённом значении этого параметра. Производные по координате и времени от каждой величины связаны друг с другом соотношением $\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x}$. Производные от величин по параметру обозначаем ниже штрихом.

Вместо скоростей v_s и v_n вводим для удобства величины $v = j/\rho$ и $w = v_n - v_s$ и выбираем такую систему координат, в которой скорость v в данной точке профиля волны равна нулю. Гидродинамические уравнения (129,3) — (129,6) (с Π_{ik}, μ, ρ, s из формул (129,11), (129,13) — (129,15))

приводят к следующей системе уравнений:

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial p} p' - U \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \omega \omega' + \rho v' = 0, \quad (1)$$

$$p' + 2 \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} \omega \omega' - U \rho v' = 0, \quad (2)$$

$$\left[-\rho U \frac{\partial s}{\partial T} + \omega \frac{\partial}{\partial T} (\rho_s s) \right] T' + s \omega \frac{\partial \rho_s}{\partial p} p' + \left[\rho_s s - U \omega \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] \omega' = 0, \quad (3)$$

$$\left[-\rho s + U \omega \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] T' + \left[1 + U \omega \rho \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] p' + \left[\rho_n U - \frac{\rho_n \rho_s}{\rho} \omega \right] \omega' - \\ - [U \rho + \omega \rho_n] v' = 0. \quad (4)$$

Здесь опущены все члены выше второго порядка малости, а также все члены, содержащие коэффициент теплового расширения.

В волне второго звука относительная амплитуда колебаний p и v мала по сравнению с амплитудами T и ω ; поэтому можно опустить также и члены, содержащие $\omega p'$, $\omega v'$. Для определения U достаточно рассмотреть уравнение (3) и разность уравнений (2) и (4); условие совместности получающихся таким образом двух линейных уравнений для T' и ω' приводит к квадратному уравнению

$$\rho_n U^2 \frac{\partial s}{\partial T} - U \omega \left[\frac{4 \rho_s \rho_n}{\rho} \frac{\partial s}{\partial T} - 2s \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] - \rho_s s^2 = 0,$$

откуда

$$U = u_2 + \omega \left(\frac{2 \rho_s}{\rho} - \frac{s T}{\rho_n c} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right).$$

Здесь u_2 есть местное значение скорости второго звука, меняющееся от точки к точке профиля волны вместе с отклонением δT температуры от ее равновесного значения. Разлагая u_2 по степеням δT , получим:

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \frac{\rho_n u_2}{\rho s} \omega,$$

где u_{20} — равновесное значение u_2 . Окончательно получим:

$$U = u_{20} + \omega \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{u_{20}^3 c}{T}. \quad (5)$$

При достаточно сильном изменении профиля волны в ней возникают разрывы (ср. §§ 94, 95) — в данном случае температурные разрывы. Скорость распространения разрыва равна полусумме скоростей U с обеих сторон разрыва, т. е. равна

$$c_{20} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{u_{20}^3 c}{T},$$

где ω_1 , ω_2 — значения ω на обеих сторонах разрыва.

Коэффициент при ω в выражении (5) может быть как положительным, так и отрицательным. В зависимости от этого точки с большими значениями ω либо опережают, либо отстают от точек с меньшими значениями ω , а разрыв соответственно возникает либо на переднем, либо на заднем фронте волны (в противоположность обычному звуку, где ударная волна возникает всегда на переднем фронте).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Тензор деформации

Механика твёрдых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание так называемой теории упругости.

Под влиянием приложенных сил твёрдые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объём. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется её радиус-вектором \mathbf{r} (с компонентами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определённую точку тела; если её радиус-вектор до деформирования был \mathbf{r} , то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение \mathbf{r}' (с компонентами x'_i). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, который мы обозначим посредством \mathbf{u} :

$$u_i = x'_i - x_i. \quad (1,1)$$

Вектор \mathbf{u} называется вектором деформации (или вектором смещения). Координаты x'_i смещённой точки являются, конечно, функциями от координат x_i той же точки до её смещения. Поэтому и вектор деформации u_i является функцией координат x_i . Задание вектора \mathbf{u} как функции от x_i полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был dx_i , то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет $dx'_i = dx_i + du_i$. Само расстояние между точками было равно до деформирования

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}.$$

Согласно общему правилу написания сумм¹⁾ мы можем написать:

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Подставляя $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, переписываем dl'^2 в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Поскольку во втором члене справа производится суммирование по обоим индексам i и k , то можно написать:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

В третьем же члене поменяем местами индексы i и l . Тогда мы получим окончательно dl'^2 в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \quad (1,2)$$

где тензор u_{ik} определяется посредством

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1,3)$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела.

Тензор u_{ik} называется тензором деформации. Из его определения видно, что он симметричен, т. е.

$$u_{ik} = u_{ki}. \quad (1,4)$$

Так получилось потому, что мы написали в dl'^2 член $2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$ в явно симметричном виде $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$.

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат, — главные оси тензора, — в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только «диагональные» компоненты u_{11} , u_{22} , u_{33} . Эти компоненты, — главные значения тензора деформации, — обозначим посредством $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$. Надо, конечно, помнить, что если тензор u_{ik} приведён

¹⁾ Следуя обычному правилу, мы везде опускаем знаки суммирования по векторным и тензорным индексам; по всем дважды повторяющимся (в данном выражении) индексам везде подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3.

к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведён в данной точке к главным осям, то в окружающем её элементе объёма элемент длины (1,2) приобретает вид

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объёма тела деформацию можно рассматривать как совокупность трёх независимых деформаций по трём взаимно перпендикулярным направлениям — главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина dx_i вдоль первой из главных осей превращается в длину $dx'_i = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} dx_i$ и аналогично для двух других осей. Величины $\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$ представляют собой, следовательно, относительные удлинения $\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i}$ вдоль этих осей.

Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации u_i , то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев¹⁾, при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трёхмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не являются специально малыми ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в главе II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях u_i

1) Кроме деформаций тонких стержней сюда относятся изгибы тонких пластинок в цилиндрическую поверхность.

мало, и потому в общем выражении (1,3) мы можем теперь пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1,5)$$

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)},$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора u_{ik} .

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема dV и определим его величину dV' после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины dx_1, dx_2, dx_3 вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx'_1 = (1 + u^{(1)}) dx_1$ и т. д. Объем dV есть произведение $dx_1 dx_2 dx_3$, объем же dV' равен $dx'_1 dx'_2 dx'_3$. Таким образом,

$$dV' = dV(1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}).$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}).$$

Но сумма $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$.

Таким образом,

$$dV' = dV(1 + u_{ii}). \quad (1,6)$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации представляет собой относительное изменение объема $\frac{dV' - dV}{dV}$.

Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведём здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах r, θ, φ имеем:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, & 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, & (1,7) \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах r, φ, z :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1,8)$$

§ 2. Тензор напряжений

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объём, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объём со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется, и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нём возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нём отсутствуют.

Внутренние напряжения обуславливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным «радиусом действия». Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояния порядка междумолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с междумолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обуславливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «ближкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих её частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части.

Необходимо сделать здесь следующую оговорку: сделанное утверждение не справедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нём макроскопических электрических полей (пиро- и пьезоэлектрические тела). В этой книге, однако, мы не будем рассматривать свойств таких тел.

Выделим в теле какой-нибудь объём и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила

равна сумме всех сил, действующих на каждый из элементов рассматриваемого объёма, т. е. может быть представлена в виде объёмного интеграла

$$\int \mathbf{F} dV,$$

где \mathbf{F} есть сила, действующая на единицу объёма тела, так что на элемент объёма dV действует сила $\mathbf{F} dV$. С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объёма, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объём со стороны окружающих его частей тела. Но согласно сказанному выше эти силы действуют на рассматриваемый объём через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объёма, т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Таким образом, для любого объёма тела каждая из трёх компонент $\int F_i dV$ равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объёма. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объёму может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор F_i должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е. иметь вид

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2,1)$$

Тогда сила, действующая на некоторый объём, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей данный объём¹⁾:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (2,2)$$

где df_i — компоненты вектора $d\mathbf{f}$ элемента поверхности, направленного, как всегда, по внешней нормали к поверхности²⁾.

1) Согласно теореме Остроградского интеграл по замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по охватываемому этой поверхностью объёму путём замены элемента поверхности df_i оператором $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$.

2) Строго говоря, при определении полной силы, действующей на деформированный объём тела, интегрирование должно производиться не по ста-

Тензор σ_{ik} называется тензором напряжений. Как видно из (2,2), $\sigma_{ik} df_k$ есть i -я компонента силы, действующей на элемент поверхности df . Выбирая элементы поверхности в плоскостях $x, y; y, z; x, z$, находим, что компонента σ_{ik} тензора напряжений есть i -я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k . Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x , действует нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx} .

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы $\sigma_{ik} df_k$. В (2,2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объём со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объём действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$-\oint \sigma_{ik} df_k,$$

где интеграл берётся по поверхности тела, а df направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объём тела. Момент силы \mathbf{F} можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами $F_i x_k - F_k x_i$, где x_i — координаты точки приложения силы¹⁾. Поэтому момент сил, действующих на элемент объёма dV , есть $(F_i x_k - F_k x_i) dV$, а на весь объём действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV.$$

Как и полная сила, действующая на любой объём, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объёма. Подставляя для F_i выражение (2,1), находим:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV. \end{aligned}$$

рым координатам x_i , а по координатам x'_i точек деформированного тела. Соответственно этому и производные (2,1) должны были бы браться по x'_i . Однако ввиду малости деформаций производные по x_i и x'_i отличаются друг от друга на величины высших порядков малости, и потому можно все дифференцирование производить по координатам x_i .

¹⁾ Момент силы \mathbf{F} определяется как векторное произведение $[\mathbf{F}\mathbf{r}]$; из векторного анализа известно, что компоненты векторного произведения двух векторов составляют антисимметрический тензор второго ранга, написанный в тексте,

Во втором члене замечаем, что производные от одной координаты по другой равны единице, если обе координаты одинаковы, или нулю, если координаты разные (три координаты являются независимыми переменными). Таким образом, $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$, где δ_{kl} есть единичный тензор; при умножении на σ_{ik} он даёт $\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$, $\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$. В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; по формуле Остроградского этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности. В результате находим:

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV.$$

Для того чтобы M_{ik} было выражено в виде интеграла только по поверхности, необходимо, чтобы второй член здесь тождественно исчезал, т. е. должно быть $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$, или

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (2,3)$$

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что тензор напряжений является симметрическим тензором. Момент сил, действующих на некоторый объём тела, может быть написан теперь в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l. \quad (2,4)$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного всестороннего сжатия тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. Если обозначить это давление посредством p , то на элемент поверхности df_i действует сила $-p df_i$. С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид $\sigma_{ik} df_k$. Написав $-p df_i$ в виде $-p \delta_{ik} df_k$, мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (2,5)$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению.

В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, «скальвающие», напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объёма тела, т. е. должно быть

$F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2,6)$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма $\mathbf{F} + \rho \mathbf{g}$ сил внутренних напряжений и силы тяжести $\rho \mathbf{g}$, действующей на единицу объёма тела (ρ — плотность¹⁾, \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \quad (2,7)$$

Что касается внешних сил, приложенных непосредственно к поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть \mathbf{P} есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности df действует сила $\mathbf{P} df$. В равновесии она должна компенсироваться силой — $\sigma_{ik} df_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \quad (2,8)$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь ещё формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2,6) на x_k и проинтегрируем по всему объёму тела:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l} dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0.$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором замечаем, что $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$. Получаем:

$$\oint \sigma_{il} x_k df_l - \int \sigma_{ik} dV = 0.$$

Подставляя в первый интеграл (2,8), находим

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = V \overline{\sigma_{ik}},$$

¹⁾ Строго говоря, плотность тела при его деформировании меняется. Учёт этого изменения приводит, однако, в случае малых деформаций к величинам высших порядков малости и потому для нас несущественен.

где V — объём тела, а $\bar{\sigma}_{ik}$ — среднее по всему объёму значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df. \quad (2,9)$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнения равновесия.

§ 3. Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации u_i изменяется на малую величину δu_i . Определим работу, производимую при этом силами внутренних напряжений. Умножая силу $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ на перемещение δu_i и интегрируя по всему объёму тела, имеем:

$$\int \delta R dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV.$$

Посредством δR мы обозначили работу сил внутренних напряжений в единице объёма тела. Интегрируя по частям и используя формулу Остроградского, получаем:

$$\int \delta R dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV.$$

Рассматривая неограниченную среду, не деформированную на бесконечности, стремим поверхность интегрирования в первом интеграле к бесконечности; тогда на ней $\sigma_{ik} = 0$, и интеграл исчезает. Второй же интеграл можно, воспользовавшись симметрией тензора σ_{ik} , переписать в виде

$$\begin{aligned} \int \delta R dV &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = - \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV. \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем написать:

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (3,1)$$

Эта формула определяет работу δR по изменению тензора деформации.

Если деформация тела достаточно мала, то по прекращении действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Такие деформации называют упругими. При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации,—

остаётся, как говорят, некоторая остаточная деформация, так что состояние тела отличается от того, в котором оно находилось до начала действия сил. Такие деформации называют пластическими. В дальнейшем мы будем рассматривать только упругие деформации.

Предположим далее, что процесс деформирования совершается настолько медленно, что в каждый момент времени в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент находится (фактически это условие почти всегда выполняется). Тогда, как известно, процесс будет термодинамически обратимым.

Условимся относить в дальнейшем все такие термодинамические величины, как энтропия S , внутренняя энергия \mathcal{E} и т. п. к единице объёма тела ¹⁾ (а не к единице массы, как мы делали в гидродинамике) и обозначать их соответствующими большими буквами.

Бесконечно малое изменение $d\mathcal{E}$ внутренней энергии равно разности полученного данной единицей объёма тела количества тепла и произведённой силами внутренних напряжений работы dR . Количество тепла равно при обратимом процессе TdS , где T — температура. Таким образом, $d\mathcal{E} = TdS - dR$; взяв dR из (3,1), получим:

$$d\mathcal{E} = TdS + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3,2)$$

Это есть термодинамическое тождество для деформируемых тел.

При равномерном всестороннем сжатии тензор напряжений равен $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2,5). В этом случае

$$\sigma_{ik} du_{ik} = -p\delta_{ik} du_{ik} = -p du_{ii}.$$

Но мы видели (см. (1,6)), что сумма u_{ii} представляет собой относительное изменение объёма при деформировании. Если рассматривать единицу объёма, то u_{ii} будет, следовательно, просто изменением этого объёма, а du_{ii} — элементом dV этого изменения. Термодинамическое тождество принимает тогда обычный вид:

$$d\mathcal{E} = TdS - p dV.$$

Вводя вместо энергии \mathcal{E} свободную энергию тела $F = \mathcal{E} - TS$, находим термодинамическое тождество в виде

$$dF = -SdT + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3,3)$$

¹⁾ По этому поводу необходимо сделать следующее замечание. Строго говоря, надо различать между единицей объёма тела до и после деформирования; эти объёмы содержат, вообще говоря, различные количества вещества. Все термодинамические величины мы будем в дальнейшем всегда относить к единице объёма недеформированного тела, т. е. к заключённому в нём количеству вещества, которое после деформирования может занять несколько отличный от первоначального объём. Соответственно этому, например, полная энергия тела получается всегда интегрированием \mathcal{E} по объёму недеформированного тела.

Наконец, термодинамический потенциал Φ тела определяется как

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik} u_{ik} = F - \sigma_{ik} u_{ik}. \quad (3,4)$$

Это является обобщением обычного выражения $\Phi = \mathcal{E} - TS + pV$ ¹⁾. Подставляя (3,4) в (3,3), находим:

$$d\Phi = -S dT - u_{ik} d\sigma_{ik}. \quad (3,5)$$

Независимыми переменными в (3,2) и (3,3) являются соответственно S , u_{ik} и T , u_{ik} . Компоненты тензора напряжений можно получить, дифференцируя \mathcal{E} или F по компонентам тензора деформаций, соответственно при постоянной энтропии S или температуре T :

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T. \quad (3,6)$$

Аналогично, дифференцируя Φ по компонентам σ_{ik} , можно получить компоненты u_{ik} :

$$u_{ik} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}} \right)_T. \quad (3,7)$$

§ 4. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела F как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию в ряд по степеням u_{ik} . При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, в § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения; см. подробнее следующий параграф). Тогда при $u_{ik} = 0$ должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть $\sigma_{ik} = 0$. Поскольку $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$, то отсюда следует, что в разложении F по степеням u_{ik} должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, то и каждый член в разложении F тоже должен быть скаляром. Из

¹⁾ При всестороннем сжатии выражение (3,4) переходит в

$$\Phi = F + p u_{ii} = F + p (V - V_0),$$

где $V - V_0$ — изменение объема в результате деформации. Отсюда видно, что принимаемое нами здесь определение Φ отличается от применяемого обычно в термодинамике $\Phi = F + pV$ членом $-pV_0$.

компонент симметрического тензора u_{ik} можно составить два независимых скаляра второй степени; в качестве них можно выбрать квадрат u_{ii}^2 суммы диагональных компонент и сумму u_{ik}^2 квадратов всех компонент тензора u_{ik} . Разлагая F в ряд по степеням u_{ik} , мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \quad (4,1)$$

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины λ и μ называются коэффициентами Ламэ.

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой u_{ii} . Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называются сдвигом.

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остается подобным самому себе. В § 1 мы видели, что тензор такой деформации имеет вид $u_{ik} = \text{const.} \delta_{ik}$. Такая деформация называется всесторонним сжатием.

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}. \quad (4,2)$$

Первый член справа представляет собой, очевидно, чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных членов равна нулю (напомним, что $\delta_{ii} = 3$). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

В качестве общего выражения для свободной энергии деформированного изотропного тела удобно написать вместо (4,1) другое, воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие. Именно, выберем в качестве двух независимых скаляров второй степени суммы квадратов компонент соответственно первого и второго членов в (4,2), т. е. величины $\left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2$ и u_{ii}^2 . Тогда F будет иметь вид 1)

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ii}^2. \quad (4,3)$$

Величины K и μ называются соответственно модулем всестороннего сжатия и модулем сдвига. K связано с коэффици-

1) Постоянный член F_0 — свободная энергия недеформированного тела — в дальнейшем не будет нас интересовать. Поэтому мы будем для краткости всего опускать его, подразумевая под F одну только интересующую нас свободную энергию деформации или, как говорят, упругую свободную энергию.

ентами Ламе посредством

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (4,4)$$

В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия, как известно, минимальна. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то F как функция от u_{ik} должно иметь минимум при $u_{ik} = 0$. Это значит, что квадратичная форма (4,3) должна быть положительна. Если выбрать тензор u_{ik} таким, что $u_{ll} = 0$, то в (4,3) останется только первый член; если же выбрать тензор вида $u_{ik} = \text{const. } \delta_{ik}$, то останется только второй член. Отсюда следует, что необходимым (и, очевидно, достаточным) условием положительности формы (4,3) является положительность каждого из коэффициентов K и μ .

Таким образом, мы приходим к результату, что модули сжатия и сдвига всегда положительны:

$$K > 0, \quad \mu > 0. \quad (4,5)$$

Воспользуемся теперь общим термодинамическим соотношением (3,6) и определим с его помощью тензор напряжений. Для вычисления производных $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ напишем полный дифференциал dF (при постоянной температуре). Имеем:

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) d \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right).$$

Во втором члене умножение первой скобки на δ_{ik} даёт нуль, так что остаётся

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) du_{ik}$$

или, написав du_{ll} в виде $\delta_{ik} du_{ik}$:

$$dF = \left[Ku_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) \right] du_{ik}.$$

Отсюда имеем для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right). \quad (4,6)$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, в частности, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между σ_{ik} и u_{ik} определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Нетрудно получить и обратные формулы, выражающие u_{ik} через σ_{ik} . Для этого найдём сумму диагональных членов σ_{ii} . Поскольку для

второго члена (4,6) эта сумма обращается в нуль, то $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$, или

$$u_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii}. \quad (4,7)$$

Подставляя это выражение в (4,6) и определяя отсюда u_{ik} , находим:

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ii} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ii} \right), \quad (4,8)$$

что и определяет тензор деформации по тензору напряжений.

Равенство (4,7) показывает, что относительное изменение объёма u_{ii} при всякой деформации изотропного тела зависит только от суммы σ_{ii} диагональных компонент тензора напряжений, причём связь между u_{ii} и σ_{ii} определяется только модулем всестороннего сжатия. При всестороннем (равномерном) сжатии тела тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. Поэтому в этом случае имеем из (4,7):

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \quad (4,9)$$

Поскольку деформации малы, то u_{ii} и p являются малыми величинами, и мы можем написать отношение $\frac{u_{ii}}{p}$ относительного изменения объёма к давлению в дифференциальном виде $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$. Таким образом,

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

Величина $\frac{1}{K}$ называется коэффициентом всестороннего сжатия (или просто коэффициентом сжатия).

Из (4,8) мы видим, что тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik} . Другими словами, деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называется законом Гука¹⁾.

Приведём ещё полезную форму выражения для свободной энергии деформированного тела, получающуюся непосредственно из квадратичности F по тензору деформации. Согласно теореме Эйлера имеем:

$$u_{ik} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

откуда ввиду того, что $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \sigma_{ik}$:

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2}. \quad (4,10)$$

¹⁾ Фактически закон Гука применим практически ко всем упругим деформациям. Дело в том, что деформации обычно перестают быть упругими ещё тогда, когда они настолько малы, что закон Гука является достаточно хорошим приближением (исключением являются тела типа резины).

Если в эту формулу подставить u_{ik} , выраженные в виде линейных комбинаций компонент σ_{ik} , то упругая энергия будет представлена как квадратичная функция величин σ_{ik} . Снова применяя теорему Эйлера, будем иметь:

$$\sigma_{ik} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F,$$

и сравнение с (4,10) показывает, что

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (4,11)$$

Следует, однако, подчеркнуть, что, в то время как формула $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ является общим термодинамическим соотношением, справедливость обратной формулы (4,11) связана с выполнением закона Гука.

§ 5. Однородные деформации

Рассмотрим несколько простейших случаев так называемых однородных деформаций, т. е. деформаций, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела. Однородной деформацией является, например, уже рассмотренное нами равномерное всестороннее сжатие.

Рассмотрим теперь так называемое простое растяжение (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; сила, действующая на единицу поверхности, пусть будет p .

Поскольку деформация однородна, т. е. u_{ik} постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор напряжений σ_{ik} , а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий (2,8). На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку единичный вектор n на боковой поверхности перпендикулярен к оси z , т. е. имеет только компоненты n_x, n_y , то отсюда следует, что все компоненты σ_{ik} за исключением только σ_{zz} равны нулю. На поверхности концов стержня имеем $\sigma_{zi}n_i = p$, откуда

$$\sigma_{zz} = p.$$

Из общего выражения (4,8), связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты u_{ik} с $i \neq k$ равны нулю. Для остальных компонент находим:

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p. \quad (5,1)$$

Компонента u_{zz} определяет относительное удлинение стержня вдоль оси z . Коэффициент при p называют коэффициентом растя-

жения, а обратную величину — модулем растяжения (или модулем Юнга) E :

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \quad (5,2)$$

где

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}. \quad (5,3)$$

Компоненты u_{xx} и u_{yy} определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называется коэффициентом Пуассона σ ¹⁾:

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \quad (5,4)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (5,5)$$

Поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K=0$) до $\frac{1}{2}$ (при $\mu=0$). Таким образом²⁾,

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (5,6)$$

Наконец, относительное увеличение объема стержня при его растяжении равно

$$u_{ii} = p \frac{1}{3K}. \quad (5,7)$$

Свободную энергию растянутого стержня можно написать, воспользовавшись непосредственно формулой (4,10). Поскольку от нуля отлична только компонента σ_{zz} , то $F = \frac{1}{2} \sigma_{zz} u_{zz}$, откуда

$$F = \frac{p^2}{2E}. \quad (5,8)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, как это обычно принято, величинами E и σ вместо модулей K и μ . Обращая формулы (5,3) и

¹⁾ Обозначение коэффициента Пуассона посредством σ , а компонент тензора напряжений посредством σ_{ik} не может привести к недоразумениям, поскольку последние в отличие от первого всегда имеют индексы.

²⁾ Фактически коэффициент Пуассона меняется только в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$. В природе не известно тел, у которых было бы $\sigma < 0$, т. е. которые бы испытывали увеличение поперечных размеров при продольном растяжении. Укажем также, что неравенству $\sigma > 0$ соответствует $\lambda > 0$, где λ есть коэффициент Ламэ, входящий в (4,1); другими словами, фактически всегда положительны оба члена не только в выражении (4,3), но и в (4,1), хотя это и не является необходимым с точки зрения термодинамики. Близкие к $\frac{1}{2}$ значения σ (например, у резины) соответствуют модулю сдвига, малому по сравнению с модулем сжатия.

(5,5), имеем ¹⁾:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \quad (5,9)$$

Выпишем здесь общие формулы предыдущего параграфа с коэффициентами, выраженными через E и σ . Для свободной энергии имеем:

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii}^2 \right). \quad (5,10)$$

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii} \delta_{ik} \right). \quad (5,11)$$

Обратно:

$$u_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ii} \delta_{ik}]. \quad (5,12)$$

Поскольку формулами (5,11) и (5,12) приходится постоянно пользоваться, выпишем их здесь для удобства в расписанном по компонентам виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz} \end{aligned} \quad (5,13)$$

и обратные формулы:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\ u_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (5,14)$$

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его

1) Второй коэффициент Ламэ

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}.$$

основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы опять выберем в качестве оси z . Такую деформацию называют односторонним сжатием. Поскольку стержень деформируется только вдоль оси z , то из всех компонент u_{ik} от нуля отлична только u_{zz} . Из (5,11) имеем теперь:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}.$$

Обозначая опять сжимающую силу посредством p ($\sigma_{zz} = p$; p отрицательно при сжатии), имеем:

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p. \quad (5,15)$$

Коэффициент при p называется коэффициентом одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (5,16)$$

Наконец, для свободной энергии стержня имеем:

$$F = p^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \quad (5,17)$$

§ 6. Деформации с изменением температуры

Рассмотрим теперь деформации, сопровождающиеся изменением температуры тела; изменение температуры может происходить как в результате самого процесса деформирования, так и по посторонним причинам.

Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре T_0 . Если тело находится при температуре T , отличной от T_0 , то даже при отсутствии внешних сил оно будет, вообще говоря, деформировано в связи с наличием теплового расширения. Поэтому в разложение свободной энергии $F(T)$ будут входить не только квадратичные, но и линейные по тензору деформации члены. Из компонент тензора второго ранга u_{ik} можно составить всего только одну линейную скалярную величину — сумму u_{ii} его диагональных компонент. Далее мы будем предполагать, что сопровождающее деформацию изменение $T - T_0$ температуры мало. Тогда можно считать, что коэффициент при u_{ii} в разложении F (который должен обращаться в нуль при $T = T_0$) просто пропорционален разности $T - T_0$. Таким образом, получим для свободной энергии следующую формулу (заменяющую (4,3)):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha (T - T_0) u_{ii} + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ii}^2, \quad (6,1)$$

где коэффициент при $T - T_0$ написан в виде $-K\alpha$. Величины μ , K , α надо считать здесь постоянными; учёт их зависимости от температуры привёл бы к величинам высшего порядка малости.

Дифференцируя F по u_{ik} , получим тензор напряжений. Имеем:

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \quad (6,2)$$

Первый член здесь представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры тела. При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать. Приравнивая σ_{ik} нулю, найдём, что u_{ik} имеет вид $\text{const. } \delta_{ik}$, причём

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \quad (6,3)$$

Но u_{ll} представляет собой относительное изменение объёма при деформации. Таким образом, α является не чем иным, как коэффициентом теплового расширения тела.

Среди различных (в термодинамическом смысле) типов деформаций существенны изотермические и адиабатические деформации. При изотермических деформациях температура тела не меняется. Соответственно этому в (6,1) надо положить $T = T_0$, и мы возвращаемся к обычным формулам; коэффициенты K и μ можно поэтому назвать «изотермическими модулями».

Адиабатическими являются деформации, при которых не происходит обмена теплом между различными участками тела, а также, конечно, и между телом и окружающей средой. Энтропия S остаётся при этом постоянной. Как известно, энтропия равна производной $-\frac{\partial F}{\partial T}$ от свободной энергии по температуре. Дифференцируя выражение (6,1), находим с точностью до членов первого порядка по u_{ik}

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \quad (6,4)$$

Приравнивая S постоянной, можно было бы определить изменение $T - T_0$ температуры при деформации, которое оказалось бы, таким образом, пропорциональным u_{ll} . Подставляя это выражение для $T - T_0$ в (6,2), мы получили бы для σ_{ik} выражение обычного типа

$$\sigma_{ik} = K_{\text{ад}}u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) \quad (6,5)$$

с тем же модулем сдвига μ , но с другим модулем сжатия $K_{\text{ад}}$. Связь адиабатического модуля $K_{\text{ад}}$ с обычным, изотермическим, модулем K можно, однако, найти и без этого вычисления, непосредственно с помощью известной термодинамической формулы

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{C_p}$$

(C_p — теплоёмкость при постоянном давлении, отнесённая к единице объёма тела). Если понимать под V объём, занимаемый веществом, находившимся до деформации в единице объёма тела, то производные $\frac{\partial V}{\partial T}$ и $\frac{\partial V}{\partial p}$ определяют относительные изменения объёма соответственно при нагревании и при сжатии. Другими словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{1}{K_{ад}}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Таким образом, получаем для связи между адиабатическими и изотермическими модулями:

$$\frac{1}{K_{ад}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{ад} = \mu. \quad (6,6)$$

Для «адиабатических» модуля растяжения и коэффициента Пуассона легко получаем следующие соотношения:

$$E_{ад} = \frac{E}{1 - E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}, \quad \sigma_{ад} = \frac{\sigma + E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}{1 - E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}. \quad (6,7)$$

В реальных случаях величина $\frac{ET\alpha^2}{C_p}$ обычно мала, и потому с достаточной точностью можно писать:

$$\dot{E}_{ад} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{ад} = \sigma + (1 + \sigma)E \frac{T\alpha^2}{9C_p}. \quad (6,8)$$

При изотермической деформации тензор напряжений выражается в виде производных от свободной энергии:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

При постоянной же энтропии надо писать (см. (3,6)):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

где \mathcal{E} — внутренняя энергия. Соответственно этому при адиабатических деформациях и выражение, аналогичное (4,3), определяет не свободную энергию, а просто внутреннюю энергию единицы объёма тела:

$$\mathcal{E} = \frac{K_{ад}}{2} u_{ii}^2 + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ii} \delta_{ik} \right)^2. \quad (6,9)$$

§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел

Выведем теперь уравнения равновесия изотропных твёрдых тел. Для этого надо подставить в общие уравнения (2,7)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

выражение (5,11) для тензора напряжений. Имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, получим уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \quad (7,1)$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$ являются компонентами вектора Δu ,

а $\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \equiv \text{div } u$. Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } u = -\rho g \frac{2(1+\sigma)}{E}. \quad (7,2)$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\text{grad div } u = \Delta u + \text{rot rot } u.$$

Тогда (7,2) приобретает вид

$$\text{grad div } u - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } u = -\rho g \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (7,3)$$

Мы пишем уравнения равновесия в однородном поле сил тяжести, имея в виду, что последние являются наиболее обычными в теории упругости «объёмными» силами. При наличии каких-либо иных объёмных сил вектор ρg в правой стороне уравнения должен быть заменён соответствующей другой «плотностью» объёмных сил.

Наиболее существен случай, когда деформация вызывается не объёмными силами, а силами, приложенными к поверхности тела. Тогда уравнение равновесия гласит:

$$(1-2\sigma) \Delta u + \text{grad div } u = 0 \quad (7,4)$$

или в другом виде

$$2(1-\sigma) \text{grad div } u - (1-2\sigma) \text{rot rot } u = 0. \quad (7,5)$$

Внешние силы входят в решение только через посредство граничных условий.

Применяя к уравнению (7,4) операцию div и помня, что $\text{div grad} \equiv \Delta$, находим:

$$\Delta \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (7,6)$$

т. е. величина $\text{div } \mathbf{u}$ (определяющая изменение объема при деформации) является гармонической функцией. Применяя же к уравнению (7,4) оператор Лапласа Δ , получим теперь:

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (7,7)$$

т. е. в равновесии вектор деформации удовлетворяет так называемому бигармоническому уравнению. Эти результаты остаются в силе и в однородном поле тяжести (при операциях дифференцирования правая сторона уравнения (7,2) исчезает), но они не справедливы в общем случае переменных вдоль тела объёмных внешних сил.

Тот факт, что вектор деформации удовлетворяет бигармоническому уравнению, не означает, разумеется, что общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объёмных сил) есть произвольная бигармоническая векторная функция; следует помнить, что функция $\mathbf{u}(x, y, z)$ должна в действительности удовлетворять ещё и дифференциальному уравнению более низкого порядка (7,4). В то же время оказывается возможным, как было показано *Б. Г. Галёркиным*, выразить общий интеграл уравнений равновесия через производные от произвольного бигармонического вектора (см. задачу 10).

Если тело неравномерно нагрето, то в уравнении равновесия должен быть добавлен дополнительный член. В тензоре напряжений должен быть учтён член $-K\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$ (см. (6,2)) и соответственно в $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ возникает член

$$-K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

В результате получаем уравнения равновесия в виде

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = \alpha \nabla T. \quad (7,8)$$

Остановимся на частном случае так называемой плоской деформации, при которой во всём теле одна из компонент вектора смещения равна нулю, $u_z = 0$, а компоненты u_x, u_y зависят только от x, y . При этом тождественно обращаются в нуль компоненты u_{zz}, u_{xz}, u_{yz} тензора деформации, а с ними и компоненты σ_{xz}, σ_{yz} тензора напряжений (но не продольное напряжение σ_{zz} , существование которого должно обеспечить постоянство длины тела вдоль оси z).

Поскольку все величины не зависят от координаты z , то уравнения равновесия (при отсутствии внешних объёмных сил) $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$

сводятся в данном случае к двум уравнениям:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (7,9)$$

Наиболее общим видом функций σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} , удовлетворяющих этим уравнениям, является

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (7,10)$$

где χ — произвольная функция от x и y . Легко получить уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Такое уравнение должно существовать в силу того, что три величины σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} выражаются в действительности всего через две величины u_x , u_y и потому не являются независимыми. С помощью формул (5,13) найдём для плоской деформации:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}).$$

Но

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta \chi, \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u},$$

и поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}$ есть согласно (7,6) гармоническая функция, то мы заключаем, что функция χ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \chi = 0, \quad (7,11)$$

т. е. является бигармонической. Функцию χ называют функцией напряжений. После того как плоская задача решена и функция χ известна, продольное напряжение σ_{zz} определяется непосредственно по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}) = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

или

$$\sigma_{zz} = \sigma \Delta \chi. \quad (7,12)$$

Весьма эффективные методы решения плоских задач теории упругости связаны с применением теории функций комплексного переменного. Эти методы были впервые введены Г. В. Колосовым (1909), а их математическая обширная разработка и применения принадлежат главным образом Н. И. Мусхелишвили¹⁾.

Задачи

1. Определить деформацию длинного стержня (длины l), стоящего вертикально в поле тяжести.

¹⁾ Подробное изложение этих (и других) методов решения задач плоской теории упругости и их многочисленных применений см. в книге: Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, 1949.

Решение. Направляем ось z по оси стержня, а плоскость x, y — в плоскости его нижнего основания. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

На боковой поверхности стержня (должны обращаться в нуль все компоненты σ_{ik} кроме σ_{zz} , а на верхнем ($z=l$) основании $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений равновесия есть

$$\sigma_{zz} = -\rho g(l-z),$$

а все остальные $\sigma_{ik} = 0$. По σ_{ik} определяем u_{ik} в виде

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l-z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0,$$

а отсюда интегрированием компоненты вектора деформации

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z) x,$$

$$u_y = \frac{\sigma}{E} \rho g(l-z) y,$$

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E} \{l^2 - (l-z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

Выражение для u_z удовлетворяет граничному условию $u_z = 0$ только в одной точке нижней поверхности стержня. Поэтому полученное решение неприменимо вблизи нижнего конца стержня.

2. Определить деформацию полого шара (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которого действует давление p_1 ; давление снаружи p_2 .

Решение. Вводим сферические координаты с началом в центре шара. Деформация u направлена везде по радиусу и является функцией только от r . Поэтому $\text{rot } u = 0$, и уравнение (7,5) приобретает вид

$$\nabla \text{div } u = 0.$$

Отсюда

$$\text{div } u = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const.} \equiv 3a,$$

или

$$u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Компоненты тензора деформации (см. формулы (1,7)):

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}.$$

Радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий: $\sigma_{rr} = -p_1$ при $r = R_1$ и $\sigma_{rr} = -p_2$ при $r = R_2$. Отсюда находим:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Так, распределение напряжений по толщине шарового слоя, внутри которого действует давление $p_1 = p$, а снаружи $p_2 = 0$, даётся формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{r^3}\right).$$

Для тонкой сферической оболочки толщины $h = R_2 - R_1 \ll R$ имеем приближённо:

$$u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}$$

($\bar{\sigma}_{rr}$ — среднее по толщине оболочки значение радиального напряжения).

Распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шарообразной полостью (радиуса R), подвергаемой равномерному всестороннему сжатию, получим, положив $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$, $p_2 = p$:

$$\sigma_{rr} = -p \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

На границе полости тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3p}{2}$, т. е. превышают давление на бесконечности.

3. Определить деформацию сплошной сферы (радиуса R) под влиянием собственного гравитационного поля.

Решение. Сила тяготения, действующая на единицу массы сферического тела, равна $-g \frac{r}{R}$. Подставив это выражение вместо g в уравнение (7,3), получим для радиального смещения следующее уравнение:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{,rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left[\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right].$$

Отметим, что внутри сферической поверхности радиуса $R \sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$ вещество сжато ($u_{,rr} < 0$), а вне её — растянуто ($u_{,rr} > 0$). Давление в центре шара оказывается равным

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} g\rho R.$$

4. Определить деформацию полой цилиндрической трубы (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которой действует давление p ; давление снаружи отсутствует¹⁾.

¹⁾ В задачах 4, 5, 7 предполагается, что цилиндры удерживаются при постоянной длине, так что продольная деформация отсутствует.

Решение. Вводим цилиндрические координаты с осью z по оси трубы. При однородном вдоль трубы давлении деформация представляет собой чисто радиальное смещение $u_r = u(r)$. Аналогично задаче 2 имеем теперь:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \operatorname{const.} \equiv 2a.$$

Отсюда

$$u = ar + \frac{b}{r}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации (см. формулы (1,8)):

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Из условий $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$ и $\sigma_{rr} = -p$ при $r = R_1$ находим:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\sigma}{E}.$$

Распределение напряжений по толщине трубы дается формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

Решение. Написав в (7,3) центробежную силу $\rho\Omega^2 r$ вместо силы тяжести (Ω — угловая скорость), получаем в цилиндрических координатах для смещения $u_r = u(r)$ уравнение

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\rho\Omega^2 r.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \frac{\rho\Omega^2 (1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

6. Определить деформацию неравномерно нагретого шара со сферически симметричным распределением температуры.

Решение. В сферических координатах уравнение (7,8) для чисто радиальной деформации гласит:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{dT}{dr}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r^2 dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \frac{r}{R^3} \int_0^R T(r) r^2 dr \right\}.$$

Температура $T(r)$ отсчитывается от того значения, при котором равномерно нагретый шар считается недеформированным. В качестве этой температуры здесь выбрана температура внешней поверхности шара, так что $T(R) = 0$.

7. То же для неравномерно нагретого цилиндра с аксиально-симметричным распределением температуры.

Решение. Аналогичным путём в цилиндрических координатах получаем:

$$u = \alpha \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r) r dr + (1 - 2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r) r dr \right\}.$$

8. Определить деформацию неограниченной упругой среды с заданным распределением температуры $T(x, y, z)$, таким, что на бесконечности температура стремится к постоянному значению T_0 и деформация отсутствует.

Решение. Уравнение (7,8) имеет очевидное решение, в котором

$$\operatorname{rot} u = 0, \quad \operatorname{div} u = \alpha \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} [T(x, y, z) - T_0].$$

Вектор u , дивергенция которого равна заданной функции, определённой во всём пространстве и обращающейся в нуль на бесконечности, а ротор которого тождественно исчезает, может быть написан, как известно из векторного анализа, в виде

$$u(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\operatorname{div}' u(x', y', z')}{r} dV',$$

где $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Поэтому получаем общее решение поставленной задачи в виде

$$u = - \frac{\alpha(1 + \sigma)}{12\pi(1 - \sigma)} \nabla \int \frac{T' - T_0}{r} dV', \quad (1)$$

где $T' \equiv T(x', y', z')$.

Если в очень малом участке объёма неограниченной среды (в начале координат) выделяется конечное количество тепла q , то распределение температуры можно написать в виде (C — теплоёмкость среды)

$$T - T_0 = \frac{q}{C} \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

где δ обозначает δ -функцию. Интеграл в (1) равен тогда $\frac{q}{Cr}$ и деформация даётся формулой

$$u = \frac{\alpha(1 + \sigma)q}{12\pi(1 - \sigma)Cr^3}.$$

9. Вывести уравнения равновесия изотропного тела (при отсутствии объёмных сил), выраженные через компоненты тензора напряжений.

Решение. Искомая система уравнений содержит наряду с тремя уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

ещё уравнения, являющиеся следствием того факта, что шесть различных компонент u_{ik} не являются независимыми величинами. Для вывода этих уравнений пишем сначала систему дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют компоненты тензора u_{ik} . Легко видеть, что величины

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

тождественно удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Здесь имеется всего шесть существенно различных соотношений (соответствующих значениям i, k, l, m : 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); мы сохраним их всех, упростив написанное тензорное равенство по индексам l, m :

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}. \quad (2)$$

Подставляя сюда u_{ik} , выраженное через σ_{ik} согласно (5,12), и учитывая (1), получим искомые уравнения:

$$(1 + \sigma) \Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{il}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Эти уравнения остаются в силе и при наличии постоянных вдоль тела внешних объёмных сил.

Упростив уравнение (3) по индексам i, k , найдём, что

$$\Delta \sigma_{ll} = 0,$$

т. е. σ_{ll} — гармоническая функция. Применив же теперь к этому уравнению операцию Δ , найдём, что

$$\Delta \Delta \sigma_{ik} = 0,$$

т. е. компоненты σ_{ik} — бигармонические функции; эти результаты следуют впрочем, уже непосредственно из (7,6) и (7,7) ввиду линейной связи между σ_{ik} и u_{ik} .

10. Выразить общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объёмных сил) через произвольный бигармонический вектор (Б. Г. Галёркин, 1930).

Решение. Естественно искать решение уравнения (7,4) в виде

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} + A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

Отсюда $\operatorname{div} \mathbf{u} = (1 + A) \operatorname{div} \Delta \mathbf{f}$. Подставляя это в (7,4), получим:

$$(1 - 2\sigma) \Delta \Delta \mathbf{f} + [2(1 - \sigma) A + 1] \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta \mathbf{f} = 0.$$

Отсюда видно, что если \mathbf{f} — произвольный бигармонический вектор

$$\Delta \Delta \mathbf{f} = 0,$$

то

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} - \frac{1}{2(1 - \sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

11. Выразить напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ при плоской деформации (в полярных координатах r, φ) в виде производных от функции напряжений.

Решение. Поскольку искомые выражения не могут зависеть от выбора начала отсчёта полярного угла φ , то они не содержат его явным образом. Поэтому можно применить следующий приём: преобразуем декартовы производные (7,10) в производные по переменным r, φ , после чего замечаем, что

$$\sigma_{rr} = (\sigma_{xx})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = (\sigma_{yy})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{r\varphi} = (\sigma_{xy})_{\varphi=0}$$

(угол φ отсчитывается от оси x). Таким образом, получим:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right).$$

12. Определить распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шаровой полостью, подвергаемой (на бесконечности) однородной деформации.

Решение. Общая однородная деформация может быть представлена в виде наложения однородного всестороннего растяжения (или сжатия) и однородного сдвига. Первое было рассмотрено в задаче 2, так что достаточно рассмотреть однородный сдвиг.

Пусть $\sigma_{ik}^{(0)}$ — однородное поле напряжений, которое имело бы место во всём пространстве при отсутствии полости; при чистом сдвиге $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$. Соответствующий вектор смещения обозначаем как $u^{(0)}$ и ищем искомое решение в виде $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, где обусловленная наличием полости функция $u^{(1)}$ исчезает на бесконечности.

Всякое решение бигармонического уравнения может быть написано в виде линейной комбинации центрально-симметрических решений и их производных различных порядков по координатам. Независимыми центрально-симметрическими решениями являются r^2 , r , $\frac{1}{r}$, 1. Поэтому наиболее общий вид, который может иметь бигармонический вектор $u^{(1)}$, зависящий, как от параметров, только от компонент постоянного тензора $\sigma_{ik}^{(0)}$ и обращающийся в нуль на бесконечности, есть

$$u_i^{(1)} = A \sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + B \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{1}{r} + C \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} r. \quad (1)$$

Подставив это выражение в уравнение (7,4), получим:

$$(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = [2(1 - 2\sigma)C + (A + 2C)] \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{1}{r} = 0,$$

откуда

$$A = -4C(1 - \sigma).$$

Ещё два соотношения между постоянными A , B , C получаются из условия на границе полости: $(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}) n_k = 0$ при $r = R$ (R — радиус полости, начало координат выбрано в её центре, n — единичный вектор в направлении r). Довольно длинное вычисление с помощью (1) приводит к следующим значениям:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1 + \sigma)}{2E(7 - 5\sigma)}.$$

Окончательное выражение для распределения напряжений гласит:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \sigma_{ik}^{(0)} \left[1 + \frac{5(1 - 2\sigma)}{7 - 5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{7 - 5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^5 \right] + \\ & + \frac{15}{7 - 5\sigma} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] (\sigma_{il}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \\ & + \frac{15}{2(7 - 5\sigma)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[-5 + 7 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k + \\ & + \frac{15}{2(7 - 5\sigma)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[1 - 2\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \delta_{ik} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить распределение напряжений при произвольных (не чисто сдвиговых) $\sigma_{ik}^{(0)}$, надо заметить в этом выражении $\sigma_{ik}^{(0)}$ на $\sigma_{ik}^{(0)} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll}^{(0)}$ и прибавить выражение

$$\frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(0)} \left[\delta_{ik} + \frac{R^3}{2r^3} (\delta_{ik} - 3n_i n_k) \right],$$

соответствующее равномерному однородному растяжению на бесконечности (ср. задачу 2). Выпишем здесь результат, получающийся в общем случае для напряжений на границе полости:

$$\sigma_{ik} = \frac{15}{7-5\sigma} \left\{ (1-\sigma) (\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)} n_l n_k - \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k - \right. \\ \left. - \sigma \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m \delta_{ik} + \frac{-1+5\sigma}{10} \sigma_{ll}^{(0)} \delta_{ik} + \frac{-17+5\sigma}{30} \sigma_{ll}^{(0)} n_i n_k \right\}.$$

Вблизи отверстия напряжения значительно превышают напряжения на бесконечности, причём это увеличение напряжений имеет резко выраженный местный характер, быстро убывая с расстоянием (так называемая концентрация напряжений у отверстия)¹⁾. Так, если среда подвергается простому однородному растяжению (отлично от нуля только $\sigma_{zz}^{(0)}$), то наибольшие напряжения будут иметь место на экваторе полости, причём здесь

$$\sigma_{zz} = \frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)} \sigma_{zz}^{(0)}.$$

§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Рассмотрим упругую среду, заполняющую бесконечное полупространство, т. е. ограниченную с одной стороны бесконечной плоскостью. Определим деформацию среды под влиянием сил, приложенных к её свободной поверхности²⁾. Распределение этих сил должно удовлетворять только одному условию: они должны исчезать на бесконечности так, чтобы на бесконечности деформация отсутствовала. Для такого случая уравнения равновесия могут быть проинтегрированы в общем виде.

Во всём объёме, занимаемом средой, имеет место уравнение равновесия (7,4):

$$\text{grad div } \mathbf{u} + (1 - 2\sigma) \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (8,1)$$

¹⁾ Подробное изложение различных случаев концентрации напряжений можно найти в книге: Г. Н. Савин, Концентрация напряжений вблизи отверстий, Гостехиздат, 1951.

²⁾ Наиболее прямой и стандартный метод решения поставленной задачи заключается в применении к уравнению (8,1) метода Фурье. При этом, однако, приходится вычислять довольно сложные интегралы. Излагаемый ниже метод, основанный на применении ряда искусственных приёмов, связан с более простыми вычислениями.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi, \quad (8,2)$$

где φ есть некоторый скаляр, а вектор \mathbf{f} удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\mathbf{f} = 0. \quad (8,3)$$

Подстановка (8,2) в (8,1) приводит тогда к следующему уравнению для φ :

$$2(1 - \sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (8,4)$$

Выберем свободную поверхность упругой среды в качестве плоскости x, y ; области среды соответствуют положительные z . Напишем функции f_x и f_y в виде производных по z от некоторых функций g_x и g_y :

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \quad (8,5)$$

Поскольку f_x и f_y являются гармоническими функциями, то можно всегда выбрать функции g_x, g_y так, чтобы и они удовлетворяли уравнению Лапласа:

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0. \quad (8,6)$$

Уравнение (8,4) принимает теперь вид

$$2(1 - \sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z \right).$$

Имея в виду, что g_x, g_y, f_z — гармонические функции, легко убедиться в том, что удовлетворяющая этому уравнению функция φ может быть написана как

$$\varphi = -\frac{z}{4(1 - \sigma)} \left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \psi, \quad (8,7)$$

где ψ — опять гармоническая функция:

$$\Delta\psi = 0. \quad (8,8)$$

Таким образом, задача об определении деформации \mathbf{u} сведена к нахождению функций g_x, g_y, f_z, ψ , которые все удовлетворяют уравнению Лапласа.

Выпишем теперь граничные условия, которые должны выполняться на свободной поверхности среды (на плоскости $z = 0$).

Поскольку единичный вектор внешней нормали \mathbf{n} направлен в отрицательном направлении оси z , то согласно общей формуле (2,8) должно быть $\sigma_{iz} = -P_i$. Воспользовавшись для σ_{ik} общим выражением (5,11) и выражая компоненты вектора \mathbf{u} через вспомогательные величины g_x, g_y, f_z, ψ , получим после простого вычисления гранич-

ные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} &= \\ &= - \frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \\ \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} &= \\ &= - \frac{2(1+\sigma)}{E} P_y, \end{aligned} \right\} (8,9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = - \frac{2(1+\sigma)}{E} P_z. \quad (8,10)$$

Компоненты P_x , P_y , P_z приложенных к поверхности внешних сил являются заданными функциями координат x , y , обращающимися в нуль на бесконечности.

Формулы, с помощью которых введены вспомогательные величины g_x , g_y , f_z , ψ , не определяют их вполне однозначным образом; в их выборе остаётся ещё некоторый произвол. Поэтому мы можем наложить на эти величины ещё какое-либо произвольное дополнительное условие. В качестве такого удобно потребовать обращения в нуль величины, стоящей в фигурных скобках в уравнениях (8,9)¹⁾:

$$(1-2\sigma) f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 4(1-\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (8,11)$$

Тогда условия (8,9) упрощаются и дают

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = - \frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = - \frac{2(1+\sigma)}{E} P_y. \quad (8,12)$$

Уравнения (8,10) — (8,12) достаточны для полного вычисления гармонических функций g_x , g_y , f_z , ψ .

Для упрощения записи дальнейших формул мы рассмотрим случай, когда на свободную поверхность упругого полупространства действует «сосредоточенная» сила F , т. е. сила, приложенная к весьма малому участку поверхности, который можно считать точечным. Действие этой силы может быть описано как действие поверхностных сил, распределённых по закону

$$P = F \delta(x) \delta(y),$$

где δ обозначает δ -функцию, а начало координат выбрано в точке приложения силы. Зная решение задачи для сосредоточенной силы,

¹⁾ Мы не доказываем здесь возможности наложения такого условия; она будет явствовать из того, что в результате мы не придём ни к каким противоречиям.

мы можем непосредственно построить решение для произвольного распределения сил $\mathbf{P}(x, y)$. Именно, если

$$u_i = G_{ik}(x, y, z) F_k \quad (8,13)$$

есть деформация под действием сосредоточенной силы \mathbf{F} , приложенной в начале координат, то деформация под действием сил $\mathbf{P}(x, y)$ даётся интегралом

$$u_i = \iint G_{ik}(x-x', y-y', z) P_k(x', y') dx' dy'. \quad (8,14)$$

Из теории потенциала известно, что гармоническая функция f , обращающаяся на бесконечности в нуль и обладающая заданной нормальной производной $\frac{\partial f}{\partial z}$ на плоскости $z=0$, определяется формулой

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \left. \frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z} \right|_{z=0} \frac{dx' dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Поскольку величины $\frac{\partial g_x}{\partial z}$, $\frac{\partial g_y}{\partial z}$ и величина, стоящая в фигурных скобках в уравнении (8,10), удовлетворяют уравнению Лапласа, а равенства (8,10) и (8,12) как раз определяют значения их нормальных производных на плоскости $z=0$, то имеем:

$$f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_z}{r}, \quad (8,15)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x}{r}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y}{r}, \quad (8,16)$$

где теперь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В выражения для компонент искомого вектора \mathbf{u} входят не самые величины g_x , g_y , а только их производные по x , y , z . Для вычисления $\frac{\partial g_x}{\partial x}$, $\frac{\partial g_y}{\partial y}$ дифференцируем равенства (8,16) соответственно по x и по y :

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y y}{r^3}.$$

Интегрируя теперь по dz в пределах от ∞ до z , получим:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x x}{r(r+z)},$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y y}{r(r+z)}. \quad (8,17)$$

Мы не станем производить здесь дальнейших простых, но довольно громоздких вычислений. Из уравнений (8,11), (8,15) и (8,17) определим f_z и $\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Зная $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, легко вычислить $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, интегрируя сначала по z , а затем дифференцируя по x и по y . Так мы получим все величины, нужные для вычисления вектора деформации согласно (8,2), (8,5), (8,7). В результате имеем следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[\frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z + \left[\frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3} \right] (xF_x + yF_y) \right\}. \end{aligned} \quad (8,18)$$

В частности, смещение точек самой свободной поверхности среды даётся формулами, получающимися отсюда при $z=0$:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)x}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_x + \frac{2\sigma x}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)y}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_y + \frac{2\sigma y}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\sigma) F_z + (1-2\sigma) \frac{1}{r} (xF_x + yF_y) \right\}. \end{aligned} \quad (8,19)$$

ЗАДАЧА

Определить деформацию неограниченной упругой среды, к малому участку которой приложена сила \mathbf{F} ¹⁾.

Решение. Рассматривая деформацию на расстояниях r , больших по сравнению с размерами участка приложения силы, мы можем считать, что сила приложена в точке. Уравнение равновесия гласит (ср. (7,2)):

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } u = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(\mathbf{r})$$

(где $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, а начало координат выбрано в точке приложения силы). Ищем решение в виде $u = u_0 + u_1$, где u_0 удовлетворяет уравнению типа Пуассона:

$$\Delta u_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}). \quad (1)$$

¹⁾ Аналогичная задача для произвольной неограниченной анизотропной среды решена И. М. Лифшицем и Л. Н. Розенцвейгом, ЖЭТФ 17, 783 (1947).

Соответственно для u_1 получаем уравнение

$$\nabla \operatorname{div} u_1 + (1 - 2\sigma) \Delta u_1 = -\nabla \operatorname{div} u_0. \quad (2)$$

Обращающееся на бесконечности в нуль решение уравнения (1) есть

$$u_0 = \frac{1 + \sigma}{2\pi E} \frac{F}{r}.$$

Применив к уравнению (2) операцию rot , получим $\Delta \operatorname{rot} u_1 = 0$. На бесконечности должно быть $\operatorname{rot} u_1 = 0$. Но функция, гармоническая во всём пространстве и обращающаяся в нуль на бесконечности, равна нулю тождественно. Таким образом, $\operatorname{rot} u_1 = 0$ и соответственно этому можно писать u_1 в виде $u_1 = \operatorname{grad} \varphi$. Из (2) получаем:

$$\nabla \{ 2(1 - \sigma) \Delta \varphi + \operatorname{div} u_0 \} = 0.$$

Отсюда следует, что стоящая в скобках величина есть постоянная, и поскольку она должна исчезать на бесконечности, то во всём пространстве

$$\Delta \varphi = -\frac{\operatorname{div} u_0}{2(1 - \sigma)} = -\frac{1 + \sigma}{4\pi E(1 - \sigma)} F \nabla \frac{1}{r}.$$

Если ψ есть решение уравнения $\Delta \psi = \frac{1}{r}$, то

$$\varphi = -\frac{1 + \sigma}{4\pi E(1 - \sigma)} F \nabla \psi.$$

Выбрав не имеющее особенностей решение $\psi = \frac{r}{2}$, получим:

$$u_1 = \nabla \varphi = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(Fn) n - F}{r},$$

где n — единичный вектор в направлении радиус-вектора r . Окончательно имеем:

$$u = \frac{1 + \sigma}{8\pi E(1 - \sigma)} \frac{(3 - 4\sigma) F + n (Fn)}{r}.$$

§ 9. Соприкосновение твёрдых тел

Пусть два твёрдых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей (на рис. 120, *a* изображён разрез через обе поверхности вблизи точки соприкосновения O). В этой точке обе поверхности имеют общую касательную плоскость, которую мы выберем в качестве плоскости x, y . Положительное же направление оси z условимся считать различным для обоих тел, — для каждого из них будем отсчитывать z -координату по направлению в глубь тела, обозначая её соответственно как z и z' .

Как известно, вблизи обыкновенной точки касания координатной плоскости (плоскости x, y) уравнение поверхности может быть написано в виде

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (9,1)$$

где по дважды повторяющимся индексам α, β подразумевается суммирование по значениям 1, 2 ($x_1 = x, x_2 = y$), а $\kappa_{\alpha\beta}$ есть двухмерный

симметрический тензор, характеризующий кривизну поверхности (главные значения тензора $\kappa_{\alpha\beta}$ равны $\frac{1}{2R_1}$ и $\frac{1}{2R_2}$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в точке касания). Аналогичное соотношение для поверхности второго тела вблизи точки соприкосновения напомним в виде

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \quad (9,2)$$

Предположим теперь, что оба тела сдавливаются приложенными к ним силами, в результате чего они сближаются на некоторое малое расстояние h (задача *Г. Герца*). Тогда вблизи точки первоначального соприкосновения на поверхности тел возникает вдавление, и тела будут соприкасаться уже не в одной точке, а по некоторому малому, но конечному участку их поверхности. Пусть u_z и u'_z — компоненты (соответственно по осям z и z') векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании. На рис. 120, б пунктиром изображены поверхности тел, какими они были бы при отсутствии деформации, а сплошной линией — поверхности сдавленных тел; буквы z и z' обозначают длины, определяемые равенствами (9,1) и (9,2). Как непосредственно видно из рисунка, во всех точках области соприкосновения имеет место равенство

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

или

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (9,3)$$

В точках же вне этой области, где обе поверхности не соприкасаются, имеет место неравенство $z + z' + u_z + u'_z > h$.

Выберем направления осей x, y таким образом, чтобы тензор $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$ был приведён к главным осям. Обозначая главные значения этого тензора посредством A и B ¹⁾, перепишем равенство (9,3) в виде

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (9,4)$$

¹⁾ Величины A и B связаны с радиусами кривизны R_1, R_2 и R'_1, R'_2 обеих поверхностей следующими соотношениями:

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

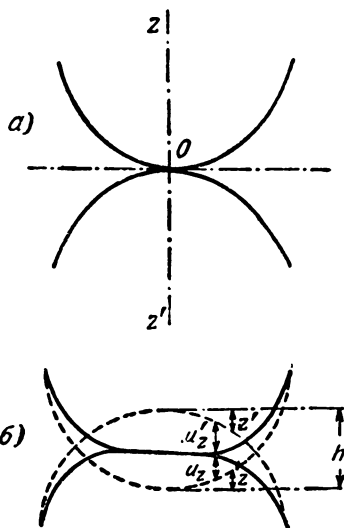


Рис. 120.

Обозначим посредством $P_z(x, y)$ давление между обоими сдвинутыми телами в точках их соприкосновения (вне области соприкосновения, разумеется, $P_z = 0$). При определении зависимости между P_z и смещениями u_z, u'_z можно с достаточной точностью рассматривать поверхности тел как плоские и воспользоваться полученными в предыдущем параграфе формулами. Согласно третьей из формул (8,19) (учитывая также (8,14)) смещение u_z под влиянием нормальных сил $P_z(x, y)$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \\ u'_z &= \frac{1-\sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (9,5)$$

(σ, σ' и E, E' — коэффициенты Пуассона и модули растяжения обоих тел); поскольку вне области соприкосновения $P_z = 0$, то интегрирование производится здесь только по этой области. Заметим, что из этих формул следует, что отношение $\frac{u_z}{u'_z}$ постоянно и равно

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1-\sigma^2)E'}{(1-\sigma'^2)E}. \quad (9,6)$$

Соотношения (9,4) и (9,6) вместе непосредственно определяют распределение деформации u_z, u'_z по области соприкосновения (сами же формулы (9,5) и (9,6) относятся, конечно, и к точкам вне этой области).

Подставляя выражения (9,5) в (9,4), получим:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (9,7)$$

Это интегральное уравнение определяет распределение давления P_z по области соприкосновения. Его решение может быть найдено из аналогии со следующими известными из теории потенциала соотношениями. На мысль воспользоваться этой аналогией наводит тот факт, что, во-первых, интеграл, стоящий в левой стороне уравнения (9,7), — типа обычных в теории потенциала интегралов, определяющих потен-

$$4(A-B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2\cos 2\varphi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right),$$

где φ есть угол между теми нормальными сечениями поверхностей, в которых радиусы кривизны суть R_1 и R'_1 .

Знаки радиусов кривизны предполагаются положительными, если соответствующие центры кривизны расположены внутри соответствующего тела, и отрицательными — в обратном случае.

циал, создаваемый некоторым распределением зарядов, и, во-вторых, что потенциал поля внутри равномерно заряженного эллипсоида есть квадратичная функция координат.

Если по объёму трёхосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

равномерно распределён заряд (с постоянной объёмной плотностью ρ), то потенциал поля внутри эллипсоида определяется выражением

$$\varphi(x, y, z) =$$

$$= \pi abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}}.$$

В предельном случае сильно уплощённого (в направлении оси z) эллипсоида, что соответствует $c \rightarrow 0$, получим отсюда

$$\varphi(x, y) = \pi abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}$$

(при переходе к пределу $c \rightarrow 0$ надо, разумеется, положить равной нулю также и координату z точек внутри эллипсоида). С другой стороны, потенциал $\varphi(x, y, z)$ может быть написан в виде интеграла

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho \, dx' \, dy' \, dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

где интегрирование производится по объёму эллипсоида. Переходя здесь к пределу $c \rightarrow 0$, мы должны положить под корнем $z = z' = 0$; производя интегрирование по dz' в пределах между $\pm c \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$, получим:

$$\varphi(x, y) = 2\rho c \iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$$

$$(r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}),$$

где интегрирование производится по площади внутри эллипса $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Приравнявая оба выражения для $\varphi(x, y)$, получим следующее тождество:

$$\iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \quad (9,8)$$

Сравнивая эти соотношения с уравнением (9,7), мы видим, что в их правых сторонах стоят квадратичные функции от x и y одинакового вида, а в левых — интегралы одинакового типа. Поэтому мы можем сразу заключить, что область соприкосновения тел (т. е. область интегрирования в интеграле в (9,7)) ограничена эллипсом вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9,9)$$

и что функция $P_z(x, y)$ должна быть вида

$$P_z(x, y) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Выбирая const. так, чтобы интеграл $\iint P_z dx dy$ по области соприкосновения был равен заданной полной силе F , с которой сдвигаются оба тела, получим:

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (9,10)$$

Эта формула определяет закон распределения давления по площади области соприкосновения. Отметим, что давление в центре области в полтора раза превышает среднее давление $F/\pi ab$.

Подставляя (9,10) в уравнение (9,7) и заменив получающийся в нём интеграл его выражением согласно (9,8), получим:

$$\frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

где

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right).$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях x, y (внутри эллипса (9,9)); поэтому должны быть попарно равны в отдельности коэффициенты при x и y и свободные члены в обеих сторонах. Отсюда находим следующие соотношения:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9,11)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \\ B &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \end{aligned} \right\} \quad (9,12)$$

Уравнения (9,12) определяют полуоси a и b области соприкосновения по заданной силе F (A и B — известные для данных тел величины)¹⁾. После этого соотношение (9,11) определит зависимость между силой F и вызываемым ею сближением тел h . Интегралы, стоящие в правых сторонах этих уравнений, — эллиптические.

Таким образом, задачу о соприкосновении тел можно считать полностью решённой. Форма поверхности тел (т. е. смещения u_z, u'_z) вне области соприкосновения определяется теми же формулами (9,5), (9,10), причём значения интегралов можно сразу определить, исходя из аналогии с потенциалом поля заряжённого эллипсоида, — на этот раз вне его. Наконец, по формулам предыдущего параграфа можно было бы определить также и распределение деформации по объёму тел (но, конечно, лишь на расстояниях, малых по сравнению с размерами тела).

Применим полученные формулы к соприкосновению двух шаров с радиусами R и R' . Здесь $A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$; из соображений симметрии ясно, что будет и $a = b$, т. е. область соприкосновения есть круг. Из (9,12) получим для радиуса a области соприкосновения значение

$$a = F^{1/3} \left(D \frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/3}. \quad (9,13)$$

h есть в данном случае разность между суммой $R + R'$ и расстоянием между центрами шаров. Из (9,10) получим следующее соотношение между F и h :

$$h = F^{2/3} \left[D^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}. \quad (9,14)$$

Отметим, что h пропорционально степени $F^{2/3}$ сдавливающей силы; обратно, сила F пропорциональна степени $h^{3/2}$ производимого ею сближения тел. Напишем ещё потенциальную энергию U соприкасающихся шаров. Замечая, что должно быть $(-F) = -\frac{\partial U}{\partial h}$, получим:

$$U = h^{5/3} \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}. \quad (9,15)$$

Наконец, укажем, что зависимость вида

$$h = \text{const. } F^{2/3}, \quad F = \text{const. } h^{3/2}$$

имеет место не только для шаров, но и при соприкосновении других конечных тел. В этом легко убедиться из соображений подобия. Если

¹⁾ Приведение этих уравнений к расчётному виду и численные таблицы для определения a и b см., например, в книге: Л. С. Лейбензон, Краткий курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

произвести замену $a^2 \rightarrow \alpha a^2$, $b^2 \rightarrow \alpha b^2$, $F \rightarrow \alpha^{3/2} F$, где α — произвольная постоянная, то уравнения (9,12) останутся неизменными. В уравнении же (9,11) правая часть умножится на α , и для того чтобы оно осталось неизменным, надо заменить h на αh . Отсюда и следует, что F должно быть пропорционально $h^{3/2}$ 1).

З а д а ч и

1. Определить время, в течение которого соприкасаются два сталкивающиеся упругих шара.

Решение. В системе отсчёта, в которой центр инерции обоих шаров покоится, энергия шаров до столкновения равна кинетической энергии относительного движения $\frac{\mu v^2}{2}$, где v — относительная скорость сталкивающихся шаров, а $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — их приведённая масса. В течение столкновения полная энергия равна сумме кинетической энергии, которую можно написать в виде $\frac{\mu \dot{h}^2}{2}$, и потенциальной энергии (9,15). В силу закона сохранения энергии имеем:

$$\mu \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}.$$

Максимальное сближение шаров h_0 соответствует моменту, когда их относительная скорость \dot{h} обращается в нуль и равна

$$h_0 = \left(\frac{\mu}{k} \right)^{2/5} v^{4/5}.$$

Время τ , в течение которого длится столкновение (т. е. h меняется от 0 до h_0 и обратно до нуля), равно

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{k}{\mu} h^{5/2}}} = 2 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2/5}}},$$

или

$$\tau = \frac{4 \sqrt{\pi} \Gamma(2/5)}{5 \Gamma(9/10)} \left(\frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} = 2,94 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5}.$$

Пользуясь при решении этой задачи полученными в тексте статическими формулами, мы тем самым пренебрегаем упругими колебаниями шара, возникающими при столкновении. Возможность такого пренебрежения требует, чтобы скорость v была достаточно мала по сравнению со скоростью звука. Фактически, однако, применимость этой теории ограничивается ещё раньше благодаря тому, что возникающие при столкновении деформации переходят за предел упругости вещества.

1) Подробное изложение этого раздела теории упругости см. И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949; Л. А. Галин, Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953.

2. Определить размеры области соприкосновения и распределение давления в ней при сдавливании двух цилиндров вдоль их образующих.

Решение. Область соприкосновения представляет собой в этом случае узкую полоску вдоль длины цилиндров. Её ширину $2a$ и распределение давления в ней можно найти из полученных в тексте формул путём предельного перехода $b/a \rightarrow \infty$. Распределение давления будет функцией вида

$$P_z(x) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

(x — координата вдоль ширины полосы соприкосновения); нормируя её на отнесённую к единице длины цилиндров сдавливающую силу F , получим:

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя это выражение в (9,7) и производя интегрирование с помощью (9,8), имеем:

$$A = \frac{4DF}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^{3/2} \xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Один из радиусов кривизны цилиндрической поверхности бесконечен, а другой совпадает с радиусом цилиндра; поэтому в данном случае

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad B = 0.$$

Окончательно находим для искомой ширины полосы соприкосновения:

$$a = \sqrt{\frac{16DF}{3\pi} \frac{RR'}{R + R'}}.$$

§ 10. Упругие свойства кристаллов

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии кристалла является, как и у изотропных тел, квадратичной функцией тензора деформации. В противоположность тому, что имело место для изотропных тел, эта функция содержит теперь не два, а большее число независимых коэффициентов.

Общий вид свободной энергии деформированного кристалла есть

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}, \quad (10,1)$$

где λ_{iklm} есть некоторый тензор 4-го ранга, называемый тензором модулей упругости. Поскольку тензор деформации симметричен, то произведение $u_{ik} u_{lm}$ не меняется при перестановке индексов i с k , l с m или пары i, k с парой l, m . Очевидно поэтому, что и тензор λ_{iklm} может быть определён так, чтобы он обладал такими же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (10,2)$$

Путём простого подсчёта можно убедиться в том, что число различных компонент тензора 4-го ранга, обладающего такими свойствами симметрии, равно в общем случае 21.

Соответственно выражению (10,1) для свободной энергии зависимость тензора напряжений от тензора деформации имеет в кристаллах вид (ср. также сноску на стр. 677)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm} u_{lm}. \quad (10,3)$$

Наличие той или иной симметрии кристалла приводит к появлению зависимостей между различными компонентами тензора λ_{iklm} , так что число его независимых компонент оказывается меньшим, чем 21. При этом оказывается, что число независимых компонент этого тензора зависит только от кристаллической системы, будучи одинаковым для всех классов, относящихся к одной системе, но различным для классов разных систем. Мы определим теперь эти числа для всех систем, рассматривая в каждой из них только по одному классу.

1. Триклинная система. Наличие триклинной симметрии не накладывает никаких ограничений на компоненты тензора λ_{iklm} . Мы можем, однако, выбрать произвольным образом систему координат, в которой мы описываем деформацию. Поскольку ориентация системы координат относительно тела определяется тремя величинами (углами поворота), то произвольность в её выборе означает, что мы можем наложить на компоненты тензора λ_{iklm} три дополнительных условия, например, мы можем три из компонент считать равными нулю. Таким образом, кристаллы триклинной системы обладают 18 независимыми модулями упругости.

2. Моноклинная система. Рассмотрим класс C_2 ; выбираем систему координат с плоскостью x, y , совпадающей с плоскостью симметрии. При отражении в этой плоскости координаты подвергаются преобразованию: $x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$. Компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому ясно, что при указанном преобразовании все компоненты λ_{iklm} , среди индексов которых индекс z содержится нечётное (1 или 3) число раз, переменят свой знак, а остальные компоненты останутся неизменными. С другой стороны, в силу симметрии кристалла все характеризующие его свойства величины (в том числе и все компоненты λ_{iklm}) должны остаться неизменными при отражении в плоскости симметрии. Поэтому ясно, что все компоненты с нечётным числом индексов z должны быть равными нулю. Соответственно этому общее выражение для свободной упругой энергии кристалла моноклинной системы есть

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \\ & + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xxzz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yyzz} u_{yz}^2 + \\ & + 2\lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + 2\lambda_{yyyx} u_{yy} u_{yx} + 2\lambda_{xyzz} u_{xy} u_{zz} + 4\lambda_{xzyz} u_{xz} u_{yz}. \quad (10,4) \end{aligned}$$

Из стоящих здесь 13 коэффициентов один ещё может быть выбран произвольным образом в силу возможности произвольного поворота системы координат вокруг оси z . Таким образом, кристаллы моноклинной системы обладают 12 независимыми модулями упругости.

3. Ромбическая система. Рассмотрим класс D_{2h} и выберем плоскости координат в трёх плоскостях симметрии этого класса. Отражения в каждой из этих плоскостей представляют собой преобразования, при которых одна из координат меняет знак, а две другие — не меняются. Очевидно, поэтому, что из всех компонент λ_{iklm} отличными от нуля останутся только те, среди индексов которых каждое из их значений x , y и z встречается чётное число раз; все остальные компоненты должны были бы менять знак при отражении в какой-нибудь из плоскостей симметрии. Таким образом, общее выражение для свободной энергии имеет в ромбической системе вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz} u_{yz}^2. \quad (10,5)$$

Она содержит всего девять модулей упругости.

4. Тетрагональная система. Рассмотрим класс C_{4v} . Выбираем координаты с осью z по оси C_4 , а оси x , y — перпендикулярными к двум из вертикальных плоскостей симметрии. Отражения в этих двух плоскостях означают соответственно преобразования $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow z$ и $x \rightarrow x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$; в силу этого исчезают все компоненты λ_{iklm} с нечётным числом одинаковых индексов. Далее, поворот на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси C_4 представляет собой преобразование $x \rightarrow y$, $y \rightarrow -x$, $z \rightarrow z$. Отсюда вытекают соотношения:

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xzzz} = \lambda_{yzzz}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}.$$

Остальные преобразования, входящие в класс C_{4v} , ничего не добавляют к этим условиям. Таким образом, свободная энергия кристаллов тетрагональной системы имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xzzz} (u_{xx} u_{zz} + u_{yy} u_{zz}) + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,6)$$

Она содержит шесть модулей упругости.

5. Ромбоэдрическая система. Рассмотрим класс C_{3v} и выберем систему координат с осью z вдоль оси 3-го порядка и осью y , перпендикулярно к одной из вертикальных плоскостей симметрии. Для выяснения ограничений, налагаемых на компоненты тензора λ_{iklm} наличием оси C_3 , удобно произвести формальное преобразование, введя комплексные «координаты» ξ , η согласно

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

координату же z оставляем без изменений. К этим новым «координатам» преобразуем также и тензор λ_{iklm} ; в его компонентах индексы пробегает теперь значения ξ, η, z . Легко видеть, что при повороте на 120° вокруг оси C_3 «координаты» подвергаются преобразованию

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \quad z \rightarrow z.$$

Отличными от нуля могут быть в силу симметрии кристалла только те из компонент λ_{iklm} , которые не меняются при этом преобразовании. Очевидно, что этим свойством обладают те компоненты, среди индексов которых три раза повторяются ξ или η (обращаем внимание на то, что $(e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$), или индекс ξ содержит столько же раз, сколько η (поскольку $e^{2\pi i/3} e^{-2\pi i/3} = 1$); таковыми являются компоненты:

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\eta z z}, \lambda_{\xi z \eta z}, \lambda_{\xi\xi\xi z}, \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Далее, отражение в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси y , есть преобразование $x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$, или для величин ξ, η : $\xi \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \xi$. Поскольку при этом преобразовании $\lambda_{\xi\xi\xi z}$ переходит в $\lambda_{\eta\eta\eta z}$, то эти две компоненты должны быть равны друг другу. Таким образом, кристаллы ромбоэдрической системы обладают всего шестью модулями упругости. Для того чтобы написать выражение для свободной энергии, надо составить сумму $\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$, в которой индексы пробегает значения ξ, η, z ; поскольку нам надо выразить F через компоненты тензора деформации в координатах x, y, z , то мы должны выразить через них компоненты в «координатах» ξ, η, z . Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора u_{ik} преобразуются как произведения соответствующих двух координат. Так, например, из

$$\xi\xi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

следует, что

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}$$

В результате находим для F следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta z z} (u_{xx} + u_{yy}) u_{zz} + 4\lambda_{\xi z \eta z} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ + 4\lambda_{\xi\xi\xi z} [(u_{xx} - u_{yy}) u_{xz} - 2u_{xy} u_{yz}]. \quad (10,7)$$

6. Гексагональная система. Рассмотрим класс C_6 и выберем систему координат с осью z по оси 6-го порядка. Введём опять «координаты» $\xi = x + iy, \eta = x - iy$. При повороте на угол $\frac{2\pi}{6}$ вокруг оси z «координаты» ξ, η подвергаются преобразованию

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{6}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{6}}.$$

Отсюда видно, что отличны от нуля только те компоненты λ_{iklm} , среди индексов которых индексы ξ и η встречаются одинаковое число раз. Таковыми являются:

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\eta\eta\xi}, \lambda_{\xi\eta z z}, \lambda_{\xi z \eta z}.$$

Другие возможные элементы симметрии гексагональной системы ничего не добавляют к этим ограничениям. Таким образом, имеется всего пять модулей упругости. Свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\eta\eta\xi} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta z z} u_{zz} (u_{xx} + u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z \eta z} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,8)$$

Следует отметить, что деформация в плоскости x, y (деформация с отличными от нуля u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) определяется всего двумя упругими модулями, как и для изотропного тела; другими словами, в плоскости, перпендикулярной к гексагональной оси, упругие свойства гексагонального кристалла изотропны.

7. Кубическая система. Направим оси x, y, z по трём осям 4-го порядка кубической системы. Уже наличие тетрагональной симметрии (с осью 4-го порядка вдоль оси z) ограничивало число различных компонент тензора λ_{iklm} следующими шестью:

$$\lambda_{xxxx}, \lambda_{zzzz}, \lambda_{xxzz}, \lambda_{xxyy}, \lambda_{xyxy}, \lambda_{xzzz}.$$

Повороты на 90° вокруг осей x и y дают соответственно преобразования $x \rightarrow x, y \rightarrow -z, z \rightarrow y$ и $x \rightarrow z, y \rightarrow y, z \rightarrow -x$. В силу них из написанных шести компонент делаются равными первая со второй, третья с четвертой и пятая с шестой. Таким образом, остаётся всего три различных модуля упругости. Свободная энергия кристаллов кубической системы имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy} (u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy} (u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,9)$$

Выпишем ещё раз число модулей упругости кристаллов различных систем:

триклинная	18
моноклинная	12
ромбическая	9
тетрагональная	6
ромбоэдрическая	6
гексагональная	5
кубическая	3

Всё сказанное относится, разумеется, к монокристаллам. Поликристаллические же тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела (поскольку мы интересуемся деформациями в участках, больших по

сравнению с размерами кристаллитов). Как и всякое изотропное тело, поликристалл характеризуется всего двумя модулями упругости. Можно было бы на первый взгляд подумать, что эти модули можно получить из модулей упругости отдельных кристаллитов посредством простого усреднения. В действительности, однако, это не так. Если рассматривать деформацию поликристалла как результат деформации входящих в него кристаллитов, то следовало бы, принципиально, решить уравнения равновесия для всех этих кристаллитов с учётом соответствующих граничных условий на поверхностях их раздела. Отсюда видно, что связь между упругими свойствами кристалла, рассматриваемого в целом, и свойствами составляющих его кристаллитов зависит от конкретной формы кристаллитов и от корреляции между их взаимными ориентациями. Поэтому не существует общей зависимости между модулями упругости поликристаллов и монокристалла (того же вещества).

Вычисление модулей изотропного поликристалла по монокристаллическим модулям может быть произведено со значительной точностью лишь в случае слабой анизотропии упругих свойств монокристалла¹⁾. В первом приближении модули упругости поликристалла можно положить равными просто «изотропной части» упругих модулей монокристалла. Тогда в следующем приближении появляются члены, квадратичные по малой «анизотропной части» этих модулей. Оказывается, как было показано *И. М. Лифшицем* и *Л. Н. Розенцвейгом*²⁾, что эти поправочные члены не зависят от формы кристаллитов и от корреляции их ориентаций и могут быть вычислены в общем виде.

Наконец, остановимся на тепловом расширении кристаллов. В изотропных телах тепловое расширение происходит одинаково по всем направлениям, так что тензор деформации при свободном тепловом расширении имеет вид (см. § 6)

$$u_{ik} = \frac{1}{3} \alpha (T - T_0) \delta_{ik},$$

где α — коэффициент теплового расширения. В кристаллах же надо писать

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3} (T - T_0), \quad (10,10)$$

где α_{ik} — некоторый тензор второго ранга, симметричный по индексам i, k . Выясним число различных независимых компонент этого тензора в кристаллах разных систем. Для этого проще всего воспользоваться известным из тензорной алгебры обстоятельством, что всякому симметричному тензору второго ранга можно привести в соответствие некоторый, как говорят, тензорный эллипсоид³⁾. Из соображений сим-

1) Так, у «слабо анизотропного» кубического кристалла должна быть малой разность $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xyxy} - 2\lambda_{xyxy}$.

2) См. ЖЭТФ **16**, 967, 1946.

3) Тензорный эллипсоид определяется уравнением $\alpha_{ik} x_i x_k = 1$.

метрии непосредственно очевидно, что при триклинной, моноклинной и ромбической симметриях эллипсоид является, вообще говоря, трёхосным (т. е. длины всех его осей различны). При тетрагональной же, ромбоэдрической и гексагональной симметриях эллипсоид должен являться эллипсоидом вращения (с осью соответственно вдоль осей симметрии C_4 , C_3 или C_6). Наконец, кубическая симметрия приводит к вырождению эллипсоида в шар. Но трёхосный эллипсоид определяется тремя независимыми величинами (длинами осей), эллипсоид вращения — двумя, а шар — всего одной (радиусом). Таким образом, число независимых компонент тензора α_{ik} в кристаллах различных систем есть:

триклинная, моноклинная, ромбическая	3
тетрагональная, ромбоэдрическая, гексагональная	2
кубическая	1

Кристаллы первых трёх систем называются двухосными, а вторых трёх — одноосными. Обратим внимание на то, что тепловое расширение кристаллов кубической системы определяется всего одной величиной, т. е. что они ведут себя в отношении своего теплового расширения как изотропные тела.

Задача

Определить зависимость модуля растяжения кубического кристалла от направления.

Решение. Выбираем оси координат по трём осям четвёртого порядка кубического кристалла. Пусть ось вырезанного из кристалла стержня имеет направление единичного вектора \mathbf{n} . Тензор напряжений σ_{ik} в растянутом стержне должен удовлетворять условиям: при умножении на n_i должна получаться направленная по \mathbf{n} сила растяжения (условие на основаниях стержня), а при умножении на вектор, перпендикулярный к \mathbf{n} , он должен обращаться в нуль (условие на боковой поверхности стержня). Такой тензор должен иметь вид $\sigma_{ik} = p n_i n_k$, где p — действующая на единицу поверхности оснований стержня растягивающая сила. Вычисляя компоненты σ_{ik} с помощью выражения (10,9) для свободной энергии¹⁾ и сравнивая их с выражениями $\sigma_{ik} = p n_i n_k$, получим для компонент тензора деформации

$$u_{xx} = p \frac{(c_1 + 2c_2) n_x^2 - c_2}{(c_1 - c_2)(c_1 + 2c_2)}, \quad u_{xy} = p \frac{n_x n_y}{2c_3}$$

¹⁾ При вычислении σ_{ik} надо иметь в виду следующее обстоятельство. Если производить вычисление не непосредственно по формулам $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$, а дифференцированием конкретного выражения для свободной энергии по компонентам тензора u_{ik} , то производные по u_{ik} с $i \neq k$ дают удвоенные значения соответствующих компонент σ_{ik} . Это связано с тем, что выражения $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ имеют по существу смысл лишь как выражающие тот факт, что $dF = \sigma_{ik} du_{ik}$; но в сумму $\sigma_{ik} du_{ik}$ члены с дифференциалами du_{ik} каждой из компонент с $i \neq k$ симметричного тензора u_{ik} входят дважды.

и аналогично для остальных компонент u_{ik} ; здесь введены обозначения $\lambda_{xxxx} = c_1$, $\lambda_{xxyy} = c_2$, $\lambda_{xyxy} = c_3$.

Относительное продольное удлинение стержня есть $u = \frac{dl' - dl}{dl}$, где dl' определяется формулой (1, 2) и $\frac{dx_i}{dl} = n_i$. Это даёт для малых деформаций $u = u_{ik} n_i n_k$. Модуль Юнга определяется как коэффициент пропорциональности в $p = Eu$ и равен

$$\frac{1}{E} = \frac{c_1 + c_2}{(c_1 + 2c_2)(c_1 - c_2)} + \left(\frac{1}{c_3} - \frac{2}{c_1 - c_2} \right) (n_x^2 n_y^2 + n_x^2 n_z^2 + n_y^2 n_z^2).$$

E имеет экстремальные значения в направлениях рёбер (осей координат) и в направлениях пространственных диагоналей куба.

ГЛАВА II

РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

§ 11. Энергия изогнутой пластинки

В этой главе мы будем заниматься изучением некоторых частных случаев равновесия деформируемых тел и начнём с рассмотрения деформаций тонких пластинок. Когда мы говорим, что пластинка является тонкой, то подразумевается, что её толщина мала по сравнению с размерами в двух других направлениях. Самые деформации попрежнему считаются малыми. В данном случае критерием малости деформации является малость смещения точек пластинки по сравнению с её толщиной¹⁾.

При применении к тонким пластинкам общие уравнения равновесия значительно упрощаются. Удобнее, однако, выводить эти упрощённые уравнения не непосредственно из общих, а вычислив заново свободную энергию изогнутой пластинки и затем проварьировав эту энергию.

При сгибании пластинки в некоторых местах внутри неё возникают растяжения, а в других — сжатия. Именно, на выпуклой стороне пластинки, очевидно, происходит растяжение; по мере углубления в толщу пластинки это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличивающееся сжатие. Таким образом, внутри пластинки имеется «нейтральная» поверхность, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум сторонам её деформация имеет противоположный знак. Очевидно, что «нейтральная» поверхность расположена по середине толщины пластинки.

Выберем систему координат с началом в какой-нибудь точке этой «нейтральной» поверхности и осью z , направленной по нормали к ней.

¹⁾ Многочисленные задачи в области теории пластинок были решены *И. Г. Бубновым, С. П. Тимошенко, Б. Г. Галёркиным и П. Ф. Папковичем*. Подробное изложение таких задач можно найти в книгах: *Б. Г. Галёркин, Упругие тонкие плиты, Госстройиздат, 1933; С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.*

Теорией анизотропных пластинок занимался *С. Г. Лехницкий*. Подробное изложение этих вопросов, а также других задач теории упругости анизотропных тел дано им в книгах: «Анизотропные пластинки», Гостехиздат, 1947 и «Теория упругости анизотропного тела», Гостехиздат, 1950.

Плоскость x, y совпадает с плоскостью недеформированной пластинки. Обозначим вертикальное смещение точек «нейтральной» поверхности, т. е. их z -координату, посредством ζ (рис. 121). Что касается компонент смещений этих точек в плоскости x, y , то они являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с ζ и потому могут быть положены равными нулю. Таким образом, вектор смещения точек «нейтральной» поверхности есть

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \quad (11,1)$$

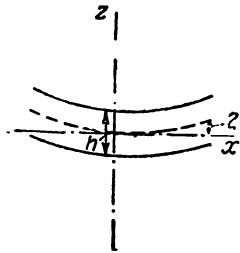


Рис. 121.

Для дальнейших вычислений необходимо сделать следующее замечание относительно напряжений, действующих в деформированной пластинке. Поскольку пластинка тонкая, то, для того чтобы изогнуть её, требуется приложить к её поверхности сравнительно небольшие силы.

Эти силы во всяком случае будут значительно меньше, чем те внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластинки благодаря имеющим в ней место растяжениям и сжатиям. Поэтому в граничных условиях (2,8) можно пренебречь силами P_i , так что остаётся $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку пластинка слабо изогнута, то можно считать, что вектор нормали \mathbf{n} направлен по оси z . Таким образом, на обеих поверхностях пластинки должно быть

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Но поскольку толщина пластинки мала, то из равенства этих величин нулю на двух сторонах пластинки следует, что они малы и внутри неё. Таким образом, мы приходим к выводу, что во всей пластинке компоненты σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. На этом основании мы можем положить их равными нулю и определить компоненты тензора деформации из этого условия.

Согласно общим формулам (5,13) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zx}, & \sigma_{zy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zy}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})]. \end{aligned} \right\} \quad (11,2)$$

Подставляя $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ и приравнявая нулю, находим:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}).$$

В первые два уравнения можно для u_z с достаточной точностью

подставить $\zeta(x, y)$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

откуда

$$u_x = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (11,3)$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю так, чтобы при $z=0$ имело место $u_x = u_y = 0$. Зная u_x и u_y , мы можем определить все компоненты тензора деформации:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, & u_{yy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, & u_{xy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0, & u_{zz} &= z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11,4)$$

Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5,10), свободную энергию F единицы объёма пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (11,5)$$

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему её объёму. Интегрирование по z производится в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$, где h — толщина пластинки, а по x, y — по всей поверхности пластинки. В результате находим полную свободную энергию $F_{\text{пл.}} = \int F dV$ деформированной пластинки в виде

$$F_{\text{пл.}} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (11,6)$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто $dx dy$).

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т. е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформаций внутри самой пластинки. Величина ζ является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при её изгибании.

§ 12. Уравнение равновесия пластинки

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума её свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11,6).

Разобьём стоящий в (11,6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл

можно написать в виде

$$\int (\Delta \zeta)^2 df,$$

где $df = dx dy$ — элемент поверхности, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ обозначает здесь (и везде в §§ 12—14) двухмерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df &= \int \Delta \zeta \Delta \delta \zeta df = \int \Delta \zeta \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta \zeta df = \\ &= \int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df - \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df. \end{aligned}$$

Все векторные операции производятся здесь, конечно, в двухмерной системе координат x, y . Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по замкнутому контуру, охватывающему пластинку¹⁾:

$$\int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df = \oint \Delta \zeta (\mathbf{n} \operatorname{grad} \delta \zeta) dl = \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру.

Во втором интеграле применяем такое же преобразование и получаем:

$$\begin{aligned} \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df &= \int \nabla (\delta \zeta \nabla \Delta \zeta) df - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \\ &= \oint \delta \zeta (\mathbf{n} \nabla) \Delta \zeta dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df. \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты, получаем:

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df = \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df - \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl + \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl. \quad (12,1)$$

Преобразование вариации второго интеграла в (11,6) несколько более длинно. Это преобразование удобнее производить не в вектор-

1) Формула Остроградского для двухмерных интегралов в точности аналогична трёхмерной формуле. Роль элемента объёма dV играет теперь элемент поверхности df (рассматриваемый как скаляр), а вместо элемента поверхности df стоит элемент длины контура dl , умноженный на вектор \mathbf{n} внешней нормали к контуру. Преобразование интеграла по df в интеграл по dl осуществляется заменой оператора $df \frac{\partial}{\partial x_i}$ на величину $n_i dl$. Так, если φ есть некоторый скаляр, то

$$\int \nabla \varphi df = \oint \varphi \mathbf{n} dl.$$

ном виде, а в компонентах. Имеем:

$$\delta \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = \int \left\{ 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df.$$

Подинтегральное выражение здесь можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right),$$

т. е. как двумерную дивергенцию некоторого вектора. Поэтому можно переписать вариацию в виде интеграла по контуру:

$$\delta \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = \oint dl \sin \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \\ + \oint dl \cos \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \quad (12,2)$$

где θ — угол между осью x и нормалью \mathbf{n} к контуру (рис. 122).

Производные от $\delta \zeta$ по x и y выразим через производные по направлению нормали \mathbf{n} к контуру и по направлению касательной \mathbf{l} к нему согласно соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}.$$

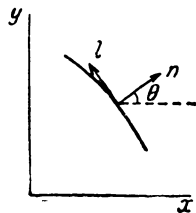


Рис. 122.

Тогда интегралы в формуле (12,2) приобретают следующий вид:

$$\delta \int \{ \dots \} df = \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} + \\ + \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Второй интеграл можно проинтегрировать по частям. Поскольку он берётся по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, и потому мы получаем просто:

$$- \oint dl \delta \zeta \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Сводя все полученные выражения вместе и написав перед ними коэффициенты согласно формуле (11,6), получаем окончательно следующее выражение для вариации свободной энергии:

$$\delta F_{\text{пл.}} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left\{ \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df - \oint \delta \zeta dl \left[\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left(\sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \right] + \right. \\ \left. + \oint \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl \left[\Delta \zeta + (1-\sigma) \left(2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] \right\}. \quad (12,3)$$

Для того чтобы получить отсюда уравнение равновесия пластинки, надо приравнять нулю сумму вариации δF и вариации δU потенциальной энергии пластинки, связанной с наличием действующих на неё внешних сил. Эта последняя вариация равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки. Пусть P есть действующая на пластинку внешняя сила, отнесённая к единице площади её поверхности¹⁾ и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведённая силами при смещении точек пластинки на $\delta\zeta$, равна

$$\int P \delta\zeta df.$$

Таким образом, имеем в качестве условия минимальности полной свободной энергии пластинки уравнение

$$\delta F_{\text{пл.}} - \int P \delta\zeta df = 0; \quad (12,4)$$

В левой части этого равенства стоят как интегралы по поверхности, так и интегралы по контуру. Поверхностный интеграл есть

$$\int \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2\zeta - P \right\} \delta\zeta df.$$

Вариация $\delta\zeta$ в этом интеграле произвольна. Поэтому он равен нулю, если коэффициент при $\delta\zeta$ исчезает, т. е.

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2\zeta - P = 0. \quad (12,5)$$

Это есть уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на неё внешними силами²⁾.

Граничные условия для этого уравнения получаются из равенства нулю контурных интегралов в (12,3). При этом следует рассмотреть несколько различных частных случаев. Предположим, что часть края пластинки свободна, т. е. на неё не действуют никакие внешние силы. Тогда вариации $\delta\zeta$ и $\delta \frac{\partial\zeta}{\partial n}$ на ней произвольны и должны быть равными нулю коэффициенты при этих вариациях в интегралах по контуру.

1) Сила P может являться здесь результатом действия объёмных сил (например, силы тяжести) и равна тогда интегралу от последней по толщине пластинки.

2) Коэффициент

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

в этом уравнении называют жёсткостью пластинки при изгибе или цилиндрической жёсткостью.

Это приводит к уравнениям:

$$-\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} = 0, \quad (12,6)$$

$$\Delta \zeta + (1 - \sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0. \quad (12,7)$$

Они должны выполняться на всей свободной границе пластинки.

Краевые условия (12,6)—(12,7) весьма сложны. Значительно более просты случаи, когда края пластинки «заделаны» или «опёрты». Если края пластинки «заделаны» (рис. 123, а), то они не могут испытывать никакого вертикального смещения и, сверх того, не может измениться также и направление этих краёв. Угол, на который поворачивается данный участок края пластинки относительно своего первоначального положения, равен (при малых смещениях ζ) производной $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$. Таким образом, на заделанных краях пла-

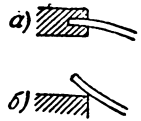


Рис. 123.

стинки вариации $\delta \zeta$ и $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ равны нулю, так что контурные интегралы в (12,3) исчезают тождественно. Граничные условия имеют в этом случае простой вид:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (12,8)$$

Первое выражает собой тот факт, что края пластинки вообще не испытывают вертикального смещения при деформации, а второе— что направление края остаётся горизонтальным.

Легко определить силы реакции, действующие на пластинку со стороны опоры в точках закрепления. Эти силы равны и противоположны силам, действующим на опору со стороны пластинки. Как известно из механики, сила, действующая в некотором направлении, равна производной от энергии по координатам, взятой по этому направлению. В частности, сила, с которой пластинка действует на опору, определяется производной от энергии по смещению ζ края пластинки, взятой с обратным знаком, а обратная сила реакции— той же производной с положительным знаком. Но эта производная есть не что иное, как коэффициент при $\delta \zeta$ во втором интеграле в (12,3). Таким образом, сила реакции, отнесённая к единице длины контура, равна выражению, стоящему в левой части уравнения (12,6) (конечно, не равному теперь нулю), умноженному на $\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$. Аналогично, момент

сил реакции определяется выражением, стоящим в левой части уравнения (12,7), умноженным на тот же множитель. Эго следует непосредственно из известного из механики обстоятельства, что момент силы равен производной от энергии по углу поворота тела. Угол же

поворота края пластинки равен производной $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$, так что соответствующий момент сил определяется коэффициентом при $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ в третьем интеграле в (12,3). При этом оба эти выражения (для силы и момента) ввиду условий (12,8) сильно упрощаются. Именно, поскольку ζ и $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ равны нулю вдоль всего контура края пластинки, то обращаются тождественно в нуль также и их производные всех порядков по направлению касательной l . Учитывая это обстоятельство и переходя в (12,7) и (12,8) от производных по x и y к производным в направлениях n и l , получим следующие простые выражения для силы F и момента M реакции опоры:

$$F = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \sigma \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \right], \quad (12,9)$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \quad (12,10)$$

(после всех дифференцирований мы положили здесь $\theta = 0$, т. е. угол θ отсчитывается от направления нормали к контуру в точке, в которой мы ищем значения F и M).

Другим важным случаем является так называемая опёртая пластинка (рис. 123, б), у которой края только опираются на неподвижную опору, но не закреплены в ней. В таком случае на контуре пластинки (т. е. на линии, по которой пластинка опирается на опору) вертикальное смещение попрежнему отсутствует, но направление отнюдь не остаётся неизменным. Соответственно этому в (12,3) в интеграле по контуру $\delta \zeta = 0$, но $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \neq 0$. Поэтому из двух условий (12,6), (12,7) остаётся только второе. Выражение же, стоящее в левой части (12,6), определяет, как и в предыдущем случае, силу реакции, действующую в точках опоры пластинки (момент же этих сил равен теперь в равновесии нулю). Граничное условие (12,7) упрощается, если перейти к производным по направлениям n и l , причём учесть, что в силу равенства $\zeta = 0$ на всём контуре обращаются в нуль также и производные $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$ и $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial l^2}$. В результате получим граничные условия в виде

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad (12,11)$$

(как и в формулах (12,9) и (12,10), после всех дифференцирований положено $\theta = 0$).

Задачи

1. Определить деформацию круглой пластинки (радиуса R) с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности пластинки,

равна $P = \rho h g$. Уравнение (12,5) приобретает вид

$$\Delta^2 \zeta = 64 \beta, \quad \beta = \frac{3 \rho g (1 - \sigma^2)}{16 h^2 E}$$

(положительные ζ соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку ζ есть функция только от r , то для Δ в полярных координатах надо писать $\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$. Общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + a r^2 + b + c r^2 \ln \frac{r}{R} + d \ln \frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить $d = 0$, так как $\ln \frac{r}{R}$ обращается при $r = 0$ в бесконечность, а также $c = 0$, так как этот член приводит к особой точке у $\Delta \zeta$ при $r = 0$ (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки, — см. задачу 3). Постоянные a и b определяются из граничных условий $\zeta = 0$, $\frac{d\zeta}{dr} = 0$ при $r = R$. В результате находим:

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2)^2.$$

2. То же для пластинки с опёртыми краями.

Решение. Граничные условия (12,11) в случае круглой пластинки при-
обретают вид

$$\zeta = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Решение аналогично решению задачи 1 и приводит к результату

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2) \left(\frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

3. Определить деформацию круглой пластинки с заделанными краями, к центру которой приложена сила f .

Решение. Везде кроме начала координат имеет место уравнение

$$\Delta^2 \zeta = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$\zeta = a r^2 + b + c r^2 \ln \frac{r}{R}$$

(член с $\ln r$ опять опускаем). Полная сила, действующая на пластинку, равна силе f , приложенной к её центру; поэтому интеграл от $\Delta^2 \zeta$ по поверхности пластинки должен быть равен

$$2\pi \int_0^R r \Delta^2 \zeta dr = \frac{12(1 - \sigma^2)}{h^3 E} f.$$

Отсюда получается

$$c = \frac{3(1 - \sigma^2)f}{2\pi h^3 E}.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий. В результате получаем:

$$\zeta = \frac{3f(1 - \sigma^2)}{2h^3 \pi E} \left[\frac{1}{2} (R^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

4. То же для пластинки с опёртыми краями.

Решение.

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{4h^3\pi E} \left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

5. Определить деформацию круглой пластинки, подвешенной в своём центре и находящейся в поле тяжести.

Решение. Уравнение для ζ и его общее решение — такие же, как в задаче 1. Поскольку в центре смещение $\zeta = 0$, то $c = 0$. Постоянные a , b определяются из граничных условий (12,6) и (12,7), имеющих при круговой симметрии вид

$$\frac{d\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

В результате находим:

$$\zeta = \beta r^2 \left[r^2 + 8R^2 \ln \frac{R}{r} + 2R^2 \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \right].$$

6. От тела отрывается тонкий слой (толщиной h) приложенными к нему внешними силами, действующими против сил поверхностного натяжения на поверхности отрыва. При заданных внешних силах устанавливается равновесие с определёнными величиной поверхности отрыва и формой отрываемой пластинки (рис. 124). Вывести формулу, связывающую величину поверхностного натяжения с формой отрываемой пластинки¹⁾.

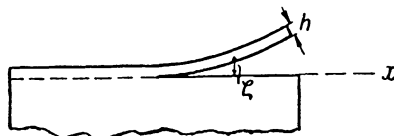


Рис. 124.

Решение. Отрываемый слой рассматриваем как пластинку, один из краёв которой (линия отрыва) заделан. Изгибающий момент, действующий у этого края, определяется формулой (12,10); работа, производимая этим моментом при удлинении области отрыва на δx , равна

$$M \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} = M \delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(работа же изгибающей силы F является малой величиной второго порядка). Условие равновесия заключается в равенстве этой работы изменению поверхностной энергии, т. е. $2\alpha \delta x$, где α — коэффициент поверхностного натяжения, а множитель 2 учитывает возникновение двух свободных поверхностей при разрыве. Таким образом, получим:

$$\alpha = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

§ 13. Продольные деформации пластинок

Особым видом деформаций тонких пластинок являются продольные деформации, происходящие в самой плоскости пластинки и не сопровождающиеся её изгибом. Выведем уравнения равновесия, описывающие такие деформации.

¹⁾ Эта задача была рассмотрена *И. В. Обреимовым* (1930 г.) в связи с разработанным им методом измерения коэффициента поверхностного натяжения слюды; произведённые им этим методом измерения до сих пор остаются единственными непосредственными измерениями поверхностного натяжения твёрдых тел.

Если пластинка достаточно тонка, то деформацию можно считать однородной по её толщине. Тензор деформации является при этом функцией только от x и y (плоскость x, y выбрана в плоскости пластинки) и не зависит от z . Продольные деформации пластинки вызываются обычно либо силами, приложенными к её краям, либо действующими в плоскости пластинки объёмными силами. Граничные условия на обеих поверхностях пластинки гласят при этом: $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку вектор нормали направлен по оси z : $\sigma_{iz} = 0$, т. е.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следует, однако, заметить, что в излагаемой ниже приближённой теории эти условия остаются в силе и в том случае, когда растягивающие внешние силы приложены непосредственно к поверхностям пластинки, так как эти силы всё равно будут малыми по сравнению с возникающими в пластинке продольными внутренними напряжениями ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$). Будучи равными нулю на границах, величины $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ будут малыми и на всём протяжении малой толщины пластинки, в силу чего мы можем приближённо считать их равными нулю во всём объёме пластинки.

Приравняв нулю выражения (11,2), получим следующие соотношения:

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \quad (13,1)$$

Подставив их в общие формулы (5,13), получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13,2)$$

Следует обратить внимание на то, что путём формальной замены

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (13,3)$$

эти выражения переходят в формулы, определяющие связь между напряжениями $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ и деформациями u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} при плоской деформации (формулы (5,13) с $u_{zz} = 0$).

После того как мы таким образом исключили вовсе смещение u_z , мы можем рассматривать пластинку просто как некоторую двухмерную среду («упругая плоскость»), не обладающую толщиной, и говорить о векторе деформации \mathbf{u} как о двухмерном векторе с двумя компонентами u_x и u_y . Если P_x, P_y — компоненты внешней объёмной

силы, отнесённой к единице площади пластинки, то общие уравнения равновесия гласят:

$$h \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + P_x = 0, \quad h \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + P_y = 0.$$

Подставляя сюда выражения (13,2), получаем уравнения равновесия в виде

$$\left. \begin{aligned} Eh \left[\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right] + P_x &= 0, \\ Eh \left[\frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right] + P_y &= 0. \end{aligned} \right\} (13,4)$$

Эти уравнения могут быть написаны в двумерном векторном виде

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{rot rot } \mathbf{u} = -\mathbf{P} \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \quad (13,5)$$

где все векторные операции понимаются как двумерные.

В частности, в отсутствии объёмных сил уравнение равновесия гласит:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (13,6)$$

Оно отличается лишь значением коэффициента (в соответствии с (13,3)) от уравнения равновесия для плоской деформации неограниченного вдоль оси z тела (§ 7)¹⁾. Так же как и для плоской деформации, можно ввести здесь «функцию напряжений», определённую соотношениями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (13,7)$$

автоматически удовлетворяющими уравнениям равновесия, написанным в виде

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Функция напряжений попрежнему удовлетворяет бигармоническому уравнению, так как для $\Delta \chi$ имеем соотношение

$$\Delta \chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma} \text{div } \mathbf{u},$$

отличающееся лишь множителем от того, что мы имели для плоской деформации.

¹⁾ Однородную вдоль оси z деформацию, при которой во всём теле $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$, иногда называют «плоским напряжённым состоянием» в отличие от плоской деформации, при которой во всём теле $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$.

Отметим здесь следующее обстоятельство: распределение напряжений в пластинке, деформируемой приложенными к её краям заданными силами, не зависит от упругих постоянных вещества пластинки. Действительно, эти постоянные не входят ни в бигармоническое уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, ни в формулы (13,7), определяющие компоненты σ_{ik} по этой функции (а потому и в граничные условия на краях пластинки).

З а д а ч и

1. Определить деформацию плоского диска, равномерно вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости.

Решение. Искомое решение отличается лишь значениями постоянных коэффициентов от полученного в задаче 5 § 7 решения для плоской деформации вращающегося цилиндра. Радиальное смещение $u_r = u(r)$ даётся формулой

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1 - \sigma^2)}{8E} r \left(\frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

Это есть выражение, переходящее при замене (13,3) в формулу, полученную в задаче 5 § 7.

2. Определить деформацию полубесконечной пластинки (с прямолинейным краем) под влиянием сосредоточенной силы, приложенной к точке края пластинки и действующей в её плоскости¹⁾.

Решение. Вводим полярные координаты с углом φ , отсчитываемым от направления действия приложенной силы; он пробегает значения от $-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ до $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — угол между направлением силы и нормалью к краю пластинки (рис. 125). Во всех точках свободной границы за исключением точки приложения внешней силы (начало координат) должны выполняться условия $\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$. Воспользовавшись выражениями для $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$, полученными в задаче 11 § 7, найдём, что для этого функция напряжений должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const.}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \text{const.} \quad \text{при} \quad \varphi = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Оба эти условия выполняются, если $\chi = rf(\varphi)$. При такой подстановке бигармоническое уравнение

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \chi = 0$$

даёт для $f(\varphi)$ решения вида $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\varphi \sin \varphi$, $\varphi \cos \varphi$. Из них первые два фиктивны, так как приводят к тождественно равным нулю напряжениям. Решение, дающее правильное значение приложенной в начале координат силы, есть

$$\left. \begin{aligned} \chi &= -\frac{F}{\pi} r \varphi \sin \varphi, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1) Аналогичная задача для анизотропной пластинки решена С. Г. Лехницким (см. его книгу «Анизотропные пластинки», Гостехиздат, 1947).

(F — значение силы, отнесённое к единице толщины пластинки). Действительно, проектируя силы внутренних напряжений на направления, параллельное и перпендикулярное к силе F , и интегрируя по малой полуокружности с центром в начале координат (радиус которой можно представить себе стремящимся затем к нулю), получим:

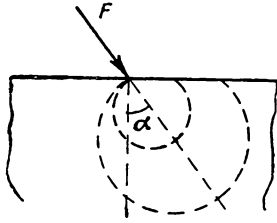


Рис. 125.

$$\int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sigma_{rr} \cos \varphi r d\varphi = -F,$$

$$\int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sigma_{r\varphi} \sin \varphi r d\varphi = 0,$$

т. е. как раз те значения, которые компенсируются приложенной в начале координат внешней силой.

Формулы (1) определяют искомое распределение напряжений. Оно оказывается чисто радиальным: на всякую площадку, перпендикулярную к радиусу, действует только радиальная сжимающая сила. Линиями равных напряжений являются окружности $r = d \cos \varphi$, проходящие через начало координат и имеющие центры на прямой, вдоль которой действует сила F (рис. 125).

Компоненты тензора деформации

$$u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E} \sigma_{rr}, \quad u_{r\varphi} = 0.$$

Отсюда интегрированием (с помощью выражений (1,8) для компонент u_{ik} в полярных координатах) можно найти вектор смещения:

$$u_r = -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Постоянные интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы исключить перемещение (перенос или поворот) пластинки как целого; именно, предполагается несмещённой некоторая условно выбранная точка, находящаяся на расстоянии a от начала координат на линии действия силы.

С помощью полученного решения можно построить решение для произвольного распределения сил, действующих на край пластинки (ср. § 8). Само по себе оно, разумеется, неприменимо в непосредственной окрестности начала координат.

3. Определить деформацию бесконечной клиновидной пластинки (с углом 2α при вершине) под влиянием силы, приложенной к её вершине.

Решение. Распределение напряжений определяется формулами, отличающимися от полученных в предыдущей задаче лишь нормировкой. Если сила действует вдоль средней линии клина (сила F_1 на рис. 126), то имеем:

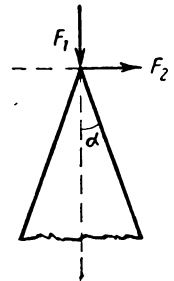


Рис. 126.

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1 \cos \varphi}{r(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

Если же сила действует в перпендикулярном направлении (F_2 на рис. 126), то

$$\sigma_{rr} = - \frac{F_2 \cos \varphi}{r (\alpha - 1/2 \sin 2\alpha)}.$$

В каждом из этих двух случаев угол φ отсчитывается от соответствующего направления действия силы.

4. Определить деформацию круглого диска (радиуса R), сжатого двумя равными и противоположными силами Fh , приложенными к двум концам диаметра (рис. 127).

Решение. Решение задачи получается путём наложения трёх распределений внутренних напряжений. Два распределения суть

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1 r_1}^{(1)} &= - \frac{2F \cos \varphi_1}{\pi} \frac{1}{r_1}, & \sigma_{r_1 \varphi_1}^{(1)} &= \sigma_{\varphi_1 \varphi_1}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} &= - \frac{2F \cos \varphi_2}{\pi} \frac{1}{r_2}, & \sigma_{r_2 \varphi_2}^{(2)} &= \sigma_{\varphi_2 \varphi_2}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

где r_1, φ_1 и r_2, φ_2 — полярные координаты произвольной точки P с началами соответственно в точках A и B (это есть напряжения, которые возникли бы от нормальной силы F , приложенной к точке на границе полуплоскости, см. задачу 2). Третье распределение

$$\sigma_{ik}^{(3)} = \frac{F}{\pi R} \delta_{ik}$$

представляет собой равномерное растяжение определённой интенсивности. Действительно, если точка P лежит на окружности края диска, то для неё $r_1 = 2R \cos \varphi_1, r_2 = 2R \cos \varphi_2$, так что

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = - \frac{F}{\pi R}.$$

Поскольку направления r_1 и r_2 в этой точке взаимно перпендикулярны, то мы видим, что первые две системы напряжений приводят на краю диска к равномерному сжатию; эти силы как раз компенсируются равномерным растяжением третьей системы, так что край диска оказывается, как и следовало, свободным от напряжений.

5. Определить распределение напряжений в неограниченной пластинке с круглым отверстием (радиуса R), подвергаемой равномерному растяжению.

Решение. Равномерному растяжению сплошной пластинки соответствуют напряжения $\sigma_{xx}^{(0)} = T, \sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$, где T — растягивающая сила. Им отвечает функция напряжений

$$\chi^{(0)} = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T}{2} r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

При наличии круглого отверстия (с центром в начале полярных координат r, φ) ищем функцию напряжений в виде

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}, \quad \chi^{(1)} = f(r) + F(r) \cos 2\varphi.$$

Не зависящий от φ интеграл бигармонического уравнения имеет вид

$$f(r) = ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r,$$

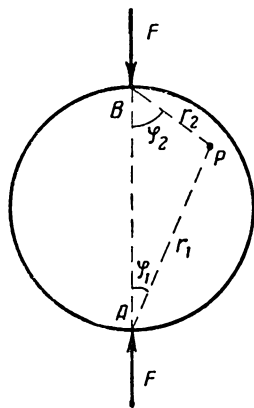


Рис. 127.

а в интеграле, пропорциональном $\cos 2\varphi$:

$$F(r) = dr^2 + er^4 + \frac{g}{r^2}.$$

Входящие сюда постоянные определяются условиями $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$ при $r = \infty$ и $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ при $r = R$. В результате получим:

$$\chi^{(1)} = \frac{TR^2}{2} \left[-\ln r + \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right) \cos 2\varphi \right],$$

и распределение напряжений определяется так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right) \cos 2\varphi\right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi\right], \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{T}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right] \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

В частности, на границе отверстия $\sigma_{\varphi\varphi} = T(1 - 2 \cos 2\varphi)$, а при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ $\sigma_{\varphi\varphi} = 3T$, т. е. в три раза превосходит напряжения на бесконечности (ср. задачу 12 § 7).

§ 14. Сильный изгиб пластинок

Изложенная в §§ 11—13 теория изгиба тонких пластинок применима лишь к достаточно слабым изгибам. Забегая вперёд, укажем уже здесь, что условием применимости этой теории является малость прогиба ζ по сравнению с толщиной h пластинки. Теперь мы перейдём к выводу уравнений равновесия сильно изогнутой пластинки. Прогиб ζ при этом уже не предполагается малым по сравнению с h . Подчёркиваем, однако, что самая деформация попрежнему должна быть мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает требование $\zeta \ll l$, т. е. прогиб должен быть мал по сравнению с размерами l пластинки.

Изгиб пластинки сопровождается, вообще говоря, её общим растяжением¹⁾. В случае слабого изгиба этим растяжением можно пренебречь. При сильном же изгибе этого уже отнюдь нельзя сделать; в сильно изогнутой пластинке не существует поэтому никакой «нейтральной поверхности». Наличие растяжения, сопровождающего изгиб, является специфической особенностью пластинок, отличающей их от тонких стержней, которые могут быть подвергнуты сильному изгибу, не испытывая при этом общего растяжения. Это свойство пластинок является чисто геометрическим. Пусть, например, плоская круглая пластинка изгибается в поверхность шарового сегмента. Если произвести изгиб так, чтобы длина окружности осталась неизменною, то должен растянуться её диаметр. Если же диаметр пластинки не растягивается, то должна сжаться длина её окружности.

¹⁾ Исключением является, например, изгиб плоской пластинки в цилиндрическую поверхность.

Вычисленная нами в § 11 энергия (11,6), которую можно назвать энергией чистого изгиба, представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая обусловлена неравномерностью растяжения и сжатия вдоль толщины пластинки при отсутствии какого-либо полного её растяжения. Наряду с этой энергией в полную энергию входит ещё часть, обусловленная как раз наличием этого общего растяжения; её можно назвать энергией растяжения.

Деформации чистого изгиба и чистого растяжения были рассмотрены нами соответственно в §§ 11, 12 и 13. Поэтому теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом отпадает необходимость в рассмотрении структуры пластинки по её толщине, и мы можем сразу рассматривать пластинку как двумерную поверхность, не обладающую толщиной.

Предварительно выведем выражение для тензора деформации, определяющего растяжение пластинки (рассматриваемой как поверхность), подвергнутой одновременно изгибу и растяжению в своей плоскости. Пусть \mathbf{u} есть двумерный вектор смещения (с компонентами u_x, u_y) при чистом растяжении; ζ поперечному обозначает поперечное смещение при изгибе. Тогда элемент длины $dl^2 = dx^2 + dy^2$ недеформированной пластинки перейдёт после деформации в элемент dl'^2 , квадрат которого равен

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

Написав здесь $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ и аналогично для du_y и $d\zeta$, получим с точностью до членов более высокого порядка

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

где двумерный тензор деформации определяется как

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \quad (14,1)$$

(В этом и следующем параграфах мы будем обозначать посредством греческих букв индексы, пробегаящие всего два значения x и y ; по дважды повторяющимся индексам, как всегда, подразумевается суммирование.) Члены, квадратичные по производным от u_α , здесь опущены; того же самого с производными от ζ сделать, разумеется, нельзя, поскольку члены первого порядка по ним вообще не имеются.

Тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, связанные с растяжением пластинки, определяется формулами (13,2), в которых вместо $u_{\alpha\beta}$ надо подставить полный тензор деформации, определяемый согласно формуле (14,1). Энергия чистого изгиба определяется формулой (11,6), которую мы напишем условно в виде

$$\int \Psi_1(\zeta) dx dy,$$

где $\Psi_1(\zeta)$ обозначает всё выражение, стоящее под интегралом (11,6). Энергия же растяжения, отнесённая к единице объёма пластинки, есть согласно общим формулам $\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}$. Энергия, приходящаяся на единицу поверхности, получается отсюда умножением на h , так что полная энергия растяжения может быть написана в виде

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta}) df,$$

где

$$\Psi_2 = h \frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \quad (14,2)$$

Таким образом, полная свободная энергия сильно изогнутой пластинки есть

$$F_{\text{пл.}} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})] df. \quad (14,3)$$

Раньше чем перейти к выводу уравнений равновесия, оценим обе части энергии. Первые производные от ζ — порядка $\frac{\zeta}{l}$, где l — размеры пластинки, а вторые — порядка $\frac{\zeta}{l^2}$. Поэтому из (11,6) видно, что $\Psi_1 \sim Eh^3 \frac{\zeta^2}{l^4}$. Порядок же величины тензора $u_{\alpha\beta}$ есть $\frac{\zeta^2}{l^2}$, и потому $\Psi_2 \sim Eh \frac{\zeta^4}{l^4}$. Сравнение обоих этих выражений показывает, что пренебрежение Ψ_2 , делаемое в приближённой теории изгиба пластинок, законно только при условии $\zeta^2 \ll h^2$.

Условие минимальности энергии гласит: $\delta F + \delta U = 0$, где U — потенциальная энергия в поле внешних сил. Мы будем считать, что действие внешних растягивающих сил, если таковые имеются, можно пренебречь по сравнению с силами изгибающими. (Это можно всегда сделать, если только растягивающие силы не слишком велики, поскольку тонкая пластинка гораздо легче подвергается изгибу, чем растяжению.) Тогда для δU имеем то же выражение, что и в § 12:

$$\delta U = - \int P \delta \zeta df,$$

где P — внешняя сила, отнесённая к единице поверхности пластинки.

Вариация интеграла $\int \Psi_1 df$ была уже вычислена в § 12 и равна

$$\delta \int \Psi_1 df = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df.$$

Интегралы по контуру, стоящие в формуле (12,3), мы не пишем, поскольку они определяют не самое уравнение равновесия, а только граничные условия к нему, которыми мы не станем здесь интересоваться.

Наконец, вычислим вариацию интеграла $\int \Psi_2 df$. Варьирование в нём должно производиться как по компонентам вектора \mathbf{u} , так и по ζ . Имеем:

$$\delta \int \Psi_2 df = \int \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} \delta u_{\alpha\beta} df.$$

Производные от свободной энергии единицы объёма по $u_{\alpha\beta}$ равны $\sigma_{\alpha\beta}$; поэтому $\frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} = h\tau_{\alpha\beta}$. Подставляя также для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14,1), получаем:

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} df = \frac{h}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right\} df,$$

или ввиду симметричности $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right\} df.$$

Интегрируя теперь по частям, получаем:

$$\delta \int \Psi_2 df = -h \int \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) \delta \zeta \right] df.$$

Интегралы по контуру, огибающему поверхность пластинки, мы опять не пишем.

Сводя вместе все полученные выражения, имеем:

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{пл}} + \delta U = \\ = \int \left\{ \left[\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) - P \right] \delta \zeta - h \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} df = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы это соотношение имело место тождественно, должны обращаться в нуль отдельно коэффициенты при $\delta \zeta$ и при δu_α . Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) = P, \quad (14,4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (14,5)$$

В эту систему входят в качестве неизвестных функций три величины: две компоненты u_x, u_y вектора \mathbf{u} и поперечное смещение ζ . Её решение определяет одновременно форму изогнутой пластинки (т. е. функцию $\zeta(x, y)$) и возникающее в результате изгиба растяжение. Уравнения (14,4) и (14,5) могут быть несколько упрощены посредством введения в них функции χ , связанной с $\sigma_{\alpha\beta}$ соотношениями

(13,7). После подстановки (13,7) в уравнение (14,4) оно приводится к виду

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = P. \quad (14,6)$$

Что касается уравнений (14,5), то выражениями (13,6) они удовлетворяются автоматически. Поэтому необходимо вывести ещё одно уравнение, которое может быть получено исключением u_α из соотношений (13,7) и (13,2).

Для этого поступаем следующим образом. Выражаем $u_{\alpha\beta}$ через $\sigma_{\alpha\beta}$. Из (13,2) получаем:

$$u_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}.$$

Подставляя сюда для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14,1), а для $\sigma_{\alpha\beta}$ — выражения (13,7), находим равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= - \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Применим к первому операции $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ко второму $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, к третьему $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, после чего сложим первое со вторым и вычтем третье. Тогда члены, содержащие u_x и u_y , взаимно сокращаются, и мы получаем уравнение

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (14,7)$$

Уравнения (14,6) и (14,7) представляют собой полную систему уравнений сильного изгиба тонких пластинок. Эти уравнения весьма сложны и не могут быть решены точно даже в простейших случаях. Обращаем внимание на то, что они нелинейны.

Упомянем коротко об особом случае деформаций тонких пластинок — о так называемых мембранах. Мембраной называют тонкую пластинку, подвергнутую сильному растяжению приложенными к её краям внешними растягивающими силами. В таком случае можно пренебречь дополнительными продольными натяжениями, возникающими при изгибе пластинки, и соответственно этому можно считать, что компоненты тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ равны просто постоянным внешним растягивающим напряжениям. В уравнении (14,4) можно теперь пренебречь первым членом по сравнению со вторым, и мы получаем уравнение

равновесия:

$$h\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + P = 0 \quad (14,8)$$

с граничным условием $\zeta = 0$ на контуре края мембраны. Это уравнение линейно. В особенности прост случай изотропного растяжения, когда натяжение мембраны одинаково по всем направлениям. Пусть T есть абсолютная величина приложенной к краю пластинки растягивающей силы, отнесённой к единице длины этого края. Тогда $h\sigma_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$, и мы получаем уравнение равновесия в виде

$$T\Delta\zeta + P = 0. \quad (14,9)$$

З а д а ч и

1. Определить зависимость величины прогиба пластинки от действующей на неё силы при изгибе настолько сильном, что $\zeta \gg h$.

Решение. Оценка членов уравнения (14,7) показывает, что $\chi \sim E\zeta^2$. При $\zeta \gg h$ первый член в (14,6) мал по сравнению со вторым, который имеет порядок величины $\frac{h\zeta\gamma}{l^4} \sim \frac{Eh\zeta^3}{l^4}$ (l — размеры пластинки). Сравнивая с внешней силой P , получаем:

$$\zeta \sim \left(\frac{l^4 P}{Eh} \right)^{1/3}.$$

Отсюда, в частности, видно, что ζ пропорционально кубическому корню из силы.

2. Определить деформацию круглой мембраны (радиуса R), расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Имеем $P = \rho g h$; в полярных координатах (14,9) принимает вид $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = -\frac{\rho g h}{T}$. Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\zeta = 0$ при $r = R$, есть

$$\zeta = \frac{\rho g h}{4T} (R^2 - r^2).$$

§ 15. Деформации оболочек

Говоря до сих пор о деформациях тонких пластинок, мы всегда подразумевали, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Между тем деформации пластинок, обладающих в своём естественном состоянии искривлённой формой (такие пластинки называют оболочками), обнаруживают особенности, принципиально отличающие их от деформаций плоских пластинок.

Растяжение, сопровождающее изгиб плоской пластинки, является эффектом второго порядка малости по сравнению с величиной самого прогиба. Это проявляется, например, в том, что тензор деформации (14,1), определяющий такое растяжение, квадратичен по ζ . Совершенно иное положение имеет место при деформациях оболочек: здесь

растяжение есть эффект первого порядка и потому играет существенную роль даже при слабом изгибе. Проще всего это свойство видно уже из самого простого примера равномерного растяжения сферической оболочки. Если все её точки подвергаются одинаковому радиальному смещению ζ , то увеличение длины экватора равно $2\pi\zeta$. Относительное растяжение $\frac{2\pi\zeta}{2\pi R} = \frac{\zeta}{R}$, а потому и тензор деформации пропорциональны первой степени ζ . Этот эффект стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, т. е. при стремлении кривизны к нулю, и является, таким образом, специфическим свойством, связанным с кривизной оболочки.

Пусть l есть порядок величины радиуса кривизны оболочки, совпадающий обычно с порядком величины её размеров. Тогда тензор деформации растяжения, сопровождающего изгиб, — порядка $\frac{\zeta}{l}$, соответствующий тензор напряжений $\sim E \frac{\zeta}{l}$, а энергия деформации (отнесённая к единице площади) согласно (14,2) — порядка $Eh \left(\frac{\zeta}{l}\right)^2$. Энергия же чистого изгиба попрежнему порядка $Eh^3 \frac{\zeta^2}{l^4}$. Мы видим, что отношение первой ко второй порядка $\left(\frac{l}{h}\right)^2$, т. е. очень велико. Подчеркнём, что это имеет место независимо от соотношения между величиной ζ изгиба и толщиной h , в то время как при изгибе плоских пластинок растяжение начинало играть роль только при $\zeta \sim h$.

В некоторых случаях может существовать особый тип изгиба оболочек, при котором никакого растяжения не происходит вовсе. Так, например, цилиндрическая оболочка (с открытыми обоими концами цилиндра) может быть деформирована без растяжения, если все образующие цилиндра остаются при изгибе параллельными друг другу (т. е. оболочка как бы вдавливается по какой-нибудь из образующих). Такие деформации без растяжения геометрически возможны, если оболочка имеет свободные края (т. е. не замкнута) или же если оболочка замкнута, но её кривизна в разных местах имеет разный знак. Например, замкнутая сферическая оболочка не может быть изогнута без растяжения; если же в ней прорезано отверстие (причём его края не закреплены), то такие деформации становятся возможными. Поскольку энергия чистого изгиба мала по сравнению с энергией растяжения, то ясно, что если данная оболочка допускает деформации без растяжения, то именно такие деформации и будут, вообще говоря, реально осуществляться при воздействии на неё произвольных внешних сил. Требование отсутствия растяжения при изгибе накладывает существенные ограничения на возможные смещения u_α . Эти условия являются чисто геометрическими и могут быть выражены в виде дифференциальных уравнений, которые должны содержаться в полной системе уравнений равновесия для таких деформаций. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Если же деформация оболочки сопровождается растяжением, то напряжения растяжения, вообще говоря, велики по сравнению с напряжениями изгиба и последними можно пренебречь (основанную на таком пренебрежении теорию оболочек называют мембранной).

Энергия растяжения оболочки может быть вычислена как интеграл

$$F_{\text{пл}} = \frac{h}{2} \int u_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} df, \quad (15,1)$$

взятый по её поверхности. Здесь $u_{\alpha\beta}$ есть двухмерный ($\alpha, \beta = 1, 2$) тензор деформации в соответствующих криволинейных координатах, а тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ связан с $u_{\alpha\beta}$ формулами (13,2), которые могут быть написаны в двухмерных тензорных обозначениях как

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\sigma^2} [(1-\sigma) u_{\alpha\beta} + \sigma \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma}]. \quad (15,2)$$

Особого рассмотрения требует случай, когда оболочка подвержена воздействию сосредоточенных сил (т. е. сил, приложенных к изолированным точкам или линиям на поверхности оболочки), направленных в поперечном к оболочке направлении. Такими силами могут являться, в частности, силы реакции, действующие на оболочку со стороны опор в точках (или линиях) закрепления. Сосредоточенные силы производят в небольшой области вокруг точек их приложения изгиб пластинки; пусть d есть порядок величины размеров этой области (так что её площадь — порядка d^2). Поскольку изгиб ζ сильно меняется на протяжении расстояний d , то энергия изгиба (на единицу площади) — порядка величины $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4}$, а полная энергия изгиба (на площади $\sim d^2$) — порядка $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^2}$. Тензор же деформации растяжения попрежнему $\sim \frac{\zeta}{l}$, и полная энергия вызванного сосредоточенной силой растяжения $\sim Eh \frac{\zeta^2}{l^2} d^2$. Поскольку энергия изгиба растёт, а энергия растяжения падает с уменьшением d , то ясно, что при определении деформации вблизи места приложения сосредоточенных сил должны быть учтены обе эти энергии. Величина области изгиба d определится по порядку величины из условия минимума суммы этих энергий, откуда

$$d \sim \sqrt{hl}.$$

Мы ограничимся здесь изложенными краткими указаниями и некоторыми простыми примерами, приведёнными в задачах этого параграфа.

ЗАДАЧИ

1. Вывести уравнения равновесия для сферической оболочки (радиуса R), деформируемой симметрично относительно оси, проходящей через её центр.
Решение. В качестве двухмерных координат на поверхности оболочки пользуемся углами θ, φ сферической системы координат с началом

в центре сферы и полярной осью по оси симметрии деформированной оболочки.

Пусть P_r — отнесённая к единице поверхности оболочки радиальная внешняя сила. Эта сила должна компенсироваться радиальной равнодействующей сил внутренних напряжений, действующих на элемент оболочки в тангенциальных к нему направлениях. Соответствующее условие гласит:

$$\frac{h}{R} (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \quad (1)$$

Это уравнение в точности аналогично известному уравнению Лапласа, определяющему разность давлений двух сред, связанную с действующим в поверхности их раздела поверхностным напряжением.

Пусть, далее, $Q_z(\theta)$ есть направленная вдоль полярной оси (оси z) равнодействующая всех внешних сил, действующих на часть оболочки, расположенную над параллельным кругом $\theta = \text{const}$. Эта сила должна компенсироваться проекцией на ось z напряжений $2\pi R \sin \theta h \sigma_{\theta\theta}$, действующих на сечение $2\pi R h \sin \theta$ оболочки по указанной окружности. Отсюда

$$2\pi R h \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) определяется распределение напряжений, после чего тензор деформации находится по формулам

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\varphi} = 0, \quad (3)$$

а затем вектор смещения с помощью уравнений

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{du_{\theta}}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} (u_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + u_r). \quad (4)$$

2. Определить деформацию под влиянием собственного веса полусферической оболочки, расположенной куполом вверх; края купола свободно перемещаются по горизонтальной опоре (рис. 128).

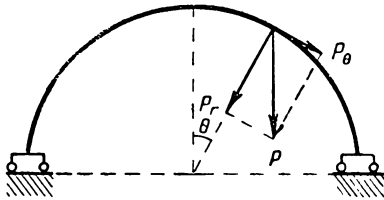


Рис. 128.

Решение. Имеем:

$$P_r = -\rho g h \cos \theta,$$

$$Q_z = -2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \rho g h$$

(Q_z есть полный вес оболочки над окружностью $\theta = \text{const}$). Из (1) и (2) находим:

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R\rho g}{1 + \cos \theta},$$

$$\sigma_{rr} = R\rho g \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right).$$

По формулам (3) вычисляем $u_{\varphi\varphi}$ и $u_{\theta\theta}$, после чего из уравнений (4) вычисляем u_{θ} и u_r (постоянная, возникающая при интегрировании первого из этих уравнений, определяется так, чтобы при $\theta = \pi/2$ было $u_{\theta} = 0$). В результате получим:

$$u_{\theta} = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln (1 + \cos \theta) \right] \sin \theta,$$

$$u_r = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[1 - \frac{2 + \sigma}{1 + \sigma} \cos \theta - \cos \theta \ln (1 + \cos \theta) \right].$$

Значение u_r при $\theta = \frac{\pi}{2}$ даёт горизонтальное смещение опоры.

3. Определить деформацию полусферической оболочки с закреплёнными краями, расположенной куполом вниз и наполненной жидкостью (рис. 129); весом самой оболочки можно пренебречь по сравнению с весом жидкости.

Решение. Имеем:

$$P_r = \rho_0 g R \cos \theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2 \int_0^\theta P_r \cos \theta \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{2\pi R^3 \rho_0 g}{3} (1 - \cos^3 \theta)$$

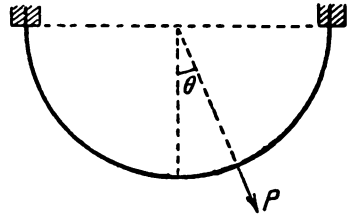


Рис. 129.

(ρ_0 — плотность жидкости). Далее, по формулам (1) и (2) находим:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{-1 + 3 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Для смещений получается:

$$u_\theta = -\frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \sin \theta \left[\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln(1 + \cos \theta) \right],$$

$$u_r = \frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \left[\cos \theta \ln(1 + \cos \theta) - 1 + \frac{3 \cos \theta}{1 + \sigma} \right].$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ u_r остаётся конечным, а не обращается в нуль, как должно было быть. Это значит, что в действительности вблизи линии закрепления оболочки происходит настолько сильный изгиб, что полученное решение становится неприменимым.

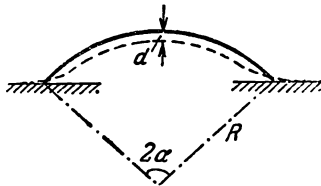


Рис. 130.

4. Оболочка в виде шарового сегмента опирается своими свободными краями на неподвижную опору (рис. 130). Определить величину её прогиба под действием собственного веса Q .

Решение. Основная деформация происходит вблизи краёв, отгибающихся в сторону (пунктирная линия на рис. 130). При этом смещение u_θ мало по сравнению с радиаль-

ным смещением $u_r \equiv \zeta$. Поскольку ζ быстро убывает по мере удаления от линии опоры, то возникающую деформацию можно рассматривать как деформацию плоской длинной (длины $2\pi R \sin \alpha$) пластинки. Эта деформация складывается из изгиба и растяжения пластинки. Относительное удлинение пластинки в каждой её точке равно ζ/R (R — радиус оболочки), и потому энергия растяжения (на единицу объёма) есть $\frac{E\zeta^2}{2R^2}$. Вводя в качестве независимой переменной расстояние x от линии опоры, имеем для полной энергии растяжения

$$F_{\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{hE}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

Энергия же изгиба есть

$$F_{\text{пл}} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{24(1 - \sigma^2)} \int \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Варьируя сумму $F_{\text{пл}} = F_{1\text{пл}} + F_{2\text{пл}}$ по ζ , получим уравнение

$$\frac{d^4\zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2R^2}\zeta = 0.$$

При $x \rightarrow \infty$ ζ должно стремиться к нулю, а при $x = 0$ должны выполняться граничные условия равенства нулю момента сил: $\zeta'' = 0$, и условие равенства развивающейся при изгибе силы нормальной к поверхности оболочки компоненте силы тяжести:

$$2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \zeta''' = Q \cos \alpha.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta = A e^{-\kappa x} \cos \kappa x,$$

где

$$\kappa = \left[\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[\frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

Величина прогиба оболочки есть

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

§ 16. Кручение стержней

Перейдём теперь к изучению деформаций тонких стержней. Этот случай отличается от всех ранее рассматривавшихся тем, что вектор смещения \mathbf{u} может быть большим даже при слабой деформации, т. е. при малом тензоре u_{ik} ¹⁾. Так, при слабом сгибании тонкого длинного стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым — его кручение. С рассмотрения этого второго случая мы и начнём.

Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно ниже лежащих на некоторый угол. Если стержень длинный, то при слабом кручении достаточно удалённые друг от друга сечения могут повернуться на большой угол. Образующие боковой поверхности стержня, параллельные его оси, приобретают при кручении винтовую форму.

Рассмотрим тонкий прямой стержень произвольного сечения. Выберем систему координат с осью z вдоль оси стержня и началом координат где-нибудь внутри него. Введём угол кручения τ как угол поворота, отнесённый к единице длины стержня. Это значит, что два

¹⁾ Исключением является только простое растяжение стержня без изменения его формы, — при слабом растяжении наряду с тензором u_{ik} всегда мал также и вектор \mathbf{u} .

бесконечно близких поперечных сечения, находящихся на расстоянии dz , поворачиваются друг относительно друга на угол $d\varphi = \tau dz$ (так что $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$). Самая деформация кручения, т. е. относительные смещения соседних частей стержня, предполагаются малыми. Условием этого является малость относительного поворота сечений, удалённых вдоль длины стержня на расстояния порядка его поперечных размеров R , т. е.

$$\tau R \ll 1. \quad (16,1)$$

Рассмотрим небольшую область длины стержня вблизи начала координат и определим смещения \mathbf{u} точек стержня в этой области. В качестве несмещённого выберем поперечное сечение стержня в координатной плоскости x, y . Как известно, при повороте радиус-вектора \mathbf{r} на малый угол $\delta\varphi$ смещение его конца определяется формулой

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \mathbf{r}], \quad (16,2)$$

где $\delta\varphi$ — вектор с абсолютной величиной, равной углу поворота, направленный вдоль оси, вокруг которой производится поворот. В нашем случае поворот производится вокруг оси z , причём для точек с координатой z угол поворота относительно плоскости x, y равен τz (угол τ в области вблизи начала координат можно рассматривать как постоянный). Формула (16,2) даёт теперь для компонент u_x, u_y вектора смещения

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \quad (16,3)$$

При кручении стержня его точки испытывают, вообще говоря, также и смещение вдоль оси z . Поскольку при $\tau = 0$ это смещение отсутствует, то при малых τ его можно считать пропорциональным τ . Таким образом,

$$u_z = \tau\psi(x, y), \quad (16,4)$$

где $\psi(x, y)$ — некоторая функция от x и y , называемая функцией кручения. В результате описываемой формулами (16,3) и (16,4) деформации каждое поперечное сечение стержня поворачивается вокруг оси z , одновременно искривляясь, переставая быть плоским. Следует заметить, что, выбрав определённым образом начало координат в плоскости x, y , мы тем самым «закрепляем» определённую точку сечения стержня так, что она не смещается в этой плоскости (смещаясь, однако, вдоль оси z); изменение выбора начала координат не отразилось бы, разумеется, на самой деформации кручения, приведя лишь к несущественному общему смещению стержня как целого.

Зная \mathbf{u} , можно найти компоненты тензора деформации. Поскольку \mathbf{u} в рассматриваемой области мало, то можно воспользоваться фор-

мулой $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$. В результате находим:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \\ u_{xz} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (16,5)$$

Обращаем внимание на то, что $u_{ii} = 0$; другими словами, кручение не сопровождается изменением объёма, т. е. представляет собой деформацию чистого сдвига.

Для компонент тензора напряжений находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu u_{xz} = \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (16,6)$$

(здесь удобнее пользоваться модулем сдвига μ вместо E и σ). Поскольку отличны от нуля только σ_{xz} и σ_{yz} , то общие уравнения равновесия $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$ сводятся к уравнению

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (16,7)$$

Подставив сюда (16,6), мы найдём, что функция кручения должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \psi = 0, \quad (16,8)$$

где Δ — двухмерный оператор Лапласа.

Несколько более удобно, однако, пользоваться другой вспомогательной функцией $\chi(x, y)$, определяемой равенствами:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad (16,9)$$

для этой функции получаются более удобные граничные условия на контуре сечения стержня (см. ниже). Сравнивая (16,9) с (16,6), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (16,10)$$

Дифференцируя первое равенство по y , второе по x и вычитая одно из другого, получим для функции χ следующее уравнение:

$$\Delta \chi = -1. \quad (16,11)$$

Для определения граничных условий на поверхности стержня замечаем, что благодаря малой толщине стержня действующие на его боковую поверхность внешние силы малы по сравнению с возникающими в стержне внутренними напряжениями и потому могут быть положены (при отыскании граничных условий) равными нулю. Это обстоятельство в точности аналогично тому, что мы имели при рас-

смотрении изгиба тонких пластинок. Таким образом, на боковой поверхности стержня должно быть $\sigma_{ik}n_k = 0$; поскольку ось z направлена по оси стержня, то вектор нормали \mathbf{n} имеет только компоненты n_x, n_y , так что написанное уравнение сводится к условию

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0.$$

Подставляя сюда (16,9), получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0.$$

Но компоненты вектора нормали к плоскому контуру (контур сечения стержня) равны $n_x = -\frac{dy}{dl}$, $n_y = \frac{dx}{dl}$, где x, y — координаты точек контура, а dl — элемент дуги. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0,$$

откуда $\chi = \text{const.}$, т. е. на контуре сечения функция χ постоянна. Поскольку в определении (16,9) входят только производные от функции χ , то ясно, что к этой функции можно прибавлять любую постоянную. Если контур сечения односвязен, то можно, следовательно, без всякого ограничения общности положить на нём в качестве граничного условия к уравнению (16,11)¹⁾

$$\chi = 0. \quad (16,12)$$

В случае же многосвязного контура χ будет иметь различные постоянные значения на каждой из замкнутых кривых, составляющих контур. Поэтому положить χ равным нулю можно будет лишь на одной из этих кривых, например на внешней контуре (C_0 на рис. 131). Значения же χ на остальных частях контура определятся из условия, являющегося следствием однозначности смещения $u_z = \tau\psi(x, y)$ как функции координат. Именно, ввиду однозначности функции кручения $\psi(x, y)$ интеграл от её дифференциала $d\psi$ по замкнутому контуру должен быть равен нулю. С помощью соотношений (16,11) имеем поэтому

$$\begin{aligned} \oint d\psi &= \oint \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\ &= -2 \oint \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - 2 \oint (x dy - y dx) = 0, \end{aligned}$$

1) Задача об определении деформации кручения по уравнению (16,11) с граничным условием (16,12) формально совпадает с задачей об определении формы прогиба равномерно нагруженной плоской мембраны по уравнению (14,9).

Полезно заметить также гидродинамическую аналогию: уравнением вида (16,11) определяется распределение скоростей $v(x, y)$ вязкой жидкости по сечению трубы; граничному условию (16,12) соответствует условие $v = 0$ на неподвижных стенках трубы (см. «Гидродинамика», § 17).

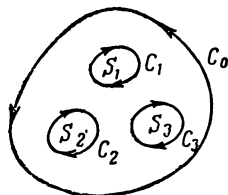


Рис. 131.

или

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S, \quad (16,13)$$

где $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ есть производная функции χ по направлению внешней нормали к контуру, а S — охватываемая этим контуром площадь. Применяя это соотношение к каждой из замкнутых кривых C_1, C_2, \dots , мы и получим искомые условия.

Определим свободную энергию подвергнутого кручению стержня. Для энергии единицы объёма имеем:

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

и, подставляя сюда (16,9):

$$F = 2\mu\tau^2 \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \equiv 2\mu\tau^2 (\nabla\chi)^2,$$

где ∇ означает двухмерный градиент. Энергия кручения, отнесённая к единице длины стержня, получится отсюда интегрированием по площади поперечного сечения, т. е. равна $\frac{C\tau^2}{2}$, где коэффициент C равен

$$C = 4\mu \int (\nabla\chi)^2 df.$$

Величина C называется крутильной жёсткостью стержня. Полная упругая энергия стержня равна интегралу

$$F_{cr} = \frac{1}{2} \int C\tau^2 dz, \quad (16,14)$$

взятому по его длине.

Написав

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla(\chi \nabla\chi) - \chi \Delta\chi = \nabla(\chi \nabla\chi) + \chi$$

и преобразуя интеграл от первого члена в интеграл по линии контура сечения стержня, получим:

$$C = 4\mu \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dl + 4\mu \int \chi df. \quad (16,15)$$

Если контур сечения односвязен, то ввиду граничного условия $\chi = 0$ первый член исчезает и остаётся

$$C = 4\mu \int \chi dx dy. \quad (16,16)$$

Для многосвязной же границы (рис. 131), положив $\chi = 0$ на внешнем контуре C_0 и обозначив посредством χ_k постоянные значения χ на внутренних контурах C_k , получим с помощью (16,13)

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi dx dy \quad (16,17)$$

(следует помнить, что при интегрировании в первом члене в (16,15) контур C_0 обходится в прямом, а контуры C_k — в обратном направлении).

Рассмотрим наиболее обычный случай кручения, когда один из концов стержня закреплён неподвижно, а внешние силы приложены только к поверхности другого его конца. Эти силы таковы, что производят только кручение стержня без какой бы то ни было другой его деформации, например изгиба. Другими словами, они составляют некоторую пару сил, закручивающую стержень вокруг его оси. Момент этой пары обозначим посредством M .

Естественно ожидать, что в таком случае угол кручения τ постоянен вдоль длины стержня. В этом можно убедиться, например, из условия минимума полной свободной энергии стержня в равновесии. Полная энергия деформированного стержня равна сумме $F_{ср} + U$, где U — потенциальная энергия, обусловленная действием внешних сил. Подставляя в (16,14) $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$ и варьируя по углу φ , находим:

$$\delta \frac{1}{2} \int C \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \delta U = \int C \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\delta\varphi}{dz} dz + \delta U = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$- \int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta U + C\tau\delta\varphi \Big| = 0.$$

В последнем члене слева берётся разность значений на пределах интегрирования, т. е. на концах стержня. Один из этих концов, скажем, нижний, закреплён так, что на нём $\delta\varphi = 0$. Что касается вариации δU потенциальной энергии, то, взятая с обратным знаком, она представляет собой работу внешних сил при повороте на угол $\delta\varphi$. Как известно из механики, работа пары сил при таком повороте равна произведению $M\delta\varphi$ угла поворота на момент пары. Поскольку никаких других внешних сил нет, то $\delta U = -M\delta\varphi$, и мы получаем:

$$\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta\varphi (-M + C\tau) \Big| = 0. \quad (16,18)$$

Во втором члене берётся его значение на верхнем пределе. В интеграле по dz вариация $\delta\varphi$ произвольна, а потому должно быть

$$C \frac{d\tau}{dz} = 0,$$

т. е.

$$\tau = \text{const.} \quad (16,19)$$

Таким образом, угол кручения постоянен вдоль всей длины стержня.

Полный угол поворота верхнего основания относительно нижнего равен поэтому просто произведению τl угла τ на длину l стержня.

В уравнении (16,18) должен исчезнуть также и второй член. Отсюда находим следующее выражение для постоянного угла кручения:

$$\tau = \frac{M}{C}. \quad (16,20)$$

Задачи

1. Определить крутильную жёсткость стержня с круговым сечением (радиуса R).

Решение. Решения задач 1—4 формально совпадают с решениями задач о движении вязкой жидкости в трубе соответствующего сечения (см. примечание на стр. 707); количеству Q протекающей через сечение трубы жидкости соответствует здесь величина C .

Для стержня кругового сечения имеем (начало координат в центре сечения):

$$\chi = \frac{1}{4} (R^2 - x^2 - y^2).$$

Крутильная жёсткость:

$$C = \frac{\mu \pi R^4}{2}.$$

Для функции ψ получаем из (16.10) $\psi = \text{const}$. Но постоянная ψ соответствует согласно (16,4) простому смещению стержня как целого вдоль оси z ; поэтому можно считать, что $\psi = 0$. Таким образом, поперечные сечения кругового стержня при кручении остаются плоскими.

2. То же для стержня эллиптического сечения (полуоси a и b).

Решение. Крутильная жёсткость:

$$C = \pi \mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Распределение продольных смещений даётся функцией кручения:

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy$$

(оси координат направлены по осям эллипса).

3. То же для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника (длина сторон a).

Решение. Крутильная жёсткость:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80} \mu a^4.$$

Функция кручения:

$$\psi = \frac{1}{6a} y (x \sqrt{3} + y) (x \sqrt{3} - y),$$

причём начало координат выбрано в центре треугольника, а ось x совпадает с одной из его высот.

4. То же для стержня, имеющего вид длинной тонкой пластинки (ширина d , толщина $h \ll d$).

Решение. Задача эквивалентна задаче о течении вязкой жидкости между плоско-параллельными стенками. Результат:

$$C = \frac{\mu d h^3}{3}.$$

5. То же для цилиндрической трубы (внутренний и внешний радиусы R_1 и R_2).

Решение. Функция

$$\chi = \frac{1}{4} (R_2^2 - r^2)$$

(в полярных координатах) удовлетворяет условию (16,13) на обеих границах кольцевого сечения трубы. По формуле (16,17) найдём:

$$C = \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

6. То же для тонкостенной трубы произвольного сечения.

Решение. Ввиду тонкости стенки трубы можно считать, что на протяжении её ширины h функция χ меняется от нуля на одной стороне до χ_1 на другой по линейному закону $\chi = \chi_1 \frac{y}{h}$ (y — координата вдоль толщины стенки). Тогда условие (16,13) даёт $\frac{\chi_1 L}{h} = S$, где L — длина периметра сечения трубы, а S — охватываемая им площадь. В выражении (16,17) второй член мал по сравнению с первым, и мы получаем:

$$C = \frac{4hS^2 \mu}{L}.$$

Если трубу разрезать продольно по одной из её образующих, то крутильная жёсткость резко уменьшается, становясь равной согласно результату задачи 4: $C = \frac{\mu L h^3}{3}$.

§ 17. Изгиб стержней

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнём с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке «нейтральной» поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось z направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости z, x^1 .

1) При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным из дифференциальной геометрии обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое её кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

Аналогично тому что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей боковой поверхности стержня имеем $\sigma_{ik} n_k = 0$, или, поскольку $n_z = 0$:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0$$

и аналогично для $i = y, z$. Выберем такую точку на контуре поперечного сечения стержня, в которой нормаль \mathbf{n} направлена параллельно оси x . Другая такая же точка имеется где-нибудь на противоположной стороне контура. В обеих этих точках $n_y = 0$, и из написанного выше равенства имеем $\sigma_{xx} = 0$. Но поскольку самый стержень предполагаем тонким, то если σ_{xx} исчезает на двух сторонах его сечения, то оно мало и вдоль всего сечения, так что можно положить $\sigma_{xx} = 0$ во всем стержне. Аналогичным образом убеждаемся в том, что все компоненты тензора напряжений должны быть равными нулю за исключением только компоненты σ_{zz} . Другими словами, при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия (§ 5). Таким образом, в каждом элементе объема изгибаемого стержня происходит простое растяжение (или сжатие). Самая величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

Легко определить величину относительного растяжения в каждой точке стержня. Рассмотрим какой-нибудь элемент длины dz , параллельный оси стержня и находящийся где-нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина dz изменится, сделавшись равной dz' . Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на «нейтральной» поверхности. Пусть R есть радиус кривизны «нейтральной» поверхности вблизи начала координат. Длины dz и dz' можно рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами соответственно R и $R + x$, где x — значение координаты x в точке, в которой выбран элемент dz' . Поэтому

$$dz' = \frac{R+x}{R} dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

С другой стороны, относительное удлинение элемента длины dz равно компоненте u_{zz} тензора деформации. Следовательно,

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \quad (17,1)$$

Мы можем написать теперь σ_{zz} , воспользовавшись непосредственно соотношением $\sigma_{zz} = E u_{zz}$, имеющим место при простом растяжении. Таким образом,

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \quad (17,2)$$

До сих пор ещё расположение «нейтральной» поверхности в изогнутом стержне оставалось неопределённым. Его можно определить из условия, что рассматриваемая нами здесь деформация должна представлять собой чистый изгиб, без какого бы то ни было общего растяжения или сжатия стержня. Для этого полная сила внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, должна быть равной нулю, т. е. должен исчезать интеграл

$$\int \sigma_{zz} df,$$

взятый по этой поверхности. В связи с выражением (17,2) для σ_{zz} это приводит к условию

$$\int x df = 0. \quad (17,3)$$

С другой стороны, можно ввести понятие о центре инерции сечения стержня, как о центре инерции однородного плоского диска соответствующей формы. Координаты этого центра определяются, как известно, интегралами

$$\frac{\int x df}{\int df}, \quad \frac{\int y df}{\int df}.$$

Таким образом, условие (17,3) означает, что в системе координат с началом, лежащим на нейтральной поверхности, x -координата центра инерции сечения стержня равна нулю. Другими словами, «нейтральная» поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня.

Помимо u_{zz} отличны от нуля ещё две компоненты тензора деформации, так как при простом растяжении имеем $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$. Зная тензор деформации, легко найти также и смещения точек. Пишем:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующим выражениям для компонент перемещения:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2R} \left[z^2 + \sigma(x^2 - y^2) \right], \\ u_y &= -\sigma \frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \end{aligned} \quad (17,4)$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю; это значит, что мы закрепляем в пространстве положение начала координат.

Из формул (17,4) видно, что точки, расположенные в поперечном сечении $z = \text{const.} \equiv z_0$, после изгиба заполняют поверхность

$$z = z_0 + u_z = z_0 \left(1 + \frac{x}{R} \right).$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении сечения остаются при изгибе плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый угол относительно своего первоначального положения. Форма же сечения меняется; так при изгибе стержня прямоугольного сечения (со сторонами a и b) боковые стороны контура сечения $y = \pm b/2$ после изгиба занимают положения

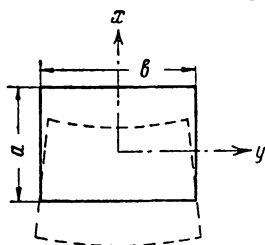


Рис. 132.

$$v = \pm \frac{b}{2} + u_y = \pm \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\sigma x}{R} \right),$$

т. е. становятся наклонными, оставаясь прямыми. Верхняя же и нижняя стороны $x = \pm a/2$ изгибаются в параболические кривые

$$x = \pm \frac{a}{2} + u_x = \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2R} \left[z_0^2 + \sigma \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

(рис. 132) ¹⁾.

Свободная энергия единицы объёма стержня есть

$$\frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{zz} u_{zz}}{2} = \frac{E x^2}{2R^2}.$$

Интегрируя по всему поперечному сечению стержня, имеем:

$$\frac{E}{2R^2} \int x^2 df. \quad (17,5)$$

Это есть свободная энергия единицы длины изогнутого стержня.

¹⁾ Мы не останавливаемся здесь на вопросе об определении перемещений при изгибе с точностью до членов более высоких порядков по отношению толщины стержня к его длине. Изложение этой теории можно найти, например, в книгах: М. М. Филоненко-Бородич. Теория упругости, Гостехиздат, 1947; С. П. Тимошенко, Теория упругости, Гостехиздат, 1937.

Радиус кривизны R определён здесь как радиус кривизны «нейтральной» поверхности. Но в силу тонкости стержня его можно рассматривать здесь с той же точностью просто как радиус кривизны самого изогнутого стержня, рассматриваемого как не имеющая толщины линия (об этой линии часто говорят как об «упругой линии»).

В выражении (17,5) удобно ввести понятие момента инерции площади поперечного сечения стержня. Именно, определим момент инерции сечения относительно проходящей через его плоскость оси y как интеграл:

$$I_y = \int x^2 df, \quad (17,6)$$

т. е. аналогично обычному понятию момента инерции с той только разницей, что вместо элемента массы стоит просто элемент поверхности df . Тогда свободная энергия единицы длины стержня напишется в виде

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \quad (17,7)$$

Определим ещё момент сил внутренних напряжений, действующих в данном сечении стержня (этот момент называют изгибающим). К элементу df поверхности сечения приложена сила $\sigma_{zz} df = \frac{x}{R} E df$, направленная вдоль оси z . Её момент относительно оси y есть $x \frac{x}{R} E df$. Поэтому полный момент сил относительно этой оси есть

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2 df = \frac{E I_y}{R}. \quad (17,8)$$

Таким образом, кривизна $1/R$ упругой линии пропорциональна действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Величина I_y зависит от того, как направлена ось y в плоскости сечения. Удобно, как это принято в механике, выражать I_y через два так называемых главных момента инерции. Если θ есть угол между осью y и одной из главных осей инерции сечения стержня, то, как известно,

$$I_y = I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta, \quad (17,9)$$

где I_1, I_2 — главные моменты инерции. Плоскости, проходящие через ось z и главные оси инерции сечения стержня, называют главными плоскостями изгиба.

Если, например, сечение стержня является прямоугольником (со сторонами a и b), то его центр инерции находится в центре прямоугольника, а главные оси инерции параллельны его сторонам. Главные моменты инерции равны

$$I_1 = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_2 = \frac{a b^3}{12}. \quad (17,10)$$

При круговом сечении (с радиусом R) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (17,11)$$

§ 18. Энергия деформированного стержня

В предыдущем параграфе мы рассматривали только небольшую область вдоль длины изогнутого стержня. Переходя теперь к исследованию деформации во всём стержне, необходимо начать с выбора подходящего способа описания такой деформации. Существенно, что при сильном ¹⁾ изгибе стержня в нём одновременно возникает, вообще говоря, также и некоторая деформация кручения, так что результирующая деформация есть комбинация чистого изгиба и кручения.

Для описания деформации удобно поступить следующим образом. Разделим весь стержень на ряд бесконечно малых элементов, каждый из которых вырезывается из стержня двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. В каждом таком элементе введём свою систему координат ξ, η, ζ ; направления осей выберем таким образом, чтобы в недеформированном стержне все эти системы были параллельны друг другу, причём все оси ζ направлены параллельно оси стержня. При изгибании стержня в каждом элементе система координат поворачивается, причём в различных элементах, вообще говоря, различным образом. Каждые две бесконечно близкие системы оказываются при этом повернутыми друг относительно друга на некоторый бесконечно малый угол.

Пусть $d\varphi$ есть вектор угла относительного поворота двух систем, находящихся на расстоянии dl вдоль длины стержня (как известно, бесконечно малый угол поворота можно рассматривать как вектор, направленный вдоль оси поворота; его составляющие представляют собою углы поворота вокруг каждой из трёх осей координат).

Для описания деформации мы введём вектор

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dl}, \quad (18,1)$$

определяющий «скорость» поворота осей координат вдоль длины стержня. Если деформация является чистым кручением, то поворот последовательных систем координат происходит только вокруг оси стержня, т. е. вокруг осей ζ . В этом случае, следовательно, вектор Ω направлен вдоль оси стержня и представляет собой не что иное, как угол кручения τ , которым мы пользовались в § 16. Соответственно этому и в общем случае произвольной деформации компоненту Ω_ζ

¹⁾ Напоминаем, что под сильной мы понимаем здесь такую деформацию, при которой вектор Ω не мал, тензор же деформации попрежнему является малым.

вектора Ω можно назвать углом кручения. При чистом же изгибе стержня в одной плоскости вектор Ω не имеет компоненты Ω_τ , т. е. лежит в каждой точке целиком в плоскости ξ, η . Если при этом выбрать плоскость, в которой происходит изгиб, в качестве плоскости ξ, ζ , то поворот происходит в каждой точке вокруг оси η , т. е. Ω параллелен оси η .

Введём единичный вектор \mathbf{t} , направленный по касательной к стержню, рассматриваемому здесь просто как «упругая линия». Производная $\frac{d\mathbf{t}}{dl}$ называется, как известно, вектором кривизны линии; его абсолютная величина равна $\frac{1}{R}$, где R — радиус кривизны ¹⁾, а его направление называется направлением главной нормали кривой. Как известно, изменение вектора при бесконечно малом повороте равно векторному произведению вектора угла поворота на сам рассматриваемый вектор. Поэтому для разности векторов \mathbf{t} в двух бесконечно близких точках упругой линии можно написать:

$$d\mathbf{t} = [d\varphi \mathbf{t}],$$

или, разделив на dl :

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = [\Omega \mathbf{t}]. \quad (18,2)$$

Умножив это равенство с обеих сторон векторно на \mathbf{t} , получаем:

$$\Omega = \left[\mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{dl} \right] + \mathbf{t}(\mathbf{t}\Omega). \quad (18,3)$$

Направление вектора касательной в каждой точке совпадает с направлением оси ζ в этой же точке. Поэтому $(\mathbf{t}\Omega) = \Omega_\tau$. Вводя единичный вектор \mathbf{n} главной нормали (так что $\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \mathbf{n} \frac{1}{R}$), мы можем, следовательно, написать:

$$\Omega = \frac{1}{R} [\mathbf{tn}] + \mathbf{t}\Omega_\tau. \quad (18,4)$$

Первый член справа представляет собой вектор с двумя компонентами Ω_ξ, Ω_η . Единичный вектор $[\mathbf{tn}]$ называется, как известно, единичным вектором бинормали. Таким образом, компоненты Ω_ξ, Ω_η образуют вектор, направленный по бинормали к стержню и по абсолютной величине равный его кривизне $\frac{1}{R}$.

Введя, таким образом, вектор Ω , характеризующий деформацию, и выяснив его свойства, мы можем вывести выражение для упругой свободной энергии изогнутого стержня. Упругая энергия (отнесённая

¹⁾ Напоминаем, что всякая кривая в пространстве характеризуется в каждой точке своими так называемыми кривизной и кручением. Это кручение (нам не придётся пользоваться им) не следует смешивать с тем, что мы называем здесь деформацией кручения, представляющей собой закручивание стержня вокруг его оси.

к единице длины стержня) является квадратичной функцией деформации, т. е. в данном случае квадратичной функцией компонент вектора Ω . Легко видеть, что в этой квадратичной форме должны отсутствовать члены, пропорциональные $\Omega_\xi \Omega_\zeta$ или $\Omega_\eta \Omega_\zeta$. Действительно, поскольку стержень однороден вдоль всей своей длины, то все величины, в частности и энергия, не должны меняться при изменении направления положительного отсчета координаты ζ , т. е. при замене ζ на $-\zeta$; указанные же произведения при такой замене переменяли бы свой знак.

Что касается члена с квадратом Ω_ζ^2 , то надо помнить, что при $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$ мы имеем дело с чистым кручением, и тогда выражение для энергии должно совпасть с выражением, полученным в § 16. Таким образом, соответствующий член в свободной энергии имеет вид

$$\frac{C\Omega_\zeta^2}{2}.$$

Наконец, члены, квадратичные по Ω_ξ , Ω_η , можно написать, исходя из выражения (17,7) для энергии слабо изогнутого небольшого участка стержня. Предположим, что стержень подвергается лишь слабому изгибу. Плоскость ξ , ζ выберем в плоскости изгиба так, что компонента Ω_ξ исчезает; кручение также отсутствует при слабом изгибе. Выражение для энергии должно в этом случае совпадать с (17,7):

$$\frac{E}{2R^2} I_\eta.$$

Но мы видели, что $\frac{1}{R^2}$ является как раз квадратом плоского вектора $(\Omega_\xi, \Omega_\eta)$. Поэтому энергия должна иметь вид

$$\frac{E}{2} I_\eta \Omega_\eta^2.$$

При произвольном выборе осей ξ , η это выражение напишется, как известно из механики, в виде

$$\frac{E}{2} (I_{\eta\eta} \Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi} \Omega_\eta \Omega_\xi + I_{\xi\xi} \Omega_\xi^2),$$

где $I_{\eta\eta}$, $I_{\eta\xi}$, $I_{\xi\xi}$ — компоненты тензора инерции сечения стержня. Удобно выбрать оси ξ , η так, чтобы они совпали с главными осями инерции сечения стержня. Тогда мы будем иметь просто

$$\frac{E}{2} (I_1 \Omega_\xi^2 + I_2 \Omega_\eta^2),$$

где I_1 , I_2 — главные моменты инерции сечения. Поскольку коэффициенты при Ω_ξ^2 и Ω_η^2 — постоянные, то полученное выражение должно иметь место и при сильном изгибе.

Наконец, интегрируя по всей длине стержня, получим окончательно следующее выражение для свободной упругой энергии изогну-

того стержня:

$$F_{\text{ст}} = \int \left\{ \frac{I_1 E}{2} \Omega_{\xi}^2 + \frac{I_2 E}{2} \Omega_{\eta}^2 + \frac{C}{2} \Omega_{\zeta}^2 \right\} dl. \quad (18,5)$$

Далее, выразим через Ω момент сил, действующих на сечение стержня. Это легко сделать, используя опять результаты, полученные ранее для чистого кручения и слабого чистого изгиба. При чистом кручении момент сил относительно оси стержня равен $C\tau$. Поэтому заключаем, что в общем случае момент M_{ζ} относительно оси ζ должен быть равен $M_{\zeta} = C\Omega_{\zeta}$. Далее, при слабом изгибе в плоскости ξ , ζ момент относительно оси η есть $\frac{EI_2}{R}$. Но при таком изгибе вектор Ω

направлен по оси η , так что $\frac{1}{R}$ есть просто его абсолютная величина и $\frac{EI_2}{R} = EI_2\Omega$. Поэтому заключаем, что в общем случае должно быть

$M_{\xi} = EI_1\Omega_{\xi}$, $M_{\eta} = EI_2\Omega_{\eta}$ (оси ξ , η выбраны по главным осям инерции сечения). Таким образом, компоненты вектора \mathbf{M} момента сил равны

$$M_{\xi} = EI_1\Omega_{\xi}, \quad M_{\eta} = EI_2\Omega_{\eta}, \quad M_{\zeta} = C\Omega_{\zeta}. \quad (18,6)$$

Упругая энергия (18,5), выраженная через момент сил, имеет вид

$$F_{\text{ст}} = \int \left\{ \frac{M_{\xi}^2}{2I_1 E} + \frac{M_{\eta}^2}{2I_2 E} + \frac{M_{\zeta}^2}{2C} \right\} dl. \quad (18,7)$$

Важным случаем изгиба стержней является слабый изгиб, при котором на всём протяжении стержня отклонение его от первоначального положения мало по сравнению с длиной стержня. В этом случае кручение можно считать отсутствующим, так что можно положить $\Omega_{\zeta} = 0$ и из (18,4) имеем просто

$$\Omega = \frac{1}{R} [\text{tn}] \equiv \left[t \frac{dt}{dl} \right]. \quad (18,8)$$

Введём неподвижную в пространстве систему координат x , y , z с осью z вдоль оси недеформированного стержня (вместо связанных в каждой точке со стержнем координат ξ , η , ζ). Обозначим посредством X , Y координаты x , y точек упругой линии стержня; X и Y определяют смещение точек линии от их первоначального положения до изгиба.

Ввиду того что изгиб слаб, вектор касательной \mathbf{t} почти параллелен оси z , так что приближённо можно считать его направленным вдоль этой оси. Далее, единичный вектор касательной равен, как известно, производной

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

от радиус-вектора \mathbf{r} точек кривой по её длине. Поэтому имеем:

$$\frac{dt}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \approx \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2}$$

(производную по длине стержня можно приближённо заменить производной по z). В частности x - и y -компоненты этого вектора равны соответственно $\frac{d^2X}{dz^2}$ и $\frac{d^2Y}{dz^2}$. Компоненты Ω_ξ , Ω_η с той же точностью равны теперь компонентам Ω_x , Ω_y , и из (18,8) получаем:

$$\Omega_\xi = -\frac{d^2Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2X}{dz^2}. \quad (18,9)$$

Подставляя эти выражения в (18,5), получаем упругую энергию слабо изогнутого стержня в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left(\frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 + I_2 \left(\frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 \right\} dz. \quad (18,10)$$

Напомним, что I_1 , I_2 — моменты инерции соответственно относительно осей x , y , являющихся главными осями инерции.

В частности, для стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$ и в под-интегральном выражении получается просто сумма квадратов вторых производных, совпадающая в рассматриваемом приближении с квадратом кривизны стержня:

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{d^2Y}{dz^2} \approx \frac{1}{R^2}.$$

Ввиду этого формулу (18,10) можно естественным образом обобщить для слабого изгиба стержней (кругового сечения), имеющих в своём естественном (недеформированном) состоянии любую непрямолинейную форму. Для этого надо написать энергию изгиба в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{El}{2} \int \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 dz, \quad (18,11)$$

где R_0 — радиус естественной кривизны стержня в каждой его точке. Это выражение, как и должно быть, обладает минимумом в недеформированном состоянии ($R = R_0$), а при $R_0 \rightarrow \infty$ переходит в формулу (18,10).

§ 19. Уравнения равновесия стержней

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, посредством F^1). Компоненты этого вектора равны интегралам от σ_{ix} по площади сечения:

$$F_i = \int \sigma_{ix} df. \quad (19,1)$$

¹⁾ Обозначение этой силы посредством F не может привести к смешению со свободной энергией, которой мы не пользуемся ниже, в §§ 19—21.

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила $F + dF$, а на нижнее — сила $-F$; их сумма есть дифференциал dF . Пусть далее K есть действующая на стержень внешняя сила, отнесённая к единице его длины. Тогда на элемент длины dl действует внешняя сила $K dl$. Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно, $dF + K dl$. В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем:

$$\frac{dF}{dl} = -K. \quad (19,2)$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть M есть момент сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня. Этот момент берётся относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения; его компоненты определяются формулами (18,6). Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно точки (назовём её точкой O), лежащей в плоскости его верхнего основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент $M + dM$. Момент же (относительно O) сил внутренних напряжений в нижнем основании элемента складывается из момента $-M$ этих сил относительно начала координат в плоскости нижнего основания (точка O') и момента (относительно O) суммарной силы $-F$, действующей на этом основании. Этот второй момент равен $[(-dl)(-F)]$, где dl — вектор элемента длины стержня от O' к O . Момент же, обусловленный внешними силами K , является малой величиной высшего порядка. Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть $dM + [dIF]$. В равновесии он должен быть равным нулю:

$$dM + [dIF] = 0.$$

Разделив это равенство на dl и замечая, что $\frac{dl}{dl} = t$ есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение

$$\frac{dM}{dl} = [Ft]. \quad (19,3)$$

Уравнения (19,2) и (19,3) представляют собой полную систему уравнений равновесия произвольным образом изогнутого стержня.

Если действующие на стержень внешние силы являются, как говорят, сосредоточенными, т. е. приложены только к отдельным изолированным его точкам, то на участках стержня между точками приложения сил уравнения равновесия заметно упрощаются. Из (19,2) имеем при $K = 0$

$$F = \text{const.}, \quad (19,4)$$

т. е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого из указанных участков стержня. Значения этих постоянных определяются тем, что разность $F_2 - F_1$ значений силы в точках 1 и 2 равна

$$F_2 - F_1 = - \sum K, \quad (19,5)$$

где сумма берётся по всем силам, приложенным к отрезку стержня между точками 1 и 2. Обращаем внимание на то, что в разности $F_2 - F_1$ точка 2 является более удалённой от начала отсчёта длины стержня (т. е. длины дуги l), чем точка 1; это замечание существенно при определении знаков в равенстве (19,5). В частности, если на стержень действует всего одна сосредоточенная сила f , приложенная к его свободному концу, то F постоянно вдоль всей длины стержня и равно f .

Второе уравнение равновесия (19,3) тоже упрощается. Написав в нём $t = \frac{dl}{dl} = \frac{dr}{dl}$ (где r — радиус-вектор от некоторой заданной точки к произвольной точке стержня) и интегрируя, получаем ввиду постоянства F :

$$M = [Fr] + \text{const.} \quad (19,6)$$

Если же отсутствуют также и сосредоточенные силы, а изгиб стержня происходит под действием приложенных к нему сосредоточенных моментов (т. е. сосредоточенных пар сил), то $F = \text{const.}$ вдоль всей длины стержня, а M испытывает в точках приложения сосредоточенных пар скачки, равные их моментам.

Обратимся, далее, к вопросу о граничных условиях на концах изгибаемого стержня. Здесь могут представиться различные случаи.

Конец стержня называют заделанным (рис. 123, а см. стр. 685), если он не может испытывать никаких смещений — ни продольных, ни поперечных, и, сверх того, не может измениться его направление (т. е. направление касательной к стержню в его конце). В этом случае граничные условия заключаются в том, что задаются координаты конца стержня и единичный вектор касательной t к нему. Сила же и момент сил реакции, действующие на стержень со стороны опоры в точке закрепления, определяются в результате решения уравнений.

Противоположным является случай свободного конца стержня. В этом случае координаты конца и его направление произвольны. Граничные условия заключаются в том, что сила F и момент сил M на конце стержня должны обратиться в нуль ¹⁾.

Если конец стержня закреплён на шарнире, то он не может испытывать никаких смещений, но его направление не задано. Момент сил, действующих на такой свободно поворачивающийся конец, должен исчезать.

¹⁾ Если к свободному концу приложена сосредоточенная сила f , то граничное условие гласит не $F = 0$, а $F = f$.

Наконец, если стержень опёрт в некоторой точке опоры (рис. 123, б), то он может скользить по этой точке, но не может испытывать в ней поперечных смещений. В этом случае незадаанными являются направление t и положение точки по длине стержня, в которой он опирается. Момент сил в точке опоры должен быть равным нулю соответственно тому, что стержень может свободно поворачиваться, а сила F в этой точке должна быть перпендикулярна к стержню; продольная компонента силы вызвала бы дальнейшее его скольжение в точке опоры.

Аналогичным образом легко установить граничные условия и при других способах закрепления стержня. Мы не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись приведёнными типичными примерами.

Уже в начале предыдущего параграфа было отмечено, что сильный изгиб стержня произвольного сечения сопровождается, вообще говоря, одновременным его кручением, даже если к стержню не прилагается никаких внешних крутящих моментов. Исключением является изгиб стержня в его главных плоскостях. При таком изгибе кручение не возникает. У стержня кругового сечения никакой изгиб не сопровождается кручением (если, конечно, нет внешних крутящих моментов). В этом можно убедиться следующим образом. Кручение определяется компонентой $\Omega_z = (\Omega t)$ вектора Ω . Вычислим его производную по длине стержня. Для этого пишем, замечая, что $\Omega_z = \frac{M_z}{C}$:

$$\frac{d}{dl}(Mt) = C \frac{d\Omega_z}{dl} = \frac{dM}{dl} t + M \frac{dt}{dl}.$$

При подстановке (19,3) первый член обращается в нуль, так что

$$C \frac{d\Omega_z}{dl} = M \frac{dt}{dl}.$$

У стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$; согласно (18,3) и (18,6) можно поэтому написать M в виде

$$M = EI \left[t \frac{dt}{dl} \right] + t C \Omega_z. \quad (19,7)$$

При умножении на $\frac{dt}{dl}$ оба члена дают нуль, так что

$$\frac{d\Omega_z}{dl} = 0,$$

откуда

$$\Omega_z = \text{const.}, \quad (19,8)$$

т. е. угол кручения постоянен вдоль стержня. Если к концам стержня не приложено крутящих моментов, то Ω_z на концах равно нулю, а потому кручение отсутствует и по всей длине стержня.

Для стержня кругового сечения можно, таким образом, написать при чистом изгибе

$$M = EI \left[t \frac{dt}{dl} \right] = EI \left[\frac{dr}{dl} \frac{d^2 r}{dl^2} \right]. \quad (19,9)$$

Подстановка этого выражения в (19,3) приводит к уравнению чистого изгиба стержней кругового сечения в виде

$$EI \left[\frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dl^3} \right] = \left[\mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right]. \quad (19,10)$$

З а д а ч и

1. Привести к квадратам задачу об определении формы стержня кругового сечения (упругого прута), сильно изогнутого в одной плоскости приложенными к нему сосредоточенными силами.

Р е ш е н и е. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил; на таком участке $\mathbf{F} = \text{const}$. Выбираем плоскость изгиба в качестве плоскости x, y , а ось y — параллельно силе \mathbf{F} . Вводим угол θ между касательной к линии стержня и осью y . Тогда $\frac{dx}{dl} = \sin \theta$, $\frac{dy}{dl} = \cos \theta$, где x, y — координаты точек стержня. Раскрывая векторные произведения в (19,10), получаем уравнение для θ как функции длины дуги l :

$$IE \frac{d^2 \theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0.$$

Первое интегрирование даёт

$$\frac{IE}{2} \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1$$

и отсюда

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2. \quad (1)$$

Функция $\theta(l)$ может быть выражена отсюда через эллиптические функции.

Для координат $x = \int \sin \theta dl$, $y = \int \cos \theta dl$ получаем:

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{const.},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{const}'. \quad (2)$$

Момент \mathbf{M} (19,9) направлен по оси z и равен

$$M = IE \frac{d\theta}{dl}.$$

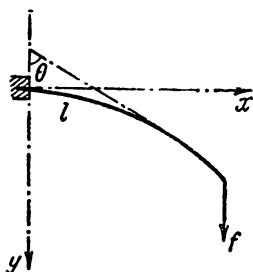


Рис. 133.

2. Определить форму сильно изогнутого стержня, один конец которого заделан, а к другому, свободному, приложена сила \mathbf{f} ; направление \mathbf{f} перпендикулярно к прямой недеформированного стержня (рис. 133).

Р е ш е н и е. На всей длине стержня $\mathbf{F} = \text{const.} = \mathbf{f}$. На заделанном конце ($l=0$) $\theta = \frac{\pi}{2}$, а на свободном ($l=L$, где L — длина стержня) $M=0$, т. е. $\theta' = 0$. Вводя обозначение $\theta_0 = \theta(L)$, имеем в (1) $c_1 = \cos \theta_0$:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Отсюда получаем уравнение, определяющее θ_0 :

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Форма стержня определяется формулами:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{\cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}), \quad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

3. То же, если сила f , приложенная к свободному концу, направлена параллельно линии недеформированного стержня.

Решение. Имеем $F = -f$ (оси координат выбраны указанным на рис. 134 образом). Граничные условия: $\theta = 0$ при $l = 0$, $\theta' = 0$ при $l = L$. Имеем:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

где $\theta_0 = \theta(L)$ определяется из

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Для x и y получаем:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

При слабом изгибе $\theta_0 \ll 1$ и можно написать:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}},$$

т. е. θ_0 выпадает из этого соотношения. Это показывает, в согласии с результатом задачи 3

§ 21, что рассматриваемое решение существует только при $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$, т. е. после потери устойчивости прямолинейной формой.

4. То же, если оба конца стержня опёрты, а к его середине приложена сила f ; расстояние между точками опоры есть L_0 .

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 135 образом. Сила F постоянна на каждом из участков AB и BC , причём на каждом из них перпендикулярна к линии стержня в точках опоры — соответственно A и C . Разность значений F на AB и BC равна f , откуда заключаем, что на AB $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$, где θ_0 — угол между осью y и линией AC ,

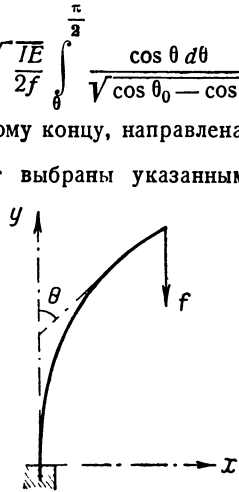


Рис. 134.

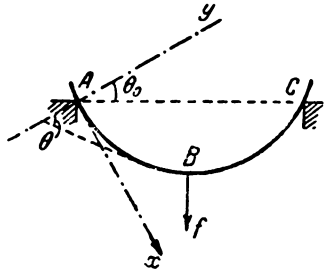


Рис. 135.

В точке $A (l = 0)$ имеем условия $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $M = 0$, т. е. $\theta' = 0$, так что на AB

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}, \quad x = 2 \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

Угол θ_0 определяется из условия, что проекция длины AB на прямую AC должна быть равна $\frac{L_0}{2}$, откуда имеем:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

При некотором определённом значении θ_0 , лежащем между 0 и $\frac{\pi}{2}$, производная $\frac{df}{d\theta_0}$ (где f рассматривается как функция от θ_0) обращается в нуль и делается положительной. Дальнейшему уменьшению θ_0 , т. е. увеличению прогиба, соответствовало бы уменьшение f . Это значит, что найденное решение делается неустойчивым; стержень «проваливается» между опорами.

5. Привести к квадратурам задачу о пространственном сильном изгибе стержня под действием сосредоточенных сил.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил, на котором $F = \text{const}$. Интегрируя (19,10), получаем:

$$El \left[\frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \right] = [F\mathbf{r}] + c\mathbf{F}; \quad (1)$$

постоянная интегрирования написана в виде вектора $c\mathbf{F}$, направленного вдоль \mathbf{F} , поскольку надлежащим выбором начала координат, т. е. прибавлением к \mathbf{r} некоторого постоянного вектора, можно исключить аддитивный вектор, перпендикулярный к \mathbf{F} . Умножая (1) скалярно и векторно на \mathbf{r}' ($'$ означает дифференцирование по l) и замечая, что $\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$ (поскольку $\mathbf{r}'^2 = 1$), получаем:

$$\mathbf{F} [\mathbf{r}\mathbf{r}'] + c\mathbf{F}\mathbf{r}' = 0, \quad El\mathbf{r}'' = [[F\mathbf{r}]\mathbf{r}'] + c[F\mathbf{r}'].$$

В компонентах (ось z выбрана по направлению \mathbf{F}):

$$(xy' - yx') + cz' = 0, \quad Elz'' = -F(xx' + yy').$$

Вводя в этих уравнениях цилиндрические координаты r, φ, z , получаем:

$$r^2\varphi' + cz' = 0, \quad Elz'' = -Frr'. \quad (2)$$

Из второго уравнения имеем:

$$z' = \frac{F}{2El} (A - r^2) \quad (3)$$

(где A — постоянная). Комбинируя (2) и (3) с тождеством

$$r^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2 = 1,$$

получаем:

$$dl = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - (r^2 + c^2) (A - r^2)^2 \frac{F^2}{4E^2 l^2}}},$$

после чего из (2) и (3) находим:

$$z = \frac{F}{2EI} \int \frac{(A - r^2) r dr}{\sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 l^2} (r^2 + c^2) (A - r^2)^2}},$$

$$\varphi = -\frac{cF}{2EI} \int \frac{(A - r^2) dr}{r \sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 l^2} (r^2 + c^2) (A - r^2)^2}},$$

чем и определяется форма изогнутого стержня.

6. Стержень кругового сечения подвергнут кручению (угол кручения τ) и изогнут в винтовую линию. Определить силу и момент сил, которые должны быть приложены к концам стержня для того, чтобы удерживать его в таком состоянии.

Решение. Пусть R — радиус цилиндра, на поверхности которого навита винтовая линия (ось z выбираем по оси этого цилиндра), а α — угол между касательной к линии и плоскостью, перпендикулярной к оси z ; шаг винтовой линии h связан с α и R посредством $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$. Уравнение винтовой линии:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$$

(φ — угол поворота вокруг оси z); элемент длины дуги $dl = \frac{R}{\cos \alpha} d\varphi$. Подставляя эти выражения в (19,7), вычисляем компоненты вектора \mathbf{M} , а затем по формуле (19,3) — силу \mathbf{F} (постоянную вдоль всей длины стержня). В результате находим, что сила \mathbf{F} направлена по оси z и равна

$$F_z = F = C\tau \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Момент \mathbf{M} имеет составляющую по оси z :

$$M_z = C\tau \sin \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$$

и составляющую M_φ , направленную в каждой точке стержня по касательной к окружности поперечного сечения цилиндра, равную $M_\varphi = FR$.

7. Определить форму гибкой нити (сопротивлением которой на изгиб можно пренебречь по сравнению с сопротивлением на растяжение), подвешенной за две точки в поле тяжести.

Решение. Выбираем плоскость, в которой расположена нить, в качестве плоскости x, y с осью y , направленной вертикально вниз. В уравнении (19,3) можно пренебречь членом $\frac{d\mathbf{M}}{dl}$, поскольку \mathbf{M} пропорционально EI . Тогда $[\mathbf{F}\mathbf{t}] = 0$, т. е. \mathbf{F} направлено в каждой точке нити по \mathbf{t} и можно написать $\mathbf{F} = Ft$. Уравнение (19,2) даёт теперь $\frac{d}{dl} \left(F \frac{dx}{dl} \right) = 0$, $\frac{d}{dl} \left(F \frac{dy}{dl} \right) = q$ (q — вес

единицы длины нити), откуда $F \frac{dx}{dl} = c$, $F \frac{dy}{dl} = ql$. Отсюда имеем $F = \sqrt{c^2 + q^2 l^2}$, так что

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(где $A = \frac{c}{q}$). Интегрирование даёт

$$x = A \operatorname{argsh} \frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2},$$

откуда

$$y = A \operatorname{ch} \frac{x}{A},$$

т. е. нить имеет форму цепной линии. Выбор начала координат и постоянная A определяются тем, что кривая должна пройти через две заданные точки и должна иметь заданную длину.

§ 20. Слабый изгиб стержней

Уравнения равновесия значительно упрощаются в важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной \mathbf{t} к стержню медленно меняется вдоль его длины, т. е. производная $\frac{d\mathbf{t}}{dl}$ мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится обычно к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной. Подчеркнём, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня, как это должно было быть в приближённой теории слабого изгиба пластинок, развитой в §§ 11—12¹⁾.

Продифференцируем (19,3) по длине:

$$\frac{d^2 \mathbf{M}}{dl^2} = \left[\frac{d\mathbf{F}}{dl} \mathbf{t} \right] + \left[\mathbf{F} \frac{d\mathbf{t}}{dl} \right]. \quad (20,1)$$

Второй член содержит малую величину $\frac{d\mathbf{t}}{dl}$, вследствие чего им обычно (за исключением некоторых особых случаев, о которых речь идёт ниже) можно пренебречь. Подставляя в первом члене $\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\mathbf{K}$, получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{M}}{dl^2} = [\mathbf{tK}]. \quad (20,2)$$

¹⁾ Мы не излагаем вовсе сложной теории изгиба стержней, которые в своём естественном, недеформированном, состоянии имеют изогнутую форму (ограничиваясь лишь одним простым примером в задачах 8, 9 этого параграфа),

Напишем это уравнение в компонентах, для чего подставим в него согласно (18,6) и (18,9)

$$M_x = -EI_1 Y'', \quad M_y = EI_2 X'', \quad M_z = 0 \quad (20,3)$$

(знак ' означает везде дифференцирование по z). Единичный вектор t можно считать направленным по оси z . Тогда мы получим из (20,2)

$$EI_2 X'''' - K_x = 0, \quad EI_1 Y'''' - K_y = 0. \quad (20,4)$$

Эти уравнения определяют зависимость прогибов X и Y от z , т. е. форму слабо изогнутого стержня.

Силу F внутренних напряжений, действующую на поперечное сечение стержня, также можно выразить через производные от X и Y . Подставляя (20,3) в (19,3), получаем:

$$F_x = -EI_2 X''', \quad F_y = -EI_1 Y'''. \quad (20,5)$$

Мы видим, что вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (20,5) называют перерезывающей силой. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачок, равный приложенной к ней внешней силе.

Величины EI_2 и EI_1 называют жёсткостью стержня на изгиб соответственно в главных плоскостях x, z и y, z ¹⁾.

Если приложенные к стержню внешние силы действуют в одной плоскости, то и изгиб стержня произойдёт в одной плоскости. Эти

1) Уравнением вида

$$DX'''' - K_x = 0 \quad (20,4a)$$

описывается также в определённых предельных случаях и изгиб тонкой пластинки. Пусть прямоугольная пластинка (с длинами сторон a и b и толщиной h) укрепена вдоль своих сторон a (направление y) и изгибается вдоль сторон b (ось z) однородной вдоль оси y нагрузкой. В общем случае производных a и b для определения изгиба должно быть использовано двухмерное уравнение (12,5) с соответствующими граничными условиями на укрепленных и на свободных сторонах пластинки. В предельном случае $a \gg b$ деформацию можно считать однородной вдоль оси y , и тогда двухмерное уравнение равновесия переходит в уравнение вида (20,4a), причём роль жёсткости на изгиб играет величина

$$D = \frac{Eh^3a}{12(1-\sigma^2)}.$$

Уравнение (20,4a) применимо и в обратном предельном случае $a \ll b$, когда пластинку можно рассматривать как стержень длины b с узким прямоугольным сечением (сечение в виде прямоугольника со сторонами a и h); при этом, однако, жёсткость на изгиб определяется другим выражением:

$$D = EI_2 = \frac{Eh^3a}{12}.$$

две плоскости, однако, в общем случае не совпадают друг с другом; легко найти угол между ними. Если α — угол между плоскостью действия сил и первой главной плоскостью изгиба (плоскостью x, z), то уравнения равновесия принимают вид

$$X''' = \frac{\cos \alpha}{I_2 E} K, \quad Y''' = \frac{\sin \alpha}{I_1 E} K.$$

Оба уравнения отличаются только коэффициентом при K . Поэтому X и Y пропорциональны друг другу, причём

$$Y = X \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Угол θ между плоскостью изгиба и плоскостью x, z определяется равенством

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (20,6)$$

Для стержня кругового сечения $I_1 = I_2$ и $\alpha = \theta$, т. е. изгиб происходит в плоскости действия сил. То же самое имеет место и для стержня произвольного сечения при $\alpha = 0$, т. е. когда силы направлены в главной плоскости. Для абсолютной величины прогиба

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

имеет место уравнение

$$EI\zeta''' = K, \quad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (20,7)$$

Перерезывающая сила F лежит в той же плоскости, что и K , и равна

$$F = -EI\zeta'''. \quad (20,8)$$

Величина I играет роль «эффективного» значения момента инерции сечения стержня.

Напишем в явном виде граничные условия для уравнений равновесия слабо изогнутого стержня. Если конец стержня заделан, то на нём должно быть $X = Y = 0$ и, сверх того, не может измениться его направление, т. е. должно быть $X' = Y' = 0$. Таким образом, на заделанном конце стержня должны выполняться условия:

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \quad (20,9)$$

Сила же и момент сил реакции в точках опоры определяются по известному решению формулами (20,3) и (20,5).

При достаточно слабом изгибе стержня закрепление его конца в шарнире и опирание его в точке эквивалентны в отношении граничных условий. Дело в том, что во втором случае продольное смещение стержня в точке опоры является при слабом изгибе величиной второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом и

потому должно считаться равным нулю. Граничные условия исчезновения поперечного смещения и момента сил дают в этих случаях

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \quad (20,10)$$

Направление же конца стержня и сила реакции в точке опоры определяются в результате решения уравнений.

Наконец, на свободном конце должны отсутствовать сила F и момент сил M . Согласно (20,3) и (20,5) это приводит к условиям

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \quad (20,11)$$

(если к свободному концу приложена сосредоточенная сила, то F должно быть равно этой силе, а не нулю).

Нетрудно обобщить уравнения (20,4) на случай стержней переменного сечения. У таких стержней моменты инерции I_1 и I_2 являются функциями z . Формулы (20,3), определяющие моменты сил в каждом данном сечении стержня, попрежнему остаются справедливыми. Подстановка их в (20,2) приводит теперь к уравнениям

$$E \frac{d^2}{dz^2} \left(I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right) = K_y, \quad E \frac{d^2}{dz^2} \left(I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = K_x, \quad (20,12)$$

в которых I_1 и I_2 нельзя вынести из-под знака производной. Для перерезающей силы имеем:

$$F_x = -E \frac{d}{dz} \left(I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right), \quad F_y = -E \frac{d}{dz} \left(I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right). \quad (20,13)$$

Вернёмся снова к уравнениям (20,1). Произведённое нами пренебрежение вторым членом в правой стороне равенства может оказаться в некоторых случаях незаконным даже при слабом изгибе. Это — те случаи, в которых вдоль длины стержня действует большая сила внутренних напряжений, т. е. F_z очень велико. Наличие такой силы вызывается обычно сильным натяжением стержня приложенными к его концам внешними растягивающими силами. Обозначим действующее вдоль стержня постоянное натяжение посредством $F_z = T$. Если стержень подвергается сильному сжатию, а не растяжению, то сила T отрицательна. Раскрывая векторное произведение $\left[F \frac{dt}{dt} \right]$, мы должны теперь сохранить члены, содержащие T , членами же с F_x и F_y можно попрежнему пренебречь. Подставляя для компонент вектора $\frac{dt}{dt}$ соответственно X'' , Y'' , 1, получим уравнения равновесия в виде

$$\left. \begin{aligned} I_2 E X'''' - T X'' - K_x &= 0, \\ I_1 E Y'''' - T Y'' - K_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20,14)$$

К выражениям (20,5) для перерезывающей силы надо прибавить теперь члены, равные проекциям действующей вдоль вектора \mathbf{t} силы T на оси x и y :

$$F_x = -EI_2 X'' + TX', \quad F_y = -EI_1 Y''' + TY'. \quad (20,15)$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и непосредственно из (19,3).

Большая сила T может в некоторых случаях появиться и в результате самого изгиба, даже если нет никаких специально приложенных растягивающих сил. Рассмотрим стержень, оба конца которого заделаны или закреплены на шарнирах в неподвижных опорах, так что не могут испытывать продольного смещения. Тогда прогиб стержня неизбежно сопровождается его удлинением, что и приводит к появлению в нём силы T . Легко оценить величину прогиба, при котором эта сила делается существенной. Длина $L + \Delta L$ изогнутого стержня равна интегралу

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2} dz,$$

взятому по прямой, соединяющей точки опоры. При слабом изгибе можно разложить корень в ряд, и мы получаем для удлинения ΔL выражение

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz.$$

Возникающая при простом растяжении сила натяжения равна относительному удлинению, умноженному на модуль Юнга и на площадь S сечения стержня. Таким образом, сила T равна

$$T = \frac{ES}{2L} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz. \quad (20,16)$$

Если δ есть порядок величины поперечного прогиба, то производные X' и Y' — порядка $\frac{\delta}{L}$, так что весь интеграл, стоящий в (20,16), — порядка величины $\frac{\delta^2}{L^2} L = \frac{\delta^2}{L}$ и $T \sim ES \left(\frac{\delta}{L}\right)^2$. Порядок величины первых и вторых членов в (20,14) — соответственно $IE \frac{\delta}{L^4}$ и $T \frac{\delta}{L^2} \sim ES \frac{\delta^3}{L^4}$. Момент инерции I имеет порядок величины $I \sim h^4$, а $S \sim h^2$, где h — толщина стержня. Подставляя это, легко получаем, что первые и вторые члены в (20,14) сравниваются по порядку величины при

$$\delta \sim h,$$

Таким образом, при изгибе стержней, концы которых закреплены, можно пользоваться уравнениями равновесия в виде (20,4), только если прогиб мал по сравнению с толщиной стержня. Если же δ не мало по сравнению с h (но, конечно, попрежнему $\delta \ll L$), то надо пользоваться уравнениями (20,14). При этом сила T в этих уравнениях заранее не известна. При их решении надо сначала рассматривать T как заданный параметр, а затем по полученному решению определить T согласно формуле (20,16), чем и определится связь T с приложенными к стержню изгибающими силами.

Обратным предельным случаем является тот, когда сопротивление стержня на изгиб мало по сравнению с его сопротивлением на растяжение, так что в уравнениях (20,14) можно пренебречь первыми членами по сравнению со вторыми. Физически такой случай может быть осуществлён либо очень сильным растяжением T , либо при достаточно малом EI , что может быть связано с малой толщиной h (о сильно натянутых стержнях говорят как о струнах). Уравнения равновесия гласят в этих случаях:

$$TX'' + K_x = 0, \quad TY'' + K_y = 0. \quad (20,17)$$

Концы струны надо представлять себе закреплёнными в том смысле, что их координаты заданы, т. е.

$$X = Y = 0. \quad (20,18)$$

Направление же концов не может быть задано произвольным образом, а определяется решением уравнений.

В заключение покажем, каким образом уравнения равновесия слабо изогнутого стержня можно получить, исходя из вариационного принципа, используя выражение (18,10) для упругой энергии:

$$F_{\text{от}} = \frac{E}{2} \int \{I_1 Y'^2 + I_2 X'^2\} dz.$$

В равновесии должна быть минимальна сумма этой энергии и потенциальной энергии, связанной с действующими на стержень внешними силами K , т. е. должно быть

$$\delta F_{\text{от}} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y) dz = 0$$

(второй член представляет собой работу внешних сил при бесконечно малом смещении линии стержня). При варьировании $F_{\text{от}}$ производим дважды интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int X'^2 dz &= \int X'' \delta X' dz = X'' \delta X' \Big| - \int X''' \delta X dz = \\ &= X'' \delta X' \Big| - X''' \delta X \Big| + \int X'''' \delta X dz \end{aligned}$$

и аналогичным образом для интеграла от Y''^2 . Собирая различные члены, получим:

$$\int [(EI_1 Y'''' - K_1) \delta Y + (EI_2 X'''' - K_2) \delta X] dz + \\ + EI_1 (Y'' \delta Y' - Y''' \delta Y) + EI_2 (X'' \delta X' - X''' \delta X) = 0.$$

Из первого, интегрального, члена следуют ввиду произвольности вариаций δX и δY уравнения равновесия (20,4). Остальные же, проинтегрированные, члены дают граничные условия к этим уравнениям; так, на свободном конце вариации δX , δY , $\delta X'$, $\delta Y'$ произвольны и соответственно получаются условия (20,11). В то же время коэффициенты при δX и δY в этих членах дают выражения (20,5) для компонент перерезывающей силы, а коэффициенты при $\delta X'$ и $\delta Y'$ — выражения (20,3) для компонент изгибающего момента.

Наконец, уравнения равновесия (20,14) при наличии растягивающей силы T можно получить тем же способом, прибавив к варьруемой энергии величину

$$T \Delta L = \frac{T}{2} \int (X'^2 + Y'^2) dz,$$

представляющую собой работу силы T на пути ΔL — удлинении стержня.

Задачи

1. Определить форму прогиба стержня (длины l) под влиянием собственного веса при различных способах закрепления его концов.

Решение. Искомая форма определяется решением уравнения

$$\zeta'''' = \frac{q}{EI}$$

(q — вес единицы длины стержня) с теми или другими граничными условиями на его концах, сформулированными в тексте. При различных способах закрепления концов стержня получаются следующие формы прогиба и максимальные смещения (так называемые стрелки прогиба); начало координат везде выбрано в одном из концов стержня.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EI}.$$

б) Оба конца опёрты:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z (z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}.$$

в) Один конец ($z=l$) заделан, а другой ($z=0$) опёрт:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z (2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0,42l) = 0,0054 \frac{q l^4}{EI}.$$

г) Один конец ($z=0$) заделан, а другой ($z=l$) свободен:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EI}.$$

2. Определить форму прогиба стержня под влиянием приложенной к его середине сосредоточенной силы f .

Решение. Везде кроме точки $z = l/2$ имеем уравнение $\zeta'''' = 0$. Граничные условия в концах стержня ($z = 0$ и $z = l$) определяются способом закрепления; в точке же $z = l/2$ должны быть непрерывны ζ , ζ' , ζ'' , а разность перерезывающих сил $F = -EI\zeta'''$ по обе стороны этой точки должна быть равна силе f .

Форма стержня (на участке $0 \leq z \leq l/2$) и стрелка прогиба даются следующими формулами.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2 (3l - 4z), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

б) Оба конца стержня опёрты:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z (3l^2 - 4z^2), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

Форма стержня симметрична относительно его середины, так что функция $\zeta(z)$ на участке $l/2 \leq z \leq l$ получается отсюда просто заменой z на $l - z$.

3. То же для стержня, один из концов которого ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен, причём к последнему приложена сосредоточенная сила f .

Решение. Вдоль всего стержня $F = \text{const.} = f$, так что $\zeta''' = -f/EI$. С условиями $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0$ и $\zeta'' = 0$ при $z = l$ получаем:

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

4. Определить форму прогиба стержня с закреплёнными концами под влиянием сосредоточенной пары сил, приложенной к его середине.

Решение. Вдоль всей длины стержня $\zeta'''' = 0$, а в точке $z = l/2$ момент $M = EI\zeta''$ испытывает скачок, равный моменту m приложенной сосредоточенной пары. С соответствующими условиями на концах получим:

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{m}{24EI} z^2 (l + 2z) \text{ при } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI} (l - z)^2 [l + 2(l - z)] \text{ при } l/2 \leq z \leq l.$$

б) Оба конца закреплены в шарнирах:

$$\zeta = \frac{m}{24EI} z (l^2 - 4z^2) \text{ при } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EI} (l - z) [l^2 - 4(l - z)^2] \text{ при } l/2 \leq z \leq l.$$

По обе стороны от точки $z = l/2$ стержень изогнут в разные стороны.

5. То же, если сосредоточенная пара приложена к свободному концу стержня, другой конец которого заделан.

Решение. Вдоль всей длины стержня имеем $M = EI\zeta'' = m$, а в точке $z = 0$: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. Форма изгиба дается формулой

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$

6. Определить форму стержня (кругового сечения) с закреплёнными в шарнирах концами, растягиваемого силой T и изгибаемого силой f , приложенной к его середине.

Решение. На отрезке $0 \leq z \leq l/2$ перерезывающая сила равна $f/2$, так что (20,15) даёт уравнение

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Граничные условия: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0$, l , а при $z = l/2$ должно быть $\zeta' = 0$ (в силу непрерывности ζ'). Для формы стержня (на отрезке $0 \leq z \leq l/2$) получим формулу

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left(z - \frac{\text{sh } kz}{k \text{ch } \frac{kz}{2}} \right), \quad k = \sqrt{\frac{T}{EI}}.$$

При малых k это выражение переходит в формулу, полученную в задаче 2, б. При больших же значениях k оно переходит в

$$\zeta = \frac{f}{2T} \frac{z}{l},$$

т. е., в согласии с уравнением (20,17), гибкая нить принимает под влиянием силы f форму, составленную из двух прямых отрезков, пересекающихся в точке $z = l/2$.

Если сила T сама возникает в результате растяжения стержня поперечной силой, то для её определения надо воспользоваться формулой (20,16). Подставив в неё полученное выражение, найдём уравнение

$$\frac{1}{k^6} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{th}^2 \frac{kl}{2} - \frac{3}{kl} \text{th} \frac{kl}{2} \right] = \frac{8E^2 l^3}{f^2 S},$$

определяющее в неявном виде T как функцию от f .

7. Стержень (кругового сечения) бесконечной длины лежит на упругом основании, т. е. при изгибе на него действует сила $K = -\alpha \zeta$, пропорциональная прогибу. Определить форму, принимаемую стержнем при действии на него сосредоточенной силы f .

Решение. Выбираем начало координат в точке приложения силы f . Везде кроме точки $z = 0$ имеет место уравнение

$$EI \zeta'''' = -\alpha \zeta.$$

Решение должно удовлетворять условиям $\zeta = 0$ при $z = \pm \infty$, а при $z = 0$ должны быть непрерывны ζ' , ζ'' ; разность же значений перерезывающей силы $F = -EI \zeta''''$ при $z \rightarrow +0$ и $z \rightarrow -0$ должна быть равна f . Такое решение есть

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI} e^{-\beta |z|} [\cos \beta |z| + \sin \beta |z|], \quad \beta = \left(\frac{\alpha}{4EI} \right)^{1/4}.$$

8. Вывести уравнение равновесия для слабого изгиба тонкого стержня (кругового сечения), имеющего в своём естественном состоянии форму дуги окружности и изгибаемого в своей плоскости приложенными к нему радиальными силами.

Решение. Выбирая начало полярных координат r , φ в центре окружности, напишем уравнение деформированной линии стержня в виде $r = a + \zeta(\varphi)$, где a — радиус дуги, а ζ — малые радиальные смещения при изгибе. Воспользовавшись известным выражением для радиуса кривизны в полярных координатах, найдём с точностью до членов первого порядка по ζ

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2}$$

(' означает дифференцирование по φ). Согласно (18,11) находим упругую энергию изгиба:

$$F_{\text{сг}} = \frac{EI}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a d\varphi = \frac{EI}{2a^3} \int_0^{2\pi} (\zeta + \zeta'')^2 d\varphi.$$

Уравнение равновесия получается из вариационного принципа

$$\delta F_{\text{сг}} - \int_0^{2\pi} \delta \zeta K_r a d\varphi = 0$$

(K_r — отнесённая к единице длины внешняя радиальная сила) с дополнительным условием

$$\int_0^{2\pi} \zeta d\varphi = 0,$$

выражающим собой в рассматриваемом приближении условие неизменности общей длины периметра стержня, т. е. условие отсутствия общего его растяжения. Следуя методу Лагранжа, приравняем нулю сумму

$$\delta F_{\text{сг}} - \int_0^{2\pi} a K_r \delta \zeta d\varphi + \alpha a \int_0^{2\pi} \delta \zeta d\varphi = 0,$$

где α — постоянная. Производя варьирование в подинтегральном выражении в $F_{\text{сг}}$ и интегрируя член с $\delta \zeta''$ дважды по частям, получим:

$$\int \left[\frac{EI}{a^3} (\zeta + 2\zeta'' + \zeta''') - a K_r + \alpha a \right] \delta \zeta d\varphi + \left. \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'') \delta \zeta' \right| - \left. \frac{EI}{a^2} (\zeta' + \zeta''') \delta \zeta \right| = 0.$$

Отсюда находим уравнение равновесия¹⁾

$$\frac{EI}{a^4} (\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0 \quad (1)$$

выражение для перерезывающей силы

$$F = -\frac{EI}{a^3} (\zeta' + \zeta''')$$

и выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta')$$

¹⁾ При отсутствии внешних сил $K_r = 0$ и $\alpha = 0$; отличные от нуля решения получающегося однородного уравнения соответствуют простому переносу или повороту стержня как целого.

(ср. конец § 20). Постоянная α определяется условием отсутствия общего растяжения стержня.

9. Определить деформацию кругового кольца, изгибаемого двумя сосредоточенными силами f , действующими вдоль диаметра (рис. 136).

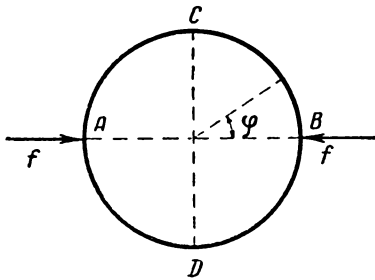


Рис. 136.

Решение. Интегрируя уравнение (1) по всей длине кольца, найдём, что

$$2\pi\alpha a = \int K_r a d\varphi = 2f.$$

Везде кроме точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ имеем уравнение (1) с $K_r = 0$:

$$\zeta''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

Искомая деформация кольца симметрична относительно диаметров AB и CD , в силу чего в точках A, B, C, D должно быть $\zeta' = 0$. Разность значений

перерезывающей силы при $\varphi \rightarrow \pm 0$ должна быть равна f . Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения равновесия есть

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\pi}{8} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

В частности, точки A и B взаимно сближаются на величину

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

§ 21. Устойчивость упругих систем

Поведение стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил, представляет простейший пример важного явления «упругой неустойчивости», впервые обнаруженного Л. Эйлером.

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x, K_y уравнения равновесия сжатого стержня (20,14) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы $|T|$ прямолинейным. Это решение, однако, соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ остаётся меньше некоторого критического значения $T_{кр}$. При $|T| < T_{кр}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Другими словами, если под влиянием какого-либо малого воздействия стержень подвергается слабой изгибу, то по прекращении этого воздействия стержень будет стремиться вернуться в исходное состояние.

Напротив, при $|T| > T_{кр}$ прямолинейная форма отвечает неустойчивому равновесию. Достаточно уже бесконечно малого воздействия (изгиба) для того, чтобы равновесие нарушилось, в результате чего произойдёт сильный изгиб стержня. Ясно, что в этих условиях сжатый стержень вообще не сможет реально существовать в неизогнутом виде.

Поведение стержня после потери им устойчивости должно описываться уравнениями сильного изгиба. Однако самое значение критической нагрузки $T_{кр}$ может быть получено с помощью уравнений слабого изгиба. При $|T| = T_{кр}$ прямолинейная форма стержня соответствует некоторому безразличному равновесию. Это значит, что наряду с решением $X = Y = 0$ должны существовать ещё и состояния слабого изгиба, которые тоже являются равновесными. Поэтому критическое значение $T_{кр}$ можно определить как то значение $|T|$, при котором у уравнений

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \quad EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \quad (21,1)$$

появляется отличное от нуля решение. Самое же это решение определяет характер деформации, которой подвергнется стержень непосредственно после потери им устойчивости.

В задачах этого параграфа приведён ряд типичных случаев потери устойчивости различными упругими системами ¹⁾.

Задачи

1. Определить критическую сжимающую силу для стержня с шарнирно закреплёнными концами.

Решение. Поскольку нас интересует наименьшее значение $|T|$, при котором появляется отличное от нуля решение уравнений (21,1), то достаточно рассмотреть лишь то из этих двух уравнений, которое содержит меньшее из I_1, I_2 ; пусть $I_2 < I_1$. Ищем решение уравнения $EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$ в виде

$$X = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz,$$

где $k = \sqrt{|T|/EI_2}$. Отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям $X = 0, X'' = 0$ при $z = 0$ и $z = l$, есть

$$X = C \sin kz,$$

причём должно быть $\sin kl = 0$. Отсюда находим искомую критическую силу

$$T_{кр} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

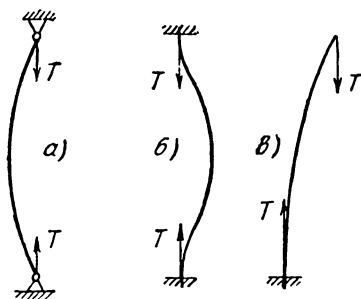


Рис. 137.

После потери устойчивости стержень примет форму изображённого на рис. 137, а вида.

2. То же для стержня с заделанными концами (рис. 137, б).

Решение. $T_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_2}{l^2}.$

3. То же для стержня, один из концов которого заделан, а другой свободен (рис. 137, в).

Решение. $T_{кр} = \frac{\pi^2 EI_2}{4l^2}.$

¹⁾ Подробное рассмотрение многочисленных случаев неустойчивости можно найти в книге: С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.

4. Определить критическую сжимающую силу для стержня (кругового сечения) с шарнирно закреплёнными концами, лежащего на упругом основании (см. задачу 7 § 20).

Решение. Вместо уравнений (21,1) здесь надо рассмотреть уравнение

$$EIX'''' + |T|X'' + \alpha X = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к решению

$$X = A \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad T_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right),$$

причём для n должно быть взято то из целых значений, для которого получается наименьшее значение $T_{кр}$. При достаточно больших значениях α получается $n > 1$, т. е. после потери устойчивости стержень принимает форму с несколькими «пучностями».

5. Стержень кругового сечения подвергнут кручению, и его концы заделаны. Определить критическую величину кручения, после которой прямолинейная форма стержня делается неустойчивой.

Решение. Критическое значение угла кручения определяется появлением отличных от нуля решений уравнений слабого изгиба закрученного стержня. Для вывода этих уравнений подставляем выражение (19,7):

$$M = EI \left[t \frac{dt}{dl} \right] + C\tau$$

(τ — постоянный угол кручения) в уравнение (19,3); это даёт

$$EI \left[t \frac{d^2 t}{dl^2} \right] + C\tau \frac{dt}{dl} - [Ft] = 0.$$

Дифференцируем это уравнение; поскольку изгиб слабый, то при дифференцировании первого и третьего членов можно считать t постоянным, равным вектору t_0 , направленному по оси стержня (оси z). Помня также, что $\frac{dF}{dl} = 0$ (внешние силы по длине стержня отсутствуют), получаем:

$$EI \left[t_0 \frac{d^3 t}{dl^3} \right] + C\tau \frac{d^2 t}{dl^2} = 0,$$

или в компонентах:

$$Y'''' - \kappa X'''' = 0,$$

$$X'''' + \kappa Y'''' = 0,$$

где $\kappa = \frac{C\tau}{EI}$. Вводя в качестве неизвестной функцию $\xi = X + iY$, получаем уравнение $\xi'''' - i\kappa \xi'' = 0$. Ищем решение, удовлетворяющее условиям $\xi = 0$, $\xi' = 0$ при $z = 0$, $z = l$, в виде $\xi = a(1 + i\kappa z - e^{i\kappa z}) + bz^2$ и получаем в качестве условия совместности получающихся для a и b уравнений соотношение $e^{i\kappa l} = \frac{2 + i\kappa l}{2 - i\kappa l}$, откуда $\frac{\kappa l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2}$. Наименьший корень этого уравнения есть $\frac{\kappa l}{2} = 4,49$, так что

$$\tau_{кр} = \frac{8,98 EI}{Cl}.$$

6. То же для стержня с шарнирно закреплёнными концами.

Решение. Здесь получается $\xi = a \left(1 - e^{i\kappa z} - \frac{\kappa^2}{2} z^2 \right) + bz$, причём κ определяется из $e^{i\kappa l} = 1$, т. е. $\kappa l = 2\pi$. Поэтому искомый критический угол

кручения:

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{2\pi EI}{Cl}.$$

7. Определить предел устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса; нижний конец стержня заделан.

Решение. Если продольное натяжение $F_z \equiv T$ меняется вдоль длины стержня, то в первом члене в (20,1) $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$ и вместо уравнений (20,14) получается:

$$I_2 EX'''' - (TX')' - K_x = 0,$$

$$I_1 EY'''' - (TY')' - K_y = 0.$$

В данном случае поперечные изгибающие силы отсутствуют по всей длине стержня, а $T = -q(l-z)$, где q — вес единицы длины стержня, а z отсчитывается от его нижнего конца. Предполагая, что $I_2 < I_1$, рассматриваем уравнение

$$I_2 EX'''' = TX' = -q(l-z)X'$$

(при $z=l$ автоматически имеем $X'''' = 0$). Общий интеграл этого уравнения для функций $u = X'$ есть

$$u = \eta^{1/3} [aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)],$$

где

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI_2} (l-z)^3}.$$

Граничные условия $X' = 0$ при $z = 0$ и $X'' = 0$ при $z = l$ дают для функции $u(\eta)$ условия:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI_2}}, \quad u'\eta^{1/3} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям надо положить $b = 0$, причём $J_{-1/3}(\eta_0) = 0$. Наименьший корень этого уравнения $\eta_0 = 1,87$, откуда находим критическую длину стержня

$$l_{\text{кр}} = 1,98 \sqrt[3]{\frac{EI_2}{q}}.$$

8. Стержень обладает вытянутой формой поперечного сечения, так что $I_2 \gg I_1$. Один конец стержня заделан, а к свободному концу приложена сила f , изгибающая его в главной плоскости x, z (в которой жёсткость на изгиб есть EI_2). Определить критическое значение $f_{\text{кр}}$, после которого плоская форма изгиба становится неустойчивой и стержень отгибается в боковую сторону (в плоскости y, z), одновременно испытывая кручение.

Решение. Ввиду большой величины жёсткости EI_2 по сравнению с EI_1 (и с жёсткостью на кручение C)¹⁾ неустойчивость по отношению к сильному боковому изгибу возникает в то время, когда изгиб в плоскости x, z остаётся ещё слабым. Для определения момента наступления неустойчивости

¹⁾ Так, для узкого прямоугольного сечения с шириной h и высотой $b \gg h$ имеем:

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12} E, \quad EI_2 = \frac{b^3h}{12} E, \quad C = \frac{bh^3}{3} \mu.$$

надо составить уравнения слабого бокового изгиба стержня, сохраняя в них члены, пропорциональные произведениям действующей в плоскости x, z силы f на малые смещения. Поскольку сосредоточенная сила приложена лишь к свободному концу стержня, то вдоль всей его длины $F = f$, а на свободном конце ($z = l$) момент $M = 0$; по формуле (19,6) находим компоненты момента относительно закреплённой системы координат x, y, z :

$$M_x = 0, \quad M_y = (l - z)f, \quad M_z = (Y - Y_0)f.$$

где $Y_0 = Y(l)$. Проектируем эти моменты на связанные в каждой точке со стержнем оси координат ξ, η, ζ ; с точностью до членов первого порядка по смещениям получим:

$$M_\xi = \varphi(l - z)f, \quad M_\eta = (l - z)f,$$

$$M_\zeta = (l - z)f \frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0),$$

где φ — полный угол поворота сечения стержня при его закручивании (угол кручения $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$ здесь не постоянен вдоль длины стержня). С другой стороны, согласно (18,6) и (18,9) имеем при слабом изгибе

$$M_\xi = -EI_1 Y'', \quad M_\eta = EI_2 X'', \quad M_\zeta = C\varphi'$$

и, сравнивая эти выражения, получим уравнения равновесия:

$$EI_2 X'' = (l - z)f,$$

$$EI_1 Y'' = -\varphi(l - z)f, \quad C\varphi' = (l - z)fY' + (Y - Y_0)f.$$

Первое из этих уравнений определяет основной изгиб стержня в плоскости x, z ; требуется найти значение f , при котором появляется отличное от нуля решение у второго и третьего уравнений. Исключая из них Y , найдём

$$\varphi'' + k^2(l - z)^2 \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{f^2}{EI_1 C}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = a \sqrt{l - z} J_{1/4} \left(\frac{k}{2} (l - z)^2 \right) + b \sqrt{l - z} J_{-1/4} \left(\frac{k}{2} (l - z)^2 \right).$$

На заделанном конце ($z = 0$) должно быть $\varphi = 0$, а на свободном крутящий момент $C\varphi' = 0$. Из второго условия имеем $a = 0$, а первое даёт $J_{-1/4} \left(\frac{kl^2}{2} \right) = 0$.

Наименьший корень этого уравнения есть $\frac{kl^2}{2} = 2,006$, откуда

$$f_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{EI_1 C}}{l^2}.$$

ГЛАВА III УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ 22. Упругие волны в изотропной среде

Если в деформируемом теле происходит движение, то температура тела, вообще говоря, отнюдь не постоянна, а меняется как со временем, так и от точки к точке вдоль тела. Это обстоятельство сильно усложняет точные уравнения движения в общем случае произвольных движений.

Обычно, однако, положение упрощается благодаря тому, что передача тепла из одного участка тела в другой (посредством простой теплопроводности) происходит очень медленно. Если теплообмен практически не происходит в течение промежутков времени порядка периода колебательных движений в теле, то можно рассматривать каждый участок тела как теплоизолированный, т. е. движение будет адиабатическим. Но при адиабатических деформациях σ_{ik} выражается через u_{ik} по формулам обычного вида с той лишь разницей, что вместо обычных («изотермических») значений величин E , σ надо брать их адиабатические значения (см. § 6). Ниже мы будем считать это условие выполненным и соответственно этому под E и σ в этой главе будут подразумеваться их адиабатические значения.

Для того чтобы получить уравнения движения упругой среды, надо приравнять силу внутренних напряжений $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ произведению ускорения \ddot{u}_i на массу единицы объема тела, т. е. на его плотность ρ :

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (22,1)$$

Это есть общий вид уравнения движения.

В частности, уравнения движения изотропной упругой среды можно написать непосредственно по аналогии с уравнением равновесия (7,2). Имеем:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (22,2)$$

Поскольку все деформации предполагаются малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой малые,

как говорят, упругие колебания или волны. Мы начнём с рассмотрения плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т. е. волны, в которой деформация \mathbf{u} является функцией только от одной из координат, скажем от x (и от времени). Все производные по y и z в уравнениях (22,2) исчезают, и мы получаем для отдельных компонент вектора \mathbf{u} следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22,3)$$

(уравнение для u_z такое же, как для u_y), где введены обозначения ¹⁾:

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (22,4)$$

Уравнения (22,3) представляют собой обычные волновые уравнения в одном измерении, и входящие в них величины c_l и c_t являются скоростями распространения волны. Мы видим, что скорость распространения волны оказывается различной для компоненты u_x , с одной стороны, и компонент u_y , u_z — с другой.

Таким образом, упругая волна представляет собой по существу две независимо распространяющиеся волны. В одной из них (u_x) смещение направлено по направлению распространения самой волны; такая волна называется продольной и распространяется со скоростью c_l . В другой (u_y , u_z) — смещение направлено в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения; такая волна называется поперечной и распространяется со скоростью c_t . Заметим, что, как видно из (22,4), скорость распространения продольных волн всегда больше, чем скорость поперечных. Именно, всегда имеет место неравенство ²⁾

$$c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}. \quad (22,5)$$

Скорости c_l и c_t часто называют продольной и поперечной скоростями звука.

Мы знаем, что изменение объёма при деформации определяется суммой диагональных членов тензора деформации, т. е. величиной $\mathbf{u}_{ii} \equiv \text{div } \mathbf{u}$. В поперечной волне имеются только компоненты u_y , u_z , и поскольку они не зависят ни от y , ни от z , то для такой волны

¹⁾ Дадим также выражения для c_l и c_t через модули сжатия и сдвига и через коэффициенты Ламэ:

$$c_l = \sqrt{\frac{3K+4\mu}{3\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

²⁾ Поскольку фактически σ меняется лишь в пределах от 0 до $1/2$ (см сноску на стр. 645), то всегда имеет место и более сильное неравенство:

$$c_l > c_t \sqrt{2}.$$

$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Таким образом, поперечные волны не связаны с изменением объёма отдельных участков тела. Напротив, для продольных волн $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$; эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимо распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести и в общем случае произвольной (не плоской) упругой волны в неограниченном пространстве.

Перепишем уравнение (22,2), введя в него скорости c_l и c_t :

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} - (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22,6)$$

Представим вектор \mathbf{u} в виде суммы двух частей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (22,7)$$

из которых одна удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0, \quad (22,8)$$

а другая — условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0. \quad (22,9)$$

Из векторного анализа известно, что такое представление всегда возможно (это есть представление вектора в виде суммы ротора некоторого вектора и градиента некоторого скаляра).

При подстановке $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$ в (22,6) получаем:

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (22,10)$$

Применим к обоим сторонам этого уравнения операцию div . Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, то мы получим:

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_t^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l,$$

или

$$\operatorname{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0.$$

С другой стороны, rot стоящего в скобках выражения тоже равен нулю в силу (22,9). Но если rot и div некоторого вектора исчезают во всём пространстве, то этот вектор тождественно равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (22,11)$$

Аналогично, применяя к уравнению (22,10) операцию rot и помня, что $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$ и что rot всякого градиента равен нулю, находим:

$$\operatorname{rot} (\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0.$$

Поскольку div стоящего в скобках выражения тоже равно нулю, то мы приходим опять к уравнению того же вида, как и (22,11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (22,12)$$

Уравнения (22,11) и (22,12) представляют собой обычные волновые уравнения (в трёх измерениях). Каждое из них соответствует распространению упругой волны со скоростью соответственно c_l или c_t . Одна из этих волн (\mathbf{u}_l) не связана с изменением объёма (в силу $\text{div } \mathbf{u}_l = 0$), а другая (\mathbf{u}_t) сопровождается объёмными сжатиями и расширениями.

В монохроматической упругой волне вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u} = \text{Re} \{ \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}, \quad (22,13)$$

где \mathbf{u}_0 — функция координат. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u}_0 + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0, \quad (22,14)$$

получающемуся при подстановке (22,13) в (22,6). Продольная и поперечная части монохроматической волны удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (22,15)$$

где $k_l = \frac{\omega}{c_l}$, $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ — волновые векторы продольной и поперечной волн.

Наконец, рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической упругой волны на границе раздела между двумя различными упругими средами. При этом надо иметь в виду, что при отражении и преломлении характер волны, вообще говоря, меняется. Если на границу раздела падает чисто поперечная или чисто продольная волна, то в результате получаются смешанные волны, содержащие как поперечные, так и продольные части. Характер волны не меняется (как это явствует из соображений симметрии) только в случае перпендикулярного падения волны на поверхность раздела и в случае падения под произвольным углом поперечной волны с параллельными плоскости раздела колебаниями.

Соотношения, определяющие направления отражённой и преломлённой волн, могут быть получены непосредственно из постоянства частоты и касательных к поверхности раздела компонент волнового вектора¹⁾. Пусть θ и θ' — угол падения и угол отражения (или преломления), а c , c' — скорости обеих рассматриваемых волн. Тогда

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'}. \quad (22,16)$$

Пусть, например, падающая волна является поперечной. Тогда $c = c_{t1}$ есть скорость поперечных волн в первой среде. Для поперечной же отражённой волны имеем тоже $c' = c_{t1}$, и потому (22,16) даст

$$\theta = \theta',$$

¹⁾ См. часть I. «Гидродинамика», § 65. Все изложенные там соображения полностью применимы и здесь.

т. е. угол падения равен углу отражения. Для продольной же отражённой волны имеем $c' = c_{l1}$, и потому

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}.$$

Для поперечной части преломлённой волны имеем $c' = c_{t2}$ и при поперечной же падающей волне имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

Аналогично для продольной преломлённой волны имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l2}}.$$

З а д а ч и

1. Определить коэффициент отражения продольной монохроматической волны, падающей под произвольным углом на границу тела (за которой находится пустота).

Решение. При отражении под произвольным углом возникают как продольная, так и поперечная отражённая волны. Из соображений симметрии заранее ясно, что вектор смещения в поперечной отражённой волне будет лежать целиком в плоскости падения (рис. 138; $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_l, \mathbf{n}_t$ — единичные векторы вдоль направлений падающей, продольной и поперечной отражённых волн, а $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_t$ — соответствующие векторы смещений). Полное смещение в теле равно сумме (общий множитель в $e^{-i\omega t}$ для краткости опускаем)

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{ik_0 \mathbf{r}} + A_l \mathbf{n}_l e^{ik_l \mathbf{r}} + A_t [\mathbf{a} \mathbf{n}_t] e^{ik_t \mathbf{r}}$$

(\mathbf{a} — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости падения). Абсолютные величины волновых векторов равны: $k_0 = k_l = \frac{\omega}{c_l}$, $k_t = \frac{\omega}{c_t}$, а углы падения θ_0 и отражения θ_l, θ_t связаны посредством $\theta_l = \theta_0$, $\sin \theta_t =$

$= \sin \theta_0 \frac{c_l}{c_t}$. Для компонент тензора деформации на границе тела получаем:

$$u_{xx} = ik_0 (A_0 + A_l) \cos^2 \theta_0 + iA_t k_t \cos \theta_t \sin \theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0 (A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0 (A_0 - A_l) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{i}{2} A_t k_t (\cos^2 \theta_t - \sin^2 \theta_t)$$

(общие экспоненциальные множители опускаем). Компоненты тензора напряжений вычисляем по общей формуле (5,11), которую удобно писать здесь в виде

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho (c_l^2 - 2c_t^2) u_{ll} \delta_{ik}.$$

Граничные условия на свободной поверхности среды гласят $\sigma_{ik} n_k = 0$, откуда $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$, и дают два уравнения, из которых можно выразить A_l, A_t

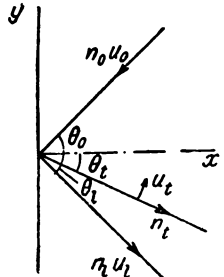


Рис. 138.

через A_0 . В результате вычисления получается:

$$A_t = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t},$$

$$A_l = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}.$$

При $\theta_0 = 0$ имеем $A_l = -A_0$, $A_t = 0$, т. е. волна отражается целиком как продольная. Отношение перпендикулярной к поверхности среды компоненты плотности потока энергии в отражённой продольной волне к такому же потоку в падающей волне есть

$$R_l = \left| \frac{A_l}{A_0} \right|^2.$$

Аналогичное отношение для отражённой поперечной волны есть

$$R_t = \frac{c_t \cos \theta_t}{c_l \cos \theta_0} \left| \frac{A_t}{A_0} \right|^2.$$

Разумеется, $R_l + R_t = 1$.

2. То же, если падающая волна поперечная (и направление колебаний в ней лежит в плоскости падения).

Решение. Волна отражается в виде поперечной же и продольной волн, причём $\theta_t = \theta_0$, $c_t \sin \theta_l = c_l \sin \theta_0$. Полный вектор смещения:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{an}_0] A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} + n_l A_l e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}} + [\mathbf{an}_l] A_t e^{i\mathbf{k}_t \mathbf{r}}.$$

Для амплитуд отражённых волн получаются выражения:

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}.$$

3. Определить радиальные собственные колебания упругого шара.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в центре шара. При радиальных колебаниях \mathbf{u} направлено по радиусу и является функцией только от r (и от t). Поэтому $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, и уравнение движения имеет вид

$$c_l^2 \nabla \text{div } \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}.$$

Ищем решение в виде $\mathbf{u} = u_0(r) \sin(\omega t + \alpha)$ и получаем для u_0 уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_0)}{dr} \right) + k^2 u_0 = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c_l} \right).$$

Решение этого уравнения, конечное во всём объёме шара, включая его центр, есть

$$u_0 = A \left(\frac{\cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{kr^2} \right).$$

Граничные условия: при $r = R$ (R — радиус шара) должно быть $\sigma_{rr} = 0$, или

$$(1 - \sigma) \frac{du_0}{dr} + 2\sigma \frac{u_0}{r} = 0.$$

Оно приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - k^2 R^2 \frac{c_l^2}{4c_t^2}},$$

корни которого определяют частоты $\omega = kc_l$ собственных колебаний.

§ 23. Упругие волны в кристаллах

Распространение упругих волн в анизотропной среде, т. е. в кристаллах, подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение волн в изотропном теле. Для исследования таких волн мы должны обратиться к общим уравнениям движения

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

и воспользоваться для σ_{ik} общим выражением (10,3):

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}.$$

Соответственно сказанному в начале предыдущего параграфа под λ_{iklm} надо везде подразумевать адиабатические значения модулей упругости.

Подставляя σ_{ik} в уравнения движения, получаем:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}. \end{aligned}$$

Поскольку тензор λ_{iklm} симметричен по индексам l и m , то, меняя во втором члене обозначение индексов суммирования l и m на обратное, находим, что первый и второй члены тождественны. Таким образом, мы получаем уравнения движения в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (23,1)$$

Рассмотрим монохроматическую упругую волну в кристалле. Для этого мы должны искать решение уравнений движения в виде

$$u_i = u_{0i} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

(u_{0i} — постоянные), причём соотношение между волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω должно быть определено так, чтобы написанная функция действительно удовлетворяла уравнению (23,1). Дифференцирование u_i по времени приводит к умножению на $-i\omega$, а дифференцирование по x_k — к умножению на ik_k . Поэтому уравнение (23,1) после подстановки превращается в

$$\rho \omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m.$$

Написав $u_i = \delta_{im} u_m$, переписываем это равенство в виде

$$(\rho\omega^2\delta_{im} - \lambda_{iklm}k_k k_l) u_m = 0. \quad (23,2)$$

Это есть система трёх однородных уравнений первой степени относительно неизвестных u_x , u_y , u_z . Как известно, такая система имеет отличные от нуля решения только в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов при u_m , равен нулю. Таким образом, должно выполняться условие

$$|\lambda_{iklm}k_k k_l - \rho\omega^2\delta_{im}| = 0. \quad (23,3)$$

Это — уравнение третьей степени по ω^2 . Оно имеет три, вообще говоря, различных корня. Каждый из этих корней определяет частоту как функцию от волнового вектора k_i ¹⁾. Подставляя поочередно каждый из них обратно в уравнения (23,2), мы получим из этих уравнений компоненты соответствующего смещения u_i (при этом, конечно, в силу однородности уравнений определяются только отношения между тремя компонентами u_i , но не их абсолютные величины, так что все u_i могут быть ещё умножены на общую произвольную постоянную).

Скорость распространения волны («групповая скорость») определяется производной от частоты по волновому вектору. В изотропном теле частота пропорциональна абсолютному значению k , и потому направление скорости $\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$ совпадает с направлением \mathbf{k} . В кристаллах такая зависимость не имеет места и потому направление распространения волны не совпадает с направлением её волнового вектора.

Из уравнения (23,3) видно, что ω является однородной функцией первого порядка от компонент k_i вектора \mathbf{k} (если ввести в качестве неизвестной величины отношение ω/k , то коэффициенты уравнения не зависят от k). Поэтому скорость распространения $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$ есть однородная функция нулевого порядка от k_i . Таким образом, скорость волны, являясь функцией её направления, не зависит от частоты.

В связи с наличием трёх различных зависимостей между ω и \mathbf{k} для каждого направления в кристалле имеется три, вообще говоря различные, скорости распространения упругих волн. Лишь в некоторых исключительных направлениях эти скорости могут совпадать.

В изотропной среде двум разным скоростям распространения соответствовали волны чисто продольные и чисто поперечные. В противоположность этому в кристалле каждой скорости распространения соответствует волна, вектор смещения в которой обладает составляющими

1) В изотропном теле это уравнение привело бы к уже известному нам результату: одному решению $\omega^2 = c_l^2 k^2$ и двум совпадающим решениям $\omega^2 = c_t^2 k^2$.

как параллельными, так и перпендикулярными к направлению распространения.

Наконец, отметим ещё следующее обстоятельство. Для каждого данного волнового вектора \mathbf{k} в кристалле могут существовать три волны (с различными частотами и скоростями распространения). Легко видеть, что векторы смещения \mathbf{u} в этих трёх волнах взаимно перпендикулярны. Действительно, при заданном \mathbf{k} (23,3) можно рассматривать как уравнение, определяющее главные значения $\rho\omega^2$ симметричного (по индексам i, m) тензора второго ранга $\lambda_{iklm}k_k k_l$ ¹⁾. Уравнения (23,2) определяют тогда главные направления этого тензора, которые, как известно, взаимно перпендикулярны.

З а д а ч а

Определить зависимость частоты от волнового вектора для упругих волн, распространяющихся в кристалле гексагональной системы.

Решение. Отличные от нуля компоненты тензора λ_{iklm} в координатах x, y, z связаны с его компонентами в «координатах» ξ, η, z (см. § 10) посредством соотношений:

$$\begin{aligned} \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a + b, & \quad \lambda_{xxyy} = a - b, & \quad \lambda_{xyxy} = b, \\ \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = c, & \quad \lambda_{xzzz} = \lambda_{yzzz} = d, & \quad \lambda_{zzzz} = f, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\lambda_{\xi\eta\xi\eta} = 4a, \quad \lambda_{\xi\xi\eta\eta} = 8b, \quad \lambda_{\xi\eta zz} = 2c, \quad \lambda_{\xi z\eta z} = 2d.$$

Ось z направлена по оси симметрии 6-го порядка; направления же осей x, y могут быть выбраны произвольным образом. Выберем плоскость x, z так, чтобы в ней лежал волновой вектор \mathbf{k} . Тогда

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \theta,$$

где θ — угол между \mathbf{k} и осью z . Составляя уравнение (23,3) и решая его получим три различные зависимости ω от k :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k^2}{\rho} (b \sin^2 \theta + d \cos^2 \theta), \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{k^2}{2\rho} \left\{ (a + b) \sin^2 \theta + f \cos^2 \theta + d \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[(a + b - d) \sin^2 \theta + (d - f) \cos^2 \theta]^2 + 4(c + d)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right\}. \end{aligned}$$

§ 24. Поверхностные волны

Особым видом упругих волн являются волны, распространяющиеся вблизи поверхности тела и не проникающие в глубь вещества (Рэлей).

1) В силу свойств симметрии тензора λ_{iklm} имеем:

$$\lambda_{iklm}k_k k_l = \lambda_{kilm}k_k k_l = \lambda_{mlki}k_k k_l.$$

Последнее выражение отличается от $\lambda_{mkli}k_k k_l$ только обозначением индексов суммирования k и l , т. е. тензор $\lambda_{iklm}k_k k_l$ действительно симметричен.

Напишем уравнения движения в виде (22,11) и (22,12):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (24,1)$$

(где u — какая-нибудь из компонент векторов \mathbf{u}_l , \mathbf{u}_t , а c — соответствующая ей скорость c_l или c_t) и будем искать решения, соответствующие таким поверхностным волнам. Поверхность упругой среды будем предполагать плоской (и неограниченной). Эту плоскость выберем в качестве плоскости x , y ; области среды пусть соответствуют $z < 0$.

Рассмотрим «плоскую» монохроматическую поверхностную волну, распространяющуюся вдоль оси x . Соответственно этому ищем u в виде

$$u = e^{i(kx - \omega t)} f(z).$$

Подставляя это выражение в (24,1), получаем для функции $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f.$$

Если $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$, то это уравнение приводит к периодической функции f , т. е. мы получили бы обыкновенную плоскую волну, не исчезающую во всём объёме тела. Поэтому мы должны считать, что $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$. Тогда для f получаем решения вида

$$f(z) = \text{const.} \cdot e^{\pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} z}.$$

Решение со знаком минус в показателе соответствовало бы неограниченному возрастанию деформации по направлению внутрь тела (т. е. при $z < 0$). Такое решение, очевидно, не имеет смысла, и мы должны выбрать знак плюс в показателе.

Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнений движения:

$$u = \text{const.} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{xz}, \quad (24,2)$$

где

$$x = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (24,3)$$

Оно соответствует волне, быстро (экспоненциально) затухающей внутрь тела, т. е. распространяющейся только вблизи его поверхности. Величина x определяет скорость этого затухания.

Истинный вектор деформации \mathbf{u} в волне является суммой векторов \mathbf{u}_l и \mathbf{u}_t , компоненты каждого из которых удовлетворяют уравнению (24,1) со скоростью $c = c_l$ для \mathbf{u}_l и $c = c_t$ для \mathbf{u}_t . В случае объёмных волн в неограниченной среде эти две части представляют собой две независимо распространяющиеся волны. В случае же поверх-

ностных волн такое разделение на две независимые части оказывается (благодаря наличию граничных условий) невозможным. Вектор смещения \mathbf{u} должен быть определённой линейной комбинацией векторов \mathbf{u}_z и \mathbf{u}_t . По поводу этих последних надо также отметить, что они отнюдь не имеют теперь наглядного смысла параллельных и перпендикулярных к направлению распространения компонент смещения.

Для определения линейной комбинации векторов \mathbf{u}_z и \mathbf{u}_t , дающей истинное смещение \mathbf{u} , надо обратиться к предельным условиям на границе тела. Отсюда же определится связь между волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω , а следовательно, и скорость распространения волны. На свободной поверхности должно выполняться условие $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку вектор нормали \mathbf{n} направлен по оси z , то отсюда следуют условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

откуда

$$u_{xz} = 0, \quad u_{yz} = 0, \quad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0. \quad (24,4)$$

Поскольку все величины не зависят от координаты y , то второе из этих условий даёт

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

С учётом (24,2) отсюда следует

$$u_y = 0. \quad (24,5)$$

Таким образом, в поверхностной волне вектор деформации \mathbf{u} лежит в плоскости, проведённой через направление распространения перпендикулярно к поверхности.

«Поперечная» часть волны \mathbf{u}_t должна удовлетворять условию (22,8) $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, или

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

Зависимость u_{tx} и u_{tz} от x и z определяется множителем $e^{ikx + x_t z}$ где x_t определяется выражением (24,3) с $c = c_t$, т. е.

$$x_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}.$$

Поэтому написанное условие приводит к равенству

$$iku_{tx} + x_t u_{tz} = 0,$$

или

$$\frac{u_{tx}}{u_{tz}} = -\frac{x_t}{ik}.$$

Таким образом, мы можем написать:

$$u_{tx} = x_t a e^{ikx + x_t z - i\omega t}, \quad u_{tz} = -ika e^{ikx + x_t z - i\omega t}, \quad (24,6)$$

где a есть некоторая постоянная.

«Продольная» часть u_l удовлетворяет условию (22,9) $\text{rot } u_l = 0$ или

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$iku_{lz} - \kappa_l u_{lx} = 0 \quad \left(\kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} \right).$$

Таким образом, должно быть:

$$u_{lx} = kbe^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa_l b e^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad (24,7)$$

где b — постоянная.

Теперь воспользуемся первым и третьим из условий (24,4). Выражая u_{ik} через производные от u_i и вводя скорости c_l и c_t , переписываем эти условия в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= 0, \\ c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24,8)$$

Сюда надо подставить

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz}.$$

В результате первое из условий (24,8) даёт уравнение

$$a(k^2 + \kappa_l^2) + 2bk\kappa_l = 0. \quad (24,9)$$

Второе приводит к равенству

$$2ac_l^2 \kappa_l k + b[c_l^2(\kappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2] = 0.$$

Разделив это уравнение на c_l^2 и подставив

$$\kappa_l^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_l^2} = -(k^2 - \kappa_t^2) \frac{c_t^2}{c_l^2},$$

переписываем его в виде

$$2a\kappa_l k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \quad (24,10)$$

Условие совместности двух однородных уравнений (24,9) и (24,10) даёт

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2 \kappa_t \kappa_l$$

или, возводя в квадрат и подставляя $\kappa_t^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}$, $\kappa_l^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}$:

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \quad (24,11)$$

Из этого уравнения определяется связь между ω и k . Для этого удобно положить

$$\omega = c_t k \xi. \quad (24,12)$$

Тогда k^8 с обеих сторон уравнения сократится, и, раскрывая скобки, мы получим для величины ξ уравнение

$$\xi^5 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \quad (24,13)$$

Мы видим отсюда, что ξ есть число, зависящее только от отношения $\frac{c_t}{c_l}$, являющегося некоторой характерной для каждого данного вещества постоянной и зависящего в свою очередь только от коэффициента Пуассона:

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}.$$

Величина ξ должна быть, разумеется, вещественной положительной, причём $\xi < 1$ (так, чтобы x_t, x_l были вещественны). Уравнение (24,13) имеет только один корень, удовлетворяющий этим условиям, так что для каждого данного значения c_t/c_l получается всего одно определённое значение ξ .

Таким образом, для поверхностных волн, как и для объёмных, частота пропорциональна волновому вектору. Коэффициент пропорциональности между ними есть скорость распространения волны

$$U = c_t \xi. \quad (24,14)$$

Этим определяется скорость распространения поверхностных волн через скорости c_t и c_l поперечных и продольных объёмных волн. Отношение амплитуд поперечной и продольной частей волны определяется по значению ξ формулой

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (24,15)$$

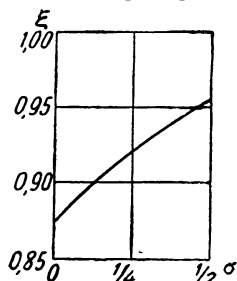


Рис. 139.

Отношение c_t/c_l фактически меняется для различных веществ в пределах от $1/\sqrt{2}$ до 0, что соответствует изменению σ от 0 до $1/2$; при этом ξ меняется от 0,874 до 0,955. На рис. 139 дан график зависимости ξ от σ .

Задача

Плоскопараллельный пласт толщины h (среда 1) лежит на упругом полупространстве (среда 2). Определить зависимость частоты от волнового вектора для поперечных волн в пласте с направлением колебаний, параллельным границам пласта.

Решение. Выберем плоскость раздела между пластом и полупространством в качестве плоскости x, y , причём упругому полупространству соответствуют $z < 0$, а пласту $h \geq z \geq 0$. В пласте имеем:

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \quad u_{y1} = f(z) e^{i(kx - \omega t)},$$

а в среде 2 пишем затухающую в глубину неё волну

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \quad u_{y2} = A e^{\kappa_2 z} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}}.$$

Для функции $f(z)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \kappa_1^2 f = 0, \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2}$$

(мы увидим ниже, что должно быть $\kappa_1^2 > 0$), откуда

$$f(z) = B \sin \kappa_1 z + C \cos \kappa_1 z.$$

На свободной границе пласта ($z = h$) должно быть $\sigma_{zy} = 0$, т. е. $\frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = 0$.

На границе же между обими средами ($z = 0$) имеем условия:

$$u_{y1} = u_{y2}, \quad \mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

(μ_1, μ_2 — модули сдвига обеих сред). Из этих условий находим три уравнения для A, B, C , условие совместности которых даёт

$$\operatorname{tg} \kappa_1 h = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1}.$$

Это уравнение определяет в неявном виде зависимость ω от k ; оно имеет решения лишь при вещественных κ_1 и κ_2 , так что всегда

$$c_{t2} > \frac{\omega}{k} > c_{t1}.$$

Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии $c_{t2} > c_{t1}$.

§ 25. Колебания стержней и пластинок

Волны, распространяющиеся в тонких пластинках и стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в среде, неограниченной во всех направлениях. При этом речь идёт о волнах, длина которых велика по сравнению с толщиной стержня или пластинки. Если длина волны мала по сравнению с этой толщиной, то при распространении таких волн стержень или пластинку можно было бы вообще рассматривать как неограниченные во всех направлениях, и мы получили бы снова соотношения, имевшие место в неограниченных средах.

Необходимо различать волны, в которых колебания происходят параллельно оси стержня или плоскости пластинки от волн с перпендикулярными колебаниями. Начнём с изучения продольных волн в стержнях.

Продольная деформация стержня (однородная вдоль его сечения), на боковую поверхность которого не действуют никакие внешние силы, представляет собой простое растяжение или сжатие. Таким образом, продольные волны в стержне представляют собой распространяющиеся вдоль его длины простые растяжения или сжатия. Но при простом растяжении отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений (ось z — вдоль длины стержня), связанная с тензором деформации посредством (см. § 5):

$$\sigma_{zz} = E u_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Подставляя это в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k},$$

находим:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (25,1)$$

Это есть уравнение продольных колебаний в стержнях. Мы видим что оно имеет вид обычного волнового уравнения. Скорость распространения продольных волн в стержнях оказывается равной

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (25,2)$$

Сравнивая её с выражением (22,4) для c_l видим, что она меньше скорости распространения продольных волн в неограниченной среде.

Перейдём теперь к продольным волнам в тонких пластинках. Уравнения движения для таких колебаний можно написать сразу, подставив в уравнения равновесия (13,4) — $\rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ и — $\rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ вместо P_x и P_y :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (25,3)$$

Рассмотрим «плоскую» волну, распространяющуюся вдоль оси x , т. е. волну, в которой деформация зависит только от координаты x , но не от y . Тогда уравнения (25,3) сильно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (25,4)$$

Мы получаем, таким образом, опять простые волновые уравнения. Стоящие в них коэффициенты различны для u_x и u_y . Скорость распространения волны с колебаниями, параллельными направлению

распространения (u_x), равна

$$V \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (25,5)$$

Скорость же волны (u_y) с колебаниями, перпендикулярными к направлению распространения (но попережнему лежащими в плоскости пластинки) равна скорости c_t поперечных волн в неограниченной среде.

Мы видим, таким образом, что «продольные» волны в стержнях и пластинках обладают таким же характером, как и волны в неограниченной среде, отличаясь лишь другой величиной своей скорости, попережнему не зависящей от частоты. Совсем иные соотношения получаются для так называемых волн изгиба в пластинках и стержнях, при которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном к оси стержня или плоскости пластинки, т. е. сопровождаются их изгибом.

Уравнения свободных колебаний пластинки можно написать непосредственно на основании уравнения равновесия (12,5). Для этого надо заменить в нём — P произведением ускорения $\ddot{\zeta}$ на массу ρh , приходящуюся на единицу площади поверхности пластинки. Таким образом, получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta = 0 \quad (25,6)$$

(Δ — двухмерный оператор Лапласа).

Рассмотрим монохроматическую упругую волну, соответственно чему будем искать решение уравнения (25,6) в виде

$$\zeta = \text{const. } e^{i(kr - \omega t)} \quad (25,7)$$

(волновой вектор \mathbf{k} имеет, конечно, всего две компоненты k_x и k_y). Подстановка в (25,6) приводит к уравнению

$$-\rho \omega^2 + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} k^4 = 0.$$

Отсюда получаем следующее соотношение между частотой и волновым вектором волны:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (25,8)$$

Таким образом, частота оказывается пропорциональной квадрату абсолютной величины волнового вектора, в то время как в волнах в неограниченной среде она пропорциональна первой её степени.

Зная соотношение между частотой и волновым вектором, можно определить скорость распространения волны согласно формуле

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Производные от k^2 по компонентам k_x , k_y равны соответственно $2k_x$, $2k_y$. Таким образом, скорость распространения волны равна

$$U = \sqrt{\frac{k^2 E}{3\rho(1-\sigma^2)}} k. \quad (25,9)$$

Она пропорциональна волновому вектору, а не постоянна, как для волн в неограниченной трёхмерной среде¹⁾.

Аналогичные результаты получаются и для волн изгиба в тонких стержнях. Самые колебания изгиба стержня мы будем предполагать малыми. Уравнения движения получим, заменив в уравнениях равновесия слабо изогнутого стержня (20,4) — K_x , — K_y произведениями ускорений \ddot{X} , \ddot{Y} на массу ρS единицы длины стержня (S — площадь его сечения). Таким образом,

$$\rho S \ddot{X} = EI_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \quad \rho S \ddot{Y} = EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \quad (25,10)$$

Решение этих уравнений ищем опять в виде

$$X = \text{const. } e^{i(kz - \omega t)}, \quad Y = \text{const. } e^{i(kz - \omega t)}.$$

Подстановка в (25,10) приводит к следующему соотношению между частотой и волновым вектором:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k^2 \quad (25,11)$$

для колебаний соответственно вдоль осей x и y . Соответствующие скорости распространения равны

$$U^{(x)} = 2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k, \quad U^{(y)} = 2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k. \quad (25,12)$$

Наконец, особым случаем колебаний стержней являются так называемые крутильные колебания (колебания кручения). Уравнения движения стержня, совершающего крутильные колебания, получаются приравнованием $C \frac{\partial \tau}{\partial z}$ (см. § 18) производной по времени от момента количества движения стержня, отнесённого к единице его длины. Этот момент равен $\rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ — угловая скорость вращения (φ — угол поворота данного сечения стержня), а $I = \int (x^2 + y^2) df$ — момент инерции сечения относительно его центра инерции (при чисто крутильных колебаниях каждое сечение стержня совершает вращательные

1) Волновой вектор $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны. Поэтому скорость распространения должна была бы неограниченно возрастать при стремлении λ к нулю. Физическая нелепость этого результата связана с тем, что формула (25,9) в действительности неприменима к коротким волнам.

колебания вокруг оси инерции стержня, остающейся неподвижной). Написав $\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, получаем уравнение движения в виде

$$C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25,13)$$

Отсюда видим, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня равна

$$\sqrt{\frac{C}{\rho I}}. \quad (25,14)$$

З а д а ч и

1. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня (длины l), один из концов которого закреплён, а другой — свободен.

Р е ш е н и е. На закреплённом конце ($z = 0$) должно быть $u_z = 0$, а на свободном ($z = l$) $\sigma_{zz} = E u_{zz} = 0$, т. е. $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$. Ищем решение уравнения (25,1)

в виде $u_z = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz$, где $k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$. Из условия при $z = l$ имеем $\cos kl = 0$, откуда для собственных частот получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$$

(n — целые числа).

2. То же для стержня, оба конца которого свободны или оба закреплены.

Р е ш е н и е. В обоих случаях $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{l} n$.

3. Определить частоты собственных колебаний струны (длины l).

Р е ш е н и е. Уравнение движения струны есть

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

(ср. уравнение равновесия (20,17)). Граничные условия: $X = 0$ при $z = 0, l$. Собственные частоты

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S}{T}} \frac{n\pi}{l}.$$

4. Определить собственные поперечные колебания стержня (длины l) с заделанными концами.

Р е ш е н и е. Уравнение (25,10) при подстановке в него

$$X = X_0(z) \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \kappa^4 X_0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$X_0 = A \cos \kappa z + B \sin \kappa z + C \operatorname{ch} \kappa z + D \operatorname{sh} \kappa z.$$

Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий $X = 0, \frac{dX}{dz} = 0$ при $z = 0, l$. В результате находим:

$$X_0 = A \{(\sin \kappa l - \text{sh } \kappa l)(\cos \kappa z - \text{ch } \kappa z) - (\cos \kappa l - \text{ch } \kappa l)(\sin \kappa z - \text{sh } \kappa z)\}$$

и уравнение

$$\cos \kappa l \text{ch } \kappa l = 1,$$

корни которого определяют собственные частоты колебаний. Наименьшая из собственных частот равна

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

5. То же для стержня с опёртыми концами.

Решение аналогично решению задачи 4. Результат:

$$X_0 = A \sin \kappa z,$$

а частоты определяются из $\sin \kappa l = 0$, т. е.

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

6. То же для стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом. Решение. Получаем для смещения

$$X_0 = A \{(\cos \kappa l + \text{ch } \kappa l)(\cos \kappa z - \text{ch } \kappa z) + (\sin \kappa l - \text{sh } \kappa l)(\sin \kappa z - \text{sh } \kappa z)\}$$

(закреплённый конец $z = 0$, свободный $z = l$), и уравнение

$$\cos \kappa l \text{ch } \kappa l + 1 = 0$$

для собственных частот. Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

7. Определить собственные колебания прямоугольной пластинки (длины сторон a и b) с опёртыми краями.

Решение. Уравнение (25,6) при подстановке в него

$$\zeta = \zeta_0(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\Delta \Delta \zeta_0 - \kappa^4 \zeta_0 = 0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{12\rho(1 - \sigma^2)}{h^2 E}.$$

Выбираем оси координат по сторонам пластинки. Граничные условия (12,11) приобретают вид

$$\text{при } x = 0, a: \quad \zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b: \quad \zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta_0 = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(m, n — целые числа), причём частоты определяются равенством

$$\omega = h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}} \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right].$$

8. Определить собственные частоты колебаний мембраны прямоугольной формы (с длинами сторон a и b).

Решение. Уравнение колебаний мембраны

$$T \Delta \zeta = \rho h \zeta''$$

(ср. уравнение равновесия (14,9)). Края мембраны должны быть закреплены, так что $\zeta = 0$. Соответствующее решение для прямоугольной мембраны есть

$$\zeta = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

где собственные частоты

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

(m, n — целые числа).

9. Определить скорость распространения крутильных колебаний по стержням с сечением в виде круга, эллипса и равностороннего треугольника, и по стержню, имеющему вид длинной прямоугольной тонкой пластинки.

Решение. Для кругового сечения (радиуса R) момент инерции $I = \frac{\pi R^4}{2}$;

взяв C из задачи 1 § 16, получим для скорости значение $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, совпадающее со скоростью c_t .

Аналогично (используя результаты задач 2—4 § 16), получаем для стержня эллиптического сечения скорость

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}};$$

для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника

$$\sqrt{\frac{3\mu}{5\rho}};$$

для стержня в виде длинной прямоугольной пластинки

$$2 \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Все эти скорости меньше c_t .

10. Поверхность бесконечно глубокой несжимаемой жидкости покрыта тонкой упругой пластинкой. Определить связь между волновым вектором и частотой для волн, одновременно распространяющихся по пластинке и в поверхностном слое жидкости.

Решение. Выбираем плоскость пластинки в качестве плоскости $z = 0$, а ось x выбираем вдоль направления распространения волны; области жидкости пусть соответствуют $z < 0$. Уравнение движения свободной пластинки есть

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

(ρ_0 — плотность материала пластинки). При наличии жидкости к правой стороне этого уравнения надо прибавить силу, действующую со стороны жидкости на 1 см^2 поверхности пластинки, т. е. давление p жидкости. Но давление в волне выражается через потенциал скорости посредством $p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (полем тяжести пренебрегаем). Поэтому получаем уравнение

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Далее, нормальная компонента скорости жидкости на её поверхности должна быть равна скорости точек пластинки, откуда получаем условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Потенциал φ должен удовлетворять во всём объёме жидкости уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Ищем ζ в виде бегущей волны $\zeta = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$; соответственно этому берём решение уравнения (3) в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны $\varphi = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{kz}$. Подстановка этих выражений в (1) и (2) приводит к двум уравнениям для φ_0 и ζ_0 , из условия совместности которых получаем

$$\omega^2 = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{k^5}{\rho + h\rho_0 k}.$$

§ 26. Ангармонические колебания

Вся изложенная теория упругих колебаний является приближённой в том же смысле, в котором приближённа вообще вся теория упругости, основанная на законе Гука. Напомним, что в её основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причём оставляются члены до второго порядка включительно. Соответственно этому компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформации, и уравнения движения линейны.

Наиболее характерной особенностью упругих волн в этом приближении является то, что всякую волну можно представить в виде простого наложения, т. е. в виде линейной комбинации отдельных монохроматических волн. Каждая из этих монохроматических волн распространяется независимо от остальных и может существовать также и сама по себе, не сопровождаясь какими-либо посторонними движениями. Можно сказать, что различные монохроматические волны, одновременно распространяющиеся в одной и той же среде, «не взаимодействуют» друг с другом.

Все эти свойства, однако, исчезают при переходе к следующим приближениям. Эффекты следующих приближений, хотя и являются малыми, но для некоторых явлений могут играть основную роль. Эти эффекты обычно называют ангармоническими в связи с тем,

что соответствующие уравнения движения нелинейны и не допускают простых периодических (гармонических) решений.

Мы рассмотрим здесь ангармонические эффекты третьего порядка, происходящие от кубических по деформации членов в упругой энергии. Выписывать в общем виде соответствующие уравнения движения было бы слишком громоздким. Выяснить же характер возникающих эффектов можно с помощью следующих рассуждений. Кубические члены в упругой энергии дают квадратичные члены в тензоре напряжений, а потому и в уравнениях движения. Представим себе, что в этих уравнениях все линейные члены перенесены в левые, а все квадратичные — в правые стороны равенств. Решая эти уравнения методом последовательных приближений, мы должны в первом приближении вовсе отбросить квадратичные члены. Тогда останутся обычные линейные уравнения, решение \mathbf{u}_0 которых может быть представлено в виде наложения монохроматических бегущих волн вида $\text{const. } e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ с определёнными соотношениями между ω и \mathbf{k} . Переходя к следующему, второму, приближению, надо положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, причём в правой стороне уравнений (в квадратичных членах) надо сохранить только члены с \mathbf{u}_0 . Поскольку \mathbf{u}_0 удовлетворяет, по определению, однородным линейным уравнениям без правых частей, то в левой стороне равенств члены с \mathbf{u}_0 взаимно сокращаются. В результате мы получим для компонент вектора \mathbf{u}_1 систему неоднородных линейных уравнений, в правой части которых стоят заданные функции координат и времени. Эти функции, получающиеся подстановкой \mathbf{u}_0 в правые стороны исходных уравнений, представляют собой сумму членов, каждый из которых пропорционален множителю вида $e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]}$, или $e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]}$ где ω_1 , ω_2 и \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 — частоты и волновые векторы каких-либо двух монохроматических волн первого приближения.

Как известно, частный интеграл линейных уравнений такого вида представляет собой сумму членов с такими же экспоненциальными множителями, какие стоят в свободных членах (правых сторонах) уравнений, и с надлежащим образом подобранными коэффициентами. Каждый из этих членов соответствует бегущей волне с частотой $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновым вектором $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ (частоты, равные сумме или разности частот исходных волн, называются комбинационными).

Таким образом, эффекты ангармоничности третьего порядка приводят к тому, что на совокупность основных монохроматических волн (с частотами ω_1 , ω_2 , ... и волновыми векторами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , ...) налагаются некоторые «волны» слабой интенсивности с комбинационными частотами вида $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Мы говорим здесь о них как о «волнах» в кавычках, имея в виду, что они представляют собой некоторый поправочный эффект и не могут существовать сами по себе (за исключением некоторых особых случаев; см. ниже). Между $\omega_1 \pm \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ не удовлетворяются, вообще говоря, те соотношения, которые имеют место для частот и волновых векторов в обычных монохроматических волнах.

Ясно, однако, что возможны и такие специальные подборы значений ω_1 , \mathbf{k}_1 и ω_2 , \mathbf{k}_2 , при которых между $\omega_1 + \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (будем говорить для определённости о суммах, а не о разностях) будет выполняться одно из тех соотношений, которые должны иметь место для монохроматических волн в данной среде. Вводя обозначения $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, мы можем сказать, с математической точки зрения, что ω_3 , \mathbf{k}_3 соответствуют в этих случаях волнам, удовлетворяющим однородным линейным уравнениям движения (без правой части) первого приближения. Если в правой стороне уравнений движения второго приближения имеются члены, пропорциональные $e^{i(k_3 r - \omega_3 t)}$ с такими ω_3 , \mathbf{k}_3 , то, как известно, частный интеграл этих уравнений будет представлять собой волну этой частоты с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем.

Таким образом, наложение двух монохроматических волн ω_1 , \mathbf{k}_1 и ω_2 , \mathbf{k}_2 , для которых суммы ω_3 , \mathbf{k}_3 удовлетворяют указанному условию, приводит в результате эффекта ангармоничности к явлению резонанса — возникает новая настоящая монохроматическая волна ω_3 , \mathbf{k}_3 , амплитуда которой возрастает со временем и в конце концов перестаёт быть малой. Очевидно, что если при наложении волн ω_1 , \mathbf{k}_1 и ω_2 , \mathbf{k}_2 возникает волна ω_3 , \mathbf{k}_3 , то при наложении волн ω_1 , \mathbf{k}_1 и ω_3 , \mathbf{k}_3 тоже будет иметь место резонанс и возникает волна $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$, а при наложении волн ω_2 , \mathbf{k}_2 и ω_3 , \mathbf{k}_3 возникает волна ω_1 , \mathbf{k}_1 .

В частности, в изотропном теле ω связано с \mathbf{k} посредством $\omega = c_l k$ или $\omega = c_t k$, причём $c_l > c_t$. Легко видеть, в каких случаях возможно выполнение какого-либо из этих соотношений для каждой из трёх волн: ω_1 , \mathbf{k}_1 ; ω_2 , \mathbf{k}_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Если \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 не совпадают по направлению, то $k_3 < k_1 + k_2$; ясно поэтому, что при таких \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 резонанс возможен лишь в следующих двух случаях: 1) волны ω_1 , \mathbf{k}_1 и ω_2 , \mathbf{k}_2 поперечны, а волна ω_3 , \mathbf{k}_3 — продольна; 2) одна из волн ω_1 , \mathbf{k}_1 или ω_2 , \mathbf{k}_2 продольна, другая поперечна, а волна ω_3 , \mathbf{k}_3 продольна. Если же векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 имеют одинаковое направление, то резонанс возможен в случаях, когда все три волны продольны или все три поперечны.

Эффект ангармоничности с явлением резонанса возникает не только при наложении нескольких монохроматических волн, но и при наличии всего одной только волны ω_1 , \mathbf{k}_1 . В этом случае в правой стороне уравнений движения имеются члены, пропорциональные $e^{2i(k_1 r - \omega_1 t)}$. Но если для ω_1 , \mathbf{k}_1 удовлетворяется обычное соотношение, то (в силу однородности первого порядка этого соотношения) оно удовлетворяется и для $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$. Таким образом, эффект ангармоничности приводит к появлению наряду с каждой из имеющихся монохроматических волн ω_1 , \mathbf{k}_1 также и волны $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$ с удвоенными частотой и волновым вектором, причём амплитуда этой волны растёт со временем.

Наконец, остановимся коротко на том, каким образом могут быть составлены уравнения движения с учётом ангармонических членов.

Тензор деформации должен определяться теперь полным выражением (1,3):

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (26,1)$$

в котором нельзя пренебречь квадратичными по u_i членами. Далее, общее выражение для плотности энергии \mathcal{E} ¹⁾ для тел с данной симметрией должно быть написано как скаляр, составленный из компонент тензора u_{ik} и некоторых характерных для вещества тела постоянных тензоров, содержащий члены до желаемой степени по u_{ik} . Подставляя затем выражение (26,1) для u_{ik} и отбрасывая члены слишком высоких порядков по u_i , получим энергию \mathcal{E} как функцию производных $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ с желаемой степенью точности.

Для того чтобы получить уравнения движения, заметим следующее. Вариация $\delta\mathcal{E}$ может быть написана в виде

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

или, вводя обозначение:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}, \quad (26,2)$$

переписываем $\delta\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\delta\mathcal{E} = \sigma_{ik} \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) - \delta u_i \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Коэффициенты при $-\delta u_i$ представляют собой компоненты силы, отнесенной к единице объема тела. Они имеют формально прежний вид, и потому уравнения движения могут быть написаны попрежнему в виде

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (26,3)$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела, а компоненты тензора σ_{ik} определяются теперь согласно (26,2) с \mathcal{E} , написанным с желаемой степенью точности. Тензор σ_{ik} теперь не симметричен ²⁾.

¹⁾ Мы говорим здесь о внутренней энергии \mathcal{E} , а не о свободной энергии F , поскольку речь идет об адиабатических колебаниях.

²⁾ Подчеркнем, что σ_{ik} не имеет теперь смысла плотности потока импульса (тензора напряжений). В обычной теории такое истолкование получалось

в результате интегрирования плотности объемной силы $\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$ по объему тела. При этом существенно, что при интегрировании мы не делали различия между координатами точек тела до и после доформирования, пренебрегая разницей между ними. Однако при переходе к следующим приближениям такое пренебрежение становится невозможным, и поверхность, ограничиваю-

ЗАДАЧА

Написать общее выражение для упругой энергии изотропного тела в третьем приближении.

Решение. Из компонент симметрического тензора второго ранга можно составить два квадратичных скаляра (u_{ik}^2 и u_{il}^2) и три кубических (u_{il}^3 , $u_{il}u_{ik}^2$, $u_{ik}u_{il}u_{kl}$). Поэтому наиболее общий вид скалярного выражения, содержащего члены второй и третьей степеней по u_{ik} со скалярными же (изотропное тело) коэффициентами, есть

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right) u_{il}^2 + \frac{A}{3} u_{ik}u_{il}u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{il} + \frac{C}{3} u_{il}^3$$

(коэффициенты при u_{ik}^2 и u_{il}^2 выражены через модули сжатия и сдвига; A , B , C — три новые постоянные). Подставляя сюда выражение (26,1) для u_{ik} и оставляя члены до третьего порядка включительно, получим упругую энергию в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\mu}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 + \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \\ & + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \\ & + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^3. \end{aligned}$$

Эта область интегрирования, не совпадает с реальной поверхностью рассматриваемого участка тела после его деформирования.

В § 2 было показано, что симметричность тензора σ_{ik} связана с сохранением момента количества движения. Теперь этот результат не имеет места в связи с тем, что «плотность момента количества движения» должна писаться не в виде $x_i \dot{u}_k - x_k \dot{u}_i$, а как

$$(x_i + u_i) \dot{u}_k - (x_k + u_k) \dot{u}_i.$$

ГЛАВА IV

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

§ 27. Уравнение теплопроводности в твёрдых телах

Неравномерная нагретость твёрдой среды не приводит к возникновению в ней конвекции, как это обычно имеет место в жидкостях. Поэтому перенос тепла осуществляется здесь одной только теплопроводностью. В связи с этим процессы теплопроводности в твёрдых телах описываются сравнительно более простыми уравнениями, чем в жидкостях, где они осложняются конвекцией.

Уравнение теплопроводности в твёрдой среде может быть выведено непосредственно из закона сохранения энергии, выраженного в виде «уравнения непрерывности» для количества тепла. Количество тепла, поглощаемое в единицу времени в единице объёма тела, равно $T \frac{\partial S}{\partial t}$, где S — энтропия единицы объёма. Эта величина должна быть приравнена — $\operatorname{div} \mathbf{q}$, где \mathbf{q} есть плотность потока тепла. Этот поток может быть практически всегда написан в виде $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, т. е. пропорциональным градиенту температуры (κ — коэффициент теплопроводности). Таким образом,

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T). \quad (27,1)$$

Согласно формуле (6,4) энтропия может быть написана в виде

$$S = S_0(T) + K\alpha u_{ii},$$

где α есть коэффициент теплового расширения, а S_0 — энтропия тела в недеформированном состоянии. Мы будем предполагать, что, как это обычно имеет место, имеющиеся в теле разности температур достаточно малы для того, чтобы можно было считать постоянными такие величины, как κ , α и т. п. Тогда уравнение (27,1) после подстановки написанного для S выражения примет вид

$$T \frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

Согласно известной термодинамической формуле имеем $C_p - C_v = K\alpha^2 T$, откуда $\alpha K T = \frac{C_p - C_v}{\alpha}$. Производную от S_0 можно написать как

$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$, где производная $\frac{\partial S_0}{\partial T}$ берётся при $u_{ii} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, т. е. при постоянном объёме, и потому равна $\frac{C_p}{T}$.

В результате получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \kappa \Delta T. \quad (27,2)$$

Для того чтобы получить полную систему уравнений, надо присоединить сюда ещё уравнение, определяющее деформацию неравномерно нагретого тела. Этим уравнением является уравнение равновесия (7,8):

$$2(1 - \sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1 - 2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{2\alpha(1 + \sigma)}{3} \nabla T. \quad (27,3)$$

Из уравнения (27,3) может быть определена принципиально деформация тела при произвольно заданном распределении температуры. Подстановка полученного таким образом для $\operatorname{div} \mathbf{u}$ выражения в уравнение (27,2) приведёт к уравнению, определяющему распределение температуры, в котором неизвестной функцией является одна только $T(x, y, z, t)$.

Рассмотрим, например, теплопроводность в неограниченной твёрдой среде с распределением температуры, удовлетворяющим только одному условию: на бесконечности температура стремится к постоянному пределу T_0 и деформация отсутствует. В таком случае уравнение (27,3) приводит к следующей зависимости между $\operatorname{div} \mathbf{u}$ и T (см. задачу 8 § 7):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} \alpha (T - T_0).$$

Подставляя это выражение в (27,2), получим уравнение

$$\frac{(1 + \sigma) C_p + 2(1 - 2\sigma) C_v}{3(1 - \sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad (27,4)$$

типа простого уравнения теплопроводности.

Уравнением такого же типа описывается и распределение температуры вдоль длины тонкого прямого стержня, если хотя бы один из его концов не закреплён. Распределение температуры вдоль каждого из поперечных сечений стержня можно считать постоянным, так что T будет функцией только от координаты x вдоль его длины (и от времени). Тепловое расширение такого стержня приводит только к изменению его длины без изменения прямолинейной формы и без возникновения внутренних напряжений в нём. Ясно поэтому, что производная $\frac{\partial S}{\partial t}$ в общем уравнении (27,1) должна браться при постоянном давлении, и поскольку $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$, то распределение температуры будет

описываться одномерным уравнением теплопроводности:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Надо, впрочем, отметить, что с практически достаточной точностью распределение температуры в твёрдом теле может всегда определяться простым уравнением теплопроводности. Дело в том, что второй член в левой стороне уравнения (27,2) представляет собой поправку порядка $\frac{C_p - C_v}{C_v}$ по сравнению с первым членом. Но у твёрдых тел разница между различными теплоёмкостями обычно весьма мала, и если пренебрегать ею, то уравнение теплопроводности в твёрдых телах можно всегда писать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (27,5)$$

где χ есть коэффициент температуропроводности, определяемый как отношение $\chi = \frac{\kappa}{C}$ коэффициента κ к некоторой средней теплоёмкости C единицы объёма.

§ 28. Теплопроводность кристаллов

В анизотропном теле направление потока тепла \mathbf{q} не должно, вообще говоря, совпадать с направлением градиента температуры. Поэтому вместо формулы $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ между \mathbf{q} и градиентом температуры в кристалле имеет место более общая зависимость

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (28,1)$$

Тензор второго ранга κ_{ik} называется тензором теплопроводности кристалла. Соответственно этой зависимости уравнение теплопроводности (27,5) тоже будет иметь более общий вид:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (28,2)$$

О тензоре теплопроводности можно высказать общую теорему, согласно которой κ_{ik} есть симметрический тензор, т. е.

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}. \quad (28,3)$$

Это соотношение, к доказательству которого мы теперь перейдём, является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов¹⁾.

1) См. «Статистическая физика», 3-е издание, § 118, Гостехиздат, 1951.

Скорость увеличения полной энтропии тела благодаря необратимым процессам теплопроводности равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = - \int \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} dV = - \int \text{div } \frac{\mathbf{q}}{T} dV + \int \mathbf{q} \text{grad } \frac{1}{T} dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по поверхности, исчезает. Таким образом, получаем:

$$\dot{S}_{\text{пол}} = \int \mathbf{q} \nabla \frac{1}{T} dV = - \int \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T^2} dV,$$

или

$$\dot{S}_{\text{пол}} = - \int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \quad (28,4)$$

В соответствии с общим определением кинетических коэффициентов ¹⁾ мы можем заключить на основании (28,4), что в данном случае таковыми являются коэффициенты $T^2 \chi_{ik}$ в соотношениях

$$q_i = - T^2 \chi_{ik} \left(\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right).$$

Поэтому из симметрии кинетических коэффициентов непосредственно следует искомое соотношение (28,3).

Квадратичная форма

$$- q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \chi_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

должна быть существенно положительной, поскольку положительной должна быть производная (28,4) от энтропии по времени. Условием существенной положительности квадратичной формы является, как известно, положительность главных значений матрицы её коэффициентов. Поэтому все главные значения тензора теплопроводности χ_{ik} всегда положительны, что, впрочем, очевидно и из простых соображений о направлении теплового потока.

Число различных независимых компонент тензора χ_{ik} зависит от симметрии кристалла. Поскольку тензор χ_{ik} симметричен, то, очевидно, это число такое же, как у симметричного тензора второго ранга α_{ik} (тензора теплового расширения; см. § 10).

§ 29. Вязкость твёрдых тел

При изучении движения в упругих телах мы до сих пор считали, что процесс деформирования происходит обратимым образом. В действительности процесс термодинамически обратим только, если он происходит с бесконечно малой скоростью, так что в каждый данный

¹⁾ Мы используем здесь определение в форме, данной в § 58 первой части этого тома.

момент в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия. Реальное движение происходит, однако, с конечной скоростью, тело не находится в каждый данный момент в равновесии, и поэтому в нём происходят процессы, стремящиеся привести его в равновесное состояние. Наличие этих процессов и приводит к необратимости движения, проявляющейся, в частности, в диссипации механической энергии¹⁾, переходящей в конце концов в тепло.

Диссипация энергии обуславливается процессами двух родов. Во-первых, при неодинаковости температуры в разных местах тела в нём возникают необратимые процессы теплопроводности. Во-вторых, если в теле происходит какое-нибудь внутреннее движение, то происходят необратимые процессы, связанные с конечностью скорости движения; эти процессы диссипации энергии можно назвать, как и в жидкостях, процессами внутреннего трения или вязкости.

В большинстве случаев скорость макроскопического движения в теле настолько мала, что диссипация энергии незначительна. Такие «почти обратимые» процессы могут быть описаны с помощью так называемой диссипативной функции²⁾.

Именно, если имеется некоторая механическая система, движение которой сопровождается диссипацией энергии, то движение может быть описано посредством обычных уравнений движения, в которых надо только к действующим на систему силам добавить так называемые «диссипативные силы» или «силы трения», являющиеся линейными функциями скоростей. Эти силы могут быть представлены в виде производных по скоростям от некоторой квадратичной функции скоростей, называемой диссипативной функцией Ψ . «Сила трения» f_a , соответствующая какой-нибудь из обобщённых координат q_a системы, имеет тогда вид

$$f_a = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_a}.$$

Диссипативная функция Ψ является существенно положительной квадратичной формой скоростей \dot{q}_a . Написанное соотношение эквивалентно соотношению

$$\delta \Psi = - \sum_a f_a \delta \dot{q}_a, \quad (29,1)$$

где $\delta \Psi$ — изменение диссипативной функции при бесконечно малом изменении скоростей. Можно также показать, что удвоенная диссипативная функция 2Ψ определяет уменьшение механической энергии системы в единицу времени.

1) Под механической энергией здесь подразумевается сумма кинетической энергии макроскопического движения в упругом теле и его потенциальной (упругой) энергии, обусловленной наличием деформации.

2) См. «Статистическая физика», 3-е издание, Гостехиздат, 1951, § 119.

Легко обобщить соотношение (29,1) на случай движения с трением в сплошном теле. В этом случае состояние системы определяется непрерывным рядом обобщённых координат. Этими координатами является вектор смещения \mathbf{u} , заданный в каждой точке тела. Соответственное этому соотношение (29,1) должно быть написано в интегральном виде:

$$\delta \int \Psi dV = - \int f_i \delta \dot{u}_i dV, \quad (29,2)$$

где f_i — компонента вектора \mathbf{f} диссипативной силы, действующей на единицу объёма тела; мы пишем полную диссипативную функцию всего тела в виде $\int \Psi dV$, где Ψ есть диссипативная функция, отнесённая к единице объёма тела.

Определим теперь общий вид диссипативной функции Ψ для деформируемых тел. Функция Ψ , описывающая внутреннее трение, должна обращаться в нуль, если в теле отсутствует внутреннее движение, в частности, если тело совершает только поступательное или вращательное движение как целое. Другими словами, диссипативная функция должна обращаться в нуль при $\dot{\mathbf{u}} = \text{const.}$ и при $\dot{\mathbf{u}} = [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]$. Это значит, что она должна зависеть не от самой скорости, а от её градиента, причём может содержать лишь такие комбинации производных, которые обращаются в нуль при $\dot{\mathbf{u}} = [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]$. Таковыми являются суммы

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i},$$

т. е. производные \dot{u}_{ik} тензора деформации по времени¹⁾. Таким образом, диссипативная функция должна быть квадратичной функцией от \dot{u}_{ik} . Наиболее общий вид такой функции есть

$$\Psi = \frac{1}{2} \eta_{iklm} \dot{u}_{ik} \dot{u}_{lm}. \quad (29,3)$$

Тензор четвёртого ранга η_{iklm} может быть назван тензором вязкости. Этот тензор обладает следующими очевидными свойствами симметрии:

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \quad (29,4)$$

Выражение (29,3) в точности аналогично выражению (10,1) для свободной энергии кристалла: вместо тензора упругости в нём стоит теперь тензор η_{iklm} , а вместо u_{ik} — тензор \dot{u}_{ik} . Поэтому все результаты, полученные в § 10 для тензора λ_{iklm} в кристаллах различной симметрии, в полной мере относятся и к тензору η_{iklm} .

1) Ср. совершенно аналогичные рассуждения по поводу вязкой жидкости: «Гидродинамика», § 15.

В частности, в изотропном теле тензор η_{iklm} имеет всего две независимые компоненты и Ψ может быть написано в виде, аналогичном выражению (4,3) для упругой энергии изотропного тела:

$$\Psi = \eta \left(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{u}_{ll}^2, \quad (29,5)$$

где η и ζ — два коэффициента вязкости. Поскольку Ψ есть существенно положительная функция, то коэффициенты η , ζ должны быть положительными.

Соотношение (29,2) в точности аналогично соотношению, имеющему место для свободной упругой энергии:

$$\delta \int F dV = - \int F_i \delta u_i dV,$$

где $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ — сила, действующая на единицу объёма тела. Поэтому выражение для «диссипативной силы» f_i через тензор \dot{u}_{ik} может быть написано непосредственно по аналогии с тем, как F_i выражается через u_{ik} . Имеем:

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (29,6)$$

где «диссипативный» тензор напряжений σ'_{ik} определяется посредством

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{u}_{ik}} = \eta_{iklm} \dot{u}_{lm}. \quad (29,7)$$

Учёт вязкости в уравнениях движения может быть осуществлён, следовательно, просто путём замены тензора напряжений σ_{ik} в этих уравнениях суммой $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$.

В изотропном теле

$$\sigma'_{ik} = 2\eta \left(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right) + \zeta \dot{u}_{ll} \delta_{ik}. \quad (29,8)$$

Это выражение, естественно, формально совпадает с выражением для вязкого тензора напряжений в жидкости.

§ 30. Поглощение звука в твёрдых телах

Поглощение звука в твёрдых телах может быть вычислено совершенно аналогично тому, как вычисляется коэффициент поглощения в жидкостях¹⁾. Произведём здесь соответствующие вычисления для изотропного тела. Обусловленная теплопроводностью часть диссипации энергии ($\dot{E}_{\text{мех}}$) определяется интегралом

$$- \frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV.$$

1) См. «Гидродинамика», § 77.

Благодаря вязкости же в единице объёма тела диссипируется в единицу времени энергия 2Ψ , так что полная обусловленная вязкостью часть $\dot{E}_{\text{мех}}$ равна интегралу $-2 \int \Psi dV$. Воспользовавшись выражением (29,5), имеем, таким образом, формулу

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ii} \right)^2 dV - \zeta \int \dot{u}_{ii}^2 dV. \quad (30,1)$$

Для вычисления градиента температуры пользуемся тем, что звуковые колебания в первом приближении адиабатичны. С помощью выражения (6,4) для энтропии пишем условие адиабатичности в виде

$$S_0(T) + \kappa u_{ii} = S_0(T_0),$$

где T_0 — температура в недеформированном состоянии. Разлагая разность $S_0(T) - S_0(T_0)$ в ряд по степеням $T - T_0$, имеем с точностью до членов первого порядка

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0} (T - T_0)$$

(производная от энтропии берётся при $u_{ii} = 0$, т. е. при постоянном объёме). Таким образом, имеем:

$$T - T_0 = -\frac{T_0 \kappa}{C_v} u_{ii}.$$

Воспользовавшись также соотношениями

$$K \equiv K_{\text{из}} = \frac{C_v}{C_p} K_{\text{ад}} \quad \text{и} \quad \frac{K_{\text{ад}}}{\rho} = c_i^2 - \frac{4}{3} c_t^2,$$

переписываем это выражение в виде

$$T - T_0 = -\frac{T_0 \rho \left(c_i^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right)}{C_p} u_{ii}. \quad (30,2)$$

Рассмотрим сначала поглощение поперечных упругих волн. Теплопроводность вообще не может привести к поглощению таких волн (в рассматриваемом приближении). Действительно, в поперечной волне $u_{ii} = 0$, и потому температура в ней согласно (30,2) постоянна. Пусть направление распространения волны выбрано в качестве оси x ; тогда $u_x = 0$, $u_y = u_{0y} \cos(kx - \omega t)$, $u_z = u_{0z} \cos(kx - \omega t)$ и из компонент тензора деформации отличны от нуля только

$$u_{xy} = -\frac{u_{0y} k}{2} \sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = -\frac{u_{0z} k}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Будем относить диссипацию энергии к единице объёма тела; для среднего (по времени) значения этой величины получаем из (30,1):

$$\bar{E}_{\text{мех}} = -\frac{\eta \omega^4}{2c_t^2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

где мы подставили $k = \omega/c_t$. Полная же средняя энергия волны равна удвоенной средней кинетической энергии, т. е. $\bar{E} = \rho \int \bar{u}^2 dV$; относя эту величину тоже к единице объёма, получим:

$$\bar{E} = \frac{\rho \omega^2}{2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

Коэффициент поглощения звука определяется как отношение средней диссипации энергии к удвоенному среднему потоку энергии в волне; эта величина определяет закон изменения амплитуды волны с расстоянием, убывающей пропорционально $e^{-\gamma x}$. Таким образом, находим для коэффициента поглощения поперечных волн следующее выражение:

$$\gamma_t = \frac{|\bar{E}_{\text{мех}}|}{2c_t \bar{E}} = \frac{\tau_t \omega^2}{2\rho c_t^3}. \quad (30,3)$$

В продольной звуковой волне $u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$, $u_y = u_z = 0$. Аналогичное вычисление с помощью формул (30,1) и (30,2) приводит к результату:

$$\gamma_l = \frac{\omega^2}{2\rho c_l^3} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\alpha T \alpha^2 \rho^2 c_l^2}{c_p} \left(1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2} \right)^2 \right]. \quad (30,4)$$

Эти формулы относятся, строго говоря, лишь к полностью изотропным аморфным телам. По порядку величины они, однако, определяют закон поглощения звука также и в анизотропных монокристаллах.

Своеобразные особенности представляет поглощение звука в поликристаллических телах. Если длина волны звука λ мала по сравнению с размерами a отдельных кристаллитов, то в каждом кристаллите звук поглощается так же, как он поглощался бы в большом кристалле, и коэффициент поглощения пропорционален ω^2 .

Если же $\lambda \gg a$, то характер поглощения меняется. В такой волне можно считать, что каждый кристаллит подвергается воздействию однородно распределённого давления. Но ввиду анизотропии кристаллитов и граничных условий на поверхностях их соприкосновения возникающая при этом деформация не однородна. Она будет испытывать существенные изменения (изменение порядка величины её самой) на протяжении размеров кристаллита, а не на протяжении длины волны, как это было бы в однородном теле. Для поглощения звука существенны скорости изменения деформации \dot{u}_{ik} и возникающие градиенты температуры. Из них первые будут иметь попрежнему обычный порядок величины. Градиенты же температуры в пределах каждого кристаллита аномально велики. Поэтому поглощение звука, обусловленное теплопроводностью, будет велико по сравнению с поглощением, связанным с вязкостью, и достаточно вычислить только первое.

Рассмотрим два различных предельных случая. Время, в течение которого происходит выравнивание температур на расстояниях $\sim a$ путём теплопроводности (время релаксации для теплопроводности), — порядка величины a^2/χ . Предположим сначала, что $\omega \ll \chi/a^2$. Это значит, что время релаксации мало по сравнению с периодом колебаний в волне, и потому тепловое равновесие в пределах каждого кристаллита в значительной степени успевает установиться; мы имеем здесь дело с почти изотермическими колебаниями.

Пусть T' — возникающие в кристаллите разности температур, а T'_0 — разности, которые возникли бы при адиабатическом процессе. Расход тепла путём теплопроводности (на единицу объёма) есть

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T' \sim \frac{\kappa T'}{a^2}.$$

Количество же тепла, выделяющееся при деформации, — порядка величины $\dot{T}'_0 C \sim \omega T'_0 C$ (C — теплоёмкость). Приравнявая эти два выражения, получим:

$$T' \sim T'_0 \frac{\omega a^2}{\chi}.$$

Температура испытывает изменение $\sim T'$ на протяжении размеров кристаллита, так что её градиент $\sim T'/a$. Наконец, T'_0 находим из (30,2), где надо положить $u_{ii} \sim \kappa u \sim \frac{\omega}{c} u$ (u — амплитуда вектора смещения):

$$T'_0 \sim \frac{T \alpha \rho c \omega}{C} u \quad (30,5)$$

(оценивая порядки величин, мы, естественно, не отличаем различные скорости звука c). С помощью этих результатов вычисляем диссипацию энергии в единице объёма:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 \sim \frac{\kappa}{T} \left(\frac{T'}{a} \right)^2$$

и, разделив её на поток энергии $c \bar{E} \sim c \rho \omega^2 u^2$, получим искомый коэффициент затухания:

$$\gamma \sim \frac{T \alpha^2 \rho c a^2}{\chi C} \omega^2 \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \quad (30,6)$$

(К. Зинер, 1938). Сравнивая это выражение с обычным выражением (30,3) и (30,4), мы можем сказать, что в рассматриваемом случае поглощение звука поликристаллическим телом происходит так, как если бы оно обладало вязкостью

$$\eta \sim \frac{T \alpha^2 \rho^2 c^4 a^2}{\chi C},$$

гораздо большей, чем истинная вязкость составляющих его кристаллитов.

Далее, рассмотрим обратный предельный случай, когда $\omega \gg \chi/a^2$. Другими словами, время релаксации велико по сравнению с периодом колебаний в волне, и за время каждого периода не успевает произойти заметного выравнивания возникающих при деформации разностей температур. Было бы, однако, неправильным считать, что определяющие поглощение звука градиенты температуры порядка величины T'_0/a . Тем самым мы учитывали бы лишь процесс теплопроводности внутри каждого кристалла. Между тем, основную роль в данном случае должен играть, как было указано *М. А. Исаковичем* (1948), теплообмен между соседними кристаллитами. Если бы кристаллиты были теплоизолированы друг от друга, то на границе между ними создавались бы разности температур того же порядка величины T'_0 , что и разности температур в пределах отдельного кристаллита. В действительности же граничные условия требуют непрерывности температуры при переходе через поверхности соприкосновения между кристаллитами. В результате возникают «распространяющиеся» от границ внутрь кристаллита «температурные волны», затухающие на расстоянии ¹⁾

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\chi}{\omega}}.$$

В рассматриваемом случае $\delta \ll a$, т. е. основной градиент температуры — порядка величины T'_0/δ и имеет место на расстояниях, малых по сравнению с общими размерами кристаллита. Соответствующая часть объёма кристаллита $\sim a^2\delta$; относя её к полному объёму $\sim a^3$, найдём среднюю диссипацию энергии:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\kappa}{T} \left(\frac{T'_0}{\delta} \right)^2 \frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\kappa T_0'^2}{T a \delta}.$$

Подставив для T'_0 выражение (30,5) и разделив на $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$, получим искомый коэффициент поглощения

$$\gamma \sim \frac{T a^2 \rho c}{a C} \sqrt{\chi \omega} \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{\chi}{a^2}. \quad (30,7)$$

Он оказывается пропорциональным корню из частоты ²⁾.

Таким образом, коэффициент поглощения звука в поликристаллическом теле при самых малых частотах ($\omega \ll \chi/a^2$) меняется как ω^2 ;

1) Напомним, что если теплопроводящая среда ограничена плоскостью $x = 0$, избыточная температура которой изменяется периодически по закону $T' = T'_0 e^{-i\omega t}$, то распределение температуры в среде описывается «температурной волной»

$$T' = T_0 e^{-i\omega t} e^{-(1+i)x\sqrt{\omega/2\chi}}$$

(см. «Гидродинамика», § 52).

2) Такой же частотной зависимостью характеризуется поглощение звука, распространяющегося в жидкости или газе вблизи твёрдой стенки (например, по трубе); см. «Гидродинамика», § 77.

затем следует (при $\frac{\chi}{a^2} \ll \omega \ll \frac{c}{a}$) область изменения пропорционально $\sqrt{\omega}$, а при $\omega \gg c/a$ коэффициент поглощения снова пропорционален ω^2 .

Аналогичные соображения относятся и к затуханию поперечных волн в тонких стержнях и пластинках (*К. Зинер, 1938*). Если h есть толщина стержня или пластинки, то при $\lambda \gg h$ существенен градиент температуры в поперечном направлении и затухание обусловлено в основном теплопроводностью (см. задачи этого параграфа). Если при этом выполняется неравенство $\omega \ll \chi/h^2$, то колебания можно считать изотермическими; поэтому при определении, например, частот собственных колебаний стержня или пластинки надо в этом случае пользоваться изотермическими значениями модулей упругости.

Задачи

1. Определить коэффициент затухания продольных собственных колебаний стержня.

Решение. Коэффициент затухания колебаний со временем определяется как

$$\beta = \frac{|\bar{E}_{\text{мех}}|}{2E};$$

амплитуда колебаний убывает со временем пропорционально $e^{-\beta t}$.

В продольной волне в каждом малом участке стержня происходит простое растяжение или сжатие; компоненты тензора деформации

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{\text{ад}} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Для u_z пишем $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$, где

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{E_{\text{ад}}/\rho}}.$$

Вычисления, аналогичные произведённым в тексте, приводят к следующему выражению для коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_t^2 - 4c_l^2}{(c_l^2 - c_t^2)c_t^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)(3c_t^2 - 4c_l^2)} + \frac{\chi T \rho^2 \alpha^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Вместо $E_{\text{ад}}$, $\sigma_{\text{ад}}$ мы ввели здесь скорости c_l , c_t согласно формулам (22,4).

2. То же для продольных колебаний пластинки.

Решение. Для волн с направлением колебаний, параллельным направлению волны (оси x), имеем следующие отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{\text{ад}}}{1 - \sigma_{\text{ад}}} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(см. (13,1)). Скорость распространения этих волн равна

$$\sqrt{\frac{E_{\text{ад}}}{\rho(1 - \sigma_{\text{ад}}^2)}}.$$

Вычисление приводит к результату:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^4 + 4c_t^4 - 6c_l^2 c_t^2}{c_l^2 c_t^2 (c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_l^2 (c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\gamma T \alpha^2 \rho^2 (1 + \sigma_{ад})^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Для волн с направлением колебаний, перпендикулярным к направлению волны, $u_{ll} = 0$ и затухание обусловлено одной только вязкостью η . Коэффициент затухания для таких случаев всегда определяется формулой

$$\beta = \frac{\eta \omega^2}{2\rho c_t^2}.$$

К этим случаям относится также и затухание крутильных колебаний в стержнях.

3. Определить коэффициент затухания поперечных собственных колебаний стержня (с частотами, удовлетворяющими условию $\omega \gg \chi/h^2$, h — толщина стержня).

Решение. Основную роль в затухании играет теплопроводность. Согласно § 17 имеем в каждом элементе объема стержня

$$u_{zz} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ад} \frac{x}{R}$$

(изгиб в плоскости x, z); при $\omega \gg \chi/h^2$ колебания адиабатичны. При слабом изгибе радиус кривизны $R = 1/X''$, так что

$$u_{ii} = (1 - 2\sigma_{ад}) x X''$$

($'$ означает дифференцирование по z). Наиболее быстрое изменение температура испытывает в направлении поперёк стержня; поэтому $(\nabla T)^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$. С помощью (30,1) и (30,2) получаем для средней диссипации энергии во всём стержне

$$-\frac{\gamma T \alpha^2 E_{ад}^2 S}{9C_p^2} \int \overline{X''^2} dz$$

(S — площадь сечения стержня). Среднюю полную энергию можно найти как удвоенную потенциальную энергию:

$$E_{ад} I_y \int \overline{X''^2} dz.$$

Окончательно получим для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{\gamma T \alpha^2 S E_{ад}}{18 I_y C_p^2}.$$

4. То же для поперечных колебаний пластинки.

Решение. Согласно (11,4) имеем в каждом элементе объема пластинки

$$u_{ii} = -\frac{1 - 2\sigma_{ад}}{1 - \sigma_{ад}} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(изгиб в плоскости x, z). Диссипацию энергии находим по формулам (30,1) и (30,2), а полную среднюю энергию — удваивая выражение (11,6). Коэффициент затухания равен

$$\beta = \frac{2\kappa T\alpha^2 F_{\text{ад}}}{3C_p^2 h^2} \frac{1 + \sigma_{\text{ад}}}{1 - \sigma_{\text{ад}}} = \frac{2\kappa T\alpha^2 \rho}{3C_p^2 h^2} \frac{(3c_l^2 - 4c_t^2)^2 c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2) c_l^2}.$$

5. Определить изменение собственных частот поперечных колебаний стержня, связанное с неадиабатичностью колебаний. Стержень имеет форму длинной пластинки толщины h . Поверхность стержня предполагается теплоизолированной.

Решение. Пусть $T_{\text{ад}}(x, t)$ есть распределение температуры в стержне при адиабатических колебаниях, а $T(x, t)$ — истинное распределение температуры в нём (x — координата вдоль толщины стержня; изменением температуры вдоль плоскости yz пренебрегаем как более медленным). Поскольку при $T = T_{\text{ад}}$ теплообмен между отдельными участками тела отсутствует, то ясно, что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T - T_{\text{ад}}) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

При периодических колебаниях с частотой ω отклонения $\tau_{\text{ад}} = T_{\text{ад}} - T_0$, $\tau = T - T_0$ температуры от своего равновесного значения T_0 пропорциональны $e^{-i\omega t}$, и мы имеем:

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} \tau_{\text{ад}}$$

($'$ означает дифференцирование по x). Поскольку $\tau_{\text{ад}}$ согласно (30,2) пропорционально u_{ll} , а компоненты u_{ik} пропорциональны x (см. § 17), то $\tau_{\text{ад}} = Ax$, где A — постоянная, которую нет надобности вычислять (она выпадает из окончательного ответа). Решение уравнения $\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} Ax$ с граничным условием $\tau' = 0$ при $x = \pm \frac{h}{2}$ (поверхность стержня теплоизолирована) есть

$$\tau = A \left(x - \frac{\sin kx}{k \cos k \frac{h}{2}} \right), \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Момент M_y сил внутренних напряжений в изогнутом стержне (изгиб в плоскости xz) складывается из изотермической части $M_{y \text{ из}}$ (момент при изотермическом изгибе) и из части, связанной с неравномерной нагретостью стержня. Если $M_{y \text{ ад}}$ есть момент при адиабатическом изгибе, то при не вполне адиабатическом процессе дополнительная часть момента уменьшается по сравнению с величиной $M_{y \text{ ад}} - M_{y \text{ из}}$ в отношении

$$1 + f(\omega) = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z\tau dz}{\int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{\text{ад}} dz}.$$

Определяя при произвольной частоте ω модуль Юнга E_ω как коэффициент пропорциональности между M_y и $\frac{I_y}{R}$ (см. (17,8)) и замечая, что $E_{ад} - E = E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}$ (см. (6,8); E — изотермический модуль Юнга), можем написать:

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)] E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}.$$

Вычисление даёт для $f(\omega)$ выражение

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3 k^3} \left(\frac{kh}{2} - \lg \frac{kh}{2} \right).$$

При $\omega \rightarrow \infty$ получаем, как и должно было быть, $f = 1$, так что $E_\infty = E_{ад}$, а при $\omega \rightarrow 0$ $f = 0$ и $E_0 = E$.

Частоты собственных колебаний пропорциональны корню из модуля Юнга (см. задачи 4–6 § 25). Поэтому имеем:

$$\omega = \omega_0 \left[1 + f(\omega_0) \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right],$$

где ω_0 — значения собственных частот при полной адиабатичности колебаний. Это ω комплексно. Отделяя действительную и мнимую части ($\omega = \omega' + i\beta$), получаем окончательно для собственной частоты

$$\omega' = \omega_0 \left[1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p} \frac{1}{\xi^3} \frac{\text{sh } \xi - \sin \xi}{\text{ch } \xi + \cos \xi} \right]$$

и для коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_p h^2} \left[1 - \frac{1}{\xi} \frac{\text{sh } \xi + \sin \xi}{\text{ch } \xi + \cos \xi} \right],$$

где введено обозначение $\xi = h \sqrt{\frac{\omega_0}{2\chi}}$.

При больших значениях ξ частота ω стремится, как и следовало, к ω_0 , а коэффициент затухания к

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_p h^2}$$

в согласии с результатом задачи 3.

Малые же значения ξ соответствуют почти изотермическим условиям; в этом случае

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right) \cong \omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{ад}}},$$

а коэффициент затухания

$$\beta = \frac{ET\alpha^2 h^2}{180C_p \chi} \omega_0^2.$$

§ 31. Очень вязкие жидкости

Для типичных жидкостей уравнения Навье-Стокса применимы до тех пор, пока периоды движения велики по сравнению с молекулярными временами. Это, однако, не относится к очень вязким жидкостям. Для таких жидкостей обычные гидродинамические уравнения

становятся неприменимыми уже при гораздо больших периодах движения. Существуют вязкие жидкости, которые в течение достаточно малых (но в то же время больших по сравнению с молекулярными) промежутков времени ведут себя как твёрдые тела (например, глицерин, канифоль). Аморфные твёрдые тела (например, стекло) можно рассматривать как предельный случай таких жидкостей с весьма большой вязкостью.

Свойства этих жидкостей могут быть описаны следующим образом. В течение малых промежутков времени они упруго деформируются. После прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие, однако, со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени никаких внутренних напряжений в жидкости практически не остаётся. Пусть τ есть порядок величины времени, в течение которого происходит затухание напряжений (τ называют иногда максвелловским временем релаксации). Предположим, что жидкость подвергается воздействию некоторых переменных внешних сил, периодически меняющихся со временем с частотой ω . Если период $\frac{1}{\omega}$ изменения сил велик по сравнению с временем релаксации τ , т. е. $\omega\tau \ll 1$, то рассматриваемая жидкость будет вести себя как обычная вязкая жидкость. Напротив, при достаточно больших частотах ω (когда $\omega\tau \gg 1$) жидкость будет вести себя как аморфное твёрдое тело.

Соответственно таким «промежуточным» свойствам рассматриваемых жидкостей их можно характеризовать одновременно коэффициентом вязкости η и некоторым «модулем сдвига» μ . Легко получить соотношение, связывающее друг с другом порядки величин η , μ и времени релаксации τ . При воздействии периодических сил с достаточно малой частотой, когда жидкость ведёт себя, как обычная, тензор напряжений определяется обычным выражением для вязких напряжений в жидкости, т. е.

$$\sigma_{ik} = 2\eta \dot{u}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}$$

В обратном предельном случае больших частот жидкость ведёт себя, как твёрдое тело, и внутренние напряжения должны определяться по формулам теории упругости, т. е. $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ (речь идёт всё время о «деформациях чистого сдвига», так что предполагается, что $u_{ii} = 0$, $\sigma_{ii} = 0$). При частотах порядка $\omega \sim \frac{1}{\tau}$ напряжения, определяющиеся этими двумя выражениями, должны совпадать по порядку величины. Таким образом, имеем $\frac{\eta\omega}{\lambda\tau} \sim \frac{\mu\omega}{\lambda}$, откуда

$$\eta \sim \tau\mu. \quad (31,1)$$

Это и есть искомое соотношение.

Выведем, наконец, уравнение движения, качественно описывающее поведение рассматриваемых жидкостей. Для этого будем исходить из наиболее простого предположения о законе затухания внутренних

напряжений (после прекращения движения); именно, будем считать, что оно происходит по простому экспоненциальному закону, чему соответствует уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \sigma_{ik}.$$

С другой стороны, в твёрдом теле было бы $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, и потому

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt}.$$

Легко видеть, что уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt} \quad (31,2)$$

приводит к правильным результатам в обоих предельных случаях медленных и быстрых движений, а потому может служить интерполяционным уравнением для промежуточных случаев.

Так, для периодического движения, когда u_{ik} и σ_{ik} зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, имеем из (31,2)

$$-i\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = -2i\omega\mu u_{ik},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} u_{ik}. \quad (31,3)$$

При $\omega\tau \gg 1$ эта формула даёт $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, т. е. обычное выражение для твёрдых тел, а при $\omega\tau \ll 1$:

$$\sigma_{ik} = -2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau \dot{u}_{ik}$$

— обычное выражение для жидкости с вязкостью $\mu\tau$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельное движение одномерное 434 и д.
 — коническое 508 и д.
 Адиабата детонационная 577
 — конденсационная 596
 — ударная (Гюгоно) 396
 Адиабатические упругие модули 648
 Адиабатичности уравнение 16
 Адсорбированная плёнка 295
 —, влияние на затухание волн 298
 —, движение в канале 297
 Акустика геометрическая 313
 Ангармонические колебания 763 и д.
- Бародиффузия 276
 — в газах 278
 Бегущая волна 449 и д.
 Боковая волна 336 и д.
 Бруновское движение 279 и д.
 — вращательное 281
- Вихревые движения 31, 34
 Внутренние напряжения 633
 —, их момент 635
 Волна боковая 336
 — головная 548
 — детонационная 577, 584
 — пересжатая 590
 — монохроматическая 303
 — простая 451
 — разрежения изотермическая 442
 — нестационарная 437
 — —, отражение от стенки 478
 — стационарная 488 и д.
 — центрированная 464, 478
 Волновое сопротивление 51, 552
 — уравнение 300
 —, общее решение 332
 Волновой вектор 303
 — пакет 203, 316
 Волны внутренние в несжимаемой жидкости 62
 — гравитационные 54
 — длинные 60
 —, затухание 122 и д.
 — капиллярно-гравитационные 291
 — капиллярные 290 и д.
 —, затухание 291, 298
 — упругие в изотропной среде 743 и д.
 — в кристаллах 749 и д.
 — в упругом пласте 755
 — изгиба 758
 — крутильные 759
 —, отражение и преломление 746 и д.
 — поверхностные 751 и д.
 — продольные в стержнях и пластинках 757
- Вторая вязкость 375
 Второй звук в жидком гелии 624 и д.
 — — —, образование разрывов 627
- Вытекание из щели 45
 Вязкий тензор напряжений 66
 Вязкой жидкости движение в диффузоре 103
- Вязкой жидкости движение в конфузоре 103, 187
 — — — между вращающимися сферами 89
 — — — сближающимися дисками 91
 — — обтекание диска 87
 — — обтекание вращающегося диска 101, 186
 — — — капли 90, 213
 — — — пластинки ламинарное 163
 — — — турбулентное 207
 — — — цилиндра 88
 — — — шара 84, 98
 — — течение между коаксиальными цилиндрами 77, 79
 — — — плоскостями 74
 — — — по наклонной плоскости 78
 — — — по трубе ламинарное 75 и д., 186
 — — — турбулентное 203 и д.
- Вязкости коэффициенты 67
 Вязкость вторая 75
 — динамическая 68
 — кинематическая 68
 — суспензий 98
 — твёрдых тел 771
 — турбулентная 151
- Геометрическая акустика 313 и д.
 —, принцип Ферма 322
- Гидростатика 19
 Глубина проникновения волны 112
 Годографа преобразование 523
 Головная волна 548
 Горение медленное 569 и д.
 — турбулентное 574, 595
 Горения нормальная скорость распространения 570
- Гравитационные волны 51
 — длинные 60
 Граничные условия вязкой жидкости 68
 — идеальной жидкости 18
 Групповая скорость 318
- Движение автос модельное 434
 — вблизи линии струя 118
 — газа под поршнем 439, 455
 — диска в вязкой жидкости 101
 — капли в жидкости 90
 — сжимаемого газа по трубе 430
 — шара и цилиндра в жидкости 41, 84, 88
 Детонационная адиабата 577
 — волна 577
 —, отражение от стенки 592
 —, устойчивость 594
 Детонационный сплин 590
 Детонация 576 и д.
 —, распространение по трубе 584, 591
 —, — сферическое 585 и д.
 Деформация адиабатическая 648
 — вертикального стержня 652
 — вращающегося цилиндра 655
 — всестороннего сжатия 641
 — изотермическая 648

- Деформация однородная 644 и д.
— одностороннего сжатия 646
— плоская 651, 657
— полого шара 653
— — цилиндра 654
— сдвига 641
— среды с шаровой полостью 658
— температурная 647 и д., 651, 655, 656
— упругая неограниченной среды 663
— — полупространства 659 и д.
- Динамическая вязкость 68
- Дисперсия звука 378
— — при большой теплопроводности 373
- Диссипативная функция 772
- Диссипация энергии в несжимаемой жидкости 71
— — при колебаниях в жидкости 116
- Диффузия 269 и д.
— взвешенных частиц 279 и д.
- Жёсткость крутильная стержней 708
— на изгиб стержней 729
— цилиндрическая пластинок 684
- Закон Гука 640 и д.
— Колмогорова-Обухова 151
— подобия 80
— — для теплопередачи 248
— — околосвуковой 563 и д.
— — при больших M 566
- Затопленная струя 108, 165, 264
- Затухание волн 122
- Звук в движущихся средах 318
— сверхзвуковой жидкости 624
- Звук излучение 841
— поглощение 367
— скорость 300
— — в газе 302
— — в двухфазной системе 303
— — в чёрном излучении 305
— — продольная и поперечная 744
— распространение по трубке 358
- Звуковые волны 299 и д.
— — в движущейся среде 318 и д.
— — во втором приближении 457 и д.
— — в поле тяжести 317
— — монохроматические 303
— —, отражение 311 и д.
— —, отражение от ударной волны 409
— —, преломление 311 и д.
— —, разрывы 457
— —, распространение по трубке 358
— —, рассеяние 362
— —, энергия и импульс 305
- Идеальной жидкости вытекание из щели 45
— — движение вдали от тела 47
— — обтекание угла 43
— — — цилиндра 41
— — — шара 41
- Идеальный газ, термодинамические величины 88
- Изгиб кривого стержня 720, 736
— стержней 711 и д.
— —, главные плоскости 715
— —, сильный 724 и д.
— —, слабый 718, 728 и д.
— —, уравнения равновесия 720 и д.
— —, энергия изгиба 716 и д.
- Изгибающий момент 715
- Излучение звука 341 и д.
— — вблизи границы среды 353
— — из трубки 359, 360 и д.
— — колеблющимся цилиндром 352
— — — шаром 348
— — — нагретой пластинкой 352
- Излучение звука пульсирующим цилиндром 352
— — — шаром 350
- Изотермические упругие модули 648
- Изотермический скачок 421
- Изэнтропическое движение 17
- Импульса поток 26
- Инвариант Лойджанского 177
- Инварианты Римана 467, 528
- Индуктивное сопоставление 217
- Капиллярная постоянная 285
- Капиллярные волны 291
- Кинематическая вязкость 68
- Кинетические коэффициенты 274
- Колебания в вязкой жидкости диска 118
— — — плоскости 111
— — — полуплоскости 113
— — — тел 111 и д.
— — — шара 119, 121, 122
— в идеальной жидкости тел 32
— — — шара 53
— собственные 322 и д.
— сферической капли капиллярные 291
- Колмогорова-Обухова закон 151
- Комплексные скорость и потенциал 38
- Конвекции условия отсутствия 21
- Конвекция 248
— свободная в вертикальной трубке 267
— — между горизонтальными плоскостями 262, 266
— — у вертикальной стенки 263
- Конденсационный скачок 596
- Концентрация напряжений 654, 659, 693
- Корреляция скоростей 154
- Коэффициент бародиффузии 276
— всестороннего сжатия 641
— диффузии 276
— одностороннего сжатия 647
— поверхностного натяжения 282
— подъемной силы 215
— Пуассона 645
— сопротивления 185, 211
— температуропроводности 232
— теплового расширения 648
— — кристаллов 676
— теплопередачи 250
— теплопроводности 227
— термодиффузии 276
- Коэффициенты вязкости 67
— Ламэ 641
- Кризис сопротивления 210
- Кристаллов тепловое расширение 676
— упругие модули 672 и д.
- Критическая скорость 387
— точка 37, 42, 187
- Кручение стержней 704 и д.
- Лагранжевы координаты 18
- Ламинарное течение 1 2
- Ламинарный след 92
- Линии тока 23
— — в волне разрежения 494
— Линии струва 162, 183
- Логарифмический профиль скорости 198 и д.
- Лоскаявая турбулентность 150
- Максвелловская жидкость 782
- «Мелкой воды» тесрия 484 и д.
- Мембраны равновесие 698
- Модуль всестороннего сжатия 641
— растяжения (модуль Юнга) 645
— — кубического кристалла 677
— сдвига 641
— упругий кристаллов 672 и д.
— — поликристаллов 675
- Монохроматическая волна 303

- Нагревание тела в движущейся жидкости 256
 Напряженный тензор в вязкой жидкости 66
 Нейтральная поверхность 680, 711
 Непрерывности уравнение 13
 Несжимаемая жидкость 35
- Оболочки 699 и д.
 — сферические 701 и д.
 Обтекаемые тела 32, 214
 Обтекание заостренного тела 551
 — конического острья 508
 — крыла 641, 556, 560
 — со звуковой скоростью 541
 — угла 43, 504
 Околзвукковые движения 516, 520 и д.
 —, закон подобия 563 и д.
 Отражение и преломление звуковых волн 311, 337
 — — ударных волн 448
 Отрыв течения 160 и д., 188 и д.
- Парадокс Даламбера 51
 Перезывающая сила 729
 Пересечение ударных волн 495
 Пересжатая волна 590
 Переходная поверхность 530
 Пластинка круглая в поле тяжести 686
 — под действием сосредоточенной силы 687
 — тонкая 679 и д.
 — —, изгиб 679 и д.
 — —, упругая энергия изгиба 681
 Пластинки продольные деформации 638 и д.
 — — — вращающегося диска 691
 — — — клина 692
 — — — круглого диска 693
 — — — плоскости с отверстием 693
 — — — полуплоскости 631
 — — — сильный изгиб 694 и д.
 Плёнка адсорбированная 295
 — жидкая, неравномерно нагретая 289
 — —, равновесие 284, 287
 Плоская волна 301
 — деформация 651, 657
 Плоское движение 37
 — напряжённое состояние 690
 Плотность потока диффузионная 273 и д.
 — — импульса в вязкой жидкости 65
 — — в идеальной жидкости 26
 — — массы 15
 — — энергии в идеальной жидкости 25
 — — в вязкой жидкости 227
 — — в звуковой волне 307
 — — энтропии 17
 Поверхностное натяжение 282 и д.
 — — твёрдых тел 688
 Поглощение звука в жидкости 367 и д.
 — — в поликристаллах 776
 — — в растворах 374
 — — в твёрдом теле 774 и д.
 — — в трубе 372
 — — в эмульсии 369
 — — при отражении 371
 — — колебаний в стержнях и пластинках 779 и д.
 Пограничный слой ламинарный 180 и д.
 — — — вблизи критической точки 187
 — — — в конфузоре 187
 — — — на вращающемся диске 186
 — — —, устойчивость 195 и д.
 — — — турбулентный 206 и д.
 Подвижность 280
 Подслый вязкий 201
 Подъёмная сила 50, 94, 171
 — — при больших M 568
 — — при дозвуковом движении 558
 — — при сверхзвуковом движении 562
 — — тонкого крыла 222 и д.
- Потенциал скорости 34
 Потенциальное движение 30 и д.
 — — сжимаемого газа 513 и д.
 Предельная линия 525
 Принцип взаимности 354 и д.
 — симметрии кинетических коэффициентов 273
 Простая волна двухмерная стационарная 157 и д.
 — — одномерная нестационарная 451
 — — релятивистская 605
 — — центрированная 464, 519
 «Прыжок воды» 486
- Радиус кривизны поверхности 286, 291
 Развитая турбулентность 145
 Разрежения волна 491
 Разрывы в звуковой волне 457
 — в начальных условиях 442
 — слабые 423
 — тангенциальные 31, 142, 392
 Рассеяние жидкой каплей 365
 — звука 332 и д.
 — — твёрдым шаром 364 и д.
 Растяжение одностороннее 646
 — простое 614
 Резонанс 325
 Релятивистские гидродинамические уравнения 601, 606
 Римана инварианты 468, 528
- Сверхтекучесть 609 и д.
 —, гидродинамические уравнения 614 и д.
 —, нормальная и сверхтекучие части 611
 —, распространение звука 622 и д.
 —, термомеханический эффект 612
 —, течение по капилляру 621
 Сдвиг 641
 Сжатие равномерное вестороннее 636, 641
 Сжимаемого газа вязкое течение по трубе 430
 — — истечение из сопла 427
 — — стационарный поток 385 и д.
 Сила сопротивления 47, 119
 — — диссипативная 117
 — — инерционная 117
 Скальвающие напряжения 636
 Скачок уплотнения 395
 — — косой 410 и д.
 Скорость звука 301
 Слабые разрывы 423 и д.
 — — тангенциальные 426
 След ламинарный 92
 — турбулентный 163 и д., 173
 Смещения вектор 628
 Собственные колебания 322 и д.
 — — в параллелепипеде 325
 — — в сферическом сосуде 329
 Соприкосновение твёрдых тел 664 и д.
 — цилиндров 671
 — шаров 669
 Сопритвление вязкой жидкости 94
 — в идеальной жидкости 47
 — волновое 51, 552
 — индуктивное 217 и д.
 — при колебаниях в вязкой жидкости 117
 — при очень больших R 211
 — при сверхзвуковом движении 553, 562
 Сопротивления кризис 210
 Стержня изгиб 711 и д.
 — кручение 704
 Столкновение шаров 670
 Струя затопления ламинарная 108
 — — турбулентная 165 и д.
 — — нагретая 264 и д.
 Сферические волны 326 и д.
 — —, отражение 336 и д.

- Тангенциальный разрыв 31, 142, 392
 — — , устойчивость 142, 294, 393
 Тензор деформации 630 и д.
 — — напряжений 63 и д.
 — — в изотропных телах 642, 646
 — — , среднее значение 637
 — — энергии-импульса релятивистский 599 и д.
 Теорема Жуковского 171
 — Томсона 29
 Тепловой взрыв 235
 Тепловоны 246
 Теплопроводность в изотропной твёрдой среде 769
 — в кристаллах 770
 — при обтекании шара 259
 — турбулентная 252
 Термодинамическое тождество 639
 Термодиффузия 276
 Термомеханический эффект в жидком гелии 612
 Течение вблизи критической точки 42
 — по трубе 74, 76
 — турбулентное 203
 Точка Жуге 579
 Трансзвуковое движение 530
 Турбулентная область 160 и д.
 Турбулентности внутренних масштабов 152
 — возникновение 146
 — основной масштаб 146
 Турбулентность изотропная 174 и д.
 — локальная 150
 — пульсация 146
 — развитая 145 и д.
 — , корреляция скоростей 154 и д.
 Угла обтекание потенциальное 43
 — — сверхзвуковое 504 и д.
 — — турбулентное 163, 194
 Угол атаки 215
 — возмущений 383
 — скольжения 563
 Ударная аднабата 394 и д.
 — полара 412
 Ударные волны 392 и д.
 — — в идеальном газе 406 и д.
 — — , возникновение в звуковой волне 452 и д., 457 и д.
 — — , при обтекании тел 521, 543 и д.
 — — , затухание 460 и д.
 — — , косые 410 и д.
 — — , отражение от стенки 448
 — — , от тангенциального разрыва 449
 — — , очень сильные 483 и д.
 — — , пересечение друг с другом 495 и д.
 — — , с тангенциальным разрывом 499
 — — , с твёрдой поверхностью 500 и д.
 — — слабые 398 и д.
 — — , ширина 415 и д.
 Упругая линия 715
 — энергия 639
 — — изотропного тела 641
 — — кристаллов 671 и д.
 Упругая энергия пластинки 681
 — — стержня 716 и д.
 Уравнение адиабатичности движения 16
 — Бернулли 23, 34, 35
 — — релятивистское 605
 — Навье-Стокса 68
 — непрерывности 13
 — Осена 88
 — Чаплыгина 523
 — Эйлера 15
 — Эйлера-Трикоми 530 и д.
 Уравнения равновесия изогнутой пластинки 684
 — — упругого тела 637
 — — — изотропного 650 и д.
 — — — — , общее решение 657
 — — — — , в напряжениях 656
 Условие Жуковского-Чаплыгина 216
 Устойчивость вращательного движения жидкости 134 и д.
 — движения по трубе 138 и д.
 — закрученных стержней 740
 — ламинарного пограничного слоя 195
 — сжатых стержней 739
 — стержня в поле тяжести 741
 — тангенциальных разрывов 142, 294
 — — в сжимаемой жидкости 393
 — ударных волн 404
 Фазовая скорость 317
 Формула Лапласа 283
 — Пуассона 76
 — Пуассона 334
 — Стокса 87
 Фронт пламени 570
 — — , устойчивость 572, 574
 Функция кручения 705
 — напряжений 652, 657
 — тока 37, 71
 Характеристика 384, 463 и д., 527 и д.
 Хорошая обтекаемость 214
 — — при сверхзвуковом движении 551
 Цилиндрические волны 330 и д.
 Циркуляция скорости 28
 — — , закон сохранения (теорема Томсона) 29
 Число Грассхофа 262
 — М 384
 — Нуссельта 220
 — Пекле 249
 — Прандтля 249, 256
 — Рейнольдса 81
 — — критическое 128, 133
 — Струкала 83
 — Фруда 82
 Эйконал 314
 Эйлера уравнение 15, 603
 Эйлера-Трикоми уравнение 530, 536
 Эффект Допплера 318
 Явление отрыва 162