Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. Л. Д. ЛАНДАУ

ТОМ ЧЕТВЕРТЫЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Г. Н. Кольченко.*

Тираж 8 000. Подписано к печати 5/II 1941 г. А 34951. $17^3/_4$ печ. л. 20,967 авт. л.
48 000 тип. зн. в печ. л. Цена книги 5 р. 75 к. Переплет 1 р. 50 к. Заказ № 4716.

4-я типография ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" имени Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой четвертый том „Теоретической физики“. Этот том посвящен изложению теории электромагнитного и гравитационного полей, т. е. электродинамики и общей теории относительности. Электродинамика излагается с самого начала на основе специального принципа относительности.

Макроскопическая электродинамика, т. е. электродинамика материальных сред, в этом томе не излагается. Ей будет посвящен следующий — пятый — том этого курса.

Для чтения книги необходимо общее знакомство с электромагнитными явлениями в объеме общих курсов физики. Необходимо также хорошее знание векторного анализа.

Л. Ландау
Е. Лифшиц

Институт Физических Проблем АН СССР,

Москва.
Декабрь, 1939 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Скорость распространения взаимодействий

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчета, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчета носят название инерциальных.

Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно поступательно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным). Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно-поступательно.

Опыт показывает, что имеет место так называемый принцип относительности. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдем „скорость распространения взаимодействий".

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой, часто говорят как о „сигнале", отправляющемся от первой частицы и „дающем знать" второй об изменении, которое испытала первая. О скорости распространения взаимодействий говорят тогда как о „скорости сигнала".

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют скоростью света. Она обозначается обычно буквой c, а ее численное значение, согласно последним измерениям, равно

$$c = 2{,}99796 \cdot 10^{10}\ \textit{см/сек}. \qquad (1,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что в практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько мало по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется релятивистской. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействия; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике свойства пространства являются относительными, т. е. зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте пространства или вообще на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются независящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Именно, измерения, произведенные впервые Майкельсоном, обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем как согласно классической механике скорость света в направлении движения земли должна была бы быть меньше, чем в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат, соответственно, XYZ и $X'Y'Z'$, движущиеся друг относительно друга вправо вдоль осей X и X' (рис. 1).

Пусть из некоторой точки A на оси X' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C.

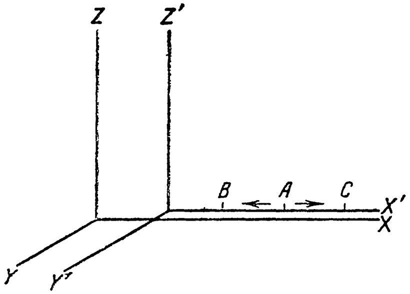

Рис. 1.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит весьма глубокие и фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием события. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться фиктивным четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются мировыми точками. Всякой частице соответствует некоторая линия (мировая линия) в этом фиктивном четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Легко сообразить, что равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси X и X' совпадали, а оси Y и Z были параллельны осям Y' и Z'; время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройденное им расстояние равно поэтому $c(t_2-t_1)$. С другой стороны это же расстояние равно $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \tag{2,1}$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K'. Пусть координаты первого события в системе K' есть x_1', y_1', z_1', t_1', а второго: x_2', y_2', z_2', t_2'. Согласно принципу инвариантности скорости света эта скорость в системах K и K' одинакова и потому, аналогично (2,1), мы имеем:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \tag{2,2}$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{2,3}$$

называется интервалом между этими двумя событиями.

Таким образом, из принципа инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то интервал ds между ними

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{2,4}$$

В целях математического удобства, а именно для того, чтобы придать формулам более симметричный вид, мы будем в дальнейшем часто пользоваться вместо времени t другой переменной τ, связанной с t посредством соотношения:

$$\tau=ict. \tag{2,5}$$

Тогда

$$s_{12}^2=-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(\tau_2-\tau_1)^2] \tag{2,6}$$

и

$$ds^2=-(dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2). \tag{2,7}$$

Соответственно этому и на осях координат в нашем фиктивном четырехмерном пространстве мы будем откладывать теперь не x, y, z, t, а x, y, z, τ. Как легко видеть, $-s_{12}^2$ можно истолковать тогда как квадрат расстояния между точками x_1, y_1, z_1, τ_1 и x_2, y_2, z_2, τ_2 в этом пространстве, а $-ds^2$ — как квадрат элемента длины.

Как было выше показано, если $ds=0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds'=0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds и ds' должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds = a\,ds',$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства. Поэтому с тем же правом, как мы пишем $ds = ads'$, мы можем написать и

$$ds' = a\,ds,$$

так как, конечно, скорости движения первой системы относительно второй, и наоборот, одинаковы. Подставляя $ds = a\,ds'$ в $ds' = a\,ds$, находим, что $a^2 = 1$, т. е. $a = \pm 1$. Для того чтобы выбрать одно из этих значений, заметим, что a может быть равно только или всегда $+1$ или всегда -1. Действительно, если бы $a(v)$ было для некоторых скоростей равным $+1$, для других -1, то для некоторых оно должно было бы иметь значения, промежуточные между $+1$ и -1, что невозможно. Но если так, то a должно быть всегда равно $+1$, так как частным случаем преобразования $ds' = a\,ds$ является тождество $ds \equiv ds$, где $a = +1$. Из $ds' = ds$ непосредственно следует, что и для конечных интервалов $s' = s$.

Таким образом, мы приходим к весьма важному результату: интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты двух событий в некоторой системе отсчета K. Спрашивается, существует ли такая система отсчета K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда интервал между событиями в системе K:

$$s^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют временными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями временной, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,8}$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда временной. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. Попрежнему мы имеем в системах K и K' $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12} - l'^2_{12}$. Мы хотим, чтобы $t'_{12} = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют пространственными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между местами, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \tag{2,9}$$

Подразделение интервалов на временные и пространственные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть временным или пространственным не зависит от системы отсчета.

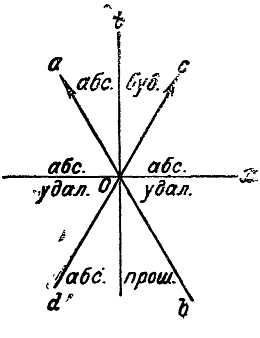

Рис. 2.

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием O — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y, z и t, мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время и будем откладывать их на двух осях (рис. 2). Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей $x=0$ при $t=0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис. 2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x=0$ при $t=0$). Все прямые, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x=\pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2-x^2>0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O временные. В этой области $t>0$, т. е. все события этой области происходят „после“ события O. Но два события, разделенные временным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило „до“ события O, т. е. когда было бы $t<0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать „абсолютно будущим“ по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются „абсолютно прошедшими“ по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O.

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием O пространственный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать „абсолютно удаленными“ по отношению к O. Понятия „одновременно“, „раньше“ и „позже“ для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы „конус“ $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ в четырехмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют „световым конусом“). Области „абсолютно будущего“ и „абсолютно прошедшего“ изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними временной, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия „раньше“ и „позже“, что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,dt'^2,$$

откуда

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

или иначе

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $t_2 - t_1$:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета, связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И, наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K. Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того, чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K, надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K, и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов в K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K. Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в этот другой момент. При этом мы обнаружим, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K, с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные (и наоборот), теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, движутся неравномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной. Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c}\int\limits_a^b ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является, очевидно, прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int\limits_a^b ds$, взятый между двумя данными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки[1]) (мировые точки a и b должны, конечно, быть такими, чтобы интервал между ними был временной; в противном случае интеграл комплексный).

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси X и X' совпадают, оси Y, Z параллельны осям Y', Z', движение вдоль осей X и X'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x' = x + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{4,1}$$

Эти формулы называются преобразованием Галилея. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало ожидать, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские формулы преобразования мы будем искать, как раз исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Если пользоваться удобной для дальнейшего изложения величиной $\tau = ict$, то, как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, τ. Но такими преобразованиями являются только переносы и вращение системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно ма-

[1]) Это свойство интеграла $\int_a^b ds$ связано с тем, что одна из координат мнимая ($\tau = ict$); если бы все четыре координаты были действительными, то $\int ds$ был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

тематически выражаться как вращение четырехмерной системы координат x, y, z, τ.

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, τx, τy, τz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости τx; координаты y и z при этом не меняются. Если ψ есть угол поворота, то связь между старыми и новыми координатами определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - \tau'\sin\psi, \\ \tau &= x'\sin\psi + \tau'\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета K к системе K', которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координаты x и время τ. Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Теперь остается определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V[1]).

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчета K'. Тогда $x'=0$ и формулы (4,2) приобретают вид:

$$x = -\tau'\sin\psi, \quad \tau = \tau'\cos\psi,$$

или, деля одно на другое,

$$\frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg}\psi.$$

Но $\tau = ict$, а x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}.$$

Отсюда

$$\sin\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя это в (4,2), находим:

$$x = \frac{x' - i\frac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \tau = \frac{\tau' + i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

---

[1]) Заметим во избежание путаницы, что посредством V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а посредством v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Подставляя еще $\tau = ict$, $\tau' = ict'$, имеем окончательно

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (4,3)$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул преобразования Лоренца и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t'.

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c \to \infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V > c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движения со скоростью, большей скорости света, невозможны. Невозможно даже пользование системой отсчета со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближенными формулами:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \qquad (4,4)$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси X. Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе K'. Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x_2' и x_1') в этой системе в один и тот же момент времени t'. Из (4,3) находим:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x_2' - x_1'$; вычитая x_2 из x_1, находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

„Собственной длиной“ стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через $l_0 = \Delta x'$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета K — через l. Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (4,5)$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V, в $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ раз меньше. Этот результат теории относительности называется лоренцовым сокращением.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем Ω тела сокращается по аналогичной формуле

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

где Ω_0 есть „собственный объем“ тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедшие в одном и том же месте x', y', z' пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между этими же событиями в системе отсчета K. Из (4,3) имеем

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси X. Пусть $v_x = \frac{dx}{dt}$ есть компонента скорости частицы в системе K, а $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ — скорость той же частицы в системе K'. Из (4,3) мы имеем

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Деля первые три равенства на четвертое, находим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+Vdt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},$$

или, деля числитель и знаменатель правых частей этих равенств на dt',

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\quad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\quad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}. \tag{5,1}$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c\to\infty$ они переходят в формулы $v_x=v'_x+V$, $v_y=v'_y$, $v_z=v'_z$ классической механики.

В частном случае движения частицы параллельно оси X $v_x=v$, $v_y=v_z=0$. Тогда $v'_y=v'_z=0$, а $v'_x=v'$, причем

$$v=\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть согласно этой формуле снова скорость, не бóльшая скорости света.

Для скоростей V, значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближенно с точностью до членов порядка V/c:

$$v_x=v'_x+V\left(1-\frac{v'^2_x}{c^2}\right),\quad v_y=v'_y-v'_xv'_y\frac{V}{c^2},\quad v_z=v'_z-v'_xv'_z\frac{V}{c^2}.$$

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости XY. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x=v\cos\theta$, $v_y=v\sin\theta$, а в системе K' $v'_x=v'\cos\theta$, $v'_y=v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями X и X', соответственно, в системах K и K').

С помощью формул (5,1) находим тогда

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{\cos\theta'\cdot v'+V}. \tag{5,3}$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, —

явление, называемое аберрацией света. В этом случае $v=v'=c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c}+\cos\theta}\sin\theta'. \qquad (5,4)$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную формулу для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta=\frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \qquad (5,5)$$

В случае $V\ll c$ из этой формулы находим с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta-\sin\theta'=-\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta=\theta'-\theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью

$$\Delta\theta=\frac{V}{c}\sin\theta', \qquad (5,6)$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Если мы будем пользоваться в качестве координат события величинами x, y, z, τ, то мы можем рассматривать x, y, z, τ, как компоненты вектора в четырехмерном пространстве. Сумма квадратов этих компонент, т. е. квадрат „длины" вектора $x^2+y^2+z^2+\tau^2$, не меняется при поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вектор с компонентами x, y, z, τ называют „четырехмерным радиусом-вектором". Его компоненты мы будем обозначать через x_i, где $i=1, 2, 3, 4$, причем

$$x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z, \quad x_4=\tau=ict.$$

При преобразовании от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. при преобразовании Лоренца, компоненты четырехмерного радиуса-вектора (или, как мы будем писать для краткости, 4-радиуса-вектора) преобразуются согласно (4,3) по формулам

$$x_1=\frac{x_1'-i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2=x_2', \quad x_3=x_3', \quad x_4=\frac{x_4'+i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (6,1)$$

Четырехмерным вектором A_i называется совокупность четырех величин A_1, A_2, A_3, A_4, которые при преобразовании четырехмерной системы координат преобразовываются как компоненты x_i. При преобразовании Лоренца

$$A_1 = \frac{A_1' - i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_4 = \frac{A_4' + i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (6,2)$$

Четырехмерные векторы обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам обычных векторов. Так, легко показать, что подобно обычному скалярному произведению векторов сумма произведений компонент двух 4-векторов $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4$ является скаляром. Мы будем ниже обозначать такое скалярное произведение векторов как A_iB_i и вообще будем считать, что если один и тот же латинский индекс повторяется дважды, то подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3, 4 этого индекса. Так, квадрат „абсолютной величины" 4-вектора запишется в виде A_iA_i или A_i^2. Такой способ обозначения суммирования (при котором опускается знак суммы) очень удобен и значительно упрощает формулы.

Компоненты трехмерных векторов мы будем обозначать греческими индексами; под дважды повторяющимся греческим индексом будет подразумеваться суммирование от 1 до 3 (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Первые три компоненты 4-вектора называют пространственными, а четвертую — временной по аналогии с 4-радиусом-вектором. Временная компонента всех 4-векторов, с которыми нам придется иметь дело, мнимая. Заметим, что квадрат A_i^2 может быть как положительным, так и отрицательным (или равным нулю), поскольку среди компонент A_i есть мнимая.

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность шестнадцати величин A_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, которые при преобразовании координат

$$x_i = \alpha_{ik}x_k' \qquad (6,3)$$

преобразуются как произведения координат, т. е. по формулам

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A_{ml}'. \qquad (6,4)$$

При преобразовании Лоренца

$$(\alpha_{ik}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{bmatrix}. \qquad (6,5)$$

Единичным 4-тензором δ_{ik} называется тензор, удовлетворяющий условию, что для всякого вектора A_i имеет место

$$\delta_{ik}A_k = A_i. \tag{6,6}$$

Легко видеть, что компоненты этого тензора

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k, \\ 1, \text{ если } i = k. \end{cases} \tag{6,7}$$

Из всякого тензора A_{ik} можно образовать скаляр $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$, называемый „следом" тензора; очевидно, что

$$\delta_{ii} = 4. \tag{6,8}$$

Тензор называется симметричным, если $A_{ki} = A_{ik}$, и антисимметричным, если $A_{ik} = -A_{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты, т. е. компоненты A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, равны нулю, так как, например, должно быть $A_{11} = -A_{11}$.

Аналогично 4-тензору 2 ранга можно определить тензоры высших рангов.

Совершенно антисимметричным единичным 4-тензором 4-го ранга мы назовем такой тензор e_{iklm}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля только те, у которых все четыре индекса различны. Пусть $e_{1234} = 1$; тогда, очевидно, все неравные нулю компоненты e_{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 1, 2, 3, 4. Заметим, что, как легко проверить, $e^2_{iklm} = 4!$

По отношению к поворотам системы координат величины e_{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако, при изменении знака у одной или трех координат компоненты e_{iklm}, будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e_{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. Псевдотензоры любого ранга, в частности псевдоскаляры, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Если A_{ik} есть антисимметричный тензор, то тензор A_{ik} и псевдотензор $\frac{1}{2} e_{iklm}A_{lm}$ называются дуальными друг другу. Аналогично $e_{iklm}A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A_i. Произведение $\frac{1}{2} e_{iklm}A_{ik}A_{lm}$ тензора 2-го ранга на его дуальный есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным упомянем о некоторых аналогичных свойствах трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Как и у e_{iklm}, все компоненты $e_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю, за исключением тех, у которых $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Что касается этих компонент, то $e_{123}=1$; остальные же, очевидно, равны 1 или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность чисел α, β, γ к 1, 2, 3.

При отражении системы координат, т. е. при изменении всех трех координат, компоненты обычного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют полярными. Компоненты же вектора, равного векторному произведению двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются аксиальными. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным скаляром, а псевдоскаляром; при отражении системы координат он меняет знак. Аксиальный тензор является псевдовектором, дуальным некоторому антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$, то $C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$, где

$$C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве, соответственно, возможны четыре рода интегрирования.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве; элементом интегрирования является элемент дуги, т. е. 4-вектор dx_i.

2) Интеграл по поверхности (двухмерной) в 4-пространстве. Как известно, в трехмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны соответственно $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$; аналогично в 4-пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух 4-векторах A_i и B_k, на 6 координатных плоскостей $x_i x_k$ определяются антисимметричным тензором $A_i B_k - A_k B_i$. В частности, бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором 2-го ранга df_{ik}, компоненты которого равны проекциям площади элемента поверхности на координатные плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности пользуются вектором df_α, дуальным тензору $df_{\alpha\beta}$, т. е. $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырехмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^*_{ik}, дуальный тензору df_{ik}, т. е.

$$df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df_{lm}. \tag{6,9}$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и „нормальный“ элементу df_{ik}, — все лежащие на нем прямые перпендикулярны ко всем прямым на элементе df_{ik}.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию (трехмерному объему). В трехмерном пространстве объем „паралле-

лепипеда", построенного на трех векторах **A**, **B**, **C**, равен, как известно, детерминанту третьего ранга, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве проекция объема „параллелепипеда" (т. е. „площади" гиперповерхности), построенного из трех 4-векторов A_i, B_i, C_i, определяется детерминантами

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix}$$

составляющими тензор третьего ранга, антисимметричный по всем трем индексам. В частности, бесконечно малый элемент гиперповерхности определяется антисимметричным тензором dS_{ikl}. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS_i, дуальным тензору dS_{ikl}:

$$dS_i = \frac{1}{6}\, e_{iklm}\, dS_{klm}, \qquad dS_{ikl} = e_{klmi}\, dS_m \tag{6,10}$$

(легко убедиться, что компоненты dS_i: $dS_1 = dS_{234}$, $dS_2 = dS_{143}$ и т. д.). Геометрически это 4-вектор, по абсолютной величине равный „площади" элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, проведенным в элементе гиперповерхности). Очевидно, что $dS_4 = dx\,dy\,dz$ равно элементу трехмерного объема dV, — проекции гиперповерхности на гиперплоскость $x_4 = \text{const}$.

4) Интеграл по четырехмерному объему; элементом интегрирования является элемент 4-объема $d\Omega = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса для трехмерных интегралов существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы. Из этих теорем нам понадобятся в дальнейшем следующие две. Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_i на оператор

$$dS_i \to d\Omega\, \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6,11}$$

Например, для интеграла от вектора A_i имеем:

$$\oint A_i\, dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по обычной поверхности преобразуется в интеграл по „огибаемой" ею гиперповерхности посредством замены элемента интегрирования df^*_{ik} на оператор

$$df^*_{ik} \to \frac{1}{2}\left(dS_i\, \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k\, \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{6,12}$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A_{ik} имеем:

$$\int A_{ik}\, df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int\left(dS_i\, \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k\, \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\right) = \int dS_i\, \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}.$$

Приведем, для полноты, еще правило преобразования интеграла по четырехмерной замкнутой линии в интеграл по огибаемой ею поверхности; оно осуществляется заменой

$$dx_i \to df_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6,13}$$

Например, для интеграла от вектора:

$$\oint A_i\,dx_i = \int df_{ki}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\int df_{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right), \tag{6,14}$$

что является обобщением теоремы Стокса.

§ 7. Четырехмерные скорость и ускорение

Из обычного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой четырехмерной скоростью (4-скоростью) частицы является вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \tag{7,1}$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3,1)

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трехмерная скорость частицы. Таким образом,

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично находим u_2, u_3, u_4 и в результате имеем:

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,2}$$

Заметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i^2 = -ds^2$, имеем:

$$u_i^2 = -1. \tag{7,3}$$

4-ускорением частицы называется вектор

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \tag{7,4}$$

С помощью (7,2) и (7,3) находим для его компонент:

$$w_\alpha = \frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad w_4 = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,5}$$

Дифференцируя (7,3), имеем:

$$u_i\frac{du_i}{ds} = 0,$$

или

$$u_i w_i = 0. \tag{7,6}$$

Задача

Частица движется со скоростью $\mathbf{v}(t)$; определить ее ускорение $\mathbf{w}$ в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится, в случае, если: (а) скорость $\mathbf{v}$ меняется только по направлению, (б) $\mathbf{v}$ меняется только по величине.

Решение: В указанной системе отсчета пространственные компоненты w_i равны $\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\mathbf{w}_0}{c^2}$, а временная равна нулю. Поэтому $\frac{1}{c^4}w_0^2=w_i^2$; поскольку w_i^2 есть скаляр, то он равен $\frac{1}{c^4}w_0^2$ и в другой системе отсчета. Воспользовавшись этим и вычисляя w_i, находим в случае (а):

$$\mathbf{w}_0=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

а в случае (б):

$$\mathbf{w}_0=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

ГЛАВА II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Элементарные частицы в теории относительности

В классической механике можно ввести понятие абсолютно твердого тела, т. е. тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. В теории относительности под абсолютно твердыми телами следовало бы, соответственно, подразумевать тела, все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчета, где они покоятся. Легко, однако, видеть, что теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твердых тел.

Рассмотрим, например, круглый диск, вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что он абсолютно тверд. Связанная с этим диском система отсчета, конечно, не является инерциальной. Можно, однако, ввести для каждого из небольших элементов диска инерциальную систему отсчета, в которой бы этот элемент в данный момент покоился; для разных элементов диска, обладающих различными скоростями, эти системы будут, конечно, тоже различны. Рассмотрим ряд элементов длины, расположенных вдоль какого-нибудь радиуса диска. Благодаря абсолютной твердости диска длины каждого из этих отрезков в соответствующей инерциальной системе отсчета остаются такими же, какими они являются, когда диск неподвижен. Эти же длины получит и измеряющий их неподвижный наблюдатель, мимо которого проходит в данный момент рассматриваемый радиус диска, поскольку каждый из отрезков перпендикулярен к своей скорости, а в таком случае не происходит лоренцова сокращения. Поэтому и весь радиус, измеренный неподвижным наблюдателем как сумма составляющих его отрезков, будет таким же, каким он является у неподвижного диска. С другой стороны, длина каждого из элементов окружности диска, проходящего в данный момент мимо неподвижного наблюдателя, подвергается лоренцову сокращению, так что и длина всей окружности (измеренная неподвижным наблюдателем как сумма длин отдельных ее отрезков) окажется меньше, чем длина окружности покоящегося диска. Мы приходим, таким образом, к результату, что при вращении диска отношение длины его окружности к радиусу (измеряемое неподвижным наблюдателем) должно было бы измениться вместо того, чтобы остаться равным 2π. Абсурдность этого результата и показывает, что в действительности диск не может быть абсолютно твердым и при вращении неизбежно подвергается некоторой сложной деформации, зависящей от упругих свойств материала, из которого сделан диск.

В невозможности существования абсолютно твердых тел можно убедиться и другим путем. Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием в какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы притти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности, однако, делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается и остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

Из сказанного вытекают некоторые выводы, касающиеся так называемых элементарных частиц. Под элементарными частицами подразумевают частицы, которые во всех физических явлениях принимают участие только как целое, т. е. не имеет смысла говорить об их частях. Другими словами, состояние элементарной частицы целиком определяется заданием ее положения и скорости как целого. Очевидно, что если элементарная частица обладала бы конечными размерами, то она не должна была бы быть деформируемой, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, в теории относительности невозможны абсолютно твердые тела. Поэтому в теории относительности элементарные частицы должны рассматриваться как точечные.

§ 9. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Принцип наименьшего действия заключается, как известно, в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю.

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил. Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако, единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или $\alpha\,ds$, где α — некоторая постоянная. Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где $\int_a^b$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты t_1 и t_2 времени, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна быть положительной величиной. Действительно, мы видели в § 3, что $\int_a^b ds$ имеет максимальное значение вдоль прямой мировой линии; интегрируя вдоль кривой мировой линии, можно сделать интеграл сколь угодно малым. Таким образом, интеграл $\int_a^b ds$, взятый с положительным знаком, не может иметь минимума; взятый же с обратным знаком он, очевидно, имеет минимум — вдоль прямой мировой линии.

Этот интеграл действия можно преобразовать в интеграл по времени $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$. Коэффициент L при dt называется, как известно, функцией Лагранжа для данной механической системы. С помощью (3,1) мы находим:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина α, как уже отмечалось, характеризует данную частицу. В классической механике всякая частица характеризуется ее массой m. Определим связь величин α и m. Она определяется из условия, что при предельном переходе $c \to \infty$ наше выражение для L должно перейти в ее классическое выражение $L = \frac{mv^2}{2}$, где m есть классическая масса частицы. Для осуществления этого перехода разложим $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в ряд по степеням v/c. Тогда, опуская члены высших порядков, получаем:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Как известно, в функции Лагранжа несущественны члены, являющиеся полными производными по времени, и их можно вычеркивать из этой функции [1]). Всякая постоянная является полной производной от этой же постоянной, умноженной на время; поэтому в L ее можно опустить. Опуская постоянную αc, получаем $L=\frac{\alpha v^2}{2c}$, в классической же механике $L=\frac{mv^2}{2}$. Следовательно, должно быть $\alpha=mc$.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S=-mc\int\limits_a^b ds, \tag{9,1}$$

а функция Лагранжа

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9,2}$$

§ 10. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется, как известно, вектор $\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right.$ — символическое обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам $\mathbf{v}$). С помощью (9,2) находим:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,1}$$

При малых скоростях ($v \ll c$) или в пределе при $c\to\infty$ это выражение переходит в классическое $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$. При $v=c$ p обращается в бесконечность.

Производная от импульса по времени $\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно к скорости. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,2}$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,3}$$

---

[1]) Полная производная по времени при интегрировании в интервале действия $\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$ даст величину, независимую от пути интегрирования, которая исчезает при варьировании действия.

Отношение силы к ускорению в обоих случаях, следовательно, различно. В первом оно равно $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, а во втором $\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

Энергией $\mathscr{E}$ частицы называется, как известно, величина

$$\mathscr{E} = \mathbf{pv} - L.$$

Подставляя выражение (9,2) и (10,1) для L и $\mathbf{p}$, находим

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (10,4)$$

Из этого выражения видно, что в релятивистской механике энергия частицы не обращается в нуль даже, когда ее скорость равна нулю. Эта „энергия покоя", т. е. энергия при $v=0$, равна $\mathscr{E} = mc^2$.

При малых скоростях ($v/c \ll 1$) имеем, разлагая (10,4) в ряд по степеням v/c,

$$\mathscr{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Из (10,1) и (10,4) вытекает следующее соотношение между энергией и импульсом свободной материальной частицы:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \qquad (10,5)$$

При $v=c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света. Из (10,5) мы имеем для таких частиц

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \qquad (10,6)$$

Мы увидим в дальнейшем, что свет можно трактовать как такие частицы с массой, равной нулю.

Выведем теперь все полученные соотношения в четырехмерном виде. Согласно принципу наименьшего действия

$$\delta S = -mc\,\delta \int_a^b ds = 0.$$

Раскроем выражение для δS. Для этого замечаем, что $ds = \sqrt{-dx_i^2}$, и потому

$$\delta S = -mc\,\delta \int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = -mc \int_a^b \delta\sqrt{-dx_i^2} =$$

$$= -mc \int_a^b \frac{-dx_i\,\delta dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = mc \int_a^b u_i\, d\,\delta x_i,$$

так как $\frac{dx_i}{ds}$ есть компонента 4-скорости. Интегрируя по частям, находим

$$\delta S = mc\int_a^b u_i d\delta x_i = mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i du_i =$$

$$= mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i w_i ds, \tag{10,7}$$

где $w_i = \frac{du_i}{ds}$ есть 4-ускорение.

Как известно, для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Истинная траектория определяется тогда из условия $\delta S = 0$. Из (10,7) мы получили бы тогда уравнения $w_i = 0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Для того же, чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо, как известно, считать заданной точку a, так что $(\delta x_i)_a = 0$. Вторую же надо считать переменной, но при этом рассматривать только истинные траектории, т. е. которые удовлетворяют уравнениям движения. Поэтому интеграл в выражении (10,7) для δS равен нулю. Вместо $(\delta x_i)_b$ мы будем писать просто δx_i и, таким образом, находим:

$$\delta S = mcu_i\delta x_i. \tag{10,8}$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$, называется 4-вектором импульса. Мы будем обозначать его через p_i. Из (10,8) видно, что компоненты 4-импульса для свободной материальной частицы равны

$$p_i = mcu_i. \tag{10,9}$$

Как известно из механики, производные $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ суть три компоненты импульса частицы, а производная $-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial \tau} ic$ есть энергия частицы. Пользуясь выражением (7,2) для компонент 4-скорости, легко убедиться в том, что пространственные компоненты p_i действительно совпадают с импульсом $\mathbf{p}$, а временная равна $i\mathscr{E}/c$:

$$p_\alpha = p_\alpha, \quad p_4 = i\frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{10,10}$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Из этого непосредственно вытекают формулы преобразования импульса и энергии при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Именно, подставляя в общие формулы (6,2) преобразования 4-вектора выражения (10,10) для компонент 4-импульса, находим

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,11}$$

Имея в виду, что квадрат 4-скорости $u_i^2 = -1$ (7,3), имеем

$$p_i^2 = -m^2c^2. \tag{10,12}$$

Подставляя выражение (10,10) для компонент p_i, находим

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{10,13}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона $\mathcal{H}$. Из (10,13) следует, что

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{10,14}$$

При малых (по сравнению с c) скоростях импульс $p \ll mc$. Из (10,14) мы получаем тогда приближенно

$$\mathcal{H} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, известная формула

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}.$$

Наконец, подставляя в (10,12) $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ вместо p_i, находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = -m^2c^2, \tag{10,15}$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{10,16}$$

Это есть уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике.

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (10,16) совершается следующим образом. Раньше всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (10,14), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2, которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией посредством $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$, то при переходе к классической механике надо вместо S подставить новое действие S' согласно соотношению:

$$S = S' - mc^2t.$$

Подставляя это в (10,16), находим

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + 2m\frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

В пределе при $c \to \infty$ это уравнение переходит в классическое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

§ 11. Дефект массы

Выведенные в предыдущем параграфе формулы в равной мере применимы и к движению как целого сложного тела, состоящего из многих частиц. В этом случае под массой надо везде подразумевать полную массу тела, а под скоростью — скорость его движения как целого.

Рассмотрим покоящееся (как целое) тело. Его энергия, которую мы можем назвать внутренней, равна тогда просто Mc^2, где M — его масса. В виду положительности массы эта величина, очевидно, всегда положительна; положительна также и полная энергия $\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ движущегося тела (v — скорость его движения как целого). Таким образом, мы приходим к выводу, что в релятивистской механике энергия замкнутой системы всегда положительна, в противоположность тому, что имеет место в классической механике, где она может быть как положительной, так и отрицательной.

Внутренняя энергия тела Mc^2 содержит в себе кроме энергии покоя входящих в состав тела частиц еще и кинетическую энергию этих частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, Mc^2 не равно сумме $\sum_A m_A c^2$, где m_A — массы частиц, входящих в состав тела, а потому и M не равно $\sum m_A$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы; масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Разность $\Delta M = M - \sum_A m_A$ между массой сложного тела и суммой масс его составных частей называют дефектом массы. Величину ΔMc^2 называют энергией связи тела.

Рассмотрим тело, состоящее из двух частей (с массами M_1 и M_2), в системе отсчета, где оно покоится, и предположим, что тело самопроизвольно распадается на две части, скорости которых обозначим как v_1 и v_2. Тогда закон сохранения энергии дает

$$Mc^2 = \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Это уравнение может выполняться только, если $M > M_1 + M_2$, т. е. если дефект массы $\Delta M = M - M_1 - M_2$ положителен. Таким образом, тело может самопроизвольно распасться только в том случае, если его дефект массы (по отношению к частям, на которые оно распадается) положителен. Напротив, если дефект массы отрицателен, то тело является устойчивым и самопроизвольно не распадается. Легко сообразить, что для осуществления распада надо в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его энергии связи $|\Delta M| c^2$.

Задачи

1. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей m_2, причем обе частицы соединяются в одну сложную. Определить массу M и скорость V этой сложной частицы.

Решение. Искомая масса $M=\frac{1}{c^2}\sqrt{\mathscr{E}^2-p^2c^2}$, где $\mathscr{E}$ и p — энергия и импульс составной частицы, равные сумме энергий и импульсов сталкивающихся частиц. Скорость же $V=pc^2/\mathscr{E}$. В результате находим:

$$M^2=m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad V=\frac{m_1v}{\left(m_1+m_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}.$$

2. Покоящееся тело с массой M распадается на две части с массами M_1 и M_2; определить энергии $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ этих частей.

Решение. Закон сохранения энергии и импульса дает $Mc^2=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ и $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$, или, иначе, $p_1^2=p_2^2$, т. е. $\mathscr{E}_1^2-\mathscr{E}_2^2=M_1^2c^4-M_2^2c^4$. Из обоих уравнений находим

$$\mathscr{E}_1=c^2\frac{M^2+M_1^2-M_2^2}{2M}, \qquad \mathscr{E}_2=c^2\frac{M^2-M_1^2+M_2^2}{2M}.$$

§ 12. Столкновения

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц, т. е. такое, при котором не меняется их внутреннее состояние. Энергии и импульсы частиц до столкновения в некоторой системе отсчета K пусть будут, соответственно, $\mathbf{p}_{10}$, $\mathscr{E}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$, $\mathscr{E}_{20}$; при этом ось X системы K выбрана вдоль направления вектора $\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20}$ их полного импульса.

Для исследования столкновения удобно перейти к другой системе отсчета K', в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Согласно (10,5) скорость $\mathbf{V}$ системы K' относительно K равна [1])

$$\mathbf{V}=\frac{(\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20})\,c^2}{\mathscr{E}_{10}+\mathscr{E}_{20}}. \tag{12,1}$$

По общим формулам преобразования (10,11) и формуле (12,1) легко вычислить энергии и импульсы обеих частиц в системе K'; мы будем обозначать их посредством $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, $\mathbf{p}_1'=-\mathbf{p}_2'$.

При столкновении частиц сумма их импульсов и сумма энергий остаются неизмененными. В системе K' $\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'=0$, т. е. импульсы равны

[1]) При этом мы рассматриваем систему из двух сталкивающихся частиц как одно тело. Формулу (12,1) можно получить также непосредственно из формул преобразования (10,11). Согласно этим формулам и помня, что в K' общий импульс равен нулю, имеем

$$\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}=\frac{\mathscr{E}_{01}'+\mathscr{E}_{02}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p_{01x}+p_{02x}=\frac{\frac{V}{c^2}\left(\mathscr{E}_{01}'+\mathscr{E}_{02}'\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}),$$

т. е., если написать в векторном виде, формула (12,1) (штрихованные величины относятся к системе K').

по величине и противоположны по направлению. При столкновении импульсы $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ только поворачиваются, оставаясь равными и взаимно противоположными по направлению; в силу закона сохранения энергии абсолютные величины импульсов также остаются неизмененными.

Пусть $\mathbf{p}'$ есть импульс одной из частиц после столкновения, а $\mathscr{E}'$ — энергия этой же частицы (в системе K'). Определим импульс $\mathbf{p}$ частицы (после столкновения) в исходной системе K. Поскольку скорость системы K относительно K' равна $-\mathbf{V}$, а $\mathbf{V}$ параллельна осям X и X', то согласно формулам преобразования (10,11):

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{\mathscr{E}'V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z',$$

или иначе

$$p_x' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(p_x - \frac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z.$$

Поскольку $p_x'^2 + p_y'^2 = p'^2$ при столкновении не меняется ($\mathbf{p}'$ только поворачивается), то мы можем написать

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left(p_x - \frac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2 = p'^2, \tag{12,2}$$

где $\mathscr{E}'$ и p' — заданные величины.

Если рассматривать p_x, p_y и p_z как переменные координаты, то (12,2) есть уравнение вытянутого эллипсоида вращения с полуосями p' и $\dfrac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, фокусным расстоянием $\dfrac{p'V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, с эксцентриситетом V/c и центром, сдвинутым относительно начала координат на расстояние $\dfrac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ влево вдоль оси p_x. Отсюда вытекает следующий способ графического изображения импульсов обеих частиц после столкновения. Строится эллипс (рис. 3) с полуосями $\dfrac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ и p'; на его большой оси по обе стороны от центра откладываются два отрезка OA и OB, равные, соответственно,

$$\frac{\mathscr{E}_1'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{E}_2'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

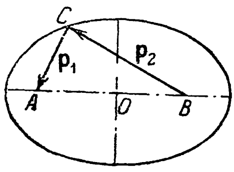

Рис. 3.

Тогда векторы CA и BC, проведенные из точек A и B в любую точку C эллипса, изобразят импульсы соответственно первой и второй частицы после столкновения. Их направление указано на рис. 3 стрелками.

Если обе частицы обладают одинаковыми массами, то $\mathcal{E}_1'=\mathcal{E}_2'$ и отрезки AO и OB равны друг другу. В случае если одна из частиц, скажем первая, до столкновения покоилась, то в системе K' она имела (до столкновения) скорость $-V$, и ее импульс p' связан с ее энергией $\mathcal{E}_1'$ посредством $\mathcal{E}_1'=p'c^2/V$. Отсюда мы видим, что отрезок OA в этом случае равен большой полуоси эллипса, т. е. точка A лежит на эллипсе (рис. 4). Это видно, впрочем, и непосредственно из того, что в этом случае возможно такое расположение векторов BC и CA, при котором

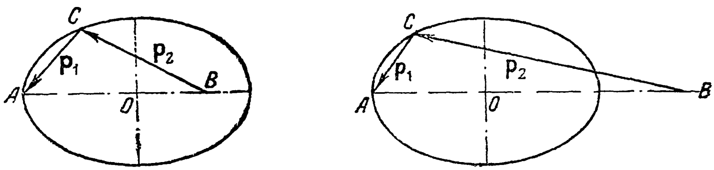

Рис. 4.

один из них равен нулю. Что касается точки B, то она лежит внутри или вне эллипса, смотря по тому, меньше или больше масса второй частицы, чем масса первой (действительно, в системе K' импульсы обеих частиц одинаковы по величине, и потому из энергий $\mathcal{E}_1'=c\sqrt{c^2m_1^2+p'^2}$ и $\mathcal{E}_2'=c\sqrt{c^2m_2^2+p'^2}$, а, следовательно, из отрезков OA и OB, больше та, которая соответствует частице с большей массой). Вектор $\overrightarrow{AB}$ есть в этом случае импульс (до столкновения) первоначально двигавшейся частицы; углы CBO и CAO суть поэтому углы рассеяния (отклонения) обеих частиц от направления первоначального движения.

Если одна из частиц, скажем первая, является частицей с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света, то согласно (10,6) ее энергия в системе K' $\mathcal{E}_1'=p'c$, и мы видим, что соответствующий ей отрезок OA равен фокусному расстоянию, т. е. точка A лежит в фокусе эллипса. Если и вторая частица обладает такими массой и скоростью, то и точка B находится в фокусе. Сумма абсолютных величин векторов $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ (т. е. длин AC и BC) в этом случае постоянна, согласно известному свойству эллипса. Это связано с тем, что абсолютные значения импульсов в этом случае пропорциональны энергиям частиц, а сумма энергий при столкновении сохраняется.

В предельном случае малых скоростей обеих сталкивающихся частиц эксцентриситет приближается к нулю и эллипс переходит в окружность.

Как видно из рис. 4, покоившаяся до столкновения частица не может приобрести в результате столкновения импульс, превышающий значение, изображаемое длиной большой оси эллипса (точка C находится при этом на другом конце этой оси). Вычислим этот наибольший импульс, передающийся от одной частицы к другой при столкновении. Длина большой оси эллипса есть, как мы видели,

$$2\frac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Импульс p' в системе отсчета, движущейся с центром инерции, есть

$$p'=\frac{m_1V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(m_1 — масса первоначально покоившейся частицы). Скорость V равна согласно (12,1)

$$V=\frac{p_{20}c^2}{\mathscr{E}_{20}+m_1c^2}$$

(до столкновения $p_{10}=0$, $\mathscr{E}_{10}=m_1c^2$). С помощью этих выражений находим для длины большой оси эллипса, т. е. для максимального импульса p_{1max} первой частицы после столкновения:

$$p_{1\,max}=\frac{2m_1p_{20}(\mathscr{E}_{20}+m_1c^2)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_1\mathscr{E}_{20}}. \tag{12,3}$$

Отсюда легко найти также и наибольшую возможную энергию первой частицы

$$\mathscr{E}_{1\,max}=c\sqrt{p_{1\,max}^2+m_1^2c^2}.$$

Задача

Частица с массой $m_1=0$ и скоростью c сталкивается с покоящейся частицей массы m_2. Определить энергии обеих частиц и направление движения частицы m_2 после столкновения, выразив их через угол отклонения частицы m_1.

Решение: Точка A (рис. 3) находится в фокусе, а точка B — на эллипсе. Воспользовавшись полярным уравнением эллипса, отнесенным к фокусу, легко находим:

$$\mathscr{E}_1=\frac{m_2c^2\mathscr{E}_{01}}{m_2c^2+\mathscr{E}_{01}(1-\cos\varphi_1)},\quad \mathscr{E}_2=\frac{m_2^2c^4+\mathscr{E}_{01}\left(m_2c^2+\mathscr{E}_{01}\right)\left(1-\cos\varphi_1\right)}{m_2c^2+\mathscr{E}_{01}(1-\cos\varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}}{1+\frac{\mathscr{E}_{01}}{m_2c^2}},$$

где $\mathscr{E}_{01}$ — энергия частицы m_1 до столкновения, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ — энергии обеих частиц после столкновения, φ_1, φ_2 — углы их отклонения.

§ 13. Момент импульса

Как известно, классическая механика приводит к тому результату, что у замкнутой системы кроме энергии и импульса сохраняется еще и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M}=\sum[\mathbf{rp}]$$

(**r** и **p** — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырехмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x_i — координаты одной из частиц системы. Произведем бесконечно малый поворот в четырехмерном пространстве. Тогда координаты x_i каждой частицы перейдут в x'_i, подвергнувшись линейному преобразованию,

$$x'_i = x_i + x_k \delta\Omega_{ik}, \tag{13,1}$$

где $\delta\Omega_{ik}$ — бесконечно малый 4-тензор, определяющий поворот. При повороте длина x_i^2 радиуса-вектора должна остаться неизменной, т. е. $x_i^2 = x_i'^2$. Подставляя сюда (13,1) и отбрасывая члены, квадратичные по $\delta\Omega_{ik}$, как бесконечно малые высшего порядка, находим

$$x_i x_k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных x_i. В виду того, что $x_i x_k$ есть симметричный тензор, $\delta\Omega_{ik}$ должно быть для этого антисимметрическим тензором (произведение симметричного тензора на антисимметрический, очевидно, всегда тождественно равно нулю). Таким образом, находим, что

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{13,2}$$

Изменение δS действия S при бесконечно малом изменении координат имеет вид [см. (10,7)]:

$$\delta S = \sum p_i \delta x_i$$

(суммирование производится по всем частицам системы). В случае рассматриваемого нами сейчас поворота $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x_k$, а потому

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p_i x_k.$$

Если разбить тензор $\sum p_i x_k$ на симметрическую и антисимметрическую части, то первая из них при умножении на антисимметрический тензор тождественно дает нуль. Поэтому, выделяя из $\sum p_i x_k$ антисимметрическую часть, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i). \tag{13,3}$$

Для замкнутой системы в силу изотропии пространства и времени при повороте в 4-пространстве функция Лагранжа не меняется, т. е. параметры $\delta\Omega_{ik}$ этого поворота являются циклическими координатами. Поэтому соответствующие обобщенные импульсы сохраняются. Этими импульсами являются величины $\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}$. Из (13,3) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i).$$

Мы видим, следовательно, что у замкнутой системы сохраняется тензор

$$M_{ik} = \sum (x_i p_k - x_k p_i). \tag{13,4}$$

Этот антисимметрический тензор носит название 4-тензора момента.

Легко убедиться, что пространственные компоненты этого тензора (i, $k = 1, 2, 3$) являются компонентами трехмерного вектора момента

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}\,\mathbf{p}], \tag{13,5}$$

$$M_{zx} = -M_{xz} = M_y, \quad M_{xy} = -M_{yx} = M_z, \quad M_{yz} = -M_{zy} = M_x.$$

Что касается компонент $M_{4\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), то, как легко убедиться,

$$M_{4\alpha} = ic \sum \left(t p_\alpha - \frac{\mathcal{E} x_\alpha}{c^2} \right). \tag{13,6}$$

Эти три компоненты, следовательно, составляют вектор

$$ic \sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right).$$

В силу сохранения M_{ik} для замкнутой системы мы имеем, в частности,

$$\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) = \mathrm{const}.$$

Поскольку, с другой стороны, полная энергия $\sum \mathcal{E}$ тоже сохраняется, то это равенство можно написать в виде

$$\frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}} t = \mathrm{const}. \tag{13,7}$$

Отсюда мы видим, что точка с радиусом-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \tag{13,8}$$

равномерно движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}, \tag{13,9}$$

которая есть не что иное, как скорость движения системы как целого. Такая точка, как известно, называется центром инерции; формула (13,9) определяет координаты центра инерции в релятивистской механике. Надо, однако, заметить, что поскольку компоненты $\mathbf{R}$, определяемые формулой (13,9), не являются компонентами какого-либо 4-вектора, то при переходе к другой системе отсчета координаты центра инерции не преобразуются по обычным формулам преобразования координат. Если скорости всех частиц гораздо меньше c, то можно приближенно положить $\mathcal{E} = mc^2$ и (13,8) переходит в известное выражение для центра инерции.

ГЛАВА III

ЗАРЯД В ПОЛЕ

§ 14. Четырехмерный потенциал поля

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия поля. Именно, вместо того, чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Известно, что существует два вида полей: поля гравитационные и электромагнитные. Изучению гравитационных полей посвящены главы IX — X. В остальных главах мы будем рассматривать только электромагнитные поля.

Взаимодействие данного электромагнитного поля с некоторой частицей определяется одной величиной, характеризующей эту частицу. Эта величина называется зарядом частицы. Взаимодействие поля с частицей пропорционально заряду частицы. Заряд может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, он может быть равен нулю. В этом случае говорят, что частица не заряжена, в отличие от частиц заряженных. Заметим, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд с известными уже величинами, мы можем произвольно выбирать единицу для измерения заряда.

Как мы видели в § 9, для свободной материальной частицы действие $S = -mc\int\limits_a^b ds$. Если заряженная частица (мы будем ниже говорить о ней просто как о заряде) находится в поле, то к этому интегралу надо прибавить член, описывающий взаимодействие поля с частицей. Этот член должен содержать как величины, характеризующие частицу (в частности ее заряд e), так и величины, характеризующие поле. Оказывается, что электромагнитное поле можно характеризовать некоторым четырехмерным вектором A_i. Поскольку единственный скаляр, который можно составить из A_i и дифференциалов dx_i, есть их скалярное произведение $A_i dx_i$, то дополнительный член должен иметь вид

$$\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx_i.$$

Скорость света c мы ввели сюда для удобства; никаких других постоянных перед интегралом мы можем не писать, поскольку единица для измерения заряда еще не установлена. Вектор A_i, как только что говорилось, характеризует поле; его компоненты являются, вообще говоря, функциями координат и времени. Вектор A_i носит название 4-потенциала поля. Таким образом, действие для заряда в электромагнитом поле имеет вид

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}A_k dx_k\right). \tag{14,1}$$

Заметим, что единицы для измерения A_i тоже остаются произвольными, пока произволен выбор единиц для e.

Три пространственные компоненты вектора A_i образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый векторным потенциалом поля. Временная компонента вектора A_i мнима, т. е. имеет вид $A_4=i\varphi$. Действительная величина φ называется скалярным потенциалом поля. Таким образом,

$$A_{1,2,3}=A_{x,y,z}, \qquad A_4=i\varphi. \tag{14,2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\varphi\,dt\right).$$

Далее, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы. Поэтому действие принимает вид

$$S=\int_a^b\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt. \tag{14,3}$$

Подинтегральные выражения есть не что иное, как функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \tag{14,4}$$

Эта функция отличается от функции Лагранжа (9,2) для свободной частицы членами $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi$, которые и описывают взаимодействие заряда с полем.

§ 15. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Поэтому заряд, помещенный во внешнее поле, подвергается, строго говоря, действию этого поля, измененного им самим. Однако, если заряд e не очень велик, то действием заряда на поле, т. е. изменением поля благодаря заряду, можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение заряда в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит при этом ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (см. § 72). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием интегралов действия. Уравнения движения будут, следовательно, обычными уравнениями Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{15,1}$$

где L определяется формулой (14,4).

Производная $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его через $\mathbf{P}$. С помощью (14,4) находим

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{15,2}$$

Здесь мы обозначим посредством $\mathbf{p}$ обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

Для того, чтобы написать уравнения Лагранжа, мы должны еще определить производную $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$. С помощью (14,4) находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Применяя эту формулу к $\mathbf{A}\mathbf{v}$ и помня, что дифференцирование по $\mathbf{r}$ производится при постоянном $\mathbf{v}$, находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ складывается из двух частей: из изменения $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстоянии $d\mathbf{r}$. Эта вторая часть, как известно из векторного анализа, есть $(d\mathbf{r}\,\nabla)\,\mathbf{A}$. Таким образом, производная $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-e\,\mathrm{grad}\,\varphi+\frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}]. \tag{15,3}$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (15,3) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первый и второй члены в правой части (15,3)] не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости, а именно, пропорциональна скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют напряженностью электрического поля; обозначим его посредством $\mathbf{E}$. Итак, по определению

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\varphi. \tag{15,4}$$

Множитель при скорости, точнее при $\mathbf{v}/c$, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют напряженностью магнитного поля; обозначим его через $\mathbf{H}$. Итак, по определению

$$\mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{15,5}$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E}\neq 0$, а $\mathbf{H}=0$, то говорят об электрическом поле; если же $\mathbf{E}=0$, а $\mathbf{H}\neq 0$, то поле называют магнитным. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{15,6}$$

Стоящее справа выражение носит название лоренцовой силы. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и направлена по напряженности поля $\mathbf{E}$. Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и направлению магнитного поля $\mathbf{H}$.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, функция Лагранжа (14,4) переходит в

$$L=\frac{mv^2}{2}+\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \tag{15,7}$$

Импульс $\mathbf{p}$ в этом случае приближенно равен своему классическому выражению $m\mathbf{v}$, и уравнение движения (15,6) переходит в

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{15,8}$$

Таким образом, мы можем рассматривать движение в поле также и частиц, подчиняющихся классической механике (т. е. кинетическая энергия которых есть $mv^2/2$, а импульс $m\mathbf{v}$).

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем, т. е. производную $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Легко убедиться, что

$$d\mathcal{E} = \mathbf{v}\,d\mathbf{p},$$

откуда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ из (15,6), имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \tag{15,9}$$

(замечая, что $[\mathbf{vH}]\,\mathbf{v} = [\mathbf{vv}]\,\mathbf{H} = 0$).

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Из (15,9) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt, т. е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна, очевидно, $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$.

Подчеркнем то обстоятельство, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на заряд, всегда перпендикулярна к скорости заряда.

§ 16. Градиентная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. Раньше всего обратим внимание на то обстоятельство, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на находящиеся в нем заряды, точнее, — на движение этих зарядов. Но в уравнения движения (15,6) входят не потенциалы, а напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Если заданы потенциалы $\mathbf{A}$ и φ, то этим согласно (15,4) и (15,5) вполне однозначно определены $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а значит и поле. Однако, одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к компонентам потенциала A_k по величине

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A_k' = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{16,1}$$

При такой замене в интеграле действия (14,1) появится дополнительный член

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = \frac{e}{c}df.$$

Но прибавление к подинтегральному выражению в действии полного дифференциала, как известно [1]), не влияет на уравнения движения.

Если ввести вместо четырехмерного потенциала векторный и скалярный и вместо координат x_i — координаты x, y, z, t, то четыре равенства (16,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{16,2}$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля, определенные равенствами (15,4) и (15,5), действительно не изменяются при подстановке вместо $\mathbf{A}$ и φ потенциалов $\mathbf{A}'$ и φ', определенных согласно (16,2). Таким образом, преобразование потенциалов (16,1) не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, очевидно, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ входят только производные от $\mathbf{A}$ и φ и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряжение поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию (16,2) потенциалов; в частности, все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эту инвариантность мы назовем градиентной [2]) (по-немецки ее называют Eichinvarianz, по-английски — gauge invariance).

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному выбранному нами дополнительному условию (соотношению между ними). Подчеркиваем, что именно одному условию, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (16,2). В частности, всегда возможно выбрать потенциал поля так, чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю. Сделать векторный потенциал равным нулю, если он нулю не равен, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент $\mathbf{A}$).

---

[1]) При интегрировании полного дифференциала некоторой функции получается постоянная разность значений этой функции на пределах интеграла. При варьировании интеграла эта постоянная исчезает.

[2]) Это название предложено В. А. Фоком.

§ 17. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле попрежнему равно согласно (15,5) $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Постоянное электрическое поле равно согласно (15,4)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{17,1}$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал попрежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; именно к нему можно прибавить градиент от любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется. Энергия заряда находится по известной формуле

$$\mathscr{E} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L,$$

где для L мы должны взять выражение (14,4). С помощью этого выражения мы находим для полной энергии $\mathscr{E}$ заряда в поле

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{17,2}$$

Таким образом, благодаря наличию поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим то существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. В связи с формулой $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и с (17,1) это значит, что магнитное поле не влияет на энергию зарядов. Энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это стоит в связи с тем, что, как упоминалось в конце § 15, магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным. Выразим скалярный потенциал однородного электрического поля через напряженность поля **E**. Легко убедиться в том, что для однородного поля

$$\varphi = -\mathbf{Er}, \tag{17,3}$$

так как, поскольку $\mathbf{E} = \text{const.}$, $-\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}(\mathbf{Er}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} + [\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{r}] = \mathbf{E}$ (напоминаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$).

Выразим теперь векторный потенциал однородного магнитного поля через напряженность этого поля **H**. Легко убедиться, что потенциал **A** может быть написан в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Hr}]. \tag{17,4}$$

Действительно, помня, что $\mathbf{H} = \text{const.}$, мы находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напоминаем, что $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{17,5}$$

(ось Z выбрана вдоль направления **H**). Легко убедиться, что и при таком выборе **A** имеет место $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Если скорость движения заряда мала по сравнению с c, то его функция Лагранжа есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{Av} - e\varphi$$

[см. (15,7)]. Пусть заряд находится в постоянном однородном магнитном поле. Тогда $\varphi = 0$, а **A** определяется равенством (17,4). Функция Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c}[\mathbf{Hr}]\mathbf{v}. \tag{17,6}$$

Если перейти от неподвижной системы координат к равномерно вращающейся, то, согласно известной формуле, скорость $\mathbf{v}'$ частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью **v** в первоначальной системе посредством соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega r}],$$

где **r** — радиус-вектор частицы, а **Ω** — угловая скорость вращающейся системы. Функция Лагранжа для частицы в такой системе координат есть

$$L = \frac{mv'^2}{2} = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - [\mathbf{\Omega r}])^2.$$

Если положить здесь

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{H}, \tag{17,7}$$

то при достаточно слабом магнитном поле (когда можно пренебречь квадратом H^2) эта функция Лагранжа совпадает с (17,6). Таким образом, мы приходим к выводу, что поведение частицы в постоянном однородном слабом магнитном поле тождественно с ее поведением во вращающейся системе координат. Заметим, что угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ этой системы называется ларморовой частотой.

§ 18. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля выберем за ось X. Если начальная скорость (скорость в момент времени $t = 0$) есть $\mathbf{v}_0$, то заряд, очевидно, будет двигаться все время в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}_0$. Эту плоскость выберем за плоскость XY. Тогда уравнения движения (15,6), т. е.

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E},$$

(точка над $\mathbf{p}$ обозначает дифференцирование по t) примут вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0;$$

отсюда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \tag{18,1}$$

Начало отсчета времени (т. е. момент $t = 0$) мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия $\mathscr{E}$ частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна, согласно (10,13), $\mathscr{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (18,1), находим в нашем случае

$$\mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Согласно (10,5) скорость частицы $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c}{\mathscr{E}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ мы имеем, следовательно, в нашем случае

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

где $\mathscr{E}_0 = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$ есть энергия при $t = 0$. Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \tag{18,2}$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю.

Для определения y имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_yc^2}{\mathscr{E}} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0c}{eE}\,\mathrm{argsh}\,\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{18,3}$$

Уравнение траектории находим, выражая из (18,3) t через y и подставляя в (18,2). Это дает:

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{18,4}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0 = mv_0$, $\mathscr{E}_0 = mc^2$ и $\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}$ в (18,4) можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{c}$. Тогда мы получаем с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2}y^2, \tag{18,5}$$

т. е. заряд движется по параболе, — результат, хорошо известный из классической механики.

§ 19. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось Z. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, поставив вместо импульса согласно (10,6)

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы, которая, как мы знаем из § 17, в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{19,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \qquad \dot{v}_z = 0, \tag{19,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{19,3}$$

Умножим второе из уравнений (19,2) на i и сложим с первым. Мы находим

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{19,4}$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (19,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости XY, остающаяся при движении постоянной.

Из (19,4) находим, интегрируя еще раз,

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{19,5}$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{19,6}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость XY). Из третьего уравнения (19,2) находим $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t; \tag{19,7}$$

x_0, y_0, z_0 — начальные координаты частицы.

Из (19,5) и (19,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r, определяемым (19,6). Скорость частицы при этом постоянна. В частном случае, когда $v_{0z} = 0$, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.

Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота вращения электрона в плоскости, перпендикулярной полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить $\mathscr{E} = mc^2$. Тогда частота ω превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{19,8}$$

Она равна удвоенной ларморовской частоте (17,7).

Задача

Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (в отсутствии поля) есть ω_0.

Решение: Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси Z) гласят:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, находим

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = -i\frac{eH}{mc}\dot{\zeta},$$

где $\zeta = x + iy$. Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Если поле H слабо, то эта формула переходит в

$$\omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

§ 20. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае наличия одновременно электрического и магнитного полей, однородных и постоянных. Мы ограничимся при этом случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Направление $\mathbf{H}$ выберем за ось Z, а плоскость, проходящую через векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, за плоскость YZ. Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned}\right\} \qquad (20,1)$$

Из третьего из этих уравнений видно, что вдоль оси Z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \qquad (20,2)$$

Умножая второе из уравнений (20,1) на i и складывая с первым, находим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

$\left(\omega = \frac{eH}{mc}\right)$. Интеграл этого уравнения, где $\dot{x} + i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $\frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{H}$. Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная a, вообще говоря, комплексная. Написав ее в виде $a = be^{i\alpha}$ с действительными b и α, мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе α любое значение. Выберем ее так, чтобы a

было действительно. Тогда, отделяя в $\dot{x}+i\dot{y}$ мнимую и действительную части, находим

$$\dot{x}=a\cos\omega t+c\,\frac{E_y}{H},\quad \dot{y}=-a\sin\omega t.$$

В момент времени $t=0$ скорость направлена по оси X; обозначим ее значение в этот момент посредством v_0. Тогда имеем $a=v_0-\frac{cE_y}{H}$, так что

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\cos\omega t+\frac{cE_y}{H},\\ \dot{y}&=-\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\sin\omega t.\end{aligned}\tag{20,3}$$

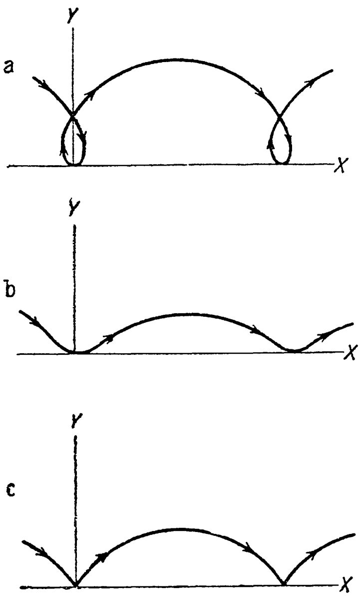

Рис. 5.

Мы видим, что скорость частицы является периодической функцией времени. Среднее значение скорости легко найти, замечая, что среднее значение $\overline{\cos\omega t}=\overline{\sin\omega t}=0$:

$$\overline{\dot{x}}=\frac{eE_y}{H},\quad \overline{\dot{y}}=0.\tag{20,4}$$

Таким образом, средняя скорость в направлении оси Y равна нулю, а средняя скорость вдоль оси X, т. е. перпендикулярно к магнитному и электрическому полям, отлична от нуля.

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим [из (20,3) или (20,4)], что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H}\ll 1,\tag{20,5}$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя еще раз уравнения (20,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t=0$ было $x=y=0$, получаем

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)\sin\omega t+\frac{cE_y}{H}t,\\ y&=\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)(\cos\omega t-1).\end{aligned}\right\}\tag{20,6}$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой эти уравнения определяют собой так называемую трохоиду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина $\left(v_0-\frac{cE_y}{H}\right)$, чем абсолютная величина $\frac{cE_y}{H}$, проекция траектории частицы на плоскость XY имеет вид, изображенный соответственно на рис. 5, a и рис. 5, b.

Если скорость $v_0=0$, то (20,6) переходит в

$$x=\frac{cE_y}{\omega H}(\omega t-\sin\omega t),\quad y=\frac{cE_y}{\omega H}(1-\cos\omega t),\tag{20,7}$$

т. е. проекция траектории на плоскость XY является циклоидой (рис. 5, с).

§ 21. Тензор электромагнитного поля

В § 15 мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа (14,4), написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия (14,1), написанного в четырехмерных обозначениях.

Принцип наименьшего действия гласит

$$\delta S=\delta\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}A_i dx_i\right)=0.\tag{21,1}$$

Замечая, что $ds=\sqrt{-dx_i^2}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S=\int\left[-mc\,\delta ds+\frac{e}{c}\delta(A_i dx_i)\right]=\int\left(mc\frac{dx_i\delta dx_i}{ds}+\frac{e}{c}A_i\delta dx_i+\right.$$
$$\left.+\frac{e}{c}\delta A_i\delta dx_i\right)=\int\left(mc\frac{dx_i d\delta x_i}{ds}+\frac{e}{c}A_i d\delta x_i+\frac{e}{c}\delta A_i dx_i\right)=0.$$

Первые два члена в подинтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене подставим $\frac{dx_i}{ds}=u_i$, где u_i — компоненты 4-скорости. Тогда

$$\int\left(-mc\,du_i\delta x_i-\frac{e}{c}\delta x_i dA_i+\frac{e}{c}\delta A_i dx_i\right)+\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x_i\Big|=0.$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных пределах, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a=(\delta x_i)_b=0$. Далее:

$$\delta A_i=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_k,\quad dA_i=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}dx_k,$$

и поэтому

$$\int\left(-mc\,du_i\delta x_i-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_i dx_k+\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}dx_i\delta x_k\right)=0.$$

Напишем в первом члене $du_i=\frac{du_i}{ds}ds$, во втором и третьем $dx_i=u_i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k (это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование). Тогда

$$\int\left[-mc\frac{du_i}{ds}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k\right]\delta x_i ds=0.$$

В виду произвольности δx_i отсюда следует, что подинтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k.\tag{21,2}$$

Введем обозначение

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{21,3}$$

Тензор F_{ik} называется тензором электромагнитного поля. Уравнения движения (21,2) тогда принимают вид:

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u_k. \tag{21,4}$$

Эти четыре (для $i=1, 2, 3, 4$) уравнения и являются уравнениями движения заряда в электромагнитном поле в четырехмерном виде.

Из определения тензора F_{ik} следует, что

$$F_{ik}=-F_{ki}, \tag{21,5}$$

т. е. тензор электромагнитного поля антисимметричен. Поэтому $F_{ik}=0$ при $i=k$.

Подставляя в (21,3) $A_{1,2,3}=A_{x,y,z}$, $A_4=i\varphi$, легко находим следующие значения отдельных компонент тензора F_{ik}:

$$\begin{gathered}F_{11}=F_{22}=F_{33}=F_{44}=0,\\ F_{12}=-F_{21}=H_z, \qquad F_{14}=-F_{41}=-iE_x,\\ F_{13}=-F_{31}=-H_y, \qquad F_{24}=-F_{42}=-iE_y,\\ F_{23}=-F_{32}=H_x, \qquad F_{34}=-F_{43}=-iE_z.\end{gathered}$$

Это можно написать в виде таблицы:

$$(F_{ik})=\begin{pmatrix}0 & H_z & -H_y & -iE_x\\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y\\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{pmatrix}. \tag{21,6}$$

Таким образом, компоненты напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Из (21,6) видно, что пространственные компоненты тензора F_{ik} (т. е. компоненты с $i, k=1, 2, 3$) связаны с магнитным полем. Именно, компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ образуют трехмерный антисимметричный тензор 2-го ранга. Это значит, как известно, что вектор $\mathbf{H}$ есть аксиальный вектор (см. § 6).

Что касается компонент электрического поля $\mathbf{E}$, то они являются временными компонентами F_{ik} (одно из i или k равно 4). Вектор $\mathbf{E}$ есть, очевидно, обычный, т. е. полярный, вектор.

С помощью (21,6) и (7,2) легко убедиться в том, что первые три уравнения (21,4) тождественны с уравнением движения (15,6), а четвертое — с уравнением (15,9). То, что соответственно этому только три из них независимы, можно легко обнаружить, непосредственно умножив обе части (21,4) на u_i. Тогда в виду (7,6) и (21,5) обе части уравнения тождественно обратятся в нуль.

Задачи

1. Определить движение заряда, движущегося со скоростью, сравнимой со скоростью света в параллельных электрическом и магнитном полях.

Решение: Выбирая ось Z вдоль направления полей, находим уравнения движения (21,4) в виде (вводим постоянную $\lambda = e/mc^2$):

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = cE\lambda \dot{t}, \quad c\ddot{t} = E\lambda \dot{z}$$

(точки над x, y, z, t означают здесь дифференцирование по s), с дополнительным условием $u_i^2 = \dot{x}_i^2 = -1$: Эта система распадается на две пары независимых уравнений. Интегрируя их и выбирая соответствующим образом произвольные постоянные (начало отсчета s, начало и направление осей X и Y), находим траекторию в параметрическом виде:

$$x = \frac{a}{\lambda H}\sin \lambda H s, \quad y = \frac{a}{\lambda H}\cos \lambda H s, \quad z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\operatorname{ch}\lambda E s, \quad ct = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\operatorname{sh}\lambda E s$$

(a — произвольная постоянная).

2. То же во взаимно перпендикулярных и равных по абсолютной величине электрическом и магнитном полях.

Решение: Выбирая ось Z по направлению $\mathbf{H}$, а ось Y по направлению $\mathbf{E}$, находим уравнение движения (вводим постоянную $\mu = \frac{eH}{mc^2} = \frac{eE}{mc^2}$):

$$\ddot{x} = \mu \dot{y}, \quad \ddot{y} = \mu(c\dot{t} - \dot{x}), \quad \ddot{z} = 0, \quad c\ddot{t} = \mu \dot{y}.$$

Интегрируя эти уравнения (с условием $u_i^2 = -1$) и выбирая соответствующим образом начало отсчета s и начало координат, находим:

$$x = -\frac{\mu^2 a s^3}{6} + bs, \quad y = -\frac{\mu a s^2}{2}, \quad z = s\sqrt{a^2 - 2ab - 1}, \quad ct = -\frac{\mu^2 a s^3}{6} + (b-a)s$$

(a и b — произвольные постоянные).

§ 22. Преобразование Лоренца для поля

В этом параграфе мы найдем формулы преобразования для поля, т. е. формулы, по которым можно определить поле в одной инерциальной системе отсчета, зная это же поле в другой системе.

Формулы, преобразованные для потенциалов, находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (6,2). Помня, что компоненты вектора A_i есть $A_{x,y,z}$, $i\varphi$, легко находим

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{22,1}$$

Формулы преобразования для компонент тензора F_{ik} можно было бы найти по общей формуле (6,4) преобразования 4-тензоров. Проще, однако, поступить следующим образом. Вспомним, что переход от системы отсчета K к системе K', движущейся относительно K вдоль оси X, эквивалентен повороту в плоскости $X\tau$ в четырехмерном пространстве x, y, z, τ (см. § 4). Компоненты же тензора преобразуются как произведение двух соответствующих координат. Координаты $x_2 = y$

и $x_3 = z$ при этом преобразовании не меняются. По этой же причине не меняется и F_{23}:

$$F_{23} = F'_{23}. \tag{22,2}$$

Далее, опять-таки, поскольку координаты y и z не меняются, компоненты F_{12}, F_{13} и F_{42}, F_{43} преобразуются просто, соответственно, как координаты $x_1 = x$ и $x_4 = \tau$. Согласно формулам (6,4) легко находим:

$$\left.\begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{42} = \frac{F'_{42} + i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ F_{13} &= \frac{F'_{13} - i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{43} = \frac{F'_{43} + i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c}}}. \end{aligned}\right\} \tag{22,3}$$

Для того, чтобы определить преобразование компоненты F_{14}, заметим следующее: как известно, антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства (ср. в § 6 о тензорах e_{iklm} и $e_{\alpha\beta\gamma}$), остается инвариантным при вращении системы координат в этом пространстве. Вращение системы координат x, y, z, τ в плоскости $X\tau$ можно, очевидно, рассматривать как вращение двухмерной системы координат x, τ в двухмерном же пространстве. Тензор с составляющими $F_{11} = F_{44} = 0$, $F_{14} = -F_{41}$ как раз является в этой системе тензором ранга, равного числу измерений. Поэтому при вращении в плоскости $X\tau$

$$F_{14} = F'_{14}. \tag{22,4}$$

Подставим теперь в (22,2—4) вместо компонент F_{ik} их выражения через компоненты полей **E** и **H** согласно (21,6). Мы находим тогда следующие формулы преобразования электрического поля:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{22,5}$$

и для магнитного поля:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{22,6}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.

Формулы преобразования (22,5), (22,6) значительно упрощаются для случая $V \ll c$. С точностью до членов порядка V/c мы имеем тогда из (22,5) и (22,6):

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \tag{22,7}$$

Формулы обратного преобразования из K' в K получаются непосредственно из (22,6) или (22,7) изменением знака у V.

Если в системе K' магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$, то, как легко убедиться на основании (22,5) и (22,6), между электрическим и магнитным полями в системе K существует соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{VE}]. \tag{22,8}$$

Если же в K' $\mathbf{E}' = 0$, то в системе K

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{VH}]. \tag{22,9}$$

§ 23. Уравнение Гамильтона-Якоби для заряда в поле

В § 21 при нахождении уравнений движения в четырехмерной форме мы нашли следующее выражение для вариации действия [см. (21,1)]:

$$\delta S = \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x_i \Big| + \int \left(-mc\, du_i \delta x_i - \frac{e}{c} \delta x_i dA_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i\right).$$

Если мы рассматриваем истинные траектории, то второй член тождественно равен нулю. Тогда первый член, где один из пределов рассматривается как переменный, дает дифференциал действия как функцию от координат. Таким образом,

$$\delta S = \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x_i. \tag{23,1}$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{23,2}$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ есть 4-вектор обобщенного импульса частицы; обозначим его через P_i. Пользуясь выражениями для составляющих 4-скорости и 4-потенциала, находим следующее выражение для компонент P_i:

$$P_\alpha = p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha, \quad P_4 = i \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}} + e\varphi}{c}; \tag{23,3}$$

$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Пространственные компоненты вектора P_i образуют трехмерный вектор обобщенного импульса (15,2). Временная же компонента есть, очевидно, как и в § 10, $i\mathcal{E}/c$, где $\mathcal{E}$ — полная энергия заряда в поле.

В виду того, что согласно (7,3) $u_i^2 = -1$, мы имеем

$$m^2c^2u_i^2 = \left(P_i - \frac{e}{c}A_i\right)^2 = -m^2c^2. \tag{23,4}$$

В трехмерных обозначениях

$$\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2. \tag{23,5}$$

Энергия, выраженная через обобщенный импульс, есть функция Гамильтона для заряда в поле

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{23,6}$$

Эти формулы легко получить и непосредственно из функции Лагранжа (14,4) по общей формуле

$$\mathcal{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L,$$

где результат должен быть выражен через импульс.

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$$

[см. (15,7)]. В этом приближении $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\varphi. \tag{23,7}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби получается, как известно, заменой в функции Гамильтона компонент обобщенного импульса P_i производными $\frac{\partial S}{\partial x_i}$. Таким образом, из (23,4) мы имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c}A_i\right)^2 = -m^2c^2, \tag{23,8}$$

или в трехмерных обозначениях

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{23,9}$$

Задачи

1. Написать вариационный принцип для траектории частицы (принцип Мопертюи) в электромагнитном поле в релятивистской механике.

Решение: Принцип Мопертюи заключается, как известно из механики, в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то ее траектория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int \mathbf{P}d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы. Подставляя $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем

$$\delta \int \left(p\,dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r} \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2 + m^2c^2 = \left(\frac{\mathscr{E} - e\varphi}{c}\right)^2$, находим окончательно

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mathscr{E} - e\varphi}{c}\right)^2 - m^2c^2}\; dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

2. Найти изменение движения заряженной частицы, находящейся в магнитном поле при медленном изменении этого поля.

Решение: Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, является периодическим, то адиабатическим инвариантом является интеграл $I = \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r}$, взятый по полному периоду движения, — в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость). Подставляя $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем

$$I = \oint \mathbf{P}_t\,d\mathbf{r} = \oint \mathbf{p}_t\,d\mathbf{r} + \frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{r}.$$

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса:

$$I = 2\pi r p_t + \frac{e}{c}H\pi r^2,$$

где r — радиус орбиты. Подставляя $r = \frac{cp_t}{eH}$ [см. (19,6)], находим

$$I = \frac{3\pi c p_t^2}{eH}.$$

Отсюда видно, что при изменении H тангенциальный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$. Что касается импульса p_z вдоль направления $\mathbf{H}$, то, если при изменении поля не возникает электрического поля, параллельного $\mathbf{H}$ (например, при изменении магнитного поля в соленоиде), он, очевидно, не меняется.

§ 24. Изотропия времени

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению и замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны, т. е. время изотропно. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (15,6) не меняются, если произвести замену.

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \qquad (24,1)$$

При этом согласно (15,4) и (15,5) скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \tag{24,2}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением **H**.

§ 25. Инварианты поля

Из компонент тензора электромагнитного поля можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для нахождения всех таких инвариантов поступим аналогично тому, как определяются инварианты симметрического тензора второго ранга. Если A_{ik} есть такой тензор, то надо, как известно, приравнять нулю детерминант

$$|A_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения представляют собой главные значения симметричного тензора A_{ik} и являются его инвариантами; то же самое относится, очевидно, и к коэффициентам при различных степенях в этом уравнении, которые и выбираются обычно в качестве основных инвариантов.

Для антисимметричного тензора, каковым является тензор F_{ik}, операция приведения к диагональному виду не имеет, очевидно, смысла. Можно, однако воспользоваться описанным способом для нахождения инвариантов такого тензора, причем, конечно, корни λ_1, λ_2 не будут обладать смыслом главных значений тензора.

Соответственно сказанному, напишем уравнение

$$|F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0.$$

Легко видеть, что в нем будут присутствовать только члены с четными степенями λ. Действительно, определитель не меняется при перестановке строк и столбцов. Кроме того, определитель четного ранга не изменится при изменении знака всех величин. Поэтому, в виду антисимметричности F_{ik}

$$|F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = |F_{ki} - \lambda\delta_{ki}| = |-F_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = |F_{ik} + \lambda\delta_{ik}|.$$

Соответственно этому в уравнении для λ будет только два отличных от нуля коэффициента — при λ^2 и при λ^4, т. е. антисимметричный тензор 2-го ранга характеризуется всего двумя инвариантами.

Подставляя выражения (21,6) для компонент тензора F_{ik}, без труда раскрываем детерминант и находим

$$\lambda^4 + \lambda^2(H^2 - E^2) - (\mathbf{HE})^2 = 0$$

(при раскрытии детерминанта удобно выбрать оси координат таким образом, чтобы одна из осей, скажем ось Z, была направлена вдоль **H**, а вектор **E** лежал бы в плоскости YZ). Таким образом, инвариантами являются величины

$$H^2 - E^2 = \text{invar.}, \tag{25,1}$$

$$\mathbf{EH} = \text{invar.} \tag{25,2}$$

Приведенный вывод показывает, что эти два инварианта являются единственными независимыми. Всякий другой инвариант может быть написан как функция этих двух.

Инварианты (25,1) и (25,2), написанные в четырехмерной форме, имеют, как легко убедиться, вид

$$F_{ik}^2, \tag{25,3}$$

$$e_{iklm} F_{ik} F_{lm}, \tag{25,4}$$

где e_{iklm} есть совершенно антисимметричный единичный тензор 4-го ранга (см. § 6).

Необходимо отметить, что величина $e_{iklm} F_{ik} F_{lm}$ (или, иначе, **EH**), строго говоря, является не скаляром, а псевдоскаляром; это видно как из его четырехмерного написания (произведение тензора F_{ik} на его дуальный, см. § 6), так и из трехмерного (произведение аксиального вектора **H** на полярный вектор **E**). Истинным скаляром является $(\mathbf{EH})^2$.

Из инвариантности приведенных двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета [в силу (25,2)]. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины **E** и **H** равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе [в силу (25,1)].

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы **E** и **H** получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и **EH** имели заданные определенные значения. В частности, можно всегда найти такую инерциальную систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$ и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = E_0 H_0$$

можно найти значения **E** и **H** в этой системе отсчета ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчета).

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае **E** и **H** во всех системах отсчета равны и взаимно перпендикулярны.

Если $\mathbf{EH} = 0$, то можно всегда найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), т. е. поле или чисто электрическое, или чисто магнитное. Наоборот, если в какой-нибудь системе отсчета $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$, то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны.

ГЛАВА IV
УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 26. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$ [(15,5) и (15,4)] для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ легко получить уравнения для этих полей, т. е. соотношения, содержащие только $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Мы должны при этом исключить из выражений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Для этого определим $\operatorname{rot}\mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю, а $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Следовательно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26,1}$$

Беря дивергенцию от обеих частей уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{26,2}$$

Уравнения (26,1) и (26,2) называются первой парой уравнений Максвелла. Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем $\left(\text{производную } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$, но не определяют производной $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Уравнения (26,1) и (26,2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div}\mathbf{H}\,dV = \oint \mathbf{H}\,d\mathbf{f},$$

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому интегрируется слева. На основании (26,2) мы имеем

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{f} = 0. \tag{26,3}$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется потоком вектора через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (26,1) мы находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\,d\mathbf{f}. \tag{26,4}$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также электродвижущей силой в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Уравнения Максвелла (26,1) и (26,2) можно написать и в четырехмерных обозначениях. На основании определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{26,5}$$

При $i=k=l$ это уравнение выполняется тождественно (так как $F_{ik}=0$ при $i=k$). При одинаковых двух из i, k, l это уравнение тривиально в силу антисимметричности F_{ik}. Остальные четыре уравнения (при $i\neq k\neq l$), как легко убедиться, подставляя выражения (21,6) для F_{ik}, являются не чем иным, как уравнениями (26,1) и (26,2). Таким образом, (26,5) есть первая пара уравнений Максвелла, написанная в четырехмерных обозначениях.

§ 27. Действие для электромагнитного поля

Действие S для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S=S_f+S_m+S_{mf}. \tag{27,1}$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц. Эта часть, очевидно, есть не что иное, как действие для свободных частиц, т. е. для частиц в отсутствии поля. Действие для свободной частицы есть, как мы знаем, $-mc\int ds$ [см. (9,1)]. Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действия для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m=-\sum mc\int ds. \tag{27,2}$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Как мы видели в § 14, она имеет вид $\frac{e}{c}\int A_k dx_k$ или, в случае нескольких частиц,

$$S_{mf}=\sum\frac{e}{c}\int A_k dx_k. \tag{27,3}$$

В каждом из членов этой суммы A_k есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма S_m+S_{mf} есть уже известное нам действие (14,1) для заряда в поле, которое мы писали раньше просто как S.

Наконец, S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. S_f есть действие для поля в отсутствии зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле, S_f, как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он делается, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части $S_m + S_{mf}$ действия мы нашли только два уравнения поля (27,1) и (27,2), которые еще недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля S_f мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому принципу суперпозиции. Этот принцип заключается в том, что если один заряд создает одно поле, а другой — другое, то поле, создаваемое обоими факторами вместе, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии S_f должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными, — уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подинтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия S_f не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в S_{mf} эта неоднозначность была не существенна). Поэтому S_f должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля F_{ik} [1]). Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра. К тому же, как было выше отмечено, этот скаляр, стоящий под знаком интеграла, должен быть квадратичным по F_{ik}.

[1]) Подинтегральная функция в S_f не должна содержать производных от F_{ik}, так как функция Лагранжа может содержать кроме координат системы только их первые производные по времени, а роль координат (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы A_k поля; это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Мы уже знаем, что существует всего только один скаляр второй степени, который можно составить из F_{ik} (§ 25); им является F_{ik}^2 (величина $e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$ есть псевдоскаляр).

Таким образом, S_f должно иметь вид:

$$S_f = a\int\int F_{ik}^2 dV\,dt, \quad dV = dx\,dy\,dz,$$

где интеграл берется по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами; a есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит $F_{ik}^2 = 2(H^2 - E^2)$; поле $\mathbf{E}$ содержит производную $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Но легко видеть, что $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ должно входить в действие с положительным знаком (а потому и E^2 с положительным знаком). Действительно, если бы $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ входило в S_f со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом интервале времени) всегда можно было бы сделать $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ сколь угодно большим, а S_f — отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением. S_f не могло бы, следовательно, иметь минимума, как этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным.

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой гауссовой системой единиц; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$.

Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -{}^1/_4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда π), но зато π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат π, а закон Кулона имеет простой вид.

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega, \quad d\Omega = dx\,dy\,dz\,d\tau. \tag{27,4}$$

При этом мы написали $d\Omega$ вместо $dV\,dt$ и потому разделили все выражение еще на ic. В трехмерном виде

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt\,. \tag{27,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа для поля есть

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами есть

$$S = -\sum\int mc\,ds + \sum\int \frac{e}{c}A_k dx_k + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Заметим, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 28. Четырехмерный вектор тока

До сих пор мы всегда рассматривали только точечные заряды. Все имеющиеся в природе заряды и являются в действительности точечными, ибо, как мы видели в § 8, всякая элементарная частица должна рассматриваться как точка, а всякая сложная частица состоит из отдельных элементарных.

Однако, в целях математического удобства часто рассматривают заряд, как распределенный в пространстве непрерывно. Тогда можно ввести „плотность заряда“ ρ так, что $\rho\, dV$ есь заряд, находящийся в объеме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл $\int \rho\, dV$ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho\, dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций[1]) в следующем виде:

$$\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{28,1}$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор

[1]) δ-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x - a)\, dx = f(a);$$

в частности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$: областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой δ-функция не исчезает).

Приведем еще два равенства с δ-функциями; смысл этих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если заряда e_A. Эта функция согласно свойствам δ-функции действительно равна нулю везде, кроме точек $\mathbf{r}=\mathbf{r}_A$, а интеграл

$$\int \rho\, dV = \sum_A e_A,$$

где справа стоит сумма всех зарядов, находящихся в данном объеме.

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность ρ не есть, вообще говоря, инвариант, — инвариантом является лишь произведение $\rho\, dV$.

Умножим равенство $de=\rho\, dV$ с обеих сторон на dx_i:

$$de\, dx_i = \rho\, dV\, dx_i = \rho\, dV\, dt \frac{dx_i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx_i — 4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но $dV dt$ надо рассматривать как скаляр (см. § 6), а потому $\rho \frac{dx_i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j_i) носит название 4-вектора тока:

$$j_i = \rho \frac{dx_i}{dt}. \tag{28,2}$$

Три первые компоненты этого вектора образуют обычный пространственный вектор с составляющими $\rho\frac{dx}{dt}$, $\rho\frac{dy}{dt}$, $\rho\frac{dz}{dt}$, т. е. вектор

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \tag{28,3}$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Вектор $\mathbf{j}$ называется вектором плотности тока. Четвертая составляющая 4-вектора тока есть $ic\rho$. Таким образом,

$$j_{1,2,3} = j_{x,y,z}, \quad j_4 = ic\rho. \tag{28,4}$$

Полный заряд, находящийся во всем пространстве, как уже указывалось, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по всему пространству. Мы можем написать этот интеграл в четырехмерном виде:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{ic}\int j_4\, dV = \frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i, \tag{28,5}$$

где интегрирование производится по всей четырехмерной гиперплоскости, перпендикулярной оси x_4 (очевидно, что такое интегрирование и означает интегрирование по всему трехмерному пространству).

их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x).$$

Подобно тому как $\delta(x)$ определена для одной переменной x, можно ввести трехмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. В качестве такой функции можно, очевидно, взять произведение $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

Вообще, интеграл $\frac{1}{ic}\int j_i dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть, очевидно, сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Введем 4-вектор тока в выражение (27,7) для действия. Именно, преобразуем второй член в этом выражении. Согласно сказанному в настоящем параграфе мы можем ввести вместо точечных зарядов e непрерывное распределение зарядов с плотностью ρ. Тогда, очевидно, вместо приведенного выражения мы должны написать $\frac{1}{c}\int \rho A_i dx_i dV$, заменив сумму по зарядам интегралом ко всему объему. Переписав его в виде $\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx_i}{dt} A_i dV dt$, мы видим, что этот член равен

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega. \tag{28,6}$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Полный заряд, находящийся в некотором объеме, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по этому объему. Изменение этого заряда со временем определяется производной $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV$.

С другой стороны, это изменение, например, за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за единицу времени из данного объема наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathfrak{f}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathfrak{f}$. Вектор $d\mathfrak{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть следовательно, $\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho \mathbf{v}\, d\mathfrak{f}. \tag{29,1}$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29,1) есть так называемое уравнение непрерывности, выражающее собой закон сохранения заряда, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho \mathbf{v}$ есть плотность тока [см. (28,3)], можно переписать (29,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\int \mathbf{j}\, d\mathfrak{f}. \tag{29,2}$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Для этого применим к правой части (29,2) теорему Гаусса:

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV.$$

Подставляя это в (29,2), находим $\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0$. Поскольку это должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подинтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{29,3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (28,1) для ρ в виде δ-функций автоматически удовлетворяет уравнению (29,3). Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Ток $\mathbf{j}$ есть тогда

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Найдем производную $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется $\mathbf{r}_0$. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}.$$

Но $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}$ заряда. Далее, поскольку ρ есть функция от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div} \rho\mathbf{v}$$

(скорость $\mathbf{v}$ заряда не зависит, конечно, от $\mathbf{r}$). Таким образом, мы приходим к уравнению (29,3).

В четырехмерном виде уравнение непрерывности (29,3) приобретает, как легко проверить, вид:

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \tag{29,4}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что полный заряд, находящийся во всем пространстве, может быть написан в виде $\frac{1}{ic}\int j_i\, dS_i$, где интегрирование производится по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$. В другой момент времени полный заряд изобразится таким же интегралом, взятым по другой гиперплоскости, перпендикулярной оси x_4. Легко проверить, что уравнение (29,4) действительно приводит к закону сохранения заряда, т. е. к тому, что интеграл $\int j_i dS_i$ одинаков, по какой бы гиперплоскости $x_4 = \text{const}$. мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j_i\, dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j_i\, dS_i$, где интеграл берется по всей замкнутой гиперплоскости, охватывающей 4-объем между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удаленной „боковой“ гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,11) можно преобразовать этот интеграл по 4-объему между двумя гиперплоскостями и, воспользовавшись (29,4), имеем:

$$\oint j_i\, dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i}\, d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j_i\, dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x_4 = \text{const.}$), включающим в себе все (трехмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\int j_i\, dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля с помощью принципа наименьшего действия движение зарядов мы должны считать заданным и должны варьировать только поле, т. е. потенциалы; при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (28,6) равна нулю, а во втором не должен варьироваться ток j_i. Таким образом,

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{ic^2} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{16\pi i c}\, \delta\left(F_{ik}^2\right)\right) d\Omega = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\delta F_{ik}\right\} d\Omega = 0.$$

Подставляя $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, имеем

$$\delta S = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i\, \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik}\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\right\} d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим

$$\delta S = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, т. е., иначе говоря, применяем теорему Гаусса:

$$\delta S=\frac{1}{ic}\int\left\{\frac{1}{c}j_i-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right\}\delta A_i\,d\Omega+\frac{1}{4\pi ic}\int F_{ik}\delta A_i\,dS_k\Big|. \quad (30,1)$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность (так как интегрируется по всему полю), где поле равно нулю. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия поле в эти моменты задано. Таким образом, второй член в (30,1) равен нулю, и мы находим

$$\frac{1}{ic}\int\left(\frac{1}{c}j_i-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right)\delta A_i\,d\Omega=0.$$

В виду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при δA_i, т. е.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i. \quad (30,2)$$

Эти четыре ($i=1$, 2, 3, 4) уравнения и есть вторая пара уравнений Масквелла, написанная в четырехмерной форме. Напишем эти уравнения в трехмерной форме. Первое из них ($i=1$) есть

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x}+\frac{\partial F_{12}}{\partial y}+\frac{\partial F_{13}}{\partial z}+\frac{1}{ic}\frac{\partial F_{14}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F_{ik} из (21,6), находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_x.$$

Вместе с двумя следующими ($i=2$, 3) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (30,3)$$

Наконец, четвертое уравнение ($i=4$) дает

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x}+\frac{\partial iE_y}{\partial y}+\frac{\partial iE_z}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}ic\rho, \quad (30,4)$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho.$$

Уравнения (30,3) и (30,4) и есть вторая пара уравнений Максвелла, написанная в векторных обозначениях. Вместе с первой парой уравнений Максвелла они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей, или, как говорят, электродинамики.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30,4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=\oint\mathbf{E}\,d\mathbf{f},$$

находим

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{30,5}$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

находим

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \tag{30,6}$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30,7}$$

называют „током смещения". Из (30,6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) d\mathbf{f}, \tag{30,8}$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (29,3). Беря с обеих сторон (30,3) дивергенцию, находим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, согласно (30,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (29,3). В четырехмерном виде из (30,2) мы имеем:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

Но в силу антисимметричности тензора F_{ik} имеем, подставляя $F_{ik} = -F_{ki}$ и меняя затем обозначения индексов:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k \partial x_i},$$

откуда следует, что $\dfrac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$, и мы приходим к уравнению непрерывности (29,4), написанному в четырехмерном виде.

§ 31. Плотность энергии и вектор Пойнтинга

Умножим обе части уравнения (30,3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26,1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно. Тогда мы будем иметь

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-\operatorname{div}[\mathbf{EH}]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

носит название вектора Пойнтинга.

Проинтегрируем (31,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV=-\int\mathbf{jE}\,dV-\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int\mathbf{jE}\,dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (15,9)

$$e\mathbf{vE}=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{\text{кин}}$$

$\left(\text{где } \mathscr{E}_{\text{кин}}=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)$. Тогда (31,3) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\}=0. \tag{31,4}$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя) всех частиц; первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31,5}$$

мы можем поэтому назвать „плотностью энергии" электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV+\sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\}=-\oint \mathbf{S}\,d\mathfrak{f}, \tag{31,6}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\oint \mathbf{S}\,d\mathfrak{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока, — количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности.

§ 32. Тензор энергии-импульса

В предыдущем параграфе мы вывели выражение для энергии электромагнитного поля. Выведем это выражение, вместе с выражением для импульса поля, в четырехмерной форме. При этом мы будем для простоты рассматривать пока электромагнитное поле без зарядов. Имея в виду дальнейшее применение (к гравитационным полям), а также упрощение выводов, мы проделаем вывод в общем виде, не специализируя конкретного рода системы. Именно, рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S=\int \Lambda\left(q,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)dV\,dt=\frac{1}{ic}\int \Lambda\,d\Omega \tag{32,1}$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих систему, и их производных по координатам и времени (для электромагнитного поля величинами q являются компоненты 4-потенциала); для краткости мы пишем здесь всего одну такую величину q. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda\,dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как „плотность“ функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является то, что Λ не зависит явно от x_i, — подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

„Уравнения движения“ (т. е. уравнение поля, если речь идет о каком-либо поле) получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования S. Имеем $\left(\text{для краткости обозначаем } q_{,i}\equiv\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)$:

$$\delta S=\int\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\,\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right)d\Omega=$$
$$=\int\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta q\right)-\delta q\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\right]d\Omega=0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме

Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим тогда следующие „уравнения движения“:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=0 \tag{32,2}$$

(везде, конечно, подразумевается суммирование по индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно, пишем:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}.$$

Подставляя сюда (32,2) и замечая, что $\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 q}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}$, находим

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right)q_{,i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

С другой стороны, можно написать $\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_k}$, так что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_k}\delta_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}q_{,i}\right).$$

Вводя обозначение

$$T_{ik}=q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}-\delta_{ik}\Lambda, \tag{32,3}$$

можно написать полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{32,4}$$

Заметим, что если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (32,3) надо, очевидно, писать

$$T_{ik}=\sum_l q^{(l)}_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}}-\delta_{ik}\Lambda. \tag{32,5}$$

Но в § 29 мы видели, что уравнение вида $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}=0$, т. е. равенство нулю 4-дивергенции вектора, эквивалентно утверждению, что сохраняется интеграл от этого вектора по гиперповерхности $\int A_k\,dS_k$, заключающей в себе все трехмерное пространство. Очевидно, что аналогичное обстоятельство имеет место и для дивергенции тензора; уравнение $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$ равносильно утверждению, что сохраняется вектор P_i, компоненты которого равны интегралам от T_{ik} по гиперповерхности:

$$P_i=\text{const.}\int T_{ik}\,dS_k.$$

Этот вектор и должен быть отождествлен с 4-вектором импульса системы. Постоянный множитель перед интегралом мы выберем так, чтобы четвертая компонента вектора P_i, в соответствии с прежним.

определением, была равна энергии системы, умноженной на i/c. Для этого заметим, что P_4 можно написать в виде

$$P_4 = \text{const.} \int T_{4k}\, dS_k = \text{const.} \int T_{44} dV,$$

если интегрирование производить по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$. С другой стороны, согласно (32,3) имеем

$$T_{44} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda \qquad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Эта величина, в соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, должна быть рассматриваема как плотность энергии системы, и поэтому $\int T_{44} dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, мы должны положить $\text{const.} = i/c$ и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P_i = \frac{i}{c} \int T_{ik} dS_k. \tag{32,6}$$

Тензор T_{ik} называется тензором энергии-импульса системы.

Необходимо заметить, что определение тензора T_{ik} по существу не однозначно. Действительно, к тензору T_{ik}, определенному равенством (32,3), можно прибавить величину вида $\frac{\partial}{\partial x_l} \psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} — любой тензор, антисимметричный по индексам k, l. При такой замене новый тензор T_{ik} тоже будет удовлетворять уравнению (32,4), так как мы имеем тождественно $\frac{\partial^2 \psi_{ikl}}{\partial x_k \partial x_l} = 0$. Полный 4-импульс системы P_i при этом вообще не изменится, так как согласно (6,12) мы можем написать

$$\int \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_l} - dS_l \frac{\partial \psi_{ikl}}{\partial x_k} \right) = \int \psi_{ikl}\, df_{kl},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), „огибающей“ гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и поскольку поле или материя на бесконечности отсутствует, этот интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и должно быть, величиной, определенной однозначно. Для однозначного определения тензора T_{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы 4-тензор момента импульса (см. § 13) системы выражался через 4-импульс посредством

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = \int (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\, dS_l, \tag{32,7}$$

т. е. так, чтобы не только весь момент системы, но и его „плотность“ выражались через „плотность“ импульса по обычной формуле.

Легко определить, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса. Для этого заметим, что закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подинтегрального выражения в M_{ik}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = 0.$$

Замечая, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il}$ и что $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = 0$, находим отсюда

$$\delta_{il} T_{kl} - \delta_{kl} T_{il} = T_{ki} - T_{ik} = 0,$$

или

$$T_{ik} = T_{ki}, \qquad (32,8)$$

т. е. тензор энергии-импульса должен быть симметричным.

Заметим, что T_{ik}, определенный формулой (32,4), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым путем прибавления выражения вида $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ с соответствующим ψ_{ikl}.

В дальнейшем (§ 90) мы увидим, что существует простой способ непосредственного получения симметричного тензора T_{ik}. Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (32,6) по гиперплоскости $x_4 = \text{const.}$, то P_i приобретает вид

$$P_i = \frac{i}{c}\int T_{i4}\, dV, \qquad (32,9)$$

где интегрирование производится по всему пространству (трехмерному). Поскольку пространственные компоненты P_i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть умноженная на i/c ее энергия, то компоненты $\frac{i}{c} T_{\alpha 4}$ можно назвать „плотностью импульса", а T_{44} — „плотностью энергии" (т. е. соответственно импульсом и энергией единицы объема).

Для выяснения смысла остальных компонент T_{ik} напишем уравнение сохранения (32,4) в трехмерном виде

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{ic}\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \qquad (32,10)$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему V пространства. Из первого имеем

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}\, dV + \int \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}\, dV = 0,$$

или, преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}\, dV = -ic \oint T_{4\alpha}\, df_\alpha, \qquad (32,11)$$

где интеграл справа берется по поверхности, огибающей объем V. Слева стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V; отсюда видно, что выражение, стоящее справа, есть количество энергии, протекающей через границу объема V, а $icT_{4\alpha}$ есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения находим аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int T_{\alpha 4}dV = \oint T_{\alpha\beta}df_\beta. \qquad (32,12)$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $-\oint T_{\alpha\beta}df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из объема V. Таким образом, $T_{\alpha\beta}$ есть плотность потока импульса. Плотность потока энергии есть вектор, плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную оси x_β).

§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина, стоящая под знаком интеграла (32,1), равна согласно (27,4)

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{kl}^2 = -\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)^2.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k. Подставляя это в определение (32,5) тензора T_{ik}, имеем

$$T_{ik} = \frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} - \delta_{ik}\Lambda.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от Λ напишем вариацию $\delta\Lambda$. Имеем

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right) = -\frac{1}{8\pi}F_{kl}\left(\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \delta\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right),$$

или, переставляя индексы и пользуясь тем, что $F_{kl} = -F_{lk}$:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi}F_{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} = -\frac{1}{4\pi}F_{kl},$$

и поэтому

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F_{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_{ik}F_{lm}^2.$$

Для того чтобы сделать это выражение симметричным по индексам i и k, прибавим к нему член $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl}$; этот член имеет вид производной $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, так как

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l} - A_i\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l}$$

[согласно уравнениям Максвелла (30,2) в местах, где нет зарядов, $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l}=0$], а потому, как было выяснено в предыдущем параграфе, действительно может быть прибавлен к тензору энергии-импульса. Поскольку $\frac{\partial A_l}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_l}=F_{il}$, то мы находим окончательно следующее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}-F_{il}F_{kl}\right). \qquad (33,1)$$

Легко убедиться в том, что тензор T_{ik} электромагнитного поля удовлетворяет требованию $T_{ik}=T_{ki}$; кроме того, он обладает тем свойством, что сумма его диагональных членов равна нулю:

$$T_{ii}=0. \qquad (33,2)$$

Выразим компоненты тензора T_{ik} через электрическое и магнитное поля. С помощью выражений (21,6) для компонент F_{ik} легко найти следующие выражения для T_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\beta}&=\frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta-\frac{1}{2}(E^2+H^2)\delta_{\alpha\beta}\right), \\ T_{4\alpha}&=-\frac{i}{c}S_\alpha, \qquad T_{44}=W, \end{aligned}\right\} \qquad (33,3)$$

где $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$ есть плотность энергии поля, а $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — вектор Пойнтинга. Трехмерный тензор $T_{\alpha\beta}$ называется тензором натяжений Максвелла.

До сих пор мы рассматривали поля без зарядов. При наличии частиц общая энергия и импульс поля вместе с частицами равны сумме энергии и импульса того и другого, т. е. полный 4-импульс равен

$$P_i=\frac{i}{c}\int T_{ik}dS_k+\sum p_i, \qquad (33,4)$$

где $p_i=mcu_i$ — 4-импульс частицы, а сумма берется по всем частицам, находящимся в поле. В трехмерном виде мы можем написать для импульса поля и зарядов

$$\int\frac{\mathbf{S}}{c^2}dV+\sum\mathbf{p}$$

и для энергии

$$\int W\,dV+\sum\mathscr{E}.$$

Нетрудно проверить, что P_i, определенные согласно (33,4), действительно сохраняются. Вычислим изменение dP_i вектора P_i за время dt. Это можно сделать аналогично тому, как мы вычисляли изменение заряда в § 29. В некоторый момент времени t P_i определяется формулой (33,4), где интегрирование производится по всей гиперплоскости $t=\text{const}$. В момент времени $t+dt$ P_i определяется той же формулой, где теперь интегрирование производится по гиперплоскости $t+dt=\text{const}$, а импульсы частиц берутся в момент времени $t+dt$. Разность значений интеграла $\int T_{ik}dS_k$ на этих гиперплоскостях можно написать в виде интеграла $\oint T_{ik}dS_k$ по гиперповерхности, окружающей четырехмерный объем между этими гиперплоскостями (на бесконечности поле равно нулю и потому интеграл по „боковой гиперповерхности“ исчезает). Таким образом,

$$dP_i = \frac{i}{c}\oint T_{ik}dS_k + \sum dp_i,$$

или, по теореме Гаусса,

$$dP_i = \frac{i}{c}\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\Omega + \sum dp_i, \tag{33,5}$$

где интеграл берется по 4-объему между двумя бесконечно близкими гиперплоскостями.

Второй член в (33,5) можно преобразовать, воспользовавшись уравнениями движения заряда в поле (21,4):

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik}u_k,$$

откуда, умножая на ds:

$$dp_i = \frac{e}{c} F_{ik}dx_k = \frac{e}{c} F_{ik}\frac{dx_k}{dt} dt.$$

Вводя плотность заряда ρ, имеем

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c}\int \rho F_{ik}\frac{dx_k}{dt} dV = \frac{dt}{c}\int F_{ik}j_k dV,$$

где j_k — 4-вектор тока. Но полученное выражение можно написать в виде

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2}\int F_{ik}j_k d\Omega,$$

где интеграл берется по тому же 4-объему, как и в первом члене в (33,5). Таким образом,

$$dP_i = \frac{i}{c}\int \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c} F_{ik}j_k\right) d\Omega.$$

С другой стороны, можно показать, с помощью уравнений Максвелла, что подинтегральное выражение здесь исчезает, так что dP_i равно нулю, т. е. P_i действительно сохраняется. Для этого пишем, воспользовавшись выражением (33,1),

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial F_{lm}^2}{\partial x_k}\delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} F_{il}F_{kl}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} F_{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} - \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k} F_{il}\right).$$

Подставляя сюда согласно уравнениям Максвелла (26,5) и (30,2)

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_l, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}$$

и помня, что тензор F_{ik} антисимметричен, имеем

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} F_{lm} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_m} F_{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{kl} + \frac{4\pi}{c} F_{il} j_l\right).$$

Перестановкой индексов легко показать, что первые три члена справа взаимно сокращаются, и мы приходим к требуемому результату:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c} F_{ik} j_k. \tag{33,6}$$

Это уравнение, являющееся обобщением уравнения (32,4), является математическим выражением закона сохранения энергии и импульса электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами. Четвертая компонента этого уравнения, как легко убедиться, совпадает с уравнением (31,1).

Задача

Показать, что главные значения тензора T_{ik} равны $-W, -W, +W, +W$.

§ 34. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Рассмотрим систему не взаимодействующих друг с другом частиц. Их общий 4-импульс можно написать в интегральном виде, введя соответствующим образом определенный тензор энергии-импульса. Для этого будем описывать распределение масс в пространстве при помощи „плотности массы“, аналогично тому, как мы описываем распределение точечных зарядов при помощи их плотности. Аналогично формуле (28,1) для плотности зарядов плотность масс можно написать в виде

$$\mu = \sum_A m_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{34,1}$$

где $\mathbf{r}_A$ — радиусы-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы.

„Плотность 4-импульса“ частиц напишется в виде $\mu c u_i$. Как мы знаем, эта плотность представляет собой компоненты $\frac{i}{c} T_{4\alpha}$ тензора энергии-импульса, т. е. $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$. Но плотность массы μ является временной компонентой 4-вектора $\frac{\mu}{ic}\frac{dx_k}{dt}$ (аналогично плотности зарядов, см. § 28). Поэтому тензор энергии-импульса системы не взаимодействующих частиц есть

$$T_{ik} = -\mu c \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{dt} = -\mu c u_i u_k \frac{ds}{dt}. \tag{34,2}$$

Этот тензор, как это и должно быть, симметричен.

Вычислим сумму диагональных членов тензора энергии-импульса (34,2), т. е. величину T_{ii}. Имеем

$$T_{ii} = -\mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt}.$$

Подставляя сюда $ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ и вместо μ — сумму (34,1), находим

$$T_{ii} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A). \tag{34,3}$$

Мы видим, в частности, что $T_{ii} > 0$.

Легко убедиться в том, что выражение (34,3) для T_{ii} имеет место для любой системы взаимодействующих друг с другом заряженных частиц. Действительно, тензор энергии-импульса такой системы можно было бы написать в виде суммы тензора (34,2) и тензора энергии-импульса, создаваемого частицами электромагнитного поля. Но для электромагнитного поля всегда $T_{ii}=0$ (§ 33). Таким образом, мы можем высказать утверждение, что для любой физической системы

$$T_{ii} \geqslant 0, \tag{34,4}$$

причем знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.

Рассмотрим теперь некоторое макроскопическое тело и определим его тензор энергии-импульса. Из уравнения (32,12)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int T_{\alpha 4}\,dV = \oint T_{\alpha\beta}df_\beta$$

мы видим, что выражение в правой части можно рассматривать как α-ую компоненту силы, которую тело оказывает на ограничивающую его поверхность (поскольку слева стоит уменьшение α-ой компоненты импульса тела в единицу времени). Иначе говоря, $-T_{\alpha\beta}df_\beta$ есть α-ая компонента силы, действующей на элемент этой поверхности. Воспользуемся теперь системой отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. В такой системе отсчета имеет место закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится [1]). Поэтому мы можем написать $-T_{\alpha\beta}df_\beta = pdf_\alpha$, откуда

$$T_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}p,$$

где p — давление тела. Что касается компонент $T_{4\alpha}$, изображающих плотность импульса, то для данного элемента объема тела в рассматриваемой системе отсчета они равны нулю. Компонента же T_{44}, как всегда, равна плотности энергии тела, которую мы обозначим здесь посредством ρc^2; ρ есть при этом, очевидно, плотность массы тела, т. е. масса его единицы объема [2]). Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета тензор T_{ik} (для данного участка тела) имеет вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix}. \tag{34,5}$$

[1]) Строго говоря, закон Паскаля имеет место только для жидкостей и газов. Однако для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях ничтожны по сравнению с теми давлениями, которые могут играть роль в теории относительности, так что их учет не представляет интереса.

[2]) Обозначение плотности массы и плотности заряда одинаковой буквой ρ не может привести к недоразумению, так как мы нигде не пользуемся ими одновременно.

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса макроскопического тела в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u_i макроскопического движения элемента объема тела. В той системе отсчета, где данный элемент покоится, компоненты его 4-скорости равны $u_\alpha=0$, $u_4=i$. Выражение для T_{ik} должно быть выбрано так, чтобы в этой системе он приобретал вид (34,5). Легко проверить, что таковым является

$$T_{ik}=-(p+\rho c^2)u_iu_k-p\delta_{ik}. \tag{34,6}$$

Это выражение и определяет тензор энергии-импульса макроскопического тела.

В случае, если скорости всех частиц, входящих в состав макроскопического тела, малы по сравнению со скоростью света (скорость же макроскопического движения может быть произвольной), выражение для T_{ik} упрощается.

Именно, в этом случае в плотности энергии ρc^2 можно пренебречь всеми ее частями, малыми по сравнению с энергией покоя, т. е. можно писать μc^2 вместо ρc^2, где μ — сумма масс частиц, находящихся в единице объема тела (в отличие от точной плотности массы тела ρ, включающей в себя также и массу, происходящую от энергии микроскопического движения частиц в теле и энергии их взаимодействия). Что касается давления, определяемого энергией микроскопического движения молекул, то оно в рассматриваемом случае, конечно, тоже мало по сравнению с плотностью энергии покоя μc^2. Таким образом, мы находим для T_{ik} выражение

$$T_{ik}=-\mu c^2u_iu_k. \tag{34,7}$$

Из выражения (34,6) находим $T_{ii}=\rho c^2-3p$. Общее свойство (34,4) тензора энергии-импульса любой системы показывает теперь, что для давления и плотности макроскопического тела всегда имеет место неравенство

$$p<\frac{\rho c^2}{3}. \tag{34,8}$$

Сравним соотношение $T_{ii}=\rho c^2-3p$ с общей формулой (34,3), имеющей место, как мы видели, для любых систем. Поскольку мы рассматриваем сейчас макроскопическое тело, то выражение (34,3) надо усреднить по всем значениям $\mathbf{r}$ в единице объема. В результате находим

$$\rho c^2-3p=\sum m_Ac^2\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}} \tag{34,9}$$

(суммирование производится по частицам, находящимся в единице объема [1]).

---

[1]) В случае малых скоростей разложение этой формулы приводит к соотношению $3p=\overline{u}+2\sum\frac{1}{2}m_Av_A^2$, т. е. давление равно третьей части суммы средней потенциальной энергии взаимодействия частиц в единице объема ($\overline{u}$) и удвоенной их кинетической энергии. Это же соотношение можно получить непосредственно из закона Кулона при помощи так называемой теоремы вириала.

Применим полученные формулы к идеальному газу, который мы предположим состоящим из одинаковых частиц. Поскольку частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, можно воспользоваться формулой (34,2), предварительно усреднив ее. Таким образом, для идеального газа

$$T_{ik} = -nmc\overline{\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{ds}},$$

где n — число частиц в единице объема, а черта обозначает усреднение по всем частицам. Если в газе нет никакого макроскопического движения, то мы имеем с другой стороны для T_{ik} выражение (34,5). Сравнение обеих формул приводит к уравнениям:

$$\rho = nm\overline{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}, \quad p = \frac{nm}{3}\overline{\frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \qquad (34,10)$$

Эти уравнения определяют плотность и давление релятивистского идеального газа через скорости частиц; вторая из них заменяет собой известную формулу нерелятивистской кинетической теории газов.

Как известно из термодинамики, давление равно взятой с обратным знаком производной от энергии тела по его объему V (при постоянной энтропии σ): $p = -\left(\frac{\partial(\rho c^2 V)}{\partial V}\right)_\sigma$ (ρc^2 — энергия единицы объема). Подставляя это в (34,8), находим неравенство

$$\left[\frac{\partial}{\partial V}(\rho V^{4/3})\right]_\sigma \geqslant 0. \qquad (34,11)$$

Знак равенства достигается здесь при скоростях, равных c; другими словами, $\rho V^{4/3}$ стремится при $v \to c$ к постоянному пределу:

$$\rho V^{4/3} = \mathrm{const}. \qquad (34,12)$$

Поскольку число частиц n в единице объема тела пропорционально $1/V$, то мы можем иначе написать для предельного случая

$$\rho = \mathrm{const.} \cdot n^{4/3}. \qquad (34,13)$$

Такая же формула имеет место для давления, поскольку в этом предельном случае $p = \rho c^2/3$. Наконец, для химического потенциала ζ, являющегося производной от энергии по числу частиц, имеем

$$\zeta = \mathrm{const.} \cdot n^{1/3}. \qquad (34,14)$$

§ 35. Макроскопическое движение

Уравнения $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$, выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса. Примененные к макроскопическим телам они дают уравнения гидродинамики. Однако, для того чтобы получить полностью эти уравнения движения из уравнений $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$, необходимо учесть дополнительно закон сохранения числа частиц, не содержащийся в этих уравнениях.

Выведем уравнение, выражающее закон сохранения числа частиц (уравнение непрерывности) для макроскопических тел. Для этого введем (аналогично 4-вектору тока зарядов) 4-вектор „тока частиц" n_i. Его временная компонента есть число частиц в единице объема (умноженное на i), а три пространственные компоненты составляют трехмерный тензор тока частиц. 4-вектор n_i можно написать в виде

$$n_i=\frac{n_4}{ic}\frac{dx_i}{dt},$$

аналогично выражению (28,2) для j_i. Переписав это выражение в виде

$$n_i=\frac{n_4}{ic}\frac{ds}{dt}\frac{dx_i}{ds},$$

мы видим, что $\frac{n_4}{ic}\frac{ds}{dt}$ есть скаляр, являющийся не чем иным, как плотностью числа частиц в той системе отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. Обозначая ее посредством n, имеем, следовательно,

$$n_i=nu_i, \tag{35,1}$$

где u_i — 4-скорость макроскопического движения.

Уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц, можно написать непосредственно по аналогии с (29,4), не производя заново всего вывода:

$$\frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i}=0. \tag{35,2}$$

Перейдем теперь к нахождению уравнений движения из уравнений $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0$, где для T_{ik} мы должны теперь воспользоваться выражением (34,6). Дифференцируя $T_{ik}=-(\rho c^2+p)u_iu_k-\delta_{ik}p$, находим

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-u_i\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-(p+\rho c^2)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k-{}_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}=0.$$

Но $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}=\frac{du_i}{ds}$, где производная берется вдоль мировой линии движения данного элемента объема тела. Таким образом,

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-u_i\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-(p+\rho c^2)\frac{du_i}{ds}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=0. \tag{35,3}$$

Умножим это уравнение на u_i, т. е. „спроецируем" его на направление 4-скорости. Помня, что $u_i^2=-1$, а $u_i\frac{du_i}{ds}=0$ (см. § 7), находим

$$\frac{\partial(p+\rho c^2)u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_k}u_k=0.$$

Переписываем это в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{p+\rho c^2}{n}nu_k\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x_k}nu_k=0$$

и в силу (35,2) получаем отсюда

$$nu_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{p+\rho c^2}{n}\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x_k}\right]=0.$$

Введем вместо числа частиц n в единице объема молекулярный объем $V=1/n$ (т. е. объем, приходящийся на одну молекулу), а вместо плотности энергии ρc^2 — энергию $\varepsilon=V\rho c^2$, отнесенную к одной молекуле. Тогда

$$nu_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(pV+\varepsilon)-V\frac{\partial p}{\partial x_k}\right]=nu_k\left[p\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\right]=0.$$

Но, как известно из термодинамики, $p\,dV+d\varepsilon=T\,d\sigma$, где T — температура, а σ — энтропия тела (отнесенная к одной молекуле). Таким образом, находим

$$nT\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}=0,$$

или

$$\frac{d\sigma}{ds}=0. \qquad (35,4)$$

Это уравнение выражает неизменность энтропии данного элемента тела при его движении, т. е. адиабатичность процесса. Этот результат естественен, поскольку наше выражение для тензора энергии-импульса по существу относилось к идеальной жидкости, так как мы не учитывали необратимых процессов, происходящих при движении, — теплопроводности и вязкости. Учет этих явлений привел бы к тому, что и в системе отсчета, где данный элемент тела покоится, компоненты $T_{4\alpha}$ были бы отличны от нуля, изображая собой поток тепла, а к $T_{\alpha\beta}$ пришлось бы прибавить дополнительный поток импульса, связанный с внутренним трением. Надо, однако, иметь в виду, что в релятивистской механике эти эффекты всегда играют малую роль, поскольку потоки энергии и импульса, связанные с теплопроводностью и вязкостью, всегда малы по сравнению с потоками энергии и импульса, связанными с движением самой материи со скоростями порядка скорости света.

„Спроецируем“ теперь уравнение (35,3) на направление, „перпендикулярное“ к u_i. Такая проекция вектора $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ равна, очевидно, $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}+u_iu_k\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}$; она дает нуль при скалярном умножении на u_i. Простое вычисление приводит к

$$(p+\rho c^2)\frac{du_i}{ds}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_iu_k\frac{\partial p}{\partial x_k}. \qquad (35,5)$$

Уравнение (35,5) вместе с (35,2) и (35,4) представляет собой полную систему гидродинамических уравнений в релятивистской механике.

Наконец, выведем соотношение, выражающее закон возрастания энтропии в релятивистской термодинамике. Для этого надо ввести 4-вектор „тока энтропии“ σ_i, определяемый аналогично 4-векторам n_i и j_i.

Полную энтропию тела можно написать в четырехмерном виде как интеграл

$$\int \sigma_i dS_i,$$

взятый по гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство (см. § 28). В § 29 мы видели, что условием сохранения такого интеграла являлось бы уравнение $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$. Из приведенного в § 29 вывода видно, что условием его монотонного возрастания является уравнение

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \geqslant 0. \qquad (35,6)$$

Это уравнение и выражает собой закон возрастания энтропии. Интеграл $\int \sigma_i dS_i$, взятый по некоторой гиперповерхности, меньше (или равен) такого же интеграла, взятого по любой гиперповерхности, не пересекающей данной и лежащей от нее в положительном направлении оси времени.

У идеальной жидкости в (35,6) стоит знак равенства. Соответственно этому при рассмотрении возрастания энтропии нельзя писать просто $\sigma_i = n\sigma u_i$ (где σ — энтропия, отнесенная к одной частице), а необходимо учитывать также и наличие потока тепла. Именно, в системе отсчета, где данный элемент потока покоится, поток энтропии надо положить равным потоку тепла, деленному на температуру.

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ПОЛЕ

§ 36. Закон Кулона

Для постоянного электрического или, как говорят, электростатического поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad (36,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \qquad (36,2)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал посредством соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \qquad (36,3)$$

Подставляя (36,3) в (36,1), мы находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \qquad (36,4)$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона. В частности, в пустоте, т. е. там, где $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{36,5}$$

Из последнего уравнения следует, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того, чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть выполнено (36,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиусу-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (36,1) в интегральной форме (30,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R, проведенную вокруг заряда e, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда мы находим

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде поле $\mathbf{E}$ можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{36,6}$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля есть, очевидно,

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{36,7}$$

Если мы имеем систему зарядов, то поле, создаваемое этой системой, равно согласно принципу суперпозиции сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{R_A},$$

где R_A — расстояние от заряда e_A до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\,dV, \tag{36,8}$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36,4) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = e/R$. Мы находим тогда

$$\Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{36,9}$$

§ 37. Электростатическая энергия зарядов

Рассмотрим систему зарядов и определим ее энергию. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2 dV,$$

где $\mathbf{E}$ есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U=-\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi\, dV=-\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\,dV+\frac{1}{8\pi}\int \varphi\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $\mathbf{E}\varphi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ (36,1), находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U=\frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \tag{37,1}$$

Для системы точечных зарядов e_A можно вместо интеграла написать сумму по зарядам

$$U=\frac{1}{2}\sum_A e_A\varphi_A, \tag{37,2}$$

где φ_A — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд e_A.

Согласно закону Кулона, если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем электрону) и полю, производимому им самим, мы приходим к выводу, что заряд должен обладать некоторой „собственной" потенциальной энергией, равной $e\varphi/2$, где e — потенциал производимого заряда поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем (см. § 8), что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же $\varphi=e/R$ его поля в точке $R=0$ обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной „собственной" энергией, а следовательно, и бесконечной массой (равной энергии, деленной на c^2). Физическая бессмысленность этого результата указывает на то, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что ее применимость должна быть ограничена определенными пределами.

Заметим, что в виду бесконечности получающихся из электродинамики „собственной" энергии и массы в электродинамике нельзя поставить вопроса о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы).

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной собственной энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем заключить, что электродинамика теряет свою применимость при переходе к очень малым размерам. Можно поэтому поставить вопрос о том, до расстояний какого порядка величины применима электродинамика. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя mc^2.

Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами R_0, то его собственная потенциальная энергия была бы порядка e^2/R_0. Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка, $e^2/R_0 \sim mc^2$, находим

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \tag{37,3}$$

Эти размеры (их называют „радиусом" электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, впрочем, иметь в виду, что в действительности пределы излагаемой здесь электродинамики (ее обычно называют „классической") лежат еще гораздо выше благодаря квантовым явлениям.

Вернемся снова к формуле (37,2). Стоящие в ней потенциалы φ_A, согласно закону Кулона, равны

$$\varphi_A = \sum \frac{e_B}{R_{AB}}, \tag{37,4}$$

где R_{AB} — расстояние между зарядами e_A, e_B. Выражение для энергии (37,2) состоит из двух частей. Во-первых, оно содержит бесконечную постоянную — „собственную" энергию зарядов, — не зависящую от их взаимного расположения. Вторая часть есть энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Только эта часть и имеет, очевидно, физический интерес. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_A \varphi'_A, \tag{37,5}$$

где

$$\varphi'_A = \sum_{A \neq B} \frac{e_B}{R_{AB}} \tag{37,6}$$

есть потенциал в точке нахождения e_A, создаваемый всеми зарядами, кроме e_A. Иначе можно написать

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{37,7}$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{37,8}$$

§ 38. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом e, движущимся равномерно со скоростью V. Неподвижную систему отсчета будем называть системой K; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой K'. Пусть заряд находится в начале координат системы K'; система K' движется относительно K параллельно оси X; оси Y и Z параллельны Y' и Z'. В момент времени $t=0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K, следовательно, суть $x=Vt$, $y=z=0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}'$ и скалярным, равным $\varphi'=e/R'$, где $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$. В системе K согласно (22,1) при $\mathbf{A}'=0$:

$$\varphi=\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38,1}$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K. Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z$$

и отсюда

$$R'^2=\frac{(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{38,2}$$

Подставляя это в (38,1), находим

$$\varphi=\frac{e}{R^*}, \tag{38,3}$$

где введено обозначение

$$R^{*2}=(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{38,4}$$

Векторный потенциал в системе K [см. (22,1)] равен

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{38,5}$$

В системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'$ отсутствует, а электрическое

$$\mathbf{E}'=\frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

По формулам (22,5) находим

$$E_x=E'_x=\frac{ex'}{R'^3},\quad E_y=\frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad E_z=\frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда R', x', y', z', выраженные через x, y, z, находим

$$\mathbf{E}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{38,6}$$

где R — радиус-вектор от заряда e к точке с координатами x, y, z, где мы ищем поле (его компоненты равны $x - Vt$, y, z).

Это выражение для $\mathbf{E}$ можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиусом-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно, что $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\theta$, и потому $\mathbf{R}^{*2}$ (38,4) можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{38,7}$$

Тогда для $\mathbf{E}$ имеем

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{38,8}$$

Магнитное поле в системе K равно $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]$ [см. (22,8)]. Для скоростей $V \ll c$ имеем приближенно из (38,6) $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}$, и потому

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c}\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3}. \tag{38,9}$$

§ 39. Движение в кулоновском поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e'; мы предполагаем, что масса этого другого заряда настолько больше массы m, что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметрическом электрическом поле с потенциалом $\varphi = e'/r$.

Энергия (полная) $\mathscr{E}$ частицы равна [см. (23,5)]:

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{ee'}{r}.$$

Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то для импульса можно, как известно из механики, написать $p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$, где p_r — радиальная компонента импульса, а M — постоянный момент импульса частицы. Тогда

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{ee'}{r}. \tag{39,1}$$

Выясним вопрос о том, может ли частица при своем движении приближаться сколь угодно близко к центру. Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т. е. e и e' — одного знака. Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc > |ee'|$; действительно, в этом случае первый член в (39,1) всегда больше второго, и при $r \to 0$ правая сторона этого уравнения стремилась бы к бесконечности. Напротив, если $Mc < |ee'|$, то при

$r \to 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом, конечно, стремится к бесконечности p_r). Таким образом, если

$$cM < |ee'|, \tag{39,2}$$

то частица при своем движении „падает" на притягивающий ее заряд, — в противоположность тому, что в нерелятивистской механике такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M = 0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Задачи

1. Определить траекторию заряда e, движущегося в кулоновском поле с потенциалом e'/r.

Решение: Выберем полярные координаты r, φ в плоскости движения. Уравнение Гамильтона-Якоби (23,9) имеет вид

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{ee'}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Ищем S в виде

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r),$$

где $\mathcal{E}$ и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате находим

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - \frac{a}{r}}{c}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} \cdot dr,$$

где $a = ee'$. Траектория определяется уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$. Интегрирование приводит к следующим результатам:

a) если $Mc > |a|$:

$$(c^2M^2 - a^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2c^2(M^2c^2 - a^2)} \cos\varphi\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2M^2}} - \mathcal{E}a;$$

b) если $Mc < |a|$:

$$(a^2 - c^2M^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2c^2(a^2 - M^2c^2)} \operatorname{ch}\varphi\sqrt{\frac{a^2}{c^2M^2} - 1} + \mathcal{E}a;$$

c) если $Mc = |a|$:

$$\frac{2\mathcal{E}a}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2c^4 - \varphi^2\left(\frac{\mathcal{E}a}{cM}\right)^2.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновским полем.

Решение: Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 сек.) в данный элемент do телесного угла к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 сек. через 1 $см^2$ площади поперечного сечения пучка частиц).

Поскольку угол χ отклонения частицы при ее пролетании через поле определяется „прицельным расстоянием" ρ (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствии поля), то

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho\frac{d\rho}{d\chi}d\chi = \rho\frac{d\rho}{d\chi}\frac{do}{\sin\chi},$$

где $do = 2\pi\sin\chi d\chi$. Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд.

Компонента этой силы, перпендикулярная к направлению движения, приближенно равна $\frac{a}{r^2}\frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем

$$\chi = \frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\rho\,dt}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{a}{p\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ:

$$d\sigma = 4\left(\frac{a}{pv}\right)^2\frac{do}{\chi^4}.$$

§ 40. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с расстояниями между отдельными зарядами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиусы-векторы отдельных зарядов пусть будут $\mathbf{r}_A$. Определим потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиусом-вектором $\mathbf{R}_0$. Согласно результатам § 36 потенциал этого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|} \tag{40,1}$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ суть радиусы-векторы от зарядов e_A к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_A$). Для этого разложим (40,1) в ряд по степеням $\mathbf{r}_A/\mathbf{R}_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора $\mathbf{R}_0$). С точностью до членов первого порядка

$$\varphi = \frac{\sum e_A}{R_0} - \sum e_A\mathbf{r}_A\cdot\mathrm{grad}\,\frac{1}{R_0}. \tag{40,2}$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_A\mathbf{r}_A \tag{40,3}$$

носит название дипольного момента системы зарядов. Существенно отметить, что если сумма $\sum e_A$ всех зарядов равна нулю, то дипольный момент $\mathbf{d}$ не зависит от выбора начала координата. Действительно, радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}'_A$ одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом посредством соотношения

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор. Поэтому, если $\sum e_A = 0$, то дипольный момент в обеих системах

$$\mathbf{d}' = \sum e_A\mathbf{r}'_A = \sum e_A\mathbf{r}_A + \mathbf{a}\sum e_A = \mathbf{d}.$$

Если обозначить посредством e_A^+, $\mathbf{r}_A^+$ и $-e_A^-$, $\mathbf{r}_A^-$ положительные и отрицательные заряды системы и их радиусы-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\mathbf{d}=\sum e_A^+\mathbf{r}_A^+-\sum e_A^-\mathbf{r}_A^-=\mathbf{R}^+\sum e_A^+-\mathbf{R}^-\sum e_A^-, \tag{40,4}$$

где

$$\mathbf{R}^+=\frac{\sum e_A^+\mathbf{r}_A^+}{\sum e_A^+}, \quad \mathbf{R}^-=\frac{\sum e_A^-\mathbf{r}_A^-}{\sum e_A^-} \tag{40,5}$$

суть радиусы-векторы „центров зарядов“ — положительных и отрицательных. Если $\sum e_A^+=\sum e_A^-=e$, то

$$\mathbf{d}=e\mathbf{R}_{+-}, \tag{40,6}$$

где $\mathbf{R}_{+-}=\mathbf{R}^+-\mathbf{R}^-$ есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всегда два заряда, то $\mathbf{R}_{+-}$ есть радиус-вектор между ними.

Если сумма $\sum e_A=0$, то потенциал поля такой системы на больших расстояниях выглядит, как

$$\varphi=\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3} \tag{40,7}$$

(мы подставляем $\operatorname{grad}\frac{1}{R_0}=-\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}$). Зная потенциал, можно найти поле $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi=-\operatorname{grad}\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3}=-\frac{1}{R_0^3}\operatorname{grad}(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)-(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}.$$

Согласно формуле $\operatorname{grad}(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)=\mathbf{d}$ и замечая, что $\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}=-\frac{3\mathbf{R}_0}{R_0^5}$, находим для поля $\mathbf{E}$ выражение

$$\mathbf{E}=\frac{3(\mathbf{R}_0\mathbf{d})\mathbf{R}_0-R_0^2\mathbf{d}}{R_0^5}. \tag{40,8}$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой зарядов с $\sum e_A=0$, обратно пропорционален квадрату расстояния от системы, а напряженность поля — кубу расстояния.

§ 41. Мультипольный момент

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\varphi=\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\ldots$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^n$. Мы видели, что первый член $\varphi^{(1)}$ определяется суммой всех зарядов; второй $\varphi^{(2)}$, называемый иногда дипольным потенциалом системы, определяется дипольным моментом системы.

Третий член разложения $\varphi^{(3)}$ равен, очевидно,

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum ex_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}, \tag{41,1}$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α — вектора $\mathbf{R}_0$.

Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(3)}$.

В выражение (41,1) входит шесть величин $\sum ex_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.

$$\Delta\frac{1}{R_0}=\frac{\partial^2}{\partial X_\beta^2}\frac{1}{R_0}=0.$$

Это равенство можно написать в виде

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=0.$$

Мы можем, поэтому, написать $\varphi^{(3)}$ в виде

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{41,2}$$

называется квадрупольным моментом системы.

Из определения $D_{\alpha\beta}$ вытекает, что сумма его диагональных компонент

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{41,3}$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С помощью $D_{\alpha\beta}$ можно написать

$$\varphi^{(3)}=D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}. \tag{41,4}$$

Совершенно аналогично можно было бы написать следующие члены разложения φ. n-ый член определяется тензором n-го ранга, составленным из зарядов и компонент их радиусов-векторов; эти тензоры называют мультипольными моментами системы.

§ 42. Система зарядов во внешнем поле

Мы рассмотрим теперь систему зарядов e_1, e_2, ..., находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством φ_A мы будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля в точке, где находится заряд e_A. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_A\varphi_A$; полная потенциальная энергия системы

$$U = \sum e_A \varphi_A .$$

Выберем опять систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор заряда e_A в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_A$. В этом разложении

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots$$

первый член есть

$$U^{(1)} = \varphi_0 \sum e_A, \tag{42,1}$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке (в начале координат).

Второй член разложения

$$U^{(2)} = \operatorname{grad} \varphi_0 \cdot \sum e_A \mathbf{r}_A .$$

$\operatorname{grad} \varphi_0$ есть значение градиента потенциала в начале координат; поскольку $\operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{E}$, то это есть не что иное, как напряженность $\mathbf{E}_0$ поля в начале координат. Вводя дипольный момент $\mathbf{d}$ системы, имеем

$$U^{(2)} = -\mathbf{d}\mathbf{E}_0. \tag{42,2}$$

Для однородного поля выражение $U^{(2)}$ вытекает также и непосредственно из выражения (17,3) для потенциала.

Следующий член разложения $U^{(3)}$ равен

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} .$$

Здесь мы, как и в § 41, опустили индексы, указывающие номер заряда; $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ — значения вторых производных от потенциала в начале координат; но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Поэтому мы можем написать $U^{(3)}$ в виде

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right),$$

или

$$U^{(3)} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \tag{42,3}$$

где $D_{\alpha\beta}$ — компоненты квадрупольного момента (см. § 41).

Предположим, что мы имеем две системы зарядов с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

Их взаимное расстояние при этом велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1,$$

где $\mathbf{E}_1$ — поле первой системы. Подставляя для $\mathbf{E}_1$ выражение (40,8), находим

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2) R^2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{R})(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}, \tag{42,4}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом

$$U = e\frac{\mathbf{dR}}{R^3}, \tag{42,5}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, направленный от диполя (системы с равной нулю суммой зарядов) к заряду (системе с суммой зарядов, равной e). Мы не будем выводить аналогичных выражений для взаимодействия квадруполя (системы с равными нулю полным зарядом и дипольным моментом) с зарядом, диполем и квадруполем; укажем только, что соответствующие потенциальные энергии обратно пропорциональны 3-й, 4-й и 5-й степеням расстояния R.

§ 43. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими стационарное движение. Под этим подразумевается, что заряды при своем движении не приходят из бесконечности и не уходят в бесконечность, а движутся все время в некоторой конечной области пространства. Кроме того, предположим, что импульсы всех зарядов тоже остаются все время конечными. Тогда все величины меняются только в конечных интервалах своих значений, и представляет интерес рассматривать средние (по времени) их значения. В частности, мы можем рассмотреть среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами, которое будет теперь уже функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того, чтобы найти уравнения, определяющие среднее поле $\mathbf{H}$, усредним по времени уравнения Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Первое из них дает просто

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43,1}$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю[1]). Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\,\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,2}$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Введем средний векторный потенциал $\overline{\mathbf{A}}$

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Подставим это в уравнение (43,2). Поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$, мы находим

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}} - \Delta\overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{43,3}$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобрѐтает вид

$$\Delta\overline{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,4}$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (43,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (36,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока $\overline{\mathbf{j}}/c$. По аналогии с решением (36,6) уравнения Пуассона мы можем непосредственно написать

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV, \tag{43,5}$$

где R — расстояние от точки, в которой мы ищем $\overline{\mathbf{A}}$ до элемента объема dV.

В формуле (43,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо $\mathbf{j}$ произведение $\rho\mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (43,5) R является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается

---

[1]) Пусть f есть такая величина. Тогда среднее значение производной $\frac{df}{dt}$ за некоторый интервал времени T есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}\,dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку $f(t)$ меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении T среднее значение $\frac{df}{dt}$ действительно стремится к нулю.

усреднению. Если же написать вместо интеграла $\int \frac{\mathbf{j}}{R}\, dV$ сумму $\sum \frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}$, то R_A здесь являются радиусами-векторами отдельных частиц, меняющихся при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}}, \tag{43,6}$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

Зная $\mathbf{A}$, можно найти и магнитное поле

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\, dV.$$

Операция rot производится по координатам точки, в которой мы ищем поле. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать $\mathbf{j}$ постоянным. Применяя известную формулу

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}],$$

где f и $\mathbf{a}$ — любые скаляр и вектор, к произведению $\overline{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$, находим

$$\operatorname{rot} \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R} \cdot \overline{\mathbf{j}}\right] = \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3}\, dV \tag{43,7}$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку, где определяется поле). Это так называемый закон Био и Савара.

§ 44. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с размерами самой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 39. Обозначим опять радиусы-векторы отдельных зарядов посредством $\mathbf{r}_A$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ есть радиус-вектор от заряда e_A к точке, где определяется поле. Согласно (43,6) мы имеем для векторного потенциала:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|}}. \tag{44,1}$$

Как и в § 40, разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_A$. С точностью до членов первого порядка (опуская для краткости индекс A).

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e\overline{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla \frac{1}{R_0}\right)}.$$

В первом члене можно написать

$$\sum e\overline{\mathbf{v}} = \overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e\mathbf{r}$ равно нулю (см. § 43). Таким образом, для $\overline{\mathbf{A}}$ остается выражение

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0^3}\sum \overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

$\left(\text{мы подставили сюда } \nabla\frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)$.

Это выражение преобразуем следующим образом. Замечая, что $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, мы можем написать (помня, что $\mathbf{R}_0$ есть постоянный вектор)

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum e\,[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

При подстановке этого выражения в $\overline{\mathbf{A}}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) опять обратится в нуль, и мы получим

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum e\,[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}].$$

Введем вектор

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}], \tag{44,2}$$

называемый магнитным моментом системы. Тогда для $\overline{\mathbf{A}}$ мы получим выражение

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3}. \tag{44,3}$$

Зная векторный потенциал, легко найти магнитное поле. С помощью формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

находим

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\left[\overline{\mathfrak{m}}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right] = \overline{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Далее,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

и

$$(\mathfrak{m}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}(\mathfrak{m}\nabla)\,\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\mathfrak{m}\nabla\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\mathfrak{m}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\mathfrak{m}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0) - \overline{\mathfrak{m}}R_0^2}{R_0^5}. \tag{44,4}$$

Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, как электрическое поле через дипольный момент [см. (40,8)].

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum e\,[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc} \sum m\,[\mathbf{rv}].$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то $m\mathbf{v}$ есть импульс $\mathbf{p}$ заряда, и мы получаем

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \tag{44,5}$$

где $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

В § 17 мы видели, что функция Лагранжа для заряда в постоянном магнитном поле есть

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c}[\mathbf{Hr}]\,\mathbf{v} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c}[\mathbf{rv}]\,\mathbf{H}$$

[см. (17,6)]. Таким образом, дополнительный член L_H в функции Лагранжа, обусловленный постоянным магнитным полем, есть

$$L_H = \mathfrak{m}\mathbf{H}, \tag{44,6}$$

где $\mathfrak{m}$ — магнитный момент заряда. Такой же вид он имеет, очевидно, и для системы зарядов, где тогда $\mathfrak{m}$ будет магнитным моментом всей системы. Обращаем внимание на аналогию с электрическим полем — в однородном электрическом поле функция Лагранжа системы зарядов с общим зарядом, равным нулю, содержит член

$$L_E = \mathbf{d}\,\mathbf{E}$$

($\mathbf{d}$ — дипольный момент), являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (см. § 42).

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 45. Уравнение д'Аламбера

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Выпишем эти уравнения еще раз:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{45,1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{45,2}$$

Эти уравнения могут иметь отличное от нуля решение. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте в отсутствии зарядов, называют электромагнитными волнами. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей.

Раньше всего отметим, что такие электромагнитные поля в отсутствии зарядов необходимо должны быть переменными. Действительно, в противном случае $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ и уравнения (45,1—2) переходят в уравнения (36,1—2) и (43,1—2) постоянного поля, в которых, однако, теперь $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но решения этих уравнений, определенные формулами (36,8) и (43,5), при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу неоднозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы для скалярного потенциала осуществлялось равенство

$$\varphi = 0. \tag{45,3}$$

Тогда $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (45,2), находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{45,4}$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал $\mathbf{A}$ все же еще не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (без изменения при этом φ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{45,5}$$

Действительно, подставляя $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ в $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, имеем $\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{A} = \mathrm{const}$. Эту постоянную всегда можно сделать равной нулю прибавлением к $\mathbf{A}$ градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (45,4) приобретает теперь вид

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{45,6}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы электромагнитных волн. Оно называется уравнением д'Аламбера или волновым уравнением.

Применяя к этому уравнению операции rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, можно убедиться в том, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют таким же самым волновым уравнениям.

Оператор $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют оператором д'Аламбера и обозначают посредством знака $\Box$:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{45,7}$$

так что волновое уравнение можно написать в виде

$$\Box f = 0, \tag{45,8}$$

где f есть любая из компонент **A**, **E** или **H**. Оператор д'Аламбера можно написать в четырехмерном виде; очевидно, что

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{45,9}$$

§ 46. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, при котором поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются плоскими. В этом случае уравнения поля приобретают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{46,1}$$

где под f подразумевается или любая компонента векторов **E** или **H**.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

так что уравнение для f приобретает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ, находим

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя еще раз, находим $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \tag{46,2}$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(x - ct)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const.}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x.

Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const.}$, т. е.

$$x = \text{const.} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси X от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси X со скоростью, равной скорости света c.

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X. Легко сообразить, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном направлении оси X.

В § 45 было показано, что можно потенциал электромагнитной волны выбрать так, чтобы $\varphi = 0$, причем $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

поскольку все величины не зависят от y и z. Имея также в виду, что A_x содержит время t только в комбинации $x \pm ct$ с координатой x, мы видим отсюда, что $A_x = \text{const.}$, причем постоянная может всегда быть выбрана равной нулю, так как аддитивные постоянные в потенциалах вообще не имеют значения (см. § 16).

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси X, т. е. по направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $x - ct$. Из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

мы находим поэтому

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}(x - ct)] = [\nabla (x - ct)\, \mathbf{A}'] = [\mathbf{n}\mathbf{A}'], \tag{46,3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по $x - ct$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\mathbf{E}]. \tag{46,4}$$

Мы видим [из $\mathbf{E} = \mathbf{A}'$ и (46,4)], что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют поперечными. Из (46,4) видно, далее, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу.

Кроме того, из того же уравнения (46,4) следует, что электрическое и магнитное поля плоской волны равны друг другу по абсолютной величине.

Найдем еще поток энергии в плоской волне, т. е. ее вектор Пойнтинга. Имеем:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{nE}]],$$

и поскольку $\mathbf{En}=0$, то

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=\frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S}=cW\mathbf{n}, \tag{46,5}$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

§ 47. Монохроматическая плоская волна

Весьма важным частным случаем электромагнитных волн является волна, в которой поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической.

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси X) поле является функцией только от $x-ct$. Поэтому, если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $x-ct$.

Векторный потенциал такой волны можно наиболее просто написать в виде действительной части коплексного выражения

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\} \tag{47,1}$$

(Re обозначает действительную часть). Здесь $\mathbf{A}_0$ есть некоторый постоянный комплексный вектор, ω — некоторая постоянная. Очевидно, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такой волны будут иметь аналогичный вид:

$$\mathbf{E}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\},\quad \mathbf{H}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}$$

с той же постоянной ω.

Величина ω называется циклической частотой волны; частотой волны называют величину

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}. \tag{47,2}$$

ν определяет, очевидно, сколько раз в течение единицы времени в заданной точке пространства поле приобретает одинаковое значение. Величина

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{2\pi c}{\omega} \tag{47,3}$$

называется длиной волны; она равна расстоянию между двумя ближайшими точками вдоль оси X, в которых в один и тот же момент времени поле одинаково. $\mathbf{A}_0$ называется комплексной амплитудой вектор-потенциала.

Пользование комплексными выражениями оказывается очень удобным в виду линейности уравнений Максвелла. Именно, благодаря этому можно все операции производить не над тригонометрическими, а над более простыми экспоненциальными выражениями и только потом переходить к действительной их части. В дальнейшем мы будем часто пользоваться комплексной формой. При этом всегда будет подразумеваться действительная часть соответствующего комплексного выражения.

Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны, то (47,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{ \mathbf{A}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\mathbf{nr}\right)} \right\}.$$

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{47,4}$$

называется волновым вектором. Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\right\} \tag{47,5}$$

и аналогичные выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно согласно (46,3) выразить через $\mathbf{A}$; для монохроматической волны получаем из этих формул

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]. \tag{47,6}$$

Четырехмерным волновым вектором называется вектор k_i с компонентами

$$k_{1,2,3} = k_{x,y,z}, \qquad k_4 = \frac{i\omega}{c}. \tag{47,7}$$

Вводя этот вектор, мы можем написать (47,5) в виде

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{ik_i x_i}\right\}. \tag{47,8}$$

Квадрат волнового 4-вектора

$$k_i^2 = 0. \tag{47,9}$$

Это соотношение вытекает непосредственно из определений (47,4) и (47,7), а также, если подставить (47,8) в уравнение д'Аламбера:

$$\Box \mathbf{A} = 0.$$

Пользуясь волновым 4-вектором, легко вывести формулы преобразования ω и $\mathbf{k}$ из одной системы координат в другую. Общие формулы (6,2) преобразования 4-векторов дают

$$k_4 = \frac{k_4' + i\frac{V}{c}k_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя значения компонент k_i,

$$\omega = \frac{\omega' + Vk'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};$$

но $k_x = k\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$, где α — угол между направлением $\mathbf{k}$ и осью X. Таким образом, мы находим:

$$\omega = \omega' \frac{1+\frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{47,10}$$

Это есть точная формула для эффекта Допплера. При $V \ll c$ она переходит в

$$\omega = \omega'\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right).$$

Для $k_1 = k_x$ имеем

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя $k_x = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\alpha'}.$$

Эта формула совпадает с ранее выведенной в § 5 формулой для аберрации.

Задача

Определить движение заряда в поле плоской монохроматической волны $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\cos\omega(x-ct)$.

Решение: Выбираем ось Y по направлению $\mathbf{A}$; уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c}A_0\cos\omega(x-ct)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Будем искать S в виде

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x+ct) + f(x-ct),$$

где α, β, γ — постоянные, а $f(x-ct)$ — неизвестная функция. В результате находим

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma(x+ct) - \frac{1}{4\gamma}\left(\alpha^2+\beta^2+m^2+\frac{e^2A_0^2}{2}\right)(x-ct) + \\ + \frac{\alpha e A_0}{2\gamma\omega}\sin\omega(x-ct) - \frac{e^2A_0^2}{16\gamma\omega c}\sin 2\omega(x-ct).$$

Для определения движения надо приравнять производные $\frac{\partial S}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial S}{\partial\beta}$, $\frac{\partial S}{\partial\gamma}$ некоторым постоянным, которые могут быть выбраны равными нулю путем ссответствующего выбора начала координат и начала отсчета времени. Вводя величину $\eta = \omega(x - ct)$, находим тогда уравнения, определяющие движение в параметрическом виде:

$$x = -\frac{1}{8\gamma^2\omega}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)\eta + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2\omega c}\sin\eta - \frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2}\sin 2\eta,$$

$$y = \frac{\alpha}{2\gamma\omega}\eta - \frac{eA_0}{2\gamma\omega c}\sin\eta, \quad z = \frac{b}{2\gamma\omega}\eta,$$

$$ct = -\frac{1}{8\gamma^2\omega}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)\eta - \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2\omega c}\sin\eta - \frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2}\sin 2\eta.$$

§ 48. Поляризация

Рассмотрим электрическое поле плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\right\}$$

(все, что будет нами сказано, относится в той же мере и к магнитному полю). $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор; его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Очевидно, $\mathbf{E}_0$ можно всегда представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{i\alpha},$$

причем выбрать α таким образом, чтобы вектор $\mathbf{b}$ (вообще говоря, тоже комплексный) имел действительный квадрат. Электрическое поле приобретает тогда вид

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{b}e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)}\right\}. \tag{48,1}$$

Напишем $\mathbf{b}$ в виде $\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2$, где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два действительных вектора. Поскольку $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должно быть действительным, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Выберем систему координат с осями Y и Z, параллельными $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (ось X — по направлению распространения волны). Тогда из (48,1) мы находим

$$\left.\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha), \\ E_z &= b_2 \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{48,2}$$

Заметим, что коэффициенты b_1 и b_2 называются амплитудами волны; выражение, стоящее как аргумент у cos или sin, называется фазой волны.

Из (48,2) непосредственно следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{48,3}$$

Из этих формул мы видим, что в каждой точке пространства вектор электрического поля такой волны вращается в плоскости, параллельной плоскости YZ, причем его конец описывает эллипс (48,3). Такая волна называется эллиптически поляризованной. Если $b_1 = b_2$, то эллипс (48,3) превращается в круг, т. е. вектор вращается, оставаясь постоянным по абсолютной величине. В этом случае говорят, что волна поляризована по кругу.

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае прямолинейно поляризованной или поляризованной в плоскости. Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух плоско поляризованных.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно представить в виде наложения ряда монохроматических волн с различными частотами. Математически это означает разложение переменного поля волны в ряд или интеграл Фурье. Такое разложение называют еще спектральным разложением.

Однако, для того, чтобы функцию можно было разложить в ряд Фурье, она должна быть периодична, а для того, чтобы ее можно было разложить в интеграл Фурье, она должна обращаться в нуль в бесконечности. Поэтому, например, разложить в интеграл Фурье по времени (т. е. по частотам) можно только волну, поле которой обращается в нуль при $t = \pm\infty$. Аналогично, разложить в интеграл Фурье по координатам (т. е. по волновым векторам) можно только волну, имеющую конечные размеры в пространстве (точнее, обращающуюся в нуль в бесконечности).

Часто приходится иметь дело со стационарными полями, не меняющими со временем существенным образом своего характера (в частности, не исчезающими при $t = \infty$) и в то же время не строго периодическими. Будем обозначать посредством f какую-либо из величин, описывающих поле, — любую из компонент векторов **A**, **E**, **H**.

Обычное разложение f в интеграл Фурье по времени теперь невозможно, так как интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\omega t}\,dt$ расходятся. Однако, и такое поле можно разложить на монохроматические волны следующим образом.

Рассмотрим величину f в некотором большом промежутке времени от $t = -T$ до $t = +T$. В этом промежутке ее можно разложить в ряд Фурье в виде:

$$f(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i\frac{\pi n t}{T}}\right\}. \tag{49,1}$$

Если бы мы написали ряд Фурье, как это обычно делается, в виде $f = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\frac{knt}{T}}$, то коэффициенты f_n были бы, как известно, равны $\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T} fe^{i\frac{\pi n t}{T}}\,dt$. Поскольку мы вместо этого суммируем по n только от 0 до ∞ и берем затем действительную часть, надо, как легко сообразить, писать коэффициенты f вдвое бо́льшими, т. е.

$$f_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{+T} f e^{i\frac{\pi n t}{T}}\,dt \tag{49,2}$$

(исключение составляет f_0, в котором попрежнему надо писать $1/2T$, а не $1/T$; однако, как мы увидим ниже, это обстоятельство не играет роли).

Определим теперь среднюю интенсивность волны (под интенсивностью волны понимают величину, пропорциональную плотности потока энергии в ней; очевидно, что интенсивность определяется квадратом поля), т. е. величину

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T} f^2\,dt.$$

Подставляя сюда (49,1), находим (* обозначает комплексно сопряженную величину):

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\frac{1}{4}\sum_{n,\,m}\operatorname{Re}\left\{f_n e^{-i\frac{\pi n t}{T}}\right\}\operatorname{Re}\left\{f_m e^{-i\frac{\pi m t}{T}}\right\}dt =$$
$$= \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\frac{1}{4}\sum_{n,\,m}\left(f_n e^{-i\frac{\pi n t}{T}} + f_n^* e^{i\frac{\pi n t}{T}}\right)\left(f_m e^{-i\frac{\pi m t}{T}} + f_m^* e^{\frac{\pi m t}{T}}\right)dt.$$

Но каждый из интегралов $\int\limits_{-T}^{T} e^{2\pi\frac{t}{T}in}\,dt = \frac{T}{2\pi n i}\left(e^{2\pi i n} - e^{-2\pi i n}\right) = 0$, если $n \neq 0$, и равен $2T$, если $n = 0$. Поэтому мы получаем

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2}\sum_n |f_n|^2 \tag{49,3}$$

[строго говоря, в этой сумме член $|f_0|^2$ не должен иметь коэффициента $1/2$; однако, величиной $\frac{1}{2}|f_0|^2$ можно пренебречь по сравнению с суммой остальных членов в (49,3)].

Введем вместо n переменную $\omega = \pi n/T$. В виду того, что T очень велико, можно тогда заменить в (49,3) суммирование по n интегрированием по ω:

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}|f|^2\frac{T}{\pi}\,d\left(n\frac{\pi}{T}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}|f|^2\frac{T}{\pi}\,d\omega.$$

Наконец, вводя

$$f_\omega = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int\limits_{-T}^{+T} f e^{i\omega t}\,dt, \tag{49,4}$$

получаем окончательно

$$\overline{f^2}=\int_0^\infty |f_\omega|^2 d\omega. \tag{49,5}$$

Таким образом, средняя интенсивность представлена в виде суммы (интеграла) интенсивностей монохроматических компонент. Формула (49,4) дает возможность вычислить интенсивность в любом бесконечно малом интервале $d\omega$ частот.

При $T\to\infty$, $\overline{f^2}$, очевидно, стремится к некоторому конечному пределу; поэтому и f_ω стремится к конечному пределу. В виду этого и из выражения (49,4) для f_ω видно, что интеграл $\int\limits_{-T}^{+T} fe^{i\omega t}\,dt$ при стремлении T к бесконечности растет как $\sqrt{T}$.

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Но существующие в природе волны не бывают, конечно, строго монохроматическими, — их спектральное разложение всегда содержит частоты в некотором конечном интервале. Волна может быть в лучшем случае лишь почти монохроматической, если она содержит частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну и пусть ω есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (в заданной точке пространства) можно написать в виде $\mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0(t)\,e^{-i\omega t}\}$, где комплексная амплитуда $\mathbf{A}_0(t)$ является некоторой функцией времени (у строго монохроматической волны было бы $\mathbf{A}_0=\mathrm{const.}$). Поскольку $\mathbf{A}_0$ определяет поляризацию волны (см. § 48), то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют частично поляризованной. В частных случаях, впрочем, зависимость $\mathbf{A}_0(t)$ от времени может быть такой, что волна все же является вполне поляризованной; для этого необходимо, чтобы оставалось неизменным со временем отношение обеих компонент $\mathbf{A}_0$, т. е. отношение (действительных) амплитуд двух взаимно перпендикулярных компонент поля волны и разность их фаз.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально, посредством пропускания исследуемого света через различные материальные тела[1]), после чего измеряется интенсивность прошедшего через тело света. Интенсивность света, как мы знаем, пропорциональна квадрату его поля в данном месте. С другой стороны, поле прошедшего через тело света является, в силу линейности уравнений Максвелла, линейной функцией от поля исходного исследуемого света. Таким образом, при исследовании поляризации света всегда измеряется некоторая квадратичная форма $\alpha_{ik}A_i\overset{*}{A_k}$, где α_{ik} — некоторый тензор, характеризующий оптическую систему, с помощью ко-

[1]) Например, николевы призмы (николи).

торой исследуется поляризация, а A_i — компонента поля, например, векторного потенциала (* означает комплексно сопряженную). В случае частично поляризованного света, как уже указывалось, комплексная амплитуда $\mathbf{A}_0$ зависит от времени: для наблюдения интересны, очевидно, только средние (по времени) значения наблюдаемого эффекта, т. е. $\alpha_{ik}\overline{A_{0i}A_{0k}^*}$. Отсюда мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{ik}=\overline{A_{0i}A_{0k}^*}. \tag{50,1}$$

Поскольку вектор $\mathbf{A}_0$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной направлению волны, то тензор J_{ik} имеет всего четыре компоненты ($i, k=1, 2$). Из определения J_{ik} видно, что между компонентами этого тензора имеется соотношение

$$J_{ik}=J_{ki}^*. \tag{50,2}$$

Приведем тензор J_{ik} к простейшему виду. Пусть n_i есть „единичный" комплексный вектор, нормированный так, что $n_i n_i^*=1$. Определим n_i так, чтобы

$$J_{ik}n_k=\lambda n_i, \tag{50,3}$$

аналогично тому, как это делается при приведении симметричного тензора к главным осям. Уравнение (50,3) можно написать в виде

$$(J_{ik}-\lambda\delta_{ik})n_k=0.$$

Для того, чтобы эта система однородных алгебраических уравнений первой степени (по n_k) имела отличные от нуля решения, необходимо, как известно, чтобы детерминант

$$|J_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0, \tag{50,4}$$

откуда определяются два значения λ, которые мы обозначим через λ_1 и λ_2; подставляя эти значения поочередно в уравнения (50,3), мы определим из них два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$.

Легко показать [1]), что величины λ_1 и λ_2 действительны, а векторы $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$ взаимно перпендикулярны, т. е. удовлетворяют условию

$$n_i^{(1)}n_i^{(2)*}=0. \tag{50,5}$$

[1]) Умножая (50,3) с обеих сторон на n_i^*, имеем

$$\lambda n_i n_i^*=\lambda=J_{ik}n_i^*n_k.$$

Но $J_{ik}n_i^*n_k$, а потому и λ в силу (50,2) есть величина действительная, так как

$$\left(J_{ik}n_i^*n_k\right)^*=J_{ik}^*n_i n_k^*=J_{ki}n_i n_k^*=J_{ik}n_k n_i^*.$$

Для доказательства (50,5) напишем уравнения

$$J_{ik}n_k^{(1)}=\lambda_1 n_i^{(1)},\qquad J_{ik}n_k^{(2)}=\lambda_2 n_i^{(2)}$$

Мы можем теперь написать тензор J_{ik} в виде

$$J_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)*} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*}. \tag{50,6}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что это выражение действительно удовлетворяет уравнению (50,3).

Если свет вполне поляризован, то $\mathbf{A}_0 = \mathrm{const.}$ и J_{ik} равно просто $A_{0i}A_{0k}^*$ (без усреднения). Но каждый из двух членов в (50,6) имеет именно такой вид — простого произведения двух компонент постоянного вектора и его комплексно сопряженного (соответственно, $\sqrt{\lambda_1}\, n_i^{(1)}$ и $\sqrt{\lambda_2}\, n_i^{(2)}$). Другими словами, каждый из этих членов можно рассматривать как вполне поляризованную (вообще говоря, эллиптически) волну. Далее, мы видим, что в (50,6) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе волны можно рассматривать, как физически независимые друг от друга, или, как говорят, некогерентные. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}}$ равно произведению $\overline{A_i^{(1)}}\,\overline{A_k^{(2)}}$ средних значений $\overline{A_i^{(1)}}$ и $\overline{A_k^{(2)}}$, и поскольку каждое из них равно нулю, то и $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}} = 0$.

В § 48 мы видели, что можно всегда выбрать комплексную амплитуду так, что из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была чисто действительная, а другая — чисто мнимая; их абсолютные величины определят тогда амплитуды соответствующих колебаний.

Таким образом, мы можем написать

$$n_x^{(1)} = b_1, \quad n_y^{(1)} = ib_2, \tag{50,7}$$

где b_1 и b_2 действительны (и в силу условия нормировки $n_i^{(1)} n_i^{(1)*} = 1$ связаны соотношением $b_1^2 + b_2^2 = 1$). Тогда $n_i^{(2)}$ напишется в виде

$$n_x^{(2)} = ib_2, \quad n_y^{(2)} = b_1 \tag{50,8}$$

(так, чтобы было $n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0$). Эти выражения показывают, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одина-

---

и умножим первое из них на $n_i^{(2)*}$, а второе на $n_i^{(1)*}$:

$$J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)*}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} n_i^{(1)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)*}.$$

Возьмем комплексно сопряженную от второго уравнения, воспользовавшись тем, что $J_{ik}^* = J_{ki}$:

$$J_{ik}^* n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ki} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)},$$

после чего вычтем его почленно из первого уравнения; мы находим тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0,$$

откуда и следует (50,5).

ковые отношения осей), причем каждый из них повернут на прямой угол относительно другого.

Таким образом, мы приходим к результату, что всякую частично поляризованную волну можно представить, как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны.

Полная интенсивность J света пропорциональна просто квадрату поля, т. е. сумме диагональных компонент тензора J_{ik}:

$$J = J_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{50,9}$$

Отношение же

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{50,10}$$

меньшей из величин λ к большей называется степенью деполяризации света. Если свет полностью поляризован, то одна из величин, λ_1 или λ_2, равна нулю; очевидно, что тогда $\rho = 1$. Противоположным случаем является свет, у которого $\lambda_1 = \lambda_2$, так что $\rho = 1$; такой свет называется неполяризованным или естественным. Тот факт, что уравнение (50,3) имеет в этом случае всего один корень для λ, означает, что тензор J_{ik} имеет вид

$$J_{ik} = \lambda_0 \delta_{ik}, \tag{50,11}$$

где λ_0 есть общее значение λ_1 и λ_2. Для вектора n_i эти уравнения дают теперь бесконечное множество значений. Другими словами, естественный свет можно рассматривать как наложение двух поляризованных волн с одинаковой интенсивностью, оси поляризации которых расположены любым образом (в плоскости, перпендикулярной к направлению света).

§ 51. Разложение электростатического поля

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье). Это разложение, однако, весьма существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному уравнению д'Аламбера (45,7), а потому и каждый член разложения этого поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2 c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн.

В частности, можно формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн. „Частота“ этих волн, однако, будет, очевидно, равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e, находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением (см. § 36)

$$\Delta\varphi = -4\pi e \delta(r). \tag{51,1}$$

Разложим φ в интеграл Фурье, т. е. представим его в виде наложения плоских волн вида $\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$:

$$\varphi = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \tag{51,2}$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор Лапласа, находим

$$\Delta\varphi = -\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int k^2 e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z,$$

так что компонента Фурье $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51,1),

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int 4\pi e\delta(r) e^{-i\mathbf{kr}}\, dx\, dy\, dz = -\frac{e}{2\pi^2}.$$

Сравнивая оба полученные выражения для $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, находим

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\frac{1}{k^2}. \tag{51,3}$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

Аналогично потенциалу φ можно разложить и поле

$$\mathbf{E} = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \tag{51,4}$$

С помощью (51,2) имеем

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z = -\int\int\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z.$$

Сравнивая с (51,4), находим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\frac{e}{2\pi^2}. \tag{51,5}$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоновское поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C. Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Векторный потенциал поля, например, будет иметь теперь вид

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

Суммирование производится по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

где n_x, n_y, n_z — положительные и отрицательные целые числа. Коэффициенты $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{a}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}, \tag{52,3}$$

поскольку $\mathbf{A}$ должно быть действительным. Векторы $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ являются, конечно, функциями от времени; каждый из них лежит в плоскости, перпендикулярной к соответствующему $\mathbf{k}$.

Отдельные волны, входящие в состав (52,1), называют собственными колебаниями поля в данном объеме. Если размеры A, B, C этого объема достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z (у которых n_x, n_y, n_z отличаются на единицу) почти равны друг другу. В этом случае мы можем говорить о числе собственных колебаний поля в небольшом интервале Δk_x, Δk_y, Δk_z значений волнового вектора k_x, k_y, k_z.

Поскольку соседние значения, скажем k_z, соответствуют значениям n_x, отличающимся на единицу, то число собственных колебаний в интервале Δk_x (т. е. число возможных значений k_x в этом интервале) равно просто соответствующему интервалу Δn_x значений n_x. Таким образом, мы находим

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z. \tag{52,4}$$

Полное число Δn собственных колебаний в интервалах Δn_x, Δn_y, Δn_z равно числу колебаний значений компонент волнового вектора в этих интервалах. Поэтому оно равно произведению $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, т. е.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{52,5}$$

где $V = ABC$ есть объем поля.

Легко определить отсюда число собственных колебаний поля с волновыми векторами с абсолютной величиной в интервале Δk и направлениями в элементе телесного угла Δo. Для этого надо только перейти к сферическим координатам в „пространстве“ k_x, k_y, k_z и написать вместо Δk_x, Δk_y, Δk_z элемент объема в этом пространстве. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \, \Delta o. \tag{52,6}$$

Наконец, полное число собственных колебаний с абсолютными величинами k в интервале Δk и всеми направлениями $\mathbf{k}$ равно (пишем 4π вместо Δo)

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \tag{52,7}$$

Выразим теперь функцию Лагранжа для рассматриваемого поля в объеме V через величины $\mathbf{a}_\mathbf{k}$. Потенциалы поля мы опять выбираем так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю (что всегда возможно для плоских волн). Подставляя $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в функцию Лагранжа (27,6) $L = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV$, имеем

$$L = \frac{1}{8\pi}\int \left\{ \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}^2 - (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2 \right\} dV.$$

Сюда надо подставить для $\mathbf{A}$ разложение (52,1). Имеем

$$\dot{\mathbf{A}} = \sum_\mathbf{k} \dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{A} = \sum_\mathbf{k} i\,[\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}]\,e^{i\mathbf{kr}}.$$

При нахождении квадратов этих сумм надо иметь в виду, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, такими, что $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, дают нуль при интегрировании по всему объему. Это видно из того, что такие произведения содержат множители $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, а интеграл, например,

$$\int\limits_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

с целым, отличным от нуля n_x равен нулю. Произведения же с $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ не зависят от $\mathbf{r}$; интегрирование по dV дает в этих случаях просто объем V. Таким образом, мы находим (заменяя $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ на $\mathbf{a}_\mathbf{k}^*$):

$$L = \frac{V}{8\pi}\sum_\mathbf{k}\left(\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k}\dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k}^* - [\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}]\,[\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}^*]\right).$$

Поскольку значения $\mathbf{k}$, отличающиеся только знаком, дают одинаковые члены в сумме, можно написать

$$L = \frac{V}{4\pi}\sum_\mathbf{k}{}'\left(\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k}\dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k}^* - [\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}]\,[\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}^*]\right), \tag{52,8}$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем значениям $\mathbf{k}$, кроме отличающихся только знаком.

Наконец, введем вместо комплексных векторов $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ действительные векторы $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\beta}_\mathbf{k}$ согласно соотношению

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{V}}\,(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k} + i\boldsymbol{\beta}_\mathbf{k}). \tag{52,9}$$

Каждый из векторов $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\beta}_\mathbf{k}$ перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты.

Подставляя это в (51,8), находим искомую функцию Лагранжа в виде

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}{}'\{(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{k}}^2-c^2k^2\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}^2)+(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{k}}^2-c^2k^2\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}}^2)\}. \tag{52,10}$$

Направления векторов $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}}$ определяют направления поляризации соответствующих волн. Обозначив две компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}$ посредством $\alpha_{\mathbf{k}1}$ и $\alpha_{\mathbf{k}2}$, имеем $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}^2=\sum_{j=1}^{2}\alpha_{\mathbf{k}j}^2$ и аналогично для $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{k}}$. Тогда

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{\mathbf{k}}{}'\{(\dot{\alpha}_{\mathbf{k}j}^2-c^2k^2\alpha_{\mathbf{k}j}^2)+(\dot{\beta}_{\mathbf{k}j}^2-c^2k^2\beta_{\mathbf{k}j}^2)\}. \tag{52,11}$$

Мы видим, что функция Лагранжа распадается на сумму независимых членов одинакового вида, каждый из которых содержит только по одной из величин $\alpha_{\mathbf{k}j}$ или $\beta_{\mathbf{k}j}$. Каждый такой член $\frac{1}{2}(\dot{\alpha}_{\mathbf{k}j}^2-c^2k^2\alpha_{\mathbf{k}j}^2)$ или $\frac{1}{2}(\dot{\beta}_{\mathbf{k}j}^2-c^2k^2\beta_{\mathbf{k}j})$ соответствует, как известно из механики, однородному гармоническому колебанию, или, как говорится, осциллятору.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\alpha}_{\mathbf{k}j}+c^2k^2\alpha_{\mathbf{k}j}=0, \qquad \ddot{\beta}_{\mathbf{k}j}+c^2k^2\beta_{\mathbf{k}j}=0$$

и дают для $\alpha_{\mathbf{k}j}$ и $\beta_{\mathbf{k}j}$, как следовало ожидать, периодические решения типа $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ с частотой $\omega=ck$.

§ 53. Черное излучение

Рассмотрим электромагнитное излучение, находящееся в состоянии статистического (теплового) равновесия; такое излучение называют черным. Необходимо отметить, что электромагнитное излучение в пустоте не может само по себе притти в состояние теплового равновесия. Действительно, установление равновесия требует наличия некоторого взаимодействия между отдельными частями системы, — в данном случае, между отдельными собственными колебаниями поля. Но эти колебания не взаимодействуют друг с другом. Поэтому для установления теплового равновесия необходимо наличие зарядов, с которыми поле могло бы взаимодействовать. Тогда через посредство этого взаимодействия различные собственные колебания могут обмениваться друг с другом энергией.

В предыдущем параграфе мы видели, что электромагнитное поле, находящееся в конечном объеме, можно представить в виде совокупности гармонических осцилляторов. С другой стороны, из статистики известно, что на каждую степень свободы системы, совершающей гармонические колебания, в нашем случае на каждый осциллятор поля, приходится энергия, равная $\varkappa T$, где $\varkappa$ — постоянная Больцмана, а T — температура системы (закон равнораспределения). Далее, каждым двум собственным колебаниям поля с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ соответствуют в сумме (52,10) два члена (с $\alpha_{\mathbf{k}}$ и $\beta_{\mathbf{k}}$), т. е., учитывая две возможные независимые поляризации, четыре осциллятора в сумме (52,11).

Таким образом, число осцилляторов вдвое больше числа собственных колебаний поля. Воспользовавшись формулой (52,5), мы находим теперь, что энергия $\Delta\mathscr{E}$ поля, приходящаяся на собственные колебания в интервале $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, равна

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\varkappa TV}{4\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \tag{53,1}$$

Эта формула называется формулой Рэлея-Джинса. Напишем еще выражение для энергии, приходящейся на собственные колебания в интервале Δk абсолютных значений k. С помощью (52,7) имеем

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\varkappa TV}{\pi^2} k^2 \Delta k = \frac{\varkappa TV}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega, \tag{53,2}$$

где $\omega = ck$ есть частоты волн.

Если бы мы вычислили отсюда полную энергию поля, то получили бы бесконечность, так как интеграл $\int\limits_0^\infty \omega^2 d\omega$ расходится. Поскольку полная энергия поля в конечном объеме должна быть в действительности конечной, то это означало бы, что тепловое равновесие поля вообще не может установиться, — должен был бы происходить непрерывный переход энергии к собственным колебаниям с большей частотой, а температура должна была бы непрерывно падать, приближаясь к нулю.

Опыт, однако, показывает, что в действительности излучение вовсе не обнаруживает подобных свойств и может находиться в тепловом равновесии при конечной температуре. Это разногласие теории с опытом связано с квантовыми явлениями. При этом оказывается, что отклонения классической электродинамики возрастают с частотой излучения. Поэтому формула Рэлея-Джинса применима к той части черного излучения, которая обладает достаточно малыми частотами. При этом интервал применимости формулы Рэлея-Джинса суживается с уменьшением температуры.

ГЛАВА VII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 54. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако, в большом числе случаев электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, отличаются тем свойством, что в каждом небольшом участке пространства их можно рассматривать как плоские. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые волновые поверхности, т. е. поверхности, во всех точках которых фаза волны (в данный момент времени) одинакова. Волновые поверхности плоской волны представляют собою, очевидно, плоскости, перпендикулярные к направлению распространения волны. В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие лучей — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет геометрической оптики. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \to 0$.

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)} = ae^{i(k_i x_i + \alpha)} \tag{54,1}$$

(мы опускаем знак Re; везде подразумевается действительная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \tag{54,2}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ, называемая также эйконалом, не имеет простого вида, как в (54,1). Существенно, однако, что эйконал ψ является большой величиной. Это видно непосредственно из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \to 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (54,1), мы можем написать

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{54,3}$$

что и соответствует тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую. В четырехмерном виде соотношения (54,3) напишутся как

$$k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \tag{54,4}$$

где k_i — волновой 4-вектор.

Мы видели в § 47, что между компонентами 4-вектора k_i имеется соотношение $k_i^2 = 0$. Подставляя сюда (54,4), находим уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \qquad (54,5)$$

Это уравнение, называемое уравнением эйконала, является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и при помощи непосредственного предельного перехода $\lambda \to 0$ в волновом уравнении. Поле f удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 f = 0. \qquad (54,6)$$

Но эйконал ψ, как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвертым, и мы приходим снова к уравнению (54,5).

Мы приведем здесь еще ряд соотношений, которые, однако, в применении к распространению света в пустоте приводят только к вполне очевидным результатам. Тем не менее мы приводим их здесь, имея в виду, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона-Якоби (23,8):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени. Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ частицы посредством соотношений

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (54,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота — роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k = \omega/c$. Мы видим, что это соотношение аналогично соотношению $p = \mathcal{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

В виду указанной аналогии мы можем непосредственно написать аналогичное уравнение для лучей

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{54,7}$$

В пустоте $\omega = ck$, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и должно быть, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c.

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике. Однако, его при этом нельзя будет написать в гамильтоновской форме, $\delta \int L\,dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ посредством $L = \mathbf{p}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}} - \mathscr{H}$. Заменяя функцию Гамильтона частотой ω, а импульс — волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} - \omega$. Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$. Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определенной постоянной частотой ω, то зависимость ее поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$. Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать

$$\psi = -\omega t + \psi'(x, y, z), \tag{54,8}$$

где ψ' — функция только от координат. Уравнение эйконала (54,5) принимает теперь вид

$$(\operatorname{grad}\psi')^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{54,9}$$

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия для частицы можно написать также и в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\,d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными ее положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и дифференциалов координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется принципом Ферма. В этом случае мы можем написать по аналогии

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k}\,d\mathbf{l} = 0. \tag{54,10}$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ и мы получаем ($d\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \tag{54,11}$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 55. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать, как пучок лучей. Рассмотрим вопрос о распределении интенсивности света в таком пучке. Выделим на какой-нибудь из волновых поверхностей рассматриваемого пучка (т. е. на поверхности $\psi = \text{const.}$) бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря различных, главных радиуса кривизны. Пусть ac и bd (см. рис. 6) есть элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, являющиеся нормальными к волновой поверхности и проходящие через точки a и c, пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O', а лучи, проходящие через b и d, пересекутся в другом центре кривизны O.

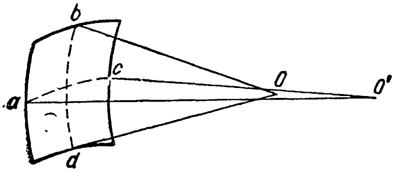

Рис. 6.

При данных углах раствора лучей, исходящих из O и O', длины отрезков ac и bd пропорциональны, очевидно, соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам $O'a$ и Ob); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd, т. е. пропорциональна R_1R_2. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченной определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2.

С другой стороны, интенсивность, т. е. поток энергии через единицу поверхности, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии. Таким образом, мы приходим к выводу, что интенсивность

$$J = \frac{\text{const.}}{R_1R_2}. \tag{55,1}$$

Эта формула определяет изменение интенсивности света вдоль направления лучей; R_1 и R_2 суть при этом радиусы кривизны той волновой поверхности, которую пересекает в рассматриваемой точке данный луч. Подчеркиваем, что эта формула непригодна для сравнения интенсивности в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать

$$f = \frac{\text{const.}}{\sqrt{R_1R_2}} e^{ikR}, \tag{55,2}$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может подразумеваться как R_1, так и R_2; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$ — расстояние между обоими центрами кривизны — постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (55,1) и (55,2) имеют вид:

$$J = \frac{\text{const.}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const.}}{R} e^{ikR}. \tag{55,3}$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда концентрическими сферами, а R — расстоянием до источника света).

Из (55,1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновой поверхности. Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях — геометрическом месте всех центров кривизны волновой поверхности. Заметим, что эти поверхности носят название каустик.

В частном случае сферической волновой поверхности обе каустики вырождаются в одну точку — источник света (или фокус).

§ 56. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, оптическими системами.

В силу указанной в § 54 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту. Для определенности, мы будем, однако, ниже говорить все время о распространении лучей света.

Мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано в виде (54,9): $(\nabla\psi')^2 = \omega^2/c^2$ (для света с определенной частотой). Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал, деленный на постоянную величину ω/c. Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{56,1}$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определенный пучок лучей, причем направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке. Для наших целей, однако, такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определенного пучка лучей, а соотношения, относящиеся к любым лучам. Поэтому мы должны пользоваться эйконалом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т. е. лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве. В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку $\mathbf{r}$. Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ координат двух точек ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы начальной и конечной точек луча). Через всякую пару точек $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, оптическая длина пути) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиусы-векторы точек на луче соответственно перед и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ один из радиусов-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определенный пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$. Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (56,1), в котором дифференцирование производилось бы по компонентам $\mathbf{r}$. Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим еще одно уравнение для $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi^2)=1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2=1. \tag{56,2}$$

Направление луча определяется, как мы знаем из предыдущего параграфа, градиентом его фазы. Поскольку $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}'=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}$, а в точке $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n}=-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}$. Из (56,2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — единичные:

$$\mathbf{n}^2=\mathbf{n}'^2=1. \tag{56,3}$$

Четыре вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$) являются производными по двум другим ($\mathbf{r},\mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ. Что касается самой функции ψ, то она удовлетворяет дополнительным условиям — уравнениям (56,2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т. е. которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям). Это можно сделать следующим образом. В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\,d\mathbf{r}'=-\mathbf{n}\,d\mathbf{r}+\mathbf{n}'\,d\mathbf{r}'.$$

Применим теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. напишем

$$d\psi=-d(\mathbf{nr})+\mathbf{r}\,d\mathbf{n}+d(\mathbf{n}'\mathbf{r}')-\mathbf{r}'d\mathbf{n}',$$

откуда, вводя функцию

$$\chi=\mathbf{n}'\mathbf{r}'-\mathbf{nr}-\psi, \tag{56,4}$$

имеем

$$d\chi=-\mathbf{r}\,d\mathbf{n}+\mathbf{r}'\,d\mathbf{n}'. \tag{56,5}$$

Функцию χ называют угловым эйконалом; как видно из (56,5), независимыми переменными в нем являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ не налагается уже никаких дополнительных условий. Действительно, уравнения (56,3) выражают теперь только, что $\mathbf{n}^2=\mathbf{n}'^2=1$, а это — условия, относящиеся к независимым переменным. Из этих условий видно, что из трех компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми. Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z и тогда $n_x=\sqrt{1-n_y^2-n_z^2}$, $n'_x=\sqrt{1-n_y'^2-n_z'^2}$.

Подставляя эти выражения в

$$d\chi=-x\,dn_x-y\,dn_y-z\,dn_z+x'dn'_x+y'dn'_y+z'dn'_z,$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$d\chi=-\left(y-\frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y-\left(z-\frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z+$$
$$+\left(y'-\frac{n'_y}{n'_x}x'\right)dn'_y+\left(z'-\frac{n'_z}{n'_x}x'\right)dn'_z.$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y-\frac{n_y}{n_x}x&=-\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, & y'-\frac{n'_y}{n'_x}x'&=\frac{\partial\chi}{\partial n'_y},\\ z-\frac{n_z}{n_x}x&=-\frac{\partial\chi}{\partial n_z}, & z'-\frac{n'_z}{n'_x}x'&=\frac{\partial\chi}{\partial n'_z}, \end{aligned}\right\} \tag{56,6}$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тела, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

§ 57. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые гомоцентрические пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки [1]).

[1]) Точка пересечения может лежать или на самих лучах, или на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются, соответственно, действительными или мнимыми.

Можно показать (см. § 58), что единственным случаем, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему гомоцентрическими, есть случай тождественного отображения, т. е. случай такой оптической системы, которая для любого предмета дает тождественное с ним по форме и размерам изображение (другими словами, изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого).

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкого изображения предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения [1]). Возможно только приближенное не вполне резкое осуществление не тождественного изображения протяженных предметов.

Наиболее важным случаем перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определенного (для данной оптической системы) направления. Это направление называется оптической осью оптической системы.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучки лучей (в трехмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели в § 55, что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется астигматизмом). Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба ее главных радиуса кривизны равны друг другу, — вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферический, и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптические системы, обладающие аксиальной симметрией. Ось симметрии такой системы является в то же время ее оптической осью. Действительно, волновая поверхность пучка лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет, очевидно, аксиальную симметрию; поверхности же вращения имеют, как известно, в точках своего пересечения с осью симметрии два равных друг другу радиуса кривизны. Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остается гомоцентрическим. То же самое относится и к достаточно тонким пучкам, идущим в направлениях, образующих достаточно малые углы с оптической осью.

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметрические оптические системы, воспользуемся общими уравнениями (56,6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической оси, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси. Если выбрать оптическую ось в качестве оси X, то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей. Что касается компонент

[1]) Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.

n_x, n'_x, то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть равным или $+1$ или -1. В первом случае лучи продолжают итти почти в прежнем направлении; попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют линзой. Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется зеркалом.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z, разложим угловой эйконал χ (n_y, n_z, n'_y, n'_z) в ряд и ограничимся первыми членами. В силу аксиальной симметрии всей системы χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси. Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y- и z-компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в разложении χ не может быть, — эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью. Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2$ и $\mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{n}\mathbf{n}'$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально симметрической оптической системы имеет вид

$$\chi = \text{const.} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'^2_y + n'^2_z), \tag{57,1}$$

где f, g, h — постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определенности случай линзы, в связи с чем положим $n'_x \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид. Подставляя теперь выражение (57,1) в общие уравнения (56,6), находим:

$$\left.\begin{aligned} n_y(x-g) - fn'_y = y, \quad fn_y + n'_y(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn'_z = z, \quad fn_z + n'_z(x'+h) = z'. \end{aligned}\right\} \tag{57,2}$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок, исходящий из точки x, y, z; точка x', y', z' пусть будет той, в которой пересекаются все лучи пучка после прохождения через линзу. Если бы первая и вторая пары уравнений (57,2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определенную систему значений n_y, n_z, n'_y, n'_z, т. е. всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z, прошел бы через точку x', y', z'. Для того, чтобы все лучи, выходящие из x, y, z, прошли бы через x', y', z', необходимо, следовательно, чтобы уравнения (57,2) не были независимы, т. е. чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой. Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары (тогда одна пара получается из другой просто почленным умножением на постоянную). Таким образом, должно быть

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \tag{57,3}$$

в частности,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \tag{57,4}$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x=g$, $x=-h$ на оптической оси называются главными фокусами оптической системы. Рассмотрим пучки лучей, параллельных оптической оси. Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на оптической оси, т. е. $x=\infty$. Из (57,3) видно, что в этом случае $x'=-h$. Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе. Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнении (57,3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси. Удобнее, однако, отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах. В качестве положительного направления отсчета координат выберем направления от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча. Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем

$$X=x-g,\quad X'=x'+h,\quad Y=y,\quad Y'=y',\quad Z=z,\quad Z'=z'.$$

Уравнения отображения (57,3) и (57,4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX'=-f^2, \tag{57,5}$$

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=\frac{f}{X}=-\frac{X'}{f}. \tag{57,6}$$

Величину f называют главным фокусным расстоянием системы.

Отношение Y'/Y называется боковым увеличением. Что касается изображения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения. Из (57,5) пишем для „продольного увеличения“

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right|=\frac{f^2}{X^2}=\left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{57,7}$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения. Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X=f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X'=-f$ на той же оси; эти две точки называются главными. Из уравнений (57,2) ($n_yX-fn'_y=Y$, $n_zY-fn'_z=Z$) видно, что в этом случае ($X=f$, $Y=Z=0$) имеют место равенства $n_y=n'_y$, $n_z=n'_z$. Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных конусов), то для этих координат ξ и ξ' мы имеем

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Подставляя это в (57,5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{57,8}$$

Можно показать, что у оптических систем с малой шириной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают. В этом случае в особенности удобно уравнение (57,8), так как в нем ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X > 0$), отображаются прямо ($Y'/Y > 0$); такие изображения называются собирательными. Если же $f < 0$, то при $X > 0$ имеем $Y'/Y < 0$, т. е. предмет отображается обратным образом; такие изображения называются рассеивающими.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (57,8), — это случай, когда все три коэффициента f, g, h (57,1) делаются бесконечными (т. е. оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и ее главные фокусы находятся в бесконечности). Раскрывая в уравнении (57,4) скобки, деля почленно на g и переходя к пределу бесконечных f, g, h, находим

$$x' = \frac{h}{g}x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f, g, h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения $\frac{h}{g}$, $\frac{f^2-gh}{g}$ были конечными. Обозначая их, соответственно, посредством α и β, имеем

$$x' = \alpha x + \beta.$$

Для двух других координат мы имеем теперь из общего уравнения (57,7) $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \sqrt{\alpha}$. Наконец, отсчитывая опять координаты x и x' от разных начал координат, именно, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде

$$X' = \alpha X, \quad Y' = \pm\sqrt{\alpha}\, Y, \quad Z' = \pm\sqrt{\alpha}\, Z. \tag{57,9}$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (все же изображение не геометрически подобно предмету, поскольку эти два увеличения не равны друг другу). Рассмотренный случай отображения называется телескопическим.

Все выведенные нами для линз формулы (57,5—9) в равной мере применимы и к зеркалам и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками лучей, идущими вблизи оптической оси. При этом всегда отсчет x-координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или главных точек) по направлению распространения луча. Надо иметь в виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси перед и за системой не лежат на одной прямой.

Задача

Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально симметрических оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Решение: Пусть f_1 и f_2 — фокусные расстояния обеих систем. Для каждой системы в отдельности имеем

$$X_1X_1' = -f_1^2, \quad X_2X_2' = -f_2'^2.$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X_1' - l$; выражая X_2' через X_1, находим

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + lX_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках $X_1 = -\frac{f_1^2}{l}$, $X_2' = \frac{f_2^2}{l}$, а фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т. е. составная система дает телескопическое отображение. В этом случае имеем $X_2' = X_1\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$, т. е. параметр α в общей формуле (57,9) равен: $\alpha = \frac{f_2^2}{f_1^2}$.

§ 58. Отображения широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т. е. резче), чем более узки эти пучки. Перейдем теперь к вопросу о том, насколько возможно осуществление точного отображения предметов, т. е. отображения пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которые можно осуществить с любой оптической системой (обладающей аксиальной симметрией), отображение широкими пучками возможно только с помощью определенным образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением, возможно, как уже указывалось в § 57, отображение далеко не всех точек пространства.

Мы рассмотрим здесь два основных случая отображения широкими пучками, а именно, отображение самой оптической оси и плоскости, к ней перпендикулярной, и найдем условия, которым должен удовлетворять ход лучей в оптической системе для того, чтобы дать возможность такого отображения.

При отображении оптической оси из соображений симметрии очевидно, что ее изображение будет расположено вдоль нее самой. Соответственно этому в общих уравнениях (56,6) надо положить $y=y'==z=z'=0$, так что

$$x=\frac{n_x}{n_y}\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad x'=-\frac{n'_x}{n'_y}\frac{\partial\chi}{\partial n'_y}.$$

Вторую пару уравнений (56,6) можно не рассматривать; в силу аксиальной симметрии они будут автоматически выполняться, если выполняется первая их пара. В соответствии с этим достаточно рассматривать только лучи, идущие в плоскости XY, т. е. положить $n_z=n'_z=0$. Замечая, что тогда $n_x=\sqrt{1-n_y^2}$, $n'_x=\sqrt{1-n'^2_y}$, мы можем переписать полученное уравнение в виде

$$x=-\frac{\partial\chi}{\partial n_x}, \quad x'=\frac{\partial\chi}{\partial n'_x}$$

или

$$d\chi=-x\,dn_x+x'dn'_x. \tag{58,1}$$

Все лучи, выходящие из произвольной точки оптической оси, после прохождения через оптическую систему должны вновь пересечься в одной и той же точке этой оси. Это значит, что координата x' пересечения с оптической осью луча, вышедшего из точки x и прошедшего через систему, должна быть функцией только от x. Заметим, что при этом x' определяется через x по прежней формуле $XX'=-f^2$ (57,5). Действительно, среди лучей широкого пучка есть лучи, образующие тонкий пучок, идущий вблизи оптической оси; для этих лучей имеет место указанная формула, а поскольку X и X' должны быть одинаковы для всех вообще лучей, то она имеет место и для всего широкого пучка.

Чтобы найти зависимость между n_x и n'_x при рассматриваемом отображении, поступим следующим образом. С помощью (58,1) находим для дифференциала

$$d(\chi+xn_x-x'n'_x)=n_x dx-n'_x dx'=\left(n_x-n'_x\frac{dx'}{dx}\right)dx.$$

Слева стоит полный дифференциал, поэтому таковым является и выражение, стоящее справа. Это значит, что коэффициент при dx должен быть функцией только от x:

$$n_x - n'_x \frac{dx'}{dx} = f(x).$$

Для определения $f(x)$ замечаем, что луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x = 1$), в силу аксиальной симметрии системы не изменяет своего направления при прохождении через нее, т. е. $n'_x = 1$. Отсюда следует $f(x) = 1 - \frac{dx'}{dx}$ и, следовательно,

$$\frac{1-n_x}{1-n'_x} = \frac{dx'}{dx}. \tag{58,2}$$

Обозначим посредством θ и θ' углы, образуемые лучом с оптической осью в точках x и x'. Тогда

$$1 - n_x = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2\sin^2\frac{\theta'}{2}.$$

Далее, поскольку x' есть функция от x, то и $\frac{dx'}{dx}$ зависит только от x, т. е. для заданного x является постоянной. Таким образом, для всех лучей, выходящих из данной точки изображаемой оси, должно быть одинаковым отношение

$$\frac{\sin\frac{\theta'}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \text{const}. \tag{58,3}$$

Равенство (58,2) или (58,3) и представляет собой искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении оптической оси широкими пучками.

Выведем теперь аналогичные условия для отображения широкими пучками плоскости, перпендикулярной оптической оси. Мы ограничимся при этом случаем, когда изображение тоже является плоскостью. Начало для отсчета координат предмета (плоскости) и его изображения выберем соответственно в точках их пересечения с оптической осью. Тогда $x = x' = 0$ и общие уравнения (56,6) принимают вид

$$y = -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad y' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}.$$

(По тем же причинам, что и выше, мы пишем только одну пару этих уравнений.)

Поступая в точности аналогично тому, как мы это делали выше найдем, что

$$n_y - n'_y \frac{dy'}{dy} = f(y). \tag{58,4}$$

Вводя опять углы θ и θ' (так что $n_y = \sin\theta$, $n'_y = \sin\theta'$), мы можем написать условие (58,4) для лучей, выходящих из данной точки изображаемой плоскости, в виде

$$\sin\theta' = \text{const.}\cdot\sin\theta + \text{const.}' \tag{58,5}$$

В частности, для лучей, исходящих из точки пересечения плоскости с оптической осью ($y=0$), в формуле (58,5) $\text{const}'.=0$, т. е.

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}=\text{const}. \tag{58,6}$$

(так как для таких лучей, в силу симметрии системы, должно быть $\theta'=0$, если $\theta=0$).

Полученные соотношения и определяют условия, которые должны выполняться при отображении плоскости широкими пучками. Мы видим, в частности, что эти условия для отображения плоскости и перпендикулярной к ней прямой не совпадают. Отсюда непосредственно следует невозможность отображения широкими пучками трехмерных тел, даже если эти тела обладают бесконечно малым объемом.

§ 59. Интерференция

Пусть два луча, поляризованных в одной и той же плоскости и вышедших из точечного источника света, посредством некоторой оптической системы (скажем, системы зеркал) приводятся в одно и то же место пространства. Если f_1 и f_2 — какая-нибудь из компонент поля первого и второго луча, то поле f в месте их наложения равно сумме $f=f_1+f_2$. Интенсивность света в этом месте равна (с точностью до постоянного коэффициента пропорциональности)

$$J=|f_1+f_2|^2=|f_1|^2+|f_2|^2+f_1^*f_2+f_1f_2^*=|f_1|^2+|f_2|^2+2\mathrm{Re}\,(f_1f_2^*).$$

Но $|f_1|^2$ и $|f_2|^2$ суть интенсивности J_1, J_2 обоих лучей, так что

$$J=J_1+J_2+2\mathrm{Re}\,(f_1f_2^*). \tag{59,1}$$

Таким образом, при наложении двух лучей общая интенсивность не равна сумме интенсивностей каждого из них. Это явление называется интерференцией.

Если ввести амплитуду f_0 и фазу ψ луча, то поля f_1 и f_2 можно написать в виде:

$$f_1=f_{01}e^{i\psi_1}=\sqrt{J_1}e^{i\psi_1},\quad f_2=\sqrt{J_2}e^{i\psi_2}.$$

Тогда общая интенсивность J принимает вид:

$$J=J_1+J_2+2\sqrt{J_1J_2}\cos\Delta\psi, \tag{59,2}$$

где $\Delta\psi=\psi_2-\psi_1$ есть разность фаз, т. е. оптическая разность хода обоих лучей. Разность хода лучей можно менять при помощи оптической системы, приводящей оба луча в одно место. По мере изменения разности хода суммарная интенсивность меняется в пределах от $(\sqrt{J_1}+\sqrt{J_2})^2$ до $(\sqrt{J_1}-\sqrt{J_2})^2$.

При интерференции двух не монохроматических лучей интерферируют друг с другом их монохроматические компоненты с одинаковыми частотами и поляризациями. Общая интерференционная картина является суммой интерференционных картин от всех пар соответствующих монохроматических компонент.

Если два луча исходят из различных источников света, то они некогерентны, т. е. их поля независимы друг от друга, и поэтому среднее значение их произведения $\overline{f_1 f_2^*} = \overline{f_1}\,\overline{f_2^*} = 0$, так как каждое из $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2^*}$ равно нулю. Таким образом, лучи от разных источников света не интерферируют друг с другом.

Рассмотрим теперь интерференцию света, испускаемого источником, обладающим конечными размерами. Интерференционная картина, получающаяся от такого света, является наложением интерференционных картин, возникающих от лучей, исходящих от различных точек поверхности источника света. Пусть $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — волновые векторы двух лучей, исходящих от одной точки источника и в дальнейшем интерферирующих друг с другом. Если интерференция наблюдается на достаточно большом расстоянии от источника света, то волновые векторы двух лучей, исходящих из какой-либо другой точки источника и интерферирующих друг с другом там же, где интерферирует первая пара лучей, можно считать равными тем же $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Разность оптических длин хода обоих лучей $\mathbf{k}_1$ равна, очевидно, $\mathbf{k}_1\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — вектор между точками выхода обоих пар лучей; аналогичная разность для лучей $\mathbf{k}_2$ равна $\mathbf{k}_2\mathbf{a}$. Интерференционный член, описывающий интерференцию второй пары лучей, отличается, следовательно, от такого же члена для первой пары множителем $e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{a}}$.

Для того, чтобы получить полную интерференционную картину, надо сложить интерференционные картины от всех точек источника света. Другими словами, надо усреднить $e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{a}}$ по всем возможным значениям вектора $\mathbf{a}$. При этом усреднении $\mathbf{a}$ пробегает значения в интервале порядка величины размеров источника, которые мы обозначим посредством d. Если $|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2| \ll 1/d$, то в этом интервале $e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{a}}$ является быстро переменной периодической функцией, и ее среднее значение обращается в нуль, т. е. интерференции не произойдет. С другой стороны, $(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \sim k\theta \sim \theta/\lambda$, где θ — угол между интерферирующими лучами в точке их испускания источником света. Таким образом, интерференция возможна только при соблюдении условия

$$\theta \lesssim \frac{\lambda}{d}. \tag{59,3}$$

Это условие ограничивает возможность интерференции для лучей, исходящих из одного и того же источника.

§ 60. Пределы геометрической оптики

Непосредственно из определения плоской монохроматической волны видно, что в такой волне амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о „степени монохроматичности“ волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся функцией от времени. Другими словами, в каждой точке пространства, через которое проходит волна, амплитуда волны меняется со временем.

Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны, например, электрическое, в данной точке имеет вид $\mathbf{E}_0(t)\,e^{i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить по монохроматическим волнам, т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна интегралу вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}_0(t)\,e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt$. Множитель $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы $\mathbf{E}_0$ было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega\neq\omega_0$. Если же $\mathbf{E}_0(t)$ переменно, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $\frac{1}{\omega-\omega_0}$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется $\mathbf{E}_0$. Для того, чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $\mathbf{E}_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка периода $\frac{1}{\omega-\omega_0}$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение одной волны, определяются из условия $\frac{1}{\omega-\omega_0}\sim\Delta t$. Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0), входящих в спектральное разложение волны, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta\omega\,\Delta t\sim 1. \tag{60,1}$$

Чем меньше $\Delta\omega$, тем меньший интервал частот входит в спектральное разложение данной волны, т. е. тем более монохроматична эта волна. Мы видим, следовательно, что действительно волна тем более монохроматична, чем больше Δt, т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (60,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть Δx, Δy, Δz суть порядки величин расстояний вдоль осей X, Y, Z, на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координаты x (при заданных y и z) имеет вид $\mathbf{E}_0(x)\,e^{ik_{0x}x}$, где k_{0x} — некоторая средняя компонента волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (53,1) можно найти интервал Δk_x значений, имеющихся в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье (то же самое для k_y и k_z). При этом мы находим

$$\Delta k_x\Delta x\sim 1,\quad \Delta k_y\Delta y\sim 1,\quad \Delta k_z\Delta z\sim 1. \tag{60,2}$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством Δt порядок величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt, в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку. На основании соотношения (60,1) мы можем теперь сказать, что „степень немонохроматичности" такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{60,3}$$

Аналогично, если Δx, Δy, Δz суть порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{60,4}$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось X по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\,\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{60,5}$$

где θ_y — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости XY (ср. также § 63).

С другой стороны, формула (60,5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дают изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины Δ этого пятна имеем, согласно (60,5),

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{60,6}$$

где θ — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ. Соответственно этому формула (60,6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа. Минимальное значение Δ, достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

Задача

Найти наименьший размер светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Решение: Обозначив размер отверстия диафрагмы через d, имеем из (60,5) для угла дифракции λ/d, откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$. Наименьшее значение этой величины есть $\sqrt{\lambda l}$.

§ 61. Диффракция

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волны можно рассматривать как бесконечно малую. Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики. Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений диффракции.

Явления диффракции можно наблюдать, если на пути распространения света[1]) находятся препятствия — непрозрачные тела (будем называть их экранами) произвольной формы или, например, если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области „тени", резко отграниченные от областей, куда свет попадает. Диффракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти явления диффракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

Задача теории диффракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме экранов и отверстий (и расположении источников света) определить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всем пространстве. Точное разрешение этой задачи возможно только путем решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности экранов, зависящими еще к тому же и от свойств самих этих экранов (оптических свойств материала, из которого они сделаны). Такое решение обычно представляет большие математические трудности.

Однако, в большинстве случаев оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распространении света вблизи границы между светом и тенью. Этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики, т. е. тогда, когда размеры всех тел все же велики по сравнению с длиной волны.

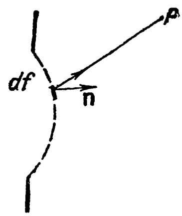

Рис. 7.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников. Рис. 7 изображает этот экран в разрезе (жирная линия); свет идет слева направо. Будем обозначать посредством u любую из компонент поля **E** или **H**. При этом под u мы будем подразумевать поле как функцию только от координат, т. е. без множителя $e^{-i\omega t}$, определяющего зависимость от времени. Нашей задачей является определение интенсивности света, т. е. поля u в любой точке P за экраном. При приближенном решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана. Другими сло-

[1]) Мы будем ниже, говоря о диффракции, говорить для определенности о свете; все нижеследующее относится, конечно, к любым электромагнитным волнам.

вами, значения поля здесь те, которые следуют непосредственно из геометрической оптики. Во всех же точках, находящихся непосредственно за экраном, поле можно положить равным нулю. При этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли. Очевидно также, что в рассматриваемых случаях для диффракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

Проведем какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями (разрез этой поверхности на рис. 7 изображен пунктиром). Эту поверхность разобьем на участки с площадью df, размеры которых, однако, велики по сравнению с длиной волны света. Мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам делается источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка. Поле в точке P мы будем рассматривать как результат наложения полей, исходящих из всех участков df поверхности, закрывающей отверстие.

Поле, создаваемое участком df в точке P, пропорционально, очевидно, значению u поля в самом участке df (напоминаем, что поле в df мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана). Кроме того, оно пропорционально проекции df_n площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{n}$ луча, пришедшего из источника света в df. Это следует из того, что какой бы формой ни обладал элемент df, через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция df_n будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке P будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке P участком df, пропорционально $u\,df_n$. Далее, надо еще учесть изменение фазы волны при ее распространении от df к точке P. Это изменение определяется расстоянием R от df до P и равно, очевидно, kR (k — абсолютная величина волнового вектора света). Поэтому $u\,df_n$ надо еще умножить на e^{ikR}, и мы находим, что искомое поле пропорционально $u\,df_n e^{ikR}$, т. е. равно $a(R)\,u\,df_n e^{ikR}$, где $a(R)$ — пока неизвестная функция от расстояния между df и точкой P. Поле в точке P, являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми df, равно, следовательно,

$$u_P = \int a(R)\,u e^{ikR}\,df_n, \tag{61,1}$$

где интеграл распространен по поверхности, ограниченной краем отверстия. Этот интеграл в рассматриваемом приближении не может, конечно, зависеть от формы этой поверхности. Формула (61,1) применима, очевидно, и к диффракции не от отверстия в экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться. В этом случае поверхность интегрирования в (61,1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения функции $a(R)$ рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X; волновые поверхности параллельны плоскости YZ. Пусть u есть значение поля в плоскости YZ. Тогда в точке P, которую мы выберем на оси X, поле равно $u_P = ue^{ikx}$. С другой стороны, поле в точке P можно определить, исходя из формулы (61,1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, плоскость YZ. При этом в виду малости угла диффракции, т. е. малости отклонения от геометрической оптики, в интеграле существенны только точки плоскости YZ, близкие к началу координат, т. е. точки, в которых $y, z \ll x$ (x — координата точки P). Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (61,1) даст

$$u_P = \iint_{-\infty}^{+\infty} aue^{ik\left(x + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x}\right)}\, dy\, dz.$$

Здесь u есть постоянная (поле в плоскости YZ); a можно при интегрировании тоже считать постоянным, так как в виду малости y и z $R \approx x = \text{const}$. Таким образом,

$$u_P = aue^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}}\, dz.$$

Оба эти интеграла, конечно, одинаковы; каждый из них подстановкой $y = \xi\sqrt{\frac{2x}{k}}$ приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2\, d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i),$$

и мы получаем

$$u_P = aue^{ikx}\frac{2i\pi x}{k}.$$

С другой стороны, $u_P = ue^{ikx}$ и, следовательно,

$$a = \frac{k}{2\pi ix} \approx \frac{k}{2\pi iR}.$$

Подставляя это в (54,1), находим окончательно решение поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR}\, df_n. \tag{61,2}$$

§ 62. Диффракция Френеля

Если источник света и точка P, в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (61,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P.

Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Диффракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название диффракционных явлений Френеля.

Рассмотрим диффракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству такой диффракции играет роль только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве оси Z край экрана (рис. 8), а ось X направим по перпендикуляру QO, опущенному из источника света Q на линию края экрана. D_q есть длина этого перпендикуляра, т. е. расстояние источника света до края экрана. Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над плоскостью XZ; область же под плоскостью XZ есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

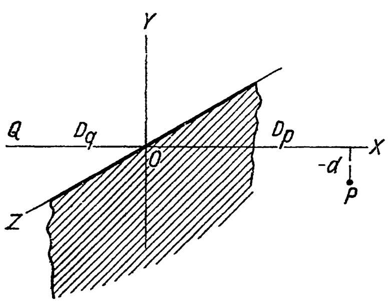

Рис. 8.

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени. При этом мы пока ограничимся только точками, лежащими в плоскости XY, т. е. в плоскости, проведенной через источник, перпендикулярно краю экрана. x-координату такой точки P обозначим посредством D_p, y-координату, т. е. расстояние до плоскости XZ, — посредством d. При этом отрицательное d означает, что P находится в области геометрической тени; d мы предполагаем малым по сравнению с D_p и D_q.

В качестве поверхности интегрирования в (61,2) выберем верхнюю полуплоскость; координаты ее точек есть 0, y, z. Поле волны, исходящей из источника Q, на расстоянии R_q от него пропорционально множителю e^{ikR_q}. Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp\left(ik\sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2}\right).$$

В интеграле (61,2) для R надо теперь подставить

$$R = \sqrt{D_p^2 + z^2 + (y - d)^2}.$$

В подинтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным. Поэтому мы можем считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dy\,dz$. Мы находим тогда, что поле в точке P

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} \exp\left\{ik\left(\sqrt{D_q^2+y^2+z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{D_p^2+(y-d)^2+z^2}\right)\right\}dy\,dz. \qquad (62,1)$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек плоскости интегрирования, близких к O. Поэтому в интеграле (62,1) играют роль малые y и z (по сравнению с D_q и D_p). Мы можем на этом основании написать:

$$\sqrt{D_q^2+y^2+z^2}\approx D_q+\frac{y^2+z^2}{2D_q},$$

$$\sqrt{D_p^2+(y-d)^2+z^2}\approx D_p+\frac{(y-d)^2+z^2}{2D_p}.$$

Подставим это в (62,1). Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d, то постоянный множитель $\exp\{ik(D_p+D_q)\}$ мы опускаем; интеграл по dz тоже дает выражение, не содержащее d, которое мы также опустим. Мы находим тогда

$$u_P \sim \int_0^{\infty}\exp\left\{ik\left(\frac{1}{2D_q}y^2+\frac{1}{2D_p}(y-d)^2\right)\right\}dy.$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P \sim \exp\left\{-ik\frac{d^2}{2D_p^2}\frac{1}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right\}\int_0^{\infty}\exp\left\{ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right\}dy.$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т. е. квадратом модуля $|u_P|^2$. Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель несуществен, так как при умножении на сопряженное выражение он дает единицу. В интеграле сделаем подстановку

$$\frac{k}{2}\frac{\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}=\eta^2.$$

Тогда мы получаем

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta, \qquad (62,2)$$

где

$$w = d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}. \qquad (62,3)$$

Таким образом, интенсивность J в точке P есть

$$J=\frac{J_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}d\eta\right|^2=\frac{J_0}{2}\left\{\left(C(w)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(w)+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, \quad (62,4)$$

где

$$C(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^w \cos\eta^2 d\eta, \qquad S(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^w \sin\eta^2 d\eta$$

есть так называемые интегралы Френеля. (62,4) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d. J_0 есть, как легко видеть, интенсивность в освещенной области в точках, не слишком близких к краю тени, точнее при $w \gg 1$ $(C(\infty)=S(\infty)={}^1/_2)$. При $w\to-\infty$ J стремится, как и должно быть, к нулю. На рис. 9 изображен график J/J_0 как функции от w. При положительных w, т. е.

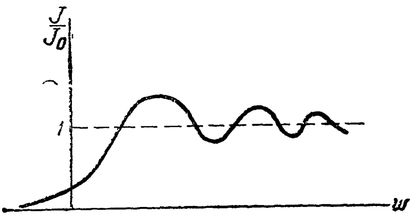

Рис. 9.

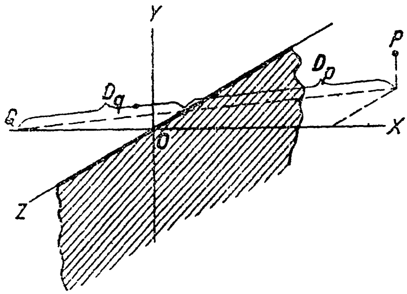

Рис. 10.

выше плоскости XZ, интенсивность J имеет ряд чередующихся минимумов и максимумов, так что отношение J/J_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах этих колебаний быстро уменьшается по мере увеличения w, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом. Первый максимум несколько смещен вверх от границы геометрической точки. На самой этой границе $J=J_0/4$. В области геометрической тени интенсивность быстро монотонно спадает при удалении от ее границы.

Если точка P находится вне плоскости XY (рис. 10), то совершенно аналогичное вычисление показывает, что интенсивность определяется той же самой формулой (62,4), где теперь D_p и D_q суть длины отрезков, указанных на рис. 10.

§ 63. Дифракция Фраунгофера

Существует целый ряд случаев дифракции, в которых интенсивность в точке наблюдения определяется всей волновой поверхностью; другими словами, в интеграле (61,2), определяющем u_P, существенна вся волновая поверхность, по которой происходит интегрирование. С другой стороны, мы попрежнему будем считать, что отклонение от геометрической оптики мало, т. е. в точку наблюдения P доходят только те лучи, которым надо мало отклониться от пути, по которому бы они шли согласно геометрической оптике. Поэтому вся волновая поверхность имеет значение только в следующих двух случаях.

Первым случаем является тот, когда точка наблюдения находится вблизи фокуса, т. е. точки, в которой сходятся геометрические пути всех лучей света.

Вторым, наиболее важным случаем является так называемая диффракция Фраунгофера. При диффракции Фраунгофера как источник света, так и точка наблюдения P находятся на очень больших (бесконечных) расстояниях от экранов[1]). Лучи идут теперь из источника света к экранам параллельным пучком; то же касается лучей, идущих от экранов к точке наблюдения. Поэтому при диффракции Фраунгофера мы интересуемся только изменением направления пучка света, т. е. ищем интенсивность как функцию от угла отклонения света от первоначального направления (угла диффракции). Поскольку мы рассматриваем малые отклонения от геометрической оптики, то этот угол должен быть мал.

Выведем общую формулу, определяющую диффракцию Фраунгофера от экранов и отверстий любой формы. Пусть свет идет слева направо; выберем систему координат с началом где-нибудь слева от экрана. На рис. 11 O есть начало координат, P — точка наблюдения и df — некоторый элемент волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в формуле (61,2):

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n.$$

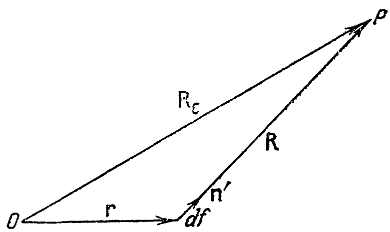

Рис. 11.

В падающем свете в рассматриваемом нами случае диффракции Фраунгофера все лучи имеют одинаковое направление, т. е. одинаковый волновой вектор $\mathbf{k}$ (единичный вектор в этом направлении $\mathbf{n}$). Точку наблюдения P надо представлять себе на бесконечном расстоянии от экранов; поэтому все лучи, идущие от экранов в P, тоже параллельны друг другу, т. е. имеют одинаковые волновые векторы $\mathbf{k}'$ (единичный вектор в этом направлении — $\mathbf{n}'$). Угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ есть угол диффракции ($\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ отличаются, конечно, только направлением, но не величиной).

Поле на поверхности интегрирования в выражении для u_P равно $u = u_0 e^{i\mathbf{kr}}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор от O к df). В подинтегральном выраже-

[1]) Экспериментально диффракция Фраунгофера наблюдается, конечно, не на бесконечном расстоянии, а при помощи расположенной за экраном линзы; в фокусной плоскости получается тогда диффракционная картина. Можно, однако, показать, что это обстоятельство ничего не меняет в последующих формулах (если только линза не слишком мала, так что в ней не происходит обусловленных ею самой диффракционных явлений).

нии величина $1/R$ может считаться постоянной, равной $1/R_0$. Мы находим, следовательно,

$$u_P = \frac{u_0}{2\pi i R_0} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{ikR} \, df_n.$$

Из рис. 11 видно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$. Умножим это равенство с обеих сторон на $\mathbf{n}'$; при бесконечно далекой точке P векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ параллельны, и потому $\mathbf{R}_0\mathbf{n}' = R_0$. Таким образом,

$$R = R_0 - \mathbf{r}\mathbf{n}',$$

так что

$$e^{ikR} = e^{ikR_0} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$$

(так как $k\mathbf{n}' = \mathbf{k}'$). Множитель e^{ikR_0} есть постоянная. Мы получаем, следовательно, окончательно:

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \, df_n. \quad (63{,}1)$$

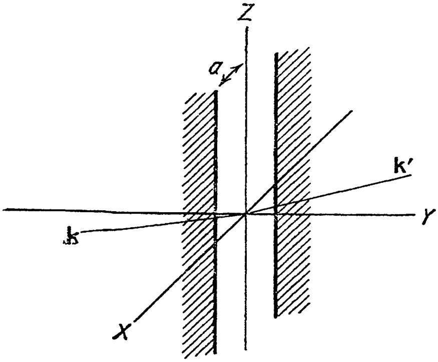

Рис. 12.

Эта формула и определяет интенсивность $\left| u_P^2 \right|$ как функцию от угла диффракции.

Рассмотрим диффракцию Фраунгофера от бесконечной щели с параллельными краями, прорезанной в непрозрачном экране (рис. 12). Выберем ось Z параллельно краям щели, ось Y перпендикулярно к плоскости щели (плоскость XZ).

Выберем в (63,1) в качестве поверхности интегрирования плоскость щели между обеими ее краями. Элемент интегрирования df_n равен тогда проекции элемента $dx\,dz$ этой плоскости на направление $\mathbf{k}$. Но поскольку все падающие лучи параллельны друг другу, угол между $\mathbf{k}$ и элементом $dx\,dz$ постоянен вдоль всей плоскости щели. Поэтому мы можем в (63,1) с точностью до постоянного множителя написать вместо df_n просто $dx\,dz$, так что

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} e^{i(k_x - k_{x'})x} e^{i(k_z - k_{z'})z} \, dx\, dz$$

($2a$ есть ширина щели). Интеграл по dz от периодической знакопеременной функции $e^{i(k_z - k_{z'})}$ равен нулю всегда, когда $k_z \neq k_{z'}$. Поэтому должно быть $k_z = k_{z'}$, т. е. свет отклоняется только в плоскости XY, как, впрочем, можно было ожидать из соображений симметрии. Выражение для u_P сводится, таким образом, к

$$u_P \sim \int_{-a}^{+a} e^{i\varkappa x} \, dx,$$

где $\varkappa = k_x - k_{x'}$ [1]). Интегрируя, находим

$$u_P \sim \frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}.$$

Отсюда находим для интенсивности dJ света, подвергнувшегося диффракции в интервале $d\varkappa$ значений $\varkappa$:

$$dJ = J_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 d\varkappa, \tag{63,2}$$

где постоянный множитель мы выбрали так, что J_0 есть полная интенсивность света, проходящего через щель (т. е. интеграл от dJ по всем значениям $\varkappa$).

$\frac{dJ}{d\varkappa}$ как функция от угла диффракции имеет вид, изображенный на рис. 13. При увеличении $\varkappa$ в ту и другую сторону от $\varkappa = 0$ интенсивность пробегает ряд чередующихся максимумов и минимумов. Высота максимумов быстро падает при увеличении $\varkappa$; самый большой максимум J имеет при $\varkappa = 0$. В минимумах $J = 0$. Эти минимумы имеют место при

$$\varkappa a = n\pi \quad (n = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots). \tag{63,3}$$

Как уже указывалось в примечании на стр. 149, диффракция Фраунгофера наблюдается обычно при помощи системы линз. Параллельный пучок лучей, пройдя через линзу, собирается в ее главном фокусе. В плоскости, проходящей через этот фокус перпендикулярно к оптической оси линзы, поле u_P будет равно нулю везде, за исключением самого фокуса. Если же перед линзой находится какой-либо экран, то пучок лучей подвергается диффракции; соответственно этому в фокальной плоскости линзы получается теперь не точечное изображение источника света, а некоторая протяженная диффракционная картина.

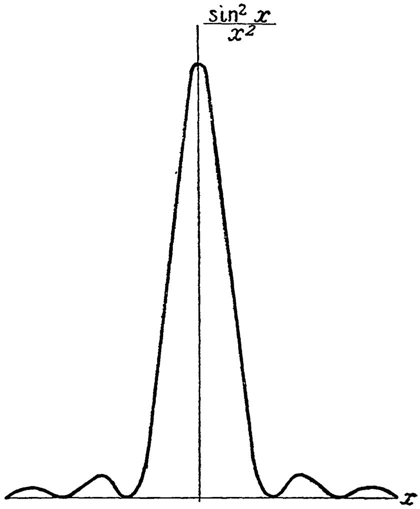

Рис. 13.

Заменим теперь экран „дополнительным“, т. е. таким, который имеет отверстия там, где первый экран не прозрачен, и наоборот. Обозначим поле в фокальной плоскости линзы в обоих случаях, соответственно, посредством $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$. Поскольку $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$ выражаются интегралами, взятыми по отверстиям в экранах, а отверстия обоих экранов

[1]) $\varkappa$ может быть выражено через угол α диффракции, т. е. угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Именно, легко получить (для малых $\varkappa$ и α) формулу

$$\alpha = \frac{\varkappa \sin(\mathbf{k}, Z)}{k \cos(\mathbf{k}, Y)},$$

где $(\mathbf{k}, Y)$, $(\mathbf{k}, Z)$ — углы между $\mathbf{k}$ и осями Y и Z.

дополняют друг друга до целой плоскости, то $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=u_P$, где u_P — поле, получающееся в отсутствии экранов. Как было указано, $u_P=0$ везде кроме фокуса, откуда $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=0$, или для соответствующих интенсивностей

$$|u_P^{(1)}|^2=|u_P^{(2)}|^2.$$

Таким образом, дополнительные экраны дают одинаковую диффракционную картину во всей фокальной плоскости линзы, за исключением самого фокуса (так называемый принцип Бабине).

Задачи

1. Определить диффракцию Фраунгофера от прямоугольного отверстия (со сторонами $2a$ и $2b$).

Решение аналогично определению диффракции от щели. Вводя обозначения

$$k_x-k_{x'}=\varkappa_x,\quad k_z-k_{z'}=\varkappa_z$$

(оси X и Z параллельны сторонам прямоугольного отверстия), находим для интенсивности

$$dJ=J_0\frac{ab}{\pi^2}\left(\frac{\sin\varkappa_x a}{\varkappa_x a}\right)^2\left(\frac{\sin\varkappa_z b}{\varkappa_z b}\right)^2 d\varkappa_x\,d\varkappa_z.$$

2. Определить диффракцию Фраунгофера от диффракционной решетки — плоского экрана с прорезанным в нем рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Решение: Выберем плоскость решетки в качестве плоскости XZ с осью Z, параллельной щелям. Интегрирование в (63,1) дает

$$u_P=u'_P\sum_{n=0}^{N-1}e^{2in\varkappa d}=u'_P\frac{1-e^{2iN\varkappa d}}{1-e^{2i\varkappa d}},$$

где $\varkappa=k_x-k_{x'}$, $d=a+b$, а u'_P есть результат интегрирования по одной щели. Пользуясь (63,2), имеем для интенсивности $|u_P|^2$:

$$dJ=\frac{J_0}{N}\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin N\varkappa d}{\sin\varkappa d}\right)^2\left(\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 d\varkappa$$

(J_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

В случае большого числа щелей, т. е. $N\to\infty$, эту формулу можно написать в ином виде. При значениях $\varkappa=\frac{\pi n}{d}$ (n — целое число) $\frac{dJ}{d\varkappa}$ имеет максимумы; вблизи такого максимума (т. е. при $\varkappa d=n\pi+\varepsilon$, ε мало):

$$dJ=\frac{J_0}{N}\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}\right)^2\frac{\sin^2 N\varepsilon}{\varepsilon^2}\,d\varkappa.$$

Но при $N \to \infty$ имеет место формула [1])

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right) = \pi\delta(x),$$

т. е. вблизи каждого максимума J имеет вид

$$J_0 a \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 \delta(\varkappa d - n\pi).$$

Следовательно,

$$dJ = d\varkappa\, J_0 a \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\varkappa d - \pi n) = J_0 a \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 \delta(\sin \varkappa d)\, d\varkappa.$$

3. Определить диффракцию Фраунгофера от круглого отверстия (радиуса a); свет падает перпендикулярно плоскости отверстия.

Решение: Введем цилиндрические координаты z, r, φ с осью Z, проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Обозначим проекцию $\mathbf{k}'$ на эту плоскость посредством $\varkappa$ ($\varkappa = k\alpha$, где α — угол диффракции). Из соображений симметрии следует, что диффракция будет зависеть только от $\varkappa$; поэтому можно ограничиться рассмотрением луча, идущего в плоскости $\varphi = 0$. Тогда формула (63,1) дает

$$u_P = \frac{ku_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\varkappa r \cos\varphi}\, r\, d\varphi\, dr = \frac{e^{ikR_0} ku_0}{iR_0} \int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\, dr,$$

где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix\cos\varphi}\, d\varphi$ есть функция Бесселя нулевого ранга, u_0 — поле в самом отверстии. Из теории функций Бесселя известно, что

$$\int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\, dr = \frac{aJ_1(a\varkappa)}{\varkappa}.$$

Интенсивность диффракции в телесный угол do получается умножением $|u_P|^2$ на $R_0^2\, do$. В результате находим для интенсивности dI света, подвергнувшегося диффракции,

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\alpha^2}\, do$$

где I_0 — полная интенсивность падающего света.

---

[1]) Согласно формулам, известным из теории рядов Фурье

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} f(x)\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\, dx\right\} = f(0),$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\, dx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2}\, dy = 1.$$

Отсюда видно, что свойства функции $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right)$ действительно совпадают со свойствами δ-функции (см. примечание на стр. 70).

ГЛАВА VIII

ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 64. Запаздывающие потенциалы

В гл. V мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а в гл. VI — переменное поле, но в отсутствии зарядов. Теперь мы займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы произвольного электромагнитного поля. Этот вывод удобнее сделать в четырехмерном виде. Для этого напишем вторую пару уравнений Максвелла в виде (30,2)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i.$$

Подставим сюда F_{ik}, выраженные через потенциалы, т. е.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Тогда мы находим

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i. \tag{64,1}$$

Наложим теперь на потенциалы A_i дополнительное условие

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0; \tag{64,2}$$

написанное в трехмерной форме, оно гласит:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{64,3}$$

Это условие является обобщением тех условий, которые мы накладывали на потенциалы в ранее рассмотренных случаях. Так, для постоянного поля (64,3) превращается в $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ — условие, совпадающее с (42,3). Для электромагнитного поля в пустоте (§ 44) мы выбирали потенциалы так, чтобы $\varphi = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; такие потенциалы удовлетворяют, очевидно, и условию (64,3) [1]).

Уравнение (64,1) превращается теперь в

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \tag{64,4}$$

---

[1]) Следует отметить, что, несмотря на дополнительное условие (64,3), потенциалы φ и $\mathbf{A}$ все же остаются не вполне однозначными. Именно, к $\mathbf{A}$ можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из φ при этом вычесть $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, причем, однако, функция f теперь уже не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для **A** и для φ:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{64,5}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{64,6}$$

Для постоянного поля они превращаются в уже известные нам уравнения (36,4) и (43,4), а для переменного поля без зарядов — в уравнение (45,6). В (64,5) и (64,6) ρ и $\mathbf{j}$ суть функции, вообще говоря, от всех координат и от времени.

Решение неоднородных линейных уравнений (64,5—6) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Благодаря линейности уравнений поля истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в данном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — расстояние от начала координат (мы рассматриваем только один этот элемент).

Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{64,7}$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{64,8}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает центральной симметрией, т. е. что φ есть функция только от R. Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (64,8) приобретет вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \frac{\chi(R, t)}{R}$. Тогда для χ мы получим

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. § 46):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2. Обычно бывает удобным выбирать $f_2 = 0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{64,9}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (64,7). Это легко сделать, заметив, что при $R \to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R \to 0$ в уравнении (64,7) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta\varphi$. Тогда (64,7) переходит в известное уже нам уравнение (36,9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат (64,9) должно переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т. е.

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{64,10}$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (64,6) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно в (64,10) написать $de = \rho\, dV$ (dV — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (64,6) можно прибавить еще решение φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение (64,6) имеет вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{1}{R}\rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \varphi_0,$$
$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad dV' = dx'\,dy'\,dz'$$

(R есть расстояние от элемента объема dV до точки, в которой мы ищем значение потенциала). Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t - \frac{R}{c}}}{R} dV + \varphi_0, \tag{64,11}$$

где индекс $t - \frac{R}{c}$ показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t - \frac{R}{c}$.

Совершенно аналогично решается и уравнение (64,5). Очевидно,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{t - \frac{R}{c}}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \tag{64,12}$$

где $\mathbf{A}_0$ — решение уравнения (64,5) без правой части.

Потенциалы (64,11—12) без φ_0 и $\mathbf{A}_0$ называются запаздывающими потенциалами.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности ρ) формула (64,11) переходит в известную уже нам формулу (36,8) $\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$ для электростатического поля, а (64,12) переходит (после усреднения) в формулу (43,5) для постоянного магнитного поля.

$\mathbf{A}_0$ и φ_0 в (64,11—12) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, достаточно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако, с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются обычно условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид плоской волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R. Но этому условию, как видно из того, что мы положили $f_2 = 0$, удовлетворяет именно решение в виде (64,11—12), т. е. в виде запаздывающих потенциалов. Таким образом, в этом решении первые члены изображают собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо положить равными внешнему полю, действующему на систему.

В заключение этого параграфа применим формулы (64,11—12) к одному, произвольным образом движущемуся точечному заряду. При этом надо иметь в виду, что переход к точечному заряду не может быть произведен в этих формулах непосредственно, так как разным точкам области интегрирования соответствуют различные моменты времени $t - \frac{R}{c}$. Поэтому нужно предварительно преобразовать интегралы (64,11—12) в интегралы по элементам заряда de.

Рассмотрим элемент объема сферического слоя толщины dR, находящегося на расстоянии R от точки P, в которой мы ищем значение поля. Объем такого элемента равен $dV = dR\,df$, где df — площадь элемента сферической поверхности вырезываемого рассматриваемым элементом объема. На протяжении расстояния dR время $t - \frac{R}{c}$ меняется на $\frac{dR}{c}$. Поэтому создающий поле заряд de в рассматриваемом элементе объема должен быть написан в виде суммы заряда $\rho\, dV$ и заряда, попадающего в элемент dV в течение времени $\frac{dR}{c}$. Через единицу поверхности сферы в единицу времени проходит заряд $\rho \frac{\mathbf{vR}}{R}$ ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор от P к dV). Поэтому в объем $dV = dR\,df$ в течение времени $\frac{dR}{c}$ попадает количество заряда, равное $\rho \frac{\mathbf{vR}}{R} \frac{dR}{c} df$. Таким образом,

$$de = \rho\left(1 + \frac{\mathbf{vR}}{Rc}\right) dV,$$

так что

$$\rho\, dV = \frac{de}{1 + \frac{\mathbf{vR}}{cR}}.$$

Подставляя это в (64,11—12) и переходя к точечному заряду, находим потенциалы поля произвольно движущегося заряда в виде

$$\varphi = \frac{e}{R + \frac{\mathbf{vR}}{c}}\Bigg|_{t-\frac{R}{c}}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\,\frac{e\mathbf{v}}{R + \frac{\mathbf{vR}}{c}}\Bigg|_{t-\frac{R}{c}}. \tag{64,13}$$

Все величины (в том числе и R) берутся здесь в момент времени $t - \frac{R}{c}$. Потенциалы поля в виде (64,13) называются потенциалами Лиенарда-Вихерта.

Задача

Разложить поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда на плоские волны.

Решение: Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51. Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Взяв компоненту Фурье от уравнения

$$\Box\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t),$$

находим

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \iiint e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z$$

имеем

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\,\frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = (\mathbf{kv})$. Аналогично находим для векторного потенциала

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 c}\,\frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Наконец, для поля имеем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\,i\,\frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{kv})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{kA}_{\mathbf{k}}] = \frac{e}{2\pi^2}\,\frac{[\mathbf{kv}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

§ 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц (в один и тот же момент времени). Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными „степенями свободы". Отсюда следует, что если мы имеем систему взаимодействующих частиц (зарядов), то для ее описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. Поэтому при учете конечной скорости распространения взаимодействий, вообще говоря, невозможно описывать систему взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц и не содержащей никаких величин, связанных с собственными „степенями свободы" поля. Однако, если скорости v всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближенной функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями v/c (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка v^2/c^2.

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция Лагранжа для системы зарядов имеет вид

$$L=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{A\neq B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{65,1}$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов [см. (36,10)].

Для получения следующего приближения в функции Лагранжа поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда, находящегося во внешнем поле, есть [см. (14,3)]

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-e\varphi+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Выбрав какой-нибудь один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближенно: φ — с точностью до членов порядка v^2/c^2, а $\mathbf{A}$ — до членов порядка v/c). Подставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в приведенное выше выражение для L, мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных) Отсюда уже без труда можно найти L для всей системы.

Будем исходить из выражений (64,10—12) для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi=\int\frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R}\,dV,\qquad \mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R}\,dV.$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов, т. е. ρ и $\mathbf{j}$, не успевает сильно измениться за время R/c. Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-\frac{R}{c}}$ и $\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}$ в ряд по степеням R/c. Для скалярного потенциала мы находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV}{R}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\,dV+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\,dV$$

(ρ без индексов есть ρ в момент времени t; $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int\rho\,dV$ есть полный заряд, являющийся не зависящей от времени постоянной. Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV}{R}+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\,dV. \tag{65,2}$$

Аналогично можно поступить с $\mathbf{A}$. Но выражение для векторного потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а при подстановке в функцию Лагранжа умножается еще раз на $1/c$. Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов второго порядка, то в разложении $\mathbf{A}$ достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\rho\mathbf{v}}{R}\,dV \tag{65,3}$$

(мы подставили $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$).

Предположим, что имеется только один точечный заряд e (для нескольких надо взять сумму получающихся выражений). Тогда для потенциалов создаваемого им поля получаем из (65,2—3)

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2},\qquad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65,4}$$

где R — расстояние от заряда.

Выберем вместо φ и $\mathbf{A}$ другие потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$, сделав преобразование:

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f,$$

причем в качестве f выберем функцию

$$f=\frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда мы получим

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}\ ^{1)}.$$

Для вычисления $\mathbf{A}'$ заметим раньше всего, что $\nabla\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. Операция ∇ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение $\mathbf{A}'$. Поэтому ∇R равен единичному вектору $\mathbf{n}$, направленному от заряда e к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

Для вычисления $\dot{\mathbf{n}}$ пишем

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Но производная $\dot{\mathbf{R}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость — $\mathbf{v}$ заряда, а производную $\dot{R}$ легко определить, дифференцируя равенство $R^2 = \mathbf{R}^2$, т. е. написав

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{v}.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R}.$$

Подставляя все это в выражение для $\mathbf{A}'$, находим окончательно:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}. \tag{65,5}$$

Если имеется несколько зарядов, то надо, очевидно, просуммировать по всем зарядам.

Подставляя эти выражения для потенциалов в функцию Лагранжа для заряда во внешнем поле, найдем функцию Лагранжа L_A заряда e_A (при заданном движении всех остальных зарядов). При этом нужно кинетическую энергию $-m_Ac^2\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}$ тоже разложить по степеням v_A/c, оставляя члены до второго порядка. Таким образом, мы находим следующее выражение для L_A:

$$L_A = \frac{m_Av_A^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_A v_A^4}{c^2} - e_A\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} + \frac{e_A}{2c^2}\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\mathbf{n})]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением e_A; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении между e_B и e_A).

---

1) Потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$ уже не будут удовлетворять уравнениям д'Аламбера, так как они не будут удовлетворять условию (64,3). В то же время, конечно, $\mathbf{A}'$ и φ' будут давать верный результат для поля, если φ и $\mathbf{A}$ дают этот результат.

Отсюда уже не представляет труда найти L для всей системы. Легко сообразить, что эта функция равна не сумме L_A для всех зарядов, а имеет вид

$$L=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}+\sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}+$$
$$+\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2c^2 R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B+(\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\mathbf{n})]. \qquad (65,6)$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция L переходит в приведенную выше L_A. Выражение (65,6) и определяет функцию Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка.

Наконец, определим еще функцию Гамильтона системы зарядов в том же приближении. Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения $\mathcal{H}$ по L; однако, проще поступить следующим образом. Второй и четвертый члены в (65,6) представляют собой малую поправку к $L_0=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$. С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении L и $\mathcal{H}$ малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причем изменение L рассматривается при постоянных координатах и скоростях, а изменение $\mathcal{H}$ — при постоянных координатах и импульсах [1]).

Поэтому мы можем сразу написать $\mathcal{H}$, вычтя из $\mathcal{H}_0=\sum_A \frac{p_A^2}{2m_A}+\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ те же второй и четвертый члены из (59,6), заменив в них

---

[1]) Если функция Лагранжа зависит, кроме координат и скорости, еще и от некоторого параметра λ, то

$$dL=F\,dq+p\,d\dot{q}+\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda$$

$\left(F=\frac{\partial L}{\partial q},\ p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\text{ — обобщенные сила и импульс}\right)$. Отсюда для $\mathcal{H}=p\dot{q}-L$ имеем

$$d\mathcal{H}=-F\,dq+\dot{q}\,dp-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda,$$

так что

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right)_{q,p}=-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}.$$

При небольшом изменении параметра λ $\mathcal{H}$ и L тоже немного меняются; из полученного равенства видно, что для изменений $\delta\mathcal{H}$ и δL имеет место равенство $(\delta\mathcal{H})_{q,p}=-(\delta L)_{q,\dot{q}}$ (индексы под скобками указывают, какие величины надо рассматривать как постоянные).

скорости на импульсы ($\mathbf{v}_A = \mathbf{p}_A/m_A$). Таким образом,

$$\mathscr{H} = \sum_A \frac{p_A^2}{2m_A} - \sum_A \frac{p_A^4}{8c^2m_A^3} + \sum_{A>B} \frac{e_Ae_B}{R_{AB}} - \sum_{A>B} \frac{e_Ae_B}{2c^2m_Am_B} [\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B + (\mathbf{p}_A\mathbf{n})(\mathbf{p}_B\mathbf{n})]. \quad (65,7)$$

Задача

Написать функцию Лагранжа во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из нее движение системы как целого.

Решение: Выбираем систему отсчета, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю, т. е. $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_2} = 0$, где L определяется из (65,6). Вводя относительную скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, выражаем отсюда $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ через $\mathbf{v}$ (все вычисления производим с точностью до членов порядка $1/c^2$):

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \frac{m_1m_2(m_2-m_1)}{2(m_1+m_2)^3c^2}\mathbf{v}^3 + \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}[\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{vn})],$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \frac{m_1m_2(m_2-m_1)}{2(m_1+m_2)^3c^2}\mathbf{v}^3 + \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}[\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{vn})].$$

Подставляя это в L, находим с той же точностью:

$$L = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}v^2 + \frac{m_1m_2(m_1^3+m_2^3)}{8(m_1+m_2)^4c^2}v^4 - \frac{e_1e_2}{R} - \frac{e_1e_2}{2Rc^2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}[v^2 + (\mathbf{vn})^2].$$

§ 66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на далеком расстоянии от этой системы (т. е. на расстоянии, большом по сравнению с размерами системы). При этом мы опять будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}\, dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}\, dV.$$

Выберем начало координат O где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-вектор из O в точку P, где мы ищем значение поля, обозначим через $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор заряда $de = \rho\, dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P пусть будет $\mathbf{R}$. Очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ и $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. При интегрировании в φ и $\mathbf{A}$ $\mathbf{R}_0$ считается постоянным.

На больших расстояниях от системы зарядов $R_0 \gg r$. Поэтому угол, образуемый в точке P векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$, весьма мал. Умножая равенство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ на $\mathbf{n}$ и замечая, что $\mathbf{R}_0\mathbf{n} = R_0$, получаем приближенно $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (вместо $\mathbf{Rn}$ можно писать просто R, так как разница между ними второго порядка малости). Подставим это в выражение для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подинтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с R_0. В $t - R/c$, однако, этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность этого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Таким образом, для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов находим выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV, \tag{66,1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV. \tag{66,2}$$

На больших расстояниях от системы зарядов поле в не очень больших участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Поэтому напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ этого поля связаны посредством соотношения $\mathbf{H} = [\mathbf{nE}]$ [см. (46,4)]. Для определения поля достаточно, следовательно, вычислить только векторный потенциал $\mathbf{A}$, с помощью которого можно найти поле $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Заметим, что рассматривать поле как плоскую волну можно на расстояниях, больших не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной создаваемых или, как говорят, излучаемых системой электромагнитных волн.

Рассмотрим электромагнитную волну, обладающую определенной частотой. Она может представлять собой одну из компонент разложения некоторой не монохроматической волны в ряд или интеграл Фурье. Векторный потенциал такой волны имеет вид $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$, где ω — ее частота; аналогичный вид имеют, конечно, и другие величины, определяющие поле волны. Плотность тока (и плотность заряда) излучающей системы тоже можно разложить в ряд или интеграл Фурье, так что за испускание определенной монохроматической компоненты ответственна соответствующая компонента тока $\mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t}$. Очевидно, что волна $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ определяется формулой (66,2), где вместо $\mathbf{j}$ надо подставить соответствующую компоненту $\mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда

$$\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}\right)} dV. \tag{66,3}$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя волновой вектор $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, имеем [1])

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}} dV. \tag{66,4}$$

§ 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{rn}/c$ в подинтегральных выражениях (66,1—2) для запаздывающих потенциалов можно пренебречь в случаях, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Предположим, что движение зарядов в рассматриваемой системе является в общем стационарным, и пусть T

---

[1]) Мы пишем выражение для $\mathbf{A}_\omega$ в комплексном виде. Следует помнить, что всегда в таких случаях следует брать действительную часть от $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$.

есть порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка этого же T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{rn}/c$ будет порядка a/c. Для того, чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что это же условие (67,1) можно получить и из (66,4). В подинтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в области порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{kr}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов. Из $a \ll \lambda$ находим тогда

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а, следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Векторный потенциал (66,2) поля на далеких расстояниях имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67,3}$$

где $t' = t - R_0/c$. t' теперь уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

(суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс t' — все величины берутся в момент времени t'). Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ есть дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

Теперь уже легко определить и поля **E** и **H**. Для **H** имеем

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}.$$

При дифференцировании произведения $\dot{\mathbf{d}} \frac{1}{R_0}$ можно считать множитель $1/R_0$ постоянным (так как при дифференцировании $1/R_0$ получается член, пропорциональный $1/R_0^2$, которым можно пренебречь по сравнению с членом с $1/R_0$) и дифференцировать только по R_0, содержащемуся в t'. Мы находим тогда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR_0} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{d}}.$$

Для всякого вектора $\mathbf{a}(t')$, являющегося функцией от t', имеет место соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(t') = \left[\operatorname{grad} t' \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt'}\right].$$

Но $\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$, и потому

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(t') = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{n}]. \tag{67,5}$$

Таким образом, магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{67,6}$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{67,7}$$

Отметим, что поле излучаемой волны обратно пропорционально расстоянию от излучающей системы. Далее, излучение в рассматриваемом приближении определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется дипольным.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать только в случае, если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды, очевидно, не излучают.

Излучение электромагнитных волн сопровождается, конечно, излучением энергии. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга [см. (31,2)]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}].$$

Поскольку в нашем случае $\mathbf{E} = [\mathbf{Hn}]$, а $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$, то

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Подставляя сюда (67,6), находим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3 R_0^2} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 \mathbf{n}. \tag{67,8}$$

Вектор Пойнтинга, т. е. поток энергии, направлен по направлению распространения волны.

Найдем количество энергии dJ, протекающей в единицу времени через элемент поверхности df шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом R_0. Это количество равно, очевидно, потоку S, помноженному на df, т. е.

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3 R_0^2} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 df.$$

Но элемент поверхности $df = R_0^2 do$, где do — телесный угол, под которым df видно из начала координат. Следовательно,

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 do. \tag{67,9}$$

Это и есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в телесный угол do. Мы видим, что это количество одинаково для всех расстояний (в одинаковые для них моменты t'). Так, конечно, и должно быть, так как излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве, нигде не накопляясь и не исчезая.

Исходя из (67,9), можно вычислить полное количество энергии J, излучаемое системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого введем сферические координаты с полярной осью вдоль вектора $\ddot{\mathbf{d}}$. Полярный угол и азимут вектора $\mathbf{n}$ в этих координатах пусть будут θ и φ. θ есть, следовательно, угол между $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Тогда $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и (67,9) переходит в

$$dJ = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрируя по $d\varphi$ от 0 до 2π и по $d\theta$ от 0 до π, находим

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{67,10}$$

Если имеется всего один заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$J = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \tag{67,11}$$

Отметим, что система, состоящая из частиц, у которых отношение зарядов к массе одинаково, не может излучать (дипольно). Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const.} \sum m\mathbf{r},$$

где const. есть одинаковое для всех зарядов отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Задачи

1. Определить полное излучение за время одного оборота при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов.

Решение: Выберем начало координат в центре инерции обеих частиц. Тогда (67,10) дает

$$J = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{em' - e'm}{m + m'}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2,$$

где e, m и e', m' — заряды и массы частиц, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор между ними. Согласно уравнениям движения $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{a}{r^3}\mathbf{r}$ (μ — приведенная масса, $a = |ee'|$), так что

$$J = \frac{2a^2}{3c^3\mu^2}\left(\frac{em' - e'm}{m + m'}\right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Уравнение орбиты есть, как известно, $p/r = 1 + \varepsilon\cos\varphi$, где $p = M^2/a\mu$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu a^2}}$ есть параметр и эксцентриситет орбиты ($M = \mu r^2\dot{\varphi}$ — момент импульса, $\mathscr{E}$ — энергия частицы, причем для эллиптического движения $\mathscr{E} < 0$). С помощью равенства $dt = \frac{\mu r^2}{M}d\varphi$ интегрирование по времени можно заменить интегрированием по углу $d\varphi$ (от 0 до 2π). В результате находим полное излучение $\Delta\mathscr{E} = \int J\,dt$ за оборот в виде

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\pi}{3c^3}\sqrt{\frac{a^3\mu}{p^5}}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2(2 + \varepsilon^2).$$

2. Определить полное излучение за время пролетания одного заряда мимо другого.

Решение: В случае притяжения зарядов траекторией является гипербола $p/r = 1 - \varepsilon\cos\varphi$, а в случае отталкивания $p/r = -1 + \varepsilon\cos\varphi$. Ее асимптоты образуют с ее осью угол φ_0, определяемый из $\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$, а угол отклонения при пролетании частицы равен $\chi = \pi - 2\varphi_0$. Решение такое же, как в задаче 1, но интегрирование по $d\varphi$ производится между $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$. В результате находим:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{3c^3 a}\operatorname{tg}^5\frac{\chi}{2}\left\{(\pi - \chi)\left(1 + \frac{1}{2\sin^2\frac{\chi}{2}}\right) - 3\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2$$

(угол отклонения χ определяется из соотношения $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{a}$, v_0 — скорость при бесконечном расстоянии между частицами, ρ — „прицельное расстояние", так что $\mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}$, $M = \mu v_0\rho$).

В случае отталкивания зарядов при „лобовом" столкновении ($\rho = 0$) угол отклонения $\chi = \pi$, и написанная формула переходит в

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{45c^3 a}\left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'}\right)^2.$$

3. Параллельный поток частиц (с зарядами e и массами m) рассеивается зарядами e' (с массами m'; e и e' имеют один знак). Определить полное излучение, отнесенное к единице плотности потока.

Решение: Если плотность равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка частиц переходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих „прицельнсе расстояние" ρ между ρ и $\rho+d\rho$, равно $2\pi\rho\, d\rho$. Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения одной частицы на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞. С помощью $\Delta\mathscr{E}$ из задачи 2 и соотношения $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}=\frac{\mu v_0^2\rho}{a}$ находим

$$\int_0^\infty 2\pi\rho\,\Delta\mathscr{E}\,d\rho=\frac{14\pi\mu v_0 a}{9c^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2.$$

4. Определить распределение по направлениям полного излучения при пролетании одного заряда мимо другого, если скорость заряда настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

Решение: Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть a/ρ ($\mu v^2 \gg a/\rho$). Выберем направление движения в качестве оси X, а начало координат — опять в центре инерции. В первом приближении траектория определяется как $x=vt$, $y=\rho$. В следующем приближении уравнения движения дают

$$\mu\ddot{x}=\frac{a}{r^2}\,\frac{x}{r}=\frac{avt}{r^3},\qquad \mu\ddot{y}=\frac{a}{r^2}\,\frac{y}{r}=\frac{a\rho}{r^3},$$

где для r можно писать $r=\sqrt{\rho^2+v^2t^2}$. Интегрируя с помощью этих выражений формулу (67,9) по времени от $-\infty$ до $+\infty$, находим для полного излучения в телесный угол do:

$$\Delta\mathscr{E}_n\,do=\frac{a^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2(4-3n_x^2-n_y^2)\,do$$

(n_x, n_y — компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ в направлении do).

§ 68. Квадрупольное и магнитное дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала (66,2). Если размеры системы малы по сравнению с длиной волны, то эти члены, вообще говоря, значительно меньше первого члена, дающего дипольное излучение. Они, однако, существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы зарядов равен нулю, и потому дипольное излучение отсутствует.

Разлагая (66,2):

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV$$

по степеням $\mathbf{rn}/c$, находим с точностью до членов первого порядка

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\,dV+\frac{1}{c^2R_0}\,\frac{\partial}{\partial t'}\int(\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

Подставляя $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, переписываем это в виде

$$\mathbf{A}=\frac{\sum e\mathbf{v}'}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\sum e\mathbf{v}'(\mathbf{r}'\mathbf{n}). \tag{68,1}$$

(Ниже, как и в § 67, мы будем для краткости опускать индекс t'.)

Преобразуем выражение для $\mathbf{A}$ следующим образом. Во втором члене можно написать

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}].$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы, а $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ — ее магнитный момент. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$. Действительно, если прибавить к $\mathbf{A}$ вектор вида $f\mathbf{n}$, то магнитное поле не изменится, так как согласно (67,5)

$$\operatorname{rot} f\mathbf{n}=\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}[\mathbf{nn}]=0$$

(электрическое поле $\mathbf{E}=[\mathbf{Hn}]$, т. е. целиком определяется магнитным полем, и, следовательно, при указанном преобразовании тоже не меняется).

Прибавим на этом основании к полученному для $\mathbf{A}$ выражению вектор $-\frac{\mathbf{n}}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum er^2$. Мы получим тогда для потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2}\sum e\left[\mathbf{r}(\mathbf{nr})-\frac{1}{3}\mathbf{n}r^2\right]+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}].$$

Но стоящее под знаком $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ выражение есть не что иное, как произведение $n_\beta D_{\alpha\beta}$ вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right)$ (см. § 41). Вводя вектор $\mathbf{D}$ с компонентами $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]. \tag{68,2}$$

Зная $\mathbf{A}$, мы можем теперь определить поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ излучения. С помощью общей формулы (67,5) находим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]+\frac{1}{c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+\frac{1}{c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\ddot{\mathfrak{m}}]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{68,3}$$

Зная магнитное поле, легко определить интенсивность dJ излучения в телесном угле do, совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 67 для дипольного излучения, т. е. по формуле $dJ=\frac{c}{4\pi}H^2R_0^2\,do$. Мы определим здесь полное излучение, т. е. энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним dJ по всем направлениям $\mathbf{n}$; полное излучение равно, очевидно, этому среднему, умноженному на 4π. При усреднении квадрата магнитного поля все произведения первого, второго и третьего членов в $\mathbf{H}$ друг на друга исчезают, так что остаются только средние квадраты каждого из них. Несложные вычисления [1]) дают в результате следующее выражение для J:

$$J=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{5c^5}\dddot{\mathbf{D}}_{\alpha\beta}^2+\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{m}}^2. \tag{68,4}$$

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей; они называются соответственно дипольным, квадрупольным и магнитным дипольным излучениями.

Задача

Определить полное излучение при „лобовом" столкновении двух частиц с одинаковыми зарядами e и массами m.

Решение: Дипольное излучение в этом случае отсутствует. Выбираем начало координат в центре инерции, а ось X — вдоль направления движения. Для квадрупольного момента имеем

$$D_{xx}=\frac{1}{6}ex^2,\quad D_{yy}=D_{zz}=-\frac{1}{12}ex^2.$$

Из (68,4) находим

$$J=\frac{e^2}{30c^5}(x\dddot{x}+3\dot{x}\ddot{x})^2.$$

Уравнение движения дает $\frac{m}{2}\ddot{x}=\frac{e^2}{x^2}$; интегрирование по времени удобно заменить интегрированием по dx с помощью $\dot{x}=\sqrt{\frac{4\mathscr{E}}{m}-\frac{4e^2}{mx}}$, где $\mathscr{E}=\frac{mv_0^2}{4}$ — энергия относительного движения, а v_0 — скорость на бесконечности. В результате находим

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{1}{1575}\frac{mv_0^7}{c^5}.$$

---

[1]) Приведем удобный метод усреднения произведений компонент единичного вектора. Поскольку $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, то $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным тензором, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, т. е. $\overline{n_\alpha n_\beta}=a\delta_{\alpha\beta}$; упрощая по паре индексов α, β и помня, что $n_\alpha^2=1$, находим, что $a=1/3$.

Для среднего значения произведения четырех компонент пишем аналогично

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}=a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

(имея в виду симметричность $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ по всем четырем индексам); упрощая по парам индексов α, β и γ, δ, находим $a=1/15$.

§ 69. Излучение на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и значительно бо́льших, чем размеры излучающей системы). Мы будем в этом параграфе попрежнему считать, что длина волны велика по сравнению с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с размерами системы, но порядка длины волны. При этом мы можем попрежнему пользоваться формулами § 66, выведенными для поля на расстояниях, больших только по сравнению с размерами системы, но, однако, не можем считать теперь поле даже в небольших участках плоской волной. Поэтому для определения поля необходимо вычислить как $\mathbf{A}$, так и φ.

Мы будем рассматривать компоненты Фурье искомого поля. Для каждой из этих монохроматических компонент мы можем воспользоваться общей формулой (66,4)

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\,dV.$$

Поскольку размеры системы малы по сравнению с длиной волны, то $\mathbf{kr} \ll 1$, и мы можем разложить в подинтегральном выражении $e^{i\mathbf{kr}}$ в ряд по степеням $\mathbf{kr}$. Ограничиваясь в векторном потенциале членом нулевого порядка, имеем:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega dV. \tag{69,1}$$

Это выражение можно написать в другом виде, заметив, что

$$\int \mathbf{j}_\omega dV = \left(\int \mathbf{j}\, dV\right)_\omega = \left(\sum e\mathbf{v}\right)_\omega = \dot{\mathbf{d}}_\omega,$$

а компонента Фурье от производной $\dot{\mathbf{d}}$ связана с соответствующей компонентой $\mathbf{d}_\omega$ посредством соотношения

$$\dot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}\right) = -i\omega\,\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{d}}_\omega = -i\omega\mathbf{d}_\omega.$$

Подставляя эти соотношения в (69,1), находим для векторного потенциала поля

$$\mathbf{A}_\omega = -ik\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\mathbf{d}_\omega. \tag{69,2}$$

Скалярный потенциал φ_ω можно получить непосредственно из $\mathbf{A}_\omega$, воспользовавшись общим условием (64,3) $\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, налагаемым на потенциалы. Для компонент Фурье это условие дает

$$ik\varphi_\omega = \operatorname{div}\mathbf{A}_\omega, \tag{69,3}$$

и, подставляя (69,2), находим, помня, что $\mathbf{d}_\omega$ есть постоянная,

$$\varphi_\omega = -\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \tag{69,4}$$

Легко определить также и поля $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$. Подставляя в $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$ компоненты Фурье всех этих величин, находим:

$$\mathbf{H}_\omega = \operatorname{rot}\mathbf{A}_\omega, \qquad \mathbf{E}_\omega = ik\mathbf{A}_\omega - \operatorname{grad}\varphi_\omega, \tag{69,5}$$

и с помощью (69,2), (69,4) получаем:

$$\mathbf{H}_\omega = ik\left[\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right], \tag{69,6}$$

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\mathbf{d}_\omega + (\mathbf{d}_\omega \nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \tag{69,7}$$

Формулы (69,6) и (69,7) определяют поле на расстояниях порядка длины волны. В этих формулах, конечно, нельзя теперь пренебречь членами, содержащими $1/R_0^2$, так как их отношение к членам с $1/R_0$ порядка $1/kR_0$, а $kR_0 \approx 1$.

Произведенное здесь нами разложение можно было бы довести и до членов более высоких порядков, которые определяются соответствующими мультипольными моментами системы.

§ 70. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью, не являющейся малой по сравнению со скоростью света. Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, не применимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать только в случае одной движущейся частицы; для системы зарядов не существует, очевидно, системы отсчета, в которой все частицы одновременно покоились бы).

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени dt энергию

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w_0^2\, dt \tag{70,1}$$

[согласно формуле (67,11)], где w_0 — ускорение частицы в этой же системе отсчета. Перепишем теперь эту формулу в четырехмерном виде, в котором она будет применима в произвольной системе отсчета. Для этого заметим, что $w_0^2 = c^4 w_k^2$, где w_k есть 4-ускорение частицы в любой системе отсчета (см. задачу 1 § 7). Далее, вместо излученной энергии $d\mathcal{E}$ мы должны писать теперь „излучение 4-импульса“ $\frac{c}{i}\, dP_i$, поскольку энергия (умноженная на i/c) является временной компонентой

4-импульса; вместо же dt надо по аналогичной причине писать dx_i/ic. Мы находим, таким образом,

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i ds, \tag{70,2}$$

где u_k — 4-скорость частицы. Легко проверить, что в системе отсчета, где $v=0$, временная компонента этого уравнения действительно дает (70,1); пространственные же компоненты дают для излучения импульса в единицу времени $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=0$ (при $v=0$ пространственные компоненты u_k тоже равны нулю). Последний результат можно получить и непосредственно, определяя излучение импульса как интеграл от потока импульса $T_{\alpha\beta}$ (см. § 32 и 33) по замкнутой поверхности, охватывающей частицу; в системе отсчета, в которой $v=0$, поле определяется формулами (67, 6—7), и легко проверить, что указанный интеграл действительно равен нулю.

Обычно представляет интерес полное излучение за все время пролетания частицы через данное электромагнитное поле (напоминаем, что равномерно движущийся заряд вообще не излучает). Оно равно интегралу от (70,2), т. е.

$$\Delta P_i = \frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i. \tag{70,3}$$

Эту формулу можно написать в другом виде, выразив в ней 4-ускорения $\frac{du_k}{ds}$ через тензор электромагнитного поля посредством уравнений движения (21,4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u_l.$$

Мы находим при этом

$$\Delta P_i = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u_l)^2\, dx_i. \tag{70,4}$$

Временная компонента этого уравнения дает полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$. Подставляя для всех четырехмерных величин их выражения через соответствующие трехмерные величины, находим

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{70,5}$$

В соответствующем выражении для полного излучения импульса $\Delta\mathbf{P}$ под интегралом стоит еще множитель $\mathbf{v}$.

Задача

Определить полное излучение заряда e, пролетающего в кулоновском поле (с потенциалом $\varphi = e'/r$) со скоростью, близкой к скорости света.

Решение: При пролетании через поле заряд почти не отклоняется. Поэтому в (70,5) можно считать $\mathbf{v}$ постоянной, так что $\mathrm{E}=\frac{e'}{r^2}=\frac{e'}{\rho^2+v^2t^2}$ (см. задачу 4 § 67). В результате находим

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\pi e^4e'^2}{12m^2c^3v\rho^3}\frac{1-\frac{3v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

§ 71. Излучение малых частот при столкновениях

Вернемся опять к случаю движения частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассмотрим излучение при столкновении заряженных частиц. Поскольку столкновение происходит в течение конечного промежутка времени, то излучение исчезает при $t\to\pm\infty$, так что мы можем разложить поле излучения в интеграл Фурье. Обозначая посредством f любую из компонент поля, пишем

$$f=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega. \tag{71,1}$$

Для компонент Фурье поля f_ω мы имеем при этом

$$f_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}fe^{i\omega t}\,dt. \tag{71,2}$$

Заметим, что, поскольку f действительно, $f_{-\omega}=f^*_\omega$.

Полное количество излученной за время столкновения энергии определяется интегралом от квадрата поля $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^2\,dt$. Выразим его через интенсивность отдельных монохроматических компонент. Пользуясь (71,1) и (71,2), находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}fe^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega f_{-\omega}\,d\omega, \tag{71,3}$$

и помня, что $f_{-\omega}=f^*_\omega$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2dt=4\pi\int_0^\infty|f_\omega|^2\,d\omega. \tag{71,4}$$

Поскольку все скорости предполагаются малыми по сравнению с c, мы можем воспользоваться формулой (67,10) для излучения в единицу времени. Полное излучение $\Delta\mathscr{E}$ энергии за все время столкновения тогда равно:

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{2}{3c^3}\int\ddot{\mathbf{d}}^2\,dt,$$

где $\mathbf{d}$ есть дипольный момент системы из всех сталкивающихся частиц. Согласно (71,4) мы можем написать для полного излучения $(\Delta\mathscr{E})_\omega d\omega$ в данном интервале $d\omega$ частот выражение

$$(\Delta\mathscr{E})_\omega = \frac{8\pi}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}_\omega^2, \tag{71,5}$$

где

$$\mathbf{d}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}e^{i\omega t}\,dt \tag{71,6}$$

есть соответствующая компонента Фурье от вектора $\ddot{\mathbf{d}}$.

Написанные формулы особенно упрощаются для малых частот, удовлетворяющих условию

$$\omega\tau \ll 1, \tag{71,7}$$

где τ — порядок величины продолжительности столкновения. В подинтегральном выражении в (71,6) $\ddot{\mathbf{d}}$ отлично от нуля только во время столкновения; поэтому при соблюдении условия (71,7) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что мы можем заменить $e^{i\omega t}$ единицей. Тогда

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}\,dt = \frac{1}{2\pi}(\dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_1),$$

где $\dot{\mathbf{d}}_1$ и $\dot{\mathbf{d}}_2$ — значения вектора $\dot{\mathbf{d}}$ до и после столкновения. С другой стороны, $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$ и потому $\dot{\mathbf{d}} = \sum e\mathbf{v}$. Следовательно,

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi}\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц до и после столкновения (индекс, указывающий номер частицы, мы для краткости опускаем). Подставляя это выражение в (71,5), находим окончательно для излучения малых частот при столкновении

$$(\Delta\mathscr{E})_\omega = \frac{2}{3\pi c^3}\left(\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\right)^2. \tag{71,8}$$

В частности, если имеется всего одна излучающая частица (пролетающая через поле других частиц, которые можно считать неподвижными при столкновении), то

$$(\Delta\mathscr{E})_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2. \tag{71,9}$$

Мы видим, что при малых частотах излучение не зависит от частоты. Иначе можно сказать, что при стремлении ω к нулю излучение $(\Delta\mathscr{E})_\omega$ стремится к конечному пределу.

Можно было бы получить аналогичные формулы и для случая скоростей, сравнимых со скоростью света. Для этого удобно воспользоваться потенциалами поля в форме (64,13). Мы, однако, не будем останавливаться на этом.

Задача

Определить излучение малых частот при столкновении двух заряженных частиц.

Решение: Вводя относительную скорость обеих частиц и скорость их центра инерции, находим из (71,8):

$$(\Delta\mathscr{E})_\omega = \frac{2\mu^2}{3\pi c^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2,$$

где m, m' и e, e' — массы и заряды обеих частиц, μ — приведенная масса, а $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — относительная скорость частиц до и после столкновения. Поскольку относительная скорость в результате столкновения не меняется по абсолютной величине, то $(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2 = 2v_0^2\sin^2\frac{\chi}{2}$, где v_0 — относительная скорость на бесконечном расстоянии между частицами, а χ — угол отклонения в системе отсчета, в которой покоится центр инерции. Для χ имеем $\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{|ee'|}$, где ρ — „прицельное расстояние" (см. задачу 2 § 67). В результате находим

$$(\Delta\mathscr{E})_\omega = \frac{4\mu^2 v_0^2}{3\pi c^3}\left(\frac{e}{m}-\frac{e'}{m'}\right)^2\frac{1}{1+\left(\frac{\mu v_0^2\rho}{ee'}\right)^2}.$$

Поскольку „время столкновения" $\tau\sim\rho/v_0$, то эта формула применима при $\rho\omega/v_0\ll 1$.

§ 72. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\varphi = \int\frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}\,dV$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\,dV; \tag{72,1}$$

первых членов разложения (см. § 65) мы здесь для краткости писать не будем. По тем же причинам, что и при выводе (65,3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{j}\,dV. \tag{72,2}$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}+\operatorname{grad} f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\, dV = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\, dV.$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, имеем для первого члена $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Во втором же члене пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. § 66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$ и второй член обращается в $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \qquad (72,3)$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$, поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$ равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \qquad (72,4)$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению некоторых дополнительных, действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65,6); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарные движения, и вычислим среднюю работу, производимую полем (72,4) за единицу времени. На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \qquad (72,5)$$

В единицу времени она производит работу, равную $\mathbf{fv}$, так что полная работа над всеми зарядами равна сумме по зарядам:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает (ср. § 43), так что средняя работа оказывается равной

$$\overline{\sum \mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \qquad (72,6)$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятая с обратным знаком) потеря энергии системой в единицу времени благодаря излучению [см. (67,10)]. Таким образом, возникающие в третьем приближении силы (72,5) описывают обратное действие излучения на испускающие его заряды. Эти силы называются торможением излучением или лоренцовыми силами трения.

Торможение излучением имеет место даже и при наличии всего лишь одного заряда. Оно равно тогда

$$\mathbf{f}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{72,7}$$

Для одного заряда можно всегда выбрать такую систему отсчета, в которой он в данный момент покоится в начале координат. Легко видеть, что в такой системе отсчета все дальнейшие члены разложения силы, оказываемой зарядом самим на себя в результате излучения, обращаются в нуль. Действительно, все более высокие члены разложения поля заряда содержат, как легко сообразить, наряду с высшими производными радиуса-вектора $\mathbf{R}$ непременно также его самого или его первую производную $\dot{\mathbf{R}}$, т. е. скорость $\mathbf{v}$ заряда. Но в рассматриваемой системе отсчета $\mathbf{v}=0$, а для вычисления силы $\mathbf{f}$ мы должны взять значение поля в точке нахождения самого заряда, т. е. положить $\mathbf{R}=0$, так что высшие члены разложения $\mathbf{f}$ действительно исчезают. Таким образом, в случае одного заряда формула (72,3) является как бы точной формулой для силы обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой скорость исчезает.

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда „самого на себя“ с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (72,7), есть

$$m\dot{\mathbf{v}}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение имеет кроме тривиального решения $\mathbf{v}=\mathrm{const}$. еще решение, при котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $e^{\frac{2e^2}{3c^3}t}$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно „самоускоряться“. Абсурдность этого результата и свидетельствует об ограниченной применимости формулы (72,7).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к этому абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся в действительности в упоминавшейся выше (§ 37) бесконечной электромагнитной „собственной массе“ элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим по существу приписываем ему формально бесконечную же отрицательную „собственную массу“ не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне однозначной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к той, которую мы здесь рассматривали.

При движении заряда во внешнем поле уравнение движения с учетом торможения излучения имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \qquad (72,8)$$

По изложенным соображениям это уравнение применимо только в тех случаях, когда сила торможения мала по сравнению с силой, происходящей от внешнего поля. Пусть на заряд падает электромагнитная волна с частотой ω. Сила, действующая на заряд, есть $e\mathbf{E}$ (силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ можно пренебречь в виду малости v/c). Под влиянием этой силы он приобретает ускорение $\frac{e}{m}\mathbf{E}$, и потому торможение излучением есть $\frac{2}{3}\frac{e^3}{mc^2}\dot{\mathbf{E}}$. Но $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$. Поэтому условие малости $\frac{2e^3}{3mc^2}\dot{\mathbf{E}}$, по сравнению с $e\mathbf{E}$, дает

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$,

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \qquad (72,9)$$

Таким образом, формула (72,7) для торможения излучением применима в тех случаях, когда длина падающей на заряд волны велика по сравнению с „радиусом“ заряда e^2/mc^2. Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой теряет свою применимость классическая электродинамика (см. § 37).

Выведем релятивистское выражение для торможения излучения (для одного заряда), применимое и для движения со скоростями порядка скорости света. Эти силы будут теперь 4-вектором f_i, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виде

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k + f_i. \qquad (72,10)$$

Для определения f_i заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $\mathbf{f}/c$ (72,7). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет соотношению $f_iu_i = 0$, вытекающему из (72,10) в виду того, что $u_i\frac{du_i}{ds} = 0$ (7,6) и что $u_iu_kF_{ik} = 0$, поскольку тензор F_{ik} антисимметричен. Так как временная компонента 4-силы f_i должна в предельном случае $v = 0$ обращаться в нуль (эта компонента равна, как мы знаем, работе $\mathbf{fv}$ силы $\mathbf{f}$, обращающейся в нуль при

$\mathbf{v}=0$), то мы можем прибавить к написанному выражению сил только 4-вектор вида αu_i. Скаляр α надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $f_i u_i = 0$. В результате находим

$$f_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + u_i u_k \frac{d^2 u_k}{ds^2}\right). \tag{72,11}$$

§ 73. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит, как говорят, рассеяние первоначальной волны.

Рассеяние удобнее всего характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии, падающего на систему излучения. Это отношение имеет, очевидно, размерность площади и называется эффективным сечением рассеяния.

Пусть dJ есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 сек.) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда эффективное сечение рассеяния (в телесный угол do) есть

$$d\sigma = \frac{\overline{dJ}}{\overline{S}} \tag{73,1}$$

(черта над буквой означает среднее по времени). Интеграл σ от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное эффективное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая прямолинейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Мы будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, есть $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент есть $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{73,2}$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (67,9) для дипольного излучения (мы имеем право сделать это, поскольку скорость, приобретаемая зарядом под влиянием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света). Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (73,2) в (67,9), находим

$$dJ = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\mathbf{En}]^2 \, do.$$

С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Отсюда мы находим эффективное сечение рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, do, \tag{73,3}$$

где θ — угол между направлением рассеяния (вектором $\mathbf{n}$) и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное эффективное сечение σ. Для этого выберем сферические координаты с началом в месте нахождения заряда и полярной осью вдоль $\mathbf{E}$. Тогда $do = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$; подставляя это и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\varphi$ от 0 до 2π, находим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{73,4}$$

Наконец, вычислим эффективное сечение $d\sigma$ в случае, когда падающая волна не поляризована (естественный свет). Для этого мы должны усреднить (73,3) по всем направлениям вектора $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны. Выберем систему координат с осью Z по направлению распространения падающей волны (по направлению ее волнового вектора $\mathbf{k}$) и плоскостью YZ, в которой лежат $\mathbf{k}$ и направление $\mathbf{n}$ рассеянной волны. Вектор $\mathbf{E}$ лежит тогда в плоскости XY (см. рис. 14). ϑ есть угол между направлением падающей и рассеянной волны; $\cos\theta$ есть, очевидно, проекция единичного вектора $\mathbf{n}$ на направление $\mathbf{E}$.

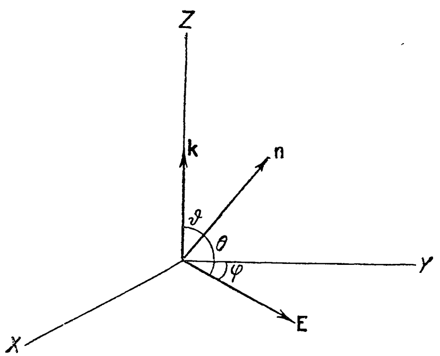

Рис. 14.

Эту проекцию можно получить, с другой стороны, проецируя $\mathbf{n}$ сначала на ось Y, а потом эту проекцию — на направление $\mathbf{E}$. Мы находим, таким образом, что $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$, и потому

$$\sin^2\theta = 1 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi$$

(углы θ и φ указаны на рис. 14). Усредняя $\sin^2\theta$ по всем направлениям $\mathbf{E}$ в плоскости XY, т. е. по всем φ, имеем

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}.$$

Подставляя это в (73,3), имеем для рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta). \qquad (73,5)$$

Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Решение: Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t + \alpha)$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — взаимно перпендикулярные векторы (см. § 48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2c^3}\frac{[\mathbf{An}]^2+[\mathbf{Bn}]^2}{A^2+B^2}\,do.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния плоско поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания.

Решение: Уравнение движения заряда в падающей на него волне $E = E_0\cos(\omega t + \alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha),$$

где ω_0 — частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin^2\theta\,do$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$).

3. Определить степень деполяризации при рассеянии неполяризованного света свободным зарядом.

Решение: Из соображений симметрии очевидно, что обе главные составляющие рассеянного света будут плоско поляризованы, — одна в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи, а другая — перпендикулярно к ней. Выберем ось Y в указанной плоскости. Тогда для первой поляризации находим $E = \text{const.}\cdot E_y\cos\vartheta$, а для второй $E = \text{const.}\cdot E_z$. Возводя в квадрат и усредняя, получаем (поскольку для неполяризованного света $\overline{\mathbf{E}_y^2} = \overline{\mathbf{E}_z^2}$)

$$\rho = \cos^2\vartheta$$

(ϑ — угол между направлениями падающего и рассеянного света).

4. Определить частоту света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение: В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k'_i u_i = k_i u_i,$$

где u_i — 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем

$$\omega'\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta'\right)=\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

где θ и θ' — углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения (v — скорость заряда).

§ 74. Рассеяние волн с большими частотами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, поле которой мы будем считать слабым, то плотность тока системы можно представить в виде $\mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в отсутствии поля, а $\mathbf{j}'$ — изменение тока под влиянием поля волны. Соответственно этому векторный потенциал поля системы также будет иметь вид $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются соответственно токами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$. Очевидно, что $\mathbf{A}'$ описывает поле рассеянной системой зарядов волны.

Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн, частота ω' которых велика по сравнению с частотой ω_0, излучаемой самой системой волн. Как мы видели в § 67, $\omega_0\sim v/a$, так что ω' должно удовлетворять условию

$$\omega'\gg\omega_0\sim\frac{v}{a}. \qquad (74,1)$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v\ll c$).

Согласно условию (74,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн не существенно учитывать взаимодействие зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=e\mathbf{E}=e\mathbf{E}_0e^{-i(\omega' t-\mathbf{k}_1\mathbf{r})},$$

где $\mathbf{k}_1=\frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_1$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна ω', а вторая — порядка $kv\sim v/\lambda\sim v\omega'/c\ll\omega'$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}'=-\frac{e}{i\omega' m}\mathbf{E}_0e^{-i(\omega' t-\mathbf{k}_1\mathbf{r})}. \qquad (74,2)$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно общей формуле (66,2)

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}} dV = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}},$$

где сумма берется по всем зарядам системы; $\mathbf{n}_2$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда (74,1), находим

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega'} e^{-i\omega'\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \tag{74,3}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ есть разность между волновым вектором $\mathbf{k}_1$ падающей и волновым вектором $\mathbf{k}_2 = \frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_2$ рассеянной волны. Необходимо при этом отметить, что частота рассеянного излучения может быть благодаря наличию собственного движения зарядов в системе отличной от частоты ω' падающей волны. Это изменение частоты порядка величины ω_0, т. е. мало по сравнению с самой частотой ω'. Поэтому в $\mathbf{k}_2$ этим изменением можно пренебречь.

Для поля $\mathbf{H}' = \operatorname{rot}\mathbf{A}'$ рассеянной волны имеем из (74,3), пренебрегая членами высшего порядка по $1/R_0$,

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]}{c^2R_0} e^{-i\omega'\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \tag{74,4}$$

(поскольку $\nabla R_0 = \mathbf{n}_2$). Поток энергии в элементе телесного угла в направлении $\mathbf{n}_2$ равен

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{4\pi} R_0^2\,do = \frac{1}{4\pi c^3}[\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]^2 \left|\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2.$$

Разделив это на поток энергии $\frac{c}{4\pi}E_0^2$ падающей волны и вводя угол θ между направлениями поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно эффективное сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \overline{\left|\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2} \sin^2\theta\, do. \tag{74,5}$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится в виду того, что рассеяние набюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (74,1) следует неравенство $\lambda' \ll \frac{c}{v}a$. Что же касается относительной величины λ' и a, то возможны оба предельных случая $\lambda' \gg a$ и $\lambda' \ll a$. В обоих этих случаях общая формула (74,5) значительно упрощается.

В случае $\lambda' \gg a$ в выражении (74,5) $\mathbf{q}\mathbf{r} \ll 1$, поскольку $\mathbf{q}$ обратно пропорционально λ', а $\mathbf{r}$ порядка величины a. Заменяя, соответственно этому, $e^{i\mathbf{qr}}$ единицей, имеем

$$d\sigma = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{74,6}$$

В частности, при рассеянии атомом с Z электронами

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{74,7}$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату атомного номера (членом, соответствующим ядру атома можно в сумме (74,6) пренебречь, поскольку масса ядра значительно больше массы электронов).

Перейдем теперь к случаю $\lambda' \ll a$. В квадрате суммы, стоящем в (74,5), наряду с квадратами $(e^2/mc^2)^2$ модуля каждого из членов имеются произведения вида

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{e'^2}{m'c^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ пробегают значения в интервале порядка a. Поскольку $q \sim 1/\lambda'$, $\lambda' \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ является в этом интервале быстро-переменной периодической функцией, и ее среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda' \ll a$ эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \sum \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{74,8}$$

В частности, при рассеянии атомом имеем в этом случае

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{74,9}$$

т. е. рассеяние пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что формулы (74,8) и (74,9) неприменимы при малых углах рассеяния (порядка λ'/a), так как в этом случае $\mathbf{q}$ уже не велико и показатель $\mathbf{qr}$ не велик по сравнению с единицей.

Как уже было указано, частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Эта часть рассеяния называется некогерентной в противоположность когерентному рассеянию без изменения частоты. Для определения эффективного сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту ω'. Выражение (74,4) для поля зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega' t}$, и, кроме того, от времени зависит также и сумма $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{qr}(t)}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой ω' еще и другие частоты. Та часть поля, которая обладает частотой ω' (т. е. зависит от времени только посредством множителя $e^{-i\omega' t}$), получается, очевидно, если усреднить по времени (т. е. по движению зарядов) сумму $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{qr}}$. Соответственно этому выражение для эффективного сечения $d\sigma_{\text{ког}}$ когерентного рассеяния отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left|\overline{\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{qr}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do. \qquad (74,10)$$

В случае, если $\lambda' \gg a$, мы можем опять заменить $e^{i\mathbf{qr}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do.$$

Сравнивая это с полным эффективным сечением (74,6), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda' \ll a$, то при усреднении в (74,10) все члены суммы исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае все рассеяние некогерентно.

§ 75. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассмотрим теперь случай рассеяния, противоположный исследованному в предыдущем параграфе, именно, рассеяние волн с малыми частотами. Другими словами, предположим, что частота ω' падающего света удовлетворяет неравенству [ср. (74,1)]

$$\omega' \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \qquad (75,1)$$

Рассеяние опять будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части. Мы будем здесь рассматривать только когерентное рассеяние, т. е. рассеяние без изменения частоты.

Для вычисления поля рассеянной волны можно воспользоваться непосредственно формулами (68,3), определяющими поле дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучений. В этих формулах надо теперь писать, как и в § 74, все величины со штрихами, например

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}] + \frac{1}{c}[\dddot{\mathbf{D}}'\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathfrak{m}}'\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},$$

где $\mathbf{d}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathfrak{m}'$ — те части дипольного, квадрупольного и магнитного моментов системы зарядов, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением.

Компонента $\mathbf{H}'_{\omega'}$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье. Для производных по времени от дипольного и т. д. моментов имеем (ср. § 69)

$$\ddot{\mathbf{d}}'_{\omega'} = -\omega'^2 \mathbf{d}'_{\omega'}, \quad \ddot{\mathfrak{m}}'_{\omega'} = -\omega'^2 \mathfrak{m}'_{\omega'}, \quad \dddot{\mathbf{D}}'_{\omega'} = i\omega'^3 \mathbf{D}'_{\omega'}.$$

Поскольку частота ω' предполагается малой, то мы оставляем только члены с низшими степенями ω', т. е.

$$\mathbf{H}'_{\omega'} = \frac{1}{c^2 R_0}\omega'^2 \{ [\mathbf{n}\mathbf{d}'_{\omega'}] + [\mathbf{n}[\mathbf{m}'_{\omega'}\mathbf{n}]] \}. \tag{75,2}$$

Следующие члены разложения поля (содержащие мультипольные моменты высших порядков) дали бы члены, пропорциональные высшим степеням частоты. Если скорости всех зарядов в системе малых ($v \ll c$), то в (75,2) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c. Тогда

$$\mathbf{H}'_{\omega'} = \frac{1}{c^2 R_0}\omega'^2 [\mathbf{n}\mathbf{d}'_{\omega'}]. \tag{75,3}$$

Если сумма зарядов системы равна нулю, то при $\omega' \to 0$ $\mathbf{d}'_{\omega'}$ стремится к постоянному пределу (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega' = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое [1])). Поэтому при малых ω' можно считать $\mathbf{d}'_{\omega'}$ не зависящим от частоты. Мы видим отсюда, что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна ω'^4. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой эффективное сечение рассеяния (когерентного) пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения.

ГЛАВА IX

ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 76. Гравитационные поля в нерелятивистской механике

Наряду с электромагнитными полями в природе существуют еще поля другого рода — так называемые гравитационные поля, или поля тяготения. Эти поля обладают следующим основным свойством: все тела, вне зависимости их от массы или заряда, движутся в них одинаковым образом (если, конечно, начальные условия одинаковы)[2]).

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех

---

[1]) То же самое относится, впрочем, и к рассеянию света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра, рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь.

[2]) Например, законы свободного падения в поле тяготения земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и то же ускорение.

тел происходит прямолинейно и равномерно, и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время. Очевидно, поэтому, что если рассматривать это свободное движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета те же, что в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю. Это обстоятельство называют принципом эквивалентности.

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчета. Свободно движущиеся в такой системе отсчета тела любой массы будут, очевидно, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, — равным и противоположным ускорению самой системы отсчета. Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например, в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное). Таким образом, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю. Несколько более общим случаем является неравномерно ускоренная, поступательно и прямолинейно движущаяся система отсчета, — она, очевидно, эквивалентна однородному, но переменному гравитационному полю.

Необходимо, однако, отметить, что поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, все же не вполне тождественны с „истинными“ гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах. А именно, между ними имеется весьма существенное отличие в отношении их свойств в бесконечности. На бесконечном расстоянии от создающих поле тел „истинное“ гравитационное поле всегда стремится к нулю. Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине. Так, например, возникающие во вращающейся системе отсчета центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчета, одинаково во всем пространстве, в том числе и на бесконечности.

Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, исчезают, как только мы перейдем к инерциальной системе. В противоположность этому, „истинные“ гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчета) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета. Это видно уже непосредственно из указанного выше различия между условиями на бесконечности в „истинных“ гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы, — поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчета нельзя исключить „истинные“ поля, обращающиеся на бесконечности в нуль.

Единственное, чего можно достичь соответствующим выбором системы отсчета, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нем можно было считать поле однородным. Это можно сделать путем выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно по величине и противоположно по направлению тому ускорению, которое приобретает частица, помещенная в рассматриваемом участке поля.

Движение частицы и гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчета) вид

$$L=\frac{mv^2}{2}-m\varphi, \tag{76,1}$$

где φ — некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая гравитационным потенциалом[1]). Соответственно уравнения движения частицы гласят

$$\dot{\mathbf{v}}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{76,2}$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что и является выражением указанного в начале параграфа основного свойства гравитационных полей.

§ 77. Гравитационное поле в релятивистской механике

Указанное в предыдущем параграфе основное свойство гравитационных полей, что все тела движутся в них одинаковым образом, остается в силе и в релятивистской механике. Остается, следовательно, и аналогия между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчета. Поэтому естественно при изучении свойств гравитационных полей в релятивистской механике тоже исходить из этой аналогии.

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал ds определяется из соотношения:

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2.$$

При переходе к любой другой инерциальной системе отсчета (т. е. при преобразовании Лоренца) интервал, как мы знаем, сохраняет тот же самый вид. Однако, если мы перейдем к неинерциальной системе отсчета, то ds^2 уже не будет суммой квадратов дифференциалов четырех координат.

Так, например, при переходе к равномерно вращающейся системе координат

$$x=x'\cos\Omega t-y'\sin\Omega t,\quad y=x'\sin\Omega t+y'\cos\Omega t,\quad z=z'$$

(Ω — угловая скорость вращения, направленная вдоль оси Z) интервал приобретает вид

$$ds^2=[c^2-\Omega^2(x'^2+y'^2)]\,dt^2-dx'^2-dy'^2-$$
$$-dz'^2+2c\Omega y'dx'dt-2c\Omega x'dy'dt.$$

---

[1]) Ниже нам не придется больше пользоваться электромагнитным потенциалом φ, так что обозначение гравитационного потенциала той же буквой не может привести к недоразумению.

По какому бы закону ни преобразовывалось время, это выражение не может быть приведено к сумме квадратов дифференциалов четырех координат.

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета квадрат интервала является некоторой квадратичной формой общего вида от дифференциалов координат, т. е. имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \tag{77,1}$$

где g_{ik} — некоторые функции координат, т. е. пространственных координат x_1, x_2, x_3, и временной координаты x_0 [1]). Четырехмерная система координат x_0, x_1, x_2, x_3 является, таким образом, при пользовании неинерциальными системами отсчета криволинейной. Величины g_{ik}, определяя все свойства геометрии в каждой данной криволинейной системе координат, устанавливают, как говорят, метрику пространства-времени.

Величины g_{ik} можно, очевидно, всегда считать симметричными по индексам i и k ($g_{ik} = g_{ki}$), поскольку они определяются из симметричной формы (77,1), куда g_{ik} и g_{ki} входят помноженными на одно и то же произведение $dx_i dx_k$. В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми пространственными координатами $x_{1,2,3} = x, y, z$ и временем $x_0 = t$ величины g_{ik} равны:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{00} = c^2, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k. \tag{77,2}$$

Систему координат (четырехмерную) с этими значениями g_{ik} мы будем называть галилеевой.

В предыдущем параграфе было показано, что неинерциальные системы отсчета эквивалентны некоторым силовым полям. Мы видим теперь, что в релятивистской механике эти поля определяются величинами g_{ik}.

То же самое относится и к „истинным“ гравитационным полям. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, соответственно чему оно определяется величинами g_{ik}. Это важнейшее обстоятельство означает, что геометрические свойства пространства-времени (его метрика) определяются физическими явлениями, а не являются неизменными свойствами пространства и времени.

Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название общей теории относительности в отличие от специальной теории относительности, изложенной нами ранее. Она также была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1916 г).

Как и в нерелятивистской механике, между „истинными“ гравитационными полями и полями, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, имеется коренное отличие. При переходе к инерциальной системе

[1]) Поскольку ds^2 все равно не является уже суммой квадратов, то не имеет смысла пользоваться мнимой временной координатой $x_4 = ict$. Действительную временную координату мы будем обозначать посредством x_0 (или t), соответственно чему в дальнейшем по дважды повторяющимся латинским индексам везде подразумевается суммирование от 0 до 3, а по греческим — по-прежнему от 1 до 3.

отсчета квадратичная форма (77,1), т. е. величины g_{ik}, получается из их галилеевых значений посредством простого преобразования координат. Соответственно этому в инерциальной системе отсчета g_{ik} имеют весьма специальный вид, именно такой, который может быть приведен во всем пространстве к галилеевым значениям (77,2) посредством преобразования координат. То, что такой вид действительно является лишь весьма специальным, видно из того, что преобразованием всего лишь четырех координат нельзя, в общем случае, привести десять величин g_{ik} к наперед заданному виду.

„Истинное" гравитационное поле не может быть исключено никаким преобразованием координат. Другими словами, при наличии гравитационного поля пространство-время таково, что определяющие его метрику величины g_{ik} никаким преобразованием координат не могут быть приведены во всем пространстве к их галилеевскому виду. Такое пространство-время называется неэвклидовым или кривым, в отличие от эвклидова или плоского, в котором ds^2 всегда может быть приведено к сумме квадратов четырех дифференциалов. В неэвклидовом пространстве не имеют места законы обычной эвклидовой геометрии[1]).

Единственное, чего можно достичь преобразованием координат в неэвклидовом пространстве, это приведения величин g_{ik} к значениям (77,2) (т. е. исключения гравитационного поля) в данном бесконечно малом элементе „объема" пространства-времени, между тем как в остальном пространстве-времени g_{ik} остаются не галилеевыми. Действительно, в бесконечно малой области g_{ik} можно считать постоянными, а всякую квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к сумме квадратов. Такую систему координат мы будем называть галилеевой для данной точки.

Заметим, что, будучи приведенными в данной точке к диагональному виду, величины g_{ik} имеют, таким образом, три отрицательных и одно положительное главные значения. Отсюда следует, что детерминант g, составленный из величин g_{ik} в реальном пространстве-времени, всегда отрицателен.

До сих пор мы говорили о пространственных и временной координатах, оставляя в стороне вопрос о том, каким образом эти координаты могут быть выбраны. Между тем само понятие системы отсчета приобретает в общей теории относительности смысл, отличный от того, какой она имела в специальной теории. В специальной теории относительности мы пользовались в качестве системы отсчета совокупностью тел, находящихся на неизменных расстояниях, т. е. покоящихся друг

[1]) Строго говоря, для того чтобы имела место эвклидова геометрия, необходимо, чтобы ds^2 можно было привести именно к сумме квадратов дифференциалов координат, между тем как в реальном эвклидовом пространстве-времени дифференциалы трех пространственных координат входят в ds^2 с одним, а квадрат dx_0^2 — с обратным знаком (если не вводить мнимых координат). Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$, иногда называют псевдо-эвклидовой; мы, однако, не будем здесь пользоваться этим термином (заметим также, что в псевдо-эвклидовом пространстве-времени чисто пространственная, т. е. трехмерная, геометрия является, конечно, просто эвклидовой).

относительно друга. В общей теории относительности это, однако, оказывается невозможным. Действительно, наличие какого-либо гравитационного поля означает, как мы видели, изменение метрики пространства-времени, при котором, в частности, меняется и метрика самого пространства, оказываясь к тому же зависящей от времени. Это приводит к тому, что ни в какой системе составляющие ее тела не могут быть неподвижными друг относительно друга [1]). Очевидно, что в результате этого ни в какой системе тел нельзя будет рассматривать их взаимное расположение как неизменное.

Таким образом, в общей теории относительности теряет смысл понятие о неподвижности тел друг относительно друга. Более того, теряет смысл и вообще понятие какой-либо определенной скорости относительного движения тел.

В соответствии с этим для точного определения положения тел в пространстве при наличии гравитационного поля необходимо, строго говоря, иметь систему из бесконечного числа тел, заполняющих все пространство. Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.

§ 78. Криволинейные координаты

Как мы видели, при изучении гравитационных полей мы сталкиваемся с необходимостью рассматривать явления в криволинейных координатах. В связи с этим необходимо развить четырехмерную геометрию в произвольных криволинейных координатах. Этому посвящены §§ 78—81.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

где f^i — некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно соотношению

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \qquad (78,1)$$

Всякая совокупность четырех величин A^i ($i = 0, 1, 2, 3$), которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы, называется контравариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x'^k} A'^k. \qquad (78,2)$$

[1]) Неизбежность таких деформаций видна, например, из того, что в неэвклидовом пространстве отношение длины окружности к ее радиусу не равно 2π и, вообще говоря, меняется со временем. Поэтому, если расстояния тел по радиусу окружности остаются неизменными, то расстояния по окружности должны изменяться и наоборот.

Компоненты контравариантных векторов мы будем обозначать с индексом сверху[1]).

Пусть φ есть некоторый скаляр. Четыре величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{78,3}$$

отличным от формул (78,2). Всякая совокупность четырех величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра, называется ковариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}A'_k. \tag{78,4}$$

Компоненты ковариантных векторов мы будем обозначать с индексом внизу.

Легко сообразить, что в декартовой системе координат нет разницы между ковариантными и контравариантными векторами, поскольку правила преобразования (78,2) и (78,4) делаются при этом эквивалентными[2]).

В связи с наличием в криволинейных координатах двух видов векторов имеется три вида тензоров 2-го ранга. Контравариантным тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведение компонент двух контравариантных векторов, т. е. по закону

$$A^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm}. \tag{78,5}$$

Аналогично определяется ковариантный тензор, преобразующийся по формулам

$$A_{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm}, \tag{78,6}$$

и смешанный тензор, преобразующийся согласно формулам

$$A^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m. \tag{78,7}$$

Совершенно аналогично определяются тензоры высших рангов. Например, тензор A^m_{ikl}, ковариантный по трем индексам и контравариантный по одному, преобразуется по формуле

$$A^m_{ikl}=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}A'^t_{prs}.$$

---

[1]) Поскольку дифференциалы координат x^i сами составляют контравариантный вектор, мы пишем здесь и в дальнейшем индекс у координат сверху. Только иногда мы будем писать индекс у отдельных координат внизу — там, где писать их сверху было бы неудобно [например, x_2^2 вместо $(x^2)^2$].

[2]) Для этого, впрочем, достаточно вспомнить, что в декартовых координатах градиент обладает такими же векторными свойствами, как и все другие векторы.

Если тензор симметричен или антисимметричен по какой-нибудь паре индексов (одинаковой ковариантности или контравариантности), то это имеет место в любой системе координат. Для смешанного же тензора, скажем A_k^i, понятие симметрии или антисимметрии не имеет смысла, так как разным индексам соответствуют различные законы преобразования, и потому при переходе от одной системы координат к другой свойства симметрии, вообще говоря, меняются.

Если тензор (т. е. все его компоненты) равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и во всякой другой системе. Сумма двух тензоров одинакового ко- или контравариантного характера есть тензор того же характера.

Очевидно, что произведение компонент векторов A_i и B_k есть тензор вида A_{ik}, векторов A_i и B^k — тензор вида A_i^k. Произведение вектора A_l на тензор A^{ik} есть тензор вида A_l^{ik} и т. п.

В декартовых координатах из любых двух векторов можно составить скаляр — скалярное произведение этих векторов. В криволинейных же координатах можно составить скаляр не из любых двух векторов. Именно, нельзя составить скаляр из двух контравариантных или двух ковариантных векторов. Напротив, из контравариантного вектора A^i и ковариантного B_k можно составить скаляр; этим скаляром является величина A^iB_i, называемая скалярным произведением векторов A^i и B_i. Легко убедиться с помощью формул преобразования (78,2) и (78,4), что A^iB_i есть действительно скаляр.

Образование скалярного произведения из двух векторов является частным случаем следующего правила „упрощения" тензоров. Если мы имеем тензор $A_{\cdot\cdot k\cdot\cdot}^{\cdot\cdot i\cdot\cdot}$, то выражение $A_{\cdot i\cdot}^{\cdot i\cdot}$ (суммирование по i) есть тензор ранга на две единицы меньшего, чем ранг тензора $A_{\cdot k\cdot}^{\cdot i\cdot}$. Так, например, из тензора A_i^k можно образовать скаляр A_i^i. Действительно, согласно (78,7)

$$A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^l_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^l_m = A'^l_l ,$$

т. е. A_i^i есть действительно инвариант[1]). Подобно этому являются скалярами выражения A_{ik}^{ik}, $A_i^kB_k^i$ и т. п. Выражение A_{kli}^i есть ковариантный тензор второго ранга, $A_k^iB^k$ — контравариантный вектор и т. п.

Заметим, что выражения, получающиеся при суммировании по двум верхним или двум нижним индексам (например, A_{kll}^i), не являются тензорами. В дальнейшем мы не будем пользоваться такими величинами.

Единичным тензором в криволинейных координатах является смешанный тензор δ_i^k, компоненты которого $\delta_i^k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если A^k — вектор, то при умножении на δ_k^i мы получим

$$A^k\delta_k^i = A^i,$$

т. е. опять вектор; это и доказывает, что δ_k^i является тензором.

[1]) Скаляр и инвариант — синонимы.

Квадрат элемента длины ds^2 есть квадратичная функция дифференциалов dx^i, т. е.

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{78,8}$$

где g_{ik} — функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k, т. е.

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{78,9}$$

Поскольку произведение (упрощенное) g_{ik} на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то g_{ik} есть ковариантный тензор. Тензор g_{ik} носит название метрического тензора.

Как уже указывалось в § 77, в реальном эвклидовом пространстве-времени соответствующим выбором системы координат тензор g_{ik} можно всегда преобразовать к галилеевской форме

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \tag{78,10}$$

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l.$$

В частности, контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, обратный тензору g_{ik}, т. е.

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \tag{78,11}$$

В декартовой (четырехмерной) системе координат, как уже упоминалось, нет различия между ко- и контравариантными векторами; это различие, однако, появляется при переходе к криволинейным координатам. Поэтому, если какая-нибудь физическая величина в декартовой системе координат является вектором, то при переходе к криволинейным координатам она может быть представлена в двух формах: в виде ковариантного и в виде контравариантного вектора. Две формы одного и того же вектора мы будем обозначать одинаковой буквой, но с индексами вверху и внизу (A_i и A^i).

Легко убедиться в том, что переход от ковариантной к контравариантной форме вектора и обратно должен совершаться при помощи тензора g_{ik} согласно формулам

$$A^i = g^{ik} A_k, \tag{78,12}$$

или иначе

$$A_i = g_{ik} A^k. \tag{78,13}$$

Действительно, в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$ и эти формулы дают, как и должно быть, $A_i = A^i$ [1]).

---

[1]) В этом и аналогичных местах, где для доказательства мы пользуемся декартовой системой координат, нужно иметь в виду, что декартову систему координат можно выбрать только в том случае, когда пространство эвклидово. В случае же неэвклидова пространства надо для доказательства рассматри-

Все сказанное относится также и к тензорам. Всякий тензор в декартовой системе координат при переходе к криволинейным координатам можно представить в нескольких формах с разным ко- и контравариантным характером. Разные формы одного и того же тензора мы тоже будем обозначать одинаковой буквой с разными расположениями индексов. Переход между разными формами тензора совершается аналогично тому, как он совершается у векторов. Так,

$$A^{i}_{\ kl} = g_{lm} A^{im}_{\ \ k}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \quad \text{и т. д.}$$

Заметим, что если тензор 2-го ранга несимметричен, то следует различать $A_i^{\ k}$ и $A^k_{\ i}$, т. е. место, с которого индекс был поднят.

В декартовой системе координат квадрат абсолютной величины вектора равен сумме квадратов их компонент. Очевидно, что в криволинейных координатах квадратом абсолютной величины вектора является скаляр

$$A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \tag{78,14}$$

Полезно заметить, что индексы, по которым производится суммирование в произведениях тензоров, имеют некоторую свободу передвижения. Так, например,

$$A_{ik} B^{ik} = A^{ik} B_{ik}, \quad A_{ik} B^{lk} = A_i^{\ k} B^l_{\ k} \quad \text{и т. д.}$$

Индекс может быть поднят у одного из множителей при условии, что такой же индекс будет опущен в другом (это легко проверить, воспользовавшись связью между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, осуществляемой тензором g_{ik}).

В § 6 был определен (в декартовых координатах) совершенно антисимметричный единичный псевдотензор e_{iklm}. Преобразуем теперь его к произвольной криволинейной системе координат. Предварительно заметим, что в силу определения e_{iklm} мы можем написать

$$e_{nrst} k_{ni} k_{rk} k_{sl} k_{tm} = k e_{iklm}, \tag{78,15}$$

где k — детерминант, составленный из величин k_{ik}. Действительно, от-

---

вать систему координат, декартову в данном бесконечно малом элементе объема, что всегда можно сделать (см. § 77). Все выводы остаются тогда теми же самыми и для неэвклидова пространства. Ниже мы будем в подобных случаях для краткости всегда говорить о декартовой системе координат; нужно иметь в виду, что все результаты в равной мере применимы и к неэвклидову пространству.

Необходимо отметить, что в реальном пространстве-времени, если пользоваться действительными координатами x^i, ds^2 может быть приведено в данном бесконечно малом элементе только к галилееву виду, в котором один квадрат дифференциала входит с положительным, а три — с отрицательными знаками. Это обстоятельство, однако, ничего не меняет в выводах этого и следующего параграфов, так как для перехода от галилеевых координат к четырехмерным декартовым надо ввести только вместо трех координат x^α их же, умноженных на i.

Заметим также, что в галилеевых координатах ковариантные и контравариантные компоненты вектора не в точности одинаковы. Именно, $A_\alpha = -A^\alpha$, $A_0 = c^2 A^0$.

дельные члены детерминанта получают, выбирая четыре элемента по одному из каждой строки (так что $n \neq r \neq s \neq t$) и из каждого столбца (так что $i \neq k \neq l \neq m$) и ставя перед их произведением знак $+$ или $-$, смотря по тому, можно ли порядок номеров столбцов перевести в порядок номеров строк посредством четного или нечетного числа транспозиций.

Согласно общим правилам преобразования тензоров и с помощью (78,15) имеем при переходе к криволинейным координатам

$$e_{iklm} = e'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = e'_{nrst} J, \tag{78,16}$$

где

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

есть якобиан преобразования от координат x^i к x'^i. Этот якобиан может быть выражен через детерминант g', составленный из компонент тензора g'_{ik}. Для этого заметим, что поскольку в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$, то согласно формулам преобразования

$$\delta_{ik} = g'_{lm} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

Приравнивая детерминанты, составленные из величин, стоящих с обеих сторон этого равенства, имеем $1 = g'J^2$, т. е. $\sqrt{g'} = 1/J$; мы будем, однако, писать в дальнейшем всегда $-g$ под корнем, так как в действительности во всех координатах, относящихся к реальному пространству-времени, детерминант g отрицателен (см. § 77). Из (78,16) находим теперь, что

$$e'_{iklm} = \sqrt{-g'}\, e_{iklm}.$$

Таким образом, в криволинейных координатах антисимметрический единичный тензор 4-го ранга определяется как $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$. Если оставлять неопределенным знак корня $\sqrt{-g}$, то $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$ можно рассматривать как истинный, а не как псевдотензор; при преобразованиях координат, содержащих отражения, надо соответствующим образом менять знак корня $\sqrt{-g}$.

Путем поднятия индексов у тензора $\sqrt{-g} e_{iklm}$ легко найти, что контравариантным единичным антисимметрическим тензором 4-го ранга является $\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}$.

В декартовой системе координат интеграл от скаляра по $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ есть тоже скаляр, т. е. $d\Omega$ ведет себя при интегрировании как инвариант (§ 6). При переходе к криволинейным координатам x'^i элемент интегрирования $d\Omega$ переходит в $\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g'}\, d\Omega'$. Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по некоторой области 4-пространства $\sqrt{-g}\,d\Omega$ ведет себя как инвариант[1]).

Все сказанное в конце § 6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остается в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров. Элемент „площади" гиперповерхности, образованной на трех бесконечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl}; дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\,dS_i = \frac{1}{6}e_{klmi}dS^{klm}\sqrt{-g}. \quad (78,17)$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенной на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как

$$\sqrt{-g}\,d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{iklm}df^{lm}. \quad (78,18)$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и $d\overset{*}{f}_{ik}$, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}e_{klmi}dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6,11—13) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по объему (теорема Гаусса), осуществляющееся заменой

$$dS_i \rightarrow d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (78,19)$$

§ 79. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен; тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин x^1, x^2, x^3, x^0 можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством τ, с координатой x^0. Для этого рассмо-

---

[1]) Если φ есть скаляр, то величину $\sqrt{-g}\,\varphi$, дающую при интегрировании по $d\Omega$ инвариант, иногда называют скалярной плотностью. Аналогично говорят о векторной и тензорной плотностях $\sqrt{-g}\,A^i$, $\sqrt{-g}\,A^{ik}$ и т. д. Эти величины дают вектор или тензор при интегрировании по бесконечно малому 4-объему (интеграл $\int A^i\sqrt{-g}\,d\Omega$ по конечной области, вообще говоря, не может быть вектором, так как законы преобразования вектора A^i в разных точках различны).

трим два бесконечно близкие события, происходящие в одной и той же точке пространства. Тогда интервал ds между этими двумя событиями есть, как мы знаем, не что иное, как $c\,d\tau$, где $d\tau$ — промежуток времени (истинного) между обоими событиями. Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в общем выражении $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, находим, следовательно,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0, \tag{79,1}$$

или, иначе, для времени между любыми двумя событиями, происходящими в одном и том же месте пространства,

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{79,2}$$

Эти соотношения и определяют промежутки истинного времени (или, как говорят еще, собственного времени для данной точки пространства) по интервалам координаты x^0. Заметим кстати, что величина g_{00}, как видно из приведенных формул, является положительной:

$$g_{00} > 0. \tag{79,3}$$

Определим теперь элемент dl пространственного расстояния. В специальной теории относительности (§ 2) можно определять dl как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т. е. нельзя определить dl, просто положив $dx^0 = 0$ в ds. Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой x^0.

Для определения dl поступим теперь следующим образом. Представим себе, что из данной точки пространства отправляется световой сигнал в другую точку, бесконечно близкую к ней, а потом обратно по тому же пути. Необходимое для этого время (отсчитываемое в одной и той же точке пространства), умноженное на c, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками. Напишем интервал, выделив пространственную и временную координаты:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}dx_0^2, \tag{79,4}$$

где под дважды повторяющимися греческими индексами подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Для двух событий, являющихся уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, интервал, как мы знаем, равен нулю. Полагая $ds^2 = 0$, находим для „времени" распространения сигнала из первой точки во вторую

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}.$$

Для обратного движения сигнала из второй точки в первую „время"

$dx_0^{(2)}$ определяется такой же формулой, где теперь надо изменить знак у всех dx^α, т. е.

$$dx_0^{(2)}=\frac{1}{g_{00}}\left\{g_{0\alpha}dx^\alpha+\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}.$$

Таким образом, промежуток „времени“ между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

$$dx_0^{(1)}+dx_0^{(2)}=\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}.$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда согласно (79,1) умножением на $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$, а расстояние dl между обеими точками еще умножением на $c/2$. В результате находим

$$dl^2=\left(-g_{\alpha\beta}+\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta. \qquad (79,5)$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние через элементы пространственных координат. Оно определяет метрику, т. е. геометрические свойства, пространства. Заметим, что можно без труда показать, что стоящий в скобках тензор есть не что иное, как тензор, обратный контравариантному $g^{\alpha\beta}$.

Необходимо, однако, помнить, что g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0, так что и пространственная метрика (79,5) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать dl, — такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался бы. Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определенном расстоянии между телами, остающееся в силе лишь для бесконечно малых расстояний. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчета, в которых g_{ik} не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определенный смысл.

Перейдем теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т. е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Пусть из некоторой точки B отправляется сигнал в бесконечно близкую к ней точку A, а затем сразу обратно из A в B. „Время“ распространения сигнала из B в A и из A в B равно, соответственно, определенным выше $dx_0^{(2)}$ и $dx_0^{(1)}$, где расстояние считается от A к B. Одновременным приходу сигнала в A надо, очевидно, считать показание часов в B, лежащее посредине между моментом отправления и моментом обратного прибытия сигнала. Другими словами, некоторому моменту x^0 в точке A одновременен момент $x^0+\Delta x^0=x^0+\frac{dx_0^{(1)}-dx_0^{(2)}}{2}$ в точке B. С помощью приведенных выше выражений для $dx_0^{(1)}$ и $dx_0^{(2)}$, следовательно, разность значений „времени“ x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, можно представить в виде

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{79,6}$$

Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки B дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий, вдоль любой линии (незамкнутой).

Однако, если мы попытаемся произвести синхронизацию часов вдоль некоторого замкнутого контура, то это может оказаться невозможным. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для Δx^0 значение, вообще говоря, отличное от нуля. Тем более оказывается тогда невозможной синхронизация часов во всем пространстве. Другими словами, в общей теории относительности одновременность событий не только имеет различный смысл в разных системах отсчета, как в специальной теории относительности, но, вообще говоря, не может быть установлена и внутри одной и той же системы отсчета. Единственным случаем, когда синхронизация часов оказывается возможной, являются такие системы отсчета, в которых все величины $g_{0\alpha}$ равны нулю (или могут быть обращены в нуль соответствующим выбором координаты x^0).

Наконец, если мы рассмотрим интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными событиями в другом месте пространства, то эти интервалы окажутся, вообще говоря, не равными друг другу. Другими словами, истинное время течет различным образом в разных точках пространства. Между тем как в отсутствие гравитационного поля ход часов зависит только от выбора системы отсчета, в общей теории относительности он различен в разных точках пространства даже в одной и той же системе отсчета.

§ 80. Ковариантное дифференцирование

В декартовых координатах[1]) дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_i не есть вектор, а $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования (78,2), (78,4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно. Для этого определим формулы преобразования для дифференциалов dA_i в криволи-

[1]) А также в прямых косоугольных; вообще всегда, когда величины g_{ik} постоянны.

нейных координатах. Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A'_k;$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} dx'^l.$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$, т. е. если x^k являются линейными функциями от x'^k, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k,$$

т. е. dA_i преобразуется, как вектор.

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых координатах. Другими словами, мы должны преобразовать $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от декартовых координат к криволинейным.

Для того, чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. В декартовых координатах достичь этого весьма просто. Для этого нужно один из двух бесконечно близких векторов перенести в точку, где находится второй из них, параллельно самому себе, т. е. так, чтобы его компоненты при этом не изменились. Если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся. Перенос вектора, при котором в декартовых координатах его компоненты не меняются, называется параллельным переносом [1]).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй. Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i, то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством δA^i. Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{80,1}$$

---

1) Напомним, что в случае неэвклидова пространства для всех доказательств и определений вместо декартовой системы координат надо пользоваться системой координат декартовой (вернее, галилеевой) для данного бесконечно малого участка.

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна, очевидно, быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом, δA^i имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{80,2}$$

где Γ^i_{kl} — некоторые функции координат. Γ^i_{kl} зависят, конечно, от системы координат; в декартовой [1]) системе координат $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Уже отсюда видно, что величины Γ^i_{kl} не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В неэвклидовом пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ^i_{kl} в нуль во всем пространстве. Можно только выбрать такую систему координат — декартову для данной точки, — в которой Γ^i_{kl} обращаются в нуль в данном бесконечно малом участке [2]). Величины Γ^i_{kl} носят название символов Кристоффеля. Кроме величин Γ^i_{kl} мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$ [3]), определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma^m_{kl}. \tag{80,3}$$

Очевидно, что, наоборот,

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im} \Gamma_{m,kl}. \tag{80,4}$$

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i суть некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_i B^i) = 0$ имеем

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma^i_{kl} B^k A_i dx^l,$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i \delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k B^i dx^l.$$

---

[1]) А также и любой прямой косоугольной.

[2]) Мы увидим ниже (§ 81), что Γ^i_{kl} выражаются через первые производные от метрического тензора g_{ik}. Можно доказать возможность выбора такой системы координат, в которой в данной точке все первые производные от g_{ik}, следовательно, и Γ^i_{kl}, обращаются в нуль (при этом вторые производные от g_{ik} в нуль не обращаются).

[3]) Вместо обозначений Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ иногда пользуются обозначениями, соответственно, $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[{kl \atop i} \right]$.

Отсюда имеем, в виду произвольности B^i,

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l, \tag{80,5}$$

что и определяет изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (80,2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$ в (80,1), имеем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\right) dx^l. \tag{80,6}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\right) dx^l. \tag{80,7}$$

Выражения, стоящие в скобках в (80,6—7), являются тензором, так как умноженные на вектор dx^l они дают опять вектор. Очевидно, что эти тензоры и являются теми тензорами, которые играют в криволинейных координатах роль тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых. Эти тензоры носят название ковариантных производных соответственно векторов A^i и A_i. Мы будем обозначать их в виде $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$$DA^i = A^i_{;l}\, dx^l, \quad DA_i = A_{i;l}\, dx^l, \tag{80,8}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{80,9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{80,10}$$

В декартовых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов A^iB^k. При параллельном переносе согласно (80,5)

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\, dx^l. \tag{80,11}$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}_{;l} dx^l,$$

находим ковариантную производную $A^{ik}_{;l}$ тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \tag{80,12}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного тензора A^i_k и ковариантного A_{ik} в виде

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \tag{80,13}$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}. \tag{80,14}$$

Аналогично можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования. Чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^l, к обычной производной $\frac{\partial A^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^l}$ на каждый ковариантный индекс i $(A^{\cdot\cdot}_{\cdot i \cdot})$ надо прибавить член $-\Gamma^k_{il} A^{\cdot\cdot}_{\cdot k \cdot}$, а на каждый контравариантный индекс i $(A^{\cdot i \cdot}_{\cdot\cdot})$ надо прибавить член $+\Gamma^i_{kl} A^{\cdot k \cdot}_{\cdot\cdot}$.

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т. е. как ковариантный вектор $\varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения $A_i B_k$ равна

$$(A_i B_k)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}.$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные. Так,

$$A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}.$$

Докажем, что символы Кристоффеля Γ^i_{kl} симметричны по нижним индексам. Поскольку ковариантная производная вектора $A_{i;k}$ есть тензор, то и разность $A_{i;k} - A_{k;i}$ есть тензор. Пусть вектор A_i есть градиент скаляра, т. е. $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$. Тогда с помощью выражения (80,10) для $A_{i;k}$ имеем

$$A_{i;k} - A_{k;i} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)$. В декартовой системе координат ковариантные производные превращаются в обычные, а потому левая часть написанного равенства для вектора $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ обращается в нуль. Но поскольку $A_{i;k} - A_{k;i}$ есть тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он должен быть равен нулю в любой системе координат. Отсюда находим, что

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{80,15}$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{80,16}$$

В заключение этого параграфа приведем еще формулы преобразования из одной системы координат в другую для символов Кристоффеля. Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования с обеих сторон равенств, определяющих любую из ковариантных производных, из требования, чтобы эти законы для обеих сторон были одинаковы. Простое вычисление даст, таким образом,

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{80,17}$$

Из этой формулы видно, что величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям [когда исчезает второй член в (80,17)].

§ 81. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, имеет место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik}DA^k$, имеем, в виду произвольности вектора A^i,

$$Dg_{ik} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0. \tag{81,1}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}. Для этого напишем согласно общему определению (80,14) ковариантной производной от тензора:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Отсюда легко определить $\Gamma_{i,kl}$, например, следующим образом. Напишем значение производных от g_{ik}, переставляя индексы i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{81,2}$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl}=g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{81,3}$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ^i_{ki}. Для этого определим дифференциал dg детерминанта g, составленного из компонент тензора g_{ik}. dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в детерминанте, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам детерминанта из величин g_{ik}, деленным на этот детерминант. Поэтому миноры детерминанта g равны gg^{ik}. Таким образом,

$$dg=gg^{ik}\,dg_{ik}=-gg_{ik}\,dg^{ik} \tag{81,4}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik}=\delta^i_i=4$, то $g^{ik}dg_{ik}=-g_{ik}dg^{ik}$).

Из (81,3) имеем

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или согласно (81,4)

$$\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{81,5}$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$; мы имеем

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

С помощью (81,4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{81,6}$$

Наконец, нетрудно вывести следующую формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{ik})}{\partial x^l}=\Gamma^m_{lm}g^{ik}-\Gamma^k_{lm}g^{mi}-\Gamma^i_{lm}g^{mk}. \tag{81,7}$$

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^i_{;i}$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты. Поскольку $A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l$ [см. (80,9)], то

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

или окончательно

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \tag{81,8}$$

Выведем аналогичное выражение для $A^{ik}_{;k}$ и для антисимметричного тензора A^{ik}. Из (80,12) имеем

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Но поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

Подставляя выражение (81,5) для Γ^k_{mk}, находим, следовательно,

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{81,9}$$

Пусть теперь A_{ik} — симметричный тензор; определим выражение $A^k_{i;k}$ для его смешанных компонент. Мы имеем

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} A^k_l.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) A^{kl}.$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются и остается

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \tag{81,10}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$. Однако, с помощью выражений для $A_{i;k}$ и в виду того, что $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, имеем

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{81,11}$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{i2}}$ вторых производных от некоторого скаляра φ. Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\varphi_{;i}^{;i}$. Но $\varphi_{;i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс i, имеем

$$\varphi^{;i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (81,8) находим

$$\varphi_{;i}^{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \tag{81,12}$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана, в виду (81,8), как

$$\oint A^i\sqrt{-g}\,dS_i=\int A^i_{;i}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{81,13}$$

§ 82. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S=-mc\delta\int ds, \tag{82,1}$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Очевидно, что движение частицы в гравитационном поле определяется принципом наименьшего действия в той же форме (82,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики 4-пространства, проявляющимся только в изменении выражения ds через dx^i. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка движется по экстремальной, или, как говорят, по геодезической линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время неэвклидово, то эта линия уже отнюдь не является прямой.

Мы видели (§ 10), что в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат, уравнения движения свободной частицы есть $\frac{du^i}{ds}=0$, или иначе $du^i=0$, где $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в уравнение

$$Du^i=0. \tag{82,2}$$

Из выражения (80,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем

$$du^i+\Gamma^i_{kl}u^k\,dx^l=0.$$

Разделив это уравнение на ds, имеем в первом члене $\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}$ и, таким образом, находим:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{82,3}$$

Это и есть искомые уравнения движения. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ^i_{kl}, т. е. величинами, не имеющими тензорного характера. При $\Gamma^i_{kl} = 0$ (82,3) переходит в обычные уравнения $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$.

Производная $\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$ есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ „4-силой“, действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор g_{ik} играет при этом роль „потенциалов“ гравитационного поля — его производные определяют „напряженность“ поля Γ^i_{kl}.

Уравнение (82,3) можно вывести и непосредственно из принципа наименьшего действия $\delta\int ds = 0$. Имеем [1])

$$\delta\, ds^2 = 2ds\delta\, ds = \delta\,(g_{ik}\,dx^i\,dx^k) = dx^i\,dx^k\,\delta g_{ik} + 2g_{ik}\,dx^i\,\delta\,dx^k =$$
$$= dx^i\,dx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + 2g_{ik}\,dx^i\,d\delta x^k.$$

Поэтому

$$\delta S = -mc\int\delta\,ds = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$
$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds - mcg_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k\Big| \tag{82,4}$$

Второй член исчезает, так как на пределах $\delta x^k = 0$. Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда мы находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l:

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}\left(g_{il}\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2} - \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (81,2), получаем

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{l,ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Умножая на g^{ml} и замечая, что $g^{ml}g_{il} = \delta^m_i$, а $g^{ml}\Gamma_{l,ik} = \Gamma^m_{ik}$, приходим к уравнению (82,3).

---

[1]) Вариацию δ не смешивать с изменением δ при параллельном переносе!

Из (82,4) имеем для вариации δS, рассматривая, как обычно, действительные траектории и один из пределов как переменный, выражение $\delta S = -mcu_i \delta x^i$. Поэтому если мы определим 4-импульс частицы в гравитационном поле попрежнему как производную $\frac{\partial S}{\partial x^i}$, то мы получили бы при нашем определении g_{ik} выражение $p_i = -mcu_i$. Нам, однако, будет удобнее сохранить прежнее выражение $p_i = mcu_i$, так что мы будем ниже определять 4-импульс как

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i \text{ [1]}. \tag{82,5}$$

При принятом нами определении g_{ik} квадрат 4-скорости равен теперь

$$u_i u^i = \frac{dx_i dx^i}{ds^2} = 1,$$

а не -1, как мы имели раньше. Поэтому квадрат 4-импульса равен теперь

$$p_i p^i = m^2 c^2. \tag{82,6}$$

Подставляя сюда $-\frac{\partial S}{\partial x^i}$ вместо p_i, находим уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \tag{82,7}$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (82,3) не применимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал ds, как мы знаем, равен нулю, так что все члены в уравнении (82,3) обращаются в бесконечность. Как известно, направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$, где λ есть некоторый параметр. В специальной теории относительности, т. е. в эвклидовом пространстве, при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$ (см. § 54). В гравитационном поле это уравнение, очевидно, переходит в $Dk^i = 0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \tag{82,8}$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ).

Абсолютная величина волнового 4-вектора, как мы знаем (см. § 47), равна нулю, т. е.

$$k_i k^i = 0. \tag{82,9}$$

---

[1]) В связи с тем, что мы пользуемся координатой x^0 вместо x^4, связь компонент p_i с трехмерным импульсом и энергией в галилеевых координатах отличается от той, которую мы имели раньше. Именно, пространственные и временная компоненты p^i равны $\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}/c^2$, а компоненты ковариантного вектора p_i — соответственно, $-\mathbf{p}$ и $\mathcal{E}$.

Подставляя сюда $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ вместо k^i (ψ — эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле в виде

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0. \tag{82,10}$$

§ 83. Предельный переход

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения. При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нем частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор g_{ik}, определяющий поле, с нерелятивистским потенциалом φ гравитационного поля.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа (76,1). Мы напишем ее теперь в виде:

$$L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}-m\varphi,$$

прибавив постоянную $-mc^2$ (постоянные члены не существенны для функции Лагранжа). Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в пределе при $v/c\to 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле есть, следовательно,

$$S=\int L\,dt=-mc\int\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt,$$

или, замечая, что $\mathbf{v}\,dt=d\mathbf{r}$,

$$S=-mc\int\left(c\,dt-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{c}\varphi\,dt\right).$$

Сравнивая это с релятивистским действием $S=-mc\int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае ds равно:

$$ds=c\,dt-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{c}\varphi\,dt.$$

Возводя в квадрат и опуская члены порядка v^2/c^2, находим

$$ds^2=(c^2+2\varphi)\,dt^2-d\mathbf{r}^2. \tag{83,1}$$

Таким образом, компоненты метрического тензора в предельном случае равны:

$$g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta},\quad g_{0\alpha}=0,\quad g_{00}=c^2+2\varphi. \tag{83,2}$$

Что касается величин Γ^i_{kl}, то с помощью полученных для g_{ik} выражений легко найти, что в предельном случае отличны от нуля только компоненты:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}. \tag{83,3}$$

§ 84. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырехмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.

Тензор электромагнитного поля в специальной теории относительности определялся как $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно, что теперь он должен быть соответственно определен как $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$ [1]). Но в силу (81,11)

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{84,1}$$

и поэтому связь F_{ik} с потенциалом A_k не меняется. Вследствие этого первая пара уравнений Максвелла (26,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \tag{84,2}$$

тоже сохраняет свой вид.

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо предварительно определить в криволинейных координатах 4-вектор тока. Это мы сделаем в точности аналогично тому, как мы поступали в § 28. Заряд, находящийся в элементе объема $dV = dx^1dx^2dx^3$, можно написать в виде $de = \rho\, dV$, где плотность $\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ [см. (28,1)]. Умножая $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на dx^i, имеем

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{-g}\, dV\, dx^0.$$

Инвариантный элемент 4-объема есть $\sqrt{-g}\, dV\, dx^0 = \sqrt{-g}\, d\Omega$ (§ 78), так что 4-вектор тока есть

$$j^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0}. \tag{84,3}$$

$\frac{dx^i}{dx^0}$ есть скорость, измеренная при помощи „времени“ x^0 $\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right.$ не есть

---

[1]) В галилеевых координатах компоненты A_i связаны теперь со скалярным и векторным потенциалами посредством $A_{1,2,3} = -A^{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_0 = c^2A^0 = -c\varphi$ (так, чтобы стоящий в выражении для действия член $A_i\, dx^i$ имел прежнее значение). Соответственно этому меняется связь компонент F_{ik} с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

вектор). Компонента j^0 4-вектора тока, помноженная на $\sqrt{-g}$, есть пространственная плотность заряда.

В специальной теории относительности вторая пара уравнений Максвелла (30,2) имеет вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=\frac{4\pi}{c}j^i.$$

В гравитационном поле они соответственно принимают вид

$$F^{ik}_{;k}=\frac{4\pi}{c}j^i,$$

или, согласно (81,9),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,F^{ik})=\frac{4\pi}{c}j^i. \qquad (84,4)$$

Уравнение непрерывности $\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0$ (29,4) принимает теперь вид

$$j^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\,j^i)=0 \qquad (84,5)$$

[согласно (81,8)].

Наконец, легко написать уравнения движения заряженной частицы при наличии одновременно гравитационного и электромагнитного полей. Для этого надо варьировать (при заданном поле) ту часть действия, которая зависит от взаимодействия частицы с обоими полями, т. е.

$$-mc\int ds+\frac{e}{c}\int A_k\,dx^k.$$

Проще, однако, написать искомые уравнения движения прямо путем простого обобщения уравнений (21,4) на криволинейные координаты, т. е. написать в них Du^i вместо du^i. Таким образом, мы находим

$$mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^i{}_k u^k. \qquad (84,6)$$

§ 85. Постоянное гравитационное поле

Весьма важным частным случаем гравитационных полей являются постоянные гравитационные поля. В постоянном гравитационном поле можно выбрать такую систему отсчета, в которой все величины, в частности, метрический тензор g_{ik}, не зависят от временной координаты x^0.

Гравитационное поле постоянно, в частности, в том случае, если все тела неподвижны (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависят от x^0). Очевидно, что тогда оба направления времени равноценны (т. е. все уравнения не должны меняться при изменении знака у x^0). Отсюда следует, что в этом случае все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю, — в противном случае интервал ds изменился бы при замене x^0 на $-x^0$. Такого рода гравитационные поля мы будем называть статическими.

Гравитационное поле постоянно также и в том случае, когда тела совершают стационарное движение. Под стационарным мы понимаем здесь такое движение, при котором плотность и скорость материи в каждом элементе пространства постоянны. Примером такого движения является равномерное вращение симметрического тела вокруг своей оси симметрии. В этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны, — при изменении знака у времени меняется, например, знак угловой скорости вращения. В такого рода гравитационных полях, очевидно, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, не равны нулю. Мы будем называть такие постоянные поля стационарными.

Временную координату x^0, выбранную так, чтобы тензор g_{ik} не зависел от x^0, называют мировым временем. Необходимо при этом отметить, что выбор мирового времени не является вполне однозначным. Именно, мировое время определено только с точностью до произвольной функции от пространственных координат; очевидно, что при прибавлении такой функции все g_{ik} попрежнему не будут содержать x^0. Кроме того x^0 можно умножить на произвольную постоянную.

Если мы имеем дело со статическим гравитационным полем, где мы имеем возможность пользоваться системой отсчета, в которой $g_{0\alpha}=0$, то этим условием x^0 определяется настолько, что остается лишь возможность умножения его на произвольную постоянную. Если к тому же поле исчезает на бесконечности, то удобно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы на бесконечности интервал ds^2 приобретал галилееву форму, в частности, чтобы в бесконечности было $g_{00}=c^2$. Этим требованием определяется тогда указанная произвольная постоянная и выбор мирового времени делается однозначным. Если пользоваться системой отсчета, в которой временной координатой является мировое время, то, поскольку, в частности, пространственная метрика не зависит от x^0, в такой системе имеет смысл определение расстояния между телами (см. § 79).

Смысл мирового времени заключается в том, что его промежуток между какими-нибудь двумя событиями в некоторой точке пространства равен промежутку мирового времени между любыми другими двумя событиями, соответственно одновременными с первой парой событий, происходящими в любой другой точке пространства. Что касается связи между мировым временем и истинным, то формулу (79,1) можно написать теперь в виде

$$\tau=\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0, \tag{85,1}$$

применимом к любым конечным промежуткам времени. Одинаковым промежутком мирового времени соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени.

Если скорости всех тел малы, а гравитационное поле слабо, то можно воспользоваться приближенным выражением (83,2), и (85,1) дает

$$\tau=x^0\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}},$$

и поскольку $\varphi/c^2 \ll 1$, то приближенно

$$\tau=x^0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{85,2}$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке постранства, т. е. чем больше его абсолютная величина (ниже будет доказано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было выше указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам § 79 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве. Заметим также, что элемент пространственного расстояния dl (79,5) равен в статическом поле просто

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{85,3}$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависит от x^0, то формулу (79,6) для разности значений мирового времени для двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{85,4}$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{85,5}$$

взятому по этому замкнутому контуру.

Может оказаться, что сумма $\frac{1}{g_{00}} g_{0\alpha}\,dx^\alpha$ является полным дифференциалом какой-либо функции координат (постранственных), так что интеграл (85,5) по замкнутому контуру окажется равным нулю, а синхронизация часов возможной. В этом случае появление компонент $g_{0\alpha}$ обусловлено не свойствами самой системы отсчета, а просто неудачным выбором координаты x^0, и надлежащим ее выбором можно всегда обратить $g_{0\alpha}$ в нуль.

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в § 54, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени x^0, есть поэтому $\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$. Поскольку уравнение эйконала (82,10) в постоянном поле не содержит x^0, то частота ω_0 остается постоянной при распространении луча света. Частота же, измеренная в собственном времени, есть $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$; эта частота различна в разных точках пространства. В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial^0 x}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

мы имеем

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\omega_0. \tag{85,6}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right), \tag{85,7}$$

т. е. частота света возрастает в тех местах, где абсолютная величина гравитационного поля больше.

Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет (в этой точке) частоту ω, то, придя в точку с потенциалом φ_2, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную $\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)$.

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на земле. Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}, \tag{85,8}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на земле наблюдается спектр, испускаемый на солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (85,8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют „красным смещением".

Траекторию луча в статическом гравитационном поле можно определить с помощью принципа Ферма (54,10): $\delta\int k\,dl = 0$. Поскольку в пустоте $k = \omega c$, где ω — частота, измеренная в данном месте, то мы можем написать $\delta\int \omega\,dl = 0$, или с помощью (85,6),

$$\delta\int\frac{dl}{\sqrt{g_{00}}} = 0. \tag{85,9}$$

Отсюда непосредственно видно, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определилась бы уравнением $\delta\int dl = 0$.

При движении в постоянном поле энергия частицы сохраняется. Энергия есть временная компонента 4-импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}\,dx_0^2 - dl^2$, и мы имеем для энергии, которую мы обозначим здесь посредством $\mathscr{E}_0$:

$$\mathscr{E}_0 = mcg_{00}\frac{dx^0}{ds} = mcg_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}dx_0^2 - dl^2}}.$$

Введем скорость $v=\frac{dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0}$ частицы, измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии

$$\mathscr{E}_0=\frac{mc\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{85,10}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы. Величина же $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, которую можно называть попрежнему „кинетической энергией“, при этом отнюдь не постоянна. Можно показать, что выражение (85,10) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы.

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей находим приближенно из (85,10) с помощью равенства $g_{00}=c^2+2\varphi$:

$$\mathscr{E}_0=mc^2+\frac{mv^2}{2}+m\varphi, \tag{85,11}$$

где $m\varphi$ — нерелятивистская потенциальная энергия частицы в гравитационном поле в согласии с функцией Лагранжа (76,1).

Наконец, выведем условие термодинамического равновесия для макроскопических тел, находящихся в гравитационном поле. Этими условиями являются постоянство вдоль тела его температуры и химического потенциала. Однако, в гравитационном поле следует отличать температуру T_0, одинаковую во всех точках находящегося в равновесии тела, от температуры T, измеренной наблюдателем, находящимся в данном месте. Температура, как известно, определяется как производная от энергии тела по его энтропии (та и другая отнесены, например, к единице объема). Очевидно, что T_0 есть производная от сохраняющейся энергии $\mathscr{E}_0$ тела, а T — от энергии $\mathscr{E}$, измеренной наблюдателем в данном месте. Поскольку энтропия тела является величиной инвариантной (см. § 35), то связь между T и T_0 такая же, как и между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_0$. Но энергия $\mathscr{E}_0$ равна производной $-\frac{\partial S}{\partial x^0}$ от действия, а энергия $\mathscr{E}$ — производной $-\frac{\partial S}{\partial \tau}$ того же действия по собственному времени в данной точке. Поскольку $\frac{\partial S}{\partial \tau}=\frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial \tau}=\frac{\partial S}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$, то, следовательно,

$$\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{85,12}$$

и поэтому температура

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{85,13}$$

Таким образом, при термодинамическом равновесии вдоль тела постоянно произведение $T\sqrt{g_{00}}$.

То же самое относится и к химическому потенциалу тела, который, как известно, определяется как производная от энергии по числу частиц тела при постоянной энтропии. Поскольку число частиц, из которых состоит тело, есть величина неизменная, то для химического потенциала ζ, измеренного в данной точке, имеем, как и для температуры, соотношение

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{85,14}$$

где величина ζ_0 постоянна вдоль тела, находящегося в термодинамическом равновесии. В предельном случае малых скоростей ζ переходит в $mc^2 + \zeta'$, где ζ' — нерелятивистское выражение для химического потенциала (член mc^2 возникает по той причине, что при малых скоростях релятивистское выражение для энергии каждой из частиц тела отличается от нерелятивистского на „энергию покоя" mc^2; m — масса отдельной частицы). Если, кроме того, гравитационное поле слабое, то $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, и мы имеем

$$\zeta\sqrt{g_{00}} \approx \zeta' + mc^2 + m\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вдоль находящегося в термодинамическом равновесии тела постоянна величина

$$\zeta' + m\varphi = \text{const.}, \tag{85,15}$$

результат, известный из нерелятивистской статистики.

§ 86. Вращение

В качестве примера стационарного гравитационного поля рассмотрим равномерно вращающуюся систему отсчета и изучим метрические свойства пространства-времени в такой системе.

Определим интервал ds в рассматриваемой системе отсчета. Для этого произведем преобразование от неподвижной системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими координатами r', φ', z') интервал

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2.$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями Z и Z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω — угловая скорость вращения. Подставляя это, находим искомое выражение для ds^2 во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2r^2)\,dt^2 - 2\Omega r^2\,d\varphi\,dt - dz^2 - r^2d\varphi^2 - dr^2. \tag{86,1}$$

Компонента g_{00} метрического тензора равна

$$g_{00} = c^2 - \Omega^2r^2. \tag{86,2}$$

Поэтому истинное время, измеренное часами, находящимся в данном месте пространства, связано со „временем" t посредством соотношения (см. § 79):

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2r^2}{c^2}}\,t. \tag{86,3}$$

Далее определим элемент dl пространственного расстояния во вращающейся системе отсчета. Для этого надо подставить значения g_{ik} из (86,1) в общую формулу (79,5). Замечая, что единственная, отличная от нуля компонента вида $g_{0\alpha}$ есть $g_{0\varphi} = \Omega r^2$, легко находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{86,4}$$

Это выражение определяет пространственную геометрию во вращающейся системе отсчета. Определим, например, длину окружности (с центром, лежащим на оси вращения). Для этого надо положить $dz = dr = 0$ и проинтегрировать по $d\varphi$ от 0 до 2π; это дает $\dfrac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}$. С другой стороны, длина радиуса (получающаяся интегрированием dl при $d\varphi = 0$, $dz = 0$) равна просто r. Таким образом, геометрия на вращающемся теле такова, что отношение длины окружности к ее радиусу больше, чем 2π.

Необходимо отметить, что рассмотренной нами в этом параграфе вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из (86,2) видно, что при $r > c/\Omega$ g_{00} делается отрицательным, что недопустимо [см. (79,3)]. Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей, чем скорость света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Действительно, производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на $-\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$, где интеграл берется по рассматриваемому контуру. При подстановке мы получаем

$$\Delta t = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{86,5}$$

В случае $\Omega r/c \ll 1$, т. е. когда скорость вращения мала по сравнению со скоростью света, эта формула переходит в

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \tag{86,6}$$

где S — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения). Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света по определению всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии. Поэтому искомое время равно

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \mp 2\Omega \frac{S}{L}.$$

Эту формулу можно легко вывести, как и формулу для первого приближения эффекта Допплера, и чисто классическим путем.

ГЛАВА X

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 87. Тензор кривизны

Вернемся опять к понятию параллельного переноса вектора. Как было сказано в § 80, в общем случае неэвклидова пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, декартовой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если $x^i = x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i = \frac{du^i}{ds}$ есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то, как мы видели в § 74, вдоль нее $Du^i = 0$ [см. (82,2)]. Это значит, что если вектор u^i подвергнуть параллельному переносу из точки x^i на геодезической линии в точку $x^i + dx^i$ на той же линии, то он совпадет с вектором $u^i + du^i$, касательным к линии в точке $x^i + dx^i$. Таким образом, при передвижении касательной к геодезической линии вдоль этой самой линии она передвигается параллельно самой себе.

Благодаря этому свойству геодезических линий мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменны; другими словами, при параллельном переносе вектор должен сохранять все время один и тот же угол с геодезическими линиями.

Весьма существенным является то обстоятельство, что в неэвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если перенос совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

Для того, чтобы уяснить это, рассмотрим неэвклидово двухмерное пространство, т. е. какую-нибудь кривую поверхность. На рис. 15 изображен кусок такой поверхности, ограниченный тремя геодезическими линиями. Подвергнем вектор *1* параллельному переносу вдоль контура, образованного этими линиями. При передвижении вдоль линии AB вектор *1*, сохраняя все время одинаковый угол с этой линией, перейдет в вектор *2*. При передвижении вдоль BC он таким же образом перейдет в *3*. Наконец, при движении из C в A вдоль кривой CA, сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдет в *1'*, не совпадающий с вектором *1*.

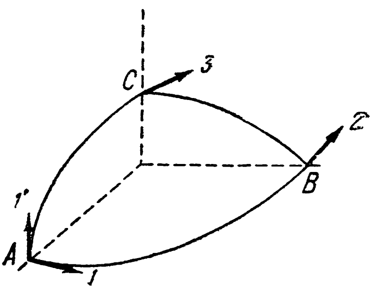

Рис. 15.

Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе по некоторому бесконечно малому замкнутому контуру. Это изменение ΔA_k можно, очевидно, написать в виде $\oint \delta A_k$, где интеграл берется по данному контуру. Подставляя вместо δA_k выражение (80,5), мы имеем

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

(стоящий под интегралом вектор A_i меняется по мере его переноса вдоль контура). Этот криволинейный интеграл мы можем преобразовать с помощью теоремы Стокса (6,14) в интеграл по поверхности, огибаемой данным контуром. Тогда

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right] df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right] df^{lm}.$$

Но изменение вектора A_i вдоль контура есть его изменение благодаря параллельному переносу; поэтому производные от A_i мы можем определить прямо из $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т. е. $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$. Подставляя это и меняя обозначение индексов в двух последних членах под интегралом, находим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int \left\{\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right\} A_i df^{lm}.$$

В виду бесконечной малости замкнутого контура мы можем заменить подинтегральное выражение его значением в некоторой точке внутри контура и вынести из-под знака интеграла. Оставшийся интеграл даст тогда просто площадь Δf^{lm} поверхности, огибаемой контуром, и мы получаем окончательно

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \qquad (87,1)$$

где R^i_{klm} — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{87,2}$$

То, что R^i_{klm} — тензор, видно из того, что в (87,1) слева стоит вектор — разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке. Тензор R^i_{klm} называется тензором кривизны или тензором Римана-Кристоффеля.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^kB_k) = 0$, где B_k — некоторый ковариантный вектор. С помощью (87,1) имеем отсюда

$$\Delta(A^kB_k) = A^k\Delta B_k + B_k\Delta A^k = \frac{1}{2}A^kB_iR^i_{klm}\Delta f^{lm} + B_k\Delta A^k =$$
$$= B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2}A^iR^k_{ilm}\Delta f^{lm}\right) = 0,$$

или, в виду произвольности вектора B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \tag{87,3}$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. А именно, имеет место формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_mR^m_{ikl}, \tag{87,4}$$

которую легко проверить непосредственным вычислением (это вычисление мы здесь для краткости опускаем). Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^mR^i_{mkl}. \tag{87,5}$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров [это проще всего сделать, рассматривая, например, вместо тензора A_{ik} частный случай тензора вида A_iB_k и пользуясь при этом формулами (87,4), (87,5); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора].

Очевидно, что в эвклидовом пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в эвклидовом пространстве можно выбрать координаты, в которых во всем пространстве все $\Gamma^i_{kl} = 0$, а потому и $R^i_{klm} = 0$. В силу тензорного характера R^i_{klm}, он равен тогда нулю и в любой другой системе координат. Это связано с тем, что в эвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется. В эвклидовом пространстве можно, очевидно, менять порядок ковариантного дифференцирования.

Имеет место и обратная теорема: если $R^i_{klm}=0$, то пространство эвклидово. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, декартову в данном бесконечно малом участке. Если же $R^i_{klm}=0$, то параллельный перенос есть однозначная операция, и при помощи параллельного переноса декартовой системы из данного бесконечно малого участка во все остальные можно построить декартову систему во всем пространстве, т. е. пространство эвклидово.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли пространство эвклидовым или нет.

Заметим, что хотя в неэвклидовом пространстве и можно выбрать систему координат, которая была бы декартовой в данной точке, т. е. такую, чтобы в данной точке все Γ^i_{kl} обратились в нуль, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль вместе с Γ^i_{kl}).

§ 88. Свойства тензора кривизны

Из выражения (87,2) для тензора R^i_{klm} непосредственно следует, что тензор кривизны антисимметричен по индексам l и m:

$$R^i_{klm}=-R^i_{kml}. \tag{88,1}$$

Далее, легко проверить, что имеет место следующее тождество:

$$R^i_{klm}+R^i_{mkl}+R^i_{lmk}=0. \tag{88,2}$$

Наряду со смешанным тензором кривизны R^i_{klm} употребляют также ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}. \tag{88,3}$$

С помощью простых преобразований легко получить следующее выражение для R_{iklm}:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+$$
$$+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{88,4}$$

Из этого выражения непосредственно вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm}=-R_{kilm}, \tag{88,5}$$
$$R_{iklm}=-R_{ikml}, \tag{88,6}$$
$$R_{iklm}=R_{lmik}. \tag{88,7}$$

Из этих формул следует, в частности, что все компоненты R_{iklm}, у которых одна или обе из пар индексов i, k и l, m одинаковы, равны нулю.

Наконец, для R_{iklm}, как и для $R^{i}_{\ klm}$, имеет место тождество (88,2)

$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0. \tag{88,8}$$

Больше того, в силу соотношений (88,5—7) отсюда следует, что если в R_{iklm} произвести одну и ту же циклическую перестановку над любыми тремя индексами и полученные три компоненты сложить, то результат будет равен нулю.

Наконец, докажем еще следующее тождество:

$$R^{n}_{\ ikl;m}+R^{n}_{\ imk;l}+R^{n}_{\ ilm;k}=0. \tag{88,9}$$

Его удобно проверить, воспользовавшись системой координат, декартовой в данной точке. В силу тензорного характера соотношение (88,9) будет тогда иметь место в любой системе координат. Дифференцируя выражение (88,2) и полагая потом в нем $\Gamma^{i}_{kl}=0$, находим в рассматриваемой точке

$$R^{n}_{\ ikl;m}=\frac{\partial R^{n}_{ikl}}{\partial x^{m}}=\frac{\partial^{2}\Gamma^{n}_{il}}{\partial x^{m}\partial x^{k}}-\frac{\partial^{2}\Gamma^{n}_{ik}}{\partial x^{m}\partial x^{l}}.$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (88,9) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор 2-го ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом. Действительно, если мы упростим $R^{m}_{\ ikl}$ по индексам m и i, то получим нуль:

$$R^{m}_{\ mkl}=g^{im}R_{imkl}=0$$

в силу антисимметричности R_{imkl} по индексам i и m. Упрощение по m и l (упрощение по m и k даст, очевидно, то же самое с обратным знаком) дает тензор 2-го ранга

$$R_{ik}=R^{l}_{\ ikl}=\frac{\partial\Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial\Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}}+\Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km}-\Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm}. \tag{88,10}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik}=R_{ki}. \tag{88,11}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{im}g^{kl}R_{iklm}, \tag{88,12}$$

называемый скалярной кривизной пространства.

В силу соотношений (88,5—8), не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент тензора R_{iklm}. Рассмотрим сначала случай пространства с двумя измерениями, т. е. обычную поверхность; индексы i, k, l, m могут при этом иметь значения 1, 2. Компоненты, у которых одновременно i и k или l и m равны 1 или 2, равны нулю. Все же не равные нулю компоненты либо равны друг другу, либо отличаются знаком; таким образом, тензор кривизны имеет в этом случае только одну независимую компоненту, например R_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна $R = g^{im}g^{kl}R_{iklm}$ в этом случае равна $R = 2R_{1212}/g^2$ (g — детерминант, составленный из величин g_{ik}). R при этом оказывается равным известной гауссовой кривизне поверхности, т. е. единице, деленной на произведение главных радиусов кривизны.

Определим теперь число независимых компонент тензора кривизны в трехмерном пространстве. Рассмотрим те компоненты, у которых есть только два различных индекса, т. е. компоненты вида R_{abab}. Пару значений a и b можно выбрать из значений 1, 2, 3 тремя способами. Каждая пара a и b дает в силу соотношений (88,5—7) только одну независимую компоненту; таким образом, компонент такого типа будет всего три. Компонент с тремя разными индексами, т. е. компонент вида R_{abac}, тоже будет всего три: R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}; все остальные равны этим или отличаются от них только знаком. Таким образом, в трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметрический тензор R_{ik}. Поэтому из линейных соотношений $R_{ik} = g^{ml}R_{likm}$ все компоненты тензора R_{iklm} могут быть выражены через R_{ik} и метрический тензор g_{ik}. Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться того, чтобы три компоненты тензора кривизны обратились в данной точке в нуль; в частности, можно привести тензор R_{ik} к главным осям. Таким образом, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами.

Наконец, перейдем к четырехмерному пространству. Компонент тензора кривизны с двумя разными индексами (т. е. типа R_{abab}) всего шесть: индексы a и b можно выбрать из четырех значений 1, 2, 3, 4 шестью способами, а каждая пара значений дает одну независимую компоненту. Компонент с тремя разными индексами всего 12: три различных индекса из 1, 2, 3, 4 можно выбрать четырьмя способами, а каждая тройка значений дает три независимые компоненты (например, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}). Наконец, компонент, у которых все четыре индекса различны, имеется три: R_{1234}, R_{1423}, R_{1342}; остальные равны этим или отличаются только знаком. Но и из этих трех компонент только две независимы, так как все три связаны друг с другом одним тождеством (88,2) $R_{1234} + R_{1423} + R_{1342} = 0$. Таким образом, в четырехмерном пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент [1]). Соответствующим выбором системы координат можно добиться того,

[1]) Выпишем комбинации индексов i, k, l, m, дающие независимые компоненты

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

причем $R_{1234} - R_{1324} + R_{1423} = 0$.

чтобы шесть компонент тензора кривизны обратились в нуль. (Шесть есть число возможных независимых поворотов четырехмерной системы координат.) Таким образом, кривизна четырехмерного пространства в каждой точке определяется 14 величинами.

§ 89. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получатся тогда путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде интеграла по всему полю, т. е. по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями. Поскольку S_g должно быть инвариантом, то оно имеет вид

$$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

где G — некоторый скаляр. Для определения этого скаляра мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от „потенциалов" поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путем варьирования действия, то для этого необходимо, чтобы скаляр G содержал производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако, из одних только величин g_{ik} и Γ^i_{kl} невозможно построить инварианта. Это видно непосредственно из того обстоятельства, что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль. Существует, однако, скаляр R — кривизна 4-пространства, — содержащий наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik}, причем последние входят только линейно. Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных. Именно, $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно представить в виде

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подинтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i (подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа). Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах. При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах интегрирования вариация поля равна нулю. Следовательно, мы можем написать

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сам же интеграл $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные. Поскольку, как видно из предыдущего, $\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ является единственным таким инвариантом, то мы можем написать

$$\delta S_g=\frac{1}{2\varkappa c}\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{2\varkappa c}\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (89,1)$$

где $\varkappa$ — новая универсальная постоянная. Аналогично тому, как это было сделано в § 27 для действия электромагнитного поля (но путем более сложных вычислений, которые мы не будем здесь производить), можно видеть, что постоянная $\varkappa$ должна быть положительна, — в противном случае S_g могло бы неограниченно уменьшаться (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не имело бы минимума.

Постоянная $\varkappa$ определенным образом связана с так называемой гравитационной постоянной; эта связь будет выяснена в § 92. Размерность $\varkappa$ следует непосредственно из (89,1). Действие имеет размерность *г* · *см*^{2} · *сек*$^{-1}$; все координаты можно считать имеющими размерность *см*, а g_{ik} — безразмерными, и, следовательно, R имеет размерность *см*$^{-2}$. В результате находим, что $\varkappa$ имеет размерность *см*$^{-1}$ · *г*$^{-1}$ · *сек*^{2}. Ее численное значение равно

$$\varkappa=2{,}073\cdot 10^{-48}\ \textit{см}^{-1}\cdot\textit{г}^{-1}\cdot\textit{сек}^{2}. \qquad (89,2)$$

Заметим, что мы могли бы положить $\varkappa$ равной единице (или другому произвольному безразмерному числу). При этом, однако, определился бы выбор единицы для измерения массы, которая совпадала бы в этом случае с единицей измерения длины [1]).

Вычислим, наконец, величину G в (89,1). Из выражения (88,10) для R_{ik} имеем:

$$\sqrt{-g}R=\sqrt{-g}\,g^{ik}R_{ik}=$$
$$=\sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}+g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right\}.$$

[1]) Иногда полагают $\varkappa c^2=8\pi$; тогда масса измеряется в *см*, причем 1 *см* $=1{,}35\cdot10^{28}$ *г*. Массу, измеренную в этих единицах, называют гравитационным радиусом тела.

В первых двух членах справа имеем

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}=\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il})-\Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}).$$

Опуская полные производные, находим

$$\sqrt{-g}\,G=\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})+$$
$$+(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})\,g^{ik}\sqrt{-g}.$$

С помощью формул (81,6) и (81,7) находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl}-2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}=g^{ik}(\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}-2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}+$$
$$+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})=2g^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}).$$

Окончательно имеем

$$G=g^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}). \tag{89,3}$$

§ 90. Тензор энергии-импульса

В § 32 было получено общее правило для выражения тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{90,1}$$

(в галилеевых координатах $-g=c^2$ и S переходит в $\int\Lambda\,dV\,dt$). Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того, чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32,5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} антисимметрично по индексам k и l. Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающей тем преимуществом, что он сразу приводит к правильному выражению.

Произведем в (90,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i=x^i+\xi^i$, где ξ^i — малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно общим формулам как

$$g^{ik}(x^l) = g'^{lm}(x'^l)\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g'^{lm}\left(\delta_l^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$
$$\approx g'^{ik}(x'^l) - g'^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} - g'^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} — функцией прежних координат x^l. Для того, чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, подставим в g'^{ik} $x'^l = x^l + \xi^l$ и разложим $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем во всех членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}. Таким образом, находим

$$g^{ik}(x^l) = g'^{ik}(x^l) + \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} - g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} - g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $-\xi^{i;k} - \xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i. Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{90,2}$$

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в § 32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу „уравнений движения" физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим δS в виде

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega =$$
$$= \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}; \tag{90,3}$$

тогда δS примет вид [1]):

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{90,4}$$

(замечаем, что $g^{ik}\delta g_{ik}=-g_{ik}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik}=-T_{ik}\delta g^{ik}$). Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (90,2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik},

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Далее, преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S=\frac{1}{c}\int (T_i^k\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{90,5}$$

Первый интеграл с помощью (81,8) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i)\,d\Omega$$

и преобразован в интеграл на гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega=0.$$

В виду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T^k_{i;k}=0. \tag{90,6}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (32,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}=0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой (90,3), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса, — по крайней мере с точностью до постоянного множителя.

Покажем, что этот множитель равен единице, т. е. что T_{ik} из (90,3) есть в точности тензор энергии-импульса. Для этого вычислим вариацию δS действия при смещении одного из пределов интегрирования по времени, т. е. при бесконечно малом смещении одной из гиперповерхностей $x^0=\text{const}$. Такое смещение эквивалентно преобразованию координат $x^i=x'^i-\xi^i$ с не исчезающими на границе интегрирования (т. е. на гиперповерхности $x^0=\text{const.}$) величинами ξ^i. В выражении (90,5) для δS второй член теперь исчезает в силу уравнений (90,6). Первый же член, будучи преобразован по теореме Гаусса в интеграл по гиперповерхности, дает

$$\delta S=\frac{1}{c}\int T_i^k\sqrt{-g}\,\xi^i\,dS_k. \tag{90,7}$$

---

[1]) Обращаем внимание на то, что в рассматриваемом случае величины δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik}=0$. Заметим также, что выражение (90,4) для δS справедливо при любом варьировании g_{ik}.

С другой стороны, производные от действия связаны с 4-импульсом P_i посредством (см. § 82) соотношения

$$\delta S = -P_i \delta x^i.$$

В (90,7) ξ^i играют роль вариации координат. Мы видим, следовательно, из (90,7), что $\frac{1}{c} T_i^k \sqrt{-g}$ играет роль „плотности 4-импульса", приходящегося на единицу „площади гиперповерхности". Но это есть как раз то соотношение, которое должно связывать 4-импульс с тензором энергии-импульса (см. § 32)[1]).

Таким образом, формула (90,3) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производных). При этом тензор T_{ik}, определенный по (90,3), является, очевидно, симметричным. Формула (90,3) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельно смысла и переход к криволинейным координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}. Так, с помощью (90,3) легко получить выражение (33,1) тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

§ 91. Уравнения гравитационного поля

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m — действия, соответственно, для гравитационного поля и материи. Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины g_{ik}.

Вычислим вариацию δS_g. Мы имеем:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$

$$= \int \left\{ R_{ik}\sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g}\, \delta R_{ik} \right\} d\Omega.$$

Из формулы (81,4) имеем

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik};$$

подставляя это, находим

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \\ + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (91,1)$$

---

[1]) В криволинейных координатах, т. е. в гравитационном поле, не существует вектора полного 4-импульса материи, так как интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ отнюдь не является вектором, поскольку закон преобразования вектора различен в разных точках пространства, так что сумма векторов, взятых в разных точках, не есть вектор (см. § 78). Подробнее о 4-импульсе материи в гравитационном поле см. § 97.

Для вычисления δR_{ik} заметим, что хотя величины Γ^i_{kl} и не составляют тензора, но их вариации $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор. Действительно, $\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ есть изменение вектора при параллельном переносе [см. (80,5)] из некоторой точки P в бесконечно близкую к ней P'. Поэтому $\delta\Gamma^k_{il}A_k\,dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся, соответственно, при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными Γ^i_{kl}) из точки P в одну и ту же P'. Разность же двух векторов в одной и той же точке есть вектор, а потому $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

Воспользуемся системой координат, галилеевой в данной точке. Тогда в этой точке все $\Gamma^i_{kl}=0$. С помощью выражения (88,10) для R_{ik} имеем (помня, что первые производные от g^{ik} равны теперь нулю):

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}\right\}=g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}=\frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l=g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}-g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}.$$

Поскольку w^l есть вектор, то мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,w^l)$$

[заменяя $\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$ на $w^l_{;l}$ и пользуясь (81,8)]. Следовательно, второй интеграл справа в (91,1) равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}\,d\Omega$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает. Таким образом, вариация δS_g равна

$$\delta S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{91,2}$$

Заметим, что если бы мы исходили из выражения

$$S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

для действия поля, то мы получили бы, как легко убедиться,

$$\delta S_g=\frac{1}{2c\varkappa}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Сравнивая это с (91,2), находим следующее соотношение:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \tag{91,3}$$

Для вариации действия материи мы можем написать непосредственно на основании (90,4):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{91,4}$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле). Гравитационное взаимодействие играет роль только для тел с достаточно большой массой (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому при исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами. Соответственно этому для T_{ik} надо обычно писать выражение (34,6). Благодаря тому, что мы теперь пользуемся координатой x^0 вместо x^4, и благодаря тому, что при принятом нами определении g_{ik} квадрат $u_i u^i = 1$, а не -1, то это выражение нужно теперь писать в виде

$$T_i^k = (p + \rho c^2)\,u_i\,u^k - \delta_i^k p. \tag{91,5}$$

Если же гравитационное поле создается электромагнитным излучением в пустоте, то для T_i^k надо было бы воспользоваться выражением (33,1): $T_i^k = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{lm}^2\,\delta_i^k - F_{il}F^{kl}\right)$. Необходимо, однако, иметь в виду, что плотность энергии существующего в природе свободного излучения очень мала по сравнению с плотностями энергии материальных тел, включающими в себя их энергию покоя. Поэтому рассмотрение гравитационного поля, создаваемого электромагнитным полем в отсутствии масс, не представляет интереса.

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ мы находим с помощью соотношений (91,2) и (91,4):

$$\frac{1}{2\varkappa c}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \varkappa T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

откуда, в виду произвольности δg^{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\varkappa T_{ik}, \tag{91,6}$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k. \tag{91,7}$$

Это и есть искомые уравнения гравитационного поля — основные уравнения общей теории относительности.

Упрощая (91,7) по индексам i и k, находим $R = \varkappa T$ $(T = T_i^i)$. Поэтому уравнения поля можно написать так же в виде

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{91,8}$$

Отметим, что уравнения гравитационного поля являются уравнениями нелинейными. Поэтому для гравитационных полей в отличие от электромагнитных (§ 27) не имеет места принцип суперпозиции.

В пустом пространстве $T_{ik}=0$, и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik}=0. \qquad (91,9)$$

Напоминаем, что это отнюдь не значит, что пустое 4-пространство является плоским, — для этого требовалось бы, чтобы $R^i_{klm}=0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает тем свойством, что $T^i_i=0$ [см. (33,2)]. Поскольку, с другой стороны, $R=\varkappa T$, то, следовательно, при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю ($R=0$).

Как мы знаем, дивергенция $T^k_{i;k}$ тензора T^k_i равна нулю (§ 90); поэтому должна быть равной нулю и дивергенция левой части уравнения (91,7). Легко убедиться в том, что действительно имеет место тождество

$$R^k_{i;k}-\frac{1}{2}(\delta^k_i R)_{;k}=R^k_{i;k}-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}=0. \qquad (91,10)$$

Оно вытекает непосредственно из тождества (88,9) при умножении последнего на $g^{ik}\delta^l_n$ и последующем упрощении.

Таким образом, уравнения $T^k_{i;k}=0$ по существу содержатся в уравнениях поля (91,7). С другой стороны, из уравнений $T^k_{i;k}=0$ вытекают (см. §§ 33, 35) уравнения движения материальных частиц и вторая пара уравнений Максвелла. Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи (материальных частиц и электромагнитного поля), которая создает это поле. В противоположность этому, уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения этих создающих поле зарядов.

Поэтому в случае электромагнитного поля распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным; заданием этого распределения зарядов определяется тогда посредством уравнений Максвелла создаваемое ими поле. В гравитационном же поле распределение и движение создающей его материи отнюдь не могут быть заданы произвольным образом, — напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Необходимо, однако, отметить, что уравнения гравитационного поля не определяют распределения и движения материи целиком. Именно, эти уравнения не содержат в себе уравнение состояния вещества, т. е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность. Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля.

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию. Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik}. Поэтому независимыми являются только шесть величин g_{ik}. Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u^i u_i = 1$, так что независимыми являются только три из них. Таким образом, десять уравнений поля (91,6) действительно определяют десять неизвестных величин, именно, шесть компонент g_{ik}, три компоненты u^i и плотность ρ материи (или ее давление p).

Исключая из уравнений (91,6) четыре неизвестных, — скорость и плотность, — можно получить шесть уравнений, определяющих шесть величин g_{ik}. То, что для g_{ik} имеется всего шесть уравнений, видно и непосредственно из того, что 10 уравнений (91,6) связаны друг с другом четырьмя тождествами $T^k_{i;k} = 0$.

§ 92. Закон Ньютона

Произведем в полученных нами уравнениях гравитационного поля предельный переход к нерелятивистской механике, т. е. к $c \to \infty$. Как было указано в § 83, предположение о малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражения для компонент метрического тензора в рассматриваемом предельном случае были найдены в § 83:

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{00} = c^2 + 2\varphi.$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (34,7) $T^k_i = \mu c^2 u_i u^k$ (мы меняем в нем знак по причинам, указанным уже в § 91), где μ — плотность массы тела (сумма масс частиц в единице объема). Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т. е. должны положить $u^\alpha = 0$, $u^0 = \frac{u_0}{c^2} = \frac{1}{c}$. Из всех компонент T^k_i останется, таким образом, только

$$T^0_0 = \mu c^2. \tag{92,1}$$

Скаляр $T = T^i_i$ будет равен тому же μc^2.

Уравнения поля мы напишем в форме (91,8):

$$R^k_i = -\varkappa\left(T^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i T\right);$$

при $i = k = 0$

$$R^0_0 = -\frac{\varkappa}{2}\mu c^2.$$

Все остальные уравнения, как легко убедиться, в рассматриваемом приближении тождественно обращаются в нуль.

Для вычисления R_0^0 замечаем, что из всех компонент Γ^i_{kl} отличны от нуля только компоненты $\Gamma^\alpha_{00} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ (83,3). При подстановке этого значения в общее выражение (88,10) для R_{ik} получаем:

$$R_{00} = c^2 R_0^0 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} \equiv -\Delta\varphi.$$

Таким образом, уравнения поля переходят в

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu, \tag{92,2}$$

где

$$k = \frac{\varkappa c^4}{8\pi} = 6{,}664 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2} \tag{92,3}$$

называется ньютоновской гравитационной постоянной.

Уравнение (92,2) является уравнением гравитационного поля в нерелятивистской механике. Обращаем внимание на то, что оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36,4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$. Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (92,2) по аналогии с (36,8) в виде

$$\varphi = -k\int\frac{\mu\, dV}{R}. \tag{92,4}$$

Эта формула определяет потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем

$$\varphi = -\frac{km}{R} \tag{92,5}$$

и, следовательно, сила $F = -m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \tag{92,6}$$

Это — известный закон тяготения Ньютона [1]).

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля (§ 85), аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля. Поэтому мы можем написать по аналогии с (37,1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U = -\frac{k}{2}\int\rho\varphi\, dV. \tag{92,7}$$

---

[1]) Из (92,6) видно, что отношение гравитационных сил к электромагнитным у элементарных частиц весьма ничтожно. Так, для двух электронов $\frac{km^2}{e^2} = 2 \cdot 10^{-43}$, а для двух протонов $7 \cdot 10^{-37}$.

Наконец, напишем принцип наименьшего действия для гравитационного поля в нерелятивистской механике. Для интеграла действия частицы в гравитационном поле имеем теперь с помощью (76,1)

$$S_m = \int \left(\frac{mv^2}{2} - m\varphi\right) dt.$$

Для масс, распределенных в пространстве с плотностью μ, можно написать действие в виде

$$S_m = \int \left(\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi\right) dV\, dt.$$

Что касается действия поля S_g, то его можно вычислить с помощью общего выражения (89,3) для G. При этом, однако, предельные значения g_{ik}, которыми мы до сих пор пользовались, оказываются недостаточными, — при подстановке их G обращается тождественно в нуль.

Поэтому для вычисления G необходимо предварительно вычислить g_{ik} с точностью для членов следующего порядка малости. Мы не будем приводить здесь этих вычислений и напишем только их окончательный результат:

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k} \int (\nabla\varphi)^2\, dV\, dt.$$

Таким образом, полное действие для гравитационного поля и материи имеет вид

$$S = \int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV\, dt. \tag{92,8}$$

Легко убедиться, что варьирование по φ действительно приводит к уравнению Пуассона (92,2).

§ 93. Центрально-симметрическое гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметрическим распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметрическим должно быть не только распределение вещества, но и его движение, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds, должно быть одинаковым во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В эвклидовом пространстве это расстояние равно радиусу-вектору; в неэвклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами эвклидова радиуса-вектора (например, одновременно равной расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор „радиуса-вектора“ является теперь произвольным.

Если пользоваться „сферическими“ пространственными координатами r, θ, φ, то наиболее общим центрально-симметрическим выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r, t)\, dr^2 + k(r, t)(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r, t)\, dt^2 + a(r, t)\, dr\, dt,$$

где a, h, k, l — некоторые функции от „радиуса-вектора“ r и „времени“ t. Но, в виду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул $r=f_1(r', t')$, $t=f_2(r', t')$, где f_1, f_2 — любые функции от новых координат r', t'. В частности, можно всегда выбрать временную координату таким образом, чтобы коэффициент при $dr\,dt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль [1]). Вторым же возможным преобразованием мы пока не воспользуемся, имея в виду получить общие уравнения поля, в которых можно будет затем выбрать координату r различными способами. Величины h, k, l нам будет ниже удобнее писать в экспоненциальном виде, соответственно, как — e^{λ}; — e^{μ}, e^{ν}, где λ, μ, ν — некоторые функции от r и t. Таким образом, мы будем пользоваться выражением для ds^2 в виде

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\mu}(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) - e^{\lambda}dr^2. \qquad (93,1)$$

Подразумевая под x^1, x^2, x^3, x^0, соответственно, координаты r, θ, φ, t, мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -e^{\mu}, \quad g_{33} = -\sin^2\theta \cdot e^{\mu}, \quad g_{00} = e^{\nu}. \qquad (93,2)$$

С помощью этих значений легко определить по общей формуле (81,3) величины Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой — дифференцирование по t):

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', && \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\mu', && \Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\sin^2\theta\cdot\mu',\\
&\Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}, && \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = -\frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\dot{\mu}, && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\mu', && \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, && \Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu',\\
&\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}, && \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}\dot{\mu}, && \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu}.\\
&\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu',
\end{aligned}\right\} \qquad (93,3)$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Далее, мы вычислим компоненты тензора $T^k_i = (p+\rho c^2)u_i u^k - \delta^k_i p$. Поскольку скорость вещества направлена везде по радиусу-вектору,

[1]) Надо отметить, что это условие не определяет выбор временной координаты однозначным образом. Именно, она может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t=f(t')$, не содержащему r.

то для компонент 4-скорости $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ имеем (замечая, что $ds = dt\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}$):

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= -e^{-\lambda} u_1 = \frac{\dot{r}}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \\ u^0 &= e^{-\nu} u_0 = \frac{1}{\sqrt{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{93,4}$$

Для компонент тензора T_i^k находим теперь

$$\left.\begin{aligned} T_1^1 = -\frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \quad T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_0^0 = \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}, \\ T_0^1 = -T_1^0 e^{\nu - \lambda} = (p + \rho c^2)\frac{\dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{93,5}$$

Остальные компоненты T_i^k равны нулю.

С помощью выражений (93,3) для Γ_{kl}^i можно теперь вычислить тензор R_{ik} по общей формуле (88,10) и затем написать уравнения гравитационного поля (91,7) $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa T_i^k$. Простые, но довольно длинные вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -\varkappa T_1^1 = \varkappa \frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - \\ - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \end{aligned} \tag{93,6}$$

$$\begin{aligned} -\varkappa T_2^2 = \varkappa p = \frac{1}{4} e^{-\lambda}(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ + \frac{1}{4} e^{-\nu}(\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \end{aligned} \tag{93,7}$$

$$\begin{aligned} -\varkappa T_0^0 = -\varkappa \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) - e^{-\mu}, \end{aligned} \tag{93,8}$$

$$-\varkappa T_0^1 = -\varkappa \frac{(p + \rho c^2)\dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^\lambda \dot{r}^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + \nu'\dot{\mu}\right). \tag{93,9}$$

Воспользуемся теперь оставшейся у нас возможностью для выбора „радиус-вектора“ r. Часто бывает удобным выбирать r таким образом, чтобы длина окружности (с центром в начале координат) была равна $2\pi r$. Для этого необходимо, чтобы $e^\mu = r^2$ (тогда элемент дуги окружности в плоскости $\theta=\pi/2$ будет $dl=r\,d\varphi$ и длина всей окружности $\int dl=2\pi r$). Интервал ds^2 (93,1) принимает теперь вид:

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2+d\theta^2), \tag{93,10}$$

а уравнения гравитационного поля [подставляя $\mu=2\ln r$ в (93,6—9)]:

$$\varkappa\frac{\rho c^2\dot r^2e^{\lambda}+pe^{\nu}}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot r^2}=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{93,11}$$

$$\varkappa p=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \tag{93,12}$$

$$-\varkappa\frac{\rho c^2e^{\nu}+pe^{\lambda}\dot r^2}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot r^2}=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{93,13}$$

$$-\varkappa\frac{(p+\rho c^2)\dot re^{\nu}}{e^{\nu}-e^{\lambda}\dot r^2}=e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}. \tag{93,14}$$

Из этих уравнений можно, не решая их, вывести некоторые неравенства, которым должны удовлетворять λ и ν [при выборе ds^2 в виде (93,10)]. Из (93,13) видно, что при $r\to0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере, как r^2; в противном случае правая часть (93,13) обратилась бы при $r=0$ в бесконечность, т. е. и T_0^0 имело бы в $r=0$ особую точку. С другой стороны, воспользовавшись тем, что $\lambda_{r=0}=0$, можно проинтегрировать (93,13) в виде

$$\lambda=-\ln\left\{1-\frac{\varkappa}{r}\int\limits_0^r T_0^0\,r^2dr\right\}. \tag{93,15}$$

Поскольку, как видно из (93,5), всегда $T_0^0\geqslant0$ (напоминаем, что $\dot r$ не может быть больше $e^{\nu-\lambda}$, — это соответствовало бы скорости, превышающей скорость света), то из (93,15) видно, что $\lambda\geqslant0$, т. е.

$$e^{\lambda}\geqslant1. \tag{93,16}$$

Далее, поскольку $-T_1^1\geqslant0$ [как видно из (93,5)], то из уравнения (93,11) вместе с (93,16) следует, что $\nu'\geqslant0$. С другой стороны, поскольку на бесконечном расстоянии от создающих поле масс метрика должна переходить в эвклидову (т. е. g_{ik} должны быть галилеевыми), то при $r\to\infty$ должно быть $e^{\nu}=c^2$ (при этом в бесконечности t совпадает с истинным временем). Из этих предельных условий и неравенства $\nu'\geqslant0$ мы находим, что

$$e^{\nu}\leqslant c^2. \tag{93,17}$$

Расстояние от какой-либо точки поля до центра будет равно $\int\sqrt{-g_{11}}\,dr=\int e^{\lambda/2}dr\geqslant r$, а длина соответствующей окружности равна $2\pi r$. Таким образом, неравенство (93,16) показывает, что пространственная геометрия в центрально-симметрическом гравитационном поле такова, что отношение длины окружности к радиусу меньше, чем 2π.

Неравенство (93,17) $g_{00} \leqslant c^2$ в связи с формулой (79,1):

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dt,$$

определяющей истинное время, показывает, что в гравитационном поле происходит „замедление" времени по сравнению со временем на больших расстояниях от масс, где поле исчезает (на бесконечности t есть истинное время). Иначе говоря, смещение спектральных линий в гравитационном поле (§ 85) происходит всегда в красную сторону[1]).

§ 94. Центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте

Рассмотрим центрально-симметрическое поле в пустоте, т. е. вне тех масс, которые создают это поле. Интервал ds^2 выберем в виде (93,10). В пустоте $\rho = 0$, $p = 0$ и уравнения поля (93,11), (93,13) и (93,14) принимают вид

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{94,1}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{94,2}$$

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{94,3}$$

Четвертое уравнение [уравнение (93,12)] мы не пишем, так как оно оказывается следствием написанных уравнений.

Из (94,3) мы сразу видим, что λ не зависит от времени. Далее, складывая уравнения (94,1) и (94,2), находим $\lambda' + \nu' = 0$, т. е. $\lambda + \nu = \text{const}$. Поскольку при $r \to \infty$ должно быть $e^{\lambda} = 1$, $e^{\nu} = c^2$, то отсюда следует, что $e^{\nu} = c^2 e^{-\lambda}$. Таким образом, ν тоже не зависит от времени.

Уравнение (94,1) или (94,2) легко интегрируется, давая для λ выражение

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{c^2}e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const.}}{r}.$$

Входящую сюда постоянную легко определить из условия, что на больших расстояниях от масс, где поле слабо, имеет место закон Ньютона, и g_{00} должен иметь вид (83,2): $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (92,5): $\varphi = -\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\frac{m}{r} = -\frac{km}{r}$ (m — полная масса создающего поле тела). Отсюда видно, что $\text{const.} = 2km/c^2$.

Таким образом, мы находим окончательно для интервала

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2km}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r}}dr^2 + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{94,4}$$

[1]) Оба эти результата имеют место только при условии обращения метрики на бесконечности в галилееву.

Это выражение полностью определяет гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметрическим распределением масс. Решение уравнений поля в таком виде было найдено впервые Шварцшильдом. Подчеркиваем, что это решение имеет место не только для покоящихся масс, но и для движущихся, если только это движение тоже обладает центральной симметрией (например, центрально-симметрические пульсации). Гравитационное поле, таким образом, и в этом случае не зависит от времени.

Компонента g_{00}, как мы знаем, всегда положительна. Из (94,4) мы видим поэтому, что „радиус-вектор" r не может принимать значений меньших, чем $2km/c^2$. Соответствующая минимальная длина окружности равна $2\pi \cdot 2km/c^2 = 4\pi km/c^2$. Это значит, что материальное тело не может обладать размером, меньшим некоторого определенного нижнего предела. Именно, тело с массой m не может иметь в окружности длину меньше, чем $4\pi km/c^2$ [1]).

Наконец приведем еще приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2km}{c^2}(dr^2 - c^2dt^2). \tag{94,5}$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевской метрике ds_0^2. На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле является центрально-симметрическим. Поэтому (94,5) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел.

§ 95. Движение в гравитационном поле с центральной симметрией

Рассмотрим движение тела в центрально-симметрическом гравитационном поле. Как и во всяком центрально-симметрическом поле, движение будет происходить в одной „плоскости", проходящей через начало координат; выберем эту площадь в качестве плоскости $\theta = \pi/2$.

Для определения траектории тела (с массой m) воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2.$$

С помощью g^{ik}, определяемых выражением (94,4) для интервала, находим следующее уравнение:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{e^{\nu}}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2c^2, \tag{95,1}$$

где $e^{\nu} = c^2 - 2km'/r$ (m' — масса тела, создающего поле). По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби, ищем S в виде

$$S = \mathcal{E}_0 t - M\varphi + f(r)$$

---

[1]) Обращаем внимание на то, что этот результат не имеет смысла в применении к элементарным частицам. По отношению к этим частицам вся излагаемая в этой книге теория поля благодаря квантовым явлениям теряет свою применимость уже для размеров, в огромное количество раз (порядка 10^{40}) превышающих km/c^2.

с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M. Подставляя это в (95,1), находим уравнение

$$e^{-\nu}\mathscr{E}_0^2-\frac{M^2}{r^2}-\frac{e^{\nu}}{c^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2=m^2c^2,$$

откуда

$$\frac{df}{dr}=ce^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\mathscr{E}_0^2e^{-\nu}-m^2c^2-\frac{M^2}{r^2}}.$$

Таким образом, действие равно

$$S=\mathscr{E}_0t-M\varphi+\int ce^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\mathscr{E}_0^2e^{-\nu}-m^2c^2-\frac{M^2}{r^2}}\,dr. \tag{95,2}$$

Траектория определяется, как известно, уравнением $\frac{\partial S}{\partial M}=\mathrm{const.}$, откуда

$$\varphi=-\int\frac{\frac{cM}{r^2}\,dr}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2-m^2c^2e^{\nu}-\frac{M^2}{r^2}e^{\nu}}}. \tag{95,3}$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Примером движения в центрально-симметрическом гравитационном поле является движение планет в поле тяготения солнца. Поскольку скорости планет малы по сравнению со скоростью света, то релятивистская теория тяготения приводит лишь к очень незначительным поправкам для орбит планет по сравнению с теорией Ньютона.

Для приближенного исследования уравнения орбиты (95,3) удобно написать его в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{Mc}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\mathscr{E}_0^2-m^2c^2e^{\nu}-\frac{M^2}{r^2}e^{\nu}$$

или, вводя новую переменную $\sigma=1/r$ и подставляя выражение для e^{ν}:

$$M^2c^2\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\mathscr{E}_0^2-m^2c^4+2km'm^2c^2\sigma-M^2c^2\sigma^2+2km'M^2\sigma^3.$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma+\alpha\sigma^2, \tag{95,4}$$

где введены постоянные $p=\frac{M^2}{km'm^2}$, $\alpha=\frac{3km'}{c^2}$.

Это уравнение отличается от того, которое получилось бы в ньютоновской теории, малым членом $\alpha\sigma^2$. Будем решать его методом последовательных приближений. В нулевом приближении опускаем член $\alpha\sigma^2$. Оставшееся уравнение имеет, как известно, в качестве решения ньютоновскую орбиту

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi),$$

где p — параметр орбиты, а e — ее эксцентриситет; большая полуось равна $a=p/(1-e^2)$, а перигелий орбиты соответствует значению угла $\varphi=\pi$.

В следующем приближении мы ищем σ в виде $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$, где σ_0 — нулевое приближение. Подставляя $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$ в (95,4), находим для σ_1 уравнение

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\alpha\sigma_0^2=\frac{\alpha}{p^2}(1+e\cos\varphi)^2=\frac{\alpha}{p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+2e\cos\varphi+\frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right].$$

Из всех членов в скобке справа к наблюдаемому изменению орбиты приводит только второй, — благодаря резонансу (с решением однородного уравнения $\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=0$) он приводит к непрерывно растущему эффекту. Оставляя только этот член, находим для σ_1 частный интеграл неоднородного уравнения

$$\sigma_1=\frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi.$$

Таким образом, в искомом приближении

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left(1+e\cos\varphi+\frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi\right)\approx\frac{1}{p}\left[1+e\cos\varphi\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right]. \tag{95,5}$$

Мы видим отсюда, что ньютоновский эллипс вращается; за время одного оборота планеты перигелий ее орбиты смещается[1]) на

$$\delta\varphi=\frac{2\pi\alpha}{p}=\frac{6\pi km'}{c^2a(1-e^2)}. \tag{95,6}$$

Далее, рассмотрим путь светового луча в центрально-симметрическом гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала (82,10)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0,$$

отличающимся от уравнения Гамильтона-Якоби только тем, что в последнем надо положить $m=0$. Поэтому для траектории луча мы можем сразу написать, полагая в (95,3) $m=0$:

$$\varphi=-\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\frac{e^\nu}{c^2r^2}}} \tag{95,7}$$

(вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0=\frac{\partial S}{\partial t}$ мы пишем теперь частоту света $\omega_0=\frac{\partial\psi}{\partial t}$).

Для исследования этой траектории, как и в предыдущем случае, напишем (95,7) в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\sigma^2+\frac{2km'}{c^2}\sigma^3$$

[1]) Численное значение этого смещения наиболее велико для Меркурия, у которого оно равно 42,9″ в сто лет.

или, дифференцируя по φ и вводя опять постоянную $\alpha = 3km'/c^2$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha\sigma^2. \tag{95,8}$$

Пренебрегая малым членом αc^2, находим в нулевом приближении

$$\sigma = \frac{\cos\varphi}{R}$$

(мы обозначили $R = \omega_0/cM$), т. е. прямую $r = \frac{R}{\cos\varphi}$, проходящую на расстоянии R от начала координат. Для определения следующего приближения подставляем в (95,8) $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$. Тогда для σ_1 мы находим уравнение:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Частный интеграл этого уравнения есть $\sigma_1 = \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi)$ и, следовательно, для траектории луча мы получаем уравнение:

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{\alpha}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi). \tag{95,9}$$

Определим направление этой кривой на больших расстояниях от центра. Для этого полагаем $r = \infty$, или $\sigma = 0$, и из полученного таким образом уравнения ищем φ в виде $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Delta\varphi$ с малым $\Delta\varphi$ [имея в виду, что в (95,9) второй член слева мал]. Это дает с точностью до величин высшего порядка

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \pm\frac{\alpha}{3R}.$$

Таким образом, траектория луча представляет собой кривую с асимптотами, угол между которыми равен

$$\Delta\varphi = \frac{2\alpha}{3R} = \frac{2km'}{c^2R}. \tag{95,10}$$

Луч света, проходящий через центрально-симметрическое гравитационное поле на расстоянии R от центра, испытывает, следовательно, отклонение, определяемое этой формулой [1]).

§ 96. Уравнения поля в „собственной“ системе отсчета

Общие уравнения (93,6—9) центрально-симметрического гравитационного поля заметно упрощаются, если воспользоваться системой отсчета, движущейся в каждой точке вместе с веществом, находящимся в этой же точке. Другими словами, системой отсчета является само создающее поле вещество. Такую систему отсчета можно назвать „собственной“. Поскольку в этой системе вещество неподвижно, то мы имеем теперь $\dot{r} = 0$ (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии). Заметим, что выбор „радиуса-

[1]) Для луча, проходящего мимо края солнца, $\Delta\varphi = 1{,}75''$.

вектора" определяется этим условием не вполне однозначным образом: r может быть еще подвергнуто любому преобразованию вида $r=f(r')$, не содержащему t.

Воспользуемся содержащимися в уравнениях поля (см. § 91) соотношениями (90,6):

$$T^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,T^k_i}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0.$$

Полагая в (93,5) $\dot r=0$, находим для отличных от нуля компонент T^k_i:

$$T^1_1=T^2_2=T^3_3=-p,\quad T^0_0=\rho c^2. \qquad (96,1)$$

Подставляя эти выражения и значения g_{ik} из (93,2) в уравнения $T^k_{i;k}=0$, находим путем простого вычисления следующие два уравнения:

$$\dot\lambda+2\dot\mu=-2\frac{\dot\rho c^2}{p+\rho c^2},\quad \nu'=-2\frac{p'}{p+\rho c^2}. \qquad (96,2)$$

Если известна зависимость между p и ρ, то эти уравнения непосредственно интегрируются в виде:

$$\lambda+2\mu=-2\int\frac{c^2d\rho}{p+\rho c^2}+f_1(r), \qquad (96,3)$$

$$\nu=-2\int\frac{dp}{p+\rho c^2}+f_2(t), \qquad (96,4)$$

где $f_1(r)$ и $f_2(t)$ — функции, соответственно, от „радиуса-вектора" и времени, которые могут быть выбраны произвольно, в виду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $r=r(r')$ и $t=t(t')$.

Общие уравнения поля (93,6—9) в „собственной" системе отсчета принимают вид [1]):

$$\varkappa p=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2}+\mu'\nu'\right)-e^{-\nu}\left(\ddot\mu-\frac{1}{2}\dot\mu\dot\nu+\frac{3}{4}\dot\mu^2\right)-e^{-\mu}, \qquad (96,5)$$

$$\varkappa p=\frac{1}{4}e^{-\lambda}(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'+\mu'\nu')+$$
$$+\frac{1}{4}e^{-\nu}(\dot\lambda\dot\nu+\dot\mu\dot\nu-\dot\lambda\dot\mu-2\ddot\lambda-\dot\lambda^2-2\ddot\mu-\dot\mu^2), \qquad (96,6)$$

$$-\varkappa\rho c^2=e^{-\lambda}\left(\mu''+\frac{3}{4}\mu'^2-\frac{\mu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot\lambda\dot\mu+\frac{\dot\mu^2}{2}\right)-e^{-\mu}, \qquad (96,7)$$

$$0=\nu'\dot\mu+\dot\lambda\mu'-\dot\mu\mu'-2\dot\mu'. \qquad (96,8)$$

Мы видели в § 94, что центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте всегда оказывается постоянным. Если вещество непо-

[1]) Эти уравнения могут быть полностью проинтегрированы в случае, когда давлением можно пренебречь, т. е. можно положить $p=0$. Из (96,4) мы видим, что в этом случае можно положить $\nu=0$. Уравнение (96,8) тогда непосредственно интегрируется по времени в виде $e^\lambda=e^\mu\frac{\mu'^2}{f(r)}$, где $f(r)$ — произвольная положительная функция. Подставляя это в (96,5), получаем легко интегрирующееся уравнение для μ, а подстановка найденных таким образом λ и μ в (96,7) определяет плотность ρ.

движно, то поле будет постоянным и внутри создающего его тела. В постоянном гравитационном поле всякая статическая система отсчета является, конечно, „собственной", так как вещество в ней неподвижно. Поскольку все величины λ, μ, ν являются теперь функциями только от r, то надлежащим выбором r мы можем превратить λ или μ в любую, наперед заданную функцию. Мы выберем r таким образом, чтобы $e^{\mu}=r^2$, т. е. чтобы ds^2 имело вид (93,10), т. е.

$$ds^2 = e^{\nu(r)}\,dt^2 - e^{\lambda(r)}\,dr^2 - r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{96,9}$$

Уравнение (96,3) не имеет теперь места, так как оно является результатом интегрирования первого из уравнений (96,2), обращающегося теперь тождественно в нуль. Из остальных уравнений (96,4—8) мы выберем в качестве полной системы уравнений постоянного поля (96,3), (96,5) и (96,7). Опуская в них все производные по времени и полагая $e^{\mu}=r^2$, находим

$$\varkappa p = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{96,10}$$

$$\varkappa\rho c^2 = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{96,11}$$

$$\nu = -2\int\frac{dp}{p+\rho c^2}+f(r) \tag{96,12}$$

(произвольную функцию $f(r)$ проще всего выбрать постоянной).

Если тело находится в состоянии статистического равновесия, то уравнение (96,12) следует из условий этого равновесия. Действительно, в § 85 было показано, что условиями статистического равновесия в гравитационном поле являются

$$\zeta\sqrt{g_{00}} = \zeta e^{\frac{\nu}{2}} = \text{const.}, \qquad T\sqrt{g_{00}} = Te^{\frac{\nu}{2}} = \text{const.},$$

где T — температура, а ζ — химический потенциал тела. Дифференцируя эти соотношения, находим

$$d\zeta + \frac{1}{2}\zeta\,d\nu = 0, \quad dT + \frac{1}{2}T\,d\nu = 0. \tag{96,13}$$

Как известно, химический потенциал равен $\zeta = \varepsilon - T\sigma + pV$, где $V, \sigma, \varepsilon = \rho c^2 V$ суть объем, энтропия и энергия, приходящиеся на одну молекулу тела. Дифференциал же $d\zeta$ равен, как известно, $d\zeta = V\,dp - \sigma\,dT$. Подставляя эти выражения для ζ и $d\zeta$ в первое из уравнений (96,13), а dT — из второго уравнения, получаем соотношение $dp + \frac{1}{2}(p+\rho c^2)\,d\nu = 0$, эквивалентное (96,12).

§ 97. Псевдотензор энергии-импульса

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением (32,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}=0$. Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (90,6)

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \tag{97,1}$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было [1]). Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем; последний же не учтен в выражении для T^k_i.

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы должны, следовательно, вычислить тензор энергии-импульса гравитационного поля. Для этого воспользуемся общей формулой (32,5), принимающей в криволинейных координатах вид

$$T^k_i = \sum_l \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} - \delta^k_i \Lambda, \tag{97,2}$$

где Λ — скаляр, входящий в действие $S = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega$, а $q^{(l)}$ — величины, определяющие рассматриваемую физическую систему. В гравитационном поле величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора, а роль Λ играет величина $\frac{1}{2\varkappa} G$ (см. § 89). Обозначая T^k_i гравитационного поля посредством t^k_i, находим, следовательно,

$$\sqrt{-g}\, t^k_i = \frac{1}{2\varkappa} \left\{ \frac{\partial G \sqrt{-g}}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} - \delta^k_i G \sqrt{-g} \right\}. \tag{97,3}$$

Воспользовавшись выражением (89,3) для G, можно выразить t^k_i непосредственно через g_{ik} и Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к результату

$$\sqrt{-g}\, t^k_i = \frac{1}{2\varkappa} \left\{ \Gamma^k_{lm} \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml} \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - G\sqrt{-g}\,\delta^k_i \right\}. \tag{97,4}$$

Существенным свойством величин t^k_i является то, что они не составляют тензора, — это видно уже непосредственно из того, что G не является скаляром. G, однако, является инвариантом по отношению

---

[1]) Действительно, интеграл $\int T^k_i \sqrt{-g}\, dS_k$, т. е. 4-импульс, сохраняется лишь при выполнении условия $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T^k_i}{\partial x^k} = 0$, а не (97,1). В этом легко убедиться, произведя в криволинейных координатах те же вычисления, которые были проделаны в § 29 в декартовых координатах. Достаточно, впрочем, просто заметить, что эти вычисления имеют чисто формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин, — как и доказательство теоремы Гаусса, имеющей в криволинейных координатах тот же вид (78,19), что и в декартовых.

к линейным преобразованиям координат, — поскольку G выражается согласно (89,3) через Γ^i_{kl}, а величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям (см. § 80). Следовательно, величины t^k_i ведут себя как тензор при линейных преобразованиях координат.

Совокупность величин t^k_i называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Отметим, что, поскольку компоненты суммы $T^k_i + t^k_i$ не симметричны по индексам i и k (это относится даже к одному T^k_i, поскольку здесь речь идет о симметрии смешанных компонент), в гравитационном поле не существует закона сохранения полного момента импульса поля и материи (см. § 32).

Для суммы $T^k_i + t^k_i$ имеет место уравнение

$$\frac{\partial (T^k_i + t^k_i)\sqrt{-g}}{\partial x^k} = 0, \tag{97,5}$$

выражающее закон сохранения полного 4-импульса поля и материи

$$P_i = \frac{1}{c}\int (T^k_i + t^k_i)\sqrt{-g}\, dS_k. \tag{97,6}$$

Как было в свое время указано (см. §§ 29, 32), интегрирование может производиться здесь по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Если выбрать в качестве нее гиперповерхность $x^0 = \mathrm{const.}$, то P_i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P_i = \frac{1}{c}\int (T^0_i + t^0_i)\sqrt{-g}\, dV. \tag{97,7}$$

Как обычно (см. § 32), компоненту $\frac{1}{c}(T^0_0 + t^0_0)\sqrt{-g}$ можно назвать „плотностью“ полной энергии материи и поля, а компоненты $-\frac{1}{c}(T^0_\alpha + t^0_\alpha)\sqrt{-g}$ — „плотностью импульса“. Далее „плотность потока энергии“ равна $\frac{1}{c}(T^\alpha_0 + t^\alpha_0)\sqrt{-g}$, а „плотность потока импульса“ есть $\frac{1}{c}(T^\beta_\alpha + t^\beta_\alpha)\sqrt{-g}$. Поскольку псевдотензор t_{ik} не симметричен, то при наличии гравитационного поля плотность потока энергии уже не равна плотности импульса (умноженной на c^2).

В § 91 было указано, что движение и распределение материи, а потому и тензор T_{ik}, определяются из самых уравнений тяготения (91,6) как $-\frac{1}{\varkappa}\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right)$. Но при подстановке этого выражения сумма $T_{ik} + t_{ik}$ оказывается выраженной только через метрический тензор g_{ik}, и уравнение (97,5) удовлетворяется тождественно [в этом легко убедиться с помощью (91,5) и (97,3)]. Таким образом, в то время как при отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса налагает ограничение на изменение характеризующих систему величин, при наличии гравитационного поля уравнение (97,5) является по существу тождеством и потому в значительной степени лишено физического содержания.

Выбирая систему координат, галилееву в данном элементе объема, можно обратить все t_i^k в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ^i_{kl}). С другой стороны, можно получить отличные от нуля t_i^k в эвклидовом пространстве, т. е. в отсутствие гравитационного поля, если просто пользоваться криволинейными координатами вместо декартовых. Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Если тензор $T_{ik}=0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место и в любой другой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой точке нет материи или электромагнитного поля. Напротив, из равенства нулю псевдотензора в некоторой точке в одной системе отсчета отнюдь не следует того же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется или нет гравитационная энергия в данном месте. Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно „уничтожить“ гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t_i^k в этом элементе.

Величины же P_i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений. Выделим вокруг рассматриваемых масс область пространства, настолько большую, чтобы вне ее можно было считать гравитационное поле отсутствующим. В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает „канал“. Вне этого „канала“ поле отсутствует, так что 4-пространство — плоское. В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо, очевидно, выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы вне „канала“ она переходила в галилееву систему и все t_i^k исчезали бы. Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно, — внутри канала она может быть еще произвольно выбрана. В полном согласии с физическим смыслом величин P_i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри канала. Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри канала, но переходящие вне его в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P_i и P'_i в этих двух системах в определенные моменты „времени“ x^0 и x'^0. Введем третью систему координат, совпадающую внутри канала в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 — со второй, а вне канала — с той же галилеевой. Но в силу закона сохранения энергии и импульса величины P_i постоянны $\left(\frac{dP_i}{dx^0}=0\right)$. Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух. Отсюда следует $P_i=P'_i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t_i^k являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат. Поэтому P_i образуют вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца.

Сумму $(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}$ можно написать в форме, из которой непосредственно видно, что тождественно имеет место уравнение (97,5). Именно

$$(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g} = \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l}, \tag{97,8}$$

где величины h_i^{kl} антисимметричны по индексам k и l. Вычисление, которое мы не будем здесь производить, дает для h_i^{kl} следующее выражение:

$$2h_i^{kl} = \delta_i^l \frac{\partial \sqrt{-g} g^{km}}{\partial x^m} - \delta_i^k \frac{\partial \sqrt{-g} g^{lm}}{\partial x^m} + \\ + g^{km} g_{in} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{nl}}{\partial x^m} - g^{lm} g_{in} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{nk}}{\partial x^m}. \tag{97,9}$$

Подставляя (97,8) в (97,6), находим

$$P_i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2c}\int \left(dS_k \frac{\partial}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial}{\partial x^k}\right) h_i^{kl}.$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6,12)

$$P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{kl} df_{kl}^{*}. \tag{97,10}$$

Если в качестве поверхности интегрирования в (97,6) выбирается гиперповерхность $x^0 = \text{const.}$, то в (97,10) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной обычной поверхностью [1]). Таким образом, мы находим выражение для 4-импульса материи и гравитационного поля в некоторой области трехмерного пространства в виде интеграла по поверхности, охватывающей этот объем

$$P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha} df_\alpha. \tag{97,11}$$

Применяя эту формулу к любой изолированной системе, постоянно находящейся в начале координат, мы можем выбрать достаточно удаленную поверхность интегрирования в (97,11) и воспользоваться на ней выражением (94,6) для поля. Как и следовало ожидать, вычисление приводит к результату $P_\alpha = 0$, $P_0 = mc^2$, где m — полная масса системы.

---

[1]) df_{kl}^{*} есть „нормальный" элемент поверхности, связанный с „тангенциальным" элементом df^{ik} посредством (6,9): $df_{ik}^{*} = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$. На поверхности, охватывающей гиперповерхность, перпендикулярную к оси x^0, отличны от нуля только компоненты df^{lm} с $l, m = 1, 2, 3$, и следовательно df_{ik}^{*} имеет только компоненты с одним из i или k, равным 0. Компоненты $df_{0\alpha}^{*}$ являются не чем иным, как компонентами трехмерного элемента обычной поверхности.

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Мы видели в § 89, что при варьировании действия гравитационного поля безразлично, писать ли в подинтегральном выражении величину G или скаляр R. Если бы мы писали в действии S_g скаляр R вместо G и при выводе закона сохранения, то мы получили бы закон сохранения величины $\frac{1}{c}\int (T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}\,dS_k$, где t_i^k определялось бы формулой (97,2), в которой надо было бы положить $\Lambda = R/2\varkappa$, а под величинами $q^{(l)}$ нужно было бы понимать компоненты g_{ik} и Γ^i_{kl} (последнее необходимо по той причине, что R содержит также и вторые производные от g_{ik}, выражающиеся через первые производные от Γ^i_{kl}). Но поскольку варьирование действия, написанного в таком виде, приводит к верным уравнениям поля, то такой 4-вектор может отличаться от верного 4-импульса только постоянным множителем. Далее, в постоянном поле все величины не зависят от времени. Поэтому в компоненте t_0^0 первый член в (97,2), содержащий производные по x^0 от g_{ik} и Γ^i_{kl}, обращается в нуль. Написав во втором члене $R/2\varkappa$, вместо Λ, мы получим для t_0^0 выражение $-R/2\varkappa$.

Таким образом, должна сохраняться величина

$$\frac{1}{c}\int\left(T_0^0 - \frac{1}{2\varkappa}R\right)\sqrt{-g}\,dV.$$

Из уравнений поля (91,7) следует, что $R/\varkappa = T$; подставляя это, находим

$$\frac{1}{2c}\int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)\sqrt{-g}\,dV.$$

В предельном случае малых скоростей и слабого поля энергия должна оказаться в первом приближении равной $\int \rho c^2\,dV$. Но, подставляя в найденное выражение предельные значения (92,1) тензора T_i^k, мы получим всего $\frac{1}{2}\int \rho c^2 dV$. Поэтому для того, чтобы получить верное значение для полной энергии P_0, надо удвоить это выражение, т. е.

$$P_0 = \frac{1}{c}\int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)\sqrt{-g}\,dV. \tag{97,12}$$

Эта формула и определяет полную энергию материи и постоянного гравитационного поля через тензор энергии-импульса одной только материи [1]).

Подставим в (97,12) выражение (91,5) $T_i^k = (p + \rho c^2)u^k u_i - \delta_i^k p$ для тензора энергии-импульса макроскопических тел и воспользуемся

---

[1]) Формула (97,12) взята нами из работы: R. Tolman, *Phys. Rev.*, 35, 875, 1930.

„собственной“ системой отсчета (см. § 96), в которой вся материя неподвижна, т. е. пространственные компоненты 4-скорости $u^\alpha=0$, а временная $u^0=1$. Тогда мы получим полную энергию в виде

$$P_0=\int(\rho c^2+3p)\sqrt{-g}\,dV. \tag{97,13}$$

§ 98. Гравитационные волны

Рассмотрим слабое (каким оно почти всегда и бывает) гравитационное поле в пустоте. В слабом поле метрика пространства-времени „почти эвклидова“, т. е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора g_{ik} почти равны своим галилеевым значениям, которые мы обозначим посредством

$$g^{(0)}_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta},\quad g^{(0)}_{\alpha 0}=0,\quad g_{00}=c^2. \tag{98,1}$$

Мы можем, следовательно, написать g_{ik} в виде

$$g_{ik}=g^{(0)}_{ik}+h_{ik}, \tag{98,2}$$

где h_{ik} — малая поправка, определяющая гравитационное поле.

При малых h_{ik} компоненты гравитационного поля Γ^i_{kl}, выражающиеся через производные от g_{ik}, тоже малы. Пренебрегая степенями h_{ik} выше первой, мы можем оставить в тензоре R_{iklm} (88,4) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k\partial x^m}\right). \tag{98,3}$$

Для упрощенного тензора R_{ik} имеем с той же точностью

$$R_{ik}=g^{lm}R_{likm}\approx g^{(0)\,lm}R_{likm},$$

или

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(g^{(0)\,lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}-\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i\partial x^l}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k}\right), \tag{98,4}$$

где $h^k_i=g^{(0)lk}h_{il},\quad h=h^i_i$.

Мы выбрали систему отсчета таким образом, чтобы g_{ik} мало отличались от $g^{(0)}_{ik}$. Но это условие сохраняется и при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на h_{ik} еще четыре (по числу координат) условия, не нарушая при этом условия их малости.

Выберем в качестве этих дополнительных условий уравнения [1])

$$\frac{\partial\psi^k_i}{\partial x^k}=0,\quad \psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h. \tag{98,5}$$

---

[1]) Если искать преобразование, приводящее к h^k_i, удовлетворяющим этим условиям, в виде $x'^i=x^i+\xi^i$ (ξ^i — малые того же порядка, что и h^k_i), то легко

Тогда последние три члена в R_{ik} взаимно сокращаются, и мы находим

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g^{(0)lm} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Таким образом, уравнения (91,9) гравитационного поля в пустоте приобретают вид

$$\square h_i^k = 0, \tag{98,6}$$

где $\square$ есть оператор д'Аламбера:

$$\square = -g^{(0)lm} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Это — обычное волновое уравнение. Таким образом, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну. В такой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления мы выберем ось $x^1 = x$. Уравнения (98,6) тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{98,7}$$

решением которых является любая функция от $x \pm ct$ (§ 46).

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X. Все величины h_i^k в ней являются функциями от $x - ct$. Дополнительные условия (98,5) дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - c\dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования, — постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля. Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{98,8}$$

Как было отмечено в сноске на стр. 255, условия (98,5) еще не определяют однозначно системы отсчета. Именно, мы можем еще подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$; такое преобразование не нарушает условий (98,5), так как ξ^i удовлетворяют

убедиться в том, что функции ξ^i этого преобразования должны удовлетворять уравнениям

$$\square \xi_i = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h\right),$$

где $\xi_i = g_{ik}^{(0)} \xi^k$. Отсюда видно, в частности, что система координат, удовлетворяющая условию (98,5), может еще быть подвергнута любому малому преобразованию $x'^i = x^i + \xi^i$, где для ξ^i имеет место уравнение $\square \xi_i = 0$. Кроме того, система координат может, очевидно, быть подвергнута любому преобразованию Лоренца.

уравнению $\square \xi_i = 0$ (см. ту же сноску). Этими преобразованиями можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль четыре величины ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$; из равенств (98,8) следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Что же касается остающихся величин ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчета, поскольку, как легко убедиться, при преобразовании $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что таким образом обращается в нуль и $\psi = \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$.

Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами, а именно h_{23}, $h_{22} - h_{33}$. Другими словами, гравитационные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется тензором 2-го ранга в плоскости YZ, сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна нулю.

Гравитационные волны обладают некоторой энергией, „плотность" которой равна $t_0^0 \sqrt{-g}$. Как и всякая энергия, она в свою очередь создает некоторое гравитационное поле. Таким образом, гравитационная волна сама создает вокруг себя некоторое дополнительное гравитационное поле. Это поле более высокого (именно второго) порядка малости по сравнению с полем самой волны, поскольку создающая ее энергия второго порядка [производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ первого порядка по h_{ik}, а потому согласно (97,2) t^k — второго порядка].

Вычислим поток энергии в плоской гравитационной волне. Мы видели в предыдущем параграфе, что поток энергии гравитационного поля определяется компонентами $\frac{1}{c} t_0^\alpha \sqrt{-g}$ псевдотензора энергии-импульса. В волне, распространяющейся вдоль оси x^1, очевидно, отлична от нуля только компонента t_0^1.

Как было указано, псевдотензор t_i^k второго порядка малости; мы должны вычислить t_0^1 только с этой точностью. Детерминант g, составленный из компонент $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$, с точностью до величин первого порядка, равен $g = -c^2 - h_{11} - h_{22} - h_{33} - h_{00}$. Поскольку в плоской гравитационной волне, как мы видели, $h_{11} = h_{00} = 0$, $h_{22} + h_{33} = 0$, то $g = -c^2$. Замечая, что поэтому и $\Gamma_{ml}^l = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} = 0$, имеем для t_0^1 согласно общему выражению (97,2) просто

$$2\varkappa t_0^1 = \Gamma_{ml}^1 \frac{\partial g^{ml}}{\partial t}.$$

Помня, что от нуля отличны только компоненты h_{23}, h_{22}, h_{33}, мы находим с достаточной точностью

$$\Gamma_{ml}^1 = \frac{1}{2} g^{(0)11} \left(\frac{\partial h_{1m}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{1l}}{\partial x^m} - \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1}.$$

Замечая, что $g^{ik}=g^{(0)ik}-h^{ik}$, имеем

$$4\varkappa t^1_0=\frac{\partial h_{lm}}{\partial x^1}\frac{\partial h^{lm}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\dot{h}_{lm}\dot{h}^{lm}=\frac{1}{c}\dot{h}^2_{lm},$$

или окончательно:

$$t^1_0=\frac{1}{2\varkappa c}\left[\left(\frac{\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33}}{2}\right)^2+\dot{h}^2_{23}\right]. \tag{98,9}$$

§ 99. Излучение гравитационных волн

Система движущихся тел излучает гравитационные волны. Вычислим энергию, уносимую этими волнами, т. е. энергию, теряемую системой путем излучения. Скорости всех тел в системе мы будем считать малыми по сравнению со скоростью света.

Благодаря наличию материи уравнения излучаемых волн не будут уже иметь простого вида (98,6): $\Box h^k_i=0$. Этот вид сохранится только на больших расстояниях от системы тел. Вблизи же нее уравнения поля будут иметь вид

$$\frac{1}{2}\Box\psi^k=\varkappa\tau^k_i, \tag{99,1}$$

где мы ввели вместо h^k_i более для нас удобные здесь величины: $\psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h$, а τ^k_i обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях $R_{ik}-\frac{1}{2}\delta^k_i R=-\varkappa T^k_i$ к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении. Легко убедиться в том, что компоненты τ^0_0 и τ^0_α получаются непосредственно из соответствующих компонент T^k_i посредством выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ^α_β, то они содержат наряду с членами, получающимися из T^α_β, также и члены второго порядка малости из $R^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i R$.

Величины ψ^k_i удовлетворяют условию (98,5) $\frac{\partial\psi^k_i}{\partial x^k}=0$. Из (99,1) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ^k_i:

$$\frac{\partial\tau^k_i}{\partial x^k}=0. \tag{99,2}$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T^k_{i;k}=0$.

Уравнение (99,1) по форме совпадает с уравнением запаздывающих потенциалов (§ 64). Мы можем поэтому сразу написать их решение в виде

$$\psi^k_i=-\frac{\varkappa}{2\pi}\int\frac{(\tau^k_i)_{t-\frac{R}{c}}}{R}dV.$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать (см. §§ 66, 67)

$$\psi_i^k = -\frac{\varkappa}{2\pi R_0} \int \left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R_0}{c}} dV, \tag{99,3}$$

где R_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t-\frac{R_0}{c}$ в подинтегральных выражениях мы будем ниже, для краткости, опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (99,2). Опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (99,2) в виде

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \tau_{00}}{\partial t} = 0. \tag{99,4}$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik} = 0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Взяв полусумму оставшегося равенства и его же с переставленными индексами, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Далее, умножим второе из уравнений (99,4) на $x^\alpha x^\beta$ и опять проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV. \tag{99,5}$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}. Но эта компонента равна в данном приближении (как было выше указано) просто соответствующей компоненте T_{00} тензора T_{ik}. Воспользовавшись для нее выражением (92,1), имеем

$$\tau_{00} = c^2 \tau_0^0 = \mu c^4. \tag{99,6}$$

Подставляя это в (99,5) и вводя гравитационную постоянную k вместо $\varkappa$, находим (99,3) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV. \tag{99,7}$$

На больших расстояниях от системы зарядов можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (98,9).

В формулу (98,9) входят компоненты $h_{23}=\psi_{23}$ и $h_{22}-h_{33}=\psi_{22}-\psi_{33}$. Из (99,7) находим для них выражение

$$h_{23}=-\frac{2k}{c^4R_0}\ddot{J}_{23},\qquad h_{22}-h_{33}=-\frac{2k}{c^4R_0}(\ddot{J}_{22}-\ddot{J}_{33})$$

(точка означает дифференцирование по времени), где мы ввели тензор

$$J_{\alpha\beta}=\int\mu\left(x^\alpha x^\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}x_\gamma^2\right)dV,\tag{99,8}$$

характеризующий распределение масс в системе[1]). В результате мы получаем поток энергии вдоль оси x^1 в виде

$$t_0^1=\frac{k}{4\pi c^5R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{J}_{22}-\dddot{J}_{33}}{2}\right)^2+\dddot{J}_{23}^2\right].\tag{99,9}$$

Зная излучение в направлении оси x^1, легко определить излучение в произвольном направлении, единичный вектор вдоль которого обозначим посредством $\mathbf{n}$. Для этого надо составить из компонент тензора $\dddot{J}_{\alpha\beta}$ и вектора n_α скаляр, квадратичный по $\dddot{J}_{\alpha\beta}$, который при $n_1=1$, $n_2=n_3=0$ переходил бы в $\dddot{J}_{23}^2+\left(\frac{\dddot{J}_{22}-\dddot{J}_{33}}{2}\right)^2$.

В результате излучение энергии в данном направлении (отнесенное на единицу телесного угла) оказывается равным

$$\frac{k}{4\pi c^5R_0^2}\left[\frac{1}{4}(\dddot{J}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot{J}_{\alpha\beta}^2-\dddot{J}_{\alpha\beta}\dddot{J}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right].\tag{99,10}$$

Полное излучение по всем направлениям, т. е. потерю энергии системой в единицу времени $\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)$, можно найти, усредняя этот поток по направлениям и умножая полученное среднее значение на $4\pi R_0^2$. Усреднение легко производить с помощью формул, произведенных в сноске к стр. 171, и оно приводит к следующему выражению для потери энергии:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{k}{5c^5}\dddot{J}_{\alpha\beta}^2.\tag{99,11}$$

Необходимо отметить, что численное значение этой потери энергии, даже для астрономических объектов, настолько мало, что его влияние на движение, даже за космические промежутки времени, совершенно ничтожно (так, для двойных звезд потеря энергии гравитационным

---

[1]) Этот тензор связан с тензором инерции системы $K_{\alpha\beta}$ посредством соотношения:

$$J_{\alpha\beta}=-K_{\alpha\beta}+\frac{1}{3}K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}.$$

излучением оказывается порядка 10^{-12}-ой части их полной энергии в год).

Выражение для $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ содержит $\frac{1}{c^5}$. Это значит, что потеря энергии изолированной системой появляется только в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается постоянной. Отсюда следует, что система тел в гравитационном поле может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка v^4/c^4, в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует только с точностью до членов второго порядка (последнее связано с тем, что потеря энергии путем электромагнитного излучения содержит $1/c^3$). Эффекты, вызываемые этими дополнительными членами в функции Лагранжа, однако, совершенно ничтожны; поэтому вычисление их не представляет интереса и мы не станем заниматься здесь этим вопросом подробнее [1]).

§ 100. Формулирование уравнений поля в однородных пятимерных координатах

Уравнения гравитационного и электромагнитного полей можно вывести и формулировать единым образом. Это достигается с помощью математического аппарата так называемых однородных координат, применяемых в проективной геометрии [2]).

Точку в 4-пространстве мы будем определять пятью координатами X^ν ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$), причем все значения координат, которые отличаются только общим множителем, относятся к одной и той же точке. Другими словами, точка в 4-пространстве определяется четырьмя независимыми отношениями пяти величин X^ν, называемых однородными координатами. Условимся в этом и в следующем параграфах обозначать греческими буквами индексы, пробегающие пять значений 1, 2, 3, 4, 5, а латинскими буквами, как и раньше, индексы, пробегающие четыре значения 0, 1, 2, 3.

Очевидно, что при описании 4-пространства пятью однородными координатами допускаются только такие преобразования этих последних, при которых новые координаты X'^ν являются однородными функциями

---

[1]) Приведем лишь, без вывода, выражение для функции Лагранжа системы гравитационным образом взаимодействующих друг с другом частиц, во втором приближении:

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}\left(1 - 3\sum_{B \neq A} \frac{k m_B}{c^2 R_{AB}}\right) + \sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2R_{AB}} + $$
$$+ \sum_{A \neq B \neq C} \frac{k^2 m_A m_B m_C}{2c^2 R_{AB} R_{AC}} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2c^2 R_{AB}} (7\mathbf{v}_A \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_A \mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B \mathbf{n}_{AB}),$$

где $\mathbf{n}_{AB}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\mathbf{R}_{AB}$ между частицами m_A и m_B.

[2]) Изложение этого параграфа основано на статье W. Pauli, *Ann. d. Physik*, **18**, 305, 1933.

первого порядка от старых координат X^{ν}. Согласно теореме Эйлера это значит, что

$$X^{\mu}\frac{\partial X'^{\nu}}{\partial X^{\mu}} = X'^{\nu}. \tag{100,1}$$

Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры в однородных координатах определяются, как и в обычных координатах, как величины, преобразующиеся по законам:

$$A'^{\nu} = \frac{\partial X'^{\nu}}{\partial X^{\mu}} A^{\mu}, \quad A'_{\nu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X'^{\nu}} A_{\mu}, \text{ и т. д.} \tag{100,2}$$

На векторы и тензоры в однородных координатах налагается, однако, еще одно условие. Именно, мы будем требовать, чтобы их компоненты были однородными функциями координат. При этом компоненты контравариантного вектора должны быть однородными функциями первого порядка, компоненты ковариантного вектора — порядка -1, а скаляры — нулевого порядка. Вообще, компоненты тензора, контравариантного по r_1-индексам и ковариантного по r_2-индексам, суть однородные функции порядка $r_1 - r_2$. Это правило находится, очевидно, в согласии с правилом умножения и упрощения тензора. Заметим также, что в силу условия (100,1) о допускаемых преобразованиях координат порядок однородности компонент тензора не меняется при этих преобразованиях. Мы будем называть однородные векторы и тензоры в пятимерном пространстве X^{ν} коротко 5-векторами и 5-тензорами [1]).

Таким образом, мы можем написать согласно теореме Эйлера

$$X^{\mu}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial X^{\mu}} = A^{\nu}, \quad X^{\mu}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial X^{\mu}} = -A_{\nu}, \quad X^{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial X^{\mu}} = 0 \tag{100,3}$$

(φ — скаляр).

Для однородных координат характерно, что в них самих координаты X^{ν} образуют контравариантный вектор, так как согласно условию (100,1) они удовлетворяют требованию (100,3) [а (100,2) при этом удовлетворяется тождественно]. Напротив, дифференциалы dX^{ν} не составляют теперь вектора, так как они не удовлетворяют условию однородности.

Пятимерный „метрический тензор" $g_{\mu\nu}$ мы подчиним условию

$$g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} = 1. \tag{100,4}$$

Обратный $g_{\mu\nu}$ тензор $g^{\mu\nu}$ определяется, как обычно, тем, что $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ (δ^{ν}_{μ} — единичный 5-тензор). При помощи тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ определяется, как и раньше, операция поднятия и опускания индексов.

[1]) Тензоры и векторы, удовлетворяющие условию однородности, называют также „проекторами".

Необходимо еще ввести правило, позволяющее сопоставлять 5-тензорам в пространстве X^ν обычные 4-тензоры в 4-пространстве x^i. Это делается следующим образом.

Координаты x^k являются, по определению однородных координат, однородными функциями нулевого порядка от пяти координат X^ν. Поэтому мы имеем

$$\gamma^k_\nu X^\nu = 0, \tag{100,5}$$

где символы γ^k_ν обозначают производные

$$\gamma^k_\nu = \frac{\partial x^k}{\partial X^\nu}. \tag{100,6}$$

Величины γ^k_ν преобразуются при любых преобразованиях координат x^k как обычный контравариантный 4-вектор, а при однородных преобразованиях X^ν — как ковариантный 5-вектор. Наряду с величинами γ^k_ν введем также и обратные величины γ^ν_k согласно

$$\gamma^k_\nu \gamma^\nu_l = \delta^k_l \tag{100,7}$$

(δ^k_l — единичный 4-тензор). Этим, однако, величины γ^ν_k определены только с точностью до произвольного вектора вида ρX^ν, где ρ — любая функция [в силу условия (100,5) при прибавлении такого вектора равенство (100,7) не нарушается]. Для однозначного определения γ^ν_k подчиним их условию, аналогичному (100,5):

$$\gamma^\nu_l X_\nu \equiv \gamma^\nu_l g_{\nu\mu} X^\mu = 0. \tag{100,8}$$

Вычислим произведение $\gamma^k_\nu \gamma^\mu_k$, в котором суммирование производится по четырехмерным индексам k. Для этого умножаем равенство (100,7) $\gamma^l_\mu \gamma^\mu_k - \delta^l_k = 0$ на γ^k_ν:

$$\gamma^l_\mu \gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^l_k \gamma^k_\nu = \gamma^l_\mu \gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \gamma^l_\nu = \gamma^l_\mu (\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^\mu_\nu) = 0.$$

Сравнивая это с (100,5), мы видим, что

$$\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu - \delta^\mu_\nu = X^\mu A_\nu,$$

где A_ν — некоторый вектор; этот вектор легко определить, умножая обе части на X_μ. Это дает в силу (100,4) и (100,8) $A_\nu = -X_\nu$. Таким образом,

$$\gamma^\mu_k \gamma^k_\nu = \delta^\mu_\nu - X_\nu X^\mu. \tag{100,9}$$

Всякому 5-вектору A^ν (или A_ν) мы приведем в соответствие „сопряженный“ с ним 4-вектор

$$A^k = \gamma^k_\nu A^\nu, \quad A_k = \gamma^\nu_k A_\nu \tag{100,10}$$

и скаляр

$$A = A^\nu X_\nu. \tag{100,11}$$

С помощью (100,9) легко проверить, что

$$A_\nu = \overline{A}_\nu + AX_\nu, \quad A^\nu = \overline{A}^\nu + AX^\nu, \tag{100,12}$$

где

$$\overline{A}_\nu = \gamma^k_\nu A_k, \quad \overline{A}^\nu = \gamma^\nu_k A^k. \tag{100,13}$$

Эти векторы, в силу (100,5) и (100,8), „перпендикулярны“ к вектору X^ν, т. е.

$$\overline{A}_\nu X^\nu = 0, \quad \overline{A}^\nu X_\nu = 0. \tag{100,14}$$

Приведенные формулы полностью устанавливают однозначное соответствие между 5-векторами в пространстве X^ν и обычными 4-векторами.

Аналогично всякий 5-тензор $A_{\mu\nu}$ характеризуется четырьмя четырехмерными величинами: 4-тензором $A_{ik} = \gamma^\mu_i \gamma^\nu_k A_{\mu\nu}$, 4-векторами $A_{i(0)} = \gamma^\mu_i X^\nu A_{\mu\nu}$ и $A_{(0)i} = \gamma^\nu_i X^\mu A_{\mu\nu}$ и скаляром $A_{(0)(0)} = X^\mu X^\nu A_{\mu\nu}$. В частности, если $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, то $A_{(0)i} = A_{i(0)}$; если $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, то $A_{(0)(0)} = 0$.

В частности, для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ инвариант $g_{(0)(0)} = 1$, а вектор $g_{(0)i}$ в силу (100,8) равен нулю. Поэтому для связи $g_{\mu\nu}$ с четырехмерным метрическим тензором g_{ik} мы получаем формулы

$$g_{ik} = \gamma^\mu_i \gamma^\nu_k g_{\mu\nu}, \quad \overline{g}_{\mu\nu} = g_{ik} \gamma^i_\mu \gamma^k_\nu, \quad g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + X_\mu X_\nu. \tag{100,15}$$

Легко проверить, что при этом из соотношения $g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$ вытекает такое же соотношение для сопряженного 4-вектора, $g_{ik} A^k = A_i$.

Дифференциалы dX^ν, как уже было отмечено, не составляют вектора. Можно, однако, ввести вектор $\overline{d}X^\nu$, сопряженный вектору dx^k:

$$\overline{d}X^\nu = \gamma^\nu_k dx^k. \tag{100,16}$$

С помощью $\overline{d}X^\nu$ можно определить бесконечно малый параллельный перенос по формулам, совершенно аналогичным тем, которые мы имели в неоднородных координатах x^k. Именно, ковариантные дифференциалы

$$DA^\nu = \overline{d}X^\mu A^\nu_{;\mu}, \quad DA_\nu = \overline{d}X^\mu A_{\nu;\mu}, \tag{100,17}$$

где ковариантные производные $A^\nu_{;\mu}$, $A_{\nu;\mu}$ определяются через величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ по формулам того же вида, что и прежде:

$$A^\nu_{;\mu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A^\lambda, \quad A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A_\lambda. \tag{100,18}$$

При этом ковариантная производная от скаляра φ опять сводится к простой производной $\left(\varphi_{;\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial X^\nu}\right)$ и, согласно условию однородности,

$$X^\nu \varphi_{;\nu} = 0. \tag{100,19}$$

Сами же величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ выражаются через $g_{\mu\nu}$ так же, как Γ^i_{kl} выражались через g_{ik}.

Легко проверить (воспользовавшись выражением для $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ через $g_{\mu\nu}$ и свойствами однородности вектора X^ν и тензора $g_{\mu\nu}$), что ковариантная производная от X_μ:

$$X_{\mu;\nu}=\frac{\partial X_\mu}{\partial X^\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\mu}X_\lambda$$

антисимметрична по индексам μ и ν $(X_{\mu;\nu}+X_{\nu;\mu}=0)$. Тензор $X_{\mu;\nu}$, который мы будем обозначать просто как $X_{\mu\nu}$, играет основную роль для физических применений. Напишем его в явно антисимметричном виде:

$$X_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(X_{\mu;\nu}-X_{\nu;\mu})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial X^\nu}-\frac{\partial X_\nu}{\partial X^\mu}\right). \tag{100,20}$$

Отметим некоторые свойства $X_{\mu\nu}$. Из $X_\mu X^\mu=1$ имеем

$$X_{\mu\nu}X^\mu=0. \tag{100,21}$$

Отсюда следует, что из четырех величин в пространстве x^k, которыми характеризуется тензор 2-го ранга (см. выше), для тензора $X_{\mu\nu}$ остается только тензор X_{ik}, так что

$$X_{ik}=-X_{ki}=\gamma^\mu_i\gamma^\nu_k X_{\mu\nu},\quad X_{\mu\nu}=\gamma^i_\mu\gamma^k_\nu X_{ik}. \tag{100,22}$$

Умножая (100,18) на X^μ, имеем

$$X^\mu A^\nu_{;\mu}=X^\mu\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu}+\Gamma^\nu_{\lambda\mu}A^\lambda\right)=A^\nu+\Gamma^\nu_{\lambda\mu}X^\mu A^\lambda,$$

и, замечая, что ковариантная производная от X^ν равна

$$X^\nu_\mu=\delta^\nu_\mu+\Gamma^\nu_{\lambda\mu}X^\lambda,$$

находим

$$X^\mu A^\nu_{;\mu}=A^\mu X^\nu_\mu,\quad X^\mu A_{\nu;\mu}=-A_\mu X^\mu_\nu. \tag{100,23}$$

Из (100,20) следует, что

$$\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial X^\rho}+\frac{\partial X_{\rho\mu}}{\partial X^\nu}+\frac{\partial X_{\nu\rho}}{\partial X^\mu}=0. \tag{100,24}$$

С помощью (100,22) отсюда можно получить аналогичные соотношения для X_{ik}:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial X_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial X_{kl}}{\partial x^i}=0. \tag{100,25}$$

Далее, можно показать, что между 5-мерными и 4-мерными ковариантными производными имеется, в соответствии с общими правилами, связь

$$\gamma^\mu_i\gamma^k_\nu\overline{A^\nu_{;\mu}}=A^k_{;i}. \tag{100,26}$$

С помощью этого соотношения и формул (100,12), (100,21) и (100,23) можно получить

$$A^\nu_{;\mu}=\gamma^\nu_i\gamma^k_\mu A^i_{;k}+X_\mu\gamma^\nu_i X^i_k A^k+X^\nu\left(\frac{\partial A}{\partial X^\mu}-\gamma^i_\mu X_{ki}A^k\right)+AX^\nu_\mu \tag{100,27}$$

и аналогичное соотношение для ковариантного вектора. Наконец для ковариантного дифференциала (100,17) можно получить отсюда

$$\left.\begin{aligned} DA^{\nu} &= \gamma^{\nu}_{i}(DA^{i}+AX^{i}_{k}\,dx^{k})+X^{\nu}dA, \\ DA_{\nu} &= \gamma^{i}_{\nu}(DA_{i}+AX_{ik}dx^{k})+X_{\nu}dA, \end{aligned}\right\} \tag{100,28}$$

где $DA^{i}=A^{i}_{;k}dx^{k}$ — четырехмерный ковариантный дифференциал.

5-тензор „кривизны" $P^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ мы определим через $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ так же, как 4-тензор R^{i}_{klm} определяется через Γ^{i}_{kl}. Тензор $P^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ можно выразить через тензор R^{i}_{klm} и тензор $X_{\mu\nu}$. Приведем результат вычисления для упрощенного тензора кривизны

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} = P^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \gamma^{i}_{\mu}\gamma^{k}_{\nu}R_{ik} + 2X^{\sigma}_{\mu}X_{\sigma\nu} - (X_{\mu}X^{\sigma}_{\nu;\sigma} + \\ + X_{\nu}X^{\sigma}_{\mu;\sigma}) + X_{\mu}X_{\nu}X_{\sigma\rho}X^{\sigma\rho}. \end{aligned} \tag{100,29}$$

Скалярная кривизна

$$P = g^{\mu\nu}P_{\mu\nu} = R + X_{\rho\sigma}X^{\rho\sigma} = R + X_{ik}X^{ik}, \tag{100,30}$$

а сопряженные с $P_{\mu\nu}$ 4-тензор, 4-вектор и скаляр:

$$\left.\begin{aligned} P_{ik} &= \gamma^{\mu}_{i}\gamma^{\nu}_{k}P_{\mu\nu} = R_{ik}+2X^{l}_{i}X_{lk}, \\ P_{(0)i} &= \gamma^{\mu}_{i}X^{\nu}P_{\mu\nu} = -X^{k}_{i;k}, \\ P_{(0)(0)} &= X^{\mu}X^{\nu}P_{\mu\nu} = -X_{ik}X^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{100,31}$$

Приведенные соотношения показывают, что метрика пространства X^{ν} (при заданных γ^{k}_{ν}) определяется 4-тензорами g_{ik} и X_{ik}. Оказывается, что если отождествить тензор X_{ik} с тензором F_{ik} электромагнитного поля (тензор же g_{ik} попрежнему определяет гравитационное поле), то можно вывести и формулировать единым образом уравнения гравитационного и электромагнитного полей, сливающихся при этом вместе в уравнения, выраженные через тензоры и векторы в однородных координатах. То же самое относится к уравнениям движения заряженных частиц [1]).

Положим

$$X_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\,F_{ik}. \tag{100,32}$$

Прежде всего заметим, что первая пара уравнений Максвелла (76,2) оказывается автоматически выполненной [совпадая с (100,25) в силу метрических свойств самого пространства X^{ν}].

---

[1]) Подчеркнем, однако, то обстоятельство, что речь идет при этом отнюдь не о каком-либо сведении электромагнитного поля к метрическим свойствам пространства-времени, как это имеет место для гравитационного поля. Метрика реальных пространства и времени (4-пространства x^{k}) остается такой же, как и раньше.

Аналогично тому, как траектория частицы в гравитационном поле является геодезической линией в 4-пространстве x^k, определим траекторию заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях вместе, как геодезическую линию в пятимерном пространстве X^ν.

Пусть $x^k = x^k(s)$ есть параметрическое уравнение кривой в 4-пространстве, так что $u^k = \frac{dx^k}{ds}$ есть 4-вектор скорости частицы, движущейся по этой кривой. Введем 5-вектор скорости u_ν так, чтобы $u^k = \gamma^k_\nu u^\nu$ в соответствии с общими правилами, изложенными в предыдущем параграфе. Согласно (100,12) имеем тогда

$$u^\nu = \gamma^\nu_k u^k + uX^\nu.$$

Аналогично уравнению геодезической кривой в 4-пространстве $\left(\frac{Du^k}{ds} = 0,\right.$ см. § 82$\left.\right)$ определим пятимерную геодезическую кривую уравнением

$$\frac{Du^\nu}{ds} = \frac{\bar{d}X^\mu}{ds} u^\nu_{;\mu} = 0. \tag{100,33}$$

Согласно (100,22) это уравнение при переходе к четырехмерным величинам распадается на два:

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad u = \text{const.},$$

$$\frac{Du^l}{ds} + 2uX^l{}_k \frac{dx^k}{ds} = 0$$

или

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma^l_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{e}{mc} F^l{}_k \frac{dx^k}{ds},$$

причем мы подставили выражение для четырехмерной ковариантной производной, а для постоянной интегрирования $u = u^\nu X_\nu$ выбрали значение

$$u^\nu X_\nu = -\frac{e}{mc^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}, \tag{100,34}$$

так что 5-скорость частицы есть

$$u^\nu = \frac{\bar{d}X^\nu}{ds} - \frac{e}{mc^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}} X^\nu. \tag{100,35}$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением движения (84,6) частицы в гравитационном и электромагнитном полях, так что пятимерное уравнение (100,33) действительно является уравнением движения.

Перейдем теперь к уравнениям поля. Будем исходить из того, что уравнения гравитационного и электромагнитного полей в пустоте должны являться результатом „принципа наименьшего действия“ в пятимерном пространстве, аналогичным тому, который был написан в § 89:

$$\delta \int \mathrm{P} \sqrt{|g_{\mu\nu}|}\, dX^1 \ldots dX^5 = 0, \tag{100,36}$$

где $\mathrm{P} = g^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\mu\nu}$ — скалярная „кривизна“, а $|g_{\mu\nu}|$ — детерминант, составленный из $g_{\mu\nu}$. Варьирование производится по $g_{\mu\nu}$ с дополнительным условием

$$\delta(g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu}) = X^{\mu}X^{\nu}\delta g_{\mu\nu} = 0, \qquad (100,37)$$

являющимся результатом того, что всегда должно быть $g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} = 1$.

Подставляя (100,32) в выражение (100,30) для Р, находим

$$\mathrm{P} = R + \frac{\varkappa}{8\pi}F_{ik}F^{ik}. \qquad (100,38)$$

Это есть как раз то выражение, которое стоит под интегралом в сумме действий гравитационного и электромагнитного полей.

Варьирование интеграла (100,36) производится точно так же, как при выводе уравнений гравитационного поля в § 91, и дает

$$\int\left(\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathrm{P}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{|g_{\rho\sigma}|}\,dX^1\ldots dX^5.$$

Для того, чтобы этот интеграл был равен нулю при условии (100,37), необходимо, очевидно, чтобы

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathrm{P} = FX_{\mu}X_{\nu}, \qquad (100,39)$$

где F — скаляр, который можно определить, умножая обе части уравнений (100,39) на $X^{\mu}X^{\nu}$.

Взяв для обеих частей уравнения (100,39) сопряженные 4-тензор и 4-вектор, получаем два четырехмерных уравнения

$$\mathrm{P}_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\mathrm{P} = 0, \quad \mathrm{P}_{(0)i} = 0$$

[правая часть (100,39) дает в силу (100,8) нуль]. Подставляя сюда (100,31) и (100,32), мы действительно получаем верные уравнения гравитационного поля (91,6) при наличии электромагнитного, и вторую пару уравнений Максвелла (84,4), которые таким образом оказываются слившимися в одно пятимерное уравнение (100,39).

Для того, чтобы получить уравнение поля при наличии масс и зарядов, надо ввести „5-тензор энергии-импульса" материальных частиц

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_{\mu}u_{\nu}, \qquad (100,40)$$

где ρ есть плотность массы, определенная в § 34 [формулой (34,1)]. С помощью (100,35) легко убедиться в том, что сопряженный с $T_{\mu\nu}$ 4-тензор T_{ik} есть 4-тензор энергии-импульса материи, а 4-вектор $T_{(0)i}$ дает 4-вектор тока. Уравнения поля напишутся теперь в виде

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathrm{P} = -\varkappa T_{\mu\nu} + FX_{\mu}X_{\nu} \qquad (100,41)$$

(F надо опять определить, умножая обе части на $X^{\mu}X^{\nu}$), и при переходе к четырехмерным величинам действительно дадут полные уравнения гравитационного поля и уравнения Максвелла.

§ 101. Трудности ньютоновской теории тяготения

Вопрос о свойствах мира как целого, в частности, о распределении в нем материи, приводит в ньютоновской механике к весьма существенным противоречиям, которые не могут быть обойдены, если оставаться в пределах нерелятивистской теории.

В ньютоновской теории тяготения потенциал гравитационного поля (см. § 92) равен $\varphi = -k\int\frac{\mu\, dV}{R}$, где μ — плотность масс[1]). Применяя эту формулу к миру как целому, мы видим, что если вещество распределено по всему пространству и поэтому его средняя плотность μ везде конечна, то гравитационный потенциал обращается в бесконечность. Это привело бы к бесконечным силам, действующим на материю, т. е. к абсурду.

Для того, чтобы гравитационный потенциал оставался конечным, материя должна была бы быть распределенной лишь в некоторой конечной области пространства. Вернее, средняя плотность μ должна была бы стремиться к нулю в бесконечности, причем быстрее, чем $1/R^2$ (заметим, что общая масса, т. е. $\int\mu\, dV$, при этом все же могла бы быть бесконечной). Потенциал при таком распределении материи был бы везде конечным, а в бесконечности обращался бы в нуль.

Однако, статистика приводит к результату, что и такого рода вселенная не могла бы существовать. Действительно, существующая бесконечное время вселенная должна была бы находиться в состоянии статистического равновесия. Равновесное же распределение тел в поле определяется, как известно, формулой Больцмана $\mu = \mu_0 e^{-U/kT}$, где k — постоянная Больцмана, T—температура, а U—потенциальная энергия, равная для тела с массой m в гравитационном поле $U = m\varphi$. Из этой формулы видно, что если в бесконечности $\varphi = 0$, то плотность материи в бесконечности остается конечной и равной μ_0. Таким образом, предположение о равенстве нулю плотности материи в бесконечности приводит к $\rho_0 = 0$, т. е. к равенству нулю плотности во всем пространстве.

§ 102. Изотропное пространство

Проблема мира как целого в общей теории относительности сводится к вопросу о пространственно-временной метрике во вселенной, рассматриваемой в большом масштабе. При таком рассмотрении можно пренебречь местными неоднородностями гравитационного поля, т. е. метрики, вызванными скоплением материи в звезды и звездные системы.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что метрика пространства полностью однородна и изотропна. Это значит, что можно выбрать такое „мировое“ время, чтобы в каждый данный его момент метрика пространства была одинаковой во всех его точках и по всем направлениям. Другими словами, пространство обладает полной симметрией. При этом,

[1]) При рассмотрении мира как целого средняя плотность материи определяется, очевидно, в областях пространства, больших по сравнению с расстоянием между соседними звездными системами (галактиками).

конечно, автоматически предполагается, что плотность ρ материи (в одинаковые моменты „мирового" времени) постоянна вдоль всего пространства.

Собственно говоря, в настоящее время нет теоретических или астрономических оснований для этого предположения, и вполне возможно, что оно не отвечает действительному положению вещей. Между тем не может, конечно, иметь никакого смысла рассмотрение воображаемых частных случаев несуществующих вселенных. Если мы тем не менее исходим из указанного выше простого предположения, то только для того, чтобы на основании его получить общее представление о стоящей перед нами проблеме, хотя и трудно сказать, насколько совпадают с действительностью даже существенные свойства получающихся таким образом решений.

Прежде всего, построим пространственную метрику изотропного пространства в определенный момент „мирового" времени. Другими словами, мы должны найти выражение для элемента пространственного расстояния dl через дифференциалы координат, т. е. определить компоненты тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ в общем выражении

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{102,1}$$

Трехмерный метрический тензор мы обозначаем посредством $\gamma_{\alpha\beta}$ в отличие от четырехмерного тензора g_{ik}.

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны, который мы будем обозначать как $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ в отличие от четырехмерного тензора R^i_{klm} (свойства тензора $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, конечно, в точности аналогичны свойствам тензора R^i_{klm}). В случае полной изотропии тензор $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$. Легко видеть, что в силу свойств симметрии $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ (см. § 88) он должен, следовательно, иметь вид

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\lambda}{6}(\delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta} - \delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta}), \tag{102,2}$$

где λ есть некоторая постоянная. Тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$ равен, соответственно,

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{3}\gamma_{\alpha\beta}, \tag{102,3}$$

а скалярная кривизна

$$P = \lambda. \tag{102,4}$$

Таким образом, мы видим, что свойства кривизны изотропного пространства определяются всего одной постоянной λ. Соответственно этому возможны всего три существенно различные случая пространственной метрики: 1) так называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее отрицательным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda > 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. эвклидово пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трехмерного пространства как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырехмерном пространстве). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трехмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с радиусом a в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 есть

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

а элемент длины на ней

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Рассматривая координаты x^1, x^2, x^3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x^4 с помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \qquad (102,5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (102,2). Поскольку нам заранее известно, что $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (102,3) во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит и величины $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле (88,10) оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = -\frac{2}{a^2}. \qquad (102,6)$$

Величину a можно назвать „радиусом кривизны" пространства. Введем вместо координат x^1, x^2, x^3 соответствующие им „сферические" координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (102,7)$$

Начало координат может быть, конечно, выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах равна $2\pi r$, а поверхность сферы равна $4\pi r^2$. Длина же „радиуса" окружности (или сферы) равна $\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$, т. е. больше r. Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π.

Другой удобной формой для dl^2 является та, которая получается, если ввести вместо координаты r координату χ согласно $r = a \sin \chi$. Тогда

$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) \right]. \tag{102,8}$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на „противоположном полюсе" пространства на расстоянии πa, — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве [все это видно, конечно, и из (102,7), если заметить, что координата r не может принимать значений, бо́льших чем a].

Объем пространства с положительной кривизной равен согласно (102,8):

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \tag{102,9}$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается конечным (но, разумеется, не имеющим границ).

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эту поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а, с другой, — равен находящемуся вне ее заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (102,7) мы видим, что постоянная λ делается положительной, если a^2 отрицательно, т. е. a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia. Другими словами, геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная λ равна теперь

$$\lambda = \frac{2}{a^2}, \tag{102,10}$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ есть

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2), \tag{102,11}$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше, чем 2π. Выражение для dl^2, соответствующее (102,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a \operatorname{sh} \chi$. Тогда

$$dl^2 = a^2 \{ d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) \}. \qquad (102,12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

§ 103. Пространственно-временная метрика изотропного мира

Перейдем теперь к отысканию общего вида интервала ds в изотропном мире. Очевидно, что разумным образом выбранная система отсчета непременно должна быть „собственной“ (см. § 96) для всей находящейся в пространстве материи, т. е. материя должна быть в ней неподвижна; в противном случае, направленность скоростей материи создавала бы неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана в такой системе отсчета указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.

В виду полной эквивалентности всех направлений, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора в выбранной нами системе отсчета равны нулю. Действительно, три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора, который, будучи отличным от нуля, создавал бы неравноценность различных направлений. Таким образом, ds^2 должно иметь вид $ds^2 = g_{00} dx_0^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией толькой от x^0. Поэтому можно всегда выбрать временную координату так, чтобы g_{00} обратилось в c^2. Обозначая ее посредством τ, имеем тогда

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \qquad (103,1)$$

Такое время τ является, очевидно, собственным временем в каждой точке пространства.

Начнем с рассмотрения пространства положительной кривизны. Для dl^2 воспользуемся выражением (102,8), в котором „радиус кривизны“ мира a является, вообще говоря, функцией времени. Таким образом, пишем для ds^2:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a(\tau)^2 \{ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) \}. \qquad (103,2)$$

Функция $a(\tau)$ определяется уравнениями гравитационного поля. Для решения этих уравнений удобно воспользоваться вместо времени величиной η, определенной согласно соотношению

$$c \, d\tau = a \, d\eta. \qquad (103,3)$$

Тогда ds^2 напишется в виде

$$ds^2 = a(\eta)^2 \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) \}. \qquad (103,4)$$

Это выражение имеет такой же вид, как и ds^2 из (93,1), в котором теперь роль r и t играют соответственно координаты χ и η, а величины λ, μ, ν равны

$$\lambda = 2 \ln a, \quad \mu = 2 \ln a + 2 \ln \sin \chi, \quad \nu = 2 \ln a.$$

Поэтому уравнения поля мы можем написать, подставив эти выражения для λ, μ, ν в общие уравнения (96,4—8).

Путем простого вычисления находим из (96,7)

$$\varkappa \rho c^2 = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 + a^2) \tag{103,5}$$

(точка означает дифференцирование по η). В качестве второго уравнения выберем (96,3). Легко сообразить, что в выбранной нами изотропной системе отсчета функция $f_2(\chi)$ в этом уравнении должна как раз компенсировать зависящие от χ члены с левой его стороны, т. е. в $\lambda + 2\mu$. Таким образом, находим

$$3 \ln a = -\int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + \text{const.} \tag{103,6}$$

(нижний предел в этом интеграле постоянен). Если связь между p и ρ известна, то это уравнение определяет ρ как функцию от a. Тогда из (103,5) мы можем определить η в виде

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{\varkappa \rho c^2 a^2}{3} - 1}}. \tag{103,7}$$

Уравнения (103,6), (103,7) решают в общем виде задачу об определении метрики и распределении материи в изотропном пространстве положительной кривизны.

В реальном пространстве давление p мало по сравнению с плотностью энергии ρc^2. Именно, давление излучения мало благодаря тому, что его количество, т. е. плотность энергии в пространстве, относительно мало, а давление материи мало благодаря сравнительно малым скоростям звезд. Полагая, соответственно этому, $p = 0$, мы находим из (103,6):

$$\rho a^3 = \text{const.}\ ^{1)} \tag{103,8}$$

и, подставляя это в (103,7), получаем

$$a = a_0(1 - \cos \eta), \tag{103,9}$$

где a_0 — некоторая постоянная. Наконец, для связи между τ и η находим из (103,3)

$$\tau = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin \eta). \tag{103,10}$$

Мы видим отсюда, что при $\eta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ a обращается в нуль, а ρ — в бесконечность. Но при $\rho \to \infty$ давление тоже делается большим,

---

[1]) Уравнение (103,8) можно было бы написать непосредственно на основании закона сохранения числа частиц, поскольку при $p = 0$ ρ непосредственно пропорционально числу частиц в единице объема, а объем пространства пропорционален a^3.

и потому для исследования метрики при η, близких к указанным значениям, надо рассмотреть противоположный предельный случай наибольшего возможного (при данной плотности) давления. В § 34 мы видели, что это максимальное давление равно $p=\rho c^2/3$. Формулы (103,6), (103,7) и (103,3) дают тогда

$$\rho a^4=\text{const.}\,^{1)},\quad a=a_0'\sin\eta,\quad \tau=\frac{a_0'}{c}(1-\cos\eta),\tag{103,11}$$

где a_0' — другая постоянная. Это решение тоже приводит к $a=0$, $\rho=\infty$ при $\eta=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$ Таким образом, при этих значениях η метрика действительно имеет особую точку, а плотность обращается в бесконечность. Поэтому надо рассматривать значения η только в интервале от 0 до 2π (или, что то же самое, от 2π до 4π и т. д.), и не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за границы указанного интервала.

Перейдем теперь к изучению пространства с отрицательной кривизной. Вместо (103,4) мы имеем теперь согласно (102,12):

$$ds^2=[a(\eta)]^2\{d\eta^2-d\chi^2-\operatorname{sh}^2\chi(\sin^2\theta\,d\varphi^2+d\theta^2)\}.\tag{103,12}$$

Это выражение может быть формально получено из (103,4) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia. Поэтому и уравнения поля можно получить непосредственно путем этой же подстановки в (103,5), (103,6)

$$\varkappa\rho c^2=\frac{3}{a^4}(\dot a^2-a^2),\ 3\ln a=-\int\frac{c^2d\rho}{\rho c^2+p}+\text{const.},\tag{103,13}$$

а вместо (103,7) имеем теперь

$$\eta=\pm\int\frac{da}{a\sqrt{\frac{\varkappa\rho c^2a^2}{3}+1}}.\tag{103,14}$$

Для случая малых давлений находим отсюда, полагая $p=0$:

$$\rho a^3=\text{const.},\quad a=a_0(\operatorname{ch}\eta-1),\quad \tau=\frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta-\eta).\tag{103,15}$$

В отличие от решения (103,8—10) a обращается в нуль (а ρ в бесконечность) только при одном значении η, а именно при $\eta=0$. Вблизи $\eta=0$ найденное решение неприменимо, и для исследования метрики в этой области опять полагаем $p=\frac{1}{3}\rho c^2$. В результате мы находим

$$\rho a^4=\text{const.},\quad a=a_0'\operatorname{sh}\eta,\quad \tau=\frac{a_0'}{c}(\operatorname{ch}\eta-1).\tag{103,16}$$

Это решение тоже приводит к $a=0$, $\rho=\infty$ при $\eta=0$. Таким образом, в случае пространства с отрицательной кривизной надо рассматривать все функции только при значениях $\eta>0$ или только при $\eta<0$.

---

[1]) Это соотношение, как и (103,8), получается непосредственно из связи между ρ и числом частиц в единице объема, которая в случае $p=\frac{1}{3}\rho c^2$ определяется формулой (34,13).

Наконец, рассмотрим плоское пространство. Интервал ds в соответствующем пространстве-времени можно написать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b(\tau)^2 (dr^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2).$$

Зависящий от времени множитель перед элементом пространственного расстояния, очевидно, не меняет эвклидова характера пространственной метрики, так как при заданном τ этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведен к единице. Вводя опять величину η вместо τ, согласно соотношению $c\,d\tau = b\,d\eta$, имеем

$$ds^2 = b(\eta)^2 (d\eta^2 - dr^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 - r^2 d\theta^2). \qquad (103,17)$$

Общие уравнения поля (96,3) и (96,7) дают

$$\varkappa \rho c^2 = \frac{3\dot{b}^2}{b^4}, \quad 3 \ln b = -\int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + \text{const.}, \qquad (103,18)$$

откуда

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}} \int \frac{d\rho}{b^2 \sqrt{\rho c^2}}. \qquad (103,19)$$

Для случая $p = 0$ находим

$$\rho b^3 = \text{const.}, \quad b = b_0 \eta^2, \quad \tau = \frac{b_0}{c} \frac{\eta^3}{3}, \qquad (103,20)$$

а при $p = \frac{1}{3} \rho c^2$:

$$\rho b^4 = \text{const.}, \quad b = b_0' \eta, \quad \tau = \frac{b_0'}{c} \frac{\eta^2}{2}. \qquad (103,21)$$

Таким образом, и в этом случае метрика имеет особую точку при $\eta = 0$.

Необходимо, однако, иметь в виду, что лишь более полное исследование уравнений поля в общем случае не изотропного пространства могло бы ответить на вопрос о том, насколько указанное общее свойство приведенных выше решений соответствует реальной действительности, а не является специальным свойством изотропной модели, не имеющим места при более общих предположениях.

Расстояние от любой точки, выбранной в качестве начала координат до какой-либо другой точки, равно $a\chi$ (а в плоском пространстве — соответственно br). Это расстояние меняется со временем. Скорость этого изменения равна

$$V = \frac{da\chi}{d\tau} = \chi \dot{a} \frac{d\eta}{d\tau} = \chi \frac{c\dot{a}}{a},$$

т. е. пропорциональна расстоянию от наблюдателя до наблюдаемой точки. Отношение скорости к расстоянию, которое мы обозначим посредством α, равно

$$\alpha = \frac{V}{a\chi} = c \frac{\dot{a}}{a^2}. \qquad (103,22)$$

Заметных значений скорость V достигает лишь для очень больших расстояний. Астрономически этот эффект приводит к тому, что внегалактические туманности оказываются обладающими большими радиальными скоростями относительно земли, действительно пропорциональными их расстоянию от земли. Для α измерения дают в настоящее время значение около $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-17}$ сек.$^{-1}$. Скорости V всех туманностей положительны, т. е. „туманности" разбегаются друг от друга. Из положительности V следует, что $\dot{a} > 0$. Это значит, что значение η в настоящее время лежит между 0 и π, если пространство обладает положительной кривизной, и $\eta > 0$, если кривизна отрицательна.

Напишем формулы, связывающие η и a с измеряемыми астрономическими величинами α и ρ. Для пространства положительной кривизны имеем из (103,5)

$$\frac{\varkappa\rho c^2}{3} = \frac{1}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2}, \tag{103,23}$$

а из (103,9) и (103,10)

$$\alpha = \frac{\cos\eta}{a_0(1-\cos\eta)^2} = \frac{c}{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2}.$$

Комбинируя эти два уравнения, находим

$$\cos\frac{\eta}{2} = \alpha\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho c^2}}. \tag{103,24}$$

Для пространства отрицательной кривизны получаем аналогично

$$\frac{\varkappa\rho}{3} = \frac{\alpha^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \tag{103,25}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\eta}{2} = \frac{\alpha}{c^2}\sqrt{\frac{3}{\varkappa\rho c^2}}. \tag{103,26}$$

Формулы (103,23) и (103,25) дают возможность установить знак кривизны пространства, если известны значения ρ и α. Именно, кривизна положительна или отрицательна в зависимости от того, положительна или отрицательна разность $\frac{\varkappa\rho c^2}{3} - \frac{\alpha^2}{c^2}$. Она обращается в нуль при $\rho = \frac{3\alpha^2}{\varkappa c^4} = 6 \cdot 10^{-28}$ *г/см*^{3}. Имеющиеся в настоящее время измерения ρ обладают небольшой точностью. Они дают для ρ значения порядка 10^{-30} *г/см*^{3}. Вместе с приведенным выше значением α это приводит к $\frac{\varkappa\rho c^2}{3} - \frac{\alpha^2}{c^2} > 0$, причем $a = 1{,}7 \cdot 10^{27}$ *см* $= 1{,}8 \cdot 10^9$ световых лет. Таким образом, имеющиеся в настоящее время данные дают основания считать, что пространство бесконечно и обладает отрицательной кривизной.

§ 104. Распространение света

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого напишем уравнение эйконала (82,10):

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0.$$

Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи света будут распространяться вдоль линий $\theta=\text{const.}$, $\varphi=\text{const.}$, т. е. вдоль луча будет меняться только координата χ. Поэтому эйконал ψ является функцией только от пространственной координаты χ и от временной координаты η. С помощью g^{ik} из (103,4) или (103,2) находим теперь уравнение эйконала в простом виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\right)^2, \tag{104,1}$$

имеющем место в пространстве как с положительной, так и с отрицательной кривизной.

Полный интервал этого уравнения есть

$$\psi=\beta(\chi\pm\eta)+\text{const.} \tag{104,2}$$

с постоянным β. Мы выберем здесь знак минус перед η, что соответствует лучам, распространяющимся по направлению от начала координат. Уравнение распространения луча получается отсюда, как и при решении уравнения Гамильтона-Якоби, путем приравнивания постоянной производной от ψ по параметру β. Это дает

$$\chi=\eta+\text{const.}, \tag{104,3}$$

чем и определяется распространение лучей света. С помощью формул предыдущего параграфа можно выразить отсюда проходимое лучом расстояние $a\chi$ как функцию от времени τ.

В пространстве с положительной кривизной обходу луча „вокруг пространства“ и возвращению его в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π (см. § 102). Из (104,3) мы видим, что при этом и η должно было бы измениться на 2π, что, однако, невозможно (за исключением только одного случая, — выхода луча в момент $\eta=0$). Таким образом, луч не мог бы возвратиться в исходную точку, обойдя „вокруг пространства“.

Частоту ω света можно определить, дифференцируя эйконал по времени

$$\omega=-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\tau}=-\frac{c\dot{\psi}}{a}$$

или, подставляя выражение (104,2) для ψ:

$$\omega=\frac{\beta c}{a}.$$

Таким образом, при распространении луча света вдоль него постоянно произведение

$$a\omega=\text{const.} \tag{104,4}$$

Предположим, что в момент η мы наблюдаем свет, испущенный туманностью, находящейся на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ. Моменту испускания этого света туманностью соответствует согласно (104,2) значение $\eta-\chi$ координаты η.

Если ω_0 есть частота света в момент его испускания, то наблюдаемая нами частота ω равна согласно (104,4):

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}. \tag{104,5}$$

Поскольку, как было указано в конце предыдущего параграфа, $a(\eta)$ есть возрастающая функция от η, то $\omega < \omega_0$, т. е. происходит смещение частоты света в красную сторону спектра. Это явление представляет собой по существу эффект Допплера от взаимного „разбегания" туманностей. В пространстве с отрицательной кривизной имеем из (104,5) и (103,15) при $\eta \gg 1$ приближенно

$$\omega = \omega_0 e^{-\chi}. \tag{104,6}$$

Далее, определим интенсивность J света, доходящего до нас с туманности, находящейся на расстоянии χ. Поток световой энергии в единицу времени через единицу поверхности на расстоянии $a\chi$ от источника света обратно пропорционален поверхности сферы радиуса $a\chi$, равной (в пространстве с отрицательной кривизной) $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2\chi$ (см. § 102). Далее, интенсивность определяется наблюдателем как поток световой энергии в единицу собственного времени, интервал $d\tau = \frac{a(\eta)}{c} d\eta$ которого меняется с изменением η. Поскольку интенсивность обратно пропорциональна длительности этого интервала, а за время распространения света от источника до наблюдателя a меняется от $a(\eta-\chi)$ до $a(\eta)$, то в J появится множитель $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. Наконец, надо иметь в виду, что энергия, измеряемая наблюдателем в данном месте, есть производная от действия по собственному времени. Между тем, не зависящей от времени является не производная $\frac{\partial S}{\partial \tau}$, а производная $\frac{\partial S}{\partial \eta}$, что непосредственно следует из того, что уравнение Гамильтона-Якоби, имеющее вид, аналогичный (104,1), не содержит η. Поскольку $\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{c}{a}\frac{\partial S}{\partial \eta}$, то энергия обратно пропорциональна $a(\eta)$. Это приводит к появлению в J еще одного множителя $\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}$. В результате получаем окончательно интенсивность в виде

$$J = \text{const.}\,\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sh}^2\chi}. \tag{104,7}$$

Астрономически расстояние до туманностей часто измеряется именно по их видимой яркости (абсолютные яркости внегалактических туманностей при этом считают примерно одинаковыми). Это „астрономическое расстояние" R связано с J посредством соотношения $J = \text{const.}/R^2$, и, следовательно, для R мы имеем из (104,7)

$$R = \frac{a^2(\eta)\operatorname{sh}\chi}{a(\eta-\chi)} \tag{104,8}$$

(при небольших χ R равно $a\chi$, т. е. истинному расстоянию). В пространстве с отрицательной кривизной это дает при $\eta \gg 1$ приближенно

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{2\chi} - 1\right). \tag{104,9}$$

Наконец, определим количество dN туманностей, находящихся на „расстоянии" между R и $R + dR$. Поскольку распределение туманностей в пространстве считается равномерным, то число их в данном элементе объема пропорционально величине этого элемента, причем, поскольку мы пользуемся „собственной" системой отсчета, оно не зависит от η. Таким образом,

$$dN = \text{const.}\ \mathrm{sh}^2\chi\, d\chi. \tag{104,10}$$

Выражая χ через R, мы можем получить отсюда распределение туманностей по их яркостям.

§ 105. Термодинамика общей теории относительности

Общая теория относительности коренным образом меняет результаты применения термодинамики к миру как целому.

Мы видели в § 97, что закон сохранения полного 4-импульса в общей теории относительности приобретает характер тождества. В частности, полный 4-импульс P_i во всем пространстве оказывается равным нулю. Это следует непосредственно из выражения (97,11) 4-импульса в виде интеграла по поверхности $P_i = \frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha} df_\alpha$. Действительно, в конечном пространстве (т. е. в пространстве с положительной кривизной) всякая замкнутая поверхность с обеих своих сторон охватывает конечную область пространства. Поэтому указанный интеграл равен полному 4-импульсу, заключенному в пространстве с одной стороны поверхности, и в то же время взятому с обратным знаком 4-импульсу в пространстве, находящемся с другой ее стороны. Полный же 4-импульс во всем пространстве равен, следовательно, нулю.

В случае бесконечного пространства (с отрицательной кривизной) не имеет, очевидно, смысла говорить о полном 4-импульсе во всем пространстве, и надо вместо этого рассматривать 4-импульс, отнесенный, скажем, к единице объема, т. е. предел отношения 4-импульса в некоторой области пространства к объему этой области при неограниченном ее увеличении. Но гравитационное поле, т. е. g_{ik} и Γ^i_{kl}, а потому и величины h^i_{kl} во всем пространстве конечны. Поэтому при увеличении области пространства интеграл $\frac{1}{c}\oint h_i^{0\alpha}\, df_\alpha$ растет в общем, как поверхность, охватывающая эту область, т. е. медленнее, чем ее объем. Их отношение, т. е. 4-импульс, приходящийся на единицу объема, стремится, следовательно, к нулю.

Таким образом, закон сохранения полного 4-импульса во всем пространстве выполняется тождественно, сводясь к тому, что нуль всегда равен нулю.

В нерелятивистской термодинамике энтропия всякой замкнутой системы монотонно возрастает, достигая через достаточный промежуток времени своего максимального значения, соответствующего состоянию термодинамического равновесия. Это значение является максимальным, какое энтропия может иметь при данных постоянных значениях импульса и энергии системы. В применении к миру, как целому, этот закон приводит в нерелятивистской механике к известной трудности, так называемой „тепловой смерти".

В релятивистской термодинамике закон монотонного возрастания энтропии замкнутых систем попрежнему имеет место. Однако, утверждение, что при этом возрастании энтропия принимает в конце концов наибольшее возможное при данных энергии и импульсе значение, в применении к миру, как целому, теряет теперь смысл. Таким образом, энтропия мира систематически возрастает без того, однако, чтобы мир переходил в какое-либо состояние равновесия, обладающее максимальной энтропией.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ