

Л.Д.ЛАНДАУ и Е.М.ЛИФШИЦ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
СПЛОШНЫХ
СРЕД

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

Ландау Лев Давыдович и Лифшиц Евгений Михайлович.

Электродинамика сплошных сред.

Редактор В. И. Рыдник.

Техн. редактор Н. Я. Мурашова.

Корректор Т. С. Плетнева.

Сдано в набор 17/XII 1956 г. Подписано к печати 30/VII 1957 г.
Бумага 60×92¹/₁₆. Физ. печ. л. 33,25. Условн. печ. л. 33,25. Уч.-изд. л. 34,0. Тираж 13 000 экз.
Т-06678. Цена книги 11 р. 70 к. Заказ № 1708.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 16.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград. Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	9
Некоторые обозначения	10
Глава I. Электростатика проводников	11
§ 1. Электростатическое поле проводников	11
§ 2. Энергия электростатического поля проводников	14
§ 3. Методы решения электростатических задач	21
§ 4. Проводящий эллипсоид	36
§ 5. Силы, действующие на проводник	48
Глава II. Электростатика диэлектриков	55
§ 6. Электростатическое поле в диэлектриках	55
§ 7. Диэлектрическая проницаемость	57
§ 8. Диэлектрический эллипсоид	62
§ 9. Диэлектрическая проницаемость смеси	67
§ 10. Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле	69
§ 11. Полная свободная энергия диэлектрического тела	75
§ 12. Электрострикция изотропных диэлектриков	79
§ 13. Диэлектрические свойства кристаллов	83
§ 14. Положительность диэлектрической восприимчивости	88
§ 15. Электрические силы в жидком диэлектрике	90
§ 16. Электрические силы в твердых телах	96
§ 17. Пьезоэлектрики	102
§ 18. Термодинамические неравенства	110
§ 19. Сегнетоэлектрики	114
Глава III. Постоянный ток	125
§ 20. Плотность тока и проводимость	125
§ 21. Эффект Холла	130
§ 22. Контактная разность потенциалов	133
§ 23. Гальванический элемент	136
§ 24. Электрокапиллярность	138

	Стр.
§ 25. Термоэлектрические явления	140
§ 26. Диффузионно-электрические явления	147
Глава IV. Постоянное магнитное поле	150
§ 27. Постоянное магнитное поле	150
§ 28. Магнитная симметрия кристаллов	154
§ 29. Магнитное поле постоянных токов	158
§ 30. Термодинамические соотношения в магнитном поле	167
§ 31. Полная свободная энергия магнетика	169
§ 32. Энергия системы токов	172
§ 33. Самоиндукция линейных проводников	177
§ 34. Силы в магнитном поле	184
§ 35. Гиромагнитные явления	187
Глава V. Ферромагнетизм	190
§ 36. Ферромагнетик вблизи точки Кюри	190
§ 37. Энергия магнитной анизотропии	194
§ 38. Магнитострикция ферромагнетиков	201
§ 39. Доменная структура ферромагнетиков	205
§ 40. Антиферромагнитная точка Кюри	213
Глава VI. Сверхпроводимость	215
§ 41. Магнитные свойства сверхпроводников	215
§ 42. Сверхпроводящий ток	218
§ 43. Критическое поле	223
§ 44. Промежуточное состояние	228
Глава VII. Квазистационарное электромагнитное поле	237
§ 45. Токи Фуко	237
§ 46. Скин-эффект	248
§ 47. Комплексное сопротивление	251
§ 48. Емкость в цепи квазистационарного тока	256
§ 49. Движение проводника в магнитном поле	261
§ 50. Возбуждение тока ускорением	266
Глава VIII. Магнитная гидродинамика	270
§ 51. Уравнения движения жидкости в магнитном поле	270
§ 52. Магнитогидродинамические волны	276
§ 53. Тангенциальные и вращательные разрывы	283
§ 54. Ударные волны	290
§ 55. Спонтанное магнитное поле при турбулентном движении проводящей жидкости	296

	Стр.
Глава IX. Уравнения электромагнитных волн	303
§ 56. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии . . .	303
§ 57. Электродинамика движущихся диэлектриков	308
§ 58. Дисперсия диэлектрической проницаемости	314
§ 59. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах	317
§ 60. Дисперсия магнитной проницаемости	318
§ 61. Энергия поля в диспергирующих средах	320
§ 62. Связь между вещественной и мнимой частями $\epsilon(\omega)$	324
§ 63. Плоская монохроматическая волна	333
§ 64. Прозрачные среды	338
Глава X. Распространение электромагнитных волн	342
§ 65. Геометрическая оптика	342
§ 66. Отражение и преломление волн	346
§ 67. Поверхностный импеданс металлов	354
§ 68. Распространение волн в неоднородной среде	361
§ 69. Принцип взаимности	365
§ 70. Электромагнитные колебания в полых резонаторах	368
§ 71. Распространение электромагнитных волн в волноводах	372
§ 72. Рассеяние электромагнитных волн на малых частицах	379
§ 73. Поглощение электромагнитных волн на малых частицах	384
§ 74. Диффракция на клине	385
§ 75. Диффракция на плоском экране	390
Глава XI. Электромагнитные волны в анизотропных средах	395
§ 76. Диэлектрическая проницаемость кристаллов	395
§ 77. Плоская волна в анизотропной среде	397
§ 78. Оптические свойства одноосных кристаллов	405
§ 79. Двухосные кристаллы	408
§ 80. Двойное преломление в электрическом поле	414
§ 81. Динамооптические явления	415
§ 82. Магнитооптические эффекты	417
§ 83. Естественная оптическая активность	425
Глава XII. Прохождение быстрых частиц через вещество	433
§ 84. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Нерелятивистский случай	433
§ 85. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Релятивистский случай	439
§ 86. Излучение Черенкова	448
Глава XIII. Электромагнитные флуктуации	451
§ 87. Общая теория квантовых флуктуаций одной величины	451
§ 88. Общая теория квантовых флуктуаций нескольких величин	459

	Стр.
§ 89. Флуктуации тока в линейных цепях	465
§ 90. Флуктуации электромагнитного поля	466
§ 91. Черное излучение в прозрачной среде	473
§ 92. Силы молекулярного притяжения между твердыми телами	475
Глава XIV. Рассеяние электромагнитных волн	483
§ 93. Общая теория рассеяния в изотропных средах	483
§ 94. Принцип детального равновесия при рассеянии	491
§ 95. Рассеяние с малым изменением частоты	494
§ 96. Рэлеевское рассеяние в газах и жидкостях	497
§ 97. Критическая опалесценция	504
§ 98. Рассеяние в аморфных твердых телах	506
Глава XV. Диффракция рентгеновых лучей в кристаллах	510
§ 99. Общая теория диффракции рентгеновых лучей	510
§ 100. Интегральная интенсивность	517
§ 101. Диффузное тепловое рассеяние рентгеновых лучей	520
Приложение. Криволинейные координаты	524
Предметный указатель	526

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый том «Теоретической физики» посвящен теории электромагнитных полей в материальных средах и теории макроскопических электрических и магнитных свойств вещества. Сюда относится, как это можно видеть из оглавления, весьма широкий круг вопросов.

При написании этой книги мы встретились со значительными трудностями, связанными с необходимостью какого-то отбора из имеющегося огромного материала, а также с тем, что обычное изложение многих относящихся сюда вопросов не обладает должной степенью физической ясности, а зачастую даже содержит ошибки. Мы отдаем себе отчет в том, что и в предлагаемом изложении имеется еще много дефектов, которые мы рассчитываем исправить в дальнейшем, в следующих изданиях книги.

Мы благодарны проф. В. Л. Гинзбургу, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний. Мы благодарны также И. Е. Дзялошинскому и Л. П. Питаевскому за большую помощь, оказанную ими при чтении корректуры.

Москва, октябрь 1956 г.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Напряженность и индукция электрического поля: E и D .

Напряженность и индукция магнитного поля: H и B .

Напряженность внешнего электрического и магнитного поля: векторы \mathcal{E} , \mathcal{H} ;
абсолютные значения \mathcal{E} , \mathcal{H} .

Диэлектрическая поляризация: P .

Намагниченность: M .

Полные электрический и магнитный моменты тела: \mathcal{P} и \mathcal{M} .

Диэлектрическая проницаемость: ϵ .

Магнитная проницаемость: μ .

Плотность тока: j .

Проводимость: σ .

Абсолютная температура (в энергетических единицах): T .

Термодинамические величины, отнесенные к единице объема:

энтропия S ,

внутренняя энергия U ,

свободная энергия F ,

термодинамический потенциал Φ .

Те же величины для тела в целом: \mathcal{S} , \mathcal{U} , \mathcal{F} , \mathcal{P} .

Химический потенциал: ζ .

Постоянная Планка, деленная на 2π : \hbar .

Комплексный периодический (по времени) множитель берется везде в виде $e^{-i\omega t}$.

Везде принято правило суммирования по дважды повторяющимся векторным и тензорным трехмерным (латинские буквы) и двумерным (греческие буквы) индексам.

Г Л А В А I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

§ 1. Электростатическое поле проводников

Предмет макроскопической электродинамики составляет изучение электромагнитных полей в пространстве, заполненном веществом. Как и всякая макроскопическая теория, электродинамика оперирует физическими величинами, усредненными по «физически бесконечно малым» элементам объема, не интересуясь микроскопическими колебаниями этих величин, связанными с молекулярным строением вещества. Так, вместо истинного «микроскопического» значения напряженности электрического поля e мы будем рассматривать ее усредненное значение, обозначив его как

$$\bar{e} = E. \quad (1,1)$$

Основные уравнения электродинамики сплошных сред получаются посредством усреднения уравнений электромагнитного поля в пустоте. Такой переход от микро- к макроскопическим уравнениям был впервые произведен *Г. А. Лоренцом*.

Вид уравнений макроскопической электродинамики и смысл входящих в них величин существенно зависят от физической природы материальной среды, а также от характера изменения поля со временем. Поэтому представляется рациональным производить вывод и исследование этих уравнений для каждой категории физических объектов в отдельности.

Как известно, в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории — проводники и диэлектрики, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток ¹⁾.

Мы начнем с изучения постоянных электрических полей, создаваемых заряженными проводниками (электростатика проводников).

¹⁾ Необходимо, однако, оговорить, что проводник предполагается здесь однородным (по своему составу, температуре и т. п.). В неоднородном проводнике, как мы увидим в дальнейшем, могут существовать поля, не вызывающие движения зарядов.

Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность E привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда в свою очередь следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности: наличие зарядов в объеме проводника непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем ¹⁾; распределение же зарядов по поверхности может быть осуществлено таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались.

Таким образом, задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников, и к определению распределения зарядов по поверхности проводников.

В точках, не слишком близких к поверхности тела, среднее поле E в пустоте фактически совпадает с истинным полем e . Эти две величины отличаются друг от друга лишь в непосредственной близости от тела, где еще сказывается влияние нерегулярных молекулярных полей. Последнее обстоятельство, однако, не отражается на виде усредненных уравнений поля. Точные микроскопические уравнения Максвелла в пустоте гласят:

$$\operatorname{div} e = 0, \quad (1,2)$$

$$\operatorname{rot} e = -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1,3)$$

(h — микроскопическая напряженность магнитного поля). Поскольку среднее магнитное поле предполагается отсутствующим, то и производная $\partial h/\partial t$ обращается в результате усреднения в нуль, и мы находим, что постоянное электрическое поле в пустоте удовлетворяет обычным уравнениям

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0, \quad (1,4)$$

т. е. является потенциальным полем с потенциалом φ , связанным с напряженностью посредством соотношения

$$E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1,5)$$

и удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1,6)$$

Граничные условия для поля E на поверхности проводника следуют из самого уравнения $\operatorname{rot} E = 0$, справедливого (как и исходное

¹⁾ Это ясно видно из приведенного ниже уравнения (1,8).

уравнение (1,3)) и вне, и внутри тела. Выберем ось z по направлению нормали к поверхности проводника в некоторой его точке. Компонента E_z поля в непосредственной близости к поверхности тела достигает очень больших значений (ввиду наличия здесь конечной разности потенциалов на очень малых расстояниях). Это большое поле является свойством самой поверхности и зависит от ее физических свойств, но не имеет отношения к рассматриваемой нами электростатической задаче, так как быстро спадает уже на расстояниях, сравнимых с атомными. Существенно, однако, что если поверхность однородна, то производные $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ вдоль поверхности остаются конечными, несмотря на обращение самого E_z в бесконечность. Поэтому из

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

следует, что $\partial E_y/\partial z$ конечно. Это значит, что E_y непрерывно на поверхности (так как скачок E_y означал бы обращение производной $\partial E_y/\partial z$ в бесконечность). То же самое относится и к E_x , а поскольку внутри проводника вообще $\mathbf{E} = 0$, то мы приходим к выводу, что касательные компоненты внешнего поля на его поверхности должны обращаться в нуль:

$$E_t = 0. \quad (1,7)$$

Таким образом, электростатическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Поскольку $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль всей поверхности каждого данного проводника. Другими словами, поверхность однородного проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля.

Нормальная же к поверхности компонента поля весьма просто связана с плотностью распределенного по поверхности заряда. Эта связь получается из общего электродинамического уравнения $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$, которое после усреднения дает

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (1,8)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность заряда. В интегральном виде это уравнение означает, как известно, что поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в ограниченном этой поверхностью объеме (умноженному на 4π). Применив эту теорему к элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности проводника, и учитывая, что на внутренней площадке $\mathbf{E} = 0$, найдем, что $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда, т. е. заряд на единице площади поверхности

проводника. Таким образом, распределение зарядов по поверхности проводника определяется формулой

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (1,9)$$

(производная от потенциала берется в направлении внешней нормали к поверхности). Полный заряд проводника

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial\varphi}{\partial n} df, \quad (1,10)$$

где интеграл берется по всей его поверхности.

Распределение потенциала во всяком электростатическом поле обладает следующим замечательным свойством: функция $\varphi(x, y, z)$ может достигать максимальных или минимальных значений лишь на границах области поля. Эту теорему можно сформулировать и как утверждение о невозможности устойчивого равновесия внесенного в поле пробного заряда e , так как нет такой точки, в которой бы его потенциальная энергия $e\varphi$ имела минимум.

Доказательство теоремы весьма просто. Допустим, например, что в некоторой точке A (не находящейся на границе поля) потенциал имеет максимум. Тогда можно окружить точку A такой малой замкнутой поверхностью, на которой везде производная по нормали $\partial\varphi/\partial n < 0$. Следовательно, и интеграл по этой поверхности $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} df < 0$. Но в силу уравнения Лапласа

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} df = \int \Delta\varphi dV = 0,$$

в противоречии с предположением.

§ 2. Энергия электростатического поля проводников

Вычислим полную энергию \mathcal{U} электростатического поля заряженных проводников ¹⁾

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (2,1)$$

где интеграл берется по всему объему пространства вне проводников. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi} \int E \operatorname{grad} \varphi \cdot dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} (\varphi E) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} E dV.$$

¹⁾ Квадрат E^2 не совпадает со средним квадратом $\overline{e^2}$ истинного поля вблизи поверхности проводника, а также и в объеме последнего (где $E = 0$, но, разумеется, $\overline{e^2} \neq 0$). Вычисляя интеграл (2,1), мы тем самым отвлекаемся от не интересующей нас здесь внутренней энергии проводника как такового и от энергии сродства зарядов к его поверхности.

Второй интеграл обращается в нуль в силу (1,4), а первый преобразуется в интеграл по ограничивающим поле поверхностям проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Но последний интеграл обращается в нуль в силу достаточно быстрого убывания поля на бесконечности. Нумеруя проводники индексом a и обозначая постоянные значения потенциала вдоль каждого из них посредством φ_a , получим ¹⁾

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \varphi E_n df = \frac{1}{8\pi} \sum_a \varphi_a \oint E_n df.$$

Наконец, вводя полные заряды проводников e_a согласно (1,10), получим окончательно выражение

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \quad (2,2)$$

аналогичное выражению для энергии системы точечных зарядов.

Заряды и потенциалы проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом; между ними существует определенная связь. В силу линейности и однородности уравнений поля в пустоте эта связь тоже должна быть линейной, т. е. выражаться соотношениями вида

$$e_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b, \quad (2,3)$$

где величины C_{aa} , C_{ab} имеют размерность длины и зависят от формы и взаимного расположения проводников. Величины C_{aa} называют коэффициентами емкости, а величины C_{ab} ($a \neq b$) — коэффициентами электростатической индукции. В частности, если имеется всего один проводник, то $e = C\varphi$, где C — емкость; порядок величины емкости совпадает с линейными размерами тела. Обратные выражения для потенциалов через заряды:

$$\varphi_a = \sum_b C_{ab}^{-1} e_b, \quad (2,4)$$

где коэффициенты C_{ab}^{-1} составляют матрицу, обратную матрице коэффициентов C_{ab} .

Вычислим изменение энергии системы проводников при бесконечно малом изменении их зарядов или потенциалов. Варьируя исходное выражение (2,1), имеем

$$\delta\mathcal{U} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \delta\mathbf{E} dV.$$

¹⁾ При преобразовании объемного интеграла в поверхностный здесь и ниже надо иметь в виду, что E_n есть составляющая поля по направлению нормали, внешней по отношению к проводнику; это направление противоположно направлению нормали, внешней по отношению к области объемного интегрирования, т. е. пространства вне проводников. В связи с этим при преобразовании изменен знак интеграла.

Это выражение можно преобразовать далее двумя эквивалентными способами. Подставив $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ и имея в виду, что варьированное поле, как и исходное, удовлетворяет уравнениям (1,4) (так что $\text{div } \delta\mathbf{E} = 0$), пишем

$$\delta\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \varphi \cdot \delta\mathbf{E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div} (\varphi \delta\mathbf{E}) dV = \frac{1}{4\pi} \sum_a \varphi_a \oint \delta E_n df,$$

или окончательно

$$\delta\mathcal{U} = \sum_a \varphi_a \delta e_a, \quad (2,5)$$

т. е. мы получили изменение энергии, выраженное через изменения зарядов. Этот результат, впрочем, заранее очевиден, как работа, которую необходимо произвести над бесконечно малыми зарядами δe_a , чтобы перенести их к заданным проводникам из бесконечности, где потенциал поля равен нулю.

С другой стороны, можно написать

$$\delta\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \text{grad } \delta\varphi \cdot dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div} (\mathbf{E} \delta\varphi) dV = \frac{1}{4\pi} \sum_a \delta\varphi_a \oint E_n df,$$

или

$$\delta\mathcal{U} = \sum e_a \delta\varphi_a, \quad (2,6)$$

т. е. изменение энергии выражено через изменение потенциалов проводников.

Формулы (2,5), (2,6) показывают, что, дифференцируя энергию \mathcal{U} по величинам зарядов, мы получаем потенциалы проводников, а производные от \mathcal{U} по потенциалам дают значения зарядов:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial e_a} = \varphi_a, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi_a} = e_a. \quad (2,7)$$

С другой стороны, потенциалы и заряды являются линейными функциями друг друга. С помощью (2,3) имеем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = \frac{\partial e_b}{\partial \varphi_a} = C_{ba},$$

а изменив порядок дифференцирования, мы получили бы C_{ab} . Отсюда видно, что

$$C_{ab} = C_{ba} \quad (2,8)$$

(и, аналогично, $C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$). Энергия \mathcal{U} может быть представлена в виде квадратичной формы потенциалов или зарядов:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \varphi_a \varphi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b. \quad (2,9)$$

Эта квадратичная форма, как и исходное выражение (2,1), должна быть существенно положительной. Из этого условия возникают определенные неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты C_{ab} . В частности, все коэффициенты емкости положительны:

$$C_{aa} > 0 \quad (2,10)$$

(а также и $C_{aa}^{-1} > 0$)¹⁾.

Напротив, все коэффициенты электростатической индукции отрицательны:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b). \quad (2,11)$$

Это обстоятельство очевидно уже из следующих простых соображений. Представим себе, что все проводники, за исключением лишь одного (a -го), заземлены, т. е. их потенциалы равны нулю. Тогда заряд, индуцированный заряженным a -м проводником на каком-либо проводнике b , равен $e_b = C_{ba}\varphi_a$. Представляется очевидным, что знак индуцированного заряда противоположен знаку индуцирующего потенциала, а потому $C_{ab} < 0$. Более строго в этом можно убедиться, исходя из того, что потенциал электростатического поля не может достигать максимальных и минимальных значений вне проводников. Пусть, например, потенциал единственного незаземленного проводника $\varphi_a > 0$. Тогда потенциал будет положителен и во всем пространстве так, чтобы его наименьшее значение (нуль) достигалось только на заземленных проводниках. Отсюда следует, что на поверхности последних нормальная производная потенциала $d\varphi/dn$ будет положительной, а их заряд согласно (1,10) — отрицательным.

С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться в том, что $C_{ab}^{-1} > 0$.

Энергия электростатического поля проводников обладает определенным свойством экстремальности, имеющим, правда, не столько физический, сколько формальный характер. Для вывода этого свойства представим себе, что распределение зарядов в проводниках подвергается бесконечно малому изменению (при неизменном полном заряде каждого проводника), в результате которого заряды могут попасть и внутрь проводников; при этом мы отвлекаемся от того, что в действительности такое распределение зарядов не может быть стационарным. Рассмотрим соответствующее изменение интеграла

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

¹⁾ Укажем также, что среди условий положительности формы (2,3) фигурируют и неравенства

$$C_{aa}C_{bb} > C_{ab}^2.$$

который надо представлять себе теперь распространенным по всему пространству, включая объем самих проводников (так как после смещения зарядов поле E будет, вообще говоря, отличным от нуля и внутри проводников). Пишем:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \varphi \cdot \delta E dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\varphi \cdot \delta E) dV + \frac{1}{4\pi} \int \varphi \text{div } \delta E dV. \end{aligned}$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, исчезает. Во втором в силу уравнения (1,8) имеем $\text{div } \delta E = 4\pi \delta \bar{\rho}$, так что

$$\delta\mathcal{U} = \int \varphi \delta \bar{\rho} dV.$$

Но этот интеграл обращается в нуль, если φ соответствует истинному электростатическому полю: в этом случае внутри каждого проводника $\varphi = \text{const}$, а интегралы $\int \delta \bar{\rho} dV$ по их объемам равны нулю, поскольку полные заряды проводников остаются неизменными.

Таким образом, энергия истинного электростатического поля минимальна¹⁾ по сравнению с энергией полей, которые были бы созданы всяким другим распределением зарядов по объему проводников (теорема Томсона).

Из этой теоремы вытекает, в частности, такое следствие: введение незаряженного проводника в поле заданных зарядов (заряженных проводников) уменьшает полную энергию поля. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить энергию истинного поля, которое установится после введения проводника, с энергией фиктивного поля, соответствующего отсутствию индуцированных зарядов на введенном проводнике. Первая, будучи минимальной возможной, меньше второй, которая в то же время совпадает с энергией первоначального поля (так как при отсутствии индуцированных зарядов поле «проникло» бы внутрь проводника, не изменившись). Этот результат можно сформулировать и другим образом: незаряженный проводник, расположенный вдали от системы заданных зарядов, притягивается к ним.

Наконец, можно показать, что проводник (заряженный или незаряженный), внесенный в электростатическое поле, вообще не может находиться в устойчивом равновесии под влиянием одних только электрических сил. Это утверждение обобщает указанную в конце предыдущего параграфа аналогичную теорему для точечного заряда и может быть получено путем совместного применения последней

¹⁾ Мы не будем приводить здесь простых рассуждений, показывающих, что речь идет именно о минимуме, а не об экстремуме вообще.

и теоремы Томсона; мы не станем приводить здесь соответствующих рассуждений.

Формулы (2,9) удобны для вычисления энергии системы проводников, находящихся на конечных расстояниях друг от друга. Особого рассмотрения, однако, требует энергия незаряженного проводника, находящегося в однородном внешнем поле \mathfrak{E} , которое можно представлять себе созданным зарядами, находящимися на бесконечности. Согласно (2,2) эта энергия равна $\mathcal{U} = 1/2 e\varphi$, где e — удаленный заряд, создающий поле, а φ — потенциал поля, создаваемого рассматриваемым проводником в точке нахождения заряда e (из \mathcal{U} исключена энергия заряда e в его собственном поле, как не имеющая отношения к интересующей нас энергии проводника). Заряд проводника равен нулю, но под влиянием внешнего поля проводник приобретает дипольный электрический момент, который мы обозначим через \mathcal{P} . Потенциал поля электрического диполя на большом расстоянии r от него есть, как известно, $\varphi = \mathcal{P}r/r^3$. Поэтому

$$\mathcal{U} = \frac{e\mathcal{P}r}{2r^3}.$$

Но er/r^3 является в то же время напряженностью \mathfrak{E} поля, создаваемого зарядом e . Таким образом,

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\mathfrak{E}. \quad (2,12)$$

В силу линейности всех уравнений поля очевидно, что компоненты дипольного момента \mathcal{P} являются линейными функциями компонент напряженности \mathfrak{E} . Коэффициенты пропорциональности между \mathcal{P} и \mathfrak{E}_0 имеют размерность куба длины и поэтому пропорциональны объему проводника;

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \quad (2,13)$$

где коэффициенты α_{ik} зависят только от формы тела. Совокупность величин $V\alpha_{ik}$ составляет тензор, который можно назвать тензором поляризуемости тела. Этот тензор симметричен: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (доказательство этого утверждения дано в § 11). Соответственно, энергия (2,12) представится в виде:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \quad (2,14)$$

Задачи

1. Выразить взаимную емкость C системы из двух проводников (с зарядами $\pm e$) через коэффициенты C_{ab} .

Решение. Взаимная емкость двух проводников определяется как коэффициент в соотношении $e = C(\varphi_2 - \varphi_1)$, а энергия системы выражается

через C посредством $\mathcal{U} = e^2/2C$. Сравнивая с (2,9), получим:

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}.$$

2. Точечный заряд e расположен в точке O вблизи системы заземленных проводников и индуцирует на них заряды e_a . Если бы заряд e отсутствовал, а один из проводников (a -й) имел потенциал φ'_a (остальные по-прежнему заземлены), то потенциал поля в точке O был бы φ'_0 . Выразить заряды e_a через φ'_a и φ'_0 .

Решение. Если заряды e_a на проводниках сообщают им потенциалы φ_a , а заряды e'_a — потенциалы φ'_a , то из (2,3) следует, что

$$\sum_a \varphi_a e'_a = \sum_{a,b} \varphi_a C_{ab} \varphi'_b = \sum_a \varphi'_a e_a.$$

Применим это соотношение к двум состояниям системы, составленной из всех проводников и точечного заряда e (рассматривая последний как предельный случай проводника малого размера). В одном состоянии имеется заряд e , проводники имеют заряды e_a и потенциалы $\varphi_a = 0$. В другом состоянии заряд $e = 0$, а один из проводников имеет потенциал $\varphi'_a \neq 0$. Тогда получим $e\varphi'_0 + e_a \varphi'_a = 0$, откуда

$$e_a = -e \frac{\varphi'_0}{\varphi'_a}.$$

Так, если заряд e находится на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса a ($r > a$), то $\varphi'_0 = \varphi'_a a/r$ и заряд, индуцированный на шаре,

$$e_a = -\frac{ea}{r}.$$

В качестве другого примера рассмотрим заряд e , находящийся между двумя заземленными концентрическими сферами радиусов a и b (на расстоянии r от центра, $a < r < b$). Если наружная сфера заземлена, а внутренняя заряжена до потенциала φ'_a , то потенциал на расстоянии r равен

$$\varphi'_0 = \varphi'_a \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Поэтому заряд, индуцированный на внутренней сфере зарядом e , равен

$$e_a = -e \frac{a(b-r)}{r(b-a)}.$$

Аналогично, заряд, индуцированный на внешней сфере,

$$e_b = -e \frac{b(r-a)}{r(b-a)}.$$

3. Два проводника с емкостями C_1 и C_2 помещены на расстоянии r друг от друга, большом по сравнению с их собственными размерами. Определить коэффициенты C_{ab} .

Решение. Если проводник 1 несет заряд e_1 , а проводник 2 не заряжен, то в первом приближении $\varphi_1 = e_1/C_1$, $\varphi_2 = e_1/r$; при этом мы пренебрегаем изменением поля вдоль проводника 2 и его поляризацией. Таким обра-

зом, $C_{11}^{-1} = 1/C_1$, $C_{12}^{-1} = 1/r$ и, аналогично, $C_{22}^{-1} = 1/C_2$. Отсюда находим для коэффициентов C_{ab} 1):

$$C_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right), \quad C_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad C_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right).$$

4. Определить емкость C кольца из тонкого провода кругового сечения (радиус кольца b , радиус сечения провода a ; $b \gg a$).

Решение. Ввиду тонкости кольца поле вблизи его поверхности совпадает с полем, которое создавалось бы тем же зарядом, распределенным по осевой линии кольца (это было бы точным для прямого цилиндра). Поэтому потенциал самого кольца

$$\varphi_a = \frac{e}{2\pi b} \oint \frac{dl}{r},$$

где r — расстояние от данной точки поверхности кольца до элемента dl его осевой линии, по которой производится интегрирование. Разобьем интеграл на две части по областям $r < \Delta$ и $r > \Delta$, где Δ — некоторое расстояние, такое, что $a \ll \Delta \ll b$. Тогда при $r < \Delta$ можно считать участок кольца прямым, и потому

$$\int_{\Delta > r} \frac{dl}{r} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \cong 2 \ln \frac{2\Delta}{a}.$$

В области же $r > \Delta$ можно пренебречь толщиной провода, т. е. считать r просто расстоянием между двумя точками осевой линии кольца. Тогда

$$\int_{r > \Delta} \frac{dl}{r} = 2 \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{b d\varphi}{2b \sin(\varphi/2)} = -2 \ln \lg \frac{\varphi_0}{4},$$

где φ — центральный угол, на который опирается хорда r , а нижний предел интегрирования определяется из $2b \sin(\varphi_0/2) = \Delta$, откуда $\varphi_0 \cong \Delta/b$. При сложении обеих частей интеграла величина Δ выпадает, и окончательно получаем для емкости кольца $C = e/\varphi_a$ следующее выражение:

$$C = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

§ 3. Методы решения электростатических задач

Общие методы решения уравнения Лапласа при заданных граничных условиях на тех или иных поверхностях изучаются в соответствующем разделе математической физики, и в нашу цель не входит полное их изложение. Мы ограничимся здесь лишь указанием

1) Следующие члены разложения имеют в общем случае порядок (по $1/r$) на 1 более высокий, чем выписанные. Если, однако, отсчитывать r как расстояние между «центрами зарядов» обоих тел (для сфер — между их геометрическими центрами), то порядок следующих членов будет выше на 2.

некоторых более простых приемов и решением ряда типичных задач, имеющих самостоятельный интерес¹⁾.

1. Метод изображений. Определение поля, создаваемого точечным зарядом e , расположенным вне проводящей среды, заполняющей полупространство, является простейшим примером применения так называемого метода изображений. Идея этого метода состоит в подборе таких дополнительных фиктивных точечных зарядов, которые вместе с данными зарядами создавали бы поле, для которого поверхность заданного проводника совпадала бы с одной из эквипотенциальных поверхностей поля. В данном случае это достигается введением фиктивного заряда $e' = -e$, расположенного в точке, представляющей собой зеркальное отражение точки e в граничной плоскости проводящей среды. Потенциал поля заряда e и его «изображения» e' равен

$$\varphi = e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (3,1)$$

где r и r' — расстояния точки наблюдения от зарядов e и e' . На граничной плоскости $r = r'$ и потенциал имеет постоянное значение $\varphi = 0$, так что необходимое граничное условие действительно выполняется и (3,1) дает решение поставленной задачи. Отметим, что заряд e притягивается к проводнику с силой $e^2/(2a)^2$ (сила изображения), а энергия взаимодействия равна $-e^2/4a$.

Распределение на граничной плоскости поверхностных зарядов, индуцированных точечным зарядом e , дается формулой

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=r'} = - \frac{e}{2\pi} \frac{a}{r^3}, \quad (3,2)$$

где a — расстояние от заряда до плоскости. Легко убедиться в том, что полный заряд на этой плоскости равен

$$\int \sigma df = -e,$$

как и должно было быть.

Общий заряд, индуцированный посторонними зарядами на первоначально не заряженном изолированном проводнике, разумеется, остается равным нулю. Поэтому, если в данном случае проводящая среда (в действительности — проводник больших размеров) изолирована, то надо представлять себе, что одновременно с зарядом $-e$ индуцируется заряд $+e$, который, однако, будучи распределен по поверхности большого тела, имеет исчезающую плотность.

¹⁾ Решение значительного числа более сложных задач можно найти в книгах: Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954; Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948.

Далее, рассмотрим более сложную задачу о поле, создаваемом точечным зарядом e , находящимся вблизи шарового проводника. Для решения этой задачи воспользуемся следующим результатом, который легко проверить непосредственными вычислениями. Потенциал поля, создаваемого двумя точечными зарядами e и $-e'$,

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'}$$

обращается в нуль на сферической поверхности радиуса R , центр которой лежит на продолжении прямой, соединяющей e и e' , на расстоянии l и l' от этих точек, причем l, l', R удовлетворяют равенствам

$$\frac{l}{l'} = \left(\frac{e}{e'}\right)^2, \quad R^2 = ll'.$$

Предположим сначала, что шаровой проводник поддерживается при постоянном потенциале $\varphi = 0$ (шар заземлен). Тогда поле, создаваемое вне шара точечным зарядом e , находящимся на расстоянии l от центра шара (в точке A на рис. 1), будет совпадать с полем, создаваемым системой двух зарядов — данным зарядом e и фиктивным зарядом $-e'$, помещенным внутри шара (точка A') на расстоянии l' от его центра, причем

$$l' = \frac{R^2}{l}, \quad e' = e \frac{R}{l}. \quad (3,3)$$

Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'} \quad (3,4)$$

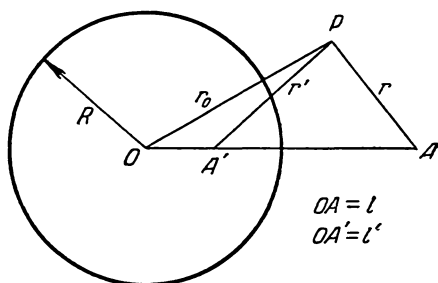


Рис. 1.

(r, r' указаны на рис. 1). На поверхности шара индуцируется при этом отличный от нуля полный заряд, равный $-e'$. Энергия взаимодействия заряда с шаром равна

$$\mathcal{U} = -\frac{ee'}{2(l-l')} = -\frac{e^2R}{2(l^2-R^2)}, \quad (3,5)$$

и заряд притягивается к шару с силой

$$F = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} = -\frac{e^2lR}{(l^2-R^2)^2}.$$

Если же проводящая сфера поддерживается при равном нулю полном заряде (изолированный незаряженный шар), то надо ввести еще один фиктивный заряд таким образом, чтобы полный индуцированный на поверхности шара заряд оказался равным нулю, причем не должно нарушиться постоянство потенциала на этой поверхности.

Это достигается помещением заряда $+e'$ в центр шара. Потенциал искомого поля определится тогда формулой

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \quad (3,6)$$

Энергия взаимодействия в этом случае будет

$$\mathcal{U} = \frac{ee'}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'} \right) = - \frac{e^2 R^3}{2l^2 (l^2 - l'^2)}. \quad (3,7)$$

Наконец, если заряд e находится в сферической полости в проводящей среде (в точке A' , рис. 1), то поле внутри полости совпадает с полем, которое создавалось бы зарядом e и его «изображением» в точке A вне сферы (вне зависимости от того, заземлен проводник или изолирован):

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \quad (3,8)$$

2. Метод инверсии. Существует простой метод, который в ряде случаев позволяет по известному решению одной электростатической задачи находить решение другой задачи. Основанием этого метода является инвариантность уравнения Лапласа по отношению к определенному преобразованию переменных.

В сферических координатах уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \varphi = 0,$$

где посредством Δ_{Ω} обозначена угловая часть оператора Лапласа. Легко убедиться в том, что это уравнение сохраняет свою форму, если вместо переменной r ввести новую переменную r' согласно

$$r = \frac{R^2}{r'} \quad (3,9)$$

(так называемое преобразование инверсии) и одновременно заменить неизвестную функцию φ согласно

$$\varphi = \frac{r'}{R} \varphi'. \quad (3,10)$$

Здесь R — некоторая постоянная с размерностью длины (радиус инверсии). Таким образом, если функция $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция

$$\varphi'(r') = \frac{R}{r'} \varphi \left(\frac{R^2}{r'} r' \right) \quad (3,11)$$

тоже есть решение этого уравнения.

Предположим, что нам известно решение задачи об электростатическом поле, создаваемом некоторой системой проводников, которые все находятся при одинаковом потенциале φ_0 , и системой

точечных зарядов. Потенциал $\varphi(r)$ обычно определяют так, чтобы он обращался в нуль на бесконечности. Здесь, однако, мы определим $\varphi(r)$ так, чтобы на бесконечности эта функция стремилась к $-\varphi_0$; тогда на проводниках $\varphi = 0$.

Выясним теперь, какая электростатическая задача будет решаться преобразованной функцией (3,11). Прежде всего, меняются фигуры всех протяженных проводников и их взаимное расположение. Граничное условие постоянства потенциала на их поверхности автоматически выполняется, так как при $\varphi = 0$ будет и $\varphi' = 0$. Далее, меняются расположение и величины всех точечных зарядов. Заряд, находящийся в точке r_0 , переходит в точку $r'_0 = (R^2/r_0^2)r_0$ и приобретает величину e' , которую можно определить следующим образом. При $r \rightarrow r_0$ потенциал $\varphi(r)$ обращается в бесконечность по закону $\varphi = e/|\delta r|$, где $\delta r = r - r_0$. С другой стороны, дифференцируя соотношение $r = (R^2/r'^2)r'$, найдем, что абсолютные значения малых разностей δr и $\delta r' = r' - r'_0$ связаны друг с другом посредством

$$(\delta r)^2 = \frac{R^4}{r_0^4} (\delta r')^2.$$

Поэтому при $r' \rightarrow r'_0$ функция φ' стремится к бесконечности по закону

$$\varphi' = \frac{R}{r'_0} \frac{e}{|\delta r|} = \frac{e r'_0}{R |\delta r'|},$$

соответствующему заряду

$$e' = \frac{e r'_0}{R} = \frac{e R}{r_0}. \quad (3,12)$$

Наконец, рассмотрим поведение функции $\varphi'(r')$ вблизи начала координат. Точке $r' = 0$ соответствует $r \rightarrow \infty$. Но при $r \rightarrow \infty$ функция $\varphi(r)$ стремится к $-\varphi_0$. Поэтому при $r' \rightarrow 0$ функция φ' обращается в бесконечность по закону

$$\varphi' = -\frac{R\varphi_0}{r'}.$$

Это значит, что в точке $r' = 0$ находится заряд $e_0 = -R\varphi_0$.

Укажем здесь, для справок, как преобразуются при инверсии некоторые геометрические фигуры. Сферическая поверхность радиуса a с центром в точке r_0 дается уравнением

$$(r - r_0)^2 = a^2.$$

Произведя инверсию, получим уравнение

$$\left(\frac{R^2}{r'^2} r' - r_0\right)^2 = a^2,$$

которое после умножения на r'^2 и перегруппировки членов может быть приведено к виду

$$(r' - r'_0)^2 = a'^2,$$

где

$$r'_0 = -\frac{R^2 r_0}{a^2 - r_0^2}, \quad a' = \frac{aR^2}{|a^2 - r_0^2|}. \quad (3,13)$$

Таким образом, мы снова получаем сферу другого радиуса a' и с центром в точке r'_0 . Если первоначальная сфера проходила через начало координат ($a = r_0$), то $a' = \infty$; в этом случае сфера преобразуется в плоскость, перпендикулярную к направлению r_0 и проходящую на расстоянии

$$r'_0 - a' = \frac{R^2}{a + r_0} = \frac{R'}{2a}$$

от начала координат.

3. Метод конформного отображения. Поле, зависящее только от двух декартовых координат (x, y), называют плоским. Мощным средством для решения плоских задач электростатики является теория функций комплексного переменного. Основания для применения этой теории заключаются в следующем.

Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Первое из них позволяет ввести потенциал поля согласно $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Второе же уравнение показывает, что наряду с φ можно ввести также и «векторный потенциал» поля \mathbf{A} согласно $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$. В плоском случае вектор \mathbf{E} лежит в плоскости xu и зависит только от этих двух координат. Соответственно, вектор \mathbf{A} можно выбрать так, чтобы он был направлен везде перпендикулярно к плоскости xu . Тогда компоненты напряженности выражаются в виде производных от φ или \mathbf{A} согласно

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3,14)$$

Но такие соотношения между производными функций φ и \mathbf{A} с чисто математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши — Римана, выражающими тот факт, что комплексное выражение

$$\omega = \varphi - iA \quad (3,15)$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $\omega(z)$ имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления, в котором она берется. Так, дифференцируя в направлении оси x , найдем, что

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial A}{\partial x},$$

или

$$\frac{dw}{dz} = -E_x + iE_y. \quad (3,16)$$

Функция w называется комплексным потенциалом.

Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y},$$

Выражая E_x и E_y в виде производных от A , перепишем это уравнение в виде

$$dx \frac{\partial A}{\partial x} + dy \frac{\partial A}{\partial y} = dA = 0,$$

откуда $A(x, y) = \text{const}$. Таким образом, линии постоянных значений мнимой части функции $w(z)$ представляют собой силовые линии поля. Линии же постоянных значений ее вещественной части являются эквипотенциальными линиями. Взаимная ортогональность этих двух семейств линий обеспечивается уже исходными соотношениями (3,14), согласно которым

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Как вещественная, так и мнимая часть аналитической функции $w(z)$ в равной степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому с тем же успехом можно принять $\text{Im } w$ в качестве потенциала поля. Соответственно силовые линии будут тогда даваться уравнениями $\text{Re } w = \text{const}$. Вместо (3,15) будем при этом иметь $w = A + i\varphi$.

Поток напряженности электрического поля через какой-либо отрезок эквипотенциальной линии дается интегралом

$$\int E_n dl = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl,$$

где dl есть элемент эквипотенциальной линии, а n — направление нормали к ней. Согласно соотношениям (3,14) имеем $\partial \varphi / \partial n = -\partial A / \partial l$, причем выбор знака предполагает, что если смотреть в направлении n , то положительное направление l — влево. Поэтому

$$\int E_n dl = \int \frac{\partial A}{\partial l} dl = A_2 - A_1,$$

где A_2 и A_1 — значения A на обоих концах отрезка. [В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, где e — полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z). Поэтому

$$e = \frac{1}{4\pi} \Delta A, \quad (3,17)$$

где ΔA — изменение A при обходе замкнутой эквипотенциальной линии в направлении против часовой стрелки.

Простейшим примером комплексного потенциала является потенциал поля заряженной прямой нити (совпадающей с осью z). Напряженность этого поля дается формулами

$$E_r = \frac{2e}{r}, \quad E_\theta = 0,$$

где r, θ — полярные координаты в плоскости xu , а e — заряд единицы длины нити. Соответствующий комплексный потенциал

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta. \quad (3,18)$$

Если же заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку x_0, y_0 , то комплексный потенциал

$$w = -2e \ln(z - z_0), \quad (3,19)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

С математической точки зрения, функциональное соотношение $w = w(z)$ осуществляет конформное отображение плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w . Пусть C есть контур сечения проводника в плоскости xu , а φ_0 — потенциал этого проводника. Из всего сказанного выше ясно, что задача об определении поля, создаваемого этим проводником, сводится к нахождению такой функции $w(z)$, которая отображала бы контур C в плоскости z на линию $w = \varphi_0$, параллельную оси ординат в плоскости w ; тогда вещественная часть $\text{Re } w$ даст потенциал рассматриваемого поля (если же функция $w(z)$ отображает контур C на линию, параллельную оси абсцисс, то потенциал дается функцией $\text{Im } w$).

4. Задача о клине. Приведем здесь для справок формулы, определяющие поле, создаваемое точечным зарядом e , расположенным в пространстве между двумя пересекающимися проводящими

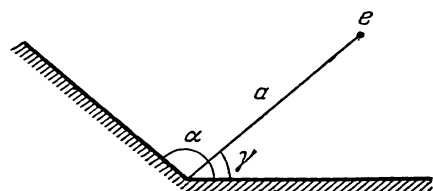


Рис. 2.

полу плоскостями. Пусть ось z цилиндрической системы координат r, θ, z совпадает с линией края угла, причем угол θ отсчитывается от одной из его сторон; заряд e пусть находится в точке $a, \gamma, 0$ (рис. 2). Угол раствора α между плоскостями может быть как $< \pi$, так и $> \pi$; в последнем случае мы имеем дело с зарядом, расположенным вне проводящего клина.

Потенциал поля дается формулой ¹⁾

$$\varphi = \frac{e}{\alpha \sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\alpha}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\alpha} - \cos \frac{\pi(\theta - \gamma)}{\alpha}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{\alpha}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{\alpha} - \cos \frac{\pi(\theta + \gamma)}{\alpha}} \right\} \times \\ \times \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \eta}}, \quad (3,20) \\ \operatorname{ch} \eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0$$

(на поверхности проводника, т. е. при $\theta = 0$, α , потенциал $\varphi = 0$).

В частности, при $\alpha = 2\pi$ получается проводящая полуплоскость в поле точечного заряда. В этом случае интеграл (3,20) вычисляется в конечном виде и дает

$$\varphi = \frac{e}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} \arccos \left(-\frac{\cos \frac{\theta - \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \right) - \frac{1}{R'} \arccos \left(-\frac{\cos \frac{\theta + \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \right) \right\}, \quad (3,21) \\ R = \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma - \theta)}, \\ R' = \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma + \theta)}.$$

В пределе, когда точка наблюдения поля стремится к точке нахождения заряда e , потенциал (3,21) принимает вид

$$\varphi = \frac{e}{R} + \varphi', \quad \varphi' = -\frac{e}{2\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right]. \quad (3,22)$$

Первый член есть чисто кулоновский потенциал, обращющийся в бесконечность при $R \rightarrow 0$, а φ' — изменение потенциала в точке нахождения заряда под влиянием проводника. Энергия взаимодействия заряда с проводящей полуплоскостью есть

$$\mathcal{U} = \frac{e\varphi'}{2} = -\frac{e^2}{4\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right]. \quad (3,23)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить поле вокруг проводящего незаряженного шара (радиуса R), находящегося во внешнем однородном электрическом поле \mathcal{E} .

Решение. Пишем потенциал в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_0 = -\mathcal{E}r$ — потенциал внешнего поля, а φ_1 — искомое изменение потенциала, вызываемое шаром. Ввиду симметрии шара функция φ_1 может зависеть лишь от одного постоянного вектора \mathcal{E} . Единственное такое решение уравнения Лапласа, обращющееся в нуль на бесконечности, есть

$$\varphi_1 = -\operatorname{const} \cdot \mathcal{E} \nabla \frac{1}{r} = \operatorname{const} \cdot \frac{\mathcal{E}r}{r^3}$$

¹⁾ Эта формула была впервые дана Г. Макдональдом (1895). Ее вывод можно найти в книге Г. Гринберга, указанной на стр. 22.

(начало координат выбираем в центре шара). На поверхности шара φ должно быть постоянным; отсюда находим $\text{const} = R^3$, так что

$$\varphi = -\mathcal{E}r \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = -\mathcal{E}r \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

(θ — угол между \mathcal{E} и r). Распределение зарядов по поверхности шара дается формулой:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3\mathcal{E}}{4\pi} \cos \theta;$$

полный заряд $e = 0$.

Дипольный момент шара проще всего найти путем сравнения φ_1 с потенциалом ($\mathcal{P}r/r^3$) поля электрического диполя; найдем

$$\mathcal{P} = R^3 \mathcal{E}.$$

2. То же для бесконечного цилиндра в поперечном однородном поле.

Решение. Вводим полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Решение двумерного уравнения Лапласа, зависящее только от одного постоянного вектора, есть

$$\varphi_1 = \text{const} \cdot \mathcal{E} \nabla \ln r = \text{const} \cdot \frac{\mathcal{E}r}{r^2}.$$

Складывая с $\varphi_0 = -r\mathcal{E}$ и положив $\text{const} = R^2$, получим

$$\varphi = -\mathcal{E}r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = \frac{\mathcal{E}}{2\pi} \cos \theta.$$

Дипольный момент \mathcal{P} единицы длины цилиндра можно найти путем сравнения φ с потенциалом двумерного дипольного поля. Последний имеет вид

$$2\mathcal{P} \nabla \ln r = \frac{2\mathcal{P}r}{r^2},$$

так что $\mathcal{P} = \mathcal{E}R^2/2$.

3. Определить поле вблизи клиновидного края на проводнике.

Решение. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости, перпендикулярной к краю клина, и с началом в вершине образуемого им угла θ_0 . Угол θ пусть отсчитывается от одной из сторон клина; области вне проводника соответствуют значения $0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$. Вблизи края угла потенциал можно разложить по степеням r , причем нас интересует первый (после постоянного) член этого разложения, содержащий наиболее низкую степень r . Решения двумерного уравнения Лапласа, пропорциональные r^n , суть $r^n \cos n\theta$ и $r^n \sin n\theta$. Решение с наименьшим n , удовлетворяющее условию $\varphi = \text{const}$ при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi - \theta_0$ (на поверхности проводника), есть

$$\varphi = \text{const} \cdot r^n \sin n\theta, \quad n = \frac{\pi}{2\pi - \theta_0}$$

(значение const может быть определено только из решения задачи для всего поля в целом). Напряженность поля соответственно зависит от r как r^{n-1} . При $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), следовательно, напряженность обращается вблизи края угла в бесконечность. В частности, для очень тонкого клина ($\theta_0 \ll 1$, $n \cong 1/2$) E растет при уменьшении r , как $r^{-1/2}$. Вблизи же края клиновидной вогнутости на поверхности проводника ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$) поле стремится к нулю.

4. Определить поле вблизи конца тонкого конического острия на поверхности проводника.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в вершине и с полярной осью вдоль оси конического острия. Угол раствора конуса пусть будет $2\theta_0 \ll 1$, так что области вне проводника соответствуют значения полярного угла $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$. Ищем решение (для переменной части потенциала), симметричное относительно оси конуса, в виде

$$\varphi = r^n f(\theta) \quad (1)$$

с наименьшим возможным n . Уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

после подстановки этого выражения дает

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) + n(n+1)f = 0. \quad (2)$$

Условие постоянства потенциала на поверхности острия означает, что должно быть $f(\theta_0) = 0$.

При малом θ_0 ищем решение, сделав предположение, что $n \ll 1$, а $f(\theta)$ имеет вид $f = \text{const} \cdot [1 + \psi(\theta)]$, где $\psi \ll 1$ (при $\theta_0 \rightarrow 0$, т. е. для бесконечно тонкого острия, естественно ожидать, что φ стремится к постоянной почти во всей области вокруг острия). Для ψ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) = -n. \quad (3)$$

Решение, в котором ψ не имеет особенностей в области вне острия (в частности, при $\theta = \pi$), есть

$$\psi(\theta) = 2n \ln \sin \frac{\theta}{2}.$$

При $\theta \sim \theta_0 \ll 1$ функция ψ перестает быть малой. Тем не менее, полученное выражение остается применимым, так как в этой области в силу малости θ можно вообще пренебречь вторым членом уравнения (2). Для определения постоянной n в первом приближении надо потребовать обращения в нуль найденной выше функции $f = 1 + \psi$ при $\theta = \theta_0$. Таким образом найдем ¹⁾

$$n = -\frac{1}{2 \ln \theta_0}.$$

Напряженность поля неограниченно возрастает при приближении к концу острия как $r^{-(1-n)}$, т. е. в основном как $1/r$.

5. То же для тонкого конического углубления на поверхности проводника.

Решение. Области вне проводника теперь соответствуют значения $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Как и в предыдущей задаче, ищем φ в виде (1), но теперь будет

¹⁾ Более точная формула,

$$n = \frac{1}{2 \ln(2/\theta_0)},$$

содержащая коэффициент в большом логарифме, в действительности не может быть получена указанным простым методом. Более точное вычисление, однако, по случайным причинам приводит именно к этой формуле.

$n \gg 1$. Поскольку во всей области поля теперь $\theta \ll 1$, то уравнение (2) можно написать в виде

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{df}{d\theta} \right) + n^2 f = 0.$$

Это — уравнение Бесселя, и его решение, не имеющее особенностей в области поля, есть $J_0(n\theta)$. Значение n определяется как наименьший корень уравнения $J_0(n\theta_0) = 0$, откуда

$$n = \frac{2,4}{\theta_0}.$$

6. Определить энергию притяжения электрического диполя к плоской поверхности проводника.

Решение. Выбираем ось x перпендикулярной к поверхности проводника и проходящей через точку нахождения диполя; вектор дипольного момента \mathcal{P} пусть лежит в плоскости xy . «Изображение» диполя находится в точке — x и имеет дипольный момент $\mathcal{P}'_x = \mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}'_y = -\mathcal{P}_y$. Искомая энергия притяжения вычисляется как энергия взаимодействия диполя с его «изображением» и равна

$$U = -\frac{2\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2}{8x^3}.$$

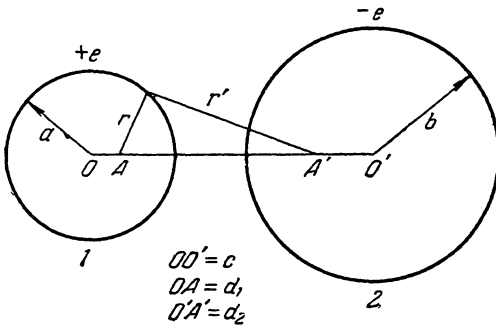


Рис. 3.

вне цилиндров) двумя заряженными нитями, проходящими через соответствующим образом подобранные точки A и A' (рис. 3). Нити несут (на единице длины) заряды $\pm e'$, равные зарядам цилиндров, а точки A и A' должны быть расположены на линии OO' так, чтобы поверхности цилиндров совпадали с эквипотенциальными поверхностями. Для этого расстояния OA и $O'A'$ должны удовлетворять соотношениям

$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

т. е.

$$d_1(c - d_2) = a^2, \quad d_2(c - d_1) = b^2.$$

Тогда на каждой из окружностей отношение r'/r расстояний от точек A и A' находится в постоянном отношении: на окружности 1

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{OA'} = \frac{a}{c - d_2} = \frac{d_1}{a},$$

1) Аналогичная задача для двух сфер не решается в конечном виде. Разница связана с тем, что в поле двух заряженных (равными и противоположными зарядами) параллельных нитей все эквипотенциальные поверхности являются круговыми цилиндрами, а в поле двух точечных зарядов $\pm e$ эквипотенциальные поверхности не являются сферами.

а на окружности $2 \quad r'/r = d_2/b$. Соответственно, потенциалы цилиндров:

$$\varphi_1 = -2e \ln \frac{r}{r'} = -2e \ln \frac{d_1}{a}, \quad \varphi_2 = 2e \ln \frac{d_2}{b}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2e \ln \frac{d_1 d_2}{ab}.$$

Отсюда находим для искомой взаимной емкости $C = e/(\varphi_2 - \varphi_1)$:

$$\frac{1}{C} = 2 \ln \frac{d_1 d_2}{ab} = 2 \operatorname{Arch} \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

В частности, для цилиндра радиуса a , находящегося на расстоянии h ($h > a$) от проводящей плоскости, надо положить $c = b + h$ и перейти к пределу $b \rightarrow \infty$; это дает

$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{h}{a}.$$

Если два полых цилиндра находятся один внутри другого ($c < b - a$), то поле снаружи отсутствует, а поле в пространстве между цилиндрами совпадает с полем, которое создавалось бы двумя нитями с зарядами $+e$ и $-e$, проходящими через точки A и A' (рис. 4). Тем же способом получим результат:

$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

8. Граница проводника представляет собой неограниченную плоскость с выступом в виде полшария. Определить распределение зарядов на поверхности.

Решение. В найденном в задаче 1 поле с потенциалом вида

$$\varphi = \text{const} \cdot z \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

плоскость $z = 0$ с выступом $r = R$ является эквипотенциальной поверхностью (на которой $\varphi = 0$). Поэтому она может являться и поверхностью проводника, а написанная формула определяет поле вне проводника. Распределение зарядов на плоской части поверхности дается формулой

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

(мы положили $\text{const} = -4\pi\sigma_0$, где σ_0 — плотность зарядов вдали от выступа). На поверхности же выступа

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 3\sigma_0 \frac{z}{R}.$$

9. Определить дипольный момент тонкого проводящего цилиндрического стержня (длины $2l$, радиуса a ; $a \ll l$) в электрическом поле \mathcal{E} , параллельном его оси.

Решение. Пусть $\tau(z)$ — индуцированный на поверхности стержня заряд, отнесенный к единице длины; z — координата вдоль оси цилиндра,

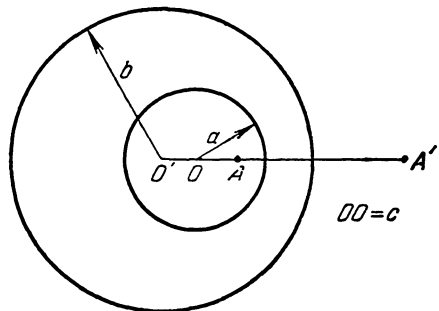


Рис. 4.

которую будем отсчитывать от его середины. Условие постоянства потенциала на поверхности проводника гласит:

$$-\mathcal{E}z + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\tau(z') dz' d\varphi}{R} = 0,$$

$$R = \sqrt{(z' - z)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

(φ — угол между плоскостями, проходящими через ось цилиндра и через точки на его поверхности, расстояние между которыми равно R). Разобьем интеграл на две части, написав в нем тождественно $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - \tau(z)]$. Учитывая, что $l \gg a$, и рассматривая точки, не слишком близкие к концам стержня, имеем

$$\frac{\tau(z)}{2\pi} \int \int \frac{dz' d\varphi}{R} \cong \frac{\tau(z)}{2\pi} \int_0^\pi \ln \frac{l^2 - z^2}{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2}$$

(использовано известное значение $\int_0^\pi \ln \sin \varphi d\varphi = -\pi \ln 2$). В интеграле, содержащем разность $\tau(z') - \tau(z)$, можно пренебречь членом с a^2 в R , так как это не повлечет за собой расходимости интеграла. Таким образом,

$$\mathcal{E}z = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2} + \int_{-l}^l \frac{\tau(z') - \tau(z)}{|z' - z|} dz'.$$

Зависимость τ от z в основном сводится к пропорциональности z ; в этом приближении стоящий здесь интеграл дает $-2\tau(z)$, и в результате получаем

$$\tau(z) = \frac{\mathcal{E}z}{\ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2} - 2}.$$

Это выражение непригодно вблизи концов стержня, но для вычисления искомого дипольного момента эта область значений z несущественна. С принятой нами здесь точностью имеем:

$$\mathcal{P} = \int_{-l}^l \tau(z) z dz = \frac{\mathcal{E}}{L} \int_0^l \left\{ z^2 - \frac{z^2}{2L} \ln \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \right\} dz = \frac{\mathcal{E}l^3}{3L} \left\{ 1 + \frac{1}{L} \left(\frac{4}{3} - \ln 2 \right) \right\}$$

(где $L = \ln(2l/a) - 1$ — большое число), или (с той же точностью)

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}l^3}{3 \left(\ln \frac{4l}{a} - \frac{7}{3} \right)}.$$

10. Определить емкость полого сферического проводящего сегмента.

Решение. Выберем начало координат O в какой-либо точке края сегмента (рис. 5) и произведем преобразование инверсии $r = l^2/r'$ (l — длина хорды в главном сечении сегмента). При этом сегмент переходит в полуплоскость (пунктирная прямая на рис. 5), перпендикулярную к радиусу AO сегмента и проходящую через точку B его края; угол $\gamma = \pi - \theta$, где 2θ — угол раствора сегмента.

Если потенциал сегмента, несущего на себе заряд e , принять за нуль, то при $r \rightarrow \infty$ потенциал поля стремится к виду

$$\varphi \cong -\varphi_0 + \frac{e}{r}.$$

Соответственно, в преобразованной задаче при $r' \rightarrow 0$ потенциал стремится к виду

$$\varphi' = \frac{l\varphi}{r'} \cong -\frac{l\varphi_0}{r'} + \frac{e}{l}$$

(первый член соответствует заряду $e' = -l\varphi_0$ в начале координат).

С другой стороны, согласно формуле (3,23) имеем

$$\varphi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta}\right)$$

(потенциал вблизи заряда e' , находящегося на расстоянии l от края проводящей полуплоскости с потенциалом нуль). Сравнивая оба выражения, получим для искомой емкости $C = e/\varphi_0$ следующую формулу:

$$C = \frac{l}{2\pi} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta}\right) = \frac{R}{\pi} (\sin \theta + \theta)$$

(R — радиус сегмента).

11. Определить связанную с краевыми эффектами поправку к значению $C = S/4\pi d$ для емкости плоского конденсатора (S — площадь поверхности обкладки, d — расстояние между обкладками; $d \ll \sqrt{S}$).

Решение. Наличие у обкладок свободных краев нарушает равномерность распределения зарядов на них.

Для определения искомой поправки в первом приближении рассматриваем точки обкладок, удаленные от края на расстояния x такие, что $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

Рассматривая, например, верхнюю обкладку (с потенциалом $\varphi = -\varphi_0/2$, рис. 6, а) и пренебрегая ее расстоянием $d/2$ до средней плоскости (эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$), мы будем иметь задачу о поле вблизи границы двух частей плоскости, имеющих различные потенциалы. Эта задача решается элементарно¹⁾, и в результате для избыточной (по сравнению с σ вдали от края) плотности зарядов получается выражение

$$\Delta\sigma = \frac{E_n}{4\pi} = \frac{\varphi_0}{8\pi^2 x^2},$$

так что полный избыточный заряд

$$L \int \Delta\sigma \cdot dx = \frac{\varphi_0 L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}$$

(L — длина периметра обкладки); при вычислении логарифмически расходящегося интеграла в качестве верхнего и нижнего пределов подставляем границы области $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

1) См. § 22; в формуле (22,2) для потенциала надо положить в данном случае $\varphi_{ab} = \varphi_0/2$, $\alpha = \pi$.

Отсюда находим емкость ¹⁾:

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}.$$

§ 4. Проводящий эллипсоид

Задача об определении поля заряженного проводящего эллипсоида и задача об эллипсоиде во внешнем однородном поле решаются с помощью так называемых эллипсоидальных координат.

Связь эллипсоидальных координат с декартовыми дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c). \quad (4,1)$$

Это уравнение, кубическое относительно u , имеет три различных вещественных корня ($u = \xi, \eta, \zeta$), лежащих в следующих интервалах:

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2. \quad (4,2)$$

Эти три корня и являются эллипсоидальными координатами точки x, y, z . Их геометрический смысл явствует из того, что поверхности постоянных значений ξ, η, ζ представляют собой соответственно эллипсоиды, однополостные гиперболоиды и двухполостные гиперболоиды, причем все они софокусны с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4,3)$$

Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности этих трех семейств, причем эти поверхности взаимно ортогональны. Формулы преобразования от эллипсоидальных координат к декартовым получаются путем совместного решения трех уравнений типа (4,1) и имеют вид ²⁾:

$$\begin{aligned} x &= \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}, \\ y &= \pm \left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{1/2}, \\ z &= \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4,4)$$

¹⁾ Более точное вычисление (определение коэффициента в аргументе логарифма) требует применения значительно более сложных методов, причем результат зависит от формы обкладок. Для круговых (радиуса R) обкладок получается

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi} \left(\ln \frac{16\pi R}{d} - 1 \right)$$

(формула Кирхгофа).

²⁾ Строго говоря, в качестве эллипсоидальных координат надо было бы рассматривать не сами ξ, η, ζ , а величины $\sqrt{a^2 + \xi}, \sqrt{b^2 + \eta}, \sqrt{c^2 + \zeta}$. Тогда из формул (4,4) исчезли бы двойные знаки и связь между обеими системами координат стала бы, как и должно быть, взаимно однозначной.

Элемент длины в эллипсоидальных координатах имеет вид:

$$dl^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2 + h_3^2 d\zeta^2,$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2R_\eta}, \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_\zeta}, \quad (4,5)$$

где введено обозначение

$$R_u = \sqrt{(u + a^2)(u + b^2)(u + c^2)}, \quad u = \xi, \eta, \zeta.$$

Соответственно, уравнение Лапласа в этих координатах есть

$$\Delta\varphi = \frac{4}{(\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta)} \left[(\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right] = 0. \quad (4,6)$$

Если две из полуосей a, b, c становятся равными, то эллипсоидальная система координат вырождается. Пусть $a = b > c$. Тогда кубическое уравнение (4,1) вырождается в квадратное:

$$\frac{\rho^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (4,7)$$

с двумя корнями, пробегающими значения в интервалах

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -a^2.$$

Координатные поверхности постоянных ξ и η превращаются соответственно в софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения и однополостные гиперboloиды вращения (рис. 7). В качестве третьей координаты можно ввести полярный угол φ в плоскости x, y ($x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$). Что же касается эллипсоидальной координаты ζ , то при $a = b$ она вырождается в постоянную $-a^2$. Ее связь с углом φ заключена в законе, по которому ζ стремится к $-a^2$, когда b стремится к a : именно, при $b \rightarrow a$ имеем

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a^2 + \zeta}{a^2 - b^2}}, \quad (4,8)$$

в чем легко убедиться из (4,4) или непосредственно из уравнения (4,1). Связь координат z, ρ с координатами ξ, η дается согласно (4,4) равенствами

$$z = \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2} \right]^{1/2}, \quad \rho = \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]^{1/2}. \quad (4,9)$$

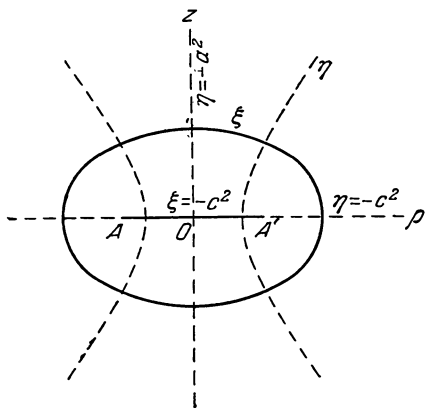


Рис. 7.

Координаты ξ , η , φ называют сплюснутыми сфероидальными координатами¹⁾.

Аналогичным образом, при $a > b = c$ эллипсоидальные координаты вырождаются в так называемые вытянутые сфероидальные координаты. Две координаты ξ и ζ являются корнями уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad (4,10)$$

причем $\xi \geq -b^2$, $-b^2 \geq \zeta \geq -a^2$. Поверхности постоянных ξ и ζ представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперboloиды вращения (рис. 8). Координата же η вырождается при $c \rightarrow b$ в постоянную $-b^2$ по закону

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{b^2 + \eta}{b^2 - c^2}}, \quad (4,11)$$

где φ — полярный угол в плоскости y, z .

Связь координат ξ, ζ с координатами x, ρ дается формулами

$$x = \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2} \right]^{1/2},$$

$$\rho = \left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2} \right]^{1/2}. \quad (4,12)$$

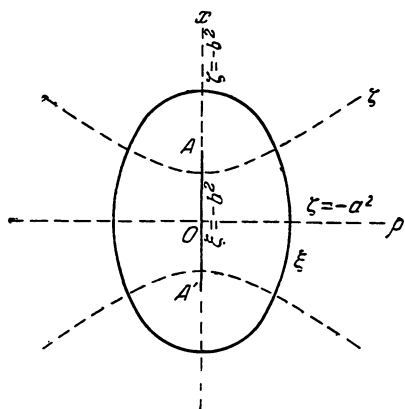


Рис. 8.

В сплюснутой сфероидальной системе фокусы координатных поверхностей (эллипсоидов и гиперboloидов) лежат на окружности радиуса $\sqrt{a^2 - c^2}$ в плоскости xu (на рис. 7 AA' есть диаметр этой окружности). Проведем плоскость, проходящую через некоторую точку P и ось z . Она пересечет фокальную окружность в двух точках; пусть r_1 и r_2 — расстояния от этих точек до точки P . Если ρ, z — координаты точки P , то

$$r_1^2 = (\rho - \sqrt{a^2 - c^2})^2 + z^2, \quad r_2^2 = (\rho + \sqrt{a^2 - c^2})^2 + z^2.$$

Сфероидальные координаты ξ, η выражаются через r_1, r_2 по следующим формулам:

$$\xi = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 - a^2, \quad \eta = \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right)^2 - a^2. \quad (4,13)$$

¹⁾ Мы принимаем здесь такое определение сфероидальных координат, при котором они являются непосредственно предельным случаем эллипсоидальных. В литературе пользуются и другими определениями, легко сводящимися к нашему.

В вытянутой же сфероидальной системе фокусами являются две точки $x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ на оси x (точки A, A' на рис. 7). Если r_1, r_2 — расстояния от этих фокусов до точки P , то

$$r_1^2 = \rho^2 + (z - \sqrt{a^2 - b^2})^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + (z + \sqrt{a^2 - b^2})^2,$$

а сфероидальные координаты ξ, ζ выражаются через r_1, r_2 по тем же формулам (4,13) (с заменой η на ζ).

Вернемся к задаче о поле заряженного эллипсоида, поверхность которого задана уравнением (4,3). В эллипсоидальных координатах это — координатная поверхность $\xi = 0$. Поэтому ясно, что если искать потенциал поля в виде функции только от ξ , то автоматически будут эквипотенциальными поверхностями все эллипсоидальные поверхности $\xi = \text{const}$, в том числе поверхность проводника. Уравнение Лапласа (4,6) сводится тогда к уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

Верхний предел интегрирования выбран таким образом, чтобы обеспечить исчезновение поля на бесконечности. Постоянную A проще всего определить из условия, что на больших расстояниях r поле должно стремиться к кулоновому: $\varphi \cong e/r$, где e — полный заряд проводника. Стремлению $r \rightarrow \infty$ соответствует $\xi \rightarrow \infty$; при этом $r^2 \cong \xi$, как это следует из уравнения (4,1) с $u = \xi$. С другой стороны, для больших ξ имеем $R_\xi \cong \xi^{3/2}$ и $\varphi \cong \frac{2A}{\sqrt{\xi}} = \frac{2A}{r}$. Отсюда заключаем, что $2A = e$, так что окончательно

$$\varphi(\xi) = \frac{e}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4,14)$$

Стоящий здесь интеграл — эллиптический первого рода. Поверхности проводника соответствует значение $\xi = 0$, поэтому для емкости эллипсоида имеем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4,15)$$

Распределение плотности заряда по поверхности эллипсоида определяется нормальной производной потенциала

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{h_1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\eta\zeta}}.$$

Из уравнений (4,4) легко убедиться в том, что при $\xi = 0$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}.$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \quad (4,16)$$

Для двухосного эллипсоида интегралы (4,14)—(4,15) выражаются через элементарные функции. Для вытянутого эллипсоида ($a > b = c$) потенциал поля дается формулой

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \quad (4,17)$$

а его емкость

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{Arch} \frac{a}{b}}. \quad (4,18)$$

Для сплюснутого же эллипсоида ($a = b > c$) имеем

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos \frac{c}{a}}. \quad (4,19)$$

В частности, для круглого диска ($a = b, c = 0$)

$$C = \frac{2a}{\pi}. \quad (4,20)$$

Перейдем к задаче о незаряженном проводящем эллипсоиде, находящемся во внешнем однородном электрическом поле \mathfrak{E} . Без ограничения общности достаточно рассмотреть внешнее поле \mathfrak{E} , направленное вдоль одной из осей эллипсоида. В противном случае можно разложить \mathfrak{E} на три составляющие вдоль осей эллипсоида и искать результирующее поле как суперпозицию полей, получающихся от каждой из этих составляющих в отдельности.

Потенциал однородного поля \mathfrak{E} , направленного вдоль оси x (ось a эллипсоида), в эллипсоидальных координатах имеет вид

$$\varphi_0 = -\mathfrak{E}x = -\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \sqrt{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}. \quad (4,21)$$

Представим потенциал поля вне эллипсоида в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, где φ' определяет искомое искажение внешнего поля эллипсоидом, и будем искать φ' в виде

$$\varphi' = \varphi_0 F(\xi). \quad (4,22)$$

В этой функции зависящие от η и ζ множители совпадают с таковыми в φ_0 ; такой вид функции позволит удовлетворить граничному условию при $\xi = 0$ и произвольных η, ζ (на поверхности эллипсоида).

Подставив (4,22) в уравнение Лапласа (4,6), получим для $F(\xi)$ уравнение

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \ln [R_\xi (\xi + a^2)] = 0.$$

Одно из решений этого уравнения есть $F = \text{const}$, а другое

$$F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}. \quad (4,23)$$

Верхний предел интегрирования выбран так, чтобы на бесконечности ($\xi \rightarrow \infty$) потенциал φ' стремился к нулю. Стоящий здесь интеграл — эллиптический второго рода.

На поверхности эллипсоида должно быть $\varphi = \text{const}$. Для того чтобы это условие могло быть выполнено при $\xi = 0$ и произвольных η, ζ , должно быть $\text{const} = 0$. Выбирая соответствующим образом коэффициент A в $F(\xi)$ (так, чтобы было $F(0) = -1$), получим окончательно следующее выражение для потенциала поля вокруг эллипсоида:

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} / \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \right\}. \quad (4,24)$$

Найдем вид потенциала φ' на больших расстояниях r от эллипсоида. Большим r соответствуют большие значения координаты ξ , причем $r^2 \cong \xi$, как это следует непосредственно из уравнения (4,1). Поэтому

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \cong \int_{r^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

и для потенциала φ' получаем

$$\varphi' = \frac{\mathcal{E}x}{r^3} \frac{V}{4\pi n^{(x)}},$$

где $V = 4\pi abc/3$ — объем эллипсоида, а величина $n^{(x)}$ (и аналогичные фигурирующие ниже величины $n^{(y)}, n^{(z)}$) определяются посредством

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + b^2) R_s}, \quad n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + c^2) R_s}. \quad (4,25)$$

Выражение для φ' , как и следовало, имеет вид потенциала поля электрического диполя:

$$\varphi' = \frac{x \mathcal{P} x}{r^3},$$

причем дипольный момент эллипсоида

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{E}_x \frac{V}{4\pi n_x}. \quad (4,26)$$

Аналогичными выражениями определяется дипольный момент при поле \mathcal{E} , направленном вдоль оси y или z .

Положительные постоянные $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ зависят только от формы эллипсоида, но не от его объема; они называются коэффициентами деполяризации¹⁾. Если не предпринимать выбор осей координат вдоль осей эллипсоида, то формулу (4,26) надо писать в тензорном виде:

$$\frac{4\pi}{V} n_{ik} \mathcal{P}_k = \mathcal{E}_i. \quad (4,27)$$

Величины $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ являются главными значениями симметрического тензора второго ранга n_{ik} .

В общем случае произвольных значений a , b , c из определений $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ следует прежде всего, что

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)}, \text{ если } a > b > c. \quad (4,28)$$

Далее, сложив интегралы $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ и вводя в качестве переменной интегрирования $u = R_s^2$, найдем

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$

откуда

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \quad (4,29)$$

Сумма трех коэффициентов деполяризации равна единице (в тензорном виде это значит, что $n_{ii} = 1$). Поскольку, с другой стороны, эти коэффициенты положительны, то каждый из них не может превышать единицы.

Для шара ($a = b = c$) из соображений симметрии ясно, что $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)}$, а потому:

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3}. \quad (4,30)$$

Для цилиндра (с осью вдоль оси x , $a \rightarrow \infty$) имеем²⁾

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}. \quad (4,31)$$

¹⁾ Полезные таблицы этих коэффициентов даны в статье Стонера (Phil. Mag. 36, 803, 1945).

²⁾ Эти значения для шара и цилиндра находятся, разумеется, в согласии с результатами, полученными в задачах 1 и 2 § 3.

Эллиптические интегралы (4,25) выражаются через элементарные функции для всех вообще эллипсоидов вращения. Для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$) с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

$$n^{(x)} = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2} (1 - n^{(x)}). \quad (4,32)$$

Если эллипсоид близок к шару ($e \ll 1$), то приближенно

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} e^2. \quad (4,33)$$

Для сплюснутого же эллипсоида ($a = b > c$)

$$n^{(z)} = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e), \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{2} (1 - n^{(z)}), \quad (4,34)$$

где $e = \sqrt{(a/c)^2 - 1}$. Если $e \ll 1$, то

$$n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2e^2}{15}, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{3} - \frac{e^2}{15}. \quad (4,35)$$

Задачи

1. Найти поле заряженного проводящего круглого диска (радиуса a), выразив его в цилиндрических координатах. Найти распределение заряда на диске.

Решение. Распределение заряда получается путем перехода в формуле (4,16) к пределу $c \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$, причем отношение $z/c = \sqrt{1 - r^2/a^2}$ (где $r^2 = x^2 + y^2$) в соответствии с (4,3). Это дает

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}.$$

Потенциал поля во всем пространстве дается формулой (4,19), в которой полагаем $c = 0$ и выражаем ξ через r и z с помощью уравнения (4,1) с $c = 0$, $u = \xi$, $a = b$:

$$\varphi = \frac{e}{a} \operatorname{arctg} \left[\frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}} \right]^{1/2}.$$

Вблизи края диска вводим вместо r и z координаты ρ и θ согласно $z = \rho \sin \theta$, $r = a - \rho \cos \theta$ ($\rho \ll a$) (рис. 9) и находим

$$\varphi \cong \frac{e}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\rho}{a}} \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

в согласии с общим результатом задачи 3 § 3.

2. Определить квадрупольный электрический момент заряженного эллипсоида.

Решение. Тензор квадрупольного момента заряженного проводника определяется как $D_{ik} = e (3x_i x_k - \bar{r}^2 \delta_{ik})$, где e — его полный заряд, а черта означает усреднение по закону

$$\overline{x_i x_k} = \frac{1}{e} \oint x_i x_k \sigma df.$$

Очевидно, что оси эллипсоида являются в то же время главными осями тензора D_{ik} . Воспользовавшись для σ формулой (4,16), а для элемента поверхности эллипсоида выражением

$$df = \frac{dx dy}{\sqrt{z}} = \frac{dx dy}{z/c^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

получим

$$\overline{z^2} = \frac{c}{4\pi ab} \int z dx dy = \frac{c^2}{3}$$

(интегрирование по $dx dy$ производится дважды по площади сечения эллипсоида плоскостью xy). Таким образом,

$$D_{xx} = \frac{e}{3}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{3}(2b^2 - a^2 - c^2), \quad D_{zz} = \frac{e}{3}(2c^2 - a^2 - b^2).$$

3. Определить распределение зарядов на поверхности незаряженного проводящего эллипсоида во внешнем однородном поле.

Решение. Согласно формуле (1,9) имеем

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = -\left(\frac{1}{4\pi h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0}$$

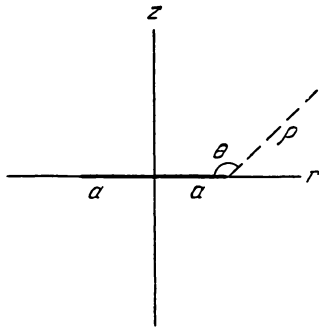
(элемент длины вдоль направления нормали к поверхности эллипсоида есть согласно (4,5) $h_1 d\xi$). Подставив (4,24) и учитывая, что

$$\nu_x = \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{x}{2a^2 h_1} \Big|_{\xi=0}$$

(ν — единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида), получим

$$\sigma = \frac{\mathcal{E}}{4\pi n^{(x)}} \nu_x.$$

Рис. 9.



При произвольном направлении внешнего поля относительно осей x, y, z эллипсоида

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \nu_i n_{ik}^{-1} \mathcal{E}_k = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\nu_x}{n^{(x)}} \mathcal{E}_x + \frac{\nu_y}{n^{(y)}} \mathcal{E}_y + \frac{\nu_z}{n^{(z)}} \mathcal{E}_z \right].$$

4. То же для круглого плоского диска (радиуса a), расположенного параллельно полю¹⁾. Определить дипольный момент диска.

Решение. Рассматриваем диск как предел эллипсоида вращения при стремлении полуоси c к нулю. При этом коэффициент деполаризации вдоль этой оси (ось z) стремится к 1, а вдоль осей x и y — к нулю по закону

$$n^{(z)} = 1 - \frac{\pi c}{2a}, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{\pi c}{4a},$$

следующему из (4,34). Компонента ν_x единичного вектора нормали к поверхности эллипсоида вращения стремится к нулю по закону

$$\nu_x = \frac{x}{a^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} \rightarrow \frac{x}{a^2} \frac{c^2}{z} = \frac{xc}{a^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{-1/2}.$$

¹⁾ Для диска, расположенного перпендикулярно к полю, вопрос был бы тривиален; поле остается однородным во всем пространстве, а на двух сторонах диска индуцируются заряды $\sigma = \pm \mathcal{E}/4\pi$.

Поэтому плотность зарядов

$$\sigma = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} \frac{\nu_x}{n^{(x)}} = \frac{E_0 \rho \cos \varphi}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}},$$

где ρ , φ — полярные координаты в плоскости диска.

Дипольный момент диска определяется по формуле (4,26) и равен

$$\mathcal{P} = \frac{4a^3}{3\pi} \mathfrak{E}.$$

Отметим, что он пропорционален a^3 , а не «объему» диска a^2c .

5. Определить потенциал поля вне проводящего эллипсоида вращения, расположенного своей осью симметрии параллельно внешнему однородному полю.

Решение. Для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$, поле \mathfrak{E} в направлении оси x) получим, вычисляя интеграл в формуле (4,24),

$$\varphi = -\mathfrak{E}x \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \xi}}}{\operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \right\}.$$

Координата ξ связана с координатами x и $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ посредством

$$\frac{\rho^2}{b^2 + \xi} + \frac{x^2}{a^2 + \xi} = 1,$$

причем в пространстве вне эллипсоида $0 \leq \xi \leq \infty$.

Для сплюснутого эллипсоида ($a = b > c$) поле \mathfrak{E} направлено вдоль оси z . В связи с этим в интегралах в (4,24) надо заменить $s + a^2$ на $s + c^2$, а $\varphi_0 = -\mathfrak{E}z$. В результате получим

$$\varphi = -\mathfrak{E}z \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \right\},$$

причем координата ξ связана с координатами z и $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ посредством

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1.$$

6. То же, если ось симметрии эллипсоида перпендикулярна к внешнему полю.

Решение. Для вытянутого эллипсоида (поле в направлении оси z):

$$\varphi = -\mathfrak{E}z \left\{ 1 - \frac{\frac{\sqrt{\xi + a^2}}{\xi + b^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \right\}.$$

Для сплюснутого эллипсоида (поле в направлении оси x):

$$\varphi = -\mathcal{E}x \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} - \frac{\sqrt{\xi + c^2}}{a^2 + \xi}}{\frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} - \frac{c}{a^2}} \right\}.$$

7. Однородное поле \mathcal{E} , направленное вдоль оси z (в полупространстве $z < 0$), ограничено заземленной проводящей плоскостью $z = 0$ с круговым отверстием. Определить поле и распределение зарядов на плоскости.

Решение. Плоскость xy с круговым отверстием радиуса a вокруг начала координат рассматриваем как предельный случай однополостного гиперboloида вращения

$$\frac{\rho^2}{a^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

при $|\eta| \rightarrow 0$. Эти гиперboloиды представляют собой одно из семейств координатных поверхностей сплюснутой сфероидальной системы координат с $c = 0$. Декартова координата z выражается согласно (4,9) через ξ и η посредством $z = \sqrt{\xi|\eta|/a}$, причем корень $\sqrt{\xi}$ должен быть взят со знаком $+$ или $-$ соответственно в верхнем и нижнем полупространстве.

Ищем решение в виде $\varphi = -\mathcal{E}zF(\xi)$ и для функции $F(\xi)$ получаем:

$$F(\xi) = \text{const} \int \frac{d\xi}{\xi^{3/2}(\xi + a^2)} = \text{const} \left[\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right]$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю в соответствии с условием $\varphi = 0$ при $z \rightarrow +\infty$, т. е. при $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$). При этом $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ отрицательного аргумента надо понимать, как

$$\operatorname{arctg} \frac{a}{-\sqrt{\xi}} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}},$$

а не как $-\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi})$. В противном случае потенциал испытывал бы разрыв непрерывности на плоскости отверстия ($\xi = 0$). Постоянный коэффициент выбираем так, чтобы при $z \rightarrow -\infty$ (т. е. при $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(a/\sqrt{\xi}) \rightarrow \pi$) было $\varphi = -\mathcal{E}z$, и окончательно получаем

$$\varphi = -\frac{\mathcal{E}z}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right] = -\frac{\mathcal{E}}{\pi} \sqrt{|\eta|} \left[\frac{\sqrt{\xi}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1 \right].$$

На проводящей поверхности $\eta = 0$ и потенциал, как и следовало, обращается в нуль.

На больших расстояниях $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ от отверстия имеем $\xi \cong r^2$ и потенциал (в верхнем полупространстве) приобретает вид

$$\varphi \cong \frac{\mathcal{E}a^2}{3\pi} \frac{\sqrt{-\eta}}{\xi} = \frac{\mathcal{E}a^3 z}{3\pi r^3},$$

т. е. поле — дипольного типа, соответствующее дипольному моменту $\mathcal{P} = \mathcal{E}a^3/3\pi$.

Напряженность поля убывает как $1/r^3$, и потому поток поля через бесконечно удаленную поверхность (в полупространстве $z > 0$) обращается в нуль. Это значит, что все силовые линии, проходящие через отверстие, замыкаются на верхней стороне проводящей плоскости.

Распределение зарядов на проводящей плоскости вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mp \frac{a}{4\pi \sqrt{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{-\eta}} = \pm \frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right],$$

где знаки \mp относятся к верхней и нижней сторонам плоскости. Согласно формуле

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1,$$

связывающей ξ с ρ , z , на плоскости $z=0$ имеем $\sqrt{\xi} = \pm \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Таким образом, распределение зарядов на нижней стороне проводящей плоскости дается формулой

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2} \left(\pi - \arcsin \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \right).$$

При $\rho \rightarrow \infty$ имеем $\sigma = -\mathfrak{E}/4\pi$, как и должно было быть. На верхней же стороне

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2} \left(\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \arcsin \frac{a}{\rho} \right).$$

8. То же, если отверстие в проводящей плоскости представляет собой прямую щель ширины $2b$.

Решение. Плоскость xy со щелью вдоль оси x рассматриваем как предельный случай гиперболического цилиндра

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

при $|\eta| \rightarrow 0$. Эти гиперболические цилиндры представляют собой одно из семейств эллипсоидальных координатных поверхностей при $a \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$. Декартова координата $z = \sqrt{\xi} |\eta| / b$.

Как и в задаче 7, ищем решение в виде $\varphi = -\mathfrak{E}zF(\xi)$ и для функции F получаем:

$$F = \text{const} \int \frac{d\xi}{\xi^{3/2} \sqrt{\xi + b^2}}.$$

Здесь коэффициент и постоянная интегрирования определяются условиями $F=0$ и $F=1$, соответственно, при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$ (т. е. при $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$ и $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$), и окончательно получаем

$$\varphi = \frac{\mathfrak{E}}{2b} [\sqrt{(\xi + b^2)} \mp \sqrt{\xi}] \sqrt{|\eta|},$$

где мы теперь понимаем корень $\sqrt{\xi}$ как положительную величину, а два знака, $-$ и $+$, соответствуют областям $z > 0$ и $z < 0$.

На больших расстояниях от щели в верхнем полупространстве имеем $\xi \cong y^2 + z^2 = r^2$ и потенциал

$$\varphi \cong \frac{b\mathfrak{E}}{4} \sqrt{\frac{|\eta|}{\xi}} = \frac{\mathfrak{E}b^2 z}{4r^2},$$

т. е. поле двумерного дипольного типа с дипольным моментом $\mathfrak{E}b^2/$ на единицу длины щели (см. формулу в задаче 2 § 3).

Распределение зарядов на проводящей плоскости дается формулой

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{E}}{8\pi} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - b^2}} \mp 1 \right).$$

§ 5. Силы, действующие на проводник

В электрическом поле на поверхность проводника действуют со стороны поля определенные силы. Их легко вычислить следующим образом.

Плотность потока импульса в электрическом поле в пустоте определяется известным максвелловским тензором напряжений¹⁾:

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{E^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k \right).$$

Сила же, действующая на элемент df поверхности тела, есть не что иное, как поток «втекающего» в него извне импульса, т. е. равна $\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} n_k df$ (знак изменен в связи с тем, что вектор нормали n направлен наружу от тела, а не внутрь него). Величина $\sigma_{ik} n_k$ есть, следовательно, сила $F_{\text{пов}}$, отнесенная к 1 см^2 площади поверхности. Учитывая, что у поверхности металла напряженность E имеет только нормальную составляющую, получим

$$F_{\text{пов}} = n \frac{E^2}{8\pi}, \quad (5,1)$$

или, вводя поверхностную плотность зарядов σ ,

$$F_{\text{пов}} = 2\pi\sigma^2 n = \frac{\sigma E}{2}.$$

Мы приходим к выводу, что на поверхности проводника действуют силы «отрицательного давления», направленного по внешней нормали к поверхности и по величине равного плотности энергии поля.

Полная сила F , действующая на проводник, получается интегрированием силы (5,1) по всей его поверхности:

$$F = \oint \frac{E^2}{8\pi} df. \quad (5,2)$$

Обычно, однако, более удобно вычислять эту величину, согласно общим правилам механики, путем дифференцирования энергии \mathcal{U} . Именно, сила, действующая на проводник вдоль координатной оси q , есть $-\partial\mathcal{U}/\partial q$, где под производной надо понимать изменение энергии при параллельном смещении данного тела как целого вдоль оси q . При этом энергия должна быть выражена через заряды проводников (источников поля), и дифференцирование производится при постоянных зарядах. Отмечая это обстоятельство индексом e , напишем

$$F_q = - \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q} \right)_e. \quad (5,3)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 32; — σ_{ik} обозначается там как $T_{\sigma\beta}$.

В данном случае мы применяем эту формулу к поверхности, не совпадающей буквально с поверхностью тела, а несколько смещенной относительно нее, чтобы исключить влияние структуры поля вблизи поверхности тела (ср. стр. 13).

Аналогично, проекция на какую-либо ось полного действующего на проводник момента сил равна

$$K = - \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \psi} \right)_e, \quad (5,4)$$

где ψ — угол поворота тела как целого вокруг данной оси.

Если же энергия выражена как функция потенциалов, а не зарядов проводников, то вопрос о вычислении с ее помощью сил требует особого рассмотрения. Дело в том, что для поддержания у проводника (при его перемещении) постоянного потенциала необходимо прибегнуть к помощи посторонних тел. Можно, например, поддерживать постоянный потенциал проводника путем соединения его с другим проводником, обладающим очень большой емкостью («резервуар зарядов»). Заряжаясь зарядом e_a , проводник отнимает его из «резервуара», потенциал φ_a которого при этом не меняется ввиду его большой емкости. Меняется, однако, энергия «резервуара», уменьшаясь на $e_a \varphi_a$. При заряджении всей системы проводников зарядами e_a энергия соединенных с ними «резервуаров» изменится в сумме на $-\sum_a e_a \varphi_a$. В величину же \mathcal{U} входит только энергия рассматриваемых проводников, но не энергия «резервуаров». В этом смысле можно сказать, что \mathcal{U} относится к энергетически незамкнутой системе. Таким образом, для системы проводников, потенциалы которых поддерживаются постоянными, роль механической энергии играет не \mathcal{U} , а величина

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \sum_a e_a \varphi_a. \quad (5,5)$$

Подставив сюда (2,2), мы находим, что \mathcal{U} и $\tilde{\mathcal{U}}$ отличаются только знаком:

$$\tilde{\mathcal{U}} = -\mathcal{U}. \quad (5,6)$$

Сила F_q получается дифференцированием $\tilde{\mathcal{U}}$ по q при постоянных потенциалах, т. е.

$$F_q = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}}{\partial q} \right)_\varphi = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} \right)_\varphi. \quad (5,7)$$

Таким образом, действующие на проводник силы можно получить дифференцированием \mathcal{U} как при постоянных зарядах, так и при постоянных потенциалах, с той лишь разницей, что производную надо брать в первом случае со знаком минус, а во втором — со знаком плюс.

Этот же результат можно было бы получить и более формальным путем, исходя из дифференциального тождества

$$d\mathcal{U} = \sum_a \varphi_a de_a - F_q dq, \quad (5,8)$$

в котором \mathcal{U} рассматривается как функция зарядов проводников и координаты q ; этим тождеством выражается тот факт, что производные $\partial\mathcal{U}/\partial e_a = \varphi_a$ и $\partial\mathcal{U}/\partial q = -F_q$. Переходя к переменным φ_a вместо e_a , получим отсюда

$$d\tilde{\mathcal{U}} = - \sum_a e_a d\varphi_a - F_q dq, \quad (5,9)$$

откуда и следует (5,7).

В конце § 2 была рассмотрена энергия проводника во внешнем однородном электрическом поле. Полная сила, действующая на проводник в однородном поле, равна, разумеется, нулю. Но выражением энергии (2,14) можно воспользоваться для определения силы, действующей на проводник в квазиоднородном поле \mathfrak{E} , т. е. в поле, мало меняющемся на протяжении размеров тела. В таком поле в первом приближении все еще можно вычислять энергию по формуле (2,14), а сила F определится как градиент этой энергии:

$$F = - \text{grad } \mathcal{U} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} V \text{ grad } \mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k. \quad (5,10)$$

Что же касается полного момента сил K , то он, вообще говоря, отличен от нуля уже и в однородном внешнем поле. По общим правилам механики K можно определить, рассматривая бесконечно малый виртуальный поворот тела; изменение энергии при таком повороте связано с K посредством $\delta\mathcal{U} = -K\delta\psi$, где $\delta\psi$ — угол поворота. Поворот тела на угол $\delta\psi$ в однородном поле эквивалентен повороту поля относительно тела на угол $-\delta\psi$. Изменение поля при этом есть $\delta\mathfrak{E} = -[\delta\psi \cdot \mathfrak{E}]$, а изменение энергии

$$\delta\mathcal{U} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathfrak{E}} \delta\mathfrak{E} = -\delta\psi \left[\mathfrak{E} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathfrak{E}} \right].$$

Но $\partial\mathcal{U}/\partial\mathfrak{E} = -\mathcal{P}$, как это видно из сравнения формул (2,13) и (2,14). Поэтому $\delta\mathcal{U} = -[\mathcal{P}\mathfrak{E}] \delta\psi$, откуда

$$K = [\mathcal{P}\mathfrak{E}], \quad (5,11)$$

в соответствии с обычным выражением, известным из теории поля в пустоте.

Если полные сила и момент, действующие на проводник, равны нулю, то проводник в поле остается неподвижным и на первый план выдвигаются эффекты, связанные с деформированием тела (так называемая электрострикция). Силы (5,1), действующие на поверхность проводника, приводят к изменению его формы и объема. При этом, ввиду растягивающего характера сил, объем тела увеличивается. Полное определение деформации требует решения уравнений теории упругости с заданным распределением сил (5,1) на поверхности тела. Если, однако, интересоваться только изменением объема, то задача может быть решена весьма просто.

Для этого надо учесть, что если деформация слаба (как это фактически имеет место при электрострикции), то влияние изменения формы на изменение объема является эффектом второго порядка малости. Поэтому в первом приближении изменение объема можно рассматривать как результат деформирования без изменения формы, т. е. как всестороннее растяжение под влиянием некоторого эффективного избыточного давления Δp , равномерно распределенного по поверхности тела и заменяющего собой точное распределение согласно (5,1). Относительное изменение объема получается умножением Δp на коэффициент всестороннего растяжения вещества. Давление Δp определяется, согласно известной формуле, как производная от электрической энергии тела \mathcal{U} по его объему: $\Delta p = -\partial \mathcal{U} / \partial V$ ¹⁾.

Пусть деформирующее поле создается самим заряженным проводником. Тогда энергия $\mathcal{U} = e^2/2C$ и давление

$$\Delta p = -\frac{e^2}{2} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{C} \right).$$

При заданной форме тела его емкость (как величина, имеющая размерность длины) пропорциональна его линейным размерам, т. е. пропорциональна $V^{1/3}$. Поэтому находим

$$\Delta p = \frac{e^2}{6CV} = \frac{e\varphi}{6V}. \quad (5,12)$$

Если же незаряженный проводник находится в однородном внешнем поле \mathfrak{E} , то его энергия дается формулой (2,14). Поэтому в этом случае растягивающее давление

$$\Delta p = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k. \quad (5,13)$$

Задачи

1. Маленький проводник с емкостью c (порядка величины его размеров находится на расстоянии r от центра сферического проводника большого радиуса a ($a \gg c$). Расстояние $r-a$ от проводника c до поверхности шара предполагается большим лишь по сравнению с c , но не по сравнению с a . Оба проводника соединены друг с другом тонким проводом, так что находятся при одинаковом потенциале φ . Определить силу взаимного отталкивания проводников.

Решение. Ввиду малости проводника c можно считать, что его потенциал складывается из потенциала $\varphi a/r$, который создается на расстоянии r большой сферой, и собственного потенциала e/c , создаваемого зарядом e , находящимся на нем самом. Отсюда имеем $\varphi = \varphi a/r + e/c$, или $e = c\varphi \left(1 - \frac{a}{r} \right)$.

1) Определенная таким образом величина есть давление, действующее на поверхность со стороны самого тела; давление же, действующее на нее извне, получается изменением знака.

Искомая сила взаимодействия F определяется как кулонова сила отталкивания между зарядом e проводника s и зарядом $a\varphi$ сферы:

$$F = \frac{ac\varphi^2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

(это выражение справедливо с точностью до членов более высокого порядка по c). Таким образом, маленький проводник отталкивается от сферы с силой, убывающей при приближении к ее поверхности.

2. Заряженный проводящий шар разрезан на две половины. Определить силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга ¹⁾.

Решение. Представим себе полушария разделенными бесконечно узкой щелью и определяем действующую на каждое из них силу F путем интегрирования по их поверхности силы $(E^2/8\pi) \cos \theta$ (проекция силы (5,1) на направление, перпендикулярное к плоскости раздела полушарий). В щели $E = 0$, а на наружной поверхности $E = e/a^2$, где a — радиус шара, а e — полный заряд на нем. В результате получим

$$F = \frac{e^2}{8a^2}.$$

3. То же для незаряженного шара, находящегося во внешнем однородном поле \mathfrak{E} , перпендикулярном к плоскости разреза.

Решение аналогично предыдущей задаче, с той разницей, что на поверхности шара $E = 3\mathfrak{E} \cos \theta$ (согласно задаче 1 § 3). Искомая сила

$$F = \frac{9}{16} a^2 \mathfrak{E}^2.$$

4. Определить изменение объема и изменение формы проводящего шара во внешнем однородном электрическом поле.

Решение. Изменение объема $\Delta V/V = \Delta p/K$, где K — модуль всестороннего растяжения вещества, а Δp определяется формулой (5,13). Для шара

$\alpha_{ik} = \delta_{ik} \alpha = \frac{3}{4\pi} \delta_{ik}$ (α из задачи 1 § 3), так что

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\mathfrak{E}^2}{8\pi K}.$$

В результате деформации шар превращается в вытянутый эллипсоид. Для определения эксцентриситета этого эллипсоида можно рассматривать деформацию как однородную вдоль объема тела деформацию сдвига, аналогично тому, как для изменения общего объема мы рассматривали однородную деформацию всестороннего растяжения.

Условие равновесия деформированного тела можно сформулировать как условие минимальности суммы электростатической и упругой энергии. Первая из них согласно формулам (2,12), (4,26) равна

$$U_{эл} = -\frac{V}{8\pi n} \mathfrak{E}^2 \cong -\frac{3V\mathfrak{E}^2}{8\pi} - \frac{3V}{10\pi} \frac{a-b}{R} \mathfrak{E}^2,$$

где R — первоначальный радиус шара, a и b — полуоси эллипсоида, а

$$n \cong \frac{1}{3} - \frac{4}{15} \frac{a-b}{R}$$

— коэффициент деполяризации (см. (4,33)).

¹⁾ В задачах 2 и 3 предполагается, что оба полушария находятся при одинаковом потенциале.

В силу аксиальной симметрии деформации (вокруг направления поля — оси x) отличны от нуля лишь компоненты u_{xx} и $u_{yy} = u_{zz}$ тензора деформации. Поскольку мы рассматриваем равновесие по отношению к изменению формы, можно считать при этом объем неизменным, т. е. $u_{ii} = 0$. Поэтому упругую энергию ¹⁾ можно написать в виде

$$\mathcal{U}_{уп} = V \frac{u_{ik} \sigma_{ik}}{2} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (u_{xx} - u_{yy}) V$$

(σ_{ik} — тензор упругих напряжений). Имеем

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = 2\mu (u_{xx} - u_{yy}),$$

где μ — модуль сдвига вещества, а $u_{xx} - u_{yy} = (a - b)/R$. Поэтому

$$\mathcal{U}_{уп} = \frac{2\mu}{3} \frac{(a - b)^2}{R^2} V.$$

Минимизируя сумму $\mathcal{U}_{уп} + \mathcal{U}_{эл}$ по $a - b$, получим

$$\frac{a - b}{R} = \frac{9}{40\pi\mu} \mathcal{E}^2.$$

5. Найти связь между частотой и длиной волны, распространяющихся по заряженной плоской поверхности жидкого проводника (в поле тяжести). Получить условие устойчивости этой поверхности (Я. И. Френкель, 1935).

Решение. Пусть волна распространяется вдоль оси x , ось z направлена вертикально вверх. Вертикальное смещение точек поверхности жидкости $\zeta = ae^{i(kx - \omega t)}$. При неподвижной поверхности напряженность поля над ней $E_z = E = 4\pi\sigma_0$, а его потенциал $\varphi = -4\pi\sigma_0 z$, где σ_0 — поверхностная плотность зарядов. Потенциал поля над колеблющейся поверхностью пишем в виде

$$\varphi = -4\pi\sigma_0 z + \varphi_1, \quad \varphi_1 = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz},$$

где φ_1 — малая поправка, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi_1 = 0$ и обращающаяся в нуль при $z \rightarrow \infty$. Вдоль самой поверхности проводника потенциал должен иметь постоянное значение, которое принимаем за нуль; отсюда

$$\varphi_1|_{z=0} = 4\pi\sigma_0 z.$$

Согласно (5,1) на заряженную поверхность жидкости действует дополнительное отрицательное давление, равное, с точностью до членов первого порядка по φ_1 ,

$$\frac{E^2}{8\pi} \cong \frac{E_z^2}{8\pi} \cong 2\pi\sigma_0^2 + k\sigma_0\varphi_1|_{z=0} = 2\pi\sigma_0^2 + 4\pi\sigma_0^2 k\zeta.$$

Постоянный член $2\pi\sigma_0^2$ несуществен (его можно включить в постоянное внешнее давление).

Рассмотрение гидродинамического движения в волне вполне аналогично теории капиллярных волн ²⁾, отличаясь лишь наличием указанного выше дополнительного давления. На поверхности жидкости получаем граничное условие

$$\rho g \zeta + \rho \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=0} - \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 4\pi\sigma_0^2 k \zeta = 0,$$

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 2, § 4.

2) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 1, § 61.

где α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, а Φ — потенциал ее скорости. Φ и ζ связаны друг с другом еще и соотношением

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Подставляя в эти два соотношения $\zeta = ae^{i(kx - \omega t)}$ и $\Phi = Ae^{i(kx - \omega t)} e^{kz}$ и исключая a и A , получим искомую связь между k и ω :

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho - 4\pi\sigma_0^2 k + \alpha k^2). \quad (1)$$

Для того чтобы поверхность жидкости была устойчивой, частота ω должна быть вещественной при всех значениях k (в противном случае будут существовать комплексные ω с положительной мнимой частью и множитель $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать). Условие положительности правой стороны (1) гласит: $(4\pi\sigma_0^2)^2 - 4g\rho\alpha < 0$, откуда

$$\sigma_0^4 < \frac{g\rho\alpha}{4\pi^2}.$$

Это и есть условие устойчивости.

6. Найти условие устойчивости заряженной сферической капли (Рэлей, 1882).

Решение. Сумма электростатической и поверхностной энергии капли

$$\mathcal{U} = \frac{e^2}{2C} + \alpha S,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, C — емкость капли, S — площадь ее поверхности. Неустойчивость возникает (при увеличении e) по отношению к вытягиванию шара в эллипсоид и определяется моментом, когда \mathcal{U} становится убывающей функцией эксцентриситета (при заданном объеме капли). Шарообразная форма всегда соответствует экстремуму \mathcal{U} ; поэтому условие устойчивости гласит:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial (a-b)^2} \Big|_{a=b} > 0,$$

где a, b — полуоси эллипсоида, а дифференцирование производится при $ab^2 = \text{const}$. Воспользовавшись известной формулой для поверхности эллипсоида и формулой (4,18) для его емкости, получим после довольно длинного вычисления

$$e^2 < 16\pi a^3 \alpha.$$

ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 6. Электростатическое поле в диэлектриках

Перейдем теперь к изучению постоянного электрического поля в другой категории материальных сред — в диэлектриках.

Основное свойство диэлектриков заключается в невозможности протекания в них постоянного тока. Поэтому, в отличие от проводников, напряженность постоянного электрического поля в диэлектриках отнюдь не должна быть равной нулю, и мы должны получить уравнения, которыми это поле описывается. Одно из них получается путем усреднения уравнения (1,3) и по-прежнему гласит:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (6,1)$$

Второе же получается усреднением уравнения $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\bar{\rho}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}. \quad (6,2)$$

Предположим, что внутри вещества диэлектрика не внесено никаких посторонних зарядов; это есть наиболее обычный и важный случай. Тогда полный заряд во всем объеме диэлектрика остается равным нулю и после внесения его в электрическое поле:

$$\int \bar{\rho} dV = 0.$$

Это интегральное соотношение, которое должно выполняться для тела любой формы, означает, что средняя плотность зарядов может быть написана в виде дивергенции некоторого вектора, который принято обозначать как — \mathbf{P} :

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (6,3)$$

причем вне тела $\mathbf{P} = 0$. Действительно, интегрируя по объему, ограниченному поверхностью, охватывающей тело и проходящей везде вне него, получим

$$\int \bar{\rho} dV = -\int \operatorname{div} \mathbf{P} dV = -\oint \mathbf{P} d\mathbf{f} = 0.$$

Величина \mathbf{P} называется вектором диэлектрической поляризации (или просто поляризации) тела; диэлектрик, в котором \mathbf{P} отлично от нуля, называют поляризованным. Наряду с объемной плотностью (6,3), вектор \mathbf{P} определяет также и поверхностную плотность σ зарядов, распределенных по поверхности поляризованного диэлектрика. Если проинтегрировать формулу (6,3) по элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности диэлектрика, и учесть, что на наружной площадке $\mathbf{P} = 0$, то мы получим (ср. вывод формулы (1,9)):

$$\sigma = P_n, \quad (6,4)$$

где P_n — составляющая вектора \mathbf{P} по внешней нормали к поверхности.

Для выяснения физического смысла самой величины \mathbf{P} рассмотрим полный дипольный момент всех внутренних зарядов в диэлектрике; в отличие от полного заряда, эта величина не должна быть равной нулю. По определению дипольного момента, это есть интеграл

$$\int r \bar{\rho} dV.$$

Подставив $\bar{\rho}$ в виде (6,3) и снова интегрируя по объему, выходящему за пределы тела, получим

$$\int r \bar{\rho} dV = \int r \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \oint r (d\mathbf{f}\mathbf{P}) + \int (\mathbf{P}\nabla) r dV.$$

Интеграл по поверхности исчезает, а во втором имеем $(\mathbf{P}\nabla) r = \mathbf{P}$, так что

$$\int r \bar{\rho} dV = \int \mathbf{P} dV. \quad (6,5)$$

Таким образом, вектор поляризации представляет собой дипольный момент (или, как говорят, электрический момент) единицы объема диэлектрика¹⁾.

Подставив (6,3) в (6,2), получим второе уравнение электростатического поля в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (6,6)$$

где введена новая величина \mathbf{D} , определяемая как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (6,7)$$

¹⁾ Следует заметить, что соотношение (6,3) внутри диэлектрика и условие $\mathbf{P} = 0$ вне его сами по себе еще не определяют величину \mathbf{P} однозначным образом; в области внутри диэлектрика можно прибавить к \mathbf{P} любой вектор вида $\operatorname{rot} \mathbf{f}$. Лишь установление связи с дипольным моментом окончательно определяет \mathbf{P} .

и называемая электрической индукцией¹⁾. Уравнение (6,6) было получено путем усреднения плотности зарядов, входящих в состав диэлектрика. Если же в диэлектрик внесены извне посторонние по отношению к его веществу заряды (мы будем называть их сторонними), то к правой части уравнения (6,6) должна быть добавлена их плотность:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}. \quad (6,8)$$

На поверхности раздела двух различных диэлектриков должны выполняться определенные граничные условия. Одно из этих условий является следствием уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Если поверхность раздела однородна по своим физическим свойствам²⁾, то это условие требует непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (6,9)$$

(ср. вывод условия (1,7)). Второе же условие следует из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и требует непрерывности нормальной к поверхности составляющей индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (6,10)$$

Действительно, скачок нормальной составляющей $D_n = D_z$ означал бы обращение производной $\partial D_z / \partial z$ (а с нею и $\operatorname{div} \mathbf{D}$) в бесконечность.

На границе между диэлектриком и проводником $E_t = 0$, а условие для нормальной компоненты получается из (6,8):

$$E_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma, \quad (6,11)$$

где σ — плотность зарядов на поверхности проводника.

§ 7. Диэлектрическая проницаемость

Для того чтобы уравнения (6,1) и (6,6) составляли полную систему уравнений, определяющих электростатическое поле, к ним надо еще присоединить соотношение, связывающее друг с другом индукцию \mathbf{D} и напряженность поля \mathbf{E} . В огромном большинстве случаев эту зависимость можно считать линейной. Она соответствует первым членам разложения \mathbf{D} по степеням \mathbf{E} и связана с малостью внешних электрических полей по сравнению с внутренними молекулярными полями.

¹⁾ Иногда пользуются для \mathbf{D} термином «электрическое смещение», введенным еще Максвеллом; это название, однако, следует считать устаревшим.

²⁾ То есть по составу соприкасающихся тел, температуре и т. п. Если диэлектрик является кристаллом, то кристаллическое направление поверхности должно быть постоянным.

Линейная зависимость D от E приобретает особенно простой вид в важнейшем случае изотропных диэлектриков. Очевидно, что в изотропном диэлектрике векторы D и E должны иметь одинаковое направление. Поэтому их линейная зависимость сводится к простой пропорциональности¹⁾

$$D = \epsilon E. \quad (7,1)$$

Коэффициент ϵ называется диэлектрической проницаемостью вещества и является функцией его термодинамического состояния.

Вместе с индукцией пропорциональна полю также и поляризация:

$$P = \chi E \equiv \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E. \quad (7,2)$$

Величина χ называется коэффициентом поляризации вещества (или его диэлектрической восприимчивостью). Ниже (§ 14) будет показано, что диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы; поляризуемость, соответственно, всегда положительна. Поляризуемость разреженной среды (газ) можно считать пропорциональной ее плотности.

Граничные условия (6,9) и (6,10) на поверхности раздела двух изотропных диэлектриков принимают вид:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}. \quad (7,3)$$

Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля испытывает скачок, меняясь обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям обеих сред.

В однородном диэлектрике $\epsilon = \text{const}$, и тогда из уравнения $\text{div } D = 0$ следует, что и $\text{div } P = 0$. Ввиду определения (6,3) это значит, что объемная плотность зарядов в таком теле отсутствует (поверхностная же плотность (6,4), вообще говоря, отлична от нуля). Напротив, если диэлектрик не однороден, то имеем отличную от нуля объемную плотность

$$\bar{\rho} = -\text{div } P = -\text{div } \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} D = -\frac{D}{4\pi} \text{grad } \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = -\frac{E}{4\pi\epsilon} \nabla\epsilon.$$

Если ввести потенциал электрического поля согласно $E = -\text{grad } \varphi$, то уравнение (6,1) удовлетворяется автоматически, а уравнение $\text{div } D = \text{div } \epsilon E = 0$ дает

$$\text{div}(\epsilon \nabla \varphi) = 0. \quad (7,4)$$

¹⁾ Следует, однако, оговорить, что такая зависимость, предполагающая обращение D в нуль одновременно с E , справедлива, строго говоря, лишь в однородных по своим физическим свойствам (составу, температуре и т. п.) диэлектриках. В неоднородных телах D может иметь отличные от нуля значения и при $E = 0$, определяясь при этом градиентами меняющихся вдоль тела термодинамических величин. Эти члены, однако, весьма малы и фактически не играют роли ни в каких явлениях. Поэтому мы будем пользоваться в дальнейшем соотношением (7,1) и в неоднородных телах.

Это уравнение переходит в обычное уравнение Лапласа лишь в однородной диэлектрической среде. Граничные условия (7,3) можно переписать в виде следующих условий для потенциала

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (7,5)$$

(условие непрерывности тангенциальных производных потенциала эквивалентно условию непрерывности самого φ).

В кусочно-однородной диэлектрической среде уравнение (7,4) сводится в каждом однородном участке к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, так что диэлектрические проницаемости входят в решение задачи только через посредство условий (7,5). Но эти условия содержат лишь отношение диэлектрических проницаемостей двух соприкасающихся сред. В частности, решение электростатической задачи для диэлектрического тела с проницаемостью ε_2 , окруженного средой с проницаемостью ε_1 , сводится поэтому к такой же задаче для тела с проницаемостью $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, находящегося в пустоте.

Рассмотрим вопрос о том, как меняются полученные в предыдущих параграфах результаты для электростатического поля проводников, если последние находятся не в пустоте, а погружены в однородную и изотропную диэлектрическую среду. В обоих случаях распределение потенциала описывается уравнением $\Delta\varphi = 0$ с граничным условием постоянства φ на поверхности проводника, и все отличие заключается в том, что вместо связи $E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma$ с поверхностной плотностью зарядов теперь будет:

$$D_n = -\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (7,6)$$

Отсюда видно, что решение задачи о поле заряженного проводника в пустоте переходит в решение той же задачи в диэлектрической среде путем формальной замены потенциалов и зарядов: либо $\varphi \rightarrow \varepsilon\varphi$, $e \rightarrow e$, либо $\varphi \rightarrow \varphi$, $e \rightarrow e/\varepsilon$. При заданных зарядах проводников потенциал и напряженность поля убывают в ε раз по сравнению с их значениями для поля в пустоте; это ослабление поля может быть наглядно истолковано как результат частичной «экранировки» заряда проводника поверхностными зарядами прилегающего к нему поляризованного диэлектрика. Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то поле остается неизменным, но увеличиваются в ε раз заряды проводников.

Наконец, отметим, что в электростатике можно формально рассматривать проводник (незаряженный) как тело с бесконечной диэлектрической проницаемостью — в том смысле, что влияние, оказываемое им на внешнее электрическое поле, такое же, какое оказывал бы диэлектрик (той же формы) с $\varepsilon \rightarrow \infty$. Действительно,

в силу конечности граничного условия для индукции D она должна оставаться конечной внутри тела и при $\epsilon \rightarrow \infty$; но это означает, что в таком поле будет $E=0$, в соответствии со свойствами проводника.

Задачи

1. Определить поле, создаваемое точечным зарядом e , расположенным на расстоянии h от плоской границы раздела двух различных диэлектрических сред.

Решение. Назовем точку, в которой находится заряд e в среде 1, точкой O , а ее зеркальное отображение по другую сторону плоскости раздела (в среде 2) — точкой O' (рис. 10). Будем искать поле в среде 1 как поле, создаваемое двумя точечными зарядами, — зарядом e и фиктивным зарядом e' в точке O' (см. метод изображений, § 3):

$$\varphi_1 = \frac{e}{\epsilon_1 r} + \frac{e'}{\epsilon_1 r'},$$

где r, r' — расстояние точки наблюдения соответственно от O и O' . Поле же в среде 2 ищем в виде поля, создаваемого фиктивным зарядом e'' , находящимся в точке O :

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\epsilon_2 r}.$$

На граничной плоскости ($r=r'$) должны выполняться условия (7,5), из которых получаем уравнения

$$e - e' = e'', \quad \frac{e + e'}{\epsilon_1} = \frac{e''}{\epsilon_2};$$

отсюда

$$e' = e \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad e'' = e \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (1)$$

При $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ имеем $e' = -e$, $\varphi_2 = 0$, т. е. мы возвращаемся к результату, полученному в § 3 для поля точечного заряда вблизи проводящей плоскости.

Сила, действующая на заряд e («сила изображения»), равна

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2 \epsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)};$$

$F > 0$ соответствует отталкиванию.

2. То же для бесконечной прямой заряженной нити, расположенной параллельно плоскости раздела на расстоянии h от нее.

Решение вполне аналогично решению предыдущей задачи, с той разницей, что потенциалы поля в обеих средах:

$$\varphi_1 = -\frac{2e}{\epsilon_1} \ln r - \frac{2e'}{\epsilon_2} \ln r', \quad \varphi_2 = -\frac{2e''}{\epsilon_2} \ln r,$$

где e, e', e'' — заряды на единице длины нити и ее «изображений», а r, r' — расстояния в плоскости, перпендикулярной к нитям. Для e, e', e'' получаются те же выражения (1), а сила, действующая на единицу длины нити,

$$F = \frac{2ee'}{2h\epsilon_1} = \frac{e^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{h\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

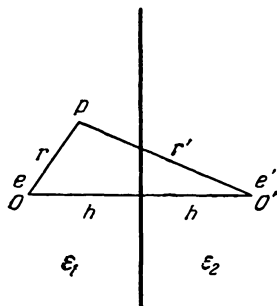


Рис. 10.

3. Определить поле, создаваемое бесконечной прямой заряженной нитью, расположенной (в среде с диэлектрической постоянной ϵ_1) параллельно цилиндру (с $\epsilon = \epsilon_2$) радиуса a на расстоянии b ($b > a$) от его оси¹⁾.

Решение. Поле в среде 1 будем искать как поле, которое создавалось бы в однородном диэлектрике ϵ_1 реальной заряженной нитью (проходящей через точку O на рис. 11) с зарядом e на единице длины и двумя

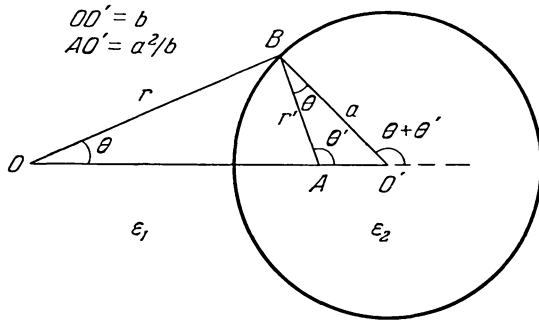


Рис. 11.

фиктивными нитями с зарядами e' и $-e'$, проходящими соответственно через точки A и O' . Точка A расположена на расстоянии $AO' = a^2/b$ от центра окружности; тогда для всех точек окружности расстояния r и r' соответственно до точек O и A находятся в постоянном отношении $r'/r = a/b$, в результате чего окажется возможным удовлетворить граничным условиям на этой окружности. Поле же в среде 2 будем искать как поле, которое создавали бы в однородной среде ϵ_2 фиктивные заряды e'' на нити, проходящей через O .

Граничные условия на поверхности раздела удобно сформулировать с помощью потенциала φ ($E = -\text{grad } \varphi$) и векторного потенциала A (ср. § 3), определенного из $D = \text{rot } A$ (в согласии с уравнением $\text{div } D = 0$); в плоской задаче вектор A направлен вдоль оси z (перпендикулярно к плоскости рисунка). Условия непрерывности касательных компонент E и нормальной компоненты D эквивалентны условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad A_1 = A_2.$$

Для поля заряженной нити имеем в полярных координатах r, θ : $\varphi = -\frac{2e}{\epsilon} \ln r + \text{const}$, $A = 2e\theta + \text{const}$ (ср. (3,18)). Поэтому граничные условия гласят:

$$\frac{2}{\epsilon_1} (-e \ln r - e' \ln r' + e' \ln a) = -\frac{2e''}{\epsilon_2} \ln r + \text{const},$$

$$2[e\theta + e'\theta' - e'(\theta + \theta')] = 2e''\theta$$

(обозначение углов дано на рис. 11; использовано подобие треугольников $OO'B$ и $BO'A$). Отсюда $\epsilon_2(e + e') = \epsilon_1 e''$, $e - e' = e''$, и для e', e'' снова получаются выражения (1) из задачи 1.

1) Аналогичная задача о точечном заряде вблизи диэлектрической сферы не решается в конечном виде.

Сила, действующая на единицу длины заряженной нити, параллельна OO' и равна

$$F = eE = \frac{2ee'}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) = \frac{2e^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) b (b^2 - a^2)}$$

($F > 0$ соответствует отталкиванию).

4. То же, если нить проходит внутри цилиндра с диэлектрической проницаемостью ε_2 ($b < a$).

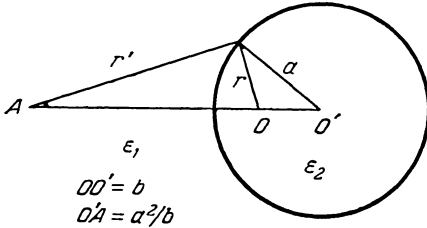


Рис. 12.

Решение. Поле в среде 2 ищем как поле реальной нити e (точка O на рис. 12) и фиктивной нити e' , проходящей через точку A , расположенную теперь вне цилиндра. Поле же в среде 1 ищем как поле нитей с зарядами e'' и $e - e''$, проходящих соответственно через O и O' . Тем же способом, как и в предыдущей задаче, получим

$$e' = -e \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad e'' = e \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Нить отталкивается (при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) от цилиндра с силой

$$F = \frac{2ee'}{\varepsilon_2} \frac{1}{OA} = \frac{2e^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) b}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (a^2 - b^2)}.$$

5. Показать, что потенциал поля $\varphi_A(\mathbf{r}_B)$, создаваемый в точке \mathbf{r}_B произвольной неоднородной диэлектрической среды точечным зарядом e , находящимся в точке \mathbf{r}_A , равен потенциалу $\varphi_B(\mathbf{r}_A)$, создаваемому в точке \mathbf{r}_A тем же зарядом, находящимся в точке \mathbf{r}_B .

Решение. Потенциалы $\varphi_A(\mathbf{r})$ и $\varphi_B(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi_A) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A),$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Умножив первое из них на φ_B , а второе на φ_A и вычитая почленно одно из другого, найдем

$$\operatorname{div}(\varphi_B \varepsilon \nabla \varphi_A) - \operatorname{div}(\varphi_A \varepsilon \nabla \varphi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \varphi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \varphi_A(\mathbf{r}).$$

Интегрирование этого равенства по всему пространству дает искомое соотношение: $\varphi_A(\mathbf{r}_B) = \varphi_B(\mathbf{r}_A)$.

§ 8. Диэлектрический эллипсоид

Поляризация диэлектрического эллипсоида, помещенного во внешнее однородное электрическое поле, обладает некоторыми своеобразными особенностями, придающими этому примеру особый интерес.

Рассмотрим предварительно простой частный случай — диэлектрический шар во внешнем поле \mathcal{E} . Обозначим его диэлектрическую постоянную посредством $\varepsilon^{(i)}$, а диэлектрическую постоянную внешней среды, в которую он погружен, — посредством $\varepsilon^{(e)}$. Выберем начало сферической системы координат в центре шара (полярный угол θ

отсчитывается от направления \mathfrak{E} и будем искать потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi^{(e)} = -\mathfrak{E}r + A\mathfrak{E} \frac{r}{R^3};$$

первый член есть потенциал приложенного внешнего поля, а второй член, обращающийся на бесконечности в нуль, дает искомого изменение потенциала, вызываемое шаром (ср. решение задачи 1 § 3). Потенциал же поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi^{(i)} = -B\mathfrak{E}r;$$

это есть единственная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, остающаяся конечной в центре шара и зависящая только от постоянного вектора \mathfrak{E} — единственного параметра, входящего в данную задачу.

Постоянные A и B определяются граничными условиями на поверхности шара. Но уже сразу отметим, что поле внутри шара $\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$ оказывается однородным, отличающимся от приложенного поля \mathfrak{E} лишь своей абсолютной величиной.

Граничное условие непрерывности потенциала дает

$$E^{(i)} = \mathfrak{E} \left(1 - \frac{A}{R^3}\right)$$

(R — радиус шара), а условие непрерывности нормальной составляющей индукции —

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \left(1 + \frac{2A}{R^3}\right).$$

Исключая из этих двух равенств A , получим

$$\frac{1}{3}(D^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}E^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \quad (8,1)$$

или, подставив $D^{(i)} = \varepsilon^{(i)}E^{(i)}$,

$$E^{(i)} = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}} \mathfrak{E}. \quad (8,2)$$

Совершенно аналогичным способом решается задача о диэлектрическом бесконечном цилиндре во внешнем поле, перпендикулярном к его оси (ср. задачу 2 § 3). Поле внутри цилиндра, как и внутри шара в предыдущем примере, оказывается однородным. Оно удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}(D^{(i)} + \varepsilon^{(e)}E^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \quad (8,3)$$

или

$$E^{(i)} = \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} \mathfrak{E}. \quad (8,4)$$

Соотношения (8,1) и (8,3), в которые диэлектрическая постоянная $\epsilon^{(i)}$ шара или цилиндра не входит в явном виде, в особенности важны потому, что их справедливость не связана с линейной зависимостью между E и D внутри тела; они имеют место при любом виде этой зависимости (в том числе для анизотропных тел). Такой же характер имеют аналогичные соотношения

$$E^{(i)} = \mathfrak{E} \quad (8,5)$$

для цилиндра в продольном поле, и

$$D^{(i)} = \epsilon^{(e)} \mathfrak{E} \quad (8,6)$$

для плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле; эти равенства очевидны непосредственно из граничных условий.

Свойство создавать внутри себя однородное поле (будучи помещенным во внешнее однородное поле) присуще, оказывается, вообще всякому эллипсоиду с произвольным соотношением полуосей a, b, c . Задача о поляризации диэлектрического эллипсоида решается с помощью эллипсоидальных координат, подобно тому, как была решена в § 4 аналогичная задача для проводящего эллипсоида.

Потенциал поля вне эллипсоида ищем снова в виде (4,22) $\varphi'_e = \varphi_0 F(\xi)$ с функцией $F(\xi)$ из (4,23). В потенциал же поля внутри эллипсоида φ_i функция такого вида войти не может, так как она не удовлетворяет условию конечности поля во всем объеме внутри эллипсоида. Действительно, рассмотрим поверхность $\xi = -c^2$, представляющую собой поверхность эллипса в плоскости xu , лежащего внутри объема эллипсоида. При $\xi \rightarrow -c^2$ интеграл (4,23) ведет себя как $\sqrt{\xi + c^2}$. Напряженность поля, т. е. градиент потенциала, будет вести себя, следовательно, как $(\xi + c^2)^{-1/2}$, и обращается в бесконечность при $\xi = -c^2$. Таким образом, для поля внутри эллипсоида пригодно лишь решение $F(\xi) = \text{const}$, т. е. φ_i надо искать в виде

$$\varphi_i = B\varphi_0.$$

Мы видим, что потенциал φ_i отличается от потенциала однородного поля φ_0 только постоянным множителем. Другими словами, поле внутри эллипсоида будет однородным.

Мы не станем выписывать здесь малоинтересные формулы для поля вне эллипсоида. Однородное же поле внутри эллипсоида можно найти без фактического выписывания граничных условий, воспользовавшись вместо этого некоторыми известными уже нам результатами.

Предположим сначала, что эллипсоид находится в пустоте ($\epsilon^{(e)} = 1$). Тогда между векторами $E^{(i)}$, $D^{(i)}$, \mathfrak{E} (которые все имеют одинаковое

направление — вдоль оси x) должна существовать линейная связь вида

$$aE_x + bD_x = \mathfrak{E}_x,$$

где коэффициенты a , b зависят не от диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(i)}$ эллипсоида, а только от его формы. Наличие такой связи следует из вида граничных условий, в чем мы уже убедились выше на примерах шара и цилиндра.

Для определения a и b замечаем, что в тривиальном частном случае $\epsilon^{(i)} = 1$ было бы просто $E = D = \mathfrak{E}$; отсюда $a + b = 1$. Другой известный уже нам частный случай — проводящий эллипсоид. В проводнике $E^{(i)} = 0$, а индукция $D^{(i)}$ не имеет непосредственного физического смысла, но может рассматриваться как формальная величина, связанная с полным дипольным моментом эллипсоида соотношением

$$D = 4\pi P = 4\pi \frac{\mathcal{P}}{V}.$$

Согласно (4,26) при этом будет

$$D_x = \mathfrak{E}_x \frac{1}{n^{(x)}},$$

т. е. коэффициент $b = n^{(x)}$, а потому $a = 1 - n^{(x)}$.

Таким образом, мы приходим к следующему соотношению¹⁾:

$$(1 - n^{(x)})E_x^{(i)} + n^{(x)}D_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x. \quad (8,7)$$

Такие же соотношения, но с другими коэффициентами, справедливы для поля вдоль осей y и z . Как и частные формулы (8,1), (8,3), они справедливы при любом виде зависимости между E и D внутри эллипсоида.

Для напряженности поля внутри эллипсоида получим из (8,7), положив $D_x^{(i)} = \epsilon^{(i)}E_x^{(i)}$:

$$E_x^{(i)} = \frac{\mathfrak{E}_x}{1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}}, \quad (8,8)$$

а полный дипольный момент эллипсоида

$$\mathcal{P}_x = VP_x = \frac{(\epsilon^{(i)} - 1)}{4\pi} VE_x^{(i)} = \frac{abc}{3} \frac{\epsilon^{(i)} - 1}{1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}} \mathfrak{E}_x. \quad (8,9)$$

1) Его можно написать также и в виде

$$E_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x - 4\pi n^{(x)}P_x.$$

Величину $4\pi n^{(x)}P_x$ иногда называют деполаризующим полем. Аналогичная формула справедлива для намагничивающегося эллипсоида во внешнем однородном магнитном поле (см. § 27). В этой связи величины $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ называют коэффициентами размагничивания.

Если поле \mathfrak{E} имеет составляющие по всем трем осям, то поле внутри эллипсоида по-прежнему будет однородным, но, вообще говоря, не параллельным \mathfrak{E} . Не предвешая выбор системы координат, можно написать в общем случае соотношение (8,7) в виде

$$E_i^{(i)} + n_{ik}(D_k^{(i)} - E_k^{(i)}) = \mathfrak{E}_i. \quad (8,10)$$

Переход к случаю диэлектрической проницаемости среды, отличной от 1, совершается просто путем замены $\epsilon^{(i)}$ на $\epsilon^{(i)}/\epsilon^{(e)}$. При этом формула (8,7) принимает вид:

$$(1 - n^{(x)})\epsilon^{(e)}E_x^{(i)} + n^{(x)}D_x^{(i)} = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E}_x. \quad (8,11)$$

Эта формула может быть применена, в частности, к полю внутри эллипсоидального отверстия в неограниченной диэлектрической среде: для этого надо положить $\epsilon^{(i)} = 1$.

Задачи¹⁾

1. Определить момент сил, действующих на эллипсоид вращения в однородном электрическом поле.

Решение. Согласно общей формуле (16,13) момент сил, действующих на эллипсоид, равен $K = [\mathcal{P}\mathfrak{E}]$, где \mathcal{P} — дипольный момент эллипсоида. В эллипсоиде вращения вектор \mathcal{P} лежит в плоскости, проходящей через ось симметрии и направление \mathfrak{E} . Момент же сил направлен перпендикулярно к этой плоскости, а для его абсолютной величины вычисление с помощью формул (8,9) приводит к результату

$$K = \frac{(\epsilon - 1)^2 |1 - 3n| \mathfrak{E}^2 V \sin 2\alpha}{8\pi [n\epsilon + 1 - n] [(1 - n)\epsilon + 1 + n]},$$

где α — угол между направлением \mathfrak{E} и осью симметрии эллипсоида, а n — коэффициент деполяризации вдоль этой оси (так что коэффициент деполяризации в перпендикулярных к этой оси направлениях есть $\frac{1}{2}(1 - n)$). Момент сил направлен так, что он стремится повернуть ось симметрии вытянутого ($n < \frac{1}{3}$) и сплюснутого ($n > \frac{1}{3}$) эллипсоидов в положение, соответственно параллельно и перпендикулярно к полю.

Для проводящего эллипсоида ($\epsilon \rightarrow \infty$) имеем

$$K = \frac{|1 - 3n|}{8\pi n(1 - n)} V \mathfrak{E}^2 \sin 2\alpha.$$

2. Диэлектрический полый шар (диэлектрическая постоянная ϵ , внутренний и внешний радиусы b и a) находится в однородном внешнем электрическом поле \mathfrak{E} . Определить поле в полости шара.

Решение. Аналогично тому, как было сделано в тексте для сплошного шара, ищем потенциал поля в пустоте снаружи шара (область I) и внутри полости (область 3) соответственно в виде

$$\varphi_1 = -\mathfrak{E} \cos \theta \left(r - \frac{A}{r^2} \right), \quad \varphi_3 = -B \mathfrak{E} r \cos \theta,$$

¹⁾ В задачах этого параграфа предполагается, что эллипсоид находится в пустоте.

а потенциал поля в диэлектрическом слое (область 2) — в виде

$$\varphi_2 = -C\mathfrak{E} \cos \theta \left(r - \frac{D}{r^2} \right),$$

где A, B, C, D — постоянные, определяющиеся из условий непрерывности φ и $\epsilon \partial\varphi/\partial r$ на границах 1—2 и 2—3. Таким образом, поле $E_3 = B\mathfrak{E}$ внутри полости оказывается однородным (поле же E_2 в шаровом слое неоднородно). Вычисление постоянных приводит к результату:

$$E_3 = \mathfrak{E} \frac{9\epsilon}{(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1) - 2(\epsilon - 1)^2(b/a)^3}.$$

3. То же для полого цилиндра в поперечном однородном поле¹⁾.

Решение аналогично предыдущей задаче и приводит к результату:

$$E_3 = \mathfrak{E} \frac{4\epsilon}{(\epsilon + 1)^2 - (\epsilon - 1)^2(b/a)^2}.$$

§ 9. Диэлектрическая проницаемость смеси

Если вещество представляет собой мелкодисперсную смесь (эмульсия, порошкообразная смесь и т. п.), то можно рассматривать электрическое поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с масштабами неоднородностей. По отношению к такому среднему полю смесь является однородной и изотропной средой и как таковая может характеризоваться определенным эффективным значением диэлектрической проницаемости, которое мы обозначим как $\epsilon_{\text{см}}$. Если \bar{E} и \bar{D} — усредненные указанным образом напряженности и индукция поля, то, по определению $\epsilon_{\text{см}}$,

$$\bar{D} = \epsilon_{\text{см}} \bar{E}. \quad (9,1)$$

Если все частицы смеси изотропны, а разности между их диэлектрическими проницаемостями малы по сравнению с самими ϵ , то оказывается возможным вычислить в общем виде $\epsilon_{\text{см}}$ с точностью до членов второго порядка по указанным разностям.

Напишем местное значение напряженности поля в виде $E = \bar{E} + \delta E$, а местное значение диэлектрической проницаемости — как $\bar{\epsilon} + \delta\epsilon$, где

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{V} \int \epsilon dV \quad (9,2)$$

получается усреднением по объему. Тогда среднее значение индукции

$$\bar{D} = \overline{(\bar{\epsilon} + \delta\epsilon)(\bar{E} + \delta E)} = \bar{\epsilon} \bar{E} + \overline{\delta\epsilon \delta E} \quad (9,3)$$

(так как, по определению $\delta\epsilon$ и δE , их средние значения равны нулю). В нулевом приближении $\epsilon_{\text{см}} = \bar{\epsilon}$; первый отличный от нуля

¹⁾ В продольном поле ответ очевиден: $E_3 = \mathfrak{E}$.

поправочный член будет, естественно, второго порядка по $\delta\varepsilon$, как это видно и из (9,3).

Из неусредненного уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, с точностью до малых членов первого порядка, имеем

$$\operatorname{div}(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}) = \bar{\varepsilon} \operatorname{div} \delta\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}} \nabla \delta\varepsilon = 0,$$

или, подставив сюда $\delta\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \delta\varphi$,

$$\bar{\varepsilon} \Delta \delta\varphi = \mathbf{E} \nabla \delta\varepsilon.$$

Применив к этому уравнению операцию grad , получим

$$\Delta \delta\mathbf{E} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}} (\bar{\mathbf{E}} \nabla) \nabla \delta\varepsilon. \quad (9,4)$$

Усреднение произведения $\delta\varepsilon \delta\mathbf{E}$ в (9,3) проводим в два этапа. Прежде всего, усредняем по объему частиц одного и того же вещества, т. е. при заданном значении $\delta\varepsilon$. Усредненное таким образом значение $\delta\mathbf{E}$ легко получить из уравнения (9,4). Именно, ввиду изотропности смеси в целом, после усреднения обеих сторон равенства (9,4) оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ в правой его части перейдет в

$$\frac{1}{3} \delta_{ik} \Delta,$$

так что получится

$$\Delta \delta\bar{\mathbf{E}} = -\frac{1}{3\bar{\varepsilon}} \bar{\mathbf{E}} \Delta \delta\varepsilon,$$

откуда

$$\delta\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\bar{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}} \delta\varepsilon.$$

Умножив на $\delta\varepsilon$ и производя окончательное усреднение по всем компонентам смеси, получим

$$\overline{\delta\varepsilon \delta\bar{\mathbf{E}}} = -\frac{\bar{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}} \overline{(\delta\varepsilon)^2}.$$

Наконец, подставив это выражение в (9,3) и сравнив с (9,1), получим искомый результат:

$$\varepsilon_{\text{см}} = \bar{\varepsilon} - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{3\bar{\varepsilon}}. \quad (9,5)$$

Эта формула может быть представлена и в другом виде, если заметить, что с точностью до членов второго порядка

$$\bar{\varepsilon}^{1/3} = (\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)^{1/3} = \bar{\varepsilon}^{-1/3} \left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2} \right).$$

Поэтому

$$\epsilon_{\text{ом}}^{1/3} = \overline{\epsilon^{1/3}}. \quad (9,6)$$

Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемом приближении оказывается аддитивным кубический корень из ϵ .

З а д а ч а

Определить диэлектрическую проницаемость эмульсии с малой концентрацией, но произвольной разницей между диэлектрическими проницаемостями среды (ϵ_1) и диспергированной фазы (ϵ_2).

Р е ш е н и е. В интеграле

$$\frac{1}{V} \int (D - \epsilon_1 E) dV \equiv \overline{D} - \epsilon_1 \overline{E}$$

подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри частиц эмульсии. Поэтому он пропорционален объемной концентрации c эмульсии, и при его вычислении можно считать, что частицы эмульсии находятся во внешнем поле, равном среднему полю \overline{E} . Предполагая частицы сферическими и воспользовавшись формулой (8,2), получим для коэффициента пропорциональности между \overline{D} и \overline{E} :

$$\epsilon_{\text{ом}} = \epsilon_1 + c \frac{3(\epsilon_2 - \epsilon_1)\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1}.$$

Эта формула справедлива с точностью до членов первого порядка по c . При близких ϵ_1 и ϵ_2 она совпадает (с точностью до членов первого порядка по c и второго по $\epsilon_2 - \epsilon_1$) с результатом, даваемым при малых c формулой (9,6).

§ 10. Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле

Вопрос об изменении термодинамических свойств благодаря наличию электрического поля не возникает для проводников. Поскольку электрическое поле внутри проводника отсутствует, то все изменение его термодинамических величин сводится просто к добавлению к его полной энергии энергии создаваемого им в окружающем пространстве поля¹⁾. Эта величина вообще не зависит от термодинамического состояния (в частности, от температуры) тела и потому, например, не сказывается на его энтропии.

Напротив, на термодинамические свойства диэлектриков электрическое поле, проникая внутрь тела, оказывает глубокое влияние. Для изучения этих свойств, прежде всего, определим работу, производимую над теплоизолированным диэлектриком при бесконечно малом изменении поля в нем.

Электрическое поле, в котором находится диэлектрик, надо представлять себе как создаваемое некоторыми посторонними заряженными

1) Мы отвлекаемся здесь от энергии связи заряда с веществом проводника; эта энергия будет рассмотрена в § 22.

проводниками, а изменение поля можно тогда рассматривать как результат изменения зарядов проводников¹⁾. Предположим для краткости, что имеется всего один проводник с зарядом e и потенциалом φ . Работа, которую надо произвести для того, чтобы увеличить его заряд на бесконечно малую величину δe , равна

$$\delta R = \varphi \delta e; \quad (10,1)$$

это есть механическая работа, производимая заданным полем над зарядом δe , переносимым из бесконечности (где потенциал поля равен нулю) к поверхности проводника и проходящим, следовательно, разность потенциалов, равную φ . Преобразуем δR к виду, выраженному через значения поля в окружающем проводник пространстве, заполненном диэлектриком.

Если D_n — проекция вектора электрической индукции на направление нормали к поверхности проводника, внешней по отношению к диэлектрику (и внутренней по отношению к проводнику), то поверхностная плотность зарядов на проводнике равна $-D_n/4\pi$, так что

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n df = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}.$$

Имея в виду, что потенциал φ постоянен вдоль всей поверхности проводника, пишем

$$\delta R = \varphi \delta e = -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \delta \mathbf{D}) dV.$$

Последний интеграл справа берется по всему объему вне проводника. Поскольку варьированное поле, как и первоначальное, удовлетворяет уравнениям поля, то $\operatorname{div} \delta \mathbf{D} = 0$, так что

$$\operatorname{div} (\varphi \delta \mathbf{D}) = \varphi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi = -E \delta \mathbf{D}.$$

Таким образом, получаем окончательно следующую важную формулу:

$$\delta R = \int \frac{E \delta \mathbf{D}}{4\pi} dV. \quad (10,2)$$

Подчеркнем, что интегрирование в этой формуле производится по всему полю, в том числе и по области вакуума, если диэлектрическая среда занимает не весь объем пространства вне проводников.

Работа, произведенная над теплоизолированным телом, есть не что иное, как изменение энергии тела при постоянной его энтро-

1) Окончательные выражения, которые будут нами получены, содержат только значения поля внутри диэлектрика и потому не зависят от происхождения поля. Ввиду этого нам не нужно особо оговаривать случаи, когда поле создается не заряженными проводниками, а, например, внесенными в самый диэлектрик сторонними зарядами или же его пирозлектрической (см. § 13) поляризацией.

пии. Поэтому найденное нами выражение (10,2) должно быть добавлено к термодинамическому соотношению, определяющему бесконечно малое изменение полной энергии тела, включающей в себя также и энергию электрического поля. Обозначив эту энергию посредством \mathcal{U} , имеем, следовательно,

$$\delta\mathcal{U} = T\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi} \int E\delta D dV \quad (10,3)$$

(T — температура, \mathcal{S} — энтропия тела)¹⁾. Соответственно для полной свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - T\mathcal{S}$ ²⁾ имеем

$$\delta\mathcal{F} = -\mathcal{S}\delta T + \frac{1}{4\pi} \int E\delta D dV. \quad (10,4)$$

Аналогичные термодинамические соотношения могут быть написаны и для величин, относящихся к единице объема тела. Пусть U , S и ρ — внутренняя энергия, энтропия и масса единицы объема тела. Как известно, обычное термодинамическое соотношение (в отсутствие поля) для внутренней энергии в заданном объеме гласит:

$$dU = T dS + \zeta d\rho,$$

где ζ — химический потенциал вещества³⁾. При наличии поля в диэлектрике сюда должен быть добавлен член, взятый из подынтегрального выражения в (10,3):

$$dU = T dS + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi} E dD. \quad (10,5)$$

Для свободной энергии $F = U - TS$ единицы объема диэлектрика имеем соответственно

$$dF = -S dT + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi} E dD. \quad (10,6)$$

Полученные соотношения представляют собой основу термодинамики диэлектриков.

1) Что касается объема тела (дифференциал которого обычно пишется в выражении для $\delta\mathcal{U}$), то следует иметь в виду, что в электрическом поле тело становится, вообще говоря, неоднородным, и потому объем не характеризует его состояния.

2) Эту величину имеет смысл рассматривать лишь при постоянной вдоль тела температуре.

3) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 24. Вместо плотности массы, мы пользовались там числом частиц N в единице объема, связанным с плотностью посредством $\rho = Nm$ (m — масса молекулы); в связи с этим определения химического потенциала в этой и в той книгах отличаются множителем (химический потенциал отнесен теперь к единице массы, а не к одной частице вещества).

Химический потенциал мы обозначаем здесь буквой ζ вместо более обычного обозначения μ ; обозначение плотности массы вещества той же буквой ρ , что и плотность зарядов, не может привести к недоразумению, так как эти величины нигде не будут фигурировать вместе.

Мы видим, что величины U и F являются термодинамическими потенциалами соответственно по отношению к переменным S, ρ, \mathbf{D} и T, ρ, \mathbf{D} . В частности, можно получить напряженность поля путем дифференцирования этих потенциалов по компонентам вектора \mathbf{D} :

$$\mathbf{E} = 4\pi \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}} \right)_{S, \rho} = 4\pi \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right)_{T, \rho}. \quad (10,7)$$

Свободная энергия в этом отношении удобнее, так как ее дифференцирование должно производиться при постоянной температуре, между тем как внутренняя энергия должна при этом быть выражена через менее удобную величину — энтропию.

Наряду с U и F полезно ввести термодинамические потенциалы, в которых роль независимых переменных играют компоненты вектора \mathbf{E} , а не \mathbf{D} . Таковыми являются величины

$$\tilde{U} = U - \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{4\pi}, \quad \tilde{F} = F - \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{4\pi}, \quad (10,8)$$

для дифференциалов которых имеем

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= T dS + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} d\mathbf{E}, \\ d\tilde{F} &= -S dT + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} d\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (10,9)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\mathbf{D} = -4\pi \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{E}} \right)_{S, \rho} = -4\pi \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}} \right)_{T, \rho}. \quad (10,10)$$

Обратим внимание на то, что связь между термодинамическими величинами, которые мы обозначаем буквами со знаком \sim и без него, как раз соответствует той, которая уже была введена в § 5 для энергии электростатического поля проводников в пустоте.

Действительно, интеграл $\int \mathbf{E}\mathbf{D} dV$ можно преобразовать в точности аналогично тому, как мы это делали в начале § 3, используя при этом уравнение $\text{div } \mathbf{D} = 0$ в объеме диэлектрика и граничное условие $D_n = 4\pi\sigma$ на поверхности проводников:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\mathbf{D} dV &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{D} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \int \varphi_a D_n df = \sum_a \varphi_a e_a. \end{aligned} \quad (10,11)$$

Поэтому, например, для внутренней энергии:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{4\pi} dV = \mathcal{U} - \sum_a \varphi_a e_a, \quad (10,12)$$

в соответствии с определением (5,5).

Полезно сопоставить также формулы для бесконечно малых изменений этих величин, выраженные через заряды и потенциалы проводников (источников поля). Так, для вариации свободной энергии (при заданной температуре) имеем

$$(\delta \mathcal{F})_T = \delta R = \sum_a \varphi_a \delta e_a. \quad (10,13)$$

Для вариации же $\tilde{\mathcal{F}}$ получим

$$(\delta \tilde{\mathcal{F}})_T = (\delta \mathcal{F})_T - \delta \sum_a \varphi_a e_a = - \sum_a e_a \delta \varphi_a. \quad (10,14)$$

Можно сказать, что величины без знака \sim являются термодинамическими потенциалами по отношению к зарядам проводников, а величины со знаком \sim — по отношению к их потенциалам.

Как известно из термодинамики ¹⁾, различные термодинамические потенциалы обладают свойством достигать в состоянии теплового равновесия минимума по отношению к различным изменениям состояния тела. При формулировании этих условий равновесия в электрическом поле необходимо указывать, рассматриваются ли изменения состояния при неизменных зарядах или потенциалах проводников — источниках поля. Так, \mathcal{F} или $\tilde{\mathcal{F}}$ имеют в равновесии минимум по отношению к изменениям состояния, происходящим при постоянной температуре и, соответственно, постоянных зарядах или потенциалах проводников (то же самое для \mathcal{U} и $\tilde{\mathcal{U}}$ справедливо при постоянной энтропии тела).

Если в теле могут происходить какие-либо процессы, не имеющие прямого отношения к электрическому полю (например, химические реакции), то условие равновесия по отношению к этим процессам дается минимумом F при заданных плотности и температуре тела и индукции D в нем либо минимумом \tilde{F} при постоянных плотности, температуре и напряженности поля E .

До сих пор мы не делали никаких предположений о зависимости D от E , так что все полученные термодинамические соотношения справедливы при любом характере этой зависимости. Применим их теперь к изотропному диэлектрику с линейной зависимостью $D = \epsilon E$. В этом случае интегрирование соотношений (10,5) и (10,6) дает

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon}, \\ F &= F_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon}, \end{aligned} \quad (10,15)$$

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 15, 1951.

где U_0 и F_0 относятся к диэлектрику в отсутствие поля. Таким образом, в данном случае величина

$$\frac{D^2}{8\pi\epsilon} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi}$$

представляет собой связанное с наличием поля изменение внутренней энергии (при заданных значениях энтропии и плотности) или изменение свободной энергии (при заданных температуре и плотности) единицы объема диэлектрической среды.

Аналогичны выражения для потенциалов \tilde{U} и \tilde{F} :

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{8\pi}, \\ \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{8\pi}.\end{aligned}\quad (10,16)$$

Мы видим, что разности $U - U_0$ и $\tilde{U} - U_0$ отличаются в этом случае только знаком, как это имело место и для электрического поля в пустоте (§ 5). В диэлектрической среде, однако, такое простое соотношение справедливо только при линейной связи между D и E .

Выпишем также для дальнейших справок формулы для плотности энтропии S и для химического потенциала вещества ζ , следующие из (10,15):

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho, D} = S_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)_\rho = S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)_\rho, \quad (10,17)$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{T, D} = \zeta_0(T, \rho) - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial \rho}\right)_T. \quad (10,18)$$

Обе эти величины отличны от нуля, разумеется, только внутри диэлектрика.

Полная свободная энергия получается интегрированием (10,15) по всему пространству. Ввиду (10,11) имеем

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \frac{ED}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a. \quad (10,19)$$

Последнее выражение формально совпадает с формулой для энергии электростатического поля проводников в пустоте. К этому же результату можно прийти и непосредственно, исходя из вариации $\delta\mathcal{F}$ (10,13) при бесконечно малом изменении зарядов проводников. В данном случае, при линейной связи D с E , все уравнения поля и граничные условия к ним тоже линейны. Поэтому потенциалы проводников должны быть (как и для поля в пустоте) линейными функциями их зарядов, и интегрирование равенства (10,13) приводит к (10,19).

Подчеркнем, что в этих рассуждениях отнюдь не предполагалось, что диэлектрик заполняет все пространство вне проводников.

Если же последнее имеет место, то можно пойти еще дальше и, используя изложенные в конце § 7 результаты, утверждать следующее. При заданных зарядах проводников введение диэлектрической среды уменьшает в ϵ раз вместе с потенциалами проводников также и энергию поля (по сравнению со значениями этих величин для поля в пустоте). Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то энергия поля увеличивается в ϵ раз (вместе с зарядами проводников).

З а д а ч а

Определить высоту h поднятия уровня жидкости, втягиваемой в вертикальный плоский конденсатор.

Р е ш е н и е. При заданных потенциалах обкладок конденсатора должна быть минимальной \mathcal{F} , в которой надо учесть также и энергию $\rho g h^2/2$ столба жидкости в поле тяжести. Из этого условия легко получается

$$h = \frac{\epsilon - 1}{8\pi\rho g} E^2.$$

§ 11. Полная свободная энергия диэлектрического тела

Полная свободная энергия \mathcal{F} (или полная внутренняя энергия \mathcal{U}), как она была определена в предыдущем параграфе, включает в себя также и энергию внешнего электрического поля, поляризующего диэлектрик. Наряду с этой величиной имеет смысл рассмотреть полную свободную энергию, из которой исключена энергия поля, которое существовало бы во всем пространстве в отсутствие тела. Обозначим напряженность последнего посредством \mathcal{E} . Тогда «полная» в указанном смысле свободная энергия равна интегралу

$$\int \left(F - \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \right) dV, \quad (11,1)$$

где F — «плотность» свободной энергии. Мы будем здесь обозначать эту величину той же буквой \mathcal{F} , которой в § 10 обозначался интеграл $\int F dV$. Следует подчеркнуть, что разница между обоими определениями \mathcal{F} сводится к величине, не зависящей от термодинамического состояния и свойств диэлектрика, и потому вообще не отражается на основных термодинамических дифференциальных соотношениях, которые имеют место для этой величины¹⁾.

Вычислим изменение \mathcal{F} в результате бесконечно малого изменения поля, происходящего при постоянной температуре и без нарушения термодинамического равновесия среды.

1) Отметим, что вычитать из F величину $E^2/8\pi$ не имело бы смысла, так как E есть поле, уже измененное присутствием диэлектрика, и потому разность $F - (E^2/8\pi)$ отнюдь нельзя было бы рассматривать как плотность свободной энергии диэлектрика как такового.

Поскольку $\delta F = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \delta \mathbf{D}$, то имеем

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E} \delta \mathbf{D} - \mathfrak{E} \delta \mathfrak{E}) dV.$$

Это выражение можно тождественно переписать в виде

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) \delta \mathfrak{E} dV + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} (\delta \mathbf{D} - \delta \mathfrak{E}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \delta \mathfrak{E} dV. \quad (11,2)$$

В первом интеграле пишем $\delta \mathfrak{E} = -\text{grad } \delta \varphi_0$ (φ_0 — потенциал поля \mathfrak{E}) и преобразуем его по частям:

$$\int \text{grad } \delta \varphi_0 (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) dV = \int \delta \varphi_0 (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) d\mathbf{f} - \int \delta \varphi_0 \text{div} (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) dV.$$

Легко видеть, что оба интеграла в правой стороне равенства обращаются в нуль. Для объемного интеграла это следует непосредственно из уравнений $\text{div } \mathbf{D} = 0$ и $\text{div } \mathfrak{E} = 0$, которым удовлетворяют соответственно поле в диэлектрике и поле в пустоте. Первый же интеграл берется по поверхности создающих поле проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Последний интеграл обращается, как обычно, в нуль, а на каждом из проводников $\delta \varphi_0 = \text{const}$, так что

$$\oint \delta \varphi_0 (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) d\mathbf{f} = \delta \varphi_0 \oint (\mathbf{D} - \mathfrak{E}) d\mathbf{f}.$$

Но поле \mathfrak{E} , по определению, создается теми же источниками, что и поле \mathbf{E} с индукцией \mathbf{D} (т. е. одними и теми же проводниками с заданными полными зарядами e на них). Поэтому оба интеграла $\oint \mathbf{D}_n d\mathbf{f}$ и $\oint \mathfrak{E}_n d\mathbf{f}$ равны одной и той же величине $4\pi e$, а их разность равна нулю.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что равен нулю и второй член в (11,2) (для этого подставляем в нем $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ и производим такое же преобразование). Окончательно получается

$$\delta \mathcal{F} = -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \delta \mathfrak{E} dV = -\int \mathbf{P} \delta \mathfrak{E} dV. \quad (11,3)$$

Замечательно, что в этом выражении интеграл берется только по объему, занятому диэлектрической средой, так как вне тела $\mathbf{P} = 0$.

Подчеркнем, однако, что подынтегральное выражение $\mathbf{P} \delta \mathfrak{E}$ не может быть истолковано как вариация «плотности» свободной энергии тела, подобно тому, как это было сделано в связи с формулами (10,3), (10,4). Прежде всего, эта «плотность» должна существовать и вне тела, так как его наличие искажает поле и в окружающем пространстве. Ясно также, что плотность энергии в каждой точке тела

может зависеть лишь от реально существующего в ней поля, а не от поля, которое имелось бы здесь в отсутствие тела.

Если внешнее поле \mathfrak{E} однородно, то

$$\delta\mathcal{F} = -\delta\mathfrak{E} \int P dV = -\mathcal{P} \delta\mathfrak{E}, \quad (11,4)$$

где \mathcal{P} — полный электрический дипольный момент тела. Поэтому термодинамическое тождество для свободной энергии можно написать в данном случае как

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{P} dT - \mathcal{P} d\mathfrak{E}. \quad (11,5)$$

Полный электрический момент тела можно, следовательно, получить путем дифференцирования полной свободной энергии:

$$\mathcal{P} = -\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{E}}\right)_T. \quad (11,6)$$

Отметим, что последнюю формулу можно получить и непосредственно из общей статистической формулы

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial\lambda} = \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)_T,$$

где $\overline{\mathcal{H}}$ — гамильтониан тела как системы составляющих его частиц, а λ — какой-либо параметр, характеризующий внешние условия, в которых находится тело¹⁾. Для тела, находящегося во внешнем однородном поле \mathfrak{E} , гамильтониан содержит член $-\mathfrak{E}\hat{\mathcal{P}}$, где $\hat{\mathcal{P}}$ — оператор дипольного момента, и, выбрав \mathfrak{E} в качестве параметра λ , мы получим искомую формулу.

Если \mathbf{D} и \mathbf{E} связаны друг с другом линейной зависимостью $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, то аналогичным путем можно вычислить в явном виде не только вариацию $\delta\mathcal{F}$, но и самую \mathcal{F} . Имеем

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{D} - \mathfrak{E}^2}{8\pi} dV.$$

Это выражение тождественно переписываем в виде

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} + \mathfrak{E})(\mathbf{D} - \mathfrak{E}) dV - \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E}(\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV.$$

Первый член в правой стороне равенства обращается в нуль, в чем можно убедиться, положив в нем $\mathbf{E} + \mathfrak{E} = -\text{grad}(\varphi + \varphi_0)$ и произведя преобразование, в точности аналогичное произведенному выше. Поэтому получаем:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \int \frac{\mathfrak{E}\mathbf{P}}{2} dV. \quad (11,7)$$

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, §§ 11, 15.

В частности, в однородном внешнем поле

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2} \mathcal{E} \mathcal{P}. \quad (11,8)$$

Последнее равенство можно было бы получить и путем непосредственного интегрирования соотношения (11,3), если заметить, что в силу линейности всех уравнений поля (при $D = \epsilon E$) электрический момент \mathcal{P} должен быть линейной функцией \mathcal{E} .

Линейную зависимость между компонентами \mathcal{P} и \mathcal{E} можно написать в виде

$$\mathcal{P}_i = V \alpha_{ik} \mathcal{E}_k, \quad (11,9)$$

подобно тому как это было сделано нами для проводников (§ 2). В отличие от проводников, однако, «поляризуемость» диэлектрического тела зависит не только от его формы, но и от его диэлектрической постоянной. Симметричность тензора α_{ik} (упомянутая уже в § 2) непосредственно следует из соотношения (11,6); достаточно заметить, что вторая производная

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{E}_k \partial \mathcal{E}_i} = -\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial \mathcal{E}_k} = -V \alpha_{ik}$$

не зависит от порядка дифференцирования.

Формула (11,7) еще более упрощается в важном случае, когда ϵ близко к 1, т. е. диэлектрическая восприимчивость $\chi = (\epsilon - 1)/4\pi$ мала. В этом случае при вычислении энергии можно пренебречь вызываемым наличием тела искажением поля, т. е. положить

$$P = \chi E \cong \chi \mathcal{E}.$$

Тогда

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{\chi}{2} \int \mathcal{E}^2 dV, \quad (11,10)$$

где интеграл берется по объему тела. В однородном поле дипольный момент $\mathcal{P} = V \chi \mathcal{E}$, а свободная энергия

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{\chi V}{2} \mathcal{E}^2. \quad (11,11)$$

В общем случае произвольной зависимости D от E простые формулы (11,7) и (11,8) не имеют места. Для вычисления \mathcal{F} здесь может быть полезной формула

$$\mathcal{F} = \int \left(F - \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \right) dV = \int \left[F - \frac{ED}{8\pi} - \frac{1}{2} P \mathcal{E} \right] dV, \quad (11,12)$$

вывод которой после произведенных выше вычислений очевиден. И здесь подынтегральное выражение (в последнем интеграле) обращается в нуль вне тела, так что интегрирование производится только по его объему.

ЗАДАЧА

Получить формулу, заменяющую (11,7), для тела, находящегося не в пустоте, а в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(e)}$.

Решение. Повторяя для этого случая произведенные в тексте преобразования, получим:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E} (\mathbf{D} - \epsilon^{(e)} \mathbf{E}) dV.$$

§ 12. Электрострикция изотропных диэлектриков

Для твердого диэлектрика в электрическом поле нельзя ввести понятие давления так, как это делается для изотропного тела в отсутствие поля, потому что действующие в нем силы (они будут определены в §§ 15, 16) меняются вдоль тела и анизотропны, даже если тело само по себе изотропно. Точное определение деформации (так называемой электрострикции) такого тела требует решения сложной задачи теории упругости.

Дело обстоит, однако, гораздо проще, если нас интересует только изменение полного объема тела. Как уже было указано в § 5, при этом можно считать форму тела неизменной, т. е. рассматривать деформацию как равномерное всестороннее сжатие или растяжение.

Будем пренебрегать диэлектрическими свойствами внешней среды (например, атмосферы), в которой находится рассматриваемое тело, т. е. будем считать, что ее $\epsilon = 1$. Роль среды сводится только к созданию равномерного давления, действующего на поверхность тела. Именно это внешнее давление мы будем обозначать ниже посредством p . Если \mathcal{F} — полная свободная энергия тела, то согласно известному термодинамическому соотношению

$$p = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right)_T,$$

и соответственно в выражении для дифференциала $d\mathcal{F}$ должен быть добавлен член $-p dV$. Так, в однородном внешнем поле имеем вместо (11,5)

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S} dT - p dV - \mathcal{P} d\mathfrak{E}.$$

Введем полный термодинамический потенциал тела согласно обычному термодинамическому определению:

$$\mathcal{P} = \mathcal{F} + pV. \quad (12,1)$$

Для дифференциала этой величины (в однородном внешнем поле) имеем соотношение

$$d\mathcal{P} = -\mathcal{S} dT + V dp - \mathcal{P} d\mathfrak{E}. \quad (12,2)$$

Изменение термодинамических величин во внешнем электрическом поле является обычно относительно малой величиной. Как известно ¹⁾, малое изменение свободной энергии (при заданных T и V) и малое изменение термодинамического потенциала (при заданных T и p) равны друг другу. Поэтому наряду с (11,8) можно написать аналогичное соотношение

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - \frac{1}{2} \mathcal{E} \mathcal{P} \quad (12,3)$$

для термодинамического потенциала тела во внешнем однородном поле. Здесь \mathcal{P}_0 относится к телу в отсутствие поля при заданных значениях p , T (в то время как \mathcal{F}_0 в (11,8) есть свободная энергия тела в отсутствие поля при заданных значениях V и T).

Выразив в явном виде зависимость дипольного момента от V и \mathcal{E} согласно (11,9), перепишем (12,3) в виде

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0(p, T) - \frac{1}{2} V \alpha_{ik} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k, \quad (12,4)$$

причем поправочный член должен быть выражен в функции от температуры и давления согласно уравнению состояния тела в отсутствие поля. В особенности упрощается эта формула в случае малой диэлектрической восприимчивости вещества:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0(p, T) - \frac{\chi V}{2} \mathcal{E}^2 \quad (12,5)$$

(ср. (11,11)).

Искомое изменение объема $V - V_0$ во внешнем поле можно получить теперь непосредственно путем дифференцирования \mathcal{P} по давлению (при постоянных T и \mathcal{E}). Так, из (12,5) найдем

$$V - V_0 = - \frac{\mathcal{E}^2}{2} \left(\frac{\partial (\chi V)}{\partial p} \right)_T. \quad (12,6)$$

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной (в противоположность электрострикции проводников, объем которых в поле всегда возрастает).

Аналогичным образом можно вычислить также и количество тепла Q , поглощаемое в диэлектрике при изотермическом включении внешнего электрического поля (причем внешнее давление поддерживается постоянным) ²⁾.

Дифференцирование $\mathcal{P} - \mathcal{P}_0$ по температуре даст изменение энтропии тела, а умножая его на T , получим искомое количество

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 15, 1951.

²⁾ Если же тело теплоизолировано, то наложение поля приведет к изменению температуры, равному $\Delta T = -Q/C_p$, где C_p — теплоемкость тела при постоянном давлении.

тепла. Так, из (12,5) получается

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2 T}{2} \left(\frac{\partial (\alpha V)}{\partial T} \right)_p. \quad (12,7)$$

Положительные значения Q соответствуют поглощению тепла.

З а д а ч и

1. Определить изменение объема и электрокалорический эффект для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле, параллельном одной из его осей.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (12,3) и (8,9) имеем

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 - \frac{V}{8\pi} \frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \mathcal{E}^2.$$

Для изменения объема находим:

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \frac{1}{K} - \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right],$$

а для электрокалорического эффекта:

$$Q = \frac{TV\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \alpha + \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right],$$

где $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ — коэффициент сжимаемости тела, а $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ — коэффициент теплового расширения.

В частности, для плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле $n = 1$, так что

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{1}{K} - \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \quad Q = \frac{TV\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

Для такой же пластинки (или любого цилиндрического тела) в продольном поле $n = 0$ и

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{(\epsilon - 1)}{K} - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \quad Q = \frac{TV\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[(\epsilon - 1) \alpha + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

2. Определить разность теплоемкости \mathcal{C}_φ плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле при постоянной разности потенциалов между ее сторонами и теплоемкости \mathcal{C}_D при постоянной индукции; в обоих случаях внешнее давление поддерживается постоянным¹⁾.

Р е ш е н и е. Согласно результатам задачи 1 энтропия пластинки

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \right)_{p, \mathcal{E}} = \mathcal{S}_0(p, T) + \frac{V\mathcal{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

Индукция поля внутри пластинки совпадает с внешним полем: $D = \mathcal{E}$. Поэтому для вычисления теплоемкости \mathcal{C}_D надо дифференцировать \mathcal{S} при постоян-

1) \mathcal{C}_φ является теплоемкостью пластинки, помещенной между обкладками плоского конденсатора, включенного в цепь с постоянной э. д. с. В разомкнутом же конденсаторе с постоянными зарядами на обкладках пластинка будет иметь теплоемкость \mathcal{C}_D .

ном \mathcal{E} . Разность потенциалов между сторонами пластинки $\varphi = El = \mathcal{E}l/\epsilon$, где l — толщина пластинки. При равномерном сжатии или расширении тела l меняется пропорционально $V^{1/3}$. Поэтому для вычисления теплоемкости \mathcal{C}_φ надо дифференцировать \mathcal{S} при постоянном произведении $\mathcal{E}V^{1/3}/\epsilon$. В результате найдем для искомой разности:

$$\mathcal{C}_\varphi - \mathcal{C}_D = \frac{TV\mathcal{E}^3}{4\pi\epsilon} \left[(\epsilon - 1)\alpha + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_p \right] \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_p - \frac{\alpha}{3} \right].$$

3. Определить электрокалорический эффект в однородном диэлектрике, полный объем которого поддерживается постоянным.

Решение. Строго говоря, при наложении внешнего поля плотность тела меняется (становясь неоднородной вдоль тела), даже если его полный объем поддерживается постоянным. Однако при вычислении изменения полной энтропии этим обстоятельством можно пренебречь и считать плотность ρ постоянной в каждой точке тела¹⁾.

Согласно (10,17) полная энтропия тела

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_p \int E^2 dV,$$

где интегрирование распространяется по объему тела. Поглощаемое количество тепла

$$Q = \frac{T}{8\pi} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_p \int E^2 dV.$$

4. Определить разность $\mathcal{C}_\varphi - \mathcal{C}_D$ (см. задачу 2) при постоянном полном объеме пластинки.

Решение. При неизменном объеме (а потому и толщине) пластинки дифференцирование при постоянной разности потенциалов эквивалентно дифференцированию при постоянной напряженности E . С помощью полученной в задаче 3 формулы для энтропии получим:

$$\mathcal{C}_E - \mathcal{C}_D = \frac{TVE^3}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_p^2.$$

5. Конденсатор состоит из двух проводящих поверхностей, находящихся на расстоянии h друг от друга, малом по сравнению с размерами обкладок; пространство между обкладками заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . В конденсатор вводится шарик радиуса $a \ll h$ с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Определить изменение емкости конденсатора.

Решение. Пусть шарик вводится в конденсатор так, что разность потенциалов φ между его обкладками остается неизменной. Роль свободной энергии при постоянных потенциалах проводников играет \mathcal{F} . В отсутствие шарика $\mathcal{F} = -\frac{C_0\varphi^2}{2}$, где C_0 — первоначальная емкость конденсатора. Ввиду малых размеров шарика можно считать, что он вводится в однородное поле с напряженностью $\mathcal{E} = \varphi/h$, а изменение \mathcal{F} мало. Малое изменение \mathcal{F} при постоянных потенциалах равно малому изменению \mathcal{F} при постоянных зарядах

1) Изменение плотности $\delta\rho$ — величина второго порядка по полю ($\sim E^2$), а связанное с ним изменение полной энтропии — четвертого порядка. Действительно, линейное по $\delta\rho$ изменение полной энтропии есть $\frac{\partial S_0}{\partial\rho} \int \delta\rho dV$, но интеграл $\int \delta\rho dV = 0$ в силу неизменности общей массы тела.

источников поля. С помощью формулы, полученной в задаче § 11, и формулы (8,2) получим

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{C_0 \Phi^2}{2} - \frac{a^3}{2} \frac{\epsilon^{(e)} (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)})}{2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}} \frac{\Phi^2}{h^2},$$

откуда искомая емкость

$$C = C_0 + \frac{a^3}{h^2} \frac{\epsilon^{(e)} (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)})}{2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}}.$$

§ 13. Диэлектрические свойства кристаллов

В анизотропной диэлектрической среде (монокристалл) линейная связь между индукцией и напряженностью электрического поля имеет более сложный вид, не сводящийся к простой пропорциональности.

Наиболее общий вид такой зависимости дается выражением вида

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (13,1)$$

где D_0 — постоянный вектор, а совокупность величин ϵ_{ik} составляет тензор второго ранга — тензор диэлектрической проницаемости (или, короче, диэлектрический тензор). Свободный член D_0 в соотношении (13,1) существует, однако, не во всяком кристалле. Большинство типов кристаллографической симметрии не допускает существования постоянного вектора (см. ниже), и тогда имеем просто

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (13,2)$$

Тензор ϵ_{ik} симметричен:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}. \quad (13,3)$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться термодинамическим соотношением (10,10) и заметить, что вторая производная

$$-4\pi \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \epsilon_{ik}$$

не зависит от порядка дифференцирования.

Для самой величины $\tilde{\mathcal{F}}$ имеем (при выполнении (13,2)) выражение

$$\tilde{\mathcal{F}} = F_0 - \frac{\epsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi}. \quad (13,4)$$

Свободная энергия F равна

$$F = \tilde{\mathcal{F}} + \frac{E_i D_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\epsilon_{ik}^{-1} D_i D_k}{8\pi}. \quad (13,5)$$

Как и всякий симметрический тензор второго ранга, тензор ϵ_{ik} путем надлежащего выбора осей координат может быть приведен к диагональному виду. В общем случае, следовательно, тензор ϵ_{ik} определяется тремя независимыми величинами — тремя главными

значениями $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$. Все эти величины всегда больше единицы, подобно тому как $\epsilon > 1$ у изотропного тела (см. § 14).

В зависимости от той или иной симметрии кристалла число различных главных значений тензора ϵ_{ik} может оказаться и меньшим трех¹⁾.

В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем все три главных значения различны; эти кристаллы называются двухосными²⁾. При этом в кристаллах триклинной системы направления главных осей тензора ϵ_{ik} не связаны однозначным образом с какими-либо кристаллографическими направлениями. В кристаллах моноклинной системы заранее определенным является направление одной из главных осей — она должна совпадать с осью симметрии второго порядка или быть перпендикулярной к плоскости симметрии кристалла. В кристаллах же ромбической системы кристаллографически определены все три главные оси тензора ϵ_{ik} .

Далее, в кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем два из трех главных значений совпадают, так что имеются всего две независимые величины; такие кристаллы называют одноосными. Одна из главных осей совпадает при этом с кристаллографической осью симметрии четвертого, третьего или шестого порядка, а направление двух других главных осей можно выбрать произвольным образом³⁾.

Наконец, в кристаллах кубической системы все три главных значения тензора ϵ_{ik} одинаковы, а направления главных осей совершенно произвольны⁴⁾. Это значит, что тензор ϵ_{ik} имеет вид $\epsilon \delta_{ik}$, т. е. определяется одним скаляром ϵ . Другими словами, в отношении своих диэлектрических свойств кристаллы кубической симметрии не отличаются от изотропных тел.

Остановимся теперь на особенностях диэлектрических свойств кристаллов с постоянным членом D_0 в (13,1). Наличие этого члена означает, что диэлектрик спонтанно поляризован и в отсутствие внешнего электрического поля; такие тела называют пироэлектрическими. Величина этой спонтанной поляризации, однако, фактически всегда очень мала (по сравнению с молекулярными полями).

¹⁾ Излагаемые ниже довольно очевидные свойства симметрии тензора ϵ_{ik} особенно просто получить, воспользовавшись известным из тензорной алгебры обстоятельством, что всякому симметрическому тензору второго ранга можно сопоставить так называемый «тензорный эллипсоид», длина полуосей которого пропорциональна главным значениям тензора. Симметрия эллипсоида должна при этом соответствовать симметрии кристалла.

²⁾ Это название связано с оптическими свойствами кристаллов — см. §§ 78, 79.

³⁾ Тензорный эллипсоид вырождается в этом случае в эллипсоид вращения, полностью симметричный относительно продольной оси. Подчеркнем, что для физических свойств кристалла, определяющихся симметрическим тензором второго ранга, наличие оси симметрии уже третьего порядка эквивалентно полной изотропии в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

⁴⁾ Тензорный эллипсоид вырождается здесь в сферу.

Это обстоятельство связано с тем, что большие значения D_0 приводили бы к существованию сильных полей внутри тела, что энергетически весьма невыгодно и потому не могло бы соответствовать термодинамическому равновесию. Малость D_0 обеспечивает в то же время законность разложения D по степеням E , первыми двумя членами которого и является выражение (13,1).

Термодинамические величины пироэлектрического тела находим, интегрируя соотношение

$$-4\pi \frac{\partial \tilde{F}}{\partial E_i} = D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k,$$

откуда

$$\tilde{F} = F_0 - \frac{\epsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} E_i D_{0i}. \quad (13,6)$$

Свободная энергия

$$F = \tilde{F} + \frac{E_i D_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\epsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi} = F_0 + \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik}^{-1} (D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}). \quad (13,7)$$

Отметим, что из F выпадает имевшийся в \tilde{F} член, линейный по E_i ¹⁾.

Полную свободную энергию пироэлектрика можно вычислить по формуле (11,12), подставив в нее (13,7) и (13,1). В отсутствие внешнего поля, $\mathcal{E} = 0$, получается простой результат

$$F = \int \left(F_0 - \frac{ED_0}{8\pi} \right) dV. \quad (13,8)$$

Замечательно, что свободная энергия пироэлектрика в отсутствие внешнего поля зависит (вместе с полем E) не только от его объема, но и от формы.

Как уже было отмечено, явление пироэлектричества возможно не при всякой симметрии кристалла. Поскольку при любом преобразовании симметрии все свойства кристалла должны оставаться неизменными, то ясно, что пироэлектрическим может быть лишь такой кристалл, в котором существует направление, остающееся неизменным (в том числе не меняющееся на обратное) при всех преобразованиях симметрии; в этом направлении и будет лежать постоянный вектор D_0 .

Этому условию удовлетворяют лишь те группы симметрии, которые складываются из одной оси и проходящих через нее плоскостей симметрии. В частности, пироэлектрическими заведомо не могут быть кристаллы, обладающие центром симметрии. Перечислим

¹⁾ Следует отметить, что в этих формулах мы в действительности пренебрегаем пьезоэффектом (т. е. влиянием внутренних напряжений на электрические свойства тела, см. § 17). Поэтому они, строго говоря, применимы лишь в случае однородных по объему тела полей, когда напряжения в теле могут отсутствовать.

те из 32-х кристаллических классов, в которых существует пироэлектричество:

триклинная система: C_1 ,

моноклинная система: C_8, C_2 ,

ромбическая система: C_{2v} ,

тетрагональная система: C_4, C_{4v} ,

ромбоэдрическая система: C_3, C_{3v} ,

гексагональная система: C_6, C_{6v} .

Среди кубических классов пироэлектрических, разумеется, вообще нет. В кристалле класса C_1 направление пироэлектрического вектора D_0 не связано с каким-либо кристаллографически выделенным направлением, а в кристалле класса C_8 должно лежать в плоскости симметрии. Во всех же остальных из перечисленных выше классов направление D_0 совпадает с направлением оси симметрии.

Следует указать, что в обычных условиях пироэлектрические кристаллы не имеют полного электрического дипольного момента, хотя поляризация в них и не равна нулю. Дело в том, что внутри спонтанно поляризованного диэлектрика имеется отличная от нуля напряженность поля E . Благодаря тому, что фактически образец обычно обладает некоторой, хотя и малой, но все же не равной нулю проводимостью, наличие поля вызовет появление тока, который будет течь до тех пор, пока образующиеся на поверхности тела свободные заряды не приведут к исчезновению поля в образце. В том же направлении действуют ионы, оседающие на поверхность образца из воздуха. На опыте пироэлектрические свойства наблюдаются при нагревании тела, когда величина его спонтанной поляризации меняется и обнаруживается это изменение.

Задачи

1. Определить поле, создаваемое в пустоте пироэлектрическим шаром.

Решение. Внутри шара имеется однородное поле, в котором напряженность и индукция связаны соотношением $2E = -D$ (как это следует из (8,1) при $\mathfrak{E} = 0$, т. е. в отсутствие внешнего приложенного поля). Подставляя в (13,1), получим уравнение

$$2E_i + \epsilon_{ik} E_k = -D_{0i}.$$

Выберем оси координат вдоль главных осей тензора ϵ_{ik} . Тогда получим из этого уравнения

$$E_i = -\frac{D_{0i}}{2 + \epsilon^{(i)}}.$$

Поляризация шара

$$P_i = \frac{D_i - E_i}{4\pi} = \frac{3D_{0i}}{4\pi(2 + \epsilon^{(i)})}.$$

Поле вне шара есть поле электрического диполя с электрическим моментом $\mathcal{P} = PV$.

2. Определить поле точечного заряда в однородной анизотропной среде 1).

Решение. Поле точечного заряда описывается уравнением $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e \delta(\mathbf{r})$ (заряд находится в начале координат). В анизотропной среде $D_i = \epsilon_{ik} E_k = \epsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$; выбирая оси x, y, z вдоль главных осей тензора ϵ_{ik} , получим для потенциала уравнение

$$\epsilon^{(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon^{(y)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon^{(z)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Путем введения новых переменных согласно

$$x = x' \sqrt{\epsilon^{(x)}}, \quad y = y' \sqrt{\epsilon^{(y)}}, \quad z = z' \sqrt{\epsilon^{(z)}} \quad (1)$$

оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi e}{\sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}} \delta(x') \delta(y') \delta(z'),$$

который формально отличается от уравнения для поля в пустоте лишь заменой e на $e/\sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}$. Поэтому

$$\varphi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}} \left[\frac{x^2}{\epsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(z)}} \right]^{-1/2}.$$

В тензорных обозначениях, не предпрещающих выбор системы координат,

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{|\epsilon| \epsilon_{ik}^{-1} x_i x_k}},$$

где $|\epsilon|$ — определитель тензора ϵ_{ik} .

3. Определить емкость проводящего шара (радиуса a), погруженного в анизотропную диэлектрическую среду.

Решение. Путем преобразования, указанного в предыдущей задаче, определение поля шара с зарядом e в анизотропной среде сводится к определению поля в пустоте, создаваемого зарядом e' , распределенным по поверхности эллипсоида,

$$\epsilon_{ik} x'_i x'_k = \epsilon^{(x)} x'^2 + \epsilon^{(y)} y'^2 + \epsilon^{(z)} z'^2 = a^2.$$

Воспользовавшись формулой (4,14) для потенциала поля эллипсоида, получим для искомой емкости:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2 \sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}} \int_0^{\infty} \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(x)}} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(y)}} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(z)}} \right) \right]^{-1/2} d\xi.$$

4. Определить поле в плоскопараллельной анизотропной пластинке, находящейся во внешнем однородном поле \mathfrak{E} .

Решение. Из условия непрерывности касательной составляющей напряженности следует, что

$$\mathbf{E} = \mathfrak{E} + A\mathbf{n},$$

где \mathbf{E} — напряженность однородного поля внутри пластинки, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к ее поверхности и A — постоянная. Последняя определяется из условия непрерывности нормальной компоненты индукции: $n\mathbf{D} = n\mathfrak{E}$, или

$$n_i \epsilon_{ik} E_k = n_i \epsilon_{ik} \mathfrak{E}_k + A \epsilon_{ik} n_i n_k = \mathfrak{E}_i n_i.$$

1) В задачах 2—5 диэлектрическая анизотропная среда предполагается непирозлектрической.

Отсюда

$$A = - \frac{(\epsilon_{ik} - \delta_{ik}) n_i \mathfrak{E}_k}{\epsilon_{im} n_l n_m}.$$

5. Определить момент сил, действующих на анизотропный диэлектрический шар, находящийся (в пустоте) во внешнем однородном поле \mathfrak{E} .

Решение. Согласно (8,2) имеем для напряженности поля внутри шара

$$E_x = \frac{3}{\epsilon^{(x)} + 2} \mathfrak{E}_x$$

(и аналогично для E_y, E_z), причем оси x, y, z выбраны вдоль главных осей тензора ϵ_{ik} . Отсюда для компонент дипольного момента шара (радиуса a):

$$\mathcal{P}_x = \frac{4\pi}{3} a^3 P_x = \frac{\epsilon^{(x)} - 1}{\epsilon^{(x)} + 2} a^3 \mathfrak{E}_x.$$

Компонента же действующего на шар момента сил

$$K_z = [\mathcal{P}\mathfrak{E}]_z = 3a^3 \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \frac{\epsilon^{(x)} - \epsilon^{(y)}}{(\epsilon^{(x)} + 2)(\epsilon^{(y)} + 2)},$$

и аналогично для K_x, K_y .

6. В неограниченной анизотропной среде имеется сферическая полость. Выразить поле в полости через однородное поле $E^{(e)}$ в среде вдали от отверстия.

Решение. Преобразованием (1) задачи 2 уравнение для потенциала поля в среде приводится к уравнению Лапласа для поля в пустоте. Уравнение же для потенциала поля в полости, напротив, превращается в уравнение для потенциала в среде с диэлектрическими постоянными $1/\epsilon^{(x)}, 1/\epsilon^{(y)}, 1/\epsilon^{(z)}$. Кроме того, шар (радиуса a) превращается в эллипсоид с полуосями $a/\sqrt{\epsilon^{(x)}}$, $a/\sqrt{\epsilon^{(y)}}$, $a/\sqrt{\epsilon^{(z)}}$. Пусть $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ — коэффициенты деполяризации такого эллипсоида (определяемые по формулам (4,25)). Применяя к полю этого эллипсоида формулу (8,7), получим соотношение

$$(1 - n^{(x)}) \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\epsilon^{(x)}} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x'}$$

(и аналогичные — вдоль осей y' и z'). Возвращаясь к прежним координатам, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sqrt{\epsilon^{(x)}} = E_x \sqrt{\epsilon^{(x)}},$$

так что для поля в полости получаем окончательно

$$E_x^{(i)} = \frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(x)} - n^{(x)}(\epsilon^{(x)} - 1)} E_x^{(e)}.$$

§ 14. Положительность диэлектрической восприимчивости

Для выяснения характера зависимости термодинамических величин диэлектрика в поле от его диэлектрической постоянной рассмотрим формальную задачу об изменении электрической части полной свободной энергии тела при бесконечно малом изменении ϵ .

Для изотропного (но не обязательно однородного) диэлектрика имеем согласно (10,19)

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon} dV.$$

При изменении ϵ изменяется также и индукция поля. Поэтому рассматриваемая вариация свободной энергии равна

$$\delta\mathcal{F} = \int \frac{D\delta D}{4\pi\epsilon} dV - \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2} \delta\epsilon dV = \int \frac{E\delta D}{4\pi} dV - \int \frac{E^2}{8\pi} \delta\epsilon dV.$$

Первый член в правой части равенства совпадает с выражением (10,2) для работы, совершаемой при бесконечно малом изменении источников поля (зарядов проводников). Но в данном случае мы рассматриваем изменение поля при неизменных его источниках; поэтому этот член обращается в нуль, и мы получаем

$$\delta\mathcal{F} = - \int \delta\epsilon \frac{E^2}{8\pi} dV. \quad (14,1)$$

Из этой формулы прежде всего вытекает следующий важный результат: всякое увеличение диэлектрической постоянной среды, хотя бы в некотором ее участке (при неизменных источниках поля), приводит к уменьшению ее полной свободной энергии. В частности, можно утверждать, что свободная энергия всегда уменьшается при внесении в диэлектрическую среду незаряженных проводников, поскольку последние могут рассматриваться (в электростатике) как тела с бесконечно большой ϵ . Это утверждение обобщает высказанную в § 2 теорему об уменьшении энергии электростатического поля в пустоте при внесении в него незаряженного проводника.

С другой стороны, формулу (14,1) можно воспользоваться для доказательства упомянутого уже в § 7 обстоятельства, что диэлектрическая постоянная всякого тела больше единицы (т. е. электрическая восприимчивость $(\epsilon - 1)/4\pi$ положительна). Для этого надо предварительно независимым образом показать, что полное изменение свободной энергии диэлектрического тела при внесении его в электрическое поле отрицательно ¹⁾. Это можно сделать с помощью термодинамической теории возмущений, рассматривая изменение свободной энергии тела как результат возмущения его квантовых уровней энергии электрическим полем. Согласно этой теории имеем ²⁾

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \bar{V}_{nn} - \frac{1}{2} \sum_n \sum'_m \frac{|V_{nm}|^2 (\omega_m - \omega_n)}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{1}{2kT} \overline{(V_{nn} - \bar{V}_{nn})^2}. \quad (14,2)$$

¹⁾ Имеется в виду изменение, пропорциональное квадрату поля. Напомним, что в пирозлектрических телах изменение свободной энергии содержит также и линейный по полю член, который нас здесь не интересует.

²⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 32, формулы (32,5), (32,6); написанная здесь формула отличается от этих формул лишь формой записи-

Здесь $E_n^{(0)}$ — невозмущенные уровни, V_{mn} — матричные элементы возмущающей энергии, а черта обозначает статистическое усреднение с помощью распределения Гиббса

$$\omega_n = \exp \left\{ \frac{\mathcal{F}_0 - E_n^{(0)}}{kT} \right\}.$$

Член \bar{V}_{nm} в формуле (14,2), линейный по полю, отличен от нуля только в пирозлектрических телах. Интересующее же нас квадратичное по полю изменение свободной энергии дается остальными членами этой формулы. В том виде, как они здесь написаны, их отрицательность очевидна.

Если же рассматривать формальным образом изменение свободной энергии как результат постепенного изменения диэлектрической постоянной в объеме тела от 1 до заданного значения ϵ , то из формулы (14,1) следует, что $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ будет отрицательным только, если $\epsilon > 1$, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким же образом доказываются неравенства $\epsilon^{(i)} > 1$ для главных значений тензора ϵ_{ik} анизотропной диэлектрической среды. Для этого достаточно, очевидно, рассмотреть энергию поля, направленного вдоль каждой из трех главных осей.

Полная свободная энергия уменьшается, в частности, когда какой-либо заряд подносится к диэлектрическому телу из бесконечности (что можно воспринимать как увеличение ϵ в некотором объеме поля вокруг заряда). Чтобы сделать отсюда заключение о том, что всякий заряд притягивается к диэлектрику, надо было бы, строго говоря, доказать еще, что F не может достигнуть минимума ни при каком конечном расстоянии между зарядом и телом. Мы не станем останавливаться здесь на доказательстве этого утверждения, тем более, что появление сил притяжения между зарядом и диэлектриком можно рассматривать как довольно очевидный результат взаимодействия этого заряда с дипольным моментом поляризуемого им диэлектрика.

Непосредственно из формулы (14,1) можно сделать заключение о направлении движения диэлектрического тела в квазиоднородном электрическом поле, т. е. в поле, которое можно считать постоянным на протяжении размеров тела. В этом случае E^2 выносится из-под знака интеграла и разность $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ есть отрицательная величина, пропорциональная E^2 . Стремясь занять положение, в котором его свободная энергия минимальна, тело будет, следовательно, перемещаться в направлении увеличения E .

§ 15. Электрические силы в жидком диэлектрике

Вопрос о вычислении сил (их называют иногда пондеромоторными), действующих на диэлектрик в произвольном неоднородном электрическом поле, довольно сложен и требует отдельного

рассмотрения для жидких (или газообразных) и твердых тел. Мы начнем с более простого случая жидких диэлектриков.

Будем обозначать посредством $f dV$ силу, действующую на элемент объема среды dV ; вектор f можно назвать объемной плотностью сил.

Как известно, силы, действующие на какой-либо конечный объем тела, могут быть сведены к силам, приложенным к поверхности этого объема¹⁾. Это обстоятельство является следствием закона сохранения импульса. Сила, действующая на вещество в объеме dV , представляет собой изменение его импульса в единицу времени. Это изменение должно быть равно количеству импульса, втекающего в течение того же времени в этот объем через его поверхность. Если обозначить тензор потока импульса через — σ_{ik} , то

$$\int f_i dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (15,1)$$

где интегрирование в правой стороне равенства производится по поверхности объема V . Тензор σ_{ik} называют тензором напряжений. Очевидно, что

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} n_k df$$

есть i -я компонента силы, действующей на элемент поверхности df (n — единичный вектор нормали к поверхности, внешней по отношению к данному объему).

Аналогичным образом сводится к интегралу по поверхности также и полный момент сил, действующих на данный объем, чем обеспечивается выполнение закона сохранения момента импульса. Как известно, возможность этого сведения связана с симметричностью тензора напряжений ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); последняя является, таким образом, выражением закона сохранения момента импульса.

Преобразуя интеграл по поверхности в (15,1) в интеграл по объему, получим

$$\int f_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV$$

и отсюда, ввиду произвольности объема интегрирования,

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (15,2)$$

Это — известная формула, выражающая объемные силы через тензор напряжений.

Приступим теперь к вычислению тензора напряжений. Каждый малый участок поверхности можно рассматривать как плоский, а свойства тела и электрическое поле вблизи него — как однородные. Поэтому для упрощения вывода мы можем, без всякого

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 2, § 2.

ограничения общности, рассмотрим однородный (по составу, плотности и температуре) плоскопараллельный слой вещества (толщины h), находящийся в произвольно направленном, но однородном электрическом поле ¹⁾. Это поле можно представлять себе как создаваемое приложенными к поверхностям слоя проводящими плоскостями, несущими на себе соответствующее распределение зарядов.

Следуя общему методу определения сил, подвергнем одну из проводящих плоскостей («верхнюю») параллельному виртуальному смещению на бесконечно малую величину ξ ; направление ξ произвольно и не обязательно совпадает с направлением нормали n . Будем считать, что потенциал проводника (в каждой его точке) остается при смещении неизменным, а вызываемая этим смещением однородная деформация слоя диэлектрика — изотермична.

На единицу площади поверхности действует со стороны самого тела (слоя) сила — $\sigma_{ik}n_k$. При виртуальном смещении эта сила производит работу — $\sigma_{ik}n_k\xi_i$. С другой стороны, работа, производимая при изотермической деформации и постоянных потенциалах проводников, равна убыли величины $\int \tilde{F} dV$ или (на единицу площади поверхности слоя) величины $h\tilde{F}$. Таким образом,

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \delta(h\tilde{F}) = h\delta\tilde{F} + \tilde{F}\delta h. \quad (15,3)$$

Термодинамические величины жидкости зависят (при данных температуре и напряженности поля) только от ее плотности; деформации, не меняющие плотности (деформации сдвига), не отражаются на термодинамическом состоянии. Поэтому для изотермической вариации $\delta\tilde{F}$ в жидкости пишем

$$\delta\tilde{F} = \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial E}\right)_{T, \rho} \delta E + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial \rho}\right)_{E, T} \delta \rho = -\frac{D\delta E}{4\pi} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial \rho}\right)_{E, T} \delta \rho. \quad (15,4)$$

Изменение плотности слоя вещества связано с изменением его толщины соотношением $\delta\rho = -\rho \frac{\delta h}{h}$. Вариация же поля вычисляется следующим образом.

В данную точку пространства (с радиус-вектором r) попадает при смещении вещество из точки $r - u$, где u — вектор смещения частиц в объеме слоя. Поскольку в рассматриваемых условиях (однородная деформация и постоянство потенциала на проводящих плоскостях) каждая частица вещества перемещается вместе со своим

¹⁾ Тем самым мы отбрасываем в тензоре напряжений члены, которые могли бы зависеть от градиентов температуры, поля и т. п. Эти члены, однако, исчезающе малы по сравнению с членами, не содержащими производных, в том же смысле, как малы члены с производными, которые могли бы присутствовать в зависимости D от E .

значением потенциала, то изменение последнего в данной точке пространства есть

$$\delta\varphi = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u} \nabla\varphi = \mathbf{u}\mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — однородное поле внутри недеформированного слоя. Но ввиду однородности деформации имеем

$$\mathbf{u} = \frac{z}{h} \boldsymbol{\xi}, \quad (15,5)$$

где z — расстояние от нижней поверхности. Поэтому вариация напряженности поля

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h} \mathbf{n} (\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}). \quad (15,6)$$

Подставляя все полученные выражения в (15,4) и учитывая также, что $\delta h = \xi_z = \boldsymbol{\xi}\mathbf{n}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} \xi_i n_k &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}\mathbf{D}) (\boldsymbol{\xi}\mathbf{E}) - (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) \rho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho} + (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}) \tilde{F} = \\ &= \left\{ \frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho} \delta_{ik} + \tilde{F} \delta_{ik} \right\} \xi_i n_k. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно находим следующее выражение для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = \left[\tilde{F} - \rho \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho} \right)_{E, T} \right] \delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \quad (15,7)$$

В изотропных средах, которые здесь и рассматриваются, направления \mathbf{E} и \mathbf{D} совпадают. Поэтому $E_i D_k = E_k D_i$, и тензор (15,7), как и следовало, симметричен.

При линейной связи $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$ имеем

$$\tilde{F} = F_0(\rho, T) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon} E^2}{8\pi} \quad (15,8)$$

(см. (10,16)). F_0 есть свободная энергия единицы объема вещества в отсутствие поля. Согласно известному термодинамическому соотношению, производная от свободной энергии 1 г вещества по удельному объему есть давление:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \frac{1}{\rho}} \frac{F_0}{\rho} \right)_T = F_0 - \rho \left(\frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)_T = -p_0;$$

$p_0 = p_0(\rho, T)$ есть то давление, которое имелось бы в среде в отсутствие поля при данных значениях ρ и T . Поэтому при подстановке (15,8) в (15,7) получим

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T) \delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon} E_i E_k}{4\pi}. \quad (15,9)$$

В пустоте это выражение переходит в известный максвелловский тензор напряжений электрического поля ¹⁾:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right).$$

Силы, с которыми действуют на поверхность раздела две соприкасающиеся различные среды, должны быть равны и противоположны: $\sigma_{ik} n_k = -\sigma'_{ik} n'_k$, где величины со штрихом и без него относятся к двум средам. Векторы нормали n и n' имеют взаимно противоположные направления, так что можно написать

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k. \quad (15,10)$$

На границе двух изотропных сред равенство тангенциальных составляющих сил соблюдается тождественно. Действительно, подставляя (15,7) в (15, 10) и взяв тангенциальную компоненту, получим

$$E_t D_n = E'_t D'_n.$$

Но это равенство удовлетворяется уже в силу граничных условий непрерывности E_t и D_n . Условие же равенства нормальных составляющих сил дает нетривиальное условие, налагаемое на разность давлений в обеих средах.

Рассмотрим, например, границу между жидкостью и атмосферой (для последней можно положить $\epsilon = 1$). Отмечая штрихом величины, относящиеся к атмосфере, и пользуясь для σ_{ik} формулой (15,9), получим

$$-p_0(\rho, T) + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T + \frac{\epsilon}{8\pi} (E_n^2 - E_t^2) = -p_{\text{атм}} + \frac{1}{8\pi} (E_n'^2 - E_t'^2).$$

Учитывая граничные условия $E_t = E'_t$, $D_n = \epsilon E_n = D'_n = E'_n$, перепишем это равенство в виде

$$p_0(\rho, T) - p_{\text{атм}} = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} (\epsilon E_n^2 + E_t^2). \quad (15,11)$$

Это соотношение надо понимать как уравнение, определяющее плотность ρ жидкости вблизи ее поверхности по напряженности электрического поля в ней.

Определим теперь действующие в диэлектрической среде объемные силы. Дифференцируя согласно (15,2) выражение (15,9), получим

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-p_0 + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i D_k) \right].$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 32.

При учете уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \partial D_k / \partial x_k = 0$ выражение в скобках в последнем члене сводится к сумме

$$-\varepsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right),$$

обращающейся в нуль ввиду того, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \operatorname{grad} \varepsilon. \quad (15,12)$$

Если в диэлектрике имеются сторонние заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$, то к силе \mathbf{f} добавится еще член $\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} / 4\pi$; поскольку $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ст}}$, то этот член равен

$$\rho_{\text{ст}} \mathbf{E}; \quad (15,13)$$

не следует, однако, думать, что этот результат самоочевиден (ср. задачу 3 § 16).

В газе, как уже было указано в § 7, можно считать разность $\varepsilon - 1$ пропорциональной его плотности. Тогда $\rho \partial \varepsilon / \partial \rho = \varepsilon - 1$ и формула (15,12) принимает более простой вид:

$$\mathbf{f} = -\nabla p_0 + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \operatorname{grad} E^2. \quad (15,14)$$

Формула (15,12) справедлива для сред как однородных, так и неоднородных по своему составу. В неоднородной среде ε является функцией не только от ρ и T , но и от меняющейся вдоль среды концентрации смеси. В однородной же по составу среде ε есть функция только от ρ , T , и $\operatorname{grad} \varepsilon$ можно раскрыть как

$$\nabla \varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\rho \nabla T + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \nabla \rho.$$

Тогда (15,12) приобретает вид:

$$\mathbf{f} = -\nabla p_0(\rho, T) + \frac{\rho}{8\pi} \nabla \left[E^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\rho \nabla T. \quad (15,15)$$

Если и температура постоянна вдоль тела, то третий член обращается в нуль, а в первом можно заменить ∇p_0 на $\rho \nabla \zeta_0$ (согласно известному термодинамическому тождеству для химического потенциала в отсутствие поля: $\rho d\zeta_0 = dp_0 - S_0 dT$) и

$$\mathbf{f} = -\rho \nabla \left[\zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (15,16)$$

Но выражение в скобках есть не что иное, как химический потенциал вещества ζ в электрическом поле (см. (10,18)), так что $\mathbf{f} = -\rho \nabla \zeta$.

В частности, условие механического равновесия $\mathbf{f} = 0$ при постоянной температуре гласит:

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T = \text{const}, \quad (15,17)$$

в согласии с общим термодинамическим условием равновесия¹⁾. Обычно это условие может быть написано в еще более простом виде. Изменение плотности среды под влиянием поля само пропорционально E^2 . Поэтому, если в отсутствие поля среда однородна по своей плотности, то и при наличии поля в последних двух членах в (15,15) следует полагать $\rho = \text{const}$; учет изменения ρ в формулах, предполагающих линейную связь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, был бы превышением их точности. Тогда, приравнявая нулю \mathbf{f} из (15,15), получим при постоянной температуре условие равновесия в виде

$$p_0(\rho, T) - \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T = \text{const}, \quad (15,18)$$

отличающееся от (15,17) тем, что вместо ζ в нем стоит p_0/ρ .

§ 16. Электрические силы в твердых телах

Диэлектрические свойства твердого тела меняются не только при изменении его плотности (как у жидкости), но и при деформациях, не меняющих плотности (сдвигах). Мы рассмотрим сначала тела, которые в отсутствие поля изотропны. Деформация нарушает, вообще говоря, изотропию тела; в результате становятся анизотропными также и его диэлектрические свойства, и скалярная диэлектрическая проницаемость ϵ заменяется диэлектрическим тензором ϵ_{ik} .

Состояние слабо деформированного тела описывается, как известно, тензором деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

где $\mathbf{u}(x, y, z)$ — вектор смещения точек тела. Ввиду малости этих величин в изменении компонент ϵ_{ik} достаточно ограничиться лишь членами первого порядка по u_{ik} . Соответственно этому представим диэлектрический тензор деформированного тела в виде

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{il} \delta_{lk}. \quad (16,1)$$

Здесь ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость недеформированного тела, а последние два члена (с двумя скалярными постоянными a_1, a_2) представляют наиболее общий вид тензора второго ранга, который можно составить линейным образом из компонент тензора u_{ik} .

Посмотрим теперь, в каком пункте должен быть изменен вывод, изложенный в предыдущем параграфе. Поскольку в твердом теле $\bar{\mathbf{F}}$

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 26, 1951.

зависит от всех компонент тензора деформации, то вместо (15,4) надо писать

$$\delta\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik}.$$

При рассматриваемом виртуальном смещении вектор \mathbf{u} дается формулой (15,5), так что тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2h} (\xi_i n_k + \xi_k n_i).$$

Подставив это в $\delta\tilde{F}$ и учитывая симметрию тензора (а потому и производных $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}$), получим

$$\delta\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{\xi_i n_k}{h} \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}. \quad (16,2)$$

Теперь ясно, что для тензора напряжений мы получим вместо (15,7) следующее выражение ¹⁾:

$$\sigma_{ik} = \tilde{F}\delta_{ik} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T, E} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \quad (16,3)$$

Формула (16,3) применима при любой зависимости \mathbf{D} от \mathbf{E} . Для непиро-(и непьезо) электрического тела, в котором $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, \tilde{F} дается формулой (13,4), и для нужных нам производных получаем

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}} = \frac{\partial F_0}{\partial u_{ik}} - \frac{1}{8\pi} (a_1 E_i E_k + a_2 E^2 \delta_{ik}).$$

После этого везде в (16,3) полагаем $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$ и находим следующую формулу для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \frac{2\varepsilon_0 - a_1}{8\pi} E_i E_k - \frac{\varepsilon_0 + a_2}{8\pi} E^2 \delta_{ik}. \quad (16,4)$$

$\sigma_{ik}^{(0)}$ есть тензор напряжений в отсутствие электрического поля, определяющийся через модули сдвига и сжатия по обычным формулам теории упругости.

1) Величина \tilde{F} в этой формуле, как и везде выше, есть свободная энергия, отнесенная к единице объема тела. В теории упругости, однако, обычно принимается несколько иное определение: термодинамические величины относят к количеству вещества, заключенному в единице объема недеформированного тела, которое после деформирования может занять несколько иной объем. Переход от одного определения к другому легко произвести, выражая относительное изменение объема при деформации через тензор u_{ik} (ввиду наличия в (16,3) производной по u_{ik} это надо сделать с точностью до членов второго порядка). В результате оба первых члена в (16,3) сведутся к одному члену вида $\partial\tilde{F}/\partial u_{ik}$, в согласии с обычной формулой теории упругости.

Перейдем теперь к аналогичным вычислениям для анизотропных твердых тел¹⁾. Изменения, которые должны быть при этом внесены в изложенный выше вывод, заключаются в следующем. При виртуальной деформации слоя вещества его кристаллографические оси испытывают поворот, в результате чего меняется их ориентация по отношению к электрическому полю. Ввиду анизотропии диэлектрических свойств кристалла это обстоятельство приводит к дополнительному изменению \tilde{F} , не учтенному в (16,2). При вычислении этого изменения безразлично считать, оси ли кристалла поворачиваются на некоторый угол $\delta\varphi$ относительно поля E , или поле поворачивается относительно осей на угол $-\delta\varphi$; второй способ более удобен.

Таким образом, к вариации поля (15,6), рассматривавшейся нами ранее, надо прибавить изменение E при повороте на угол $-\delta\varphi$:

$$\delta E = -\frac{1}{h} n(E\xi) - [\delta\varphi \cdot E].$$

Угол $\delta\varphi$ связан с вектором смещения u при деформации посредством $\delta\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u$ (это равенство легко получить, заметив, что при повороте тела на угол $\delta\varphi$ его точки смещаются на $u = [\delta\varphi \cdot r]$). Подставив сюда u из (15,5), получим

$$\delta\varphi = \frac{1}{2h} [\nabla z \xi] = \frac{1}{2h} [n \xi],$$

а затем

$$\delta E = -\frac{1}{h} n(E\xi) + \frac{1}{2h} [E [n \cdot \xi]] = -\frac{1}{2h} \{n(E\xi) + \xi(nE)\}.$$

Первый член в (16,2) принимает вид

$$-\frac{1}{4\pi} D \delta E = \frac{1}{8\pi h} \{(nD)(\xi E) + (\xi D)(nE)\} = \frac{1}{4\pi h} \xi_i n_k \left(\frac{E_i D_k + E_k D_i}{2} \right).$$

Отсюда видно, что в (16,3) произведение $E_i D_k$ должно быть заменено стоящей здесь в скобках полусуммой:

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi} (E_i D_k + E_k D_i). \quad (16,5)$$

Отметим, что полученное выражение автоматически оказывается, как и следовало, симметричным по индексам i и k .

Что касается диэлектрического тензора деформированного кристалла, то вместо выражения (16,1) с двумя скалярными постоянными

¹⁾ Мы увидим в § 17, что явление электрострикции в кристаллах может при определенных типах симметрии, весьма существенно отличаться от электрострикции изотропных тел. Такие кристаллы называются пьезоэлектрическими. Здесь же будет идти речь об электрострикции в непьезоэлектрических кристаллах.

ными мы будем иметь в общем случае выражение вида

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + a_{iklm} u_l u_m, \quad (16,6)$$

где a_{iklm} — постоянный тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов i, k и l, m (но не симметричный по отношению к перестановке пары i, k с парой l, m). Число отличных от нуля независимых компонент этого тензора зависит от симметрии кристалла, а именно от его кристаллического класса.

Мы не станем выписывать здесь формулы для тензора напряжений (аналогичной (16,4)), получающейся при использовании (16,6).

Полученные формулы определяют напряжения внутри твердого диэлектрика. Они, однако, не нужны, если мы хотим определить полную силу F или полный момент сил K , действующие на тело со стороны внешнего поля. Рассмотрим тело, погруженное в жидкую (или газообразную) среду и удерживаемое в ней неподвижно. Полная действующая на него сила равна интегралу $\oint \sigma_{ik} n_k df$, взятому

по его поверхности. В силу непрерывности сил $\sigma_{ik} n_k$ безразлично, вычисляется ли этот интеграл по значениям σ_{ik} из (16,4), или из формулы (15,9), относящейся к окружающей тело среде. Предположим, что эта среда находится в механическом и тепловом равновесии. Тогда вычисление еще более упрощается, если учесть условие равновесия (15,18). В силу этого условия часть тензора напряжений (15,9) оказывается постоянным вдоль среды равномерным сжимающим (или растягивающим) давлением, не дающим никакого вклада в полные действующие на тело силу F и момент сил K . Для вычисления последних можно, следовательно, писать σ_{ik} просто в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{\epsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right), \quad (16,7)$$

где E — поле в жидкости, а ϵ — ее диэлектрическая проницаемость; это выражение отличается от максвелловского тензора напряжений электрического поля в пустоте лишь множителем ϵ . Таким образом:

$$F = \frac{\epsilon}{4\pi} \oint \left\{ E(nE) - \frac{1}{2} E^2 n \right\} df, \quad (16,8)$$

$$K = \frac{\epsilon}{4\pi} \oint \left\{ [rE](nE) - \frac{1}{2} E^2 [rn] \right\} df. \quad (16,9)$$

Отметим также, что поскольку жидкость находится в равновесии, то в этих формулах можно производить интегрирование по любой замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемое тело (но, разумеется, не заключающей в себе заряженных тел, являющихся источниками поля).

К вопросу о вычислении полной силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле (в пустоте), можно подойти и с другой

точки зрения, выражая ее не через фактически существующее поле, а через то поле \mathfrak{E} , которое создавалось бы заданными источниками в отсутствие диэлектрика; это есть то «внешнее поле», в которое вносится тело. При этом предполагается, что распределение зарядов, создающих поле, не меняется при внесении тела в поле. Это условие может фактически не выполняться, например, если заряды распределены по поверхности протяженного проводника и диэлектрик подносится на конечное расстояние к нему.

При виртуальном параллельном переносе тела как целого на бесконечно малое расстояние \mathbf{u} полная свободная энергия тела изменится согласно (11,3) на

$$\delta\mathcal{F} = - \int P \delta\mathfrak{E} dV,$$

где

$$\delta\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathfrak{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E}$$

есть изменение поля \mathfrak{E} по отношению к заданной точке тела. Поскольку $\mathbf{u} = \text{const}$ и $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$, имеем

$$P(\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E} = (P\nabla)(\mathbf{u}\mathfrak{E}) = \mathbf{u}(P\nabla)\mathfrak{E},$$

так что

$$\delta\mathcal{F} = - \mathbf{u} \int (P\nabla)\mathfrak{E} dV.$$

С другой стороны, $\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u}F$, и мы приходим к следующей формуле для искомой силы¹⁾:

$$F = \int (P\nabla)\mathfrak{E} dV. \quad (16,10)$$

Аналогичным образом можно определить полный момент сил, действующих на тело. Не останавливаясь на соответствующих вычислениях, укажем результат:

$$K = \int [P\mathfrak{E}] dV + \int [\mathbf{r}, (P\nabla)\mathfrak{E}] dV. \quad (16,11)$$

В квазиоднородном поле, которое можно считать постоянным на протяжении размеров тела, формула (16,10) в первом приближении дает

$$F = \left(\int P dV \nabla \right) \mathfrak{E} = (\mathcal{P}\nabla)\mathfrak{E}, \quad (16,12)$$

1) Подчеркнем, однако, что подынтегральное выражение в этом интеграле нельзя интерпретировать как объемную плотность сил. Дело в том, что местные силы в диэлектрике связаны не только с полем \mathfrak{E} , но и с собственными внутренними полями в нем, которые, в силу закона сохранения импульса, не дают никакого вклада в полную силу, но влияют на распределение сил по объему тела.

где \mathcal{P} — полный дипольный момент поляризованного диэлектрика, что, разумеется, можно было бы получить и прямым дифференцированием \mathcal{F} из (11,8). В формуле (16,11) в первом приближении вообще пренебрегаем вторым членом по сравнению с первым и приходим к естественному результату:

$$K = [\mathcal{P}\mathcal{E}]. \quad (16,13)$$

ЗАДАЧИ

1. Диэлектрический шар (радиуса a), находящийся во внешнем однородном поле \mathcal{E} , разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу притяжения между полушариями.

Решение. Представим себе полушария разделенными бесконечно тонкой щелью и определяем силу по формуле (16,8) (с $\varepsilon = 1$), производя в ней интегрирование по поверхности полушария, причем E — напряженность поля в пустоте у поверхности. Согласно (8,2) поле внутри шара однородно и равно $E^{(i)} = 3\mathcal{E}/(2 + \varepsilon)$ (ε — диэлектрическая постоянная шара). Поле в щели перпендикулярно к поверхности и равно

$$E = D^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \mathcal{E}.$$

На внешней же поверхности шара

$$E_r = D_r^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \mathcal{E} \cos \theta, \quad E_\theta = E_\theta^{(i)} = -\frac{3}{\varepsilon + 2} \mathcal{E} \sin \theta,$$

где θ — угол между радиус-вектором и направлением \mathcal{E} .

Вычисление интеграла приводит к силе притяжения, равной ¹⁾

$$F = \frac{9(\varepsilon - 1)^2}{16(\varepsilon + 2)^2} a^2 \mathcal{E}^2.$$

2. Определить изменение формы диэлектрического шара во внешнем однородном электрическом поле.

Решение вполне аналогично решению задачи 4 § 5. При определении изменения формы предполагаем объем шара неизменным ²⁾. Для упругой части свободной энергии имеем те же выражение, что в задаче 4 § 5. Электрическая часть дается выражением

$$-\frac{\mathcal{P}\mathcal{E}}{2} = -\frac{V}{8\pi} \frac{\varepsilon^{(x)} - 1}{1 + n(\varepsilon^{(x)} - 1)} \mathcal{E}^2,$$

причем диэлектрическая проницаемость вдоль оси x согласно (16,1)

$$\varepsilon^{(x)} = \varepsilon_0 + a_1 u_{xx} = \varepsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (u_{xx} - u_{yy}) = \varepsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 \frac{a - b}{R}.$$

1) Совпадение предела этого выражения при $\varepsilon \rightarrow \infty$ с результатом задачи 3 § 5 для проводящего шара является случайным (в действительности даже знак этих сил различен). Физическая неэквивалентность обоих случаев ясна из того, что в щели между двумя проводящими полушариями (находящимися при одинаковом потенциале) нет поля, а в данной задаче — есть.

2) Изменение объема определяется в задаче 1 § 12.

Из условия минимума полной свободной энергии найдем

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9\mathcal{G}^2}{40\pi\mu} \frac{(\epsilon_0 - 1) + 5a_1}{(\epsilon_0 + 2)^2}.$$

При $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ это выражение переходит в результат для проводящего шара.

3. Определить объемные силы в изотропном твердом диэлектрике при наличии в нем сторонних зарядов; тело предполагается однородным.

Решение. Предполагая ϵ_0 , a_1 , a_2 постоянными и используя уравнение $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} \cong \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$, получим из (16,4)

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a_1}{2} + a_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 + \left(1 - \frac{a_1}{2\epsilon_0} \right) \rho_{\text{ст}} E_i.$$

§ 17. Пьезоэлектрики

Внутренние напряжения, появляющиеся в изотропном диэлектрике в электрическом поле, представляют собой эффект, квадратичный по полю. Такой же эффект имеет место и в кристаллах, относящихся к ряду кристаллографических классов. Но при определенных типах симметрии электрострикционные свойства кристаллов имеют существенно иной характер. Внутренние напряжения, возникающие в электрическом поле, в этих телах (так называемых пьезоэлектриках) пропорциональны первой степени поля. Соответственно имеет место и обратный эффект — деформирование пьезоэлектрика сопровождается появлением в нем поля, пропорционального величине деформации.

Интересуясь в пьезоэлектрике лишь основным, линейным эффектом, мы можем пренебречь в общей формуле (16,5) квадратичными по полю членами. Тогда

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} \right)_{T, E}.$$

Ниже в этом параграфе мы будем пользоваться термодинамическими величинами, отнесенными к количеству вещества, заключенному в единице объема недеформированного тела (см. примечание на стр. 97). Понимая \tilde{F} в этом смысле, будем иметь просто

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} \right)_{T, E}. \quad (17,1)$$

Соответственно термодинамическое соотношение для дифференциала $d\tilde{F}$ будет

$$d\tilde{F} = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} d\mathbf{E}. \quad (17,2)$$

По поводу последнего члена надо сделать следующее замечание: в таком виде этот член (перенесенный сюда из (10,9)) относится, строго говоря, к единице объема деформированного тела. Не учи-

тывая этого, мы допускаем ошибку, которая, однако, в данном случае (для пьезоэлектрика) является величиной более высокого порядка малости, чем остальные члены в (17,2).

В (17,2) роль независимых переменных играют компоненты тензора u_{ik} . Иногда бывает удобно пользоваться в качестве таковых компонентами σ_{ik} . Для этого надо ввести термодинамический потенциал, определяемый как

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik}. \quad (17,3)$$

Для дифференциала этой величины будем иметь

$$d\tilde{\Phi} = -SdT - u_{ik}d\sigma_{ik} - \frac{1}{4\pi}DdE. \quad (17,4)$$

Подчеркнем, что введение в электродинамике термодинамического потенциала $\tilde{\Phi}$ согласно формулам (17,3) и (17,4) связано со справедливостью соотношения (17,1) и потому возможно лишь для пьезоэлектрических тел.

Определив таким образом нужные нам термодинамические величины, перейдем к описанию пьезоэлектрических свойств кристаллов. Выбрав величины σ_{ik} и E_k в качестве независимых переменных, мы должны рассматривать индукцию D как их функцию, а в разложении этой функции надо сохранить члены первого порядка по ним. Линейные члены разложения компонент вектора по степеням компонент тензора второго ранга в наиболее общем случае могут быть написаны в виде $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$, где совокупность постоянных $\gamma_{i,kl}$ составляет тензор третьего ранга (множитель 4π введен для удобства). Поскольку тензор σ_{kl} симметричен по своим индексам, то ясно, что и тензор $\gamma_{i,kl}$ можно считать симметричным по соответствующим двум индексам:

$$\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk} \quad (17,5)$$

для наглядности мы отделяем запятой симметричную пару индексов k, l от третьего индекса. Будем называть тензор $\gamma_{i,kl}$ пьезоэлектрическим. Его заданием полностью определяются пьезоэлектрические свойства кристалла.

Добавив пьезоэлектрические члены к выражению (13,1) для электрической индукции в кристалле, напишем

$$D_i = D_{i0} + \epsilon_{ik}E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \quad (17,6)$$

Соответствующие дополнительные члены появятся и в термодинамических величинах. У непьезоэлектрического кристалла в отсутствие поля термодинамический потенциал

$$\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm},$$

где Φ_0 относится к недеформированному телу, а второй член представляет собой обычную упругую энергию, определяющуюся тензором упругих постоянных μ_{iklm} ¹⁾. Для пьезоэлектрика же будем иметь

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} - \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik} E_i E_k - \frac{1}{4\pi} E_i D_{i0} - \gamma_{i,kl} E_i \sigma_{kl}. \quad (17,7)$$

Вид последних трех членов определяется тем, что производные от $\tilde{\Phi}$ по E_i (при заданных внутренних напряжениях и температуре) согласно формуле

$$D_i = -4\pi \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial E_i}$$

должны дать выражения (17,6).

Зная $\tilde{\Phi}$, можно получить согласно (17,4) формулу, выражающую тензор деформации через напряжения σ_{ik} и поле \mathbf{E} :

$$u_{ik} = - \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma_{ik}} \right)_{T, E} = \mu_{iklm} \sigma_{lm} + \gamma_{l, ik} E_l. \quad (17,8)$$

Следует отметить, что смысл величин μ_{iklm} и ϵ_{ik} как упругих постоянных и диэлектрической проницаемости в пьезоэлектрике в определенном смысле условен. При выбранном нами определении они дают соответственно зависимость деформации от упругих напряжений при заданной напряженности поля и зависимость индукции от напряженности при заданных напряжениях. Если же деформирование происходит при заданной индукции поля или же мы рассматриваем зависимость индукции от напряженности при заданной деформации, то роль упругих коэффициентов и диэлектрической проницаемости будут играть другие величины, которые могут быть выражены (хотя и довольно сложным образом) через компоненты тензоров μ , ϵ и γ .

1) Тензор μ_{iklm} определяет связь между напряжениями и деформацией согласно

$$u_{ik} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}} = \mu_{iklm} \sigma_{lm}.$$

В «Механике сплошных сред» (ч. 2, § 10) мы писали обратную зависимость

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}.$$

Ясно, что все свойства симметрии тензора μ_{iklm} полностью совпадают со свойствами симметрии тензора λ_{iklm} .

В свободную энергию F упругая энергия входит со знаком плюс:

$$F_{\text{упр}} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}.$$

Термодинамический же потенциал получается из F вычитанием $\sigma_{ik} u_{ik}$, и потому

$$\Phi_{\text{упр}} = F_{\text{упр}} - \sigma_{ik} u_{ik} = - \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} = - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm}.$$

Определение поля в пьезоэлектрическом теле должно производиться одновременно с определением его деформации и представляет собой совместную задачу электростатики и теории упругости. Именно, должно искаться совместное решение электростатических уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (17,9)$$

с \mathbf{D} из (17,6) и уравнений упругого равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (17,10)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности тела и с учетом связи между σ_{ik} и деформацией, даваемой формулами (17,8). В общем случае такая постановка задачи весьма сложна.

Задача очень упрощается для тела эллипсоидальной формы со свободной поверхностью (т. е. к которой не приложены никакие внешние механические силы). В этом случае (§ 8) поле внутри тела, а потому и его деформация однородны, а все упругие напряжения $\sigma_{ik} = 0$.

Наконец, займемся вопросом о том, какие типы кристаллической симметрии допускают существование пьезоэлектричества. Другими словами, надо рассмотреть ограничения, накладываемые условиями симметрии на компоненты тензора $\gamma_{i,kl}$. В общем случае этот тензор (симметричный по индексам k и l) имеет 18 отличных от нуля независимых компонент, фактически же число независимых компонент обычно значительно меньше.

При всех преобразованиях симметрии данного кристалла все компоненты его тензора $\gamma_{i,kl}$ должны оставаться неизменными по величине. Отсюда сразу следует, что во всяком случае не может быть пьезоэлектриком тело, обладающее центром симметрии, в том числе, конечно, всякое изотропное тело. Действительно, при отражении в центре (изменение знака всех трех координат) меняют знак все компоненты тензора третьего ранга.

Из 32-х кристаллических классов допускают пьезоэлектричество всего 20. Сюда относятся, прежде всего, 10 перечисленных в § 13 классов, допускающих пьезоэлектричество (все пьезоэлектрики являются в то же время и пьезоэлектриками). Кроме того, пьезоэлектрическими являются кристаллы следующих 10 классов:

ромбическая система: D_2 ,
 тетрагональная система: D_4 , D_{2d} , S_4 ,
 ромбоэдрическая система: D_3 ,
 гексагональная система: D_6 , C_{3h} , D_{3h} ,
 кубическая система: T , T_d .

Перечисление отличных от нуля компонент пьезоэлектрического тензора для всех классов дано в задачах к этому параграфу.

ЗАДАЧИ

1. Определить отличные от нуля компоненты тензора $\gamma_{i,kl}$ для непироэлектрических кристаллических классов, допускающих пьезоэлектричество.

Решение. Класс D_2 содержит три взаимно перпендикулярные оси симметрии второго порядка, которые выбираем в качестве осей x, y, z . Повороты на 180° вокруг этих осей меняют знаки каждого двух из трех координат. Поскольку компоненты $\gamma_{i,kl}$ преобразуются как произведения $x_i x_k x_l$, то отличными от нуля могут быть только те из них, все три индекса которых различны:

$$\gamma_{x, yz}, \gamma_{z, xy}, \gamma_{y, zx};$$

остальные отличные от нуля компоненты равны этим в силу свойства $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}$. Соответственно пьезоэлектрическая часть термодинамического потенциала¹⁾

$$\Phi_{\text{пьезо}} = -2(\gamma_{x, yz} E_x^\sigma yz + \gamma_{y, zx} E_y^\sigma xz + \gamma_{z, xy} E_z^\sigma xy). \quad (1)$$

Класс D_{2d} получается добавлением к осям класса еще двух плоскостей симметрии, проходящих через одну из осей (пусть ось z) и делящих пополам углы между осями x и y . Отражение в одной из этих плоскостей означает преобразование $x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow z$. Поэтому компоненты $\gamma_{i,kl}$, отличающиеся перестановкой индексов x и y , должны быть одинаковыми, так что из трех коэффициентов в (1) остаются независимыми лишь два:

$$\gamma_{z, xy}, \gamma_{x, yz} = \gamma_{y, zx}.$$

Класс T получается из класса D_2 путем добавления четырех диагональных осей симметрии третьего порядка, повороты вокруг которых осуществляют циклическую перестановку осей x, y, z , например: $x \rightarrow z, y \rightarrow x, z \rightarrow y$. Поэтому становятся равными все три коэффициента в (1):

$$\gamma_{x, yz} = \gamma_{z, xy} = \gamma_{y, zx}.$$

Такой же результат получается для кубического класса T_d .

Класс D_4 содержит ось симметрии 4-го порядка (ось z) и четыре оси 2-го порядка, лежащие в плоскости xy . В дополнение к элементам симметрии класса D_2 достаточно рассмотреть здесь поворот на 90° вокруг оси z , т. е. преобразование $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow z$. В силу этого преобразования один из коэффициентов в (1) обращается в нуль ($\gamma_{z, xy} = -\gamma_{z, yx} = -\gamma_{z, xy}$, откуда $\gamma_{z, xy} = 0$), а два других отличаются только знаком:

$$\gamma_{x, yz} = -\gamma_{y, xz}$$

Такой же результат получается для класса D_6 .

Класс S_4 содержит преобразования $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow -z$ и $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. Отличны от нуля компоненты

$$\gamma_{z, xy}, \gamma_{x, yz} = \gamma_{y, xz}, \gamma_{z, xx} = -\gamma_{z, yy}, \gamma_{x, zx} = -\gamma_{y, zy}$$

Соответствующим выбором направлений осей x, y одна из этих величин может быть обращена в нуль.

Класс D_3 содержит ось симметрии 3-го порядка (ось z) и три оси симметрии 2-го порядка в плоскости xy , одна из которых пусть будет направлена по оси x . Для выяснения ограничений, налагаемых наличием оси треть-

1) Во избежание недоразумений напомним, что если вычислять компоненты тензора деформации u_{ik} непосредственным дифференцированием конкретного выражения для Φ по σ_{ik} , то производные по компонентам σ_{ik} с $i \neq k$ дадут удвоенные значения соответствующих компонент u_{ik} (ср. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, ч. 2, примечание в конце § 10).

его порядка, удобно произвести формальное преобразование, вводя комплексные «координаты»

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy;$$

координату z оставляем без изменений. К этим новым координатам преобразуем также и тензор $\gamma_{i, kl}$. В его компонентах индексы пробегают теперь значения ξ, η, z . При повороте на 120° вокруг оси эти «координаты» подвергаются преобразованию

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \quad z \rightarrow z.$$

При этом остаются неизменными и потому могут быть отличными от нуля лишь следующие компоненты тензора $\gamma_{i, kl}$: $\gamma_z, z\xi, \gamma_\eta, z\eta, \gamma_\xi, \xi\xi, \gamma_\eta, \eta\eta, \gamma_z, zz$. Поворот же на 180° вокруг оси x есть преобразование $x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ или, в «координатах» ξ, η, z : $\xi \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \xi, z \rightarrow -z$. При этом $\gamma_z, z\xi$ и γ_z, zz изменяют знак и потому должны обратиться в нуль, а остальные из перечисленных выше компонент попарно переходят друг в друга, что приводит к равенствам $\gamma_\eta, z\xi = -\gamma_\xi, z\eta, \gamma_\xi, \xi\xi = \gamma_\eta, \eta\eta$. Для того чтобы написать выражение для $\tilde{\Phi}_{\text{пьезо}}$, надо составить сумму $-\gamma_{i, kl} E_i \sigma_{kl}$, в которой индексы пробегают значения ξ, η, z :

$$\tilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = -2\gamma_\eta, z\xi (E_\eta \sigma_{z\xi} - E_\xi \sigma_{z\eta}) - \gamma_\xi, \xi\xi (E_\xi \sigma_{\xi\xi} + E_\eta \sigma_{\eta\eta}).$$

Здесь надо еще выразить компоненты E_i и σ_{ik} в «координатах» ξ, η, z через компоненты в исходных координатах x, y, z . Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому, например, из

$$\xi\xi = xx - yy + 2ixy$$

следует, что

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}.$$

В результате получим

$$\tilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = 2a (E_y \sigma_{zx} - E_x \sigma_{zy}) + b [2E_y \sigma_{xy} - E_x (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})], \quad (2)$$

где $a = 2i\gamma_\eta, z\xi, b = 2\gamma_\xi, \xi\xi$ — вещественные постоянные. Соотношения между компонентами $\gamma_{i, kl}$ в координатах x, y, z гласят, как это видно из (2) 1):

$$\gamma_y, zx = -\gamma_x, zy \equiv 2a, \quad \gamma_y, xy = -\gamma_x, xx = \gamma_x, yy \equiv b.$$

Класс D_{3h} получается добавлением к классу D_3 плоскости симметрии, перпендикулярной к оси третьего порядка (плоскость xy). Отражение в этой плоскости есть изменение знака z , а потому и $\gamma_\eta, z\xi = 0$, так что в (2) остается только член с одним коэффициентом b .

Класс C_{3h} содержит, помимо оси третьего порядка, перпендикулярную к ней плоскость симметрии. Отражение в последней есть изменение знака z , а потому должны быть равными нулю все компоненты $\gamma_{i, kl}$ среди индексов, в которых z встречается нечетное число раз. Учитывая также рассмотренные выше ограничения, налагаемые осью симметрии третьего порядка, найдем, что отличны от нуля только две компоненты $\gamma_\eta, \eta\eta$ и $\gamma_\xi, \xi\xi$. Эти величины

1) В неортогональных координатах, каковыми являются ξ, η, z , надо, как известно, различать ко- и контравариантные компоненты тензоров. Это обстоятельство должно было бы учитываться и при переходе к исходным координатам x, y, z . Мы, однако, обходим этот вопрос тем, что искомую связь между различными компонентами $\gamma_{i, kl}$ в системе x, y, z определяем непосредственно на основании вида скалярной комбинации (2).

должны быть комплексно сопряженными для того, чтобы $\tilde{\Phi}$ было действительным. Обозначив $2\gamma_{\eta}, \eta\eta = a + ib$, $2\gamma_{\xi}, \xi\xi = a - ib$, получим

$$\tilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = a [2E_y \sigma_{xy} - E_x (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] + b [2E_x \sigma_{xy} + E_y (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})]. \quad (3)$$

Соответствующим выбором направления осей x, y можно обратить a или b в нуль.

2. То же для кристаллических классов, допускающих пьезоэлектричество. Решение. Пусть ось z совпадает с осью симметрии второго, третьего, четвертого или шестого порядка, а в классе C_8 перпендикулярна к плоскости симметрии. В классах C_{nv} плоскость xz совпадает с одной из плоскостей симметрии. Соответствующим выбором направления осей в классе C_1 можно обратить в нуль еще три компонента, а выбором осей x, y в классах C_8, C_n — одну компоненту.

Ниже указаны все отличные от нуля компоненты γ_{ik} для каждого из классов.

Класс C_1 : все γ_{ik} .

Класс C_8 : все компоненты, содержащие индекс z нуль или два раза.

Класс C_{2v} : $\gamma_z, xx, \gamma_z, yy, \gamma_z, zz, \gamma_x, xz, \gamma_y, yz$.

Класс C_2 : те же, что в C_{2v} , а также $\gamma_x, yz, \gamma_y, xz, \gamma_z, xy$.

Класс C_{4v} : $\gamma_z, xx = \gamma_z, yy, \gamma_z, zz, \gamma_x, xz = \gamma_y, yz$.

Класс C_4 : те же, что в C_{4v} , а также $\gamma_x, yz = -\gamma_y, xz$.

Класс C_{3v} : $\gamma_z, zz, \gamma_x, xz = \gamma_y, yz, \gamma_x, xx = -\gamma_x, yy = -\gamma_y, xy, \gamma_z, xx = \gamma_z, yy$.

Класс C_3 : те же, что в C_{3v} , а также $\gamma_x, yz = -\gamma_y, zx, \gamma_y, xx = -\gamma_y, yy = \gamma_x, xy$.

Класс C_{6v} : $\gamma_z, zz, \gamma_x, xz = \gamma_y, yz, \gamma_z, xx = \gamma_z, yy$.

Класс C_6 : те же, что в C_{6v} , а также $\gamma_x, yz = -\gamma_y, zx$.

3. Определить модуль Юнга (коэффициент пропорциональности между растягивающим напряжением и относительным удлинением) для плоскопараллельной пластинки непьезоэлектрического пьезоэлектрика в следующих случаях: а) пластинка растягивается обкладками закороченного конденсатора, б) пластинка растягивается обкладками незаряженного конденсатора, в) пластинка растягивается параллельно своей плоскости в отсутствие внешнего поля.

Решение. а) В этом случае напряженность поля внутри пластинки $E = 0$. Единственная отличная от нуля компонента тензора σ_{ik} — растягивающее напряжение σ_{zz} (ось z перпендикулярна к плоскости пластинки 1)). Из (17,8) имеем $u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz}$, откуда для модуля Юнга E :

$$\frac{1}{E} = \mu_{zzzz}.$$

б) В этом случае в пластинке $E_x = E_y = 0, D_z = 0$. Из (17,6) и (17,8) имеем

$$D_z = \epsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z, zz}\sigma_{zz} = 0,$$

$$u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz} + \gamma_{z, zz}E_z.$$

Исключая из этих двух равенств E_z , найдем

$$\frac{1}{E} = \mu_{zzzz} - \frac{4\pi\gamma_{z, zz}^2}{\epsilon_{zz}}.$$

1) Она не предполагается совпадающей с каким-либо избранным кристаллографическим направлением.

в) В этом случае тоже $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$, растяжение же пусть происходит вдоль оси x . Имеем

$$D_z = \epsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,xx}\sigma_{xx} = 0,$$

$$u_{xx} = \mu_{xxxx}\sigma_{xx} + \gamma_{z,xx}E_z.$$

Исключая E_z , получим

$$\frac{1}{E} = \mu_{xxxx} - \frac{4\pi\gamma_{z,xx}^2}{\epsilon_{zz}}.$$

4. Получить уравнение, определяющее скорость звука в пьезоэлектрической среде.

Решение. В этой задаче удобнее пользоваться как независимыми переменными величинами u_{ik} вместо σ_{ik} . Пишем \tilde{F} в виде

$$\tilde{F} = F_0 + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} - \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik} E_i E_k - \frac{1}{4\pi} E_i D_i + \beta_{i,kl} E_i u_{kl},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \beta_{l,ik} E_l.$$

Уравнения движения теории упругости гласят

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{l,ik} \frac{\partial E_l}{\partial x_k},$$

где \mathbf{u} — вектор смещения, связанный с u_{ik} посредством

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ дает

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi \beta_{i,kl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0,$$

а напряженность поля выражаем через его потенциал:

$$E_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

чем удовлетворяется уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

В плоской звуковой волне \mathbf{u} и φ пропорциональны $e^{i(kr - \omega t)}$, и из написанных уравнений получаем

$$\omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m - \beta_{l,ik} k_k k_l \varphi,$$

$$\epsilon_{ik} k_i k_k \varphi + 4\pi \beta_{i,kl} k_l k_k u_l = 0.$$

Исключив отсюда φ , пишем условие совместности получающихся для u_i уравнений

$$\left| \omega^2 \delta_{ik} - \lambda_{iklm} k_l k_m - 4\pi \frac{(\beta_{l,mi} k_l k_m)(\beta_{p,qk} k_p k_q)}{\epsilon_{rB} k_r k_B} \right| = 0.$$

При каждом заданном направлении волнового вектора \mathbf{k} это уравнение определяет три вообще говоря различных фазовых скорости звука ω/k . Характерной для пьезоэлектрической среды особенностью является сложная зависимость скорости от направления волны.

§ 18. Термодинамические неравенства

По формулам § 10 полная свободная энергия представляется в виде интеграла

$$\mathcal{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D}) dV, \quad (18,1)$$

взятого по всему пространству. Будем рассматривать входящую в подынтегральное выражение функцию $\mathbf{D}(x, y, z)$ как удовлетворяющую только уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (18,2)$$

внутри диэлектрика и условию

$$\int \mathbf{D} df = 4\pi e \quad (18,3)$$

на поверхности проводника, несущего заданный заряд; этими равенствами устанавливается связь поля с его источниками. В остальном же функцию $\mathbf{D}(x, y, z)$ считаем произвольной, в частности, не требуем заранее, чтобы она удовлетворяла второму уравнению поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ (где $\mathbf{E} = 4\pi \partial F / \partial \mathbf{D}$) и граничному условию $\varphi = \text{const}$ на поверхности проводников. Покажем, что эти недостающие уравнения могут тогда быть получены из условия минимальности интеграла (18,1) по отношению к изменениям функции $\mathbf{D}(x, y, z)$, удовлетворяющим уравнениям (18,2) и (18,3). Подчеркнем, что возможность такого вывода а priori не очевидна, так как конкурирующие при определении минимума интеграла (18,1) распределения поля не соответствуют физически возможным состояниям (поскольку для них не удовлетворяются все уравнения поля); в термодинамическом же условии минимальности свободной энергии сравниваются друг с другом лишь различные физические возможные состояния.

Задача о нахождении минимума интеграла (18,1) при дополнительных условиях (18,2) и (18,3) решается методом множителей Лагранжа. Следуя этому методу, умножим вариацию условия (18,2) на некоторую, пока неопределенную функцию координат (обозначим ее посредством $-\varphi/4\pi$), а вариацию условия (18,3) — на неопределенный постоянный множитель (обозначим его как $\varphi_0/4\pi$), после чего приравняем нулю сумму вариаций

$$\int \delta F dV - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV + \frac{\varphi_0}{4\pi} \oint \delta \mathbf{D} df = 0.$$

В первом члене пишем¹⁾

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right)_{T, \rho} \delta \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \delta \mathbf{D},$$

¹⁾ Свободная энергия имеет минимум при заданной температуре. Варьирование должно производиться по двум независимым величинам: \mathbf{D} и ρ . Нас интересует здесь лишь результат варьирования по \mathbf{D} . Варьирование же интеграла (18,1) по плотности (при дополнительном условии постоянства полной массы тела, т. е. интеграла $\int \rho dV$) дает одно из обычных условий теплового равновесия — постоянство химического потенциала ζ .

а второй преобразуем по частям:

$$\int \varphi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV = \oint \varphi \delta \mathbf{D} d\mathbf{f} - \int \delta \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi dV.$$

В результате получаем:

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad} \varphi) \delta \mathbf{D} dV + \oint (\varphi_0 - \varphi) \delta \mathbf{D} d\mathbf{f} = 0.$$

Отсюда заключаем, что во всем объеме должно быть $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (и потому $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$), а на поверхности проводника $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Это и есть правильные уравнения для напряженности поля, причем лагранжев множитель φ оказывается его потенциалом.

Аналогичным образом можно показать, что уравнения для электрической индукции получаются из условия минимальности интеграла

$$\tilde{F} = \int \tilde{F}(T, \rho, \mathbf{E}) dV,$$

в котором варьируется функция $\mathbf{E}(x, y, z)$ при дополнительных условиях, что $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, а $\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника. Действительно, имеем

$$\delta \tilde{F} = \int \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}} \delta \mathbf{E} dV - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{D} \nabla \delta \varphi dV = \frac{1}{4\pi} \oint \delta \varphi \mathbf{D} d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi} \int \delta \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV = 0.$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку $\delta \varphi = 0$ на поверхности, а из второго находим, ввиду произвольности $\delta \varphi$ в объеме, искомое уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

Если тело не находится во внешнем электрическом поле (в частности, нет заряженных проводников), то может оказаться возможным формулировать условие термодинамического равновесия как условие абсолютного (безусловного) минимума полной свободной энергии (18,1). Это условие сводится к условию минимальности плотности свободной энергии F как функции независимой переменной \mathbf{D} :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi} = 0,$$

т. е. напряженность поля должна быть равна нулю во всем пространстве. Если при этом может быть указано распределение индукции, удовлетворяющее условию $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, то тем самым найденное состояние будет соответствовать термодинамическому равновесию¹⁾.

Приравнивая нулю первую вариацию свободной энергии, мы находим только необходимые, но не достаточные условия ее минимальности. Выяснение же достаточных условий требует исследования второй вариации. Эти условия имеют вид определенных неравенств

¹⁾ Здесь имеются в виду тела, в которых может быть $\mathbf{D} \neq 0$ при $\mathbf{E} = 0$ (см. следующий параграф). В противном случае мы имели бы просто тривиальный результат $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ во всем пространстве.

(так называемые термодинамические неравенства) и являются, как известно, условиями, обеспечивающими устойчивость состояния тела ¹⁾.

При линейной связи между \mathbf{D} и \mathbf{E} все соотношения очень упрощаются и интересующее нас термодинамическое неравенство (связанное с диэлектрическими свойствами тела) становится очевидным. Полная свободная энергия есть

$$F_0 + \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon} dV.$$

Ясно, что она может иметь минимум только, если $\epsilon > 0$; в противном случае можно было бы неограниченно уменьшать интеграл, давая индукции \mathbf{D} сколь угодно большие значения. Таким образом, в этом случае мы по существу не узнаем ничего нового, так как мы уже знаем, что диэлектрическая проницаемость должна быть в действительности не только положительной, но и больше единицы (см. § 14).

В общем же случае произвольной связи между \mathbf{D} и \mathbf{E} необходимо рассмотреть вторую вариацию интеграла (18,1), причем варьировать надо одновременно \mathbf{D} и ρ (оставляя постоянной лишь температуру). В изотропном теле $F(T, \rho, \mathbf{D})$ зависит только от абсолютной величины вектора \mathbf{D} , варьируются же три его компоненты независимо. Выберем направление неварьированного вектора \mathbf{D} в качестве оси z . Тогда изменение абсолютной величины вектора \mathbf{D} выразится через изменения его компонент, с точностью до членов второго порядка, посредством

$$\delta D = \delta D_z + \frac{1}{2D} (\delta D_x)^2 + \frac{1}{2D} (\delta D_y)^2.$$

Первая и вторая вариации интеграла (18,1) вместе содержатся в выражении

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} \delta D^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \delta \rho^2 \right\} dV.$$

Подставив сюда δD и собирая члены второго порядка, найдем вторую вариацию:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2D} \frac{\partial F}{\partial D} (\delta D_x^2 + \delta D_y^2) dV + \\ & + \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} \delta D_z^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D_z \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \delta \rho^2 \right\} dV. \quad (18,4) \end{aligned}$$

Оба написанных здесь члена независимы друг от друга. Первый из них положителен, если $\frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial D} > 0$. Но $\partial F / \partial \mathbf{D} = \mathbf{E} / 4\pi$, так что производная $\partial F / \partial D$ положительна или отрицательна, смотря по тому, направлен ли вектор \mathbf{D} по или против вектора \mathbf{E} . Таким образом, векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} должны быть одинаково направлены.

¹⁾ См. «Статистическая физика», 3-е изд., § 21.

Условия положительности второго члена в (18,4) заключены в неравенствах

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} > 0, \quad (18,5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 > 0. \quad (18,6)$$

Поскольку $\partial F / \partial \rho = \zeta$, $\partial F / \partial D = E / 4\pi$, то первое из них дает

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_{D, T} > 0, \quad (18,7)$$

а второе можно переписать в виде якобиана:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial D}, \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)}{\partial (D, \rho)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (E, \zeta)}{\partial (D, \rho)} > 0.$$

Переходя от переменных D, ρ к переменным D, ζ , имеем

$$\frac{\partial (E, \zeta)}{\partial (D, \rho)} = \frac{\partial (E, \zeta)}{\partial (D, \zeta)} \frac{\partial (D, \zeta)}{\partial (D, \rho)} = \left(\frac{\partial E}{\partial D} \right)_{\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_{D} > 0;$$

ввиду (18,7) это неравенство равносильно условию

$$\left(\frac{\partial E}{\partial D} \right)_{\zeta, T} > 0. \quad (18,8)$$

Таким образом, мы нашли искомые термодинамические неравенства. В отсутствие поля неравенство (18,7) переходит в обычное условие положительности изотермической сжимаемости $(\partial \rho / \partial p)_T > 0$ ¹⁾. Неравенство же (18,8) дает $\epsilon > 0$, так как при $E \rightarrow 0$ индукция $D \rightarrow \epsilon E$.

Из двух неравенств (18,5), (18,6) второе является более сильным: оно может нарушаться раньше, чем нарушится первое, между тем как обратное невозможно. Равенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 = \frac{\partial (E, \zeta)}{\partial (D, \rho)} = 0$$

соответствует так называемому критическому состоянию²⁾. Это условие удобнее записать в другом виде, умножив его на отличный от нуля множитель $\partial (D, \rho) / \partial (E, \rho)$:

$$\frac{\partial (E, \zeta)}{\partial (E, \rho)} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_{E, T} = 0. \quad (18,9)$$

1) Напомним, что в отсутствие поля ζ есть термодинамический потенциал единицы массы вещества и согласно обычным термодинамическим соотношениям его дифференциал $d\zeta = \frac{1}{\rho} dp - \frac{S}{\rho} dT$, так что $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$.

В изложенном выводе остается в стороне второе из обычных термодинамических неравенств — условие положительности теплоемкости.

²⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 80.

Определение дополнительных условий устойчивости критического состояния вещества требует исследования третьей и четвертой вариаций, на чем мы здесь останавливаться не будем. Укажем лишь, что оно приводит к результатам

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)_{E, T} = 0, \quad (18,10)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \rho^3}\right)_{E, T} > 0, \quad (18,11)$$

аналогичным тем, которые имеют место в отсутствие электрического поля.

Задача

Определить смещение критической точки диэлектрического вещества в электрическом поле.

Решение. Подставляя в (18,9) выражение для ζ из (10,18), найдем

$$\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho}\right)_T - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2}\right)_T = 0.$$

Для химического потенциала при $E = 0$ имеем $\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$ (см. примечание на стр. 113), где под $p = p(\rho, T)$ надо понимать уравнение состояния вещества в отсутствие поля. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2}\right)_T.$$

В отсутствие поля критическая точка определяется равенством $(\partial p / \partial \rho)_T = 0$, причем для ее устойчивости одновременно должно быть и $(\partial^2 p / \partial \rho^2)_T = 0$. Поэтому имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \Delta \rho + \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T,$$

где $\Delta T, \Delta \rho$ — смещения критической температуры и плотности (причем, как это подтверждается окончательным результатом, эти смещения одинакового порядка малости). Окончательно для смещения температуры получаем

$$\Delta T = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2}\right)_T / \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T}.$$

Смещение критического давления определяется по ΔT согласно

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta T.$$

Для определения же смещения $\Delta \rho$ должно быть использовано аналогичным образом также и равенство (18,10).

§ 19. Сегнетоэлектрики

Среди различных кристаллических модификаций одного и того же вещества могут быть как пиро- так и непироэлектрические. Если переход между такими двумя модификациями совершается путем

фазового перехода второго рода, то вблизи точки перехода вещество обнаруживает ряд своеобразных свойств, отличающих его от обычных пироэлектриков; эти свойства называют сегнетоэлектрическими.

В обычном пироэлектрическом кристалле изменение направления спонтанной поляризации связано с необходимостью существенной перестройки кристаллической решетки. Даже если окончательный результат такой перестройки и был бы энергетически выгодным, его осуществление все равно может оказаться невозможным, так как это требовало бы преодоления очень высоких «энергетических барьеров».

В сегнетоэлектрическом же теле положение существенно меняется благодаря тому, что вблизи точки фазового перехода второго рода (точки Кюри) расположение атомов в кристаллической решетке пироэлектрической фазы лишь сравнительно мало отличается от их расположения в непироэлектрической решетке (в силу чего мала и спонтанная поляризация). По этой причине изменение направления спонтанной поляризации требует здесь лишь сравнительно небольшой перестройки решетки (небольшого сдвига атомов) и может сравнительно легко произойти.

Конкретный характер сегнетоэлектрических свойств тела существенно зависит от его кристаллографической симметрии. Направление спонтанной поляризации пироэлектрической фазы (мы будем говорить о нем как о сегнетоэлектрической оси) предопределяется уже структурой непироэлектрической фазы по другую сторону точки Кюри. В некоторых случаях это предопределение однозначно в том смысле, что сегнетоэлектрическая ось возникает лишь в одном вполне определенном кристаллографическом направлении; направление спонтанной поляризации в этом случае предопределено с точностью до знака, так как в непироэлектрической фазе оба взаимно противоположных направления, параллельных сегнетоэлектрической оси, при этом должны быть вполне эквивалентны (в противном случае и эта кристаллическая модификация допускала бы пироэлектричество). В других же случаях симметрия непироэлектрической фазы может оказаться такой, что допускает возникновение спонтанной поляризации в нескольких кристаллографически эквивалентных направлениях¹⁾.

1) Пример первого типа представляет сегнетова соль, непироэлектрическая фаза которой обладает ромбической симметрией. Сегнетоэлектрическая ось возникает в ней (в точке Кюри) во вполне определенном кристаллографическом направлении (одна из осей 2-го порядка), причем решетка становится моноклинной.

Пример второго рода представляет титанат бария. Его непироэлектрическая модификация имеет кубическую решетку, а сегнетоэлектрической может стать любая из трех кубических осей. После того, как в точке Кюри возникает спонтанная поляризация, эти три направления, разумеется, перестают быть эквивалентными: осью четвертого порядка остается лишь сегнетоэлектрическая ось и решетка становится тетрагональной.

Количественная теория сегнетоэлектричества может быть развита в соответствии с общей теорией фазовых переходов второго рода¹⁾; это было сделано В. Л. Гинзбургом (1945).

В основу дальнейших рассуждений мы положим соображения, связанные с термодинамической устойчивостью состояний. С этой точки зрения переход характеризуется тем, что по одну сторону от него состояние с $\mathbf{D} = 0$ может быть устойчивым, а по другую сторону — во всяком случае неустойчиво, в результате чего должна возникнуть отличная от нуля индукция (даже при равном нулю поле \mathbf{E}). Для определенности будем считать ниже, что пироэлектрическая фаза ($\mathbf{D} \neq 0$) соответствует температурам $T < \Theta$ (Θ — точка перехода); подчеркнем, однако, что такое расположение фаз, хотя и более частое, отнюдь не является обязательным, в природе существуют и обратные случаи.

Интересуясь, прежде всего, диэлектрическими свойствами вещества, предположим сначала, что внутренние напряжения в теле отсутствуют. Для определения условий устойчивости можно исходить из условия минимальности (при заданной температуре и постоянных равных нулю напряжениях) полного термодинамического потенциала тела. Как мы видели в § 18, оно сводится к условию положительности второй вариации термодинамического потенциала единицы объема Φ . Для состояний с близкой к нулю индукцией роль второй вариации Φ играет просто выражение

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik}^{-1} D_i D_k.$$

Если выбрать оси координат вдоль главных осей тензора ϵ_{ik} , то

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon^{(x)}} D_x^2 + \frac{1}{\epsilon^{(y)}} D_y^2 + \frac{1}{\epsilon^{(z)}} D_z^2 \right). \quad (19,1)$$

До тех пор, пока все три коэффициента $\frac{1}{\epsilon^{(i)}}$ положительны, состояние с $\mathbf{D} = 0$ удовлетворяет условиям устойчивости (т. е. может соответствовать минимуму Φ). Поэтому пироэлектрическая фаза может возникнуть лишь при изменении знака одного из этих коэффициентов. Точка же фазового перехода второго рода определяется соответственно условием обращения этого коэффициента в нуль.

При этом сегнетоэлектрической становится та ось, для которой $1/\epsilon^{(i)}$ обращается в нуль. Здесь возможны различные случаи, в зависимости от симметрии непироэлектрической фазы. Если эта симметрия такова, что $\epsilon^{(x)} \neq \epsilon^{(y)} \neq \epsilon^{(z)}$, то обращается в нуль лишь один из коэффициентов в (19,1), и положение сегнетоэлектрической оси однозначно. Если $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)}$ (для чего требуется кубическая

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, гл. 14. Следующее ниже изложение, однако, построено по схеме, отличающейся от обычной.

симметрия), то все три коэффициента одновременно обращаются в нуль и сегнетоэлектрическая ось может возникнуть в различных направлениях (см. ниже). Наконец, если в силу симметрии $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(y)} \neq \varepsilon^{(z)}$, то могут обращаться в нуль либо один, либо сразу два коэффициента в (19,1).

Мы рассмотрим сначала случай однозначного расположения сегнетоэлектрической оси, которую примем за ось z . Диэлектрические свойства кристалла в направлениях осей x и y при этом не обнаруживают никаких аномалий, а для исследования свойств вдоль оси z достаточно рассматривать в термодинамическом потенциале только члены, содержащие D_z .

Выражение (19,1) представляет собой по существу первые члены разложения Φ по степеням D . Поскольку вблизи точки перехода $1/\varepsilon^{(z)}$ мало, то наряду с квадратичным членом необходимо учесть в этой области также и следующий член разложения по D_z . Членов нечетных степеней в разложении не может быть, так как они изменили бы знак (и тем самым изменили бы значение Φ) при замене D_z на $-D_z$, между тем как оба направления вдоль оси z в данном случае эквивалентны. Поэтому следующим после квадратичного членом является член с D_z^4 :

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon^{(z)}} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4.$$

Для того, чтобы состояние с $D_z = 0$ могло быть устойчивым в самой точке $T = \Theta$, необходимо, очевидно, чтобы коэффициент B был положительным в этой точке, а потому и везде в ее окрестности. Вблизи точки перехода $1/\varepsilon^{(z)}$ можно разложить по степеням разности $T - \Theta$; первый член разложения имеет вид $\alpha(T - \Theta)$ с положительным коэффициентом α (так, чтобы было $1/\varepsilon^{(z)} > 0$ при $T > \Theta$). Таким образом,

$$\varepsilon^{(z)} = \frac{1}{\alpha(T - \Theta)}, \quad (19,2)$$

а термодинамический потенциал

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\alpha(T - \Theta)}{8\pi} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4. \quad (19,3)$$

Написанные формулы достаточны для того, чтобы выяснить все интересующие нас свойства сегнетоэлектрика вблизи точки перехода.

Прежде всего, согласно формуле $E_z = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_z}$ находим

$$E_z = \alpha(T - \Theta) D_z + B D_z^3. \quad (19,4)$$

Это — основное соотношение, определяющее связь между напряженностью и индукцией в сегнетоэлектрике.

При $T > \Theta$ (в непироэлектрической фазе) D_z обращается в нуль вместе с E_z . При возрастании E_z (при заданном значении $T - \Theta$)

индукция возрастает сначала по линейному закону ($D_z = E_z/\alpha(T - \Theta)$), а при достаточно больших значениях E_z — по закону $D_z = (E_z/B)^{1/3}$. Коэффициент пропорциональности $\epsilon^{(2)}$ в линейном законе есть диэлектрическая постоянная непироэлектрической фазы. При $T \rightarrow \Theta$ она неограниченно возрастает обратно пропорционально разности $T - \Theta$; в то же время, однако, сокращается область соблюдения линейного закона.

При $T < \Theta$ (пироэлектрическая фаза) значение $D_z = 0$ вообще не может соответствовать устойчивому состоянию. При $E_z = 0$ индукция имеет отличное от нуля значение, равное согласно (19,4)

$$D_z = D_{z0} = \pm \sqrt{\frac{\alpha(\Theta - T)}{B}}. \quad (19,5)$$

Таким образом, спонтанная поляризация $P_{z0} = D_{z0}/4\pi$ сегнетоэлектрика при приближении к точке Кюри убывает пропорционально $\sqrt{\Theta - T}$.

«Диэлектрическую постоянную» пироэлектрической фазы можно определить как значение производной dD_z/dE_z при $E_z = 0$. Из (19,4) имеем

$$1 = [-\alpha(\Theta - T) + 3BD_z^2] \frac{dD_z}{dE_z}$$

и, подставляя сюда (19,5) получим

$$\left. \frac{dD_z}{dE_z} \right|_{E_z=0} = \frac{1}{2\alpha(\Theta - T)}.$$

При достаточно малых E_z связь между D_z и E_z примет вид

$$D_z - D_{z0} = \frac{1}{2\alpha(\Theta - T)} E_z. \quad (19,6)$$

Сравнение (19,2) и (19,6) показывает, что «диэлектрическая постоянная» пироэлектрической фазы вдвое меньше, чем у непироэлектрической фазы на том же расстоянии от точки Кюри.

Дифференцируя Φ (19,3) по температуре, найдем энтропию

$$S = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_D = S_0 - \frac{\alpha}{8\pi} D_z^2.$$

(Член четвертого порядка можно здесь опустить, так как квадратичный член не обращается в нуль.) В непироэлектрической фазе при $E_z = 0$ также и $D_z = 0$, так что $S = S_0$. Для пироэлектрической же фазы, подставляя D_z из (19,5), найдем

$$S = S_0 - \frac{\alpha^2}{8\pi B} (\Theta - T).$$

Отсюда теплоемкость этой фазы в самой точке перехода

$$C_p = T \frac{\partial S}{\partial T} = C_{p0} + \frac{\alpha^2}{8\pi B}, \quad (19,7)$$

где C_{p0} — теплоемкость непироэлектрической фазы в той же точке. Таким образом, если переход из одной фазы сегнетоэлектрика в другую происходит при $E_z = 0$, то он сопровождается, как и обычные фазовые переходы второго рода, скачком теплоемкости. При этом $C_p > C_{p0}$, т. е. при возникновении пироэлектричества теплоемкость возрастает.

Вернемся к исследованию уравнения (19,4) в пироэлектрической фазе (т. е. при $T < \Theta$). На рис. 13 изображен примерный вид графика функции $D_z(E_z)$, определяемой этим уравнением. Прежде всего, мы видим, что участок кривой CC' (изображенный на рис. 13 пунктиром) вообще не соответствует устойчивым состояниям, которые могли бы осуществляться в природе. На нем

$$\frac{\partial E_z}{\partial D_z} = 4\pi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D_z^2} < 0,$$

между тем как условие положительности второй вариации термодинамического потенциала требует обратного знака этой производной. Ординаты точек C и C' определяются равенством $\partial E_z / \partial D_z = 0$, и мы приходим к выводу, что возможные значения $|D_z|$ в пироэлектрической фазе ограничены снизу условием

$$D_z^2 > \frac{\alpha(\Theta - T)}{3B}. \quad (19,8)$$

Если рассматривать состояния сегнетоэлектрика при заданном значении E_z , то в области между абсциссами точек C и C' все еще остается двузначность в возможном значении D_z , и возникает вопрос о физическом смысле обеих возможностей. Будем при этом представлять себе сегнетоэлектрик как плоскопараллельную однородную пластинку (с сегнетоэлектрической осью, перпендикулярной к плоскости пластинки), находящуюся между обкладками конденсатора, поддерживаемыми при заданных потенциалах, т. е. создающими однородное поле с заданной напряженностью $E = E_z$.

При заданных потенциалах проводников условие устойчивости требует минимальности термодинамического потенциала $\bar{\Phi} = \Phi - \frac{1}{4\pi} ED$.

В частности, при $E = 0$ имеются два состояния, отличающиеся знаком D_z (точки A и A' на кривой рис. 13), но отвечающие одному и тому же значению $\bar{\Phi}$ ($= \Phi$). Эти два состояния, следовательно,

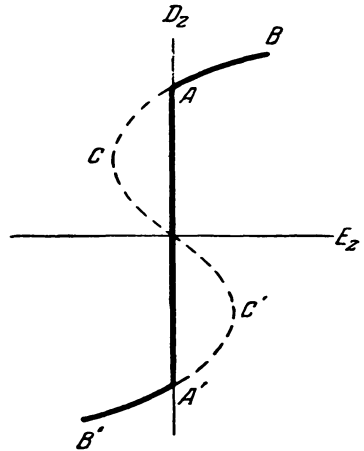


Рис. 13.

в равной степени устойчивы, т. е. представляют собой две «фазы», которые могут существовать одновременно, соприкасаясь друг с другом.

Уже отсюда ясно, что участки AC и $A'C'$ на кривой соответствуют состояниям не абсолютно устойчивым, а лишь метастабильным. Не представляет труда убедиться и непосредственно в том, что значения $\tilde{\Phi}$ на отрезках AC и $A'C'$ действительно больше, чем соответственно на ветвях $A'B'$ и AB при тех же значениях E_z . Ординаты точек A и A' даются формулой (19,5). Таким образом, область метастабильности лежит в интервале

$$\frac{\alpha(\theta - T)}{3B} < D_z^2 < \frac{\alpha(\theta - T)}{B}. \quad (19,9)$$

Существование двух «фаз» с $E=0$ весьма существенно, так как приводит к возможности распада сегнетоэлектрического тела на ряд отдельных областей (или «доменов»), отличающихся направлением поляризации. На поверхностях раздела между этими областями должны выполняться условия непрерывности нормальной компоненты D и касательной компоненты E . Второе из них выполняется тождественно (поскольку вообще $E=0$). Из первого же следует, что границы между доменами должны быть параллельными оси z .

Конкретные формы и размеры доменов определяются условием минимальности полного термодинамического потенциала тела¹⁾.

Если не интересоваться деталями этой структуры и рассматривать участки тела, большие по сравнению с размерами доменов, то можно ввести индукцию \bar{D} , усредненную по объему таких участков. Ее составляющая \bar{D}_z может, очевидно, пробегать значения в интервале между ординатами точек A и A' на рис. 13, т. е.

$$-\sqrt{\frac{\alpha(\theta - T)}{B}} < \bar{D}_z < \sqrt{\frac{\alpha(\theta - T)}{B}}. \quad (19,10)$$

Другими словами, если понимать на диаграмме рис. 13 под D_z усредненное в указанном смысле значение индукции, то области доменной структуры будет соответствовать вертикальный отрезок AA' , а изображенная жирной линией кривая $BAA'B'$ будет относиться ко всем стабильным состояниям, пробегаемым телом.

Сегнетоэлектрик должен иметь доменную структуру, в частности, в том случае, когда он не находится во внешнем электрическом поле. Действительно, мы видели в § 18, что условия термодинамического равновесия в отсутствие внешнего поля сводятся к условиям

¹⁾ Этот вопрос для сегнетоэлектриков в настоящее время еще почти не исследован.

абсолютного минимума Φ как функции от \mathbf{D} ; при этом должно быть везде $\mathbf{E} = 0$ ¹⁾.

Перейдем к сегнетоэлектрикам, относящимся (в непироэлектрической фазе) к кубической системе. Кубическая симметрия требует $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)} \equiv \epsilon$ и допускает два независимых инварианта четвертого порядка, составленных из компонент вектора \mathbf{D} , в качестве которых можно, например, выбрать

$$(D_x^4 + D_y^4 + D_z^4) \text{ и } (D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2).$$

Поэтому разложение термодинамического потенциала имеет вид

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\alpha(T - \theta)}{8\pi} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) + \frac{B}{16\pi} (D_x^4 + D_y^4 + D_z^4) + \frac{C}{8\pi} (D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2), \quad (19,11)$$

где по тем же причинам, что и выше, мы положили $\frac{1}{\epsilon} = \alpha(T - \theta)$; α , B , C — постоянные.

Следует, однако, иметь в виду, что кубическая симметрия может допустить также и инвариант третьего порядка $D_x D_y D_z$ (для кубических кристаллических классов T и T_d , не содержащих центра симметрии). В таких случаях состояние с $\mathbf{D} = 0$ заведомо не могло бы удовлетворять условию устойчивости (не может соответствовать минимуму Φ), так что точка Кюри вообще невозможна. Поэтому сегнетоэлектрический переход может существовать только в классах O , T_h , O_h кубической системы, что и предположено в разложении (19,11).

Совокупность членов четвертого порядка в (19,11) должна представлять собой существенно положительное выражение. Для этого должно быть

$$B > 0, \quad C > -B. \quad (19,12)$$

Спонтанная поляризация сегнетоэлектрика в отсутствие внешнего поля определяется, как уже было отмечено выше, условием абсолютного минимума Φ как функции от \mathbf{D} . В частности, поскольку член второго порядка в (19,11) не зависит от направления \mathbf{D} , то направление спонтанной поляризации определяется условием минимальности членов четвертого порядка при заданной абсолютной величине D . При этом возможны два случая. Если $C > B$, то минимуму Φ соответствуют направления \mathbf{D} вдоль осей x , y , z , т. е. вдоль какого-либо из трех ребер куба (кристаллографические направления

¹⁾ Подчеркнем, что здесь идет речь о полном термодинамическом равновесии. Оно осуществляется у сегнетоэлектриков, но никогда не может быть осуществлено у обычных пироэлектриков, в связи с упоминавшейся выше трудностью переориентации поляризации (а потому и образования доменов) в них.

[001], [010], [100]). Если же $C < B$, то Φ достигает минимума, когда D направлено вдоль какой-либо из четырех пространственных диагоналей куба (кристаллографические направления [111], $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ и т. д.), т. е. когда

$$D_x^2 = D_y^2 = D_z^2 = \frac{1}{3} D^2.$$

В первом случае спонтанно поляризованная пирозлектрическая фаза сегнетоэлектрика обладает тетрагональной, а во втором — ромбоэдрической симметрией.

Рассмотрим более подробно, например, первый случай ($C > B$) и примем направление спонтанной поляризации ниже точки Кюри за ось z . Величина спонтанной поляризации определяется минимумом выражения

$$-\frac{\alpha(\theta - T)}{8\pi} D^2 + \frac{B}{16\pi} D^4,$$

откуда

$$D_0^2 = \frac{\alpha(\theta - T)}{B}. \quad (19,13)$$

«Диэлектрическая проницаемость» ниже точки Кюри, разумеется, различна вдоль оси z и вдоль осей x , y . Если поле E мало, то малы также и D_x , D_y и $D_z - D_0$. Дифференцируя выражение (19,11), имеем при этом

$$E_z = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_z} = -\alpha(\theta - T) D_z + B D_z^3 \cong 2B D_0^2 (D_z - D_0),$$

$$E_x = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_x} \cong [C D_0^2 - \alpha(\theta - T)] D_x,$$

откуда

$$D_z - D_0 = \frac{1}{2\alpha(\theta - T)} E_z,$$

$$D_x = \frac{1}{\alpha(\theta - T) \left(\frac{C}{B} - 1 \right)} E_x. \quad (19,14)$$

Выше точки Кюри диэлектрическая проницаемость кубического сегнетоэлектрика одинакова по всем направлениям и равна

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha(T - \theta)}. \quad (19,15)$$

Наконец, остановимся кратко на упругих свойствах сегнетоэлектриков.

В зависимости от своего кристаллографического класса непирозлектрическая фаза сегнетоэлектрика может как обладать, так и не обладать пьезоэлектрическими свойствами¹⁾. При этом особый инте-

¹⁾ Непирозлектрическая фаза сегнетоэлектрика, обладающая пьезоэлектрическими свойствами, может относиться к восьми из перечисленных на стр. 105 десяти классов: D_2 , D_4 , D_{2d} , S_4 , D_3 , D_6 , C_{3h} , D_{3h} .

рес представляют те пьезоэлектрические кристаллы, симметрия которых допускает пьезоэлектрическую связь между деформациями и поляризацией вдоль сегнетоэлектрической оси. Сюда относятся кристаллические классы D_2 , D_{2d} , S_4 ; во всех этих трех случаях индукция D_z вдоль сегнетоэлектрической оси входит в пьезоэлектрическую часть термодинамического потенциала в виде члена ¹⁾

$$-\lambda_z \cdot xy D_z \sigma_{xy}.$$

В упругую же энергию кристаллов указанной симметрии компонента σ_{xy} входит в виде члена

$$-\mu_{xyxy} \sigma_{xy}^2.$$

Таким образом, для термодинамического потенциала вблизи точки Кюри имеем (для краткости обозначаем $\lambda_z \cdot xy = \lambda$, $\mu_{xyxy} = \mu$)

$$\Phi = \Phi_0' + \frac{\alpha(T-T_0)}{8\pi} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4 - \lambda D_z \sigma_{xy} - \mu \sigma_{xy}^2. \quad (19,16)$$

Членами с остальными компонентами мы не интересуемся, так как они не приводят ни к каким аномалиям пьезоэлектрических свойств вблизи точки Кюри.

Дифференцируя Φ по D_z и по σ_{xy} , получим поле E_z и деформацию u_{xy} ²⁾:

$$E_z = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_z} = \alpha(T-T_0) D_z + B D_z^3 - 4\pi \lambda \sigma_{xy}, \quad (19,17)$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \lambda D_z + \mu \sigma_{xy}. \quad (19,18)$$

В непироэлектрической области при слабом поле E можно пренебречь в (19,17) членом с D_z^3 :

$$E_z = \alpha(T-T_0) D_z - 4\pi \lambda \sigma_{xy}.$$

Подставив отсюда D_z в (19,18), получим

$$u_{xy} = \frac{\lambda}{2\alpha(T-T_0)} E_z + \left[\mu + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T-T_0)} \right] \sigma_{xy}.$$

Коэффициент при σ_{xy} в этой формуле играет роль упругого модуля для деформаций, при которых поддерживается постоянной напряженность поля E_z , в то время как μ в формуле (19,18) есть упру-

1) Поскольку мы пользуемся здесь потенциалом Φ , а не $\tilde{\Phi}$, как в § 17, то и пьезоэлектрический тензор $\lambda_{i,kl}$ не совпадает с ранее введенным тензором $\gamma_{i,kl}$. Свойства же симметрии этих тензоров, разумеется, одинаковы.

2) О дифференцировании по компонентам u_{ik} см. примечание на стр. 106.

гий модуль для деформации при постоянной индукции D_2 . Поэтому можно написать

$$\mu^{(E)} = \mu^{(D)} + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T - T_0)}, \quad (19,19)$$

где верхние индексы указывают характер деформации. Мы видим, что оба эти коэффициента ведут себя вблизи точки Кюри совершенно различным образом: в то время как $\mu^{(D)}$ есть постоянная конечная величина, модуль $\mu^{(E)}$ неограниченно растет при приближении к точке Кюри.

В пироэлектрической области формула (19,18) показывает, что спонтанная поляризация приводит к определенной деформации тела. В отсутствие внутренних напряжений и при равной нулю напряженности E деформация u_{xy} пропорциональна D_{20} , т. е. согласно (19,5) пропорциональна $\sqrt{\Theta - T}$.

Если симметрия (например, кубическая) непироэлектрической фазы сегнетоэлектрика не допускает линейного (по D) пьезоэффекта, то первые неисчезающие члены разложения термодинамического потенциала по степеням σ_{ik} и D квадратичны по компонентам D_i , т. е. имеют вид

$$- \gamma_{iklm} D_i D_k \sigma_{lm}, \quad (19,20)$$

где γ_{iklm} — тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов i, k и l, m .

Может возникнуть сомнение в законности использования выражения (19,20) в термодинамическом потенциале, поскольку в § 17 было указано, что последним можно пользоваться лишь при условии пренебрежения квадратичными эффектами. Сегнетоэлектрики, однако, являются в этом смысле исключением ввиду малости (вблизи точки Кюри) напряженности E по сравнению с индукцией D ¹⁾. Введение термодинамического потенциала было связано с пренебрежением величинами порядка EDu_{ik} (или, что то же, $ED\sigma_{ik}$); выражение же (19,20) — порядка $D^2\sigma_{ik}$.

¹⁾ Это видно, например, из формулы (19,4): первый член в правой стороне равенства содержит малую величину $T - \Theta$, а второй — третьего порядка по D .

ГЛАВА III ПОСТОЯННЫЙ ТОК

§ 20. Плотность тока и проводимость

От изучения электрических полей, создаваемых неподвижными зарядами, мы перейдем теперь к рассмотрению стационарного движения зарядов в проводниках (постоянный электрический ток).

Будем обозначать среднюю плотность потока зарядов посредством \mathbf{j} ; ее называют плотностью электрического тока¹⁾. В постоянном токе пространственное распределение \mathbf{j} не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (20,1)$$

выражающему собой постоянство полного среднего заряда, заключенного в любой части объема проводника.

Электрическое поле, существующее внутри проводника, по которому течет постоянный ток, тоже постоянно, а потому удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (20,2)$$

т. е. имеет потенциал.

К уравнениям (20,1) и (20,2) должно еще быть присоединено уравнение, связывающее между собой величины \mathbf{j} и \mathbf{E} . Эта связь зависит от свойств вещества проводника. В огромном большинстве случаев ее можно считать линейной (закон Ома).

Если проводник однороден и изотропен, то линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (20,3)$$

Коэффициент σ зависит от рода и состояния проводника; его называют коэффициентом электропроводности, или просто проводимостью тела.

¹⁾ В этой главе мы не рассматриваем создаваемого током магнитного поля и соответственно не учитываем обратного влияния этого поля на ток. Учет этого влияния потребует уточнения определения плотности тока, что будет сделано в § 29.

В однородном проводнике $\sigma = \text{const}$ и подстановка (20,3) в (20,1) дает $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Поэтому в этом случае потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

На границе раздела двух проводящих сред нормальная компонента плотности тока должна, очевидно, быть непрерывной. Кроме того, согласно общему условию непрерывности тангенциальной компоненты напряженности (следующему из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, ср. (1,7) и (6,9)) должно быть непрерывно отношение \mathbf{j}/σ . Таким образом, граничные условия для плотности тока гласят:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \frac{j_{t1}}{\sigma_1} = \frac{j_{t2}}{\sigma_2} \quad (20,4)$$

или для напряженности поля

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad E_{t1} = E_{t2}. \quad (20,5)$$

На границе же проводника с непроводящей средой имеем просто $j_n = 0$ или $E_n = 0$ ¹⁾.

Электрическое поле, поддерживающее ток, производит над перемещающимися в проводнике заряженными частицами (носителями тока) механическую работу; работа, производимая в 1 сек в единице объема, равна, очевидно, произведению \mathbf{jE} . Эта работа диссипируется в веществе проводника, переходя в тепло. Таким образом, количество тепла, выделяющегося в 1 сек в 1 см³ однородного проводника, равно

$$\mathbf{jE} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} \quad (20,6)$$

(закон Джоуля—Ленца).

Выделение тепла приводит к возрастанию энтропии тела. При выделении тепла $dQ = \mathbf{jE} dV$ энтропия данного элемента объема увеличивается на dQ/T . Поэтому скорость изменения полной энтропии тела равна

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV. \quad (20,7)$$

В силу закона возрастания энтропии эта производная должна быть положительной. Подставив в нее $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, мы видим, что из этого требования можно сделать заключение о положительности проводимости σ .

1) Обратим внимание на то, что уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } (\sigma \mathbf{E}) = 0$ и граничные условия (20,5) к ним обнаруживают формальную аналогию с уравнениями электростатического поля в диэлектриках, отличаясь от них лишь заменой ϵ на σ . Это обстоятельство позволяет находить решения задач о распределении тока в неограниченной проводящей среде непосредственно по решениям аналогичных электростатических задач. При наличии границ проводника с непроводящей средой эта аналогия не приводит к цели, так как в электростатике нет сред с $\epsilon = 0$.

В анизотропном теле (монокристалле) направления векторов \mathbf{j} и \mathbf{E} , вообще говоря, не совпадают и линейная связь между ними выражается формулами вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (20,8)$$

где величины σ_{ik} составляют симметричный (см. ниже) тензор второго ранга (тензор проводимости).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сама по себе симметрия кристалла могла бы допустить наличие свободного члена в линейной связи между \mathbf{j} и \mathbf{E} , т. е. формулу вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + j_i^{(0)}$$

с постоянным вектором $\mathbf{j}^{(0)}$. Наличие такого члена означало бы «пироэлектричность» проводника — в отсутствие тока ($\mathbf{j} = 0$) в нем существовало бы отличное от нуля поле. В действительности, однако, это невозможно в силу закона возрастания энтропии: член $\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении в (20,7) заведомо мог бы иметь оба знака, в результате чего \mathcal{S} не могла бы быть существенно положительной величиной.

Подобно тому как в изотропной среде условие $\mathcal{S} > 0$ приводит к положительности σ , так в анизотропном теле из этого условия следует положительность главных значений тензора σ_{ik} .

Зависимость числа независимых компонент тензора от симметрии кристалла такая же, как у всякого симметричного тензора второго ранга (см. § 13): у двухосных кристаллов все три главных значения различны, у одноосных — два из них одинаковы, а у кубических — все три одинаковы, т. е. кубический кристалл в отношении своих свойств проводимости ведет себя, как изотропное тело.

Симметричность тензора проводимости

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (20,9)$$

является следствием так называемого принципа симметрии кинетических коэффициентов. Формулировка этого общего принципа, принадлежащего Л. Онсагеру, удобная для применения здесь и ниже (в §§ 25, 26), заключается в следующем¹⁾.

Пусть x_1, x_2, \dots — некоторые величины, характеризующие состояние тела в каждой его точке. Наряду с ними вводим величины

$$X_a = - \frac{\partial S}{\partial x_a}, \quad (20,10)$$

где S — энтропия единицы объема тела, а производная берется при постоянной энергии этого объема. В состоянии, близком к равновесному, величины x_a близки к своим равновесным значениям,

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 118, Гостехиздат, 1951; «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 58, Гостехиздат, 1953.

а величины X_a малы. При этом в теле будут происходить процессы, стремящиеся привести его в состояние равновесия. О скоростях изменения величин x_a при этих процессах можно обычно утверждать, что они являются в каждой точке тела функциями только от значений величин x_a (или X_a) в тех же точках. Разлагая эти функции в ряд по степеням X_a и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим соотношения вида

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = - \sum_b \gamma_{ab} X_b. \quad (20,11)$$

Тогда можно утверждать, что коэффициенты γ_{ab} (так называемые кинетические коэффициенты) симметричны по индексам a и b :

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (20,12)$$

Для фактического использования этого принципа необходимо, выбрав тем или иным способом величины x_a (или прямо их производные \dot{x}_a), определить соответствующие X_a . Эта задача обычно может быть весьма просто решена с помощью формулы, определяющей скорость изменения со временем полной энтропии тела:

$$\frac{dS}{dt} = - \int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \quad (20,13)$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В данном случае при прохождении тока через проводник для этой скорости мы имеем формулу (20,7). Сравнивая ее с (20,13), мы видим, что если в качестве величин x_a выбрать компоненты вектора плотности тока \mathbf{j} , то соответствующими величинами X_a будут компоненты вектора $-\mathbf{E}/T$. Сравнение же формул (20,8) и (20,11) показывает, что роль кинетических коэффициентов играют при этом умноженные на T компоненты тензора проводимости, симметрия которого следует, таким образом, непосредственно из общих соотношений (20,12).

Задачи

1. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_a . С каждого из электродов стекает ток J_a . Определить полное джоулево тепло, выделяющееся в среде в 1 секунду.

Решение. Искомое тепло Q дается интегралом

$$Q = \int \mathbf{jE} dV = - \int \mathbf{j} \nabla \varphi dV = - \int \operatorname{div} (\varphi \mathbf{j}) dV,$$

взятым по объему среды. Преобразуем этот интеграл в интеграл по поверхности, учитывая, что на внешней границе среды $j_n = 0$, а на поверхности электродов $\varphi = \text{const} \equiv \varphi_a$. В результате получим

$$Q = \sum_a \varphi_a J_a.$$

2. Определить распределение потенциала в проводящей сфере, в которую ток J входит через один полюс и выходит через противоположный полюс.

Решение. Вблизи полюсов O и O' (рис. 14) потенциал соответственно должен иметь вид

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma} \frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{J}{2\pi\sigma} \frac{1}{R_2},$$

где R_1, R_2 — расстояния до полюсов. Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа, а интегралы $-\sigma \int \nabla\varphi \cdot d\mathbf{f}$ по бесконечно малым полусферам вокруг точек O и O' равны $\pm J$. Ищем потенциал в произвольной точке P сферы в виде

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi \right\},$$

где ψ есть решение уравнения Лапласа, не имеющее полюсов внутри сферы и на ее поверхности. Из симметрии очевидно, что ψ (как и φ) есть функция только сферических координат r и θ .

На поверхности сферы ($r = a$) должно быть $\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$. Производя дифференцирование, найдем отсюда для ψ следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{при} \quad r = a.$$

Если $f(r, \theta)$ есть какое-либо решение уравнения Лапласа, то функция

$\int_0^r \frac{f(r, \theta)}{r} dr$ тоже есть решение¹⁾. Сравнивая с написанным граничным условием, легко заключить, что ему удовлетворяет решение

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{dr}{r}.$$

Подставив $R_{1,2} = \sqrt{a^2 + r^2 \mp 2ar \cos \theta}$ и производя интегрирование, получим окончательно

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{a+r \cos \theta}{r \sin \theta} - \operatorname{Arsh} \frac{a-r \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \right\}.$$

¹⁾ В этом легко убедиться как непосредственной проверкой, так и на основании того, что всякое решение $f(r, \theta)$ уравнения Лапласа, зависящее только от переменных r, θ , может быть представлено в виде

$$f = \sum_n c_n r^n P_n(\cos \theta),$$

где c_n — постоянные, а P_n — полиномы Лежандра.

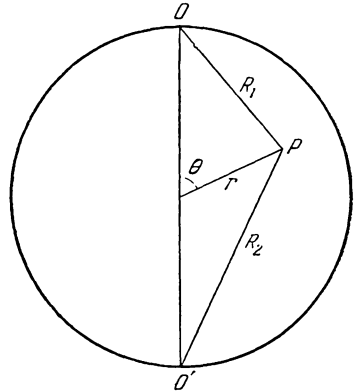


Рис. 14.

3. Показать, что распределение тока в проводящей среде отвечает минимуму диссипации энергии.

Решение. Речь идет о минимуме интеграла $\int \mathbf{j}E dV = \int \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dV$ при дополнительном условии $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, выражающем сохранение заряда. Варьируя по \mathbf{j} интеграл

$$\int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - 2\varphi \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV$$

(2φ — лагранжев неопределенный множитель) и приравнявая вариацию нулю, получим уравнение $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi$ или

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0,$$

совпадающее с уравнениями (20,2) и (20,3).

§ 21. Эффект Холла

Если проводник находится во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , то связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношениями

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

но компоненты тензора проводимости σ_{ik} являются функциями \mathbf{H} и, что особенно существенно, уже не симметричны по индексам i, k . Симметрия этого тензора была доказана в § 20, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Но в магнитном поле, как известно, формулировка этого принципа несколько меняется: одновременно с перестановкой индексов у кинетических коэффициентов должно быть изменено на обратное также и направление магнитного поля¹⁾. Поэтому для компонент тензора $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ будем теперь иметь соотношения

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (21,1)$$

Величины же $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ отнюдь не равны друг другу.

Как и всякий общий тензор второго ранга, тензор σ_{ik} можно разделить на симметричную и антисимметричную части, которые мы обозначим соответственно как s_{ik} и a_{ik} :

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \quad (21,2)$$

По определению,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ik}(\mathbf{H}), \quad (21,3)$$

а из (21,1) следует, что

$$\left. \begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) &= s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \right\} \quad (21,4)$$

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 118.

Таким образом, компоненты тензора s_{ik} являются четными, а тензора a_{ik} — нечетными функциями магнитного поля.

Как известно, всякий антисимметрический тензор второго ранга a_{ik} эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору, с которым его компоненты связаны посредством

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x. \quad (21,5)$$

С помощью этого вектора компоненты произведения $a_{ik}E_k$ могут быть написаны в виде компонент векторного произведения $[Ea]$:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + [Ea]_i. \quad (21,6)$$

Джоулево тепло, выделяющееся при прохождении тока, определяется произведением \mathbf{jE} . В силу перпендикулярности векторов $[Ea]$ и E их произведение обращается тождественно в нуль, так что

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_iE_k, \quad (21,7)$$

т. е. джоулево тепло определяется (при заданной напряженности E) одной лишь симметричной частью тензора проводимости.

Внешнее магнитное поле большей частью можно считать слабым; соответственно можно разложить компоненты тензора проводимости по его степеням. Ввиду нечетности функции $a(H)$, в разложение этого вектора войдут только члены нечетных степеней. Первые члены разложения линейны по полю, т. е. имеют вид

$$a_i = \alpha_{ik}H_k. \quad (21,8)$$

Векторы a и H оба аксиальны; поэтому постоянные α_{ik} составляют обычный (полярный) тензор. В разложение же четных функций $s_{ik}(H)$ входят только члены с четными степенями. Первый член разложения есть проводимость $\sigma_{ik}^{(0)}$ в отсутствие поля, а первые поправочные члены квадратичны по полю:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm}H_lH_m. \quad (21,9)$$

Тензор β_{iklm} симметричен как по индексам i, k , так и по индексам l, m .

Таким образом, основной, линейный по полю, эффект влияния магнитного поля заключен в члене $[Ea]$ (так называемый эффект Холла). Он состоит, как мы видим, в появлении тока, перпендикулярного к электрическому полю и по величине пропорционального напряженности магнитного поля. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае произвольной анизотропной среды холловский ток не является единственным, перпендикулярным к E ; такие составляющие может иметь и не холловский ток $s_{ik}E_k$.

Эффект Холла имеет и другой аспект, явствующий из обратных формул, выражающих поле E через плотность тока:

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1}j_k.$$

Обратный тензор σ_{ik}^{-1} , как и прямой, можно разложить на симметричную часть (которую мы обозначим как ρ_{ik}) и антисимметричную, эквивалентную некоторому аксиальному вектору \mathbf{b} :

$$E_i = \rho_{ik} j_k + [\mathbf{j}\mathbf{b}]_i. \quad (21,10)$$

Тензор ρ_{ik} и вектор \mathbf{b} обладают такими же свойствами, как и s_{ik} и \mathbf{a} . В частности, в слабых полях вектор \mathbf{b} линеен по магнитному полю. В формулах (21,10) эффект Холла представляется членом $[\mathbf{j}\mathbf{b}]$, т. е. появлением электрического поля, перпендикулярного к току и по величине пропорционального магнитному полю (и току \mathbf{j}).

Все написанные выше соотношения очень упрощаются, если проводник изотропен. В этом случае из соображений симметрии очевидно, что вектор \mathbf{b} (или \mathbf{a}) может быть направлен только вдоль магнитного поля. Единственными же отличными от нуля компонентами тензора ρ_{ik} являются $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ и ρ_{zz} , где ось z выбрана вдоль направления поля. Обозначив эти две величины посредством ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} и выбрав плоскость xz проходящей через направление тока, будем иметь

$$E_x = \rho_{\perp} j_x, \quad E_y = -b j_x, \quad E_z = \rho_{\parallel} j_z. \quad (21,11)$$

Отсюда видно, что в изотропном проводнике холловское поле есть единственное электрическое поле, перпендикулярное одновременно току и магнитному полю.

В слабых магнитных полях связь векторов \mathbf{b} и \mathbf{H} дается (в изотропном теле) просто соотношением

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H}. \quad (21,12)$$

Постоянная R (так называемая постоянная Холла) может быть как положительной, так и отрицательной. Что касается квадратичных по \mathbf{H} членов в зависимости между \mathbf{E} и \mathbf{j} (входящих через тензор ρ_{ik}), то их вид очевиден из того, что единственными векторами, которые можно составить из \mathbf{j} и \mathbf{H} (линейными по \mathbf{j} и квадратичными по \mathbf{H}), являются $\mathbf{H}(\mathbf{j}\mathbf{H})$ и $\mathbf{j}\mathbf{H}^2$. Поэтому общий вид зависимости между \mathbf{E} и \mathbf{j} в изотропном теле с учетом квадратичных по \mathbf{H} членов дается формулой

$$\mathbf{E} = \rho^{(0)}\mathbf{j} + R[\mathbf{H}\mathbf{j}] + \beta_1\mathbf{j}\mathbf{H}^2 + \beta_2\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{j}). \quad (21,13)$$

Задача

Выразить компоненты обратного тензора σ_{ik}^{-1} через компоненты s_{ik} и \mathbf{a} .

Решение. Проще всего производить вычисления, выбрав систему координат x, y, z , в которой тензор s_{ik} приведен к главным осям, после чего

по виду получающихся выражений легко заключить об их общей форме в произвольной системе координат. Определитель тензора:

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_x & -a_y \\ -a_x & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2.$$

Очевидно, что в общем случае

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

Составляя также миноры этого определителя, найдем компоненты обратного тензора

$$\sigma_{xx}^{-1} = \rho_{xx} = \frac{s_{yy}s_{zz} + a_x^2}{|\sigma|}, \quad \sigma_{xy}^{-1} = \rho_{xy} + b_x = \frac{a_x a_y - a_x s_{zz}}{|\sigma|}, \quad \dots$$

Общие выражения, переходящие в эти при нашем выборе системы координат, суть

$$\rho_{ik} = \frac{1}{|\sigma|} \{ s_{ik}^{-1} |s| + a_i a_k \},$$

$$b_i = -\frac{1}{|\sigma|} s_{ik} a_k,$$

чем и решается поставленная задача.

§ 22. Контактная разность потенциалов

Для того чтобы удалить из проводника через его поверхность заряженную частицу, необходимо произвести над ней определенную работу. Работой выхода называют работу, которая должна быть произведена над частицей, если ее удаление совершается термодинамически обратимым образом. Эта величина всегда положительна, как это следует непосредственно из того, что точечный заряд притягивается ко всякому нейтральному телу, в том числе ко всякому проводнику (см. § 14). Ниже нам будет удобнее относить эту работу к единице (положительного) заряда; знак определенного таким образом «потенциала выхода» W совпадает со знаком заряда удаляемой частицы.

Работа выхода зависит как от рода проводника (и его термодинамического состояния — температуры, плотности), так и от рода заряженной частицы. Например, у одного и того же металла работа выхода различна при удалении заряда в виде электрона проводимости или при удалении иона с его поверхности. Необходимо также подчеркнуть, что работа выхода является величиной, характеризующей поверхность проводника, а не его объемные свойства. Поэтому она зависит, например, и от способа обработки и степени «загрязнения» поверхности. Если проводник представляет собой монокристалл, то работа выхода различна и для разных его граней.

Для уяснения физической природы зависимости работы выхода от свойств поверхности установим ее связь с электрической структурой

поверхностного слоя вещества. Понимая под $\rho(x)$ плотность зарядов, не усредненную по физически бесконечно малым элементам длины вдоль оси x (перпендикулярной к плоскости слоя), пишем уравнение Пуассона в поверхностном слое:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Пусть области проводника соответствуют $x < 0$. Интегрируя один раз, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi \int_{-\infty}^x \rho dx,$$

после чего следующее интегрирование производим по частям:

$$\varphi - \varphi_{-\infty} = -4\pi x \int_{-\infty}^x \rho dx + 4\pi \int_{-\infty}^x x\rho dx.$$

При $x \rightarrow \infty$ интеграл $\int_{-\infty}^x \rho dx$ весьма быстро стремится к нулю (ввиду электронейтральности поверхности незаряженного проводника). Поэтому

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho dx.$$

Интеграл, стоящий в правой стороне равенства, представляет собой дипольный момент зарядов, распределенных вблизи поверхности тела. Это распределение имеет характер «двойного слоя», в котором заряды противоположного знака разделены так, что дипольный момент системы отличен от нуля. Структура двойного слоя, разумеется, зависит от свойств поверхности (ее кристаллографического направления, загрязнений и т. п.). Разность же потенциалов выхода с различных поверхностей данного проводника определяется разницей их дипольных моментов.

Если два различных проводника приведены в соприкосновение друг с другом, то между ними может происходить обмен заряженными частицами. При этом заряды будут переходить от тела с меньшей к телу с большей работой выхода до тех пор, пока между обоими проводниками не установится разность потенциалов, препятствующая переходу зарядов — так называемая контактная разность потенциалов.

На рис. 15 изображен поперечный разрез двух соприкасающихся проводников (a и b) вблизи их свободных поверхностей AO и OB . Потенциалы этих поверхностей обозначим соответственно как φ_a и φ_b ; контактная разность потенциалов есть разность $\varphi_{ab} = \varphi_b - \varphi_a$.

Количественная связь между этой разностью и работами выхода устанавливается условием термодинамического равновесия. Рассмотрим работу, которая должна была бы быть произведена над частицей с зарядом e для того, чтобы удалить его из проводника a через поверхность AO , затем перенести его к поверхности OB и, наконец, ввести внутрь проводника b ; в состоянии термодинамического равновесия эта работа должна быть равна нулю¹⁾. Работы, производимые над частицей на каждом из указанных трех этапов пути, равны соответственно eW_a , $e(\varphi_b - \varphi_a)$ и $-eW_b$. Приравняв их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\varphi_{ab} = W_b - W_a. \quad (22,1)$$

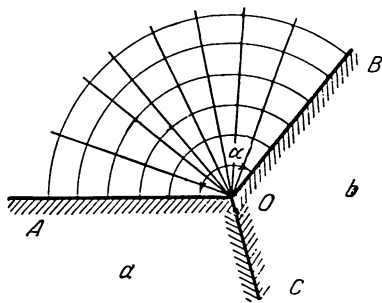


Рис. 15.

Таким образом, контактная разность потенциалов между соседними свободными поверхностями двух соприкасающихся проводников равна разности их потенциалов выхода.

Наличие контактной разности потенциалов приводит к появлению электрического поля в пространстве вне проводников. Не представляет труда определить это поле вблизи места соприкосновения. В небольшой области вблизи линии соприкосновения (точка O на рис. 15) пересекающиеся стороны проводников можно рассматривать как плоские. Потенциал поля вне проводников удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

(r, θ — полярные координаты с началом в точке O), а на сторонах AO и OB должен принимать заданные постоянные значения. При этом нас интересует решение, содержащее наиболее низкую степень r : оно будет представлять собой главный член разложения потенциала по степеням малого расстояния r . Таким решением является $\varphi = \text{const} \cdot \theta$. Отсчитывая угол θ от стороны AO и приняв ее потенциал условно равным нулю, получим

$$\varphi = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha} \theta, \quad (22,2)$$

где α — угол AOB . Таким образом, эквипотенциальными линиями (в плоскости рисунка) являются прямые лучи, расходящиеся от

¹⁾ Разумеется, в действительности переход частицы из одного проводника в другой может произойти только через поверхность их контакта, а не через окружающее пространство. Мы, однако, пользуемся тем, что работа этого перехода не зависит от его пути.

точки O . Соответственно силовые линии представляют собой семейство дуг окружностей с центром в точке O . Напряженность поля равна

$$E = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\varphi_{ab}}{a} \frac{1}{r}, \quad (22,3)$$

т. е. убывает обратно пропорционально расстоянию от точки O .

Как уже указывалось, «контактные» разности потенциалов существуют и между различными гранями металлического монокристалла. Поэтому электрическое поле описанного выше характера должно существовать и вблизи ребер кристалла¹⁾.

Если имеется целый ряд последовательно соединенных металлических проводников (находящихся при одинаковой температуре), то разность потенциалов между крайними проводниками равна (как это легко заключить на основании формулы (22,1)) просто разности их потенциалов выхода, как и для двух непосредственно соприкасающихся проводников. В частности, если на обоих концах цепи найдутся одинаковые металлы, то разность потенциалов между ними равна нулю. Это обстоятельство, впрочем, уже заранее совершенно очевидно: если бы между одинаковыми проводниками существовала разность потенциалов, то при замыкании цепи в ней возник бы ток, в противоречии со вторым началом термодинамики.

§ 23. Гальванический элемент

Сделанное в конце предыдущего параграфа замечание теряет свою силу, если в цепи участвуют проводники с носителями тока различной природы (металлы и растворы электролитов). В связи с различием работ выхода одного и того же проводника по отношению к различным заряженным частицам (электронам и ионам) сумма всех контактных разностей потенциалов в цепи здесь отлична от нуля даже при одинаковых проводниках на обоих ее концах. Эту сумму называют действующей в цепи электродвижущей силой (э. д. с.); она представляет собой не что иное, как разность потенциалов между двумя одинаковыми проводниками, находящимися на концах разомкнутой цепи. При замыкании такой цепи в ней возникает ток; на этом основана работа так называемых гальванических элементов. Источником энергии, поддерживающим прохождение тока в цепи, являются при этом химические превращения, происходящие в элементе.

При полном обходе по любому замкнутому контуру, проходящему внутри замкнутой цепи, потенциал поля должен, разумеется, вернуться к исходному значению, т. е. его суммарное изменение равно нулю. Рассмотрим, например, контур, проходящий по поверхности проводников. При переходе с одного проводника на другой

¹⁾ В реальных условиях все эти поля обычно компенсируются полем ионов, «налипающих» из атмосферы на поверхность.

потенциал испытывает скачки φ_{ab} . Падение же потенциала вдоль длины каждого проводника при наличии тока J (полный ток через сечение) равно RJ , где R — сопротивление проводника. Поэтому суммарное изменение потенциала вдоль цепи равно

$$\sum \varphi_{ab} - \sum JR.$$

Приравнивая это выражение нулю и замечая, что ток J постоянен вдоль всей цепи, а сумма $\sum \varphi_{ab}$ есть электродвижущая сила \mathcal{E} , найдем:

$$J \sum R = \mathcal{E}, \quad (23,1)$$

так что ток, возникающий в цепи с гальваническим элементом, равен э. д. с., деленной на полное сопротивление всех проводников в цепи (в том числе, разумеется, и внутреннее сопротивление самого элемента).

Хотя э. д. с., гальванического элемента и может быть выражена в виде суммы контактных разностей потенциалов, но очень важно подчеркнуть, что в действительности это есть термодинамическая величина, определяющаяся исключительно объемными состояниями проводников и совершенно не зависящая от свойств их поверхностей раздела. Это ясно уже из того, что \mathcal{E} есть не что иное, как работа (отнесенная к единичному заряду), которая была бы произведена над заряженной частицей при обратимом проведении ее вдоль всей замкнутой цепи.

Для иллюстрации этого обстоятельства рассмотрим гальванический элемент, составленный из двух металлических электродов (металлы A и B), погруженных в раствор электролитов $AХ$ и $BХ$ (X^- — какой-либо анион). Пусть ζ_A и ζ_B — химические потенциалы металлов A и B , а ζ_{AX} , ζ_{BX} — химические потенциалы электролитов в растворе¹⁾. Проведение элементарного заряда e вдоль замкнутой цепи означает переход иона A^+ из электрода A в раствор, переход иона B^+ из раствора на электрод, причем изменение зарядов электродов компенсируется переходом электрона от электрода A к электроду B по внешней части цепи. Результат этих процессов сводится к тому, что электрод A теряет, а B приобретает по одному нейтральному атому, а в растворе электролита одна молекула $BХ$ заменяется на $AХ$. Поскольку работа, производимая при обратимом процессе (при постоянных температуре и давлении), равна изменению термодинамического потенциала системы, то находим соотношение

$$e\mathcal{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}), \quad (23,2)$$

выражающее э. д. с. элемента через объемные свойства электродов и раствора электролита.

¹⁾ В этом параграфе подразумевается обычно определение химического потенциала на одну частицу.

Форма записи (23,2) позволяет сделать также и следующий вывод. Если в растворе находятся три электролита (AX , BX , CX) и в него погружены металлические электроды A , B , C , то э. д. с. между каждыми двумя из них связано соотношением

$$\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} = \mathcal{E}_{AC}. \quad (23,3)$$

С помощью общих термодинамических соотношений можно связать э. д. с. гальванического элемента с тепловым эффектом, сопровождающим прохождение тока по цепи, которое в реальных условиях происходит, разумеется, необратимым образом. Пусть Q есть количество тепла, выделяющегося (как в самом элементе, так и во внешней части цепи) при прохождении единичного заряда; это есть не что иное, как термодинамическая теплота реакции, происходящей внутри гальванического элемента при прохождении тока. Согласно известной термодинамической формуле¹⁾ она связана с работой \mathcal{E} следующим соотношением:

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mathcal{E}}{T} \right). \quad (23,4)$$

Определение стоящей здесь частной производной по температуре зависит от того, в каких условиях происходит процесс; так, если прохождение тока совершается при постоянном давлении (как это обычно и имеет место), то дифференцирование производится при постоянном давлении.

§ 24. Электрокапиллярность

Наличие зарядов на границе между двумя проводящими средами влияет на поверхностное натяжение на ней; это явление называют электрокапиллярностью. Фактически речь идет при этом о двух жидких средах — обычно о границе между жидким металлом (ртуть) и раствором электролита.

Обозначим посредством φ_1 и φ_2 потенциалы обоих проводников, а посредством e_1 и e_2 — заряды, расположенные у их поверхности соприкосновения. Последние равны по величине и противоположны по знаку, образуя, таким образом, вдоль этой поверхности так называемый «двойной слой».

Для дифференциала потенциала \mathcal{P} системы двух проводников, с учетом их поверхности раздела, при заданных давлении и температуре, имеем

$$d\mathcal{P} = \alpha dS - e_1 d\varphi_1 - e_2 d\varphi_2. \quad (24,1)$$

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 89.

Член αdS представляет собой работу обратимого изменения площади S поверхности раздела (α — коэффициент поверхностного натяжения)¹⁾.

Вместо термодинамического потенциала $\tilde{\mathcal{F}}$ в (24,1) можно писать только его «поверхностную часть» $\tilde{\mathcal{F}}_s$, так как объемная часть при заданных давлении и температуре все равно постоянна и не интересует нас здесь. Обозначив $e_1 = -e_2 \equiv e$ и вводя разность потенциалов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, перепишем (24,1) в виде

$$d\tilde{\mathcal{F}}_s = \alpha dS - ed\varphi. \quad (24,2)$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_s}{\partial S}\right)_\varphi = \alpha, \quad (24,3)$$

причем α выражено в функции от φ . Интегрируя это соотношение, найдем, что $\tilde{\mathcal{F}}_s = \alpha S$. Подставив это обратно в (24,2), получим $d(\alpha S) = \alpha dS - ed\varphi$ или $S d\alpha = -e d\varphi$, откуда

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)_{p, T}, \quad (24,4)$$

где $\sigma = e/S$ — заряд, приходящийся на 1 см² поверхности. Соотношение (24,4) (впервые полученное Липпманом и Гиббсом) является основной формулой теории электрокапиллярных явлений.

В состоянии равновесия термодинамический потенциал $\tilde{\mathcal{F}}$ должен быть минимален при заданных значениях электрических потенциалов проводников. Рассматривая его как функцию поверхностных зарядов e , напишем необходимые условия минимума:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_s}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}_s}{\partial e^2} > 0, \quad (24,5)$$

где производные подразумеваются взятыми при постоянной площади S . Для вычисления производных выразим $\tilde{\mathcal{F}}_s$ через термодинамический потенциал $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s(e)$ согласно

$$\tilde{\mathcal{F}}_s = \mathcal{F}_s(e) - e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2 = \mathcal{F}_s(e) - e\varphi. \quad (24,6)$$

Условие равенства нулю первой производной дает

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_s}{\partial e} = \frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial e} - \varphi = 0,$$

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 135.

после чего условие положительности второй производной принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{P}}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{P}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial e} = \frac{1}{S} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} > 0,$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} > 0. \quad (24,7)$$

Это условие естественно было ожидать, если рассматривать двойной слой у поверхности как «конденсатор» с емкостью $de/d\varphi$.

Продифференцировав равенство (24,4) по φ и используя (24,7), мы находим, что

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} < 0. \quad (24,8)$$

Это значит, что в точке, в которой $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = -\sigma = 0$, кривая зависимости α от φ имеет максимум.

§ 25. Термоэлектрические явления

Условие отсутствия тока в металле заключается в наличии термодинамического равновесия по отношению к электронам проводимости. Оно требует, как известно, наряду с постоянством (вдоль тела) температуры также и постоянства суммы $e\varphi + \zeta_0$, где ζ_0 — химический потенциал электронов проводимости в металле (при $\varphi = 0$)¹). Если мы имеем дело с металлом, не однородным по своему составу, то ζ_0 меняется вдоль него даже при постоянной температуре. Поэтому постоянство электрического потенциала φ в этом случае отнюдь не приводит к отсутствию тока в металле, хотя напряженность $E = -\text{grad } \varphi$ и равна нулю. Это обстоятельство делает неудобным обычное определение φ (как результата усреднения истинного потенциала), если мы хотим включить в рассмотрение также и неоднородные проводники.

Естественно принять в качестве нового определения потенциала сумму $\varphi + \zeta_0/e$, которую мы и будем обозначать ниже просто как φ^2). В однородном металле такое изменение сводится к добавлению к потенциалу несущественной постоянной. Соответственно «напряженность» $E = -\text{grad } \varphi$ (которой мы и будем пользоваться) совпа-

¹) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 25; мы понимаем здесь под ζ химический потенциал, отнесенный обычным образом к одной частице (электрону).

²) Это определение можно сформулировать и иначе: новое значение $e\varphi$ есть изменение свободной энергии при введении (изотермическом) в металл одного электрона; другими словами, $\varphi = \partial F / \partial \rho$, где F — свободная энергия металла, а ρ — заряд электронов проводимости, отнесенные к единичному объему.

дает с истинной средней напряженностью лишь в однородном металле, а в общем случае отличается от нее градиентом некоторой функции состояния.

При таком определении ток обращается в нуль вместе с напряженностью в термодинамически равновесном (по отношению к электронам проводимости) состоянии, и связь между \mathbf{j} и \mathbf{E} будет даваться формулой $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (или $j_i = \sigma_{ik} E_k$) даже в неоднородном по своему составу металле.

Рассмотрим теперь неравномерно нагретый металл, в котором, во всяком случае, нет (электронного) термодинамического равновесия. Тогда напряженность \mathbf{E} отлична от нуля даже и в отсутствие тока. В общем случае, когда отлична от нуля как плотность тока \mathbf{j} , так и градиент температуры ∇T , связь между этими величинами и напряженностью поля может быть написана в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \alpha \nabla T. \quad (25,1)$$

Здесь σ — обычная проводимость, а α — еще одна величина, характеризующая электрические свойства металла. Мы предполагаем здесь для простоты, что вещество изотропно (или обладает кубической симметрией), в связи с чем пишем коэффициенты пропорциональности в виде скалярных величин. Линейная зависимость \mathbf{E} от ∇T представляет собой, разумеется, лишь первый член разложения, достаточный ввиду малости градиента температуры (фактически всегда имеющей место).

Та же формула (25,1), написанная в виде

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} - \alpha \nabla T), \quad (25,2)$$

показывает, что в неравномерно нагретом металле может течь ток и при равной нулю напряженности \mathbf{E} .

Наряду с плотностью электрического тока \mathbf{j} рассмотрим также и плотность потока энергии, которую обозначим посредством \mathbf{q} . Прежде всего, из этого потока следует выделить величину $\varphi \mathbf{j}$, связанную просто с тем, что каждая заряженная частица (электрон) переносит с собой энергию $e\varphi$. Разность $\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j}$, однако, уже не зависит от самого потенциала и может быть представлена, в общем случае, в виде линейной функции градиентов $\nabla \varphi = -\mathbf{E}$ и ∇T , аналогично формуле (25,2) для плотности тока. Напишем пока эту формулу в виде

$$\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j} = \beta \mathbf{E} - \gamma \nabla T.$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов позволяет связать коэффициент β с коэффициентом α в выражении (25,2).

Для этого вычислим скорость изменения полной энтропии проводника. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице

объема тела, есть $-\operatorname{div} \mathbf{q}$. Поэтому можно написать

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} dV.$$

Далее, пишем, используя уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$,

$$\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{T} \{ \operatorname{div} (\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j}) + \operatorname{div} \varphi \mathbf{j} \} = \frac{1}{T} \operatorname{div} (\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j}) - \frac{E \mathbf{j}}{T}.$$

Интеграл от первого члена преобразуем взятием по частям и в результате получаем

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{E \mathbf{j}}{T} dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j}) \nabla T}{T^2} dV. \quad (25,3)$$

Эта формула показывает, что, если выбрать в качестве величин $\partial x_a / \partial t$ (см. § 20) компоненты векторов \mathbf{j} и $\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j}$, то соответствующими величинами X_a будут компоненты векторов $-E/T$ и $\nabla T/T^2$. Соответственно этому, в соотношениях

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma T \frac{E}{T} - \sigma \alpha T^2 \frac{\nabla T}{T^2}, \\ \mathbf{q} - \varphi \mathbf{j} &= \beta T \frac{E}{T} - \gamma T^2 \frac{\nabla T}{T^2} \end{aligned}$$

должны быть равными коэффициенты $\sigma \alpha T^2$ и βT .

Таким образом, $\beta = \sigma \alpha T$, и мы имеем

$$\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j} = \sigma \alpha T E - \gamma \nabla T.$$

Наконец, выразив здесь E через \mathbf{j} и ∇T согласно (25,1), получим окончательно следующее выражение:

$$\mathbf{q} = (\varphi + \alpha T) \mathbf{j} - \chi \nabla T, \quad (25,4)$$

где введено обозначение $\chi = \gamma - T \alpha^2 \sigma$. Величина χ является не чем иным, как обычным коэффициентом теплопроводности, определяющим поток тепла в отсутствие электрического тока.

Следует указать, что условие положительности производной $d\mathcal{S}/dt$ не накладывает каких-либо новых ограничений на термоэлектрические коэффициенты. При подстановке (25,1) и (25,4) в (25,3) получается

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left(\frac{j^2}{\sigma T} + \frac{\chi (\nabla T)^2}{T^2} \right) dV > 0, \quad (25,5)$$

откуда следуют лишь условия положительности коэффициентов тепло- и электропроводности.

В написанных выше формулах молчаливо подразумевалось, что неоднородность давления (или плотности) при постоянной температуре не может привести к возникновению поля (или тока) в проводнике; на этом основании в (25,2) и (25,4) не были написаны

члены, пропорциональные ∇p . В действительности наличие таких членов противоречило бы закону возрастания энтропии: в подынтегральном выражении в (25,5) появились бы члены со знакопеременными произведениями $\mathbf{j}\nabla p$ и $\nabla T\nabla p$, в результате чего интеграл не смог бы быть существенно положительным.

Соотношения (25,1) и (25,4) содержат в себе различные термоэлектрические эффекты. Рассмотрим тепло $-\operatorname{div} \mathbf{q}$, выделяющееся ежесекундно в единице объема проводника. Дифференцируя выражение (25,4), найдем

$$Q = -\operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + E\mathbf{j} - \mathbf{j}\nabla (\alpha T),$$

или, подставив сюда (25,1),

$$Q = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \frac{j^2}{\sigma} - T\mathbf{j}\nabla \alpha. \quad (25,6)$$

Первый член в этой сумме связан с чистой теплопроводностью, а второй член, пропорциональный квадрату тока, можно назвать джоулевым теплом. Нас интересует здесь третий член, содержащий специфические термоэлектрические эффекты.

Предположим, что проводник однороден по составу. Тогда изменение величины α связано только с градиентом температуры, и можно написать $\nabla \alpha = \frac{d\alpha}{dT} \nabla T$; если, как это обычно имеет место, вдоль тела давление постоянно, то под $\frac{d\alpha}{dT}$ надо понимать производную $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p$. Таким образом, интересующее нас выделение тепла (так называемый эффект Томсона) равно

$$\rho \mathbf{j}\nabla T, \quad \text{где } \rho = -T \frac{d\alpha}{dT}. \quad (25,7)$$

Величину ρ называют коэффициентом Томсона. Отметим, что этот эффект пропорционален первой степени тока, а не его квадрату, как джоулево тепло. Поэтому он меняет знак при изменении направления тока на обратное. Коэффициент ρ может быть как положительным, так и отрицательным. Если $\rho > 0$, то томсоновское тепло положительно (тепло выделяется) при течении тока в направлении возрастания температуры, а при течении тока в противоположном направлении — тепло поглощается; при $\rho < 0$ соотношения обратны.

Другой тепловой эффект (так называемый эффект Пельтье) возникает при прохождении тока через контакт (спай) двух различных металлов. На поверхности контакта непрерывны температура, потенциал, а также нормальные компоненты векторов плотности тока и плотности потока энергии. Отмечая индексами 1 и 2 значения величин, относящиеся к двум металлам, и приравнявая значения

нормальных компонент q (25,4) по обеим сторонам контакта, получим ввиду непрерывности φ , T , j_x :

$$\left(-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_1^2 = -j_x T (\alpha_2 - \alpha_1);$$

ось x направлена по нормали к поверхности. Если положительное направление оси x есть направление от металла 1 к металлу 2, то выражение, стоящее в левой стороне равенства, есть количество тепла, отводимое в 1 сек с 1 см² поверхности контакта путем теплопроводности. Этот отвод компенсирует выделяющееся в контакте тепло, представляемое выражением в правой стороне равенства. Таким образом, на единице площади контакта выделяется (в 1 сек) тепло, равное

$$\Pi_{12} j, \text{ где } \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (25,8)$$

Величину Π_{12} называют коэффициентом Пельтье. Как и эффект Томсона, этот эффект пропорционален первой степени тока и меняет знак при изменении направления тока на обратное. Отметим, что коэффициент Пельтье обладает свойством аддитивности, выражающимся равенством $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, где индексы 1, 2, 3 относятся к трем различным металлам.

Сравнение формул (25,7) и (25,8) показывает, что коэффициенты Томсона и Пельтье связаны соотношением

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \frac{\Pi_{12}}{T}. \quad (25,9)$$

Далее, рассмотрим разомкнутую цепь с двумя контактами, причем два крайних проводника представляют собой одинаковые металлы (металл 1, рис. 16). Предположим, что спаи (точки b и c) находятся при различных температурах T_1 и T_2 , а температуры обоих концов цепи (точки a и d) одинаковы. Тогда между этими концами существует разность потенциалов,

называемая термоэлектродвижущей силой; обозначим ее \mathcal{E}_T . Для вычисления этой силы полагаем в (25,1) $j = 0$ и интегрируем напряженность $E = \alpha \nabla T$ вдоль всей длины цепи (ось x):

$$\mathcal{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx} dx = \int_a^d \alpha dT.$$

Интегрирование от c до d и от a до b означает интегрирование по температуре от T_2 до T_1 в первом металле, а интегрирование от b

до c есть интегрирование по dT в пределах от T_1 до T_2 во втором металле. Поэтому находим

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT. \quad (25,10)$$

Сравнивая с (25,8), мы видим, что термоэлектродвижущая сила связана с коэффициентом Пельтье следующим соотношением:

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT, \quad (25,11)$$

Формулы (25,9) и (25,11) называют соотношениями Томсона.

В заключение этого параграфа выпишем формулы для тока и потока тепла в анизотропном проводнике. Эти формулы выводятся с помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов в точности аналогично выводу формул (25,1), (25,4) и гласят:

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= T \alpha_{ki} j_k - \chi_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (25,12)$$

Здесь σ_{ik}^{-1} — тензор, обратный тензору проводимости σ_{ik} ; тензоры σ_{ik} и χ_{ik} симметричны. Термоэлектрический же тензор α_{ik} в общем случае несимметричен.

ЗАДАЧА

Найти соотношения, связывающие между собой коэффициенты различных термогальваномагнитных эффектов, т. е. эффектов, возникающих при протекании тока при одновременном наличии электрического и магнитного полей и градиента температуры.

Решение. Исследование вполне аналогично тому, которое было произведено в тексте для термоэлектрических явлений. В данном случае его удобно производить сразу в тензорном виде, применим и к анизотропным проводникам. Пишем плотность электрического тока \mathbf{j} и потока тепла \mathbf{q} в виде

$$\begin{aligned} j_i &= a_{ik} \frac{E_k}{T} + b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \\ q_i - \varphi j_i &= c_{ik} \frac{E_k}{T} + d_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где все коэффициенты являются функциями магнитного поля. Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов имеем

$$\begin{aligned} a_{ik}(H) &= a_{ki}(-H), & d_{ik}(H) &= d_{ki}(-H), \\ b_{ik}(H) &= c_{ki}(-H). \end{aligned} \quad (2)$$

Выражая из (1) E и $q - \varphi j$ через j и ∇T , получим

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= \beta_{ik} j_k - \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (3)$$

где тензоры σ^{-1} , α , β , κ определенным образом выражаются через тензоры a , b , c , d и обладают следующими свойствами симметрии, возникающими в силу соотношений (2):

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{-1} (H) &= \sigma_{ki}^{-1} (-H), \\ \kappa_{ik} (H) &= \kappa_{ki} (-H), \\ \beta_{ik} (H) &= T \alpha_{ki} (-H). \end{aligned} \quad (4)$$

Это и есть искомые соотношения в наиболее общем виде. Они обобщают связи, найденные в § 25 для случая отсутствия магнитного поля и в § 21 для случая отсутствия градиента температуры.

Для изотропного проводника в слабом магнитном поле получим, с точностью до членов первого порядка по H ,

$$E = \frac{j}{\sigma} + \alpha \nabla T + R [Hj] + N [H \nabla T], \quad (5)$$

$$q - \varphi j = \alpha T j - \kappa \nabla T + NT [Hj] + L [H \nabla T]. \quad (6)$$

Здесь σ , κ — обычные коэффициенты электро- и теплопроводности, α — термоэлектрический коэффициент, фигурировавший в (25,1), R — коэффициент Холла, а N , L — новые коэффициенты. Член $N [H \nabla T]$ можно рассматривать как влияние магнитного поля на термоэлектродвижущую силу (так называемый эффект Нернста), а член $L [H \nabla T]$ — как влияние магнитного поля на теплопроводность (эффект Ледюка—Риги).

На границе двух сред непрерывны нормальные составляющие векторов j и q , а потому и вектора

$$-\kappa \nabla T + \alpha T j + NT [Hj] + L [H \nabla T].$$

Член $NT [Hj]$ представляет собой влияние магнитного поля на эффект Пельтье (так называемый эффект Эттингсхаузена).

Количество тепла, выделяющееся в 1 сек в единице объема проводника, есть $Q = -\operatorname{div} q$. Сюда надо подставить q из (6), после чего заменить $-\nabla \varphi = E$ выражением из (5). Если проводник однороден по своему составу, то величины α , N , L , ... являются функциями только температуры, так что их градиенты пропорциональны ∇T . При вычислении пренебрегаем всеми членами второго порядка по H ; в этом приближении можно считать, что $\operatorname{rot} (j/\sigma) \cong \operatorname{rot} E = 0$. Кроме того, замечаем, что для внешнего поля H (источники которого находятся вне рассматриваемого проводника) имеем $\operatorname{rot} H = 0$ ¹⁾. Наконец, как всегда для постоянного тока, $\operatorname{div} j = 0$. Имея все это в виду, получим после вычисления:

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div} (\kappa \nabla T) - T j \nabla \alpha + \frac{1}{\sigma T} \frac{d}{dT} (\sigma N T^2) [jH] \nabla T.$$

Последний член изображает изменение эффекта Томсона благодаря наличию магнитного поля.

1) Тем самым мы пренебрегаем весьма слабым эффектом — влиянием на выделение тепла собственного магнитного поля рассматриваемых токов.

§ 26. Диффузионно-электрические явления

Наличие диффузии приводит к возникновению в растворах электролитов специфических явлений, не наблюдающихся в твердых проводниках.

Будем предполагать, для упрощения, что температура постоянна вдоль всего раствора. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением чисто диффузионно-электрических явлений, не усложненных термоэлектрическими эффектами.

Вместо давления p и концентрации c раствора удобнее пользоваться в качестве независимых переменных давлением и химическим потенциалом ζ . Последний мы определяем здесь как производную от термодинамического потенциала единицы массы раствора по его концентрации c (при постоянных p и T); при этом под концентрацией мы будем понимать отношение массы электролита к полной массе жидкости в данном элементе объема ¹⁾. Напомним, что постоянство химического потенциала является (наряду с постоянством давления и температуры) одним из условий термодинамического равновесия.

Определение потенциала электрического поля, данное в § 25, должно быть несколько видоизменено в данном случае, поскольку носителями тока являются теперь не электроны проводимости, а ионы растворенного электролита. Именно, рациональное определение (ср. примечание на стр. 140) дается формулой $\varphi = (\partial\Phi/\partial\rho)_c$, где Φ — термодинамический потенциал, а ρ — сумма зарядов ионов в единице объема раствора (после дифференцирования надо, разумеется, положить $\rho = 0$ ввиду электронейтральности раствора). Производная берется при постоянной массовой концентрации, т. е. при заданной сумме масс ионов обоих знаков в единице объема.

При наличии градиента химического потенциала в выражении для плотности тока появляется пропорциональный ему дополнительный член:

$$j = \sigma(E - \beta \nabla \zeta), \quad (26,1)$$

аналогичный дополнительному члену в (25,2). Ниже мы убедимся в том, что при заданном градиенте химического потенциала

¹⁾ Обычные химические потенциалы определяются как $\zeta_1 = \partial\Phi/\partial n_1$, $\zeta_2 = \partial\Phi/\partial n_2$, где Φ — термодинамический потенциал l g раствора, а n_1 , n_2 — числа частиц растворенного вещества и растворителя в этом количестве вещества. Числа n_1 и n_2 связаны соотношением $n_1 m_1 + n_2 m_2 = l$ (m_1, m_2 — массы частиц обоого рода), а концентрация $c = n_1 m_1$. Поэтому имеем для введенного здесь химического потенциала:

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial c} = \frac{\partial\Phi}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2}.$$

(и температуры) \mathbf{j} не может зависеть от градиента давления, и потому члена с ∇p в выражении (26,1) нет ¹⁾.

Наряду с электрическим током необходимо рассматривать также и одновременно происходящий перенос массы электролита. При этом надо иметь в виду, что прохождение тока через раствор может сопровождаться макроскопическим движением жидкости. Плотность потока массы электролита, переносимого этим движением вместе со всей жидкостью, равна $\rho c \mathbf{v}$ (\mathbf{v} — скорость, ρ — плотность раствора). Кроме того, электролит переносится молекулярным, диффузионным путем. Плотность этого диффузионного потока обозначим посредством \mathbf{i} , так что полная плотность потока есть $\rho c \mathbf{v} + \mathbf{i}$. Необратимые процессы диффузии тоже приводят к возрастанию энтропии; скорость изменения полной энтропии определяется формулой ²⁾

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{Ej}{T} dV - \int \frac{\mathbf{i} \nabla \zeta}{T} dV. \quad (26,2)$$

Как и плотность электрического тока, диффузионный поток может быть написан в виде линейной комбинации \mathbf{E} и $\nabla \zeta$ или, что то же, \mathbf{j} и $\nabla \zeta$. С помощью симметрии кинетических коэффициентов один из коэффициентов в этом выражении может быть связан с коэффициентом β в формуле (26,1), в точности аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для \mathbf{j} и $\mathbf{q} = \varphi \mathbf{j}$. В результате получается:

$$\mathbf{i} = - \frac{\rho D}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)_{p, T}} \nabla \zeta + \beta \mathbf{j}. \quad (26,3)$$

Коэффициент при $\nabla \zeta$ выражен здесь через обычный коэффициент диффузии ³⁾.

Невозможность существования в выражениях (26,1) и (26,3) членов, пропорциональных градиенту давления, снова (как и в предыдущем параграфе) следует из закона возрастания энтропии: такие члены сделали бы производную полной энтропии (26,2) не существенно положительной величиной.

Формулы (26,1) и (26,3) содержат в себе все диффузионно-электрические явления; на более подробном их рассмотрении мы не будем здесь останавливаться.

1) Подчеркнем, однако, что при заданном градиенте концентрации \mathbf{j} зависит от градиента давления:

$$\nabla \zeta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)_{p, T} \nabla c + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right)_{c, T} \nabla p.$$

2) Вывод второго члена в этой формуле см. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 57.

3) При $\mathbf{j} = 0$ и при постоянном давлении (и температуре) имеем $\mathbf{i} = -\rho D \nabla c$.

ЗАДАЧА

Две параллельные плоские пластинки (из одинакового металла A) погружены в раствор электролита $AХ$. Найти зависимость плотности тока от приложенной к пластинкам разности потенциалов.

Решение. При прохождении тока металл растворяется с одного электрода и высаживается на другом. При этом растворитель (вода) покинтся, а через раствор проходит поток массы металла с плотностью $\rho v = jm/e$ (j — плотность электрического тока, m и e — масса и заряд ионов A^+)¹). С другой стороны, этот поток дается выражением $l + \rho v c$ с l из (26,3); предполагая давление постоянным вдоль жидкости²), получим уравнение

$$\rho D \frac{dc}{dx} = \left[\beta - \frac{m}{e} (1 - c) \right] j \quad (1)$$

(x — координата в направлении между электродами). Поскольку $j = \text{const}$ вдоль раствора, то имеем отсюда

$$jl = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\beta - \frac{m}{e} (1 - c)}, \quad (2)$$

где c_1, c_2 — концентрации у поверхности пластинок, а l — расстояние между ними.

Разность потенциалов \mathcal{E} между пластинками проще всего определить по полной диссипации энергии Q (в 1 сек), которая должна быть равна (будучи отнесена к 1 см² поверхности пластинок) $j\mathcal{E}$. Согласно (26,1), (26,2) имеем

$$Q = T \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left\{ \frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 \right\} dx = j\mathcal{E}$$

и, воспользовавшись (1), получим

$$\mathcal{E} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\sigma \left[\beta - \frac{m}{e} (1 - c) \right]} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e} (1 - c) \right] dc. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) решают (в неявном виде) поставленную задачу.

Если ток j мал, то мала также и разность концентраций $c_2 - c_1$. Заменяя интегралы произведениями подынтегральных выражений на $c_2 - c_1$, получим для эффективного удельного сопротивления раствора

$$\frac{\mathcal{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e} (1 - c) \right]^2.$$

Первый член в (3) дает падение потенциала $\left(\int j \frac{dx}{\sigma} \right)$, связанное с прохождением тока. Второй же член есть электродвижущая сила, обязанная разности концентраций в растворе (в известном смысле аналогичная термоэдс). Это последнее выражение не связано даже с условиями данной конкретной одномерной задачи и представляет собой общее выражение для э.д.с. «концентрационного элемента».

¹) Напомним, что определение гидродинамической скорости v в растворе заключается в том, что ρv есть импульс единицы объема жидкости (см. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 57). Поэтому тот факт, что в данном случае движется (относительно электродов) только растворенный металл, несуществен при вычислении ρv .

²) Учет изменения давления, вызванного движением жидкости, привел бы к малым величинам высшего порядка.

ГЛАВА IV

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 27. Постоянное магнитное поле

Постоянное магнитное поле в материальных средах описывается двумя уравнениями Максвелла, которые получаются путем усреднения микроскопических уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (27,1)$$

Среднюю напряженность магнитного поля принято называть магнитной индукцией и обозначать посредством

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \quad (27,2)$$

Поэтому результат усреднения первого из уравнений (27,1) напишется как

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (27,3)$$

Во втором же уравнении производная по времени при усреднении исчезает, поскольку среднее поле предполагается постоянным, так что имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}. \quad (27,4)$$

Среднее значение микроскопической плотности тока, вообще говоря, отлично от нуля как в проводниках, так и в диэлектриках. Разница между этими двумя категориями тел заключается лишь в том, что в диэлектриках всегда

$$\int \overline{\rho \mathbf{v}} d\mathbf{f} = 0, \quad (27,5)$$

где интеграл берется по полной площади любого поперечного сечения тела; в проводниках же этот интеграл может быть отличным от нуля. Предположим сначала, что в теле (если оно является проводником) отсутствует полный ток, т. е. справедливо соотношение (27,5).

Равенство нулю интеграла (27,5) по любому сечению тела означает, что вектор $\rho\mathbf{v}$ может быть написан в виде ротора некоторого другого вектора, который принято обозначать как $c\mathbf{M}$:

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (27,6)$$

причем величина \mathbf{M} отлична от нуля только внутри тела (ср. аналогичные рассуждения в § 6). Действительно, интегрируя по поверхности, ограниченной контуром, охватывающим тело и проходящим везде вне его, получим

$$\int \rho\mathbf{v} d\mathbf{f} = c \int \operatorname{rot} \mathbf{M} d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M} d\mathbf{l} = 0.$$

Вектор \mathbf{M} называют намагниченностью тела. Вводя его в уравнение (27,4), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (27,7)$$

где вектор \mathbf{H} связан с магнитной индукцией \mathbf{B} соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (27,8)$$

аналогичным соотношению между электрической индукцией \mathbf{D} и напряженностью \mathbf{E} . Хотя вектор \mathbf{H} , по аналогии с \mathbf{E} , называют обычно «напряженностью» магнитного поля, следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности есть \mathbf{B} , а не \mathbf{H} .

Для выяснения физического смысла величины \mathbf{M} рассмотрим полный магнитный момент, создаваемый всеми движущимися внутри тела заряженными частицами. По определению магнитного момента¹⁾, это есть интеграл

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho\mathbf{v}}] dV = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{M}] dV.$$

Поскольку вне тела $\rho\mathbf{v} \equiv 0$, то интеграл можно брать по любому объему, выходящему за пределы тела. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int [\mathbf{r} [\nabla \mathbf{M}]] dV = \oint [\mathbf{r} [d\mathbf{f} \mathbf{M}]] - \int [[\mathbf{M} \nabla] \mathbf{r}] dV.$$

Интеграл по поверхности, проходящей вне тела, обращается в нуль. Во втором же члене имеем

$$[[\mathbf{M} \nabla] \mathbf{r}] = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Таким образом, получаем в результате

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho\mathbf{v}}] dV = \int \mathbf{M} dV. \quad (27,9)$$

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 43, 1948.

Мы видим, что вектор намагниченности представляет собой магнитный момент единицы объема тела ¹⁾.

К уравнениям (27,3) и (27,7) должно быть присоединено соотношение, связывающее между собой величины \mathbf{H} и \mathbf{B} ; лишь после этого система уравнений станет полной. Так, в неферромагнитных телах, в не слишком сильных магнитных полях, \mathbf{B} и \mathbf{H} связаны друг с другом линейным соотношением. У изотропных тел линейная связь сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (27,10)$$

Коэффициент μ называется магнитной проницаемостью, а коэффициент пропорциональности

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} \quad (27,11)$$

в соотношении $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ — магнитной восприимчивостью.

В противоположность диэлектрической постоянной ϵ , которая у всех тел превышает 1, магнитная проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы. Можно только утверждать, что всегда $\mu > 0$ (о причине этого отличия между μ и ϵ см. § 31; доказательство неравенства $\mu > 0$ будет дано в § 30). Соответственно магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной.

Другое отличие — количественное — состоит в том, что магнитная восприимчивость огромного большинства тел очень мала по сравнению с их диэлектрической восприимчивостью. Это отличие связано с тем, что намагничение вещества (не ферромагнитного) является релятивистским эффектом второго порядка по v/c (v — электронные скорости в атомах ²⁾).

Из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ следует (ср. § 6), что на границе двух различных сред должны выполняться условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}. \quad (27,12)$$

Эта система уравнений и граничных условий к ним формально совпадает с системой уравнений, определяющих электростатическое поле в диэлектриках в отсутствие свободных зарядов, отличаясь от них

¹⁾ Лишь после установления этого соответствия величина \mathbf{M} становится полностью определенной. Соотношения же (27,6) внутри и $\mathbf{M} = 0$ вне тела сами по себе еще не определяют эту величину однозначным образом: в области внутри тела можно было бы прибавить к \mathbf{M} любой вектор вида $\operatorname{grad} f$, не нарушив равенства (27,6) (ср. аналогичное замечание по поводу электрической поляризации на стр. 56).

²⁾ Один раз отношение v/c входит вместе с \mathbf{H} в гамильтониан, описывающий взаимодействие тела с магнитным полем, второй раз оно входит через элементарные атомные или молекулярные магнитные моменты.

лишь заменой E и D соответственно на H и B . Ввиду уравнения $\text{rot } H = 0$ можно искать H в виде $H = -\text{grad } \psi$, и для потенциала ψ получаются те же уравнения, что и для электростатического потенциала. Решения ряда задач, рассмотренных в гл. II для электростатического поля, непосредственно переносятся, таким образом, на постоянное магнитное поле. В частности, полученные в § 8 формулы для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле полностью справедливы (с соответствующим изменением обозначений) и для магнитного эллипсоида в однородном магнитном поле.

Тангенциальные компоненты магнитной индукции, в противоположность ее нормальной компоненте, испытывают скачок на поверхности раздела двух сред. Величину этого скачка можно связать с плотностью токов, протекающих по поверхности. Для этого проинтегрируем обе стороны уравнения (27,4) по малому отрезку Δl , пересекающему поверхность раздела в направлении нормали. Длину Δl устремляем затем к нулю; интеграл $\int \bar{\rho} \bar{v} dl$ может стремиться, однако, при этом к конечной величине. Определенную таким образом величину

$$g = \int \bar{\rho} \bar{v} dl \quad (27,13)$$

можно назвать поверхностной плотностью тока; она определяет заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины линии, проведенной на поверхности. Выберем направление g в данной точке поверхности в качестве оси y , а направление нормали — в качестве оси x , направленной от среды 1 к среде 2. Тогда интегрирование уравнения (27,4) дает

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx = \frac{4\pi}{c} g_y = \frac{4\pi}{c} g.$$

Ввиду непрерывности B_x производная $\partial B_x / \partial z$ ограничена, и потому интеграл от нее стремится к нулю при стремлении к нулю длины отрезка Δl . Интеграл же от $\partial B_z / \partial x$ дает разность значений B_z на обеих сторонах поверхности. Таким образом,

$$B_{2z} - B_{1z} = -\frac{4\pi}{c} g.$$

Это равенство можно написать в векторном виде как

$$\frac{4\pi}{c} g = [n, B_2 - B_1] = 4\pi [n, M_2 - M_1], \quad (27,14)$$

где n — единичный вектор нормали, направленной внутрь среды 2; при последнем преобразовании учтена непрерывность тангенциальной компоненты H .

§ 28. Магнитная симметрия кристаллов

Между электрическими и магнитными свойствами кристаллов существует глубокое отличие, связанное с разницей в поведении зарядов и токов по отношению к изменению знака времени.

Как известно, ввиду инвариантности уравнений движения по отношению к изменению знака времени, формальная замена t на $-t$, примененная к какому-либо термодинамически равновесному состоянию тела, должна приводить к состоянию, которое тоже является одним из возможных равновесных состояний. В связи с этим возникают две возможности: состояния, переходящие друг в друга при замене t на $-t$, либо совпадают, либо не совпадают.

Будем обозначать в этом параграфе посредством $\rho(x, y, z)$ и $\mathbf{j}(x, y, z)$ истинную (микроскопическую) плотность зарядов и плотность токов в каждой точке кристалла, усредненную только по времени (но не по «физически бесконечно малым» объемам, как это делается в макроскопической теории). Это — те функции, которые определяют собой соответственно электрическую и магнитную структуру кристалла.

Замена t на $-t$ меняет знак \mathbf{j} . Если в результате этого преобразования состояние тела не меняется, то это значит, что $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, т. е. $\mathbf{j} = 0$. Таким образом, имеется причина, в силу которой могут существовать тела со строго равной нулю функцией $\mathbf{j}(x, y, z)$. Вместе с плотностью тока в таких телах строго обращаются в нуль средние (по времени) значения магнитного поля и магнитных моментов в каждой точке тела (разумеется, речь идет везде о состояниях тела в отсутствие внешнего магнитного поля). О таких телах можно сказать, что они не обладают никакой «магнитной структурой». Фактически к этой категории относятся огромное большинство тел.

Плотность же зарядов ρ при преобразовании $t \rightarrow -t$ вообще не меняется. Поэтому нет никаких причин, в силу которых эта функция могла бы тождественно обратиться в нуль. Другими словами, не существует кристаллов, которые не обладали бы «электрической структурой». В этом заключается упомянутое выше существенное отличие между электрическими и магнитными свойствами кристаллов.

Обратимся к кристаллам, у которых замена t на $-t$ меняет состояние и потому $\mathbf{j} \neq 0$. О таких телах мы будем говорить, как о телах с «магнитной структурой».

Прежде всего отметим, что хотя \mathbf{j} и не равно нулю, но никакого полного тока (в равновесном состоянии тела) не может быть, т. е. интеграл $\int \mathbf{j} dV$, взятый по объему элементарной ячейки, должен всегда обращаться в нуль. В противном случае этот ток создавал бы макроскопическое магнитное поле и кристалл обладал бы магнитной энергией (на единицу объема), быстро возрастающей с увеличением размеров тела. Ввиду энергетической невыгодности такого состояния

оно, очевидным образом, не может соответствовать термодинамическому равновесию.

В то же время токи \mathbf{j} могут создавать отличный от нуля макроскопический магнитный момент, т. е. интеграл $\int [\mathbf{r}\mathbf{j}] dV$ (снова взятый по объему элементарной ячейки) может быть отличен от нуля. Соответственно этому, среди тел, в которых $\mathbf{j} \neq 0$, можно различать два типа: тела с отличным от нуля макроскопическим магнитным моментом и тела, в которых такой момент отсутствует. Первые называются ферромагнитными, а вторые — антиферромагнитными.

Симметрию распределения токов \mathbf{j} можно наглядно рассматривать как симметрию расположения и ориентаций магнитных моментов отдельных атомов в кристалле. Если $\mathbf{j} = 0$, то это значит, что все эти моменты меняют свою ориентацию со временем совершенно беспорядочным образом, так что среднее значение каждого из них обращается в нуль. В ферромагнетике атомные моменты ориентированы преимущественно в одну сторону, создавая отличный от нуля полный момент в каждой элементарной ячейке. Наконец, в антиферромагнитном теле средние атомные моменты отличны от нуля, т. е. ориентированы правильным образом, но так, что в пределах каждой ячейки они взаимно компенсируются.

Возникает вопрос о возможных типах (группах) симметрии распределения токов $\mathbf{j}(x, y, z)$. Эта симметрия складывается, прежде всего, из обычных элементов — поворотов, отражений и трансляций, соответственно чему среди возможных групп симметрии \mathbf{j} во всяком случае имеется 230 обычных кристаллографических пространственных групп. Этим, однако, далеко не исчерпывается список искомого групп. Как уже было указано, замена t на $-t$ меняет знак вектора \mathbf{j} . В связи с этим возникает новый возможный элемент симметрии — симметрия по отношению к преобразованию, заключающемуся в изменении направления всех токов на обратное; обозначим условно это преобразование посредством R . Если распределение токов обладает элементом симметрии R самим по себе, то это значит, что $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, т. е. $\mathbf{j} = 0$, и тело вообще не обладает магнитной структурой. Отличная от нуля функция $\mathbf{j}(x, y, z)$ может, однако, обладать симметрией по отношению к различным комбинациям преобразования R с другими элементами симметрии — поворотами, отражениями и трансляциями. Таким образом, задача об определении возможных типов симметрии распределения токов («магнитных пространственных групп») заключается в построении всех возможных групп, составленных как из преобразований, имеющих в обычных пространственных группах, так и из преобразований, получающихся комбинацией преобразований обычного типа с преобразованием R .

Если симметрия распределения токов задана, то тем самым будет определена и кристаллографическая симметрия расположения

частиц в данном кристалле, совпадающая с симметрией функции $\rho(x, y, z)$. Она будет определяться той пространственной группой, которая получится из группы симметрии j , если формально считать преобразование R тождественным (каковым оно и является в применении к функции ρ).

Знание полной группы симметрии функции $j(x, y, z)$, однако, не нужно, если мы интересуемся лишь макроскопическими свойствами тела. Эти свойства зависят только от направления в кристалле, а трансляционная симметрия кристаллической решетки не имеет к ним отношения. С чисто структурной кристаллографической точки зрения «симметрия направлений» в кристалле дается, как известно, 32-мя кристаллическими классами. Это есть группы симметрии, составленные из одних только чистых поворотов и отражений; они получаются из пространственных групп, если в последних считать все трансляции тождественным преобразованием, а винтовые оси и плоскости скольжения рассматривать как простые оси и плоскости симметрии. С точки зрения же магнитных свойств макроскопическая симметрия должна классифицироваться по группам, составленным из поворотов, отражений и их комбинаций с элементом R . Эти группы можно назвать магнитными кристаллическими классами. Они находятся в таком же отношении к магнитным пространственным группам, как обычные кристаллические классы к обычным пространственным группам.

К их числу относятся, прежде всего, 32 обычных класса, дополненных элементом R , и те же 32 класса без элемента R . Первые являются, в частности, группами макроскопической симметрии всех тел, не обладающих магнитной структурой. Но этими же классами симметрии могут обладать и тела с магнитной структурой. Для этого надо, чтобы в магнитную пространственную группу симметрии этого тела сам элемент R входил не как таковой, а только в комбинации с трансляциями.

Кроме того, имеется 58 классов, в которые элемент R входит только в комбинации с поворотами или отражениями. Каждый из них, если заменить в нем операцию R тождественным преобразованием, превращается в один из обычных кристаллических классов¹⁾.

¹⁾ Эти классы изоморфны найденным впервые А. В. Шубниковым группам симметрии геометрических фигур (многогранников) с гранями, окрашенными в два цвета (по терминологии Шубникова — «группы смешанной полярности»). Элементу R соответствует при этом операция изменения цвета граней. (См. А. В. Шубников, Симметрия и антисимметрия конечных фигур, Изд. АН СССР, 1951.) Прямой вывод этих классов, как групп симметрии магнитных свойств тел, дан Б. А. Тавгером и В. М. Зайцевым (ЖЭТФ 30, 564, 1956).

Пространственных магнитных групп имеется всего 1651; их вывод (как «шубниковских» групп) — см. Н. В. Белов, Н. Н. Неронова, Т. С. Смирнова, Тр. Ин-та Крист. 11, 33 (1955); А. М. Заморзаев, Кристаллография 2, 15 (1957).

Следует отметить, что возникновение магнитной структуры (ферро- или антиферромагнитной) всегда связано со сравнительно слабыми взаимодействиями¹⁾. Поэтому кристаллографическая структура магнитного тела представляет собой небольшое искажение по сравнению со структурой немагнитной фазы, из которой магнитная фаза обычно возникает при понижении температуры. В этом отношении ферромагнетик, в частности, отличается от обычных пироэлектрических тел, но аналогичен сегнетоэлектрикам.

Заданием магнитного кристаллического класса определяется характер всех макроскопических магнитных свойств тела. Наиболее важным из них является наличие или отсутствие макроскопического магнитного момента, т. е. спонтанной (без внешнего поля) намагниченности. Магнитный момент M есть векторная величина, которая при поворотах и отражениях ведет себя как аксиальный вектор (векторное произведение двух полярных векторов), а при применении операции R меняет знак. Кристалл будет обладать спонтанной намагниченностью, если в нем есть хотя бы одно такое направление, что лежащий в нем вектор M с указанными свойствами остается инвариантным при всех преобразованиях данного магнитного кристаллического класса.

Снова подчеркнем отличие от электрических (на этот раз — макроскопических) свойств. Характер последних полностью определяется обычным кристаллографическим классом. В частности, для того чтобы тело было пироэлектрическим, достаточно, чтобы его кристаллический класс допускал существование полярного вектора P (электрический момент). В то же время было бы совершенно неправильным делать заключения о существовании или отсутствии макроскопического магнитного момента на основании поведения аксиального вектора M по отношению к преобразованиям чисто структурного (немагнитного) кристаллического класса данного тела.

Для иллюстрации рассмотрим тетрагональную решетку из одинаковых атомов с магнитными моментами, направленными вдоль тетрагональной оси²⁾. Ее магнитный кристаллический класс содержит ось четвертого порядка $C_4^{(z)}$, две оси второго порядка, скомбинированные с операцией R ($C_2^{(x)}R$ и $C_2^{(y)}R$), перпендикулярную к оси z плоскость симметрии $\sigma_h^{(z)}$ и две плоскости симметрии, скомбинированные с R ($\sigma_v^{(x)}R$, $\sigma_v^{(y)}R$). Эта группа допускает существование вектора M ,

1) Обычно обменное взаимодействие между магнитными моментами атомов приводит к насыщению валентных связей и образованию немагнитных структур. К возникновению магнитной структуры приводит только относительно слабое обменное взаимодействие глубоко расположенных d - и f -электронов атомов элементов переходных групп системы Менделеева.

2) Такова, например, решетка ферромагнитной фазы железа. В кристаллическом отношении она представляет собой слабо искаженную (вдоль одной из осей четвертого порядка) кубическую решетку.

направленного вдоль тетрагональной оси. Кристаллографический же класс симметрии получится отсюда, если заменить R единицей, т. е. является классом D_{4h} . Этот класс сам по себе не допускает существования аксиального вектора M (так как его компоненты M_x, M_y, M_z меняли бы знак при отражении соответственно в плоскостях $\sigma^{(z)}, \sigma^{(x)}, \sigma^{(y)}$).

Свойства тел с отличным от нуля спонтанным макроскопическим магнитным моментом (ферромагнетики) будут подробно рассмотрены в главе V. Во всех же остальных кристаллах связь между B и H дается (в не слишком сильных полях) линейными соотношениями

$$B_i = \mu_{ik} H_k, \quad (28,1)$$

не содержащими свободного члена. Тензор магнитной проницаемости μ_{ik} симметричен. Это обстоятельство следует из термодинамических соотношений, которые будут выведены в § 30, в точности так же, как в § 13 была доказана симметричность тензора ϵ_{ik} .

Упомянем еще о двух явлениях, которые в принципе могли бы существовать. Одним из них является «пьезомагнетизм», выражающийся в наличии линейной связи между магнитным полем в теле и деформацией (аналогичной той, что имеет место в пьезоэлектриках — см. § 17). Другое заключается в линейной связи между магнитным и электрическим полем в веществе, которая приводила бы, например, к появлению в электрическом поле пропорционального ему намагничивания вещества¹⁾. Оба эти явления могут существовать при определенных магнитных кристаллических классах симметрии. Мы не станем, однако, останавливаться на их исследовании подробнее, поскольку до настоящего времени, по-видимому, они не наблюдались ни в каком веществе.

§ 29. Магнитное поле постоянных токов

Если в проводнике течет отличный от нуля полный ток, то средняя плотность тока в нем может быть представлена в виде суммы

$$\overline{\rho v} = c \operatorname{rot} M + j.$$

Первый член, связанный с намагниченностью среды, не дает вклада в полный ток, так что полный перенос заряда через поперечное сечение тела определяется интегралом $\int j df$ только от второго члена. Величину j называют плотностью тока проводимости²⁾

1) Что касается квадратичных эффектов подобного рода, то они должны в принципе существовать даже в изотропных телах, но не представляют интереса ввиду своей ничтожности.

2) Величину же $c \operatorname{rot} M$ иногда называют плотностью молекулярных токов. Это название, однако, не вполне соответствует истинной физической картине движения зарядов в проводнике. Так, в металле вклад в намагничение M дают не только электроны, движущиеся внутри атомов, но и электроны проводимости.

Именно к ней относится все сказанное в § 20; в частности, энергия, диссипируемая в единицу времени в единице объема, равна Ej .

Распределение тока j по объему проводника определяется указанными в § 20 уравнениями, в которые не входит создаваемое этими же токами магнитное поле (при условии пренебрежения влиянием поля на свойства проводимости самого металла). Поэтому задача об определении магнитного поля токов должна решаться по заданному распределению последних. Уравнения этого поля отличаются от полученных в § 27 уравнений наличием члена $\frac{4\pi}{c}j$ вместо нуля в правой стороне (27,7):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (29,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (29,2)$$

Плотность тока проводимости j , пропорциональная напряженности электрического поля, является величиной ограниченной, не обращающейся в бесконечность, в частности и на границе раздела двух сред. Поэтому наличие правой стороны в уравнении (29,2) не отражается на граничном условии непрерывности тангенциальных компонент \mathbf{H} .

Для решения уравнений (29,1), (29,2) удобно ввести так называемый векторный потенциал \mathbf{A} , положив

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (29,3)$$

в результате чего уравнение (29,1) удовлетворяется тождественно. Равенством (29,3) векторный потенциал еще не определяется однозначно. К нему можно прибавить, не нарушая (29,3), любой вектор вида $\operatorname{grad} f$. Ввиду этой неоднозначности можно наложить на \mathbf{A} одно дополнительное условие, в качестве которого выберем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (29,4)$$

Уравнение для \mathbf{A} получается подстановкой (29,3) в (29,2). При линейной связи $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ имеем

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (29,5)$$

В таком виде это уравнение справедливо для любой неоднородной среды.

В однородной среде $\mu = \text{const}$, и поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}$, то уравнение (29,5) приводится к виду

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (29,6)$$

Если же мы имеем дело с совокупностью двух или более различных соприкасающихся сред, каждая из которых обладает своей магнитной проницаемостью μ , то общее уравнение (29,5) сводится

к уравнению вида (29,6) внутри каждого из однородных тел, а на их границах должно выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент вектора $(1/\mu) \operatorname{rot} A$. Кроме того, должны быть непрерывными касательные компоненты самого вектора A , так как их скачок означал бы наличие на границе бесконечной индукции B .

Уравнения поля упрощаются для плоской задачи определения магнитного поля в среде, неограниченной и однородной в одном направлении (которое мы примем в качестве направления оси z), причем создающие поле токи тоже направлены везде вдоль оси z , а их плотность $j_z = j$ есть функция только от x, y . Сделаем естественное (подтверждающееся результатом) предположение, что векторный потенциал такого поля тоже направлен вдоль оси z : $A_z = A(x, y)$ (условие (29,4) удовлетворяется при этом автоматически), а магнитное поле соответственно везде параллельно плоскости x, y . Обозначив посредством k единичный вектор вдоль оси z , имеем

$$\operatorname{rot} A = \operatorname{rot} Ak = [\operatorname{grad} Ak],$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A \right) = \left[\nabla \left[\frac{\nabla A}{\mu} \cdot k \right] \right] = -k \operatorname{div} \frac{\nabla A}{\mu}.$$

Поэтому уравнение (29,5) приводится к виду

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j(x, y), \quad (29,7)$$

т. е. мы действительно получаем одно уравнение для одной скалярной величины $A(x, y)$. Для «кусочно-однородной» среды (29,7) сводится к уравнению

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \mu j(x, y) \quad (29,8)$$

с граничным условием непрерывности A и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n}$ на поверхности раздела ¹⁾.

Магнитное поле определяется совсем элементарно, если распределение токов симметрично относительно оси z : $j_z = j(r)$ (r — расстояние до оси z). Очевидно, что в этом случае магнитные силовые

1) Обратим внимание на то, что плоская задача о постоянном магнитном поле оказывается эквивалентной плоской задаче электростатики об определении электрического поля, создаваемого сторонними зарядами, распределенными в диэлектрической среде с плотностью $\rho_{\text{ст}}(x, y)$. Последняя задача требует решения уравнения

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi \rho_{\text{ст}}$$

(φ — потенциал поля), отличающегося от (29,7) лишь заменой $A, j/c, \mu$ соответственно на $\varphi, \rho_{\text{ст}}, 1/\varepsilon$; совпадают также граничные условия для A и для φ . Разница, однако, возникает при определении соответственно E или B по φ или A . Векторы $E = -\operatorname{grad} \varphi$ и $B = \operatorname{rot} A$ в каждой точке одинаковы по абсолютной величине, но взаимно перпендикулярны по направлению.

линии являются окружностями $r = \text{const}$. Абсолютная же величина поля непосредственно определяется из формулы

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \, d\mathbf{f}, \quad (29,9)$$

являющейся интегральной формой уравнения (29,2). Именно,

$$H(r) = \frac{2J(r)}{cr}, \quad (29,10)$$

где $J(r)$ — полный ток, протекающий внутри окружности $r = \text{const}$.

Сведение векторного уравнения (29,5) к одному скалярному уравнению возможно также и при аксиально-симметричном распределении круговых токов, т. е. при распределении, которое в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\varphi = j(r, z).$$

Векторный потенциал ищем в виде $A_r = A_z = 0$, $A_\varphi = A(r, z)$. При этом компоненты магнитной индукции $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA), \quad B_\varphi = 0,$$

и φ -я компонента уравнения (29,2) дает

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} rA \right) = -\frac{4\pi}{c} j(r, z). \quad (29,11)$$

Уравнения магнитного поля токов могут быть решены в общем виде в важном случае, когда магнитными свойствами среды можно пренебречь, т. е. можно положить везде $\mu = 1$. Для векторного потенциала тогда во всем пространстве имеет место уравнение

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j$$

без каких бы то ни было условий на границах раздела различных сред (в том числе на границе проводника, по которому течет ток). Решение этого уравнения, обращающееся на бесконечности в нуль, есть, как известно¹⁾,

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{j}{R} \, dV, \quad (29,12)$$

где R — расстояние от точки, в которой мы ищем A (точка наблюдения), до элемента объема dV . При применении операции rot к этому выражению следует помнить, что дифференцирование j/R под знаком интеграла должно производиться по координатам точки наблюдения, от которых j не зависит, так что

$$\text{rot} \frac{j}{R} = \left[\text{grad} \frac{1}{R} \cdot j \right] = -\frac{1}{R^3} [Rj],$$

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 42.

где радиус-вектор R направлен из dV в точку наблюдения. Таким образом,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}R]}{R^3} dV. \quad (29,13)$$

Если проводник, по которому течет ток, достаточно тонок (тонкий провод) и мы интересуемся лишь полем в окружающем его пространстве, то толщиной проводника можно пренебречь. В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать такие, как говорят, линейные токи. Интегрирование по объему проводника заменяется в этом случае интегрированием по его контуру. Именно, формулы для линейных токов получаются из формул, относящихся к объемным токам, заменой в последних

$$j dV \rightarrow J dl,$$

где J — полный ток, протекающий по проводнику. Так, из формул (29,12), (29,13) получим

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{H} = \frac{J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}R]}{R^3}. \quad (29,14)$$

Вторая из этих формул выражает собой так называемый закон Био и Савара.

Такие простые формулы для магнитного поля линейных токов не связаны даже с требованием $\mu = 1$. Поскольку толщиной проводника мы пренебрегаем, то никаких граничных условий на его поверхности писать не надо и магнитные свойства его вещества вообще несущественны (оно может даже быть ферромагнитным). Решение уравнения (29,6) для поля в окружающей проводник среде будет поэтому

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}R]}{R^3} \quad (29,15)$$

для любого значения магнитной восприимчивости среды. Таким образом, наличие среды приводит лишь к изменению магнитной индукции в μ раз; напряженность же $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ вообще не изменится.

Задача об определении магнитного поля линейных токов может решаться и как задача теории потенциала. Поскольку объемом проводников мы пренебрегаем, то фактически речь идет об определении поля в пространстве, во всем объеме которого (за исключением только особых линий — линейных токов) токи отсутствуют. Но в отсутствие токов постоянное магнитное поле обладает скалярным потенциалом, удовлетворяющим (в однородной среде) уравнению Лапласа. Между потенциалом магнитного поля и электростатическим потенциалом имеется, однако, существенное различие. Потенциал электрического поля всегда является однозначной функцией. Это есть следствие того, что $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ во всем пространстве (в том числе и

там, где имеются заряды), и потому изменение потенциала при обходе по любому замкнутому контуру (т. е. циркуляция \mathbf{E} по этому контуру) равно нулю. Циркуляция же магнитного поля по контуру, охватывающему собой линейный ток, отлична от нуля и равна $4\pi J/c$. Поэтому значение потенциала меняется на эту величину при всяком обходе вокруг линии тока, т. е. потенциал магнитного поля является многозначной функцией.

Если система токов сосредоточена в конечной области пространства ($\mu = 1$ как в проводниках, так и в среде), то вдали от нее векторный потенциал магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{[c\mathcal{M}R]}{R^3}, \quad (29,16)$$

где

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int [rj] dV \quad (29,17)$$

есть полный магнитный момент системы¹⁾.

Для линейного тока это выражение принимает вид

$$c\mathcal{M} = \frac{J}{2c} \oint [r d\mathbf{l}]$$

и может быть преобразовано в интеграл по поверхности, ограниченной контуром тока. Произведение $d\mathbf{f} = 1/2 [r d\mathbf{l}]$ равно по абсолютной величине площади треугольного элемента поверхности, построенного на векторах \mathbf{r} и $d\mathbf{l}$. Векторный же интеграл $\int d\mathbf{f}$ не зависит от того, по какой именно поверхности (натянутой на заданный контур) он берется. Таким образом, магнитный момент замкнутого линейного тока равен

$$c\mathcal{M} = \frac{J}{c} \int d\mathbf{f}. \quad (29,18)$$

В частности, для плоского замкнутого линейного тока магнитный момент равен просто JS/c , где S — площадь ограниченной током части плоскости.

В заключение этого параграфа остановимся еще на вопросе о потоке энергии в проводнике. Диссипируемая в проводнике (в виде джоулева тепла) энергия черпается из энергии электромагнитного поля. В стационарном случае «уравнение непрерывности», выражающее собой закон сохранения энергии, имеет вид

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{jE}, \quad (29,19)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 43. В приведенном там выводе использовано в явном виде представление токов как результата движения отдельных заряженных частиц. Такой вывод обладает, конечно, полной общностью, но формулу (29,16) можно получить и чисто макроскопическим путем (см. задачу 4 к этому параграфу).

где S — плотность потока энергии. Последний дается внутри проводника выражением

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH], \quad (29,20)$$

формально совпадающим с выражением для вектора Пойнтинга для поля в пустоте. В этом легко убедиться прямой проверкой: вычисление $\operatorname{div} S$ с использованием уравнений $\operatorname{rot} E = 0$ и (29,2) приводит к (29,19).

Независимо от этого вывода, формула (29,20) однозначно следует из очевидного условия непрерывности нормальной компоненты S на поверхности тела, если при этом учитывать непрерывность E_t и H_t и тот факт, что формула (29,20) справедлива в пустоте вне тела.

Задачи¹⁾

1. Определить скалярный потенциал магнитного поля замкнутого линейного тока.

Решение. Преобразуя интеграл по контуру в интеграл по охватываемой им поверхности, получим

$$A = \frac{J}{c} \oint \frac{dl}{R} = \frac{J}{c} \int [df \nabla \frac{1}{R}],$$

$$B = \operatorname{rot} A = -\frac{J}{c} \int (df \nabla) \nabla \frac{1}{R}$$

(при преобразованиях надо учесть, что $\Delta \frac{1}{R} = 0$). Сравнивая с $B = -\operatorname{grad} \varphi$, найдем, что скалярный потенциал

$$\varphi = \frac{J}{c} \int df \nabla \frac{1}{R} = -\frac{J}{c} \int \frac{df R}{R^3}.$$

Стоящий здесь интеграл представляет собой, геометрически, телесный угол Ω , под которым виден контур из точки наблюдения поля. Упомянутая в тексте многозначность потенциала проявляется в том, что, когда точка наблюдения описывает замкнутый путь, охватывающий провод, угол Ω , достигнув значения 2π , меняет знак, становясь равным -2π .

2. Определить магнитное поле линейного кругового тока (радиуса a).

Решение. Выбираем начало цилиндрической системы координат r, φ, z в центре окружности, причем угол φ отсчитывается от плоскости, проходящей через ось z и точку наблюдения поля. Векторный потенциал имеет только компоненту $A_\varphi = A(r, z)$, и согласно формуле (29,14) пишем

$$A_\varphi = \frac{J}{c} \oint \frac{\cos \varphi dl}{R} = \frac{2J}{c} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi)^{1/2}}.$$

Вводя новую переменную θ согласно $\varphi = \pi + 2\theta$, можно привести это выражение к виду

$$A_\varphi = \frac{4J}{ck} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right],$$

¹⁾ В задачах 1—4 полагаем везде $\mu = 1$.

где

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2},$$

а K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Для компонент индукции находим:

$$B_\varphi = 0, \quad B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{J}{c} \frac{2z}{r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right],$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{J}{c} \frac{2}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right].$$

Мы воспользовались здесь легко проверяемыми формулами

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-K}{k}.$$

На оси ($r=0$)

$$B_r = 0, \quad B_z = \frac{2\pi a^2 J}{c(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

что можно получить и непосредственным элементарным расчетом.

3. Определить магнитное поле в цилиндрическом отверстии в цилиндрическом (бесконечно длинном) проводнике, вдоль которого течет ток, равномерно распределенный по его сечению (рис. 17).

Решение. Если бы отверстия не было, поле внутри цилиндра было бы равно

$$H'_x = -2\pi j y / c, \quad H'_y = 2\pi j x / c$$

(обозначения размеров и осей координат даны на рисунке).

Если бы по внутреннему цилиндру протекал ток с плотностью $-j$, он создавал бы в той же точке наблюдения поле

$$H''_x = 2\pi j y' / c, \quad H''_y = -2\pi j x' / c.$$

Искомое поле в отверстии получается наложением этих двух полей. Заметив, что $x-x' = OO' = h$, $y = y'$, найдем

$$H_x = 0,$$

$$H_y = 2\pi j h / c = \frac{2hJ}{(b^2 - a^2)c},$$

т. е. однородное поле в направлении оси y .

4. Вывести формулу (29,16) для векторного потенциала поля вдали от токов из формулы (29,12).

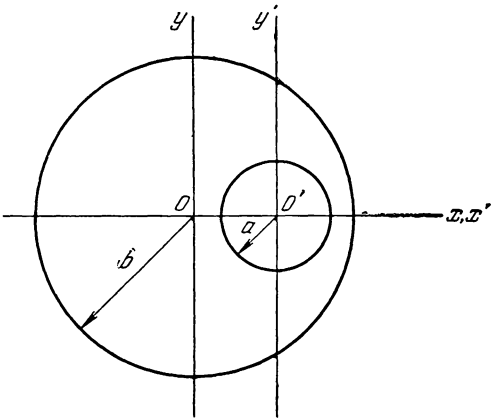
Решение. Пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где \mathbf{R}_0 и \mathbf{r} — радиус-векторы из начала координат, расположенного где-либо в области токов, до точки наблюдения

Рис. 17.

и до элемента dV соответственно. Разлагая подынтегральное выражение по степеням r и учитывая, что $\int \mathbf{j} dV \equiv 0$, получим

$$A_i \cong \frac{R_k}{cR^3} \int x_k j_i dV$$

(индекс 0 у R опускаем). Интегрируя по частям тождество

$$\int x_i x_k \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0,$$

получим

$$\int (j_i x_k + j_k x_i) dV = 0.$$

Поэтому можно переписать A_i в виде

$$A_i = \frac{R_k}{2cR^3} \int (x_k j_i - x_i j_k) dV,$$

что совпадает с (29,16).

5. Определить магнитное поле, создаваемое линейным током в магнитно-анизотропной среде (*Вигглин*).

Решение. В анизотропной среде, окружающей проводник, имеем уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_{ik} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где μ_{ik} — тензор магнитной проницаемости среды. Вместо того чтобы вводить векторный потенциал согласно $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, введем здесь другой вектор, \mathbf{C} , определяемый равенством

$$H_i = e_{ikl} \mu_{km} \frac{\partial C_l}{\partial x_m} \quad (2)$$

(e_{ikl} — антисимметрический единичный тензор); выражением (2) уравнение (1) тоже удовлетворяется тождественно. На определенный таким образом вектор \mathbf{C} можно еще наложить дополнительное условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial x_l} = 0. \quad (3)$$

Подставив (2) в уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, получим

$$e_{ikl} \frac{\partial H_l}{\partial x_k} = -\mu_{kp} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{4\pi j_i}{c}$$

(при преобразовании использовано равенство

$$e_{ikl} e_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

и условие (3)). Полученное таким образом уравнение для \mathbf{C} совпадает по форме с уравнением для потенциала электрического поля, создаваемого зарядами в анизотропной среде (задача 2 § 13). Его решение имеет вид

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{\sqrt{|\mu| |\mu_{ik}^{-1} R_i R_k}}$$

($|\mu|$ — определитель тензора μ_{ik} ; \mathbf{R} — радиус-вектор между точкой наблюдения и dV). Переходя к линейному току, получим окончательно

$$\mathbf{C} = \frac{J}{c \sqrt{|\mu|}} \oint \frac{dl}{\sqrt{\mu_{ik}^{-1} R_i R_k}}$$

§ 30. Термодинамические соотношения в магнитном поле

Термодинамические соотношения для магнетика в магнитном поле в своей окончательной форме, как мы увидим, весьма сходны с аналогичными соотношениями для диэлектрика в электрическом поле. Их вывод, однако, существенным образом отличается от того, который был произведен в § 10. Это отличие связано, в конечном итоге, с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит работы над движущимися в нем зарядами (так как действующая на заряд сила перпендикулярна к его скорости). Поэтому для вычисления изменения энергии среды при включении магнитного поля надо рассматривать электрические поля, индуцирующиеся при изменении магнитного поля, и определять работу, производимую ими над токами (источниками магнитного поля).

Таким образом, необходимо привлечь уравнение, определяющее связь между электрическим и переменным магнитными полями. Это уравнение,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (30,1)$$

является непосредственным результатом усреднения микроскопического уравнения (1,3).

В течение времени δt поле \mathbf{E} производит над токами \mathbf{j} работу, равную

$$\delta t \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

Эта же величина, взятая с обратным знаком, есть работа δR , произведенная «над полем» со стороны той внешней электродвижущей силы, которая является источником, поддерживающим протекание токов. Подставив $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$, получим

$$\begin{aligned} \delta R &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV = \\ &= \delta t \frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] dV - \delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} dV. \end{aligned}$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, обращается в нуль. Во втором же подставляем $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ из (30,1) и, вводя изменение $\delta \mathbf{B} = \delta t \partial \mathbf{B} / \partial t$ магнитной индукции, получаем окончательно

$$\delta R = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} dV. \quad (30,2)$$

Эта формула по виду вполне аналогична выражению (10,2) для работы при бесконечно малом изменении электрического поля. Следует, однако, заметить, что физическая аналогия между этими двумя

формулами в действительности не так глубока, поскольку \mathbf{H} , в противоположность \mathbf{E} , не есть среднее значение истинной микроскопической напряженности поля.

После получения формулы (30,2) все термодинамические соотношения для магнетика в магнитном поле могут быть написаны в точности аналогично тому, как были написаны в § 10 соотношения для диэлектрика в электрическом поле; достаточно заменить в них обозначения \mathbf{E} и \mathbf{D} соответственно на \mathbf{H} и \mathbf{B} . Выпишем здесь для дальнейших ссылок некоторые из этих формул. Для дифференциалов полных свободной и внутренней энергий имеем:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= -\mathcal{S}\delta T + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta\mathbf{B} dV, \\ \delta\mathcal{U} &= T\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta\mathbf{B} dV,\end{aligned}\quad (30,3)$$

а для этих же величин, отнесенных к единице объема:

$$\begin{aligned}dF &= -SdT + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}, \\ dU &= TdS + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B}.\end{aligned}\quad (30,4)$$

Наряду с F , U нам понадобятся также термодинамические потенциалы

$$\tilde{U} = U - \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi}, \quad \tilde{F} = F - \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi}, \quad (30,5)$$

для которых

$$\begin{aligned}d\tilde{F} &= -SdT + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{H}, \\ d\tilde{U} &= TdS + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{H}.\end{aligned}\quad (30,6)$$

При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ можно написать выражения для всех величин в конечном виде:

$$\begin{aligned}U &= U_0(S, \rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu}, & F &= F_0(T, \rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu}, \\ \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}, & \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}.\end{aligned}\quad (30,7)$$

Работу δR (или, что то же, изменение δF при постоянной температуре) можно выразить в другом виде, через плотность токов и векторный потенциал магнитного поля. Для этого полагаем $\delta\mathbf{B} = \text{rot } \delta\mathbf{A}$ и пишем

$$(\delta\mathcal{F})_T = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \text{rot } \delta\mathbf{A} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div} [\mathbf{H} \delta\mathbf{A}] dV + \frac{1}{4\pi} \int \delta\mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} dV.$$

Первый интеграл снова обращается в нуль, а второй дает

$$(\delta \mathcal{F})_T = \frac{1}{c} \int j \delta A dV. \quad (30,8)$$

Аналогичным преобразованием можно получить

$$(\delta \tilde{\mathcal{F}})_T = -\frac{1}{c} \int A \delta j dV. \quad (30,9)$$

Полезно отметить, что в математическом формализме макроскопической электродинамики токи — источники магнитного поля — играют роль, аналогичную роли потенциалов (а не зарядов) источников электрического поля. Это правило ясно проявляется при сопоставлении формул (30,8) и (30,9) с аналогичными формулами в электрическом поле

$$(\delta \mathcal{F})_T = \int \varphi \delta \rho dV, \quad (\delta \tilde{\mathcal{F}})_T = -\int \rho \delta \varphi dV \quad (30,10)$$

(см. (10,13), (10,14)). Мы видим, что заряды и потенциалы расположены в этих формулах обратным образом по сравнению с токами и потенциалами в формулах (30,8), (30,9).

Ввиду полного формального совпадения термодинамических соотношений (выраженных через напряженность и индукцию) в электрическом и магнитном полях непосредственно переносятся на магнитное поле также и полученные в § 18 термодинамические неравенства. Мы видели, в частности, что из них следует неравенство $\epsilon > 0$. В электрическом случае это неравенство не представляло интереса, поскольку оно слабее условия $\epsilon > 1$, следовавшего из других соображений. Но в магнитном случае аналогичное неравенство

$$\mu > 0$$

весьма существенно, так как оно является единственным ограничением, накладываемым на возможные значения магнитной проницаемости.

§ 31. Полная свободная энергия магнетика

В § 11 были получены выражения для полной свободной энергии \mathcal{F} диэлектрика в электрическом поле. Один из термодинамических аспектов этой величины заключается в том, что ее изменение определяет работу, произведенную электрическим полем над телом при неизменных источниках (зарядах), создающих это поле. В магнитном же поле аналогичную роль играет свободная энергия $\tilde{\mathcal{F}}$, так как при заданных источниках (токах) поля именно ее изменение дает произведенную над телом работу.

Следующий ниже вывод полностью аналогичен тому, который был произведен в § 11. «Полную» величину $\tilde{\mathcal{F}}$ мы определяем как

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left(\tilde{F} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \right) dV, \quad (31,1)$$

где \mathfrak{H} — магнитное поле, которое создавали бы данные источники в отсутствие намагничивающейся среды. Знак $+$ в скобке (вместо знака $-$ в (11,1)) связан с тем, что значение $\tilde{\mathcal{F}}$ для магнитного поля в пустоте есть $-\int \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} dV$ (см. (30,7)). Интегрирование в (31,1) производится по всему пространству, включая объем проводников, несущих токи, которые создают поле ¹⁾.

Вычислим изменение $\tilde{\mathcal{F}}$ (при заданной температуре и без нарушения термодинамического равновесия среды) при бесконечно малом изменении поля. Поскольку $\delta\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \delta\mathbf{H}$, то имеем

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{F}} &= -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{B} \delta\mathbf{H} - \mathfrak{H} \delta\mathfrak{H}) dV = -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \delta\mathfrak{H} dV - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B} (\delta\mathbf{H} - \delta\mathfrak{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \delta\mathfrak{H} dV. \end{aligned} \quad (31,2)$$

Вводя векторный потенциал \mathfrak{A} поля \mathfrak{H} , пишем в первом члене $(\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \delta\mathfrak{H} = (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \operatorname{rot} \delta\mathfrak{A} = \operatorname{div} [\delta\mathfrak{A} (\mathbf{H} - \mathfrak{H})] + \delta\mathfrak{A} \operatorname{rot} (\mathbf{H} - \mathfrak{H})$.

Но поля \mathbf{H} и \mathfrak{H} создаются, по определению, одними и теми же токами \mathbf{j} , распределение которых по объему проводников не зависит (см. § 29) от создаваемого ими же поля, т. е. не зависит от наличия или отсутствия магнетиков в окружающем пространстве. Поэтому \mathbf{H} и \mathfrak{H} удовлетворяют одинаковым уравнениям $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, так что $\operatorname{rot} (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) = 0$. Интеграл же от $\operatorname{div} [\delta\mathfrak{A} (\mathbf{H} - \mathfrak{H})]$ преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что равен нулю и второй член в (31,2), так что

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \delta\mathfrak{H} dV = - \int \mathbf{M} \delta\mathfrak{H} dV. \quad (31,3)$$

Таким образом, мы получили для $\delta\tilde{\mathcal{F}}$ выражение, в точности аналогичное выражению (11,3) для $\delta\mathcal{F}$ в электрическом случае.

¹⁾ В § 11 мы считали, что интегрирование в (11,1) производится по всему пространству, исключая объем заряженных проводников, создающих поле. Там можно было так делать, поскольку внутри заряженного проводника электрическое поле все равно отсутствует. Магнитное же поле имеется и внутри проводников, несущих токи, и исключать его при вычислении полной свободной энергии нельзя.

В частности, в однородном внешнем магнитном поле \mathfrak{H} имеем для $d\tilde{\mathcal{F}}$ выражение, аналогичное (11,5):

$$d\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{S} dT - \mathcal{M} d\mathfrak{H}, \quad (31,4)$$

где \mathcal{M} — полный магнитный момент тела.

Не повторяя дальнейших вычислений, напомним следующие формулы по аналогии с формулами в § 11. При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ имеем

$$\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \int \frac{1}{2} \mathfrak{H} \mathcal{M} dV. \quad (31,5)$$

В частности, в однородном внешнем поле

$$\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \frac{1}{2} \mathfrak{H} \mathcal{M}. \quad (31,6)$$

В общем же случае произвольной зависимости \mathbf{B} от \mathbf{H} для вычисления $\tilde{\mathcal{F}}$ можно пользоваться формулой

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left(\tilde{F} + \frac{H\mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathcal{M}\mathfrak{H} \right) dV = \int \left(F - \frac{H\mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathcal{M}\mathfrak{H} \right) dV. \quad (31,7)$$

В § 11 были указаны также упрощенные формулы, относящиеся к случаю малой диэлектрической восприимчивости. Аналогичный случай для магнитного поля в особенности существен ввиду упоминавшейся уже малости магнитной восприимчивости большинства тел. При этом имеем

$$\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0 = - \frac{\chi}{2} \int \mathfrak{H}^2 dV. \quad (31,8)$$

Для магнитного поля можно получить также и результаты, аналогичные результатам § 14. Речь идет об изменении термодинамических величин магнетика при бесконечно малом изменении его магнитной проницаемости μ ; источники поля предполагаются при этом неизменными. После всего сказанного выше заранее ясно, что вместо изменения \mathcal{F} (как в § 14) надо рассматривать теперь изменение $\tilde{\mathcal{F}}$. Мы не станем повторять здесь вывода, аналогичного выводу формулы (14,1). Он приводит к такому же результату:

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = - \int \delta\mu \frac{H^2}{8\pi} dV. \quad (31,9)$$

В § 14 на основании этой формулы было сделано заключение о положительности электрической восприимчивости вещества. В магнитном случае, однако, такой вывод не может быть сделан, и магнитная восприимчивость может иметь оба знака. Причина этого существенного различия заключается в том, что гамильтониан системы движущихся зарядов в магнитном поле содержит не только

члены, линейные по полю (как в электрическом случае), но и квадратичные члены. Поэтому при определении изменения свободной энергии тела в магнитном поле с помощью теории возмущений по формуле (14,2) вклад будут давать не только члены второго, но и первого приближения. Никаких общих заключений о знаке изменения при этом нельзя сделать; у парамагнитных тел оно положительно, а у диамагнитных — отрицательно.

В § 14 были сделаны заключения о направлении движения тел в электрическом поле. Аналогичные выводы следуют также и из формулы (31,9). Однако ввиду того, что μ может быть как больше, так и меньше 1, направление движения тел в магнитном поле не универсально. Так, в квазиоднородном поле парамагнитные тела ($\mu > 1$) перемещаются в направлении увеличения напряженности, а диамагнитные тела ($\mu < 1$) — в направлении уменьшения H .

§ 32. Энергия системы токов

Рассмотрим систему проводников с текущими по ним токами. Предположим, что ни сами проводники, ни среда, в которой они находятся, не ферромагнитны, так что везде $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Согласно § 30 полная свободная энергия системы выражается через создаваемое токами магнитное поле посредством

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}\mathbf{B} dV. \quad (32,1)$$

Мы опустили здесь постоянную (при заданной температуре тел) величину \mathcal{F}_0 , не имеющую отношения к токам. Интегрирование в (32,1) производится по всему пространству, как внутри, так и вне проводников.

Эту же энергию можно выразить и через токи посредством интеграла

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A}\mathbf{j} dV \quad (32,2)$$

(ср. переход от (30,2) к (30,8)). Интегрирование производится здесь уже только по объему проводников, так как вне их $\mathbf{j} = 0$.

В силу линейности уравнений поля магнитное поле можно представить в виде суммы полей, которые создавались бы каждым током в отдельности, если бы в остальных проводниках токи отсутствовали: $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_a$. Тогда полная свободная энергия (32,1) примет вид

$$\mathcal{F} = \sum_a \mathcal{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathcal{F}_{ab}, \quad (32,3)$$

где

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_a \mathbf{B}_a dV, \quad \mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}_a \mathbf{B}_b dV \quad (32,4)$$

(в $\mathcal{F}_{ab} = \mathcal{F}_{ba}$ учтено, что $H_a B_b = \mu H_a H_b = H_b B_a$, где μ — магнитная проницаемость в каждой данной точке пространства). Величину \mathcal{F}_{aa} можно назвать собственной свободной энергией токов a -го проводника, а \mathcal{F}_{ab} — энергией взаимодействия проводников a и b . Надо, впрочем, иметь в виду, что такие названия имеют буквальный смысл, лишь если пренебречь магнитными свойствами вещества как самих проводников, так и среды. В противном случае поле (а потому и энергия) каждого тока зависит также и от расположения и магнитной проницаемости остальных проводников.

Величины (32,4) можно выразить также и через токи j_a в каждом из проводников, в соответствии с формулой (32,2),

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{2c} \int j_a A_a dV_a, \quad \mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{c} \int j_a A_b dV_a = \frac{1}{c} \int j_b A_a dV_b. \quad (32,5)$$

Интеграл в \mathcal{F}_{aa} берется здесь только по объему a -го проводника, а \mathcal{F}_{ab} представляется в виде любого из двух выражений, в которых интегрирование производится соответственно по объему проводника a или b .

При заданном законе распределения плотности тока по объему проводника значение \mathcal{F}_{aa} зависит только от полной силы тока J_a , протекающего через его поперечное сечение. При этом величине J_a будут пропорциональны как плотность j , так и создаваемое током поле. Поэтому весь интеграл \mathcal{F}_{aa} пропорционален J_a^2 . Его пишут в виде

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} L_{aa} J_a^2, \quad (32,6)$$

где L_{aa} называется коэффициентом самоиндукции проводника. Аналогичным образом энергия взаимодействия двух токов пропорциональна произведению $J_a J_b$:

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} L_{ab} J_a J_b. \quad (32,7)$$

Величина L_{ab} называется коэффициентом взаимной индукции проводников. Таким образом, полная свободная энергия системы токов

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \quad (32,8)$$

Условие положительной определенности этой квадратичной формы накладывает ряд ограничений на значения коэффициентов. В частности, все $L_{aa} > 0$, а

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2.$$

Вычисление энергии токов в общем случае произвольных массивных проводников требует полного решения уравнений поля и

представляет собой сложную задачу. Она упрощается, если магнитную проницаемость как самих проводников, так и среды можно положить равной единице. Отметим, что при этом энергия токов вообще перестает зависеть от термодинамического состояния (в частности, от температуры) тел, а потому во всех написанных выше формулах можно с одинаковым правом говорить как о свободной энергии, так и просто об энергии.

При $\mu = 1$ векторный потенциал поля, создаваемого токами \mathbf{j} , дается формулой (29,12). Поэтому для собственной энергии проводника получим

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \int \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}'}{R} dV dV', \quad (32,9)$$

где оба интегрирования производятся по объему данного проводника, а R есть расстояние между dV и dV' . Аналогичным образом, взаимная энергия двух проводников

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \int \int \frac{\mathbf{j}_a \mathbf{j}_b}{R} dV_a dV_b, \quad (32,10)$$

где dV_a и dV_b — элементы объема каждого из проводников.

В особенности просто вычисляется взаимная энергия двух линейных токов. Переход от объемных токов к линейным в формуле (32,10) осуществляется заменой $\mathbf{j}_a dV_a$ и $\mathbf{j}_b dV_b$ соответственно на $\mathbf{j}_a dl_a$ и $\mathbf{j}_b dl_b$, и мы находим, что коэффициент взаимной индукции есть

$$L_{ab} = \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{R}.$$

В этом приближении, следовательно, L_{ab} зависит только от формы, размеров и взаимного расположения обоих контуров и не зависит от распределения тока по сечению проводов. Подчеркнем, что для получения такой простой формулы в случае линейных проводников не требуется даже предположения о том, что везде $\mu = 1$. В приближении, в котором мы пренебрегаем толщиной проводов, магнитные свойства их материала вообще не влияют на создаваемое ими поле, а потому и на их взаимную энергию. Отличная же от 1 магнитная проницаемость μ среды, окружающей провода, согласно (29,15) просто увеличивает в μ раз векторный потенциал (а с ним и индукцию) магнитного поля. Во столько же раз увеличится, следовательно, и коэффициент взаимной индукции, так что будет

$$L_{ab} = \mu \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{R}. \quad (32,11)$$

Что касается коэффициента самоиндукции линейных проводников, то его вычисление представляет значительно большие трудности; этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Полную энергию системы линейных токов можно написать еще и в другом виде. Для этого вернемся к интегралу (32,2), который для линейных токов принимает вид

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint A dl_a, \quad (32,12)$$

где A — векторный потенциал полного поля в точке dl_a a -го проводника. Основная погрешность, которую мы допускаем при переходе от (32,2) к (32,12), заключается в пренебрежении изменением поля (в том числе собственного поля данного тока) вдоль поперечного сечения провода. Каждый из стоящих в (32,12) контурных интегралов преобразуется в интеграл по поверхности:

$$\oint A dl_a = \int \text{rot } A \cdot df_a = \int B df_a,$$

т. е. представляет собой поток магнитной индукции (или, как говорят, магнитный поток) через контур a -го тока. Будем обозначать этот поток посредством Φ_a . Таким образом,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32,13)$$

Аналогичным образом выражается через магнитный поток свободная энергия \mathcal{F} линейного тока J во внешнем магнитном поле, т. е. энергия, в которую не включается собственная энергия источников поля. Очевидно, что

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} J \Phi, \quad (32,14)$$

где Φ есть поток внешнего поля через контур тока J . Если внешнее поле однородно (а у среды $\mu = 1$), то $\Phi = \mathcal{H} \int df$. Вводя магнитный момент тока согласно (29,18), получим $\mathcal{F} = \mathcal{M} \mathcal{H}$.

Зная энергию системы токов, как функцию их размеров, формы и взаимного расположения, можно определить действующие на проводники силы просто путем дифференцирования по соответствующим координатам. При этом, однако, возникает вопрос о том, какие характеристики токов надо при дифференцировании полагать постоянными. Наиболее удобно производить вычисления при постоянных токах. Но в этом случае роль свободной энергии играет величина $\tilde{\mathcal{F}}$. Поэтому обобщенная сила F_q , действующая «вдоль» обобщенной координаты q , есть

$$F_q = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial q} \right)_{J, T}$$

Индексы у производной означают, что дифференцирование производится при постоянных силах тока и постоянной температуре тел.

Поскольку мы опускаем в свободной энергии постоянную часть, не зависящую от токов, то \mathcal{F} и $\tilde{\mathcal{F}}$ различаются только знаком, так что

$$F_q = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial q} \right)_J = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \right)_J = \frac{1}{2c^2} \sum_{ab} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \quad (32,15)$$

(индекс T у производных здесь и ниже для краткости опускаем).

В частности, силы, действующие на проводник со стороны его собственного магнитного поля, определяются по формуле

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (32,16)$$

где L — самоиндукция проводника. Характер действия этих сил заранее очевиден из следующих соображений. При заданном значении силы тока (и температуры) величина $\tilde{\mathcal{F}}$ стремится к минимуму. Поскольку в данном случае $\tilde{\mathcal{F}} = -LJ^2/2c^2$, то это значит, что действующие на проводник силы будут стремиться увеличить его коэффициент самоиндукции. Но последний, как величина с размерностью длины, пропорционален размерам проводника. Таким образом, под влиянием магнитного поля объем проводника увеличивается.

Для тока во внешнем магнитном поле имеем¹⁾:

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{F} = -m\mathfrak{H}. \quad (32,17)$$

Во всех написанных выше формулах для энергии предполагается линейная связь между индукцией и напряженностью магнитного поля. В общем же случае произвольной связи можно установить аналогичные дифференциальные соотношения. Изменение свободной энергии при бесконечно малом изменении поля (при постоянной температуре) есть согласно (30,8)

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{c} \int j \delta A \, dV$$

или, для системы линейных токов,

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \oint \delta A \, dl_a.$$

Поступая далее так же, как при переходе от (32,12) к (32,13), получим

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \delta \Phi_a. \quad (32,18)$$

1) Отсутствие здесь (по сравнению с формулой (31,6)) множителя $1/2$ связано с тем, что магнитный момент тока в (32,15) есть постоянная величина, не зависящая от поля, между тем как фигурирующий в (31,6) магнитный момент магнетика сам возникает только под действием поля.

Аналогичным образом найдем из (30,9)

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{c} \sum_a \Phi_a \delta J_a. \quad (32,19)$$

Можно сказать, что для системы линейных токов \mathcal{F} является термодинамическим потенциалом по отношению к магнитным потокам, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — по отношению к силам токов, причем эти два потенциала связаны друг с другом посредством

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - \frac{1}{c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32,20)$$

Таким образом, при любых магнитных свойствах вещества справедливы термодинамические соотношения

$$\frac{1}{c} J_a = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi_a}, \quad \frac{1}{c} \Phi_a = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial J_a}. \quad (32,21)$$

Если применить эти формулы к случаю линейной связи, когда \mathcal{F} дается формулой (32,8), то мы получим

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} J_b. \quad (32,22)$$

Таким образом, коэффициенты индукции оказываются коэффициентами пропорциональности между магнитным потоком и силами токов, создающих магнитное поле. Произведение $L_{ab} J_b / c$ есть магнитный поток, создаваемый током J_b ($b \neq a$) через контур тока J_a , а $L_{aa} J_a / c$ — поток через тот же контур, создаваемый самим током J_a .

§ 33. Самоиндукция линейных проводников

При вычислении коэффициента самоиндукции линейного проводника нельзя полностью пренебречь его толщиной, как мы это делали для вычисления взаимной индукции двух проводников. Сделав так, мы получили бы из (32,9) самоиндукцию в виде

$$L = \oint \oint \frac{dl dl'}{R},$$

где оба интеграла берутся по одному и тому же контуру; но этот интеграл логарифмически расходится при $R \rightarrow 0$.

Точное значение самоиндукции проводника зависит от распределения тока в нем, которое может быть различным в зависимости от способа возбуждения тока, т. е. от того, каким образом приложена к нему электродвижущая сила. Но для линейного провода

самоиндукция оказывается не зависящей от закона распределения тока по его сечению ¹⁾ с довольно большой степенью точности.

Представим самоиндукцию в виде суммы $L = L_e + L_i$, где L_e и L_i связаны с энергией магнитного поля соответственно вне и внутри проводника. У линейного провода основную часть самоиндукции составляет «внешняя» часть L_e . Это связано с тем, что основная часть магнитной энергии замкнутого линейного контура заключена в поле вне провода на больших (по сравнению с его толщиной) расстояниях. Действительно, энергия, приходящаяся на единицу длины неограниченно длинного прямого провода, дается интегралом

$$\frac{\mu_e}{8\pi} \int H^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_e}{8\pi} \int \left(\frac{2J}{cr}\right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_e J^2}{c^2} \int \frac{dr}{r}$$

(r — расстояние от оси провода, μ_e — магнитная проницаемость внешней среды). Этот интеграл логарифмически расходится при больших r . Для замкнутого линейного контура эта расходимость, разумеется, исчезнет — интеграл «обрежется» на расстояниях порядка величины размеров контура. Мы получим приближенное значение энергии, умножив написанный интеграл на полную длину провода l и взяв для верхнего предела значение l (нижний же предел равен радиусу a провода):

$$\frac{\mu_e J^2}{c^2} l \ln \frac{l}{a}.$$

Отсюда самоиндукция

$$L = 2\mu_e l \ln \frac{l}{a}. \quad (33,1)$$

Это выражение обладает, как говорят, л о г а р и ф м и ч е с к о й т о ч н о с т ь ю; его относительная погрешность — порядка величины $\frac{1}{\ln(l/a)}$, а отношение l/a предполагается настолько большим, что и его логарифм велик ²⁾.

Особым случаем линейных проводников является катушка (соленоид), в которой провод намотан по спирали с очень близко расположенными друг к другу витками. Пренебрегая толщиной провода и расстояниями между витками, мы получим просто цилиндри-

¹⁾ Точнее, от распределений, при которых плотность тока существенно меняется лишь на расстояниях, сравнимых с толщиной a провода. Если же распределение таково, что плотность тока заметно меняется на расстояниях, малых по сравнению с a (как это имеет место в силу специальных причин при так называемом скин-эффекте или у сверхпроводников), то самоиндукция провода меняется.

²⁾ Сделанное выше утверждение о независимости самоиндукции от распределения тока относится в действительности не только к приближенному выражению (33,1), но и к следующему приближению, в котором учитываются члены, не содержащие большого логарифма (что эквивалентно учету в argumentе логарифма коэффициента при l/a); см. задачи к этому параграфу.

чекую проводящую поверхность, по которой течет «поверхностный» ток проводимости. Уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ внутри проводника заменяется при таком рассмотрении просто граничным условием

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}, \quad (33,2)$$

где \mathbf{g} — поверхностная плотность тока, \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 — напряженность поля по обе стороны поверхности соленоида, а нормаль \mathbf{n} направлена внутрь среды 2 (ср. вывод формулы (27,14)).

Если соленоид представляет собой бесконечный цилиндр, то создаваемое им магнитное поле определяется совсем просто. Поверхностные токи циркулярны, а их плотность $\mathbf{g} = n\mathbf{J}$, где J — ток, текущий по проводу, а n — число витков на единицу длины соленоида. Поле вне цилиндра равно нулю, а внутри имеется однородное поле, направленное вдоль оси цилиндра и равное

$$H = \frac{4\pi}{c} nJ.$$

Действительно, такое поле очевидным образом удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ во всем пространстве вне проводящей поверхности, а также граничному условию (33,2) на ней.

Соответственно, энергия поля, отнесенная к единице длины цилиндра, есть

$$\frac{\mu_e H^2}{8\pi} \pi b^2 = \frac{2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e}{c^2} J^2$$

(b — радиус цилиндра, μ_e относится к среде, заполняющей соленоид). Пренебрегая искажением поля на концах, можно применить эту формулу и к соленоиду конечной большой (по сравнению с b) длины h . Тогда для самоиндукции получим

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h \mu_e = 2\pi \mu_e n b l, \quad (33,3)$$

где $l = 2\pi b n h$ — полная длина провода в катушке. Увеличение самоиндукции соленоида по сравнению с самоиндукцией ненавитого провода той же длины (ср. (33,3) с (33,1)) является естественным следствием взаимной индукции между близко расположенными витками.

Задачи 1)

1. Определить самоиндукцию замкнутого тонкого провода с круговой формой сечения.

Решение. Магнитное поле внутри провода можно принять таким, как внутри бесконечного прямого цилиндра:

$$H = \frac{2Jr}{ca^2}$$

1) В задачах 1—6 полагаем магнитную проницаемость среды $\mu_e = 1$.

(r — расстояние от оси провода, a — его радиус). Отсюда находим внутреннюю часть самоиндукции:

$$L_i = \frac{2c^2 \mu_i}{J^2 8\pi} \int H^2 dV = \frac{l \mu_i}{2}, \quad (1)$$

где l — длина рассматриваемого замкнутого провода.

Для вычисления L_e замечаем, что поле вне тонкого провода не зависит от распределения тока по его сечению. В частности, энергия \mathcal{F}_e внешнего магнитного поля не изменится, если предположить, что ток течет только по поверхности провода. Но тогда внутри провода будет $H=0$ и можно вычислять энергию \mathcal{F}_e , как полную энергию, по формуле (32,2).

Ввиду предположенного поверхностного распределения токов интеграл в этой формуле фактически сводится к линейному интегралу по контуру осевой линии провода, так что внешняя часть самоиндукции

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2} \frac{J}{2c} \oint A \Big|_{r=a} dl,$$

где значение A в подынтегральном выражении берется на поверхности провода. При переходе к этой формуле учтено также, что в рассматриваемом приближении поле постоянно вдоль контура кругового сечения провода.

После того, как задача оказалась сведенной к вычислению $A \Big|_{r=a}$, сделаем другое предположение о распределении тока: пусть весь ток J течет вдоль осевой линии провода. Значение поля на поверхности провода в рассматриваемом приближении от этого не изменится (оно не изменилось бы вовсе у прямого провода кругового сечения). Тогда согласно формуле (29,14) имеем

$$A \Big|_{r=a} = \frac{J}{c} \oint \frac{dl}{R} \Big|_{r=a},$$

где R — расстояние от элемента dl осевой линии провода до данной точки его поверхности. Разобьем интеграл на две части, в которых соответственно $R > \Delta$ и $R < \Delta$, где Δ — некоторая длина, малая по сравнению с размерами контура тока, но большая по сравнению с радиусом a провода¹⁾. В интеграле по области $R > \Delta$ можно пренебречь a и понимать R просто как расстояние между двумя точками контура тока. Интеграл же по области $R < \Delta$ можно считать направленным по касательной к данной точке контура. Обозначив единичный вектор в этом направлении через t , пишем:

$$\int_{R < \Delta} \frac{dl}{R} \Big|_{r=a} \cong t \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{a^2 + l^2}} = 2t \operatorname{Arsh} \frac{\Delta}{a} \cong 2t \ln \frac{2\Delta}{a}.$$

Это выражение можно снова переписать в виде интеграла

$$2t \ln \frac{2\Delta}{a} \cong \int_{\Delta > R > \frac{a}{2}} \frac{dl}{R},$$

1) Аналогичный метод был применен в задаче 4 § 2 для вычисления емкости тонкого кольца.

где теперь уже R снова понимается как расстояние между точками контура тока. Таким образом, складывая с интегралом по области $R > \Delta$, получим выражение

$$A|_{r=a} = \frac{J}{c} \int_{R > \frac{a}{2}} \frac{dl}{R},$$

из которого произвольный параметр Δ , как и следовало, выпадает. Таким образом, окончательно имеем:

$$L_e = \int_{R > \frac{a}{2}} \int \frac{dl dl'}{R}. \quad (2)$$

Интегрирование распространяется здесь по всем парам точек контура, расстояние между которыми превышает $a/2$.

2. Определить самоиндукцию тонкого кольца (радиуса b) из провода кругового сечения (радиуса a).

Решение. Подынтегральное выражение в формуле (2) задачи 1 зависит только от центрального угла φ , на который опирается хорда R окружности кольца, причем $R = 2b \sin(\varphi/2)$, а $dl dl' = dl \cdot dl' \cos \varphi$. Поэтому имеем

$$L_e = 2 \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos \varphi \cdot 2\pi b \cdot b d\varphi}{2b \sin \frac{\varphi}{2}} = 4\pi b \left[-\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{4} - 2 \cos \frac{\varphi_0}{2} \right].$$

Нижний предел интегрирования определяется из $2b \sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{a}{2}$, откуда $\varphi_0 \cong a/2b$. Подставив это значение и сложив с $L_i = \pi b \mu_i$, получим с требуемой точностью

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2 + \frac{\mu_i}{4} \right).$$

В частности, при $\mu_i = 1$

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right).$$

3. Определить растяжение кольцевого провода (с $\mu_i = 1$) под действием магнитного поля протекающего по нему тока.

Решение. Внутренние напряжения, действующие вдоль оси провода и перпендикулярно к ней, определяются согласно (32,16) формулами

$$\pi a^2 \sigma_{\parallel} = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial (2\pi b)}; \quad 2\pi a b \sigma_{\perp} = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial a}.$$

Подставив L из предыдущей задачи, получим

$$\sigma_{\parallel} = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} \right), \quad \sigma_{\perp} = -\frac{J^2}{a^2 c^2}.$$

Отсюда искомое относительное удлинение кольца 1)

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E} (\sigma_{\parallel} - 2\sigma_{\perp}) = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2 E} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma \right)$$

(E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона материала провода).

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 2, § 5.

4. Определить самоиндукцию единицы длины двойного провода, состоящего из двух параллельных прямых проволок (с $\mu_i = 1$) кругового сечения (радиусов a и b), отстоящих на расстоянии h между их осями, причем по этим проволокам текут равные и противоположные токи J (рис. 18).

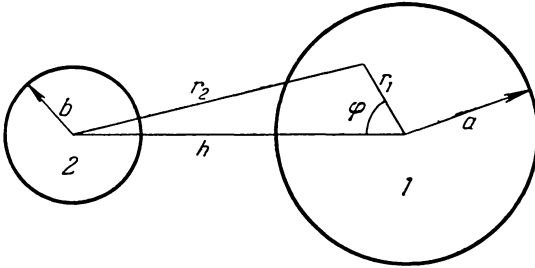


Рис. 18.

Решение. Векторный потенциал магнитного поля каждого из токов направлен параллельно осям проводов, и потому векторные потенциалы обеих полей складываются просто алгебраически. Для магнитного поля провода 1 с равномерно распределенным током $+J$ имеем (в цилиндрических координатах)

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad \text{при } r < a,$$

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \quad \text{при } r > a,$$

где C — произвольная постоянная; на границе провода A_z непрерывно. Аналогичные формулы для поля провода 2 получаются заменой a на b и изменением знака J . Интегрирование по площади сечения провода 1 в формуле (32,2) дает

$$\begin{aligned} & \frac{J^2}{2c^2\pi a^2} \int \left\{ \left(C - \frac{r_1^2}{a^2} \right) - \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r_2}{b} \right) \right\} df_1 = \\ & = \frac{J^2}{2c^2\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln \frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1 \cos \varphi}{b^2} \right\} r_1 d\varphi dr_1 = \\ & = \frac{J^2}{2c^2} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{h}{b} \right). \end{aligned}$$

Интегрирование же по сечению провода 2 дает такое же выражение с a вместо b . Поэтому искомая самоиндукция единицы длины двойного провода

$$L = 1 + 2 \ln \frac{h^2}{ab}.$$

5. Определить самоиндукцию тороидального соленоида.

Решение. Рассматриваем соленоид как тороидальную проводящую поверхность, по которой циркулируют поверхностные токи с плотностью

$$g = \frac{NJ}{2\pi r}$$

(N — полное число витков провода, J — ток в нем; координаты и размеры показаны на рис. 19). Магнитное поле вне соленоида $H_e = 0$, а внутри

$$H_{ir} = H_{iz} = 0, \quad H_{i\varphi} = \frac{2NJ}{cr}$$

(r, z, φ — цилиндрические координаты). Действительно, это решение удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ и граничному условию (33,2) 1). Энергия магнитного поля внутри соленоида

$$\int \frac{H_i^2}{8\pi} dV = \frac{N^2 J^2}{c^2} \oint \frac{z dr}{r};$$

интегрирование производится по контуру сечения тора и легко осуществляется путем введения угла θ согласно $z = a \sin \theta$, $r = b + a \cos \theta$. В результате получаем для самоиндукции:

$$L = 4\pi N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

6. Определить поправку первого порядка по l/h к выражению (33,3) (с $\mu_e = 1$) для самоиндукции цилиндрического соленоида, связанную с искажением поля вблизи его концов.

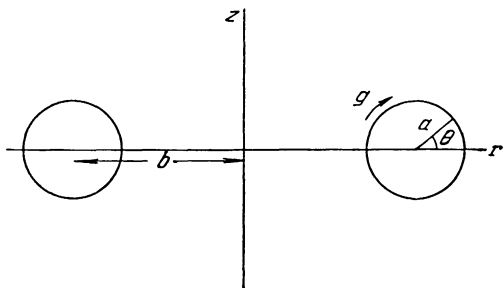


Рис. 19.

Решение. Самоиндукция соленоида вычисляется как двойной интеграл по его поверхности:

$$L = \frac{1}{J^2} \iint \frac{\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2}{R} df_1 df_2,$$

где \mathbf{g} — поверхностная плотность тока ($\mathbf{g} = n\mathbf{J}$). В цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} L &= 2\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi dz_1 dz_2}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \\ &= 8\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^\pi \frac{(h - \zeta) \cos \varphi d\varphi d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \end{aligned}$$

(φ — угол между диагональными плоскостями, проходящими через df_1 и df_2).

1) Оно справедливо и для кольцеобразного соленоида с произвольной, некруговой формой сечения.

Интегрируя по $d\zeta$, получим при $h \gg b$:

$$L \cong 8\pi b^2 n^2 \int_0^\pi \left[h \ln \frac{h}{b \sin \frac{\varphi}{2}} - h + 2b \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \varphi d\varphi$$

и окончательно

$$L = 4\pi^2 b^2 n^2 \left[h - \frac{8}{3\pi} b \right].$$

7. Определить, во сколько раз изменится самоиндукция плоского линейного контура, если поместить его на плоскую поверхность полубесконечной среды с магнитной проницаемостью μ_e . Внутренней частью самоиндукции провода пренебрегаем.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что в отсутствие среды магнитное поле тока симметрично относительно плоскости контура, а магнитные силовые линии пересекают эту плоскость нормально к ней; назовем это поле H_0 . Мы удовлетворим уравнениям поля и граничным условиям по поверхности полубесконечной среды, если положим в пустом полупространстве $H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$, а в среде $B = \mu_e H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$. Действительно, этим обеспечивается непрерывность B_n и H_t на граничной плоскости, а циркуляция H по любой силовой линии будет равна циркуляции H_0 по тому же пути. Отсюда легко заключить, что при введении среды полная энергия поля, а следовательно, и самоиндукция контура, умножается на

$$\frac{2\mu_e}{\mu_e + 1}.$$

§ 34. Силы в магнитном поле

Для определения сил, действующих на вещество в магнитном поле, нам почти не понадобится производить новых вычислений ввиду полной аналогии с электрическим случаем. Аналогия связана, прежде всего, с тем, что выражения для термодинамических величин в магнитном поле отличаются от выражений в электрическом поле лишь заменой букв E, D соответственно на H, B . При вычислении тензора напряжений в § 15 была использована потенциальность электрического поля, являющаяся следствием уравнения $\text{rot } E = 0$. Магнитное же поле удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j, \quad (34,1)$$

сводящемуся к $\text{rot } H = 0$ лишь в отсутствие токов проводимости. Но при вычислении тензора напряжений вообще следует всегда полагать $j = 0$. Поскольку j связано с производными от магнитного поля, то учет токов при вычислении напряжений означал бы введение в тензор напряжений σ_{ik} исчезающе малых поправок, связанных с неоднородностью поля (ср. примечание на стр. 92).

Таким образом, все полученные в §§ 15 и 16 формулы для тензора напряжений непосредственно переносятся на магнитное поле.

Так, в жидкой среде при линейной связи $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ имеем

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T) \delta_{ik} - \frac{H^2}{8\pi} \left[\mu - \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \quad (34,2)$$

Объемные силы вычисляются отсюда согласно $f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$. Если среда является проводящей и в ней течет ток, то вычисление отличается от произведенного в § 15 тем, что вместо уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ имеем уравнение (34,1).

Дифференцируя (34,2) и учитывая при этом равенство $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } (\mu \mathbf{H}) = 0$, находим

$$\mathbf{f} = -\nabla p_0 + \frac{1}{8\pi} \nabla \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu - \frac{\mu}{8\pi} \nabla H^2 + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}.$$

Но, согласно известной формуле векторного анализа,

$$(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{grad } H^2 - [\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}] = \frac{1}{2} \text{grad } H^2 + \frac{4\pi}{c} [\mathbf{jH}],$$

и окончательно

$$\mathbf{f} = -\nabla p_0 + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu + \frac{\mu}{c} [\mathbf{jH}]. \quad (34,3)$$

По сравнению с аналогичной формулой (15,12) здесь добавляется еще один (последний) член. Было бы, однако, неправильным думать, что появление этого члена означает физическую возможность отделить в \mathbf{f} силу, связанную с током проводимости, от других эффектов. Дело в том, что в силу уравнения (34,1) ток \mathbf{j} не отделим от неоднородности поля, а производные от поля по координатам входят и в другие члены в (34,3). При заметно отличной от 1 магнитной проницаемости вещества все члены в (34,3), вообще говоря, одинакового порядка величины.

Но если, как это обычно бывает, μ близко к 1, то при наличии тока проводимости последний член в (34,3) дает основной вклад в силу, по сравнению с которым остальные члены являются лишь несущественной малой поправкой. Тогда при вычислении сил можно полагать $\mu = 1$ и мы имеем просто

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}] \quad (34,4)$$

(член $-\nabla p_0$ здесь и ниже нас не интересует, и мы его опускаем). При $\mu = 1$ свойства вещества вообще никак не отражаются на магнитных явлениях и выражение (34,4) для силы в равной степени относится как к жидким, так и твердым проводникам. Полная сила, действующая в магнитном поле на проводник с током, дается интегралом

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{jH}] dV. \quad (34,5)$$

Формулу (34,4) можно, разумеется, весьма просто получить и непосредственно на основании известного выражения лоренцовой силы. Макроскопическая сила, действующая в магнитном поле на неподвижное тело, есть не что иное, как усредненное значение лоренцовых сил, действующих на составляющие тело заряженные частицы со стороны микроскопического поля \mathbf{h} :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \overline{[\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]}.$$

Но при $\mu = 1$ поле \mathbf{h} совпадает со средним полем \mathbf{H} , а среднее значение $\rho \mathbf{v}$ совпадает с плотностью тока проводимости.

При движении проводника силы (34,4) производят над ним некоторую механическую работу. На первый взгляд может показаться, что здесь имеется противоречие с тем, что лоренцовы силы не производят над движущимися зарядами никакой работы. В действительности, конечно, никакого противоречия нет, так как в движущемся проводнике в работу лоренцовых сил входит не только механическая работа, но и работа электродвижущих сил, индуцированных в проводнике при его движении. Эти две работы равны по величине и противоположны по знаку (см. примечание на стр. 262).

В выражении (34,4) \mathbf{H} есть истинное значение магнитного поля, создаваемого как посторонними источниками, так и самими токами, на которые эта сила действует. Однако при вычислении полной силы согласно (34,5) можно понимать под \mathbf{H} лишь внешнее поле \mathfrak{H} , в которое вносится проводник с током. Собственное поле, производимое данным проводником, в силу закона сохранения импульса не может дать вклад в действующую на него самого полную силу.

Вычисление сил в особенности просто для линейного проводника. Магнитные свойства его вещества вообще несущественны, а если в среде $\mu = 1$, то полная действующая на него сила дается линейным интегралом

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{l} \mathfrak{H}]. \quad (34,6)$$

Это выражение можно представить и в виде интеграла по поверхности, охватываемой контуром тока. Заменяя согласно теореме Стокса $d\mathbf{l}$ оператором $[d\mathbf{f} \nabla]$, получим

$$\oint [d\mathbf{l} \mathfrak{H}] = \int [[d\mathbf{f} \nabla] \mathfrak{H}].$$

Далее пишем:

$$\begin{aligned} [[d\mathbf{f} \nabla] \mathfrak{H}] &= -d\mathbf{f} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \nabla (d\mathbf{f} \mathfrak{H}) = \\ &= -d\mathbf{f} \operatorname{div} \mathfrak{H} + [d\mathbf{f} \operatorname{rot} \mathfrak{H}] + (d\mathbf{f} \nabla) \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Но $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, а в пространстве вне токов также и $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \int (d\mathbf{f} \nabla) \mathfrak{H}. \quad (34,7)$$

В частности, в квазиоднородном внешнем поле можно вынести \mathfrak{H} вместе с оператором ∇ из-под знака интеграла. Вводя также магнитный момент тока согласно (29,18), мы приходим тогда к естественному результату:

$$F = (cM\nabla)\mathfrak{H}. \quad (34,8)$$

Поскольку M в этой формуле есть постоянная величина, то можно написать F также и в виде

$$F = \text{grad}(cM\mathfrak{H}) \quad (34,9)$$

(что находится в соответствии с выражением (32,17) для энергии тока). Момент же сил, действующих на ток в квазиоднородном поле, как легко убедиться, равен обычному выражению

$$K = [cM\mathfrak{H}]. \quad (34,10)$$

З а д а ч а

Определить силу, действующую на линейный прямой провод с током J , расположенный параллельно бесконечному круговому цилиндру (с магнитной проницаемостью μ) радиуса a , на расстоянии l от его оси.

Решение. Ввиду указанного на стр. 160 соответствия между плоскими задачами электро- и магнитостатики, поле тока определяется путем изменения обозначений в решении задачи 3 § 7. Поле в пространстве вокруг цилиндра совпадает с полем, которое создавалось бы в пустоте током J и токами $+J'$ и $-J'$, проходящими соответственно через точки A и O' (см. рис. 11), причем

$$J' = J \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Поле же внутри цилиндра совпадает с полем, которое создавалось бы током

$$J'' = J \frac{2}{\mu + 1},$$

проходящим через точку O . Сила, действующая на единицу длины проводника,

$$F = \frac{1}{c} JB = \frac{2JJ'}{c^2} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) = \frac{2J^2 a^2 (\mu - 1)}{b (b^2 - a^2) (\mu + 1) c^2}.$$

Аналогичным образом найдем (см. задачу 4 § 7), что линейный проводник, проходящий внутри цилиндрического отверстия в магнитной среде, притягивается к ближайшей части поверхности отверстия с силой

$$F = \frac{2J^2 b (\mu - 1)}{(a^2 - b^2) (\mu + 1) c^2}.$$

§ 35. Гиромагнитные явления

Возможности добиться намагничивания (неферромагнитных) тел без приложения внешнего магнитного поля весьма ограничены требованием инвариантности по отношению к изменению знака времени. Электрическая поляризация многих тел может быть, например, осуществлена без внешнего электрического поля путем деформирования

(пьезоэлектрики). «Пьезомагнетизм» же, если и существует вообще, то лишь как весьма редкое явление (см. конец § 28) и во всяком случае исключен в телах, не обладающих магнитной структурой.

Намагничение без внешнего магнитного поля требует, вообще говоря, приведения тела в движение. Равномерное поступательное движение не может, разумеется, ничего дать в силу принципа относительности Галилея. Равномерное же вращение приводит к появлению намагниченности, линейно зависящей от угловой скорости Ω (так называемый эффект Барнетта); такая связь между векторами M и Ω возможна, так как оба меняют знак при изменении знака времени. Поскольку же оба являются аксиальными векторами, то такая зависимость возможна и в изотропном теле (где она сводится к простой пропорциональности между M и Ω).

Наряду с этим эффектом должен существовать и обратный: свободно подвешенное тело при намагничении начинает вращаться (эффект Эйнштейна — де Хааса). Между обоими эффектами имеется простая термодинамическая связь. Ее можно получить следующим образом.

Как известно¹⁾, термодинамическим потенциалом по отношению к угловой скорости (при заданных температуре и объеме тела) является свободная энергия $\tilde{\mathcal{F}}'$ тела во вращающейся вместе с ним системе координат. При этом момент импульса тела L равен

$$L = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}'}{\partial \Omega}. \quad (35,1)$$

Гиромангнитные явления описываются введением в свободную энергию дополнительного выражения, представляющего собой первый член ее разложения по степеням Ω и намагниченности M в каждой точке тела, содержащего одновременно как Ω , так и M . Этот член линеен по Ω и по M , т. е. имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}'_{г. м.} = - \int \lambda_{ik} \Omega_i M_k dV = - \lambda_{ik} \Omega_i M_k, \quad (35,2)$$

где λ_{ik} — постоянный тензор, в общем случае не симметричный.

Согласно (35,1) и (35,2) момент импульса, приобретаемый телом в результате намагничения, связан с его полным магнитным моментом соотношением

$$(L_{г. м.})_i = \lambda_{ik} M_k.$$

Обычно пользуются вместо λ_{ik} обратным тензором, определенным согласно

$$g_{ik} = \frac{2mc}{e} \lambda_{ik}^{-1}$$

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд 3-е, § 26.

(e и m — заряд и масса электрона); безразмерные величины g_{ik} называют гиромагнитными коэффициентами. Тогда

$$\mathcal{M}_i = \frac{e}{2mc} g_{ik} (L_{г. м.})_k. \quad (35,3)$$

С другой стороны, выражение (35,2) показывает, что в отношении своего влияния на магнитные свойства вращение тела эквивалентно воздействию внешнего поля с напряженностью $\mathfrak{H}_i = \lambda_{ki} \Omega_k$ или

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2mc}{e} g_{ki}^{-1} \Omega_k. \quad (35,4)$$

Тем самым мы имеем принципиальную возможность вычислить вызываемое вращением намагничение. Так, если магнитная восприимчивость тела χ_{ik} мала, то приобретаемый им магнитный момент не зависит от его формы и равен

$$\mathcal{M}_i = \chi_{ik} \mathfrak{H}_k = \frac{2mc}{e} \chi_{ik} g_{ik}^{-1} \Omega_i.$$

Формулы (35,3) и (35,4) отвечают соответственно эффектам Эйнштейна — де Хааса и Барнетта. Мы видим, что оба эффекта определяются одним и тем же тензором g_{ik} .

ГЛАВА V

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

§ 36. Ферромагнетик вблизи точки Кюри

Между магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами сегнетоэлектриков имеется далеко идущая аналогия. Те и другие обладают, в макроскопических объемах, спонтанной поляризацией — магнитной или электрической. Исчезновение этой поляризации при изменении температуры в обоих случаях происходит в точке фазового перехода второго рода (точке Кюри).

В то же время между ферромагнитными и сегнетоэлектрическими явлениями имеются и существенные отличия, связанные с разницей в характере микроскопических сил взаимодействия, приводящих к установлению спонтанной поляризации. У сегнетоэлектриков взаимодействие молекул в кристаллической решетке существенно анизотропно, в результате чего вектор спонтанной поляризации относительно прочно связан с определенными направлениями в кристалле. В ферромагнетиках же возникновение спонтанной намагниченности связано в основном с обменным взаимодействием атомов, которое вообще не зависит от направления суммарного магнитного момента относительно решетки¹⁾. Правда, наряду с обменным существует также и непосредственное магнитное взаимодействие между атомными магнитными моментами. Это взаимодействие, однако, представляет собой эффект $\sim v^2/c^2$ (v — атомные скорости), поскольку сами магнитные моменты атомов содержат множители $1/c$. К этой категории относится и взаимодействие магнитных моментов атомов с электрическим полем кристаллической решетки. Все эти взаимодействия (которые можно назвать «релятивистскими» ввиду наличия в них множителя $1/c^2$) являются слабыми по сравнению с обменным

1) Обменное взаимодействие является, как известно, специфическим квантовым эффектом, возникающим в связи с той или иной симметрией волновых функций системы частиц по отношению к их перестановкам. Перестановочная симметрия волновых функций, а с нею и обменное взаимодействие, зависит только от полного спина системы, но не от его направления (см. «Квантовая механика», § 60). Роль обменного взаимодействия в ферромагнетиках была впервые отмечена *Я. И. Френкелем, Я. Г. Дорфманом и В. Гейзенбергом* (1928).

взаимодействием и, таким образом, могут привести лишь к сравнительно слабой зависимости энергии кристалла от направления намагниченности¹⁾.

Следовательно, намагниченность ферромагнетика является величиной, которая в первом приближении, т. е. по отношению к основному (обменному) взаимодействию, сохраняется. Это обстоятельство придает более глубокий физический смысл излагаемой ниже термодинамической теории, в которой намагниченность M рассматривается как независимая переменная, фактическое значение которой (как функции температуры, поля и т. д.) определяется затем соответствующими условиями теплового равновесия.

Обозначим посредством Φ_0 термодинамический потенциал единицы объема вещества при $H=0$, рассматриваемый как функция независимой переменной M (наряду с другими термодинамическими переменными). Будем пока пренебрегать релятивистскими взаимодействиями, т. е. учитывать лишь основное, обменное взаимодействие. Тогда Φ_0 может быть функцией лишь от абсолютной величины, но не от направления вектора M .

Для того чтобы найти термодинамические величины при отличном от нуля H , исходим из соотношения

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial H} = -\frac{1}{4\pi} B = -\frac{H + 4\pi M}{4\pi}.$$

Интегрируя его при заданном значении независимой переменной M (и учитывая, что при $H=0$ $\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0$), получим

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0(M) - MH - \frac{H^2}{8\pi}. \quad (36,1)$$

Для потенциала Φ имеем отсюда

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \frac{HB}{4\pi} = \Phi_0 + \frac{H^2}{8\pi} = \Phi_0 + \frac{1}{8\pi} (B - 4\pi M)^2. \quad (36,2)$$

При пренебрежении магнитной анизотропией ферромагнетика направления векторов M и H , разумеется, совпадают; поэтому в формулах (36,1) и (36,2) можно писать вместо векторов их абсолютные величины.

Вблизи точки Кюри намагниченность M мала. Следуя общей теории фазовых переходов второго рода²⁾, разложим $\Phi_0(M)$ в ряд

1) Порядок величины отношения релятивистских взаимодействий к обменному характеризуется отношением

$$\frac{U_{\text{ан}}}{N\Theta},$$

где $U_{\text{ан}}$ — так называемая энергия магнитной анизотропии единицы объема вещества (см. следующий параграф), N — число атомов в 1 см^3 , Θ — температура точки Кюри. Оно составляет обычно $10^{-4} \div 10^{-5}$.

2) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, гл. 14.

по степеням этой малой величины. Разложение изотропной функции по степеням векторной величины M может содержать лишь члены четных степеней:

$$\bar{\Phi} = \Phi_{00} + \frac{a}{2} M^2 + \frac{b}{4} M^4 - MH - \frac{H^2}{8\pi}, \quad (36,3)$$

где Φ_{00} , a , b — функции только температуры (и давления).

Точка Кюри $T = \Theta$ определяется обращением в нуль коэффициента a , причем $a > 0$ при $T > \Theta$ и $a < 0$ при $T < \Theta$ ¹⁾. Вблизи точки Кюри функцию $a(T)$ можно разложить по степеням разности $T - \Theta$, т. е. написать

$$a = \alpha(T - \Theta), \quad (36,4)$$

где α — не зависящая от температуры положительная величина. Коэффициент b вблизи точки Кюри положителен и может быть заменен своим значением при $T = \Theta$.

При $H = 0$ минимуму термодинамического потенциала выше точки Кюри, где $a > 0$, соответствует $M = 0$, т. е. спонтанная поляризация отсутствует. Ниже точки Кюри значение M определяется условием

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial M} = [\alpha(T - \Theta) + bM^2] M = 0.$$

Минимуму Φ соответствует обращение в нуль выражения в квадратных скобках, откуда

$$M = \sqrt{\frac{\alpha}{b}(\Theta - T)}. \quad (36,5)$$

Таким образом, при приближении к точке Кюри спонтанная намагниченность убывает пропорционально $\sqrt{\Theta - T}$.

Как и всякий фазовый переход второго рода, переход в точке Кюри (при $H = 0$) сопровождается скачком теплоемкости. Пренебрегая высшими степенями M , имеем для энтропии:

$$S = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial T} = S_{00} - \frac{M^2}{2} \frac{\partial a}{\partial T} = S_{00} - \frac{\alpha M^2}{2}.$$

В неферромагнитной фазе $M = 0$ и $S = S_{00}$, а в ферромагнитной фазе M дается формулой (36,5), так что

$$S = S_{00} + \frac{\alpha^2}{2b}(T - \Theta).$$

Отсюда для скачка теплоемкости $C_p = T \frac{\partial S}{\partial T}$ находим

$$\Delta C_p = \frac{\alpha^2 \Theta}{2b}. \quad (36,6)$$

¹⁾ Такое температурное расположение фаз имеет место во всех известных ферромагнетиках, хотя и не является термодинамически обязательным.

Пусть теперь $H \neq 0$. Условие $\partial\bar{\Phi}/\partial M = 0$, определяющее намагниченность, гласит:

$$\alpha(T - \Theta)M + bM^3 = H. \quad (36,7)$$

Определим магнитную восприимчивость как

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H \rightarrow 0}.$$

Из (36,7) имеем

$$\frac{\partial M}{\partial H} [\alpha(T - \Theta) + 3bM^2] = 1.$$

Выше точки Кюри $M = 0$ при $H = 0$, так что

$$\chi = \frac{1}{\alpha(T - \Theta)}, \quad (36,8)$$

т. е. имеет место парамагнетизм с восприимчивостью, обратно пропорциональной $T - \Theta$ (так называемый закон Кюри — Вейсса).

Ниже точки Кюри M при $H = 0$ дается формулой (36,5), и мы получаем

$$\chi = \frac{1}{2\alpha(\Theta - T)}. \quad (36,9)$$

Следует помнить, что эта величина не является здесь восприимчивостью в обычном смысле слова (т. е. коэффициентом пропорциональности между M и H), так как $M \neq 0$ и при $H = 0$ ¹⁾.

Фактически восприимчивость (36,9) может достигать значений порядка единицы лишь в самой непосредственной близости к точке Кюри. Отвлекаясь от этой малоинтересной области, мы можем считать, что намагниченность M лишь весьма слабо меняется под влиянием магнитного поля и может рассматриваться при заданной температуре как постоянная величина, что и будет предполагаться в следующих параграфах.

И в этом отношении имеется различие между ферромагнетиками и сегнетоэлектриками, у которых $\partial P/\partial E$, вообще говоря, не мало даже вдали от точки Кюри. Причина его снова лежит в малости атомных магнитных моментов по сравнению с электрическими дипольными моментами молекул.

¹⁾ В количественном отношении формулы (36,8), (36,9) в области, где $\chi \gg 1$, справедливы лишь для кристаллов кубической системы. Для одноосных кристаллов требовался бы учет также и так называемой энергии анизотропии (см. § 37), которая в этом случае пропорциональна M^2 и при очень малых значениях M сравнивается и даже превосходит член $aM^2/2$ в (36,3).

§ 37. Энергия магнитной анизотропии

Как уже было указано, анизотропия магнитных свойств ферромагнетика связана со сравнительно слабыми релятивистскими взаимодействиями между его атомами. В макроскопической теории эта анизотропия описывается путем введения в термодинамический потенциал соответствующих членов — так называемой энергии магнитной анизотропии, зависящей от направления намагничивания.

Вычисление энергии анизотропии, исходя из микроскопической теории, требовало бы применения квантовомеханической теории возмущений, в которой роль возмущающей энергии играют члены в гамильтониане кристалла, описывающие релятивистские взаимодействия. Но общий вид искомых выражений может быть установлен и без проведения этих вычислений, на основании простых соображений симметрии.

Гамильтониан релятивистских взаимодействий содержит члены определенных степеней по операторам векторов спина электронов — первой и второй (так называемые «спин-орбитальное» и «спин-спиновое» взаимодействия). Поэтому при применении теории возмущений энергия анизотропии автоматически получается в виде разложения по степеням направляющих косинусов вектора намагниченности. С другой стороны, энергия анизотропии $U_{ан}$, как и сам потенциал Φ , инвариантна по отношению к изменению знака времени, между тем как намагниченность \mathbf{M} при этом преобразовании меняет знак. Отсюда следует, что энергия анизотропии должна быть четной функцией направляющих косинусов вектора \mathbf{M} . Поэтому в первом неисчезающем приближении теории возмущений мы получим выражение вида

$$U_{ан} = \frac{\beta_{ik}}{2} M_i M_k, \quad (37,1)$$

где β_{ik} — безразмерный симметричный тензор второго ранга, компоненты которого являются функциями температуры. Вблизи точки Кюри выражение (37,1) можно рассматривать и как первый член разложения энергии анизотропии по степеням вектора \mathbf{M} , являющегося в этой области температур малой величиной (подчеркнем, однако, что такая точка зрения при других температурах была бы неправильной). Отсюда следует, что при $T \rightarrow \Theta$ величины β_{ik} стремятся к конечным, отличным от нуля значениям.

В одно- и двухосных кристаллах симметричный тензор второго ранга имеет соответственно две и три независимые компоненты. Однако в данном случае надо еще иметь в виду, что одна квадратичная комбинация, именно $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$, не зависит от направления вектора \mathbf{M} и потому может быть исключена из энергии анизотропии. Следовательно, выражение (37,1) для одно- и двухос-

ных кристаллов содержит соответственно всего один или два независимых коэффициента.

Так, для одноосных кристаллов энергию анизотропии можно написать в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{\beta}{2} (M_x^2 + M_y^2) = \frac{\beta}{2} M^2 \sin^2 \theta, \quad (37,2)$$

где θ — угол между \mathbf{M} и осью z , выбранной вдоль главной оси симметрии кристалла. Если постоянная β положительна, то энергия анизотропии минимальна при намагничении вдоль оси z ; эта ось будет, как говорят, направлением легкого намагничения.

Если же $\beta < 0$, то направление легкого намагничения будет лежать в плоскости $xу$; в этом случае естественно писать энергию анизотропии в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{|\beta|}{2} M_z^2, \quad (37,3)$$

эквивалентном (37,2) но в котором направлению легчайшего намагничения снова соответствует $U_{\text{ан}} = 0$ ¹⁾. Выражение (37,3) изотропно в плоскости $xу$. Поэтому направление легкого намагничения определяется в этом случае членами более высокого порядка (см. задачу 1 к этому параграфу).

Рассмотрим связь между намагниченностью одноосного ферромагнетика и магнитным полем в нем, предполагая при этом, для определенности, что $\beta > 0$ ²⁾. Напомним, что абсолютную величину \mathbf{M} мы считаем не зависящей от \mathbf{H} , так что идет речь только о поворотах этого вектора. Из соображений симметрии очевидно, что вектор \mathbf{M} будет лежать в плоскости, проходящей через ось z и направление \mathbf{H} (постольку, поскольку в энергии анизотропии не учитываются члены высших порядков, анизотропные в плоскости $xу$); выберем эту плоскость в качестве плоскости x, z . Термодинамический потенциал с учетом энергии анизотропии равен ³⁾

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi_0(M) + \frac{\beta}{2} M_x^2 - \mathbf{HM} - \frac{H^2}{8\pi} = \\ &= \Phi_0(M) + \frac{\beta M^2}{2} \sin^2 \theta - M(H_x \sin \theta + H_z \cos \theta) - \frac{H^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (37,4)$$

¹⁾ Примером одноосного ферромагнетика является гексагональный кобальт. У него β меняет знак при температуре $\sim 200^\circ \text{C}$, причем $\beta > 0$ и $\beta < 0$ соответственно ниже и выше этой точки. При комнатной температуре $\beta = 4,2$.

²⁾ Мы будем иметь в виду именно этот случай и везде ниже, где речь будет идти об одноосных кристаллах.

³⁾ В излагаемом ниже исследовании мы используем для энергии анизотропии выражение (37,2). Следует указать, однако, что разложение, первым членом которого является (37,2), в реальных случаях обычно обладает довольно плохой сходимостью. Поэтому для удовлетворительного количественного описания явлений приходится учитывать еще и член следующего (четвертого) порядка (для гексагонального кристалла он пропорционален $\sin^4 \theta$).

Зависимость M от H определяется условием равновесия $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta = 0$, откуда

$$\beta M \sin \theta \cos \theta = H_x \cos \theta - H_z \sin \theta. \quad (37,5)$$

По отношению к неизвестной $\xi = \sin \theta$ это есть алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(\beta M \xi - H_x)^2 (1 - \xi^2) = H_z^2 \xi^2$$

с отличными от нуля коэффициентами при нечетных степенях ξ . Это уравнение имеет либо два, либо четыре вещественных корня (причем все они < 1). Поскольку все эти корни соответствуют экстремумам функции $\tilde{\Phi}(\theta)$, то ясно, что в первом случае эта функция имеет один минимум и один максимум, а во втором — два минимума и два максимума. Другими словами, в первом случае заданному значению поля H соответствует одно направление намагничивания. Во втором же случае при заданном H возможны два различных направления M , из которых одно (соответствующее меньшему из минимумов $\tilde{\Phi}$) термодинамически вполне устойчиво, а второе (соответствующее большему из минимумов $\tilde{\Phi}$) термодинамически метастабильно.

Тот или другой случай имеет место в зависимости от значений H_x и H_z . При постепенном изменении этих параметров один случай переходит в другой в момент, когда один из максимумов сливается с одним из минимумов. При этом кривая $\tilde{\Phi}(\theta)$ имеет вместо экстремума точку перегиба, т. е. вместе с $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta$ обращается в нуль также и вторая производная $\partial^2\tilde{\Phi}/\partial\theta^2$. Написав уравнение (37,5) в виде

$$\frac{H_x}{\sin \theta} - \frac{H_z}{\cos \theta} = \beta M$$

и продифференцировав его еще раз по θ , получим

$$\frac{H_x}{\sin^3 \theta} = - \frac{H_z}{\cos^3 \theta}.$$

Исключив θ из этих двух уравнений, получим

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \quad (37,6)$$

На диаграмме H_x, H_z уравнение (37,6) определяет замкнутую кривую вида, изображенного на рис. 20. Она делит плоскость H_x, H_z на две части, из которых в одной возможно, а в другой невозможно существование метастабильных состояний. Уже без дополнительного исследования очевидно, что область отсутствия метастабильных состояний является область, внешняя по отношению к кривой. Это ясно из того, что при $H \rightarrow \infty$ устойчивым может быть только одно направление M вдоль поля H .

Наличие метастабильных состояний приводит к возможности существования так называемых гистерезисных явлений, про-

являющихся в необратимом изменении состояния ферромагнитного тела при изменении внешнего магнитного поля. Поэтому изображенная на рис. 20 кривая представляет собой «абсолютную границу» гистерезиса; при значениях поля, лежащих вне этой кривой, гистерезис во всяком случае невозможен¹⁾.

Особого рассмотрения требуют состояния, в которых напряженность H перпендикулярна к оси легкого намагничения ($H_x = H$, $H_z = 0$). Термодинамический потенциал

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{\beta M^2}{2} \sin^2 \theta - HM \sin \theta. \quad (37,7)$$

Если $H > \beta M$, то $\tilde{\Phi}$ имеет лишь один минимум — при $\theta = \pi/2$, т. е. намагниченность направлена вдоль поля. Если же $H < \beta M$, то $\tilde{\Phi}$ имеет минимум при

$$M_x = M \sin \theta = H/\beta, \quad (37,8)$$

чему соответствуют два возможных расположения вектора M (под углами θ и $\pi - \theta$), симметричные относительно оси x . Таким образом, в этом случае имеются два равновесных состояния, причем с одинаковыми значениями $\tilde{\Phi}$ и потому в равной степени устойчивые.

Это обстоятельство весьма существенно, так как приводит к возможности существования двух соприкасающихся «фаз», в которых напряженность H одинакова, а намагниченность M (а потому и индукция B) различна. В результате появляется новая возможность для уменьшения полного термодинамического потенциала тела: его объем можно разбить на ряд отдельных

областей, в каждой из которых намагниченность имеет одно из своих двух допустимых направлений; эти области называют областями спонтанной намагниченности или доменами. Фактическое определение термодинамически равновесной структуры ферромагнетика требует рассмотрения тела в целом, с учетом его конкретной формы и размеров; мы вернемся еще к этому вопросу в § 39.

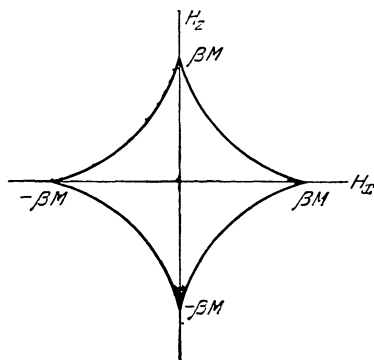


Рис. 20.

¹⁾ Во всем изложении в этой главе мы ограничиваемся рассмотрением только термодинамически равновесных состояний ферромагнетиков и, соответственно, обратимых процессов в них. В частности, мы совершенно не касаемся механизма гистерезисных явлений, которые могут быть связаны с дефектами кристалла, внутренними напряжениями в образце, поликристаллическостью и т. п. причинами.

Рассмотрим участок тела, малый по сравнению с его полным объемом, но большой по сравнению с размерами доменов. Напряженность H_x можно считать постоянной вдоль всего этого участка, а посредством \bar{M} и \bar{B} обозначим значения M и B , усредненные по его объему. Вместе с H_x постоянна и поперечная составляющая $M_x = H_x/\beta$ намагниченности. Продольная же составляющая M_z в различных доменах отличается знаком, так что ее среднее значение во всяком случае не превосходит $|M_z|$. Учитывая также, что везде $H_z = 0$, имеем для средней индукции:

$$\bar{B}_x = H_x \left(1 + \frac{4\pi}{\beta}\right), \quad \bar{B}_z < 4\pi \sqrt{M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}}. \quad (37,9)$$

Этими формулами определяется область значений средней индукции, соответствующая доменной структуре одноосного ферромагнетика.

Перейдем к ферромагнитным кристаллам кубической системы. Их свойства существенно отличаются от свойств одноосных и (двухосных) кристаллов. Дело в том, что единственной комбинацией второго порядка, инвариантной по отношению к преобразованиям кубической симметрии, которую можно составить из компонент вектора M , является сумма $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$, не зависящая от направления M . Поэтому первым не исчезающим членом в разложении энергии анизотропии у кубического кристалла является член не второго, а четвертого порядка. В связи с этим эффекты магнитной анизотропии у кубических кристаллов, вообще говоря, слабее, чем в одно- и двухосных кристаллах.

Кубическая симметрия допускает два инварианта четвертого порядка, составленных из компонент вектора M :

$$(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2) \text{ и } \frac{1}{2}(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4).$$

Эти инварианты, однако, не являются в данном случае независимыми, так как их сумма есть не зависящая от направления величина $\frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^2$. Поэтому энергия анизотропии кубического ферромагнетика содержит (в рассматриваемом приближении ¹⁾) всего одну постоянную и может быть написана как

$$U_{\text{ан}} = \beta (M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2) \quad (37,10)$$

¹⁾ Следующему приближению отвечают члены шестого порядка. При подсчете числа независимых инвариантов шестой степени должны быть исключены как не зависящая от направления величина M^6 , так и выражения, отличающиеся от инвариантов четвертого порядка лишь множителем M^2 . В результате остается всего один инвариант, в качестве которого можно выбрать $M_x^2 M_y^2 M_z^2$.

или в эквивалентном виде

$$U_{\text{ан}} = -\frac{\beta}{2} (M_x^4 + M_y^4 + M_z^4). \quad (37,11)$$

При $\beta > 0$ ¹⁾ энергия анизотропии достигает одинаковых по величине минимальных значений при трех расположениях вектора \mathbf{M} — параллельно трем ребрам куба (оси x , y , z ; кристаллографические направления [100], [010], [001]). Таким образом, в этом случае кристалл имеет три эквивалентные оси легкого намагничения.

Если же $\beta < 0$ ²⁾, то энергия анизотропии минимальна при $M_x^2 = M_y^2 = M_z^2 = 1/3 M^2$, т. е. когда вектор \mathbf{M} направлен вдоль какой-либо из четырех пространственных диагоналей куба (кристаллографические направления [111], [$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$] и т. д.). Они и являются в этом случае направлениями легкого намагничения.

Следует отметить, что ферромагнитный кубический кристалл, спонтанно намагниченный вдоль какой-либо из своих осей легкого намагничения, теряет, строго говоря, кубическую симметрию (в связи с чем происходит и соответствующее смещение атомов, т. е. искажение кристаллической решетки). Кристалл, намагниченный вдоль направления ребра куба, становится слабо тетрагональным, а при намагничении вдоль пространственной диагонали куба — ромбоэдрическим. В этом отношении кубические кристаллы отличаются от одноосных кристаллов с направлением легкого намагничения вдоль главной оси симметрии; очевидно, что намагничение в этом направлении не меняет симметрии кристалла.

Исследование зависимости \mathbf{M} от \mathbf{H} для кубического кристалла может быть в принципе произведено аналогично тому, как это было сделано выше для одноосного кристалла. Однако, ввиду большей сложности уравнений, получение явных аналитических формул оказывается здесь невозможным, и мы не будем больше останавливаться на этом вопросе.

Задачи

1. Написать члены следующего (после второго) порядка в разложении $U_{\text{ан}}$ одноосного кристалла, приводящие к анизотропии в плоскости xy .

Решение. Задача сводится к отысканию независимых комбинаций наиболее низкой (четной) степени, составленных из компонент вектора \mathbf{M} , инвариантных по отношению к преобразованиям симметрии данного кристалла и содержащих M_x и M_y не в виде суммы $M_x^2 + M_y^2$. При тетрагональной симметрии имеется одна такая комбинация, в качестве которой можно выбрать

$$M_x^2 M_y^2$$

1) Этот случай имеет место, например, у железа.

2) Например, у никеля.

(комбинация $1/2 (M_x^4 + M_y^4)$ вместе с указанной дает в сумме $1/2 (M_x^2 + M_y^2)^2$ и потому не является независимой).

При гексагональной симметрии анизотропия в плоскости $xу$ появляется лишь в членах шестого порядка; в качестве независимой инвариантной комбинации этого порядка можно выбрать

$$\frac{1}{6i} [(M_x + iM_y)^6 - (M_x - iM_y)^6] = 2M_x M_y \left(M_x^4 - \frac{10}{3} M_x^2 M_y^2 + M_y^4 \right).$$

Ромбоздрическая симметрия допускает такой же член шестого порядка, а также одну независимую комбинацию четвертого порядка, например

$$\frac{M_z}{2} [(M_x + iM_y)^3 + (M_x - iM_y)^3] = M_x M_z (M_x^2 - 3M_y^2).$$

Однако определение направления легкого намагничивания в плоскости $xу$ требует (ввиду малости M_z) одновременного учета членов как четвертого, так и шестого порядков.

2. Одноосный ферромагнитный кристалл имеет форму эллипсоида вращения (причем ось легкого намагничивания совпадает с осью вращения) и помещен во внешнее магнитное поле \mathfrak{H} . Определить область значений \mathfrak{H} , при которых тело будет обладать доменной структурой.

Решение. Согласно общим свойствам эллипсоидальных тел в однородном внешнем поле (§ 8), усредненные по доменной структуре индукция \bar{B} и напряженность $\bar{H} = H$ связаны с \mathfrak{H} соотношением

$$n\bar{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{H}_z, \quad \frac{1-n}{2}\bar{B}_x + \frac{1+n}{2}H_x = \mathfrak{H}_x,$$

где n — коэффициент размагничивания вдоль главной оси эллипсоида (ось z). Положив $H_z = 0$ и используя формулы (37,9), получим

$$H_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{1 + 2\pi(1-n)/\beta}, \quad \bar{B}_z = \frac{\mathfrak{H}_z}{n} < 4\pi \sqrt{M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}}.$$

Исключив отсюда H_x , найдем искомое неравенство

$$\frac{\mathfrak{H}_z^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{H}_x^2}{[\beta + 2\pi(1-n)]^2} < M^2,$$

определяющее область существования доменной структуры.

3. Для поликристаллического тела в сильном ($H \gg 4\pi M$) магнитном поле определить усредненную по кристаллитам намагниченность; кристаллиты обладают одноосной симметрией.

Решение. Пусть в пределах одного кристаллита θ и ψ — углы между его направлением легкого намагничивания и соответственно векторами M и H . Заранее очевидно, что в сильном поле направление M будет близким к направлению H , т. е. угол $\vartheta = \theta - \psi$ мал. Написав в (37,4) $MH = MH \cos(\theta - \psi)$ и приравняв нулю производную $d\Phi/d\theta$, получим

$$\vartheta \cong \sin \vartheta = -\frac{\beta M}{H} \sin \theta \cos \theta.$$

Средняя намагниченность направлена, очевидно, вдоль H и равна:

$$\bar{M} = M \overline{\cos \vartheta} = M \left[1 - \frac{1}{2} \overline{\vartheta^2} \right] = M \left[1 - \frac{\beta^2 M^2}{2H^2} \overline{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right],$$

где черта означает усреднение по кристаллитам. Предполагая все направления оси легкого намагничивания кристаллитов равновероятными, получим

$$\bar{M} = M \left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{15 H^2} \right).$$

Таким образом, средняя намагниченность приближается к насыщению по закону $\bar{M} - M \sim 1/H^2$.

4. То же при кубической симметрии кристаллитов.

Решение. Условия минимальности выражения

$$- \frac{\beta}{2} (M_x^4 + M_y^4 + M_z^4) - (H_x M_x + H_y M_y + H_z M_z)$$

при дополнительном условии $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \text{const}$ гласят:

$$2\beta M_x^3 + H_x = \lambda M_x,$$

$$2\beta M_y^3 + H_y = \lambda M_y,$$

$$2\beta M_z^3 + H_z = \lambda M_z,$$

где λ — лагранжев неопределенный множитель. При большом H имеем отсюда

$$M_x \cong \frac{1}{\lambda} H_x + \frac{2\beta}{\lambda^4} H_x^3 + \dots,$$

а складывая квадраты этих равенств, найдем $M^2 \cong H^2/\lambda^2$, т. е. $\lambda \cong H/M$. Угол ϑ между M и H находим как

$$\vartheta^2 \cong \sin^2 \vartheta = \frac{[MH]^2}{M^2 H^2} = \frac{4\beta^2 M^6}{H^{10}} \sum H_x^2 H_y^2 (H_x^2 - H_y^2)^2,$$

где суммирование производится по циклическим перестановкам индексов x, y, z . Усреднение этого выражения по ориентациям кристаллитов эквивалентно усреднению по направлениям вектора H . Последнее производится путем интегрирования по сферическим углам, определяющим направление H , и в результате получается¹⁾:

$$\bar{M} = M \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) = M \left(1 - \frac{8\beta^2 M^6}{105 H^2} \right).$$

§ 38. Магнитострикция ферромагнетиков

Изменение намагниченности ферромагнетика в магнитном поле приводит к его деформированию (магнитострикция). Это явление может быть связано как с обменными, так и с релятивистскими

¹⁾ Для кубического кристалла существует также область полей, в которой MH велико по сравнению с энергией анизотропии, но мало по сравнению с $4\pi M^2$. Полученная формула здесь не применима, так как при ее выводе не учитывались поля, которые появляются в теле в результате различия направлений намагниченности в разных кристаллитах. Более точное исследование приводит в этом случае тоже к закону $1/H^2$, но с другим коэффициентом. Мы не рассматриваем этот вопрос подробнее, так как эти результаты расходятся, по неясным в настоящее время причинам, с опытными данными.

взаимодействиями в теле. Поскольку обменная энергия зависит лишь от абсолютной величины намагниченности, то и ее изменение может быть связано лишь с изменением величины M в магнитном поле. Хотя последнее, вообще говоря, относительно весьма мало, но, с другой стороны, сама обменная энергия велика по сравнению с энергией анизотропии. Поэтому эффекты магнитострикции, связанные с обоими видами взаимодействий, могут оказаться сравнимыми.

Такое положение имеет место в одноосных кристаллах. Заметные деформации, возникающие от изменения направления M , имеют место в полях $H \sim \beta M$; изменение же величины M становится существенным при полях $H \sim 4\pi M$. Обе эти области практически совпадают, и потому при рассмотрении магнитострикции одноосных ферромагнетиков необходимо, вообще говоря, учитывать оба эффекта вместе. Мы не станем останавливаться здесь на получении соответствующих, довольно сложных формул.

В кубических кристаллах положение иное в связи с относительной малостью энергии анизотропии (как величины четвертого порядка). Существенная магнитострикция, связанная с изменением направления M , имеет место уже в сравнительно слабых полях, в которых изменением абсолютной величины M можно еще полностью пренебречь. Рассмотрим эти эффекты.

Изменение энергии релятивистских взаимодействий в деформированном теле описывается введением в термодинамический потенциал $\tilde{\Phi}$ дополнительных «магнитоупругих» членов, зависящих от компонент тензора упругих напряжений σ_{ik} и от направления вектора M (Н. С. Акулов, 1928). Первые не исчезающие члены такого рода линейны по σ_{ik} и квадратичны по направляющим косинусам вектора M (последнее — снова в силу симметрии по отношению к изменению знака времени). В общем случае имеем, следовательно, для магнитоупругой энергии выражение вида

$$U_{\text{м. у.}} = -\lambda_{iklm} \sigma_{ik} M_l M_m, \quad (38,1)$$

где λ_{iklm} — тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов i, k и l, m (но не по отношению к перестановке пары i, k с парой l, m). Вблизи точки Кюри, где разложение по степеням направляющих косинусов вектора M эквивалентно разложению по степеням его компонент, величины λ_{iklm} стремятся к постоянным пределам.

При подсчете числа независимых компонент тензора λ_{iklm} следует иметь в виду, что члены в (38,1), содержащие компоненты M в комбинации $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ не зависят от направления M и потому могут быть исключены из магнитоупругой энергии¹⁾. Имея это

1) Возникающий в связи с этим некоторый произвол в выборе λ_{iklm} выражает собой просто условность выбора направления M , при котором (в отсутствие приложенных извне механических сил) мы считаем кристалл недеформированным.

в виду, найдем, что у кубического кристалла магнитоупругая энергия содержит два независимых коэффициента; ее удобно писать в виде

$$U_{м. у.} = -\lambda_1 (\sigma_{xx} M_x^2 + \sigma_{yy} M_y^2 + \sigma_{zz} M_z^2) - 2\lambda_2 (\sigma_{xy} M_x M_y + \sigma_{xz} M_x M_z + \sigma_{yz} M_y M_z). \quad (38,2)$$

Тензор деформации получается дифференцированием $\tilde{\Phi}$ по соответствующим компонентам σ_{ik} :

$$u_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma_{ik}},$$

причем в $\tilde{\Phi}$ надо включить (с обратным знаком; см. примечание на стр. 104) также и обычную упругую энергию. У кубического кристалла последняя содержит три независимых упругих коэффициента и имеет вид

$$U_{уп} = \frac{k_1}{2} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + k_2 (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + k_3 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2). \quad (38,3)$$

Для тензора деформации получаем ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= k_1 \sigma_{xx} + k_2 (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \lambda_1 M_x^2, \\ u_{xy} &= k_3 \sigma_{xy} + \lambda_2 M_x M_y \end{aligned} \right\} \quad (38,4)$$

(и аналогично для остальных компонент).

Эти формулы содержат в себе все магнитострикционные эффекты (в рассматриваемой области полей). В частности, в отсутствие внутренних напряжений формулы

$$u_{xx} = \lambda_1 M_x^2, \quad u_{xy} = \lambda_2 M_x M_y, \quad \dots$$

определяют изменение деформации при изменении направления намагниченности. Напомним, что абсолютная величина деформации в известном смысле условна ввиду условности выбора того направления M , для которого деформация принимается отсутствующей.

Поскольку у кубических кристаллов энергия анизотропии мала, то возникает вопрос о том, не надо ли всегда учитывать одновременно с ней также и магнитострикцию (например, при определении зависимости намагниченности от поля), что привело бы к существенному усложнению задач. В действительности это не так: энергия анизотропии все же велика по сравнению с магнитоупругой энергией деформаций, возникающих при изменении намагниченности. Энергия анизотропии есть эффект второго порядка теории возмущений по спин-спиновому взаимодействию и как таковая—порядка

¹⁾ При дифференцировании Φ надо иметь в виду замечание, сделанное на стр. 106.

величины квадрата энергии этих взаимодействий, деленного на обменную энергию (все величины отнесены к 1 см^3). Магнитоупругая же энергия — порядка величины того же квадрата, но деленного на бóльшую величину (упругие модули кристалла).

Рассмотрим теперь магнитострикцию магнетика в таких сильных полях ($H \gg 4\pi M$), при которых несущественна энергия анизотропии и доменная структура уже отсутствует, так что направление \mathbf{M} можно считать совпадающим с направлением \mathbf{H} .

Ввиду пренебрежения энергией анизотропии конкретная симметрия кристалла становится несущественной, так что следующие ниже формулы в равной мере применимы к любому ферромагнетику.

Пусть тело находится в однородном внешнем магнитном поле \mathfrak{H} . Его полный термодинамический потенциал $\tilde{\mathcal{F}}$ ¹⁾ дается формулой

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{M}\mathfrak{H} = -MV\mathfrak{H}, \quad (38,5)$$

где $\mathcal{M} = MV$ — полный магнитный момент тела, однородно намагниченного в направлении, совпадающем с направлением поля; мы опустили здесь член \mathcal{P}_0 , не связанный с магнитным полем. Тензор деформации, усредненный по объему тела, определяется формулой

$$u_{ik} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \sigma_{ik}},$$

откуда

$$u_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V} \frac{\partial (VM)}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (38,6)$$

Таким образом, деформация определяется зависимостью намагниченности от внутренних напряжений.

При кубической симметрии кристалла всякий характеризующий его свойства симметрический тензор второго ранга сводится к скаляру, из которого он получается умножением на δ_{ik} . Это относится и к тензору $\partial(VM)/\partial\sigma_{ik}$, так что магнитострикционная деформация сводится в этом случае к всестороннему сжатию или растяжению.

Если мы интересуемся только изменением δV полного объема тела, то его можно получить просто дифференцированием $\tilde{\mathcal{F}}$ по давлению:

$$\delta V = \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial p} = -\mathfrak{H} \frac{\partial (MV)}{\partial p}, \quad (38,7)$$

где p надо понимать как равномерно приложенное к телу всестороннее давление.

¹⁾ Здесь подразумевается то определение \mathcal{P} , о котором шла речь в § 12. Им нельзя пользоваться лишь при наличии существенной неоднородности деформации тела.

ЗАДАЧА

Определить изменение объема при магнитострикции ферромагнитного эллипсоида во внешнем поле $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$, параллельном одной из его осей; ферромагнетик предполагается кубическим¹⁾.

Решение. При пренебрежении энергией анизотропии область существования доменной структуры определяется неравенством $\bar{B} < 4\pi M$ при $H = 0$ (черта означает усреднение по объему тела; ср. § 37). В эллипсоиде $n\bar{B} + (1-n)\bar{H} = \mathfrak{H}$, и, положив $H = 0$, найдем, что доменная структура существует при

$$\mathfrak{H} < 4\pi nM.$$

При этом $n\bar{B} = 4\pi n\bar{M} = \mathfrak{H}$, т. е. средняя намагниченность

$$\bar{M} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi n}.$$

Отсюда термодинамический потенциал

$$\tilde{\mathfrak{F}} = -V \int_0^{\mathfrak{H}} \bar{M} d\mathfrak{H} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n} V. \quad (1)$$

Если же $\mathfrak{H} > 4\pi nM$, то эллипсоид намагничен целиком вдоль поля: $\bar{M} = M$. При этом

$$\tilde{\mathfrak{F}} = -M\mathfrak{H}V + 2\pi M^2 Vn \quad (2)$$

(при $\mathfrak{H} = 4\pi nM$ выражения (1) и (2) совпадают).

Искомое изменение объема получается дифференцированием $\tilde{\mathfrak{F}}$ по давлению:

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n} \frac{\partial V}{\partial p} \quad \text{при } \mathfrak{H} < 4\pi nM,$$

$$\delta V = -H \frac{\partial (MV)}{\partial p} + 2\pi n \frac{\partial (M^2V)}{\partial p} \quad \text{при } \mathfrak{H} > 4\pi nM.$$

При $\mathfrak{H} \gg 4\pi nM$ мы возвращаемся к приведенной в тексте формуле (38,7).

§ 39. Доменная структура ферромагнетиков

Как уже было указано в § 37, существует широкая область состояний, в которых ферромагнетик должен иметь так называемую доменную структуру, т. е. распаться на ряд участков с различными направлениями намагниченности²⁾. Это относится, в частности, к ферромагнитному телу, не находящемуся во внешнем магнитном поле.

Некоторые заключения о форме поверхностей раздела между доменами можно сделать непосредственно из граничных условий для

¹⁾ В одноосном ферромагнетике при $H \sim 4\pi M$ надо было бы учитывать энергию анизотропии, чего не надо делать в кубическом кристалле.

²⁾ Понятие о доменах было впервые введено П. Вейссом (1907). Термодинамическая теория доменов была дана Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем (1935).

магнитного поля. Поскольку напряженность H в соседних доменах одинакова, то условие непрерывности нормальной составляющей индукции B_n сводится к условию непрерывности M_n . В одноосных кристаллах намагниченность различных доменов отличается знаком M_z при одинаковых M_x , M_y . В этих условиях непрерывность M_n означает, что поверхность раздела должна быть параллельна оси z , т. е. оси легкого намагничения.

Рассмотрим, прежде всего, свойства границ раздела как таковых, вне зависимости от конкретной формы доменов. Эти границы представляют собой в действительности сравнительно узкие переходные слои, в которых направление намагниченности непрерывно меняется от направления в одном к направлению в другом домене. «Ширина» такого слоя и ход изменения M в нем определяются условиями термодинамического равновесия. При этом должна быть учтена дополнительная энергия, связанная с неоднородностью намагничения. Наибольший вклад в эту «энергию неоднородности» дает обменное взаимодействие. С макроскопической точки зрения она может быть выражена через производные от M по координатам. Это можно сделать в общем виде, предполагая градиент направления M сравнительно малым; это условие означает, что существенное изменение направления магнитных моментов происходит лишь на расстояниях, больших по сравнению с междуатомными расстояниями. Его выполнение в данном случае очевидно, так как существенное различие в направлениях соседних атомных магнитных моментов привело бы к весьма большому увеличению обменной энергии и потому термодинамически невыгодно.

Обозначим плотность «энергии неоднородности» посредством $U_{\text{неод}}$. Наибольшими членами в ее разложении по степеням производных различных порядков от компонент M являются члены, квадратичные по первым производным (линейных членов не может быть в силу симметрии по отношению к изменению знака времени). Далее, в силу своего обменного происхождения $U_{\text{неод}}$ не может зависеть от абсолютного направления M в данной точке кристалла. Удовлетворяющее этим условиям общее выражение имеет вид

$$U_{\text{неод}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} \frac{\partial M_i}{\partial x_k}, \quad (39,1)$$

где α_{ik} — симметричный тензор. Эта квадратичная (по производным) форма должна быть, кроме того, существенно положительной. В одноосном кристалле тензор α_{ik} имеет две независимые компоненты и энергия неоднородности имеет вид

$$U_{\text{неод}} = \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)^2, \quad (39,2)$$

причем α_1 и α_2 положительны. В кубическом кристалле также и $\alpha_1 = \alpha_2$.

По поводу выражения (39,1) надо сделать следующее замечание. Реальный термодинамический смысл имеет не сама величина $U_{\text{неод}}$, а ее интеграл по объему тела. По этой причине не надо писать в $U_{\text{неод}}$ членов, содержащих произведения компонент \mathbf{M} на их вторые производные по координатам, хотя такие члены и имеют формально тот же порядок величины, что и (39,1). Дело в том, что при интегрировании по объему они преобразуются в произведения первых производных, т. е. учитываются тем же выражением (39,1) ¹⁾.

Рассмотрим в качестве примера границу раздела между доменами в одноосном кристалле, предполагая при этом, что вектор \mathbf{M} целиком параллелен (или антипараллелен) оси легкого намагничивания (оси z); таковы, в частности, домены в отсутствие внешнего магнитного поля.

Структура переходного слоя определяется условием минимальности его полной свободной энергии ²⁾. При этом обменная энергия действует в направлении увеличения толщины слоя (т. е. более плавного изменения направления \mathbf{M} в нем). В противоположном же направлении действует энергия анизотропии, поскольку всякое отклонение \mathbf{M} от направления легкого намагничивания увеличивает ее.

Выберем ось x в направлении, перпендикулярном к плоскости слоя; распределение \mathbf{M} зависит только от этой координаты. Поворот вектора \mathbf{M} вдоль толщины слоя должен происходить в плоскости y, z , т. е. везде $M_x = 0$. Это ясно из следующих простых соображений. Энергии неоднородности и анизотропии вообще не зависят от того, в какой плоскости происходит поворот намагниченности. Наличие же отличной от нуля составляющей M_x неизбежно привело бы к возникновению магнитного поля, что заведомо термодинамически невыгодно ввиду связанной с ним дополнительной магнитной энергии. Действительно, в объеме доменов $M_x = 0$, и если бы в переходном слое было $M_x \neq 0$, то была бы отлична от нуля также и $\text{div } \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x}$; поскольку же $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{H} + 4\pi \text{div } \mathbf{M} = 0$, то вместе с $\text{div } \mathbf{M} \neq 0$ должно быть и $\text{div } \mathbf{H} \neq 0$, т. е. и $\mathbf{H} \neq 0$.

Пусть θ — угол между \mathbf{M} и осью z . Тогда компоненты \mathbf{M} :

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin \theta, \quad M_z = M \cos \theta.$$

Сумма энергий неоднородности и анизотропии дается интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\alpha_1}{2} (M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta M_y^2}{2} \right] dx = \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta) dx \quad (39,3)$$

1) Симметрия кристалла может допустить существование членов, содержащих произведения первых степеней производных $\partial M_i / \partial x_j$ на сами компоненты M_i . Такие члены, однако, при интегрировании по объему тела сводились бы к выражениям, зависящим только от свойств его поверхности.

2) Здесь правильнее говорить о полной свободной энергии, а не о полной термодинамическом потенциале, имея в виду возможность существенно неоднородной деформации в слое.

(штрих означает дифференцирование по x). Остальные члены в свободной энергии не зависят от структуры слоя и потому могут быть здесь опущены. Для определения функции $\theta(x)$, минимизирующей этот интеграл, пишем соответствующее уравнение Эйлера

$$\alpha_1 \theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0,$$

первый интеграл которого

$$\theta'^2 - \frac{\beta}{\alpha_1} \sin^2 \theta = \text{const.}$$

Предполагая толщину переходного слоя малой по сравнению с шириной самих доменов, мы можем писать граничные условия к этому уравнению в виде:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \quad \text{при } x = -\infty, & \theta &= \pi \quad \text{при } x = +\infty, \\ \theta' &= 0 \quad \text{при } x = \pm\infty, & \text{т. е.} & \quad \text{при } \theta = 0, \pi. \end{aligned} \quad (39,4)$$

Они выражают собой тот факт, что соседние домены намагничены во взаимно противоположных направлениях. Тогда имеем $\text{const} = 0$ и, интегрируя уравнение

$$\theta'^2 = \frac{\beta}{\alpha_1} \sin^2 \theta,$$

получаем

$$\cos \theta = -\text{th} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha_1}} x, \quad (39,5)$$

чем и определяется ход изменения направления намагниченности в переходном слое. Его «ширина» $\delta \sim \sqrt{\alpha_1/\beta}$.

Подставив (39,5) обратно в (39,3), получим

$$M^2 \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}^2 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha_1}} x},$$

или, производя интегрирование,

$$2M^2 \sqrt{\alpha_1 \beta}. \quad (39,6)$$

Если рассматривать границу раздела между доменами как геометрическую поверхность, то величина (39,6) есть «поверхностное натяжение», которое должно быть ей приписано для учета энергии, необходимой для образования такой границы.

Форма и размеры термодинамически равновесных доменов определяются условием минимальности полного термодинамического потенциала. Они существенно зависят от конкретных форм и размеров тела. В простейшем случае ферромагнетика в виде плоскопараллельной пластинки домены могут иметь, принципиально, форму параллельных слоев или «нитевидных» образований, проходящих сквозь

тело от одной его поверхности до другой. Мы будем говорить ниже, для определенности, о слоях ¹⁾.

Возникновение всякой новой границы между доменами приводит к увеличению полной энергии «поверхностного натяжения». Этот фактор, следовательно, действует в направлении уменьшения числа доменов, т. е. увеличения их толщины.

В обратном направлении действует избыточная энергия, возникающая вблизи внешней поверхности тела, к которой выходят домены. В толще тела магнитное поле $H = 0$; равна нулю также энергия анизотропии, поскольку вектор M лежит в направлениях легкого намагничивания. Но вблизи поверхности положение меняется.

В предельном случае большого коэффициента β в энергии анизотропии слои должны выходить к поверхности тела с неизменным направлением M (рис. 21, а; на рисунке предполагается, для определенности, что поверхность тела перпендикулярна к направлению легкого намагничивания). Но при этом вблизи поверхности возникает магнитное поле, проникающее в окружающее пространство и вглубь тела на расстояния порядка величины толщины слоев a .

В обратном же случае малых значений β более выгодным является такое распределение намагниченности, при котором исключается возникновение магнитного поля, ценой отклонения M от направления легкого намагничивания. При $H = 0$ должно быть всюду $\operatorname{div} B = 4\pi \operatorname{div} M = 0$, и на всех границах доменов и на свободной поверхности тела M_n должно быть непрерывным. Это достигается возникновением «замыкающих доменов» треугольного сечения (рис. 21, б), в которых намагниченность параллельна поверхности тела. Полный объем этих областей, а с ним и энергия анизотропии в них пропорциональны той же толщине слоев a .

Таким образом, во всех случаях выход доменов к поверхности тела связан с возникновением избыточной энергии, — тем большей, чем больше ширина доменов. Тем самым этот эффект действует в направлении «утончения» доменов.

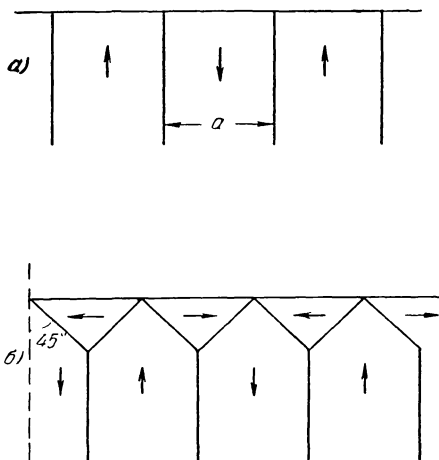


Рис. 21.

¹⁾ Слоистая доменная структура является, по-видимому, наиболее распространенной.

Устанавливаемая ширина доменов определяется игрой этих двух противоположных тенденций. Предположим, например, что домены (в пластинке) имеют вид плоскопараллельных слоев постоянной толщины. Число доменов пропорционально $1/a$, а энергия поверхностного натяжения на поверхностях раздела между ними пропорциональна их полной площади, т. е. $\propto L/a$, где L — длина тела в направлении доменов (т. е. толщина пластинки). «Энергия выхода» же доменов к поверхности пластинки пропорциональна a . Сумма этих двух энергий, как функция от a , минимальна при некотором значении a , пропорциональном \sqrt{L} .

Таким образом, толщина доменов растет с увеличением размеров тела. Но количественный закон $a \propto L^{1/2}$ этого возрастания, связанный с предположением о постоянстве толщины доменов, заведомо не может быть справедливым при любых значениях L . Дело в том, что толщина доменов при их выходе к поверхности тела не может превышать некоторого предельного значения a_k , зависящего от свойств самого ферромагнетика, но не от формы и размеров тела как целого. Оно определяется моментом, когда, по мере увеличения a , термодинамически выгодным становится «расщепление» домена вблизи поверхности тела на глубину $\sim a$. Такой момент неизбежно наступает, поскольку «энергия выхода» одного домена растет как a^2 , а избыточная энергия поверхностного натяжения, возникающая при расщеплении домена, — всего как a .

Мы приходим к выводу, что по мере увеличения размеров тела, а с ним и толщины доменов, должно наступать прогрессирующее «разветвление» доменов при их подходе к поверхности тела (Е. Лифшиц, 1948). Мы не станем останавливаться здесь на дальнейшем исследовании возникающих здесь возможностей, до настоящего времени еще во многом не выясненных¹⁾.

По мере же уменьшения размеров тела образование доменов становится в конце концов вообще термодинамически невыгодным, так что достаточно малые ферромагнитные частицы представляют собой «однодоменные» однородно намагниченные образования. Соответствующий критерий для их размеров L получается путем сравнения магнитной энергии однородно намагниченной частицы с «энергией неоднородности», которая возникла бы при наличии существенной неоднородности в распределении намагниченности по ее объему. Первая — порядка величины M^2V , а вторая $\propto \alpha M^2V/L^2$. Поэтому условие «однодоменности» есть

$$L^2 \ll \alpha. \quad (39,7)$$

¹⁾ См. С. В. Вонсовский, Я. С. Шур, Ферромагнетизм, Гостехиздат, 1948; К. Киттель, Физическая теория доменной структуры ферромагнетиков, УФН 41, 452, 1950; Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 15, 97, 1945.

Термодинамический потенциал однородно намагниченной частицы в отсутствие внешнего поля найдем, положив в формуле

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left[\tilde{\Phi} + \frac{HB}{8\pi} - \frac{1}{2} \xi M \right] dV$$

(ср. (31,7)) $\xi = 0$ и подставив для $\tilde{\Phi}$ сумму выражения (36,1) и энергии анизотропии $U_{ан}$:

$$\tilde{\mathcal{F}} = VU_{ан} - \frac{M}{2} \int \mathbf{H} dV \quad (39,8)$$

(несущественную постоянную $\tilde{\mathcal{F}}_0$ мы опустили). Ввиду линейности связи между \mathbf{M} и \mathbf{H} второй член представляет собой квадратичное по компонентам \mathbf{M} выражение:

$$\tilde{\mathcal{F}} = VU_{ан} + \frac{V}{2} a_{ik} M_i M_k, \quad (39,9)$$

где симметричный тензор a_{ik} зависит только от формы частицы. Так, при эллипсоидальной форме частицы \mathbf{H} постоянно вдоль ее объема и связано с \mathbf{M} (при $\xi = 0$) соотношением

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = H_i + 4\pi n_{ik} M_k = 0$$

(ср. (8,10)). Поэтому в этом случае величины a_{ik} выражаются через компоненты тензора коэффициентов размагничивания согласно

$$a_{ik} = 4\pi n_{ik}.$$

Направление намагниченности частицы во внешнем магнитном поле ξ определяется условием минимальности $\tilde{\mathcal{F}}$, в которое надо при этом добавить член $-V\xi M$. Для кубического кристалла достаточно написать

$$\tilde{\mathcal{F}} = V \frac{a_{ik} M_i M_k}{2} - V\xi M, \quad (39,10)$$

не учитывая энергии анизотропии. В одноосных (и двухосных) ферромагнетиках энергия анизотропии является величиной того же порядка, что и остальные члены. Написав ее в виде (37,1), имеем:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{V}{2} (a_{ik} + \beta_{ik}) M_i M_k - V\xi M. \quad (39,11)$$

Поставленная таким образом задача в математическом отношении совпадает с рассмотренной в § 37 задачей о зависимости местного \mathbf{M} от местного поля \mathbf{H} , отличаясь лишь заменой \mathbf{H} на ξ и β_{ik} на a_{ik} или $a_{ik} + \beta_{ik}$.

ЗАДАЧИ

1. Определить «коэффициент поверхностного натяжения» на границе доменов в кубическом кристалле. Поверхность раздела образует угол χ с плоскостью (100) (плоскость yz), а домены намагничены вдоль оси легкого намагничивания [001] (ось z).

Решение. Наряду с кристаллографическими осями x, y, z вводим систему координат x', y', z' , причем оси z и z' совпадают, а плоскости $y'z'$ и yz образуют угол χ . Необходимость избежать появления значительного магнитного поля по-прежнему (как и в одноосном кристалле) стремится удержать вектор M в переходном слое в плоскости $y'z'$. Наличие же магнитной анизотропии в плоскости $x'y'$ несколько выводит M из плоскости $y'z'$. Однако ввиду малости энергии анизотропии в кубическом кристалле компонента $M_{x'}$ будет малой величиной, которой можно, с достаточной точностью, пренебречь. Тогда

$$M_{x'} = 0, \quad M_{y'} = M \sin \theta, \quad M_{z'} = M \cos \theta$$

(θ — угол между M и осью z) или, в системе x, y, z ,

$$M_x = M \sin \theta \sin \chi, \quad M_y = M \sin \theta \cos \chi, \quad M_z = M \cos \theta.$$

Для суммы энергий неоднородности и анизотропии в переходном слое получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha M^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dx'} \right)^2 + \beta M^4 \left(\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \sin^2 2\chi \right) \right\} dx'. \quad (1)$$

Минимизируя этот интеграл с теми же граничными условиями (39,4), получим

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\beta M^2}{\alpha}} x' = - \frac{2}{\sin 2\chi} \operatorname{ctg} \theta. \quad (2)$$

Подставив обратно в (1) и произведя интегрирование, получим искомое поверхностное натяжение

$$M^3 \sqrt{2\alpha\beta} \left\{ 1 + \frac{\sin^2 2\chi}{2 \sqrt{4 - \sin^2 2\chi}} \operatorname{Arch} \frac{2}{|\sin 2\chi|} \right\}. \quad (3)$$

Формула (3) применима при любом значении угла χ . Но уравнение (2) для структуры переходного слоя становится непригодным при $\chi \cong 0$ или $\frac{\pi}{2}$.

В этом случае конечная ширина переходного слоя получается лишь при учете магнитострикции в нем.

2. Определить энергию магнитного поля вблизи поверхности ферромагнетика, к которой перпендикулярные к ней плоскопараллельные домены входят без изменения направления своей намагниченности (рис. 21, а).

Решение. Задача об определении магнитного поля вблизи такой поверхности эквивалентна электростатической задаче о поле, создаваемом плоскостью, чередующиеся полосы которой заряжены положительными и отрицательными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma = \pm M$.

Пусть поверхность тела совпадает с плоскостью $z = 0$, а ось x выбрана в направлении, перпендикулярном к плоскости доменов. «Поверхностная плотность зарядов» $\sigma(x)$ есть периодическая функция с периодом $2a$ (a — ширина домена), равная на одном из периодов

$$\sigma = -M \quad \text{при} \quad -a < x < 0, \quad \sigma = +M \quad \text{при} \quad 0 < x < a.$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}, \quad c_n = \frac{4M}{\pi(2n+1)}.$$

Потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

ищем его в виде ряда

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} e^{\mp (2n+1)\pi z/a}$$

(два знака в показателе соответствуют полупространствам $z > 0$ и $z < 0$). Коэффициенты b_n определяются граничным условием

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=+0} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-0} = 4\pi\sigma,$$

откуда

$$b_n = \frac{2a}{2n+1} c_n.$$

Искомую энергию поля можно вычислить как интеграл $\frac{1}{2} \int \sigma \varphi df$ по «заряженной поверхности». Относя энергию к 1 см^2 площади поверхности, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (\sigma \varphi) \Big|_{z=0} dx = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n = \frac{8aM^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Стоящая здесь сумма равна 1,052, так что получаем

$$0,852 M^2 a.$$

§ 40. Антиферромагнитная точка Кюри

Переход тела из антиферромагнитного в парамагнитное состояние происходит обычно, как и у ферромагнетиков, путем фазового перехода второго рода. Поскольку спонтанная намагниченность отсутствует как в антиферромагнитном, так и в парамагнитном состоянии, то изменение макроскопических магнитных свойств вещества при переходе через антиферромагнитную точку Кюри затрагивает лишь его магнитную восприимчивость. В соответствии с общими свойствами переходов второго рода, сами компоненты тензора μ_{ik} непрерывны в точке перехода, а их первые производные по температуре испытывают скачок.

Количественное исследование антиферромагнитных переходов должно производиться с помощью общей теории переходов второго рода. Параметрами, по которым должен разлагаться термодинамический потенциал вблизи точки перехода, являются при этом те или иные (в зависимости от конкретной магнитной симметрии решетки) линейные комбинации средних магнитных моментов m_1, m_2, \dots в различных узлах элементарной ячейки. При приближении к точке

перехода все эти параметры стремятся, как всегда, к нулю пропорционально $\sqrt{\Theta - T}$.

Термодинамический потенциал антиферромагнетика может содержать члены различного происхождения, связанные как с обменным, так и с «релятивистскими» взаимодействиями магнитных моментов (ср. начало § 36). Первые содержат такие комбинации моментов m_1, m_2, \dots , которые зависят лишь от их относительной ориентации по отношению друг к другу, но не от общей ориентации по отношению к кристаллической решетке. Вторые же зависят от кристаллографического направления моментов, т. е. приводят к магнитной анизотропии кристалла.

Как и у ферромагнетиков, сильное обменное взаимодействие является основным фактором, устанавливающим упорядоченное расположение магнитных моментов в антиферромагнетике. Релятивистские же взаимодействия приводят к кристаллографической анизотропии его магнитных свойств..

Существуют определенные типы магнитной симметрии, которые допускают существование ферромагнетизма, но в то же время характер обменного взаимодействия в них таков, что само по себе оно не приводит к антиферромагнетизму. В таких случаях спонтанное намагничение возникает лишь в результате релятивистских взаимодействий и потому очень мало. Такое тело представляет собой антиферромагнетик, в котором, однако, расположение магнитных моментов несколько отклоняется от чисто антиферромагнитного таким образом, что в определенном направлении магнитные моменты не полностью компенсируются (*И. Е. Дзялошинский, 1957*)¹⁾. Отношение величины «ферромагнитного момента» к значению, которое он имел бы при чисто ферромагнитном упорядочении — порядка величины отношения плотности релятивистской к плотности обменной энергии ($\sim 10^{-3} - 10^{-5}$).

В достаточно сильных магнитных полях антиферромагнитная структура кристалла не может быть термодинамически устойчивой; энергетически выгодным здесь будет параллельная ориентация всех моментов вдоль поля. Такое изменение ориентации обычно связано с изменением (уменьшением) элементарной ячейки магнитной структуры решетки и, как и всякое изменение свойств симметрии, может произойти лишь в определенной точке фазового перехода; ею будет в большинстве случаев точка перехода второго рода. «Критическое поле» H_K , разрушающее антиферромагнетизм, является функцией температуры, обращающейся в нуль при $T = \Theta$, где Θ — точка перехода в отсутствие поля. Таким образом, на диаграмме T, H область существования антиферромагнитной фазы ограничена определенной кривой.

¹⁾ См. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 32, 1517, 1957.

ГЛАВА VI

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 41. Магнитные свойства сверхпроводников

Многие металлы при температурах, близких к абсолютному нулю, переходят в особое состояние, наиболее наглядным свойством которого (открытым впервые *Каммерлинг-Оннесом* в 1911 г.) является так называемая *сверхпроводимость* — полное отсутствие электрического сопротивления постоянному току. Возникновение сверхпроводимости происходит при определенной для каждого металла температуре — в так называемой *точке сверхпроводящего перехода*.

Отсутствие электрического сопротивления, однако, не является в действительности основным свойством сверхпроводника. Наиболее глубокие изменения при переходе в сверхпроводящее состояние происходят в магнитных свойствах металла; электрические же свойства являются, как мы увидим, неизбежным следствием этих изменений.

Магнитные свойства сверхпроводящего металла можно описать следующим образом. Магнитное поле никогда не проникает в толщу сверхпроводника; поскольку средняя напряженность магнитного поля в среде есть, по определению, магнитная индукция B , то можно иначе сказать, что в толще сверхпроводника всегда

$$B = 0 \quad (41,1)$$

(*В. Мейсснер, Р. Оксенфельд*, 1933). Это свойство имеет место независимо от того, в каких условиях фактически произошел переход в сверхпроводящее состояние. Так, если охлаждение образца происходит в магнитном поле, то в момент перехода магнитные силовые линии «выталкиваются» из тела ¹⁾.

1) Следует оговорить, что этими свойствами обладают только «чистые» сверхпроводники — металлические элементы и химические соединения определенного стехиометрического состава. Здесь и везде ниже мы рассматриваем только такие вещества. В сверхпроводящих же сплавах эффект Мейсснера выражен не полностью и магнитное поле может проникать внутрь сверхпроводника при сохранении свойства отсутствия сопротивления. И в этом случае основную роль играют магнитные свойства тела; в настоящее время, однако, не вполне ясно еще, каким образом должны формулироваться

Следует, однако, подчеркнуть, что равенство $\mathbf{B} = 0$ не относится к тонкому поверхностному слою тела. Опыт показывает, что магнитное поле проникает в сверхпроводник на некоторую глубину, большую по сравнению с межатомными расстояниями (обычно порядка 10^{-5} см), зависящую от рода металла и от температуры. По этой же причине равенство $\mathbf{B} = 0$ вообще не имеет места в тонких металлических пленках или коллоидальных частицах, толщина или размеры которых порядка величины «глубины проникновения».

Ниже мы рассматриваем только массивные сверхпроводники достаточно больших размеров, полностью отвлекаясь от факта проникновения магнитного поля в тонкий поверхностный слой¹⁾.

Как мы знаем, на границе между всякими двумя средами должна быть непрерывной нормальная составляющая индукции (это условие является следствием всегда справедливого уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$). Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, то на его поверхности нормальная составляющая внешнего поля тоже равна нулю, т. е. поле снаружи сверхпроводника везде касательно к его поверхности; магнитные силовые линии огибают сверхпроводник.

Учитывая это обстоятельство, легко найти силы, действующие на сверхпроводник в магнитном поле. Подобно тому, как это было сделано в § 5 для обычного проводника в электрическом поле, вычисляем силу (отнесенную к 1 см² поверхности) как $\sigma_{ik} u_k$, где

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik} \right)$$

есть максвелловский тензор напряжений для магнитного поля в пустоте. Поскольку в данном случае $n\mathbf{H}_e = 0$ (\mathbf{H}_e — поле снаружи тела у его поверхности), то мы получаем

$$\mathbf{F}_{\text{пов}} = -n \frac{H_e^2}{8\pi}, \quad (41,2)$$

т. е. на поверхность тела действует сжимающее давление, по величине равное плотности энергии поля.

эти свойства и как они связаны с другими свойствами сверхпроводящего сплава.

Излагаемое ниже доказательство того, что отсутствие сопротивления является следствием свойства $\mathbf{B} = 0$, надо поэтому понимать в том смысле, что последнее есть достаточное, но отнюдь не необходимое условие отсутствия сопротивления.

¹⁾ Вопросу о «глубине проникновения» магнитного поля в сверхпроводник посвящены теории Ф. и Г. Лондонов и В. Л. Гинзбурга и Л. Д. Ландау (вторая из них включает первую как частный случай при достаточно слабых магнитных полях). Мы не излагаем здесь этих теорий, поскольку они не имеют чисто феноменологического характера. Их изложение можно найти в обзорной статье В. Л. Гинзбурга (УФН 42, 169, 333, 1950).

Согласно уравнению (27,4)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}; \quad (41,3)$$

из равенства $\mathbf{B} = 0$ следует, что внутри сверхпроводника средняя плотность тока тоже везде равна нулю. Другими словами, в сверхпроводнике невозможны никакие объемные макроскопические токи. В этой связи подчеркнем, что в сверхпроводнике не имеет смысла выделять из $\overline{\rho \mathbf{v}}$ токи проводимости, как это делается в обычных проводниках. По этой же причине не имеет физического смысла вводить в рассматриваемой теории намагничение \mathbf{M} , а с ним и вектор \mathbf{H} .

Таким образом, всякий электрический ток, текущий в сверхпроводнике, является поверхностным током. Поверхностная плотность токов \mathbf{g} определяется согласно (27,14) скачком касательной компоненты индукции на границе тела. Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, а снаружи \mathbf{B} и \mathbf{H} совпадают, то

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi} [n\mathbf{H}_e]. \quad (41,4)$$

Само по себе наличие поверхностных токов не является характерной особенностью одних только сверхпроводников. Такие же токи возникают и в любом обычном намагничиваемом теле, где их плотность

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi} [n, \mathbf{H}_e - \mathbf{B}].$$

Поскольку на поверхности нормального (несверхпроводящего) тела непрерывны касательные составляющие вектора $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$, то имеем $[n\mathbf{H}_e] = \frac{1}{\mu} [n\mathbf{B}]$, так что выражение для \mathbf{g} можно написать в виде

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi} [n\mathbf{B}] \frac{1 - \mu}{\mu}. \quad (41,5)$$

Принципиальная разница между сверхпроводниками и обычными телами выявляется, однако, при рассмотрении полного тока, протекающего через поперечное сечение тела. В несверхпроводящем теле поверхностные токи всегда взаимно компенсируются, так что никакого полного тока не возникает. Эта компенсация обеспечивается условием (41,5), связывающим плотность токов \mathbf{g} с магнитной индукцией внутри тела, а посредством нее — токи \mathbf{g} в разных местах поверхности. В сверхпроводниках условие (41,5) теряет смысл. Действительно, переход от обычного тела с магнитной проницаемостью μ к сверхпроводнику формально означает, что надо одновременно положить $\mathbf{B} \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$. Но при этом правая сторона равенства (41,5) становится неопределенной, так что никакого условия, ограничивающего возможные значения тока, по существу нет.

Таким образом, мы приходим к важному результату, что текущие по поверхности сверхпроводника токи могут приводить к протеканию по нему отличного от нуля полного тока. Разумеется, это возможно лишь в многосвязном теле (например, в кольце) или же в односвязном сверхпроводнике, составляющем часть замкнутой цепи с источником электродвижущей силы, необходимой для поддержания тока в несверхпроводящих участках цепи.

Очень существенно, что стационарное протекание по сверхпроводнику полного тока оказывается возможным без электрического поля. Это значит, что оно не сопровождается диссипацией энергии, для восполнения которой требовалась бы работа внешнего поля. Это свойство сверхпроводника и может быть описано как отсутствие у него электрического сопротивления, которое оказывается, таким образом, необходимым следствием его магнитных свойств.

§ 42. Сверхпроводящий ток

Рассмотрим более подробно некоторые свойства сверхпроводников, зависящие от их формы.

Если сверхпроводник представляет собой односвязное тело, то в отсутствие внешнего магнитного поля в нем вообще невозможно существование каких-либо стационарно протекающих поверхностных токов.

В этом можно убедиться путем следующих рассуждений. Поверхностные токи создавали бы в окружающем тело пространстве постоянное магнитное поле, исчезающее на бесконечности. Как всякое постоянное магнитное поле в пустоте, оно было бы потенциальным, причем в силу граничных условий на сверхпроводнике нормальная производная $d\varphi/dn$ потенциала на поверхности тела должна обращаться в нуль. Но из теории потенциала известно, что если $d\varphi/dn = 0$ на поверхности односвязного тела и на бесконечности, то $\varphi = 0$ во всем пространстве (вне тела). Таким образом, такое магнитное поле, а с ним и поверхностные токи не могут существовать.

Внешнее же магнитное поле индуцирует на поверхности односвязного сверхпроводника токи, что можно воспринимать как появление у тела как целого определенного магнитного момента. Это «намагничение» легко вычислить для сверхпроводника, имеющего эллипсоидальную форму¹⁾.

Пусть \mathfrak{H} — внешнее поле, параллельное одной из главных осей эллипсоида. Для магнитного поля внутри несверхпроводящего эллипсоида имеет место соотношение

$$(1 - n)H + nB = \mathfrak{H},$$

¹⁾ В этом параграфе везде подразумевается, что магнитное поле не превосходит тех значений, при которых происходит разрушение сверхпроводящего состояния (см. § 43).

где n — коэффициент размагничивания вдоль данной оси (см. (8,7)). В сверхпроводнике «напряженность» H не имеет, как уже было указано, физического смысла, а вместе с нею не имеет своего обычного смысла также и намагниченность

$$M = \frac{B - H}{4\pi}.$$

Тем не менее, в данном случае удобно ввести H и M чисто формальным образом как вспомогательные величины, служащие для вычисления полного магнитного момента $\mathcal{M} = MV$ (V — объем эллипсоида), имеющего свой буквальный физический смысл. Положив для сверхпроводящего эллипсоида $B = 0$, находим

$$H = \frac{\mathfrak{H}}{1 - n} \quad (42,1)$$

и затем

$$\mathcal{M} = -\frac{VH}{4\pi} = -\frac{V\mathfrak{H}}{4\pi(1 - n)}. \quad (42,2)$$

В частности, для длинного цилиндра в продольном поле $n = 0$, так что $H = \mathfrak{H}$ и $\mathcal{M} = -V\mathfrak{H}/4\pi$ ¹⁾. Эти значения \mathcal{M} таковы, как если бы тело обладало объемной диамагнитной восприимчивостью $-1/4\pi$.

Магнитное поле H_e вне эллипсоида у его поверхности направлено везде по касательному, и поэтому его величина непосредственно определяется условием непрерывности тангенциальных составляющих H . Внутри эллипсоида $H = \mathfrak{H}/(1 - n)$; проектируя этот вектор на касательное направление, получим

$$H_e = \frac{\mathfrak{H}}{1 - n} \sin \theta, \quad (42,3)$$

где θ — угол между направлением внешнего поля \mathfrak{H} и нормалью в данной точке поверхности эллипсоида. Наибольшее значение H_e имеет на экваторе эллипсоида, где оно равно $\mathfrak{H}/(1 - n)$.

Подчеркнем еще раз, что между токами, ответственными за «намагничение» сверхпроводника и создающими полный ток в нем, нет никакой принципиальной разницы: они имеют одинаковую физическую природу. Это важное обстоятельство позволяет, в частности, непосредственно определить гиромагнитные коэффициенты для любого сверхпроводника. Действительно, плотность импульса частиц (электронов), создающих «намагничивающие» токи, отличается от плотности этих токов лишь множителем m/e (e и m — заряд и масса электрона). Ввиду определения гиромагнитных коэффициентов (см. (35,3)) отсюда сразу следует, что у сверхпроводника всегда

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

¹⁾ Эти соотношения для цилиндра являются непосредственным следствием условия непрерывности H и потому справедливы для цилиндра с любой (не обязательно круговой) формой сечения.

Перейдем к многосвязным сверхпроводникам. Их свойства весьма существенно отличаются от свойств односвязных тел — прежде всего потому, что к ним не относится вывод о невозможности стационарного протекания поверхностных токов в отсутствие внешнего магнитного поля. Более того, поверхностные токи не должны здесь взаимно компенсироваться и могут приводить к стационарному протеканию по телу полного «сверхпроводящего» тока в отсутствие приложенной извне электродвижущей силы.

Рассмотрим двусвязное тело (кольцо) в отсутствие внешнего магнитного поля и покажем, что его состояние вполне определяется заданием полного протекающего по нему тока J . Задача об определении создаваемого кольцом поля тоже может решаться как задача теории потенциала, но только потенциал φ будет теперь многозначной функцией, меняющейся на $4\pi J/c$ при обходе по любому замкнутому пути, проходящему через отверстие кольца (ср. § 29). Для того чтобы поставить задачу математически точно, надо произвести «разрез» пространства по какой-либо поверхности, закрывающей отверстие кольца. Тогда задача заключается в решении уравнения Лапласа с граничным условием $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности кольца, $\varphi = 0$ на бесконечности и с условием $\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi J/c$ на поверхности разреза, где φ_1 и φ_2 — значения потенциала на двух сторонах последней. Такая задача, как известно из теории потенциала, имеет однозначное решение (не зависящее от формы выбранной поверхности разреза). По распределению же поля вблизи поверхности кольца однозначно определяется и распределение в нем поверхностных токов.

Вместе с распределением токов вполне определенной величиной оказывается коэффициент самоиндукции сверхпроводящего кольца. В этом отношении имеется существенное отличие от обычных проводников, в которых распределение токов, а с ним и точное значение самоиндукции, зависит от способа, которым был возбужден ток (§ 33)¹⁾.

В § 32 было введено понятие о магнитном потоке Φ через контур линейного проводника и было показано, что $\Phi = LJ/c$, где L — самоиндукция проводника. Для сверхпроводящего же кольца понятие о магнитном потоке имеет смысл и при любой, не обязательно малой, толщине кольца. Действительно, в силу тангенциальности магнитного

¹⁾ Самоиндукция тонкого сверхпроводящего кольца (радиуса b) из провода кругового сечения (радиуса a) совпадает с внешней частью самоиндукции несверхпроводящего кольца и дается формулой

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2 \right)$$

(см. задачу 2 § 33).

Точное решение задачи о сверхпроводящем круговом токе дано В. А. Фомом (Phys. Zs. d. Sowjetunion 1, 215, 1932).

поля его поток через любую часть поверхности самого кольца равен нулю; поэтому величина магнитного потока через поверхность, закрывающую отверстие сверхпроводящего кольца, не зависит от выбора этой поверхности.

Более того, остается в силе также и формула

$$\Phi = \frac{1}{c} LJ \quad (42,4)$$

с самоиндукцией L , по-прежнему определенной по полной энергии магнитного поля тока. Полная энергия магнитного поля сверхпроводника дается интегралом $\int \frac{H^2}{8\pi} dV$, взятым по всему пространству вне тела. Производя, как указано выше, «разрез» пространства по некоторой поверхности C , вводим потенциал поля и пишем

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dV = - \int \frac{H \nabla \varphi}{8\pi} dV = \int \frac{\varphi \operatorname{div} H}{8\pi} dV - \int \frac{H_n \varphi}{8\pi} df.$$

Первый интеграл равен нулю, так как $\operatorname{div} H = 0$. Второй же интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности, по поверхности кольца и по обеим сторонам поверхности разреза; на первых двух подынтегральное выражение обращается в нуль, так что остается

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int H_n (\varphi_2 - \varphi_1) df = \frac{J}{2c} \int H_n df = \frac{J\Phi}{2c},$$

где Φ — магнитный поток через поверхность C . Сравнивая это выражение с $LJ^2/2c^2$ (по определению самоиндукции), получим искомое равенство (42,4).

Если кольцо находится во внешнем магнитном поле, то полный магнитный поток Φ складывается из собственного потока LJ/c и потока Φ_e от внешнего поля. Очень важное свойство сверхпроводящего кольца состоит в том, что при любом изменении внешнего поля и тока полный магнитный поток через кольцо остается постоянным:

$$\frac{1}{c} LJ + \Phi_e = \text{const} \equiv \Phi_0. \quad (42,5)$$

Это следует непосредственно из интегральной формы уравнения Максвелла в пространстве вне тела:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_C H df = - \oint E dl.$$

Если производить интегрирование по поверхности C , закрывающей отверстие кольца, то контуром интегрирования в правой стороне равенства будет линия, проходящая по поверхности кольца. Но на

поверхности сверхпроводника тангенциальная составляющая E равна нулю (так как внутри сверхпроводника $E=0$, а E_t непрерывна на поверхности). Поэтому первая сторона равенства обращается в нуль и мы находим, что $d\Phi/dt=0$.

Соотношением (42,5) определяется изменение тока в кольце при изменении внешнего поля. Так, если кольцо было переведено в сверхпроводящее состояние во внешнем поле, создававшем поток Φ_0 , и затем это поле выключается, то в кольце индуцируется стационарный ток, равный $J=c\Phi_0/L$.

Постоянство магнитного потока через сверхпроводящее кольцо имеет место не только при изменении внешнего поля, но и при любом изменении формы кольца или его перемещении в пространстве¹⁾. Наглядно можно сказать, что силовые линии никогда не могут пересекать поверхности сверхпроводника, а потому не могут «выйти» из отверстия сверхпроводящего кольца.

Изложенные результаты непосредственно обобщаются на случай сверхпроводящих тел любой степени связности, в том числе на совокупность любого числа колец. Состояние n -связной системы в отсутствие внешнего поля полностью определяется заданием n значений полных токов J_a . Соотношение же (42,5) обобщается в систему уравнений

$$\sum_b L_{ab} J_b + \Phi_a^{(e)} = \Phi_{a0}. \quad (42,6)$$

Эти уравнения справедливы не только при любом изменении внешнего поля, но и при изменениях формы или взаимного расположения тел.

З а д а ч а

Определить магнитный момент сверхпроводящего диска в перпендикулярном ему внешнем магнитном поле²⁾.

Решение. Задача о сверхпроводнике в постоянном магнитном поле формально совпадает с электростатической задачей для диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon=0$. Рассматривая диск как предел эллипсоида вращения при $c \rightarrow 0$ (ср. задачу 4 § 4) и воспользовавшись формулой (8,9) с соответствующим изменением обозначений (поле ζ вдоль оси z), получим

$$\mathcal{M} = -\frac{2a^3}{3\pi} \zeta.$$

1) Доказательство этого утверждения непосредственно следует из связи между электродвижущей силой индукции и связанного с перемещением проводника изменения магнитного потока через его контур (§ 49).

2) Эта задача рассматривается здесь главным образом в целях применений по другому поводу (см. задачу 2 § 75). Для сверхпроводящего диска фактически может идти речь лишь о весьма слабых магнитных полях, так как в этих условиях легко наступает разрушение сверхпроводимости (см. § 43).

§ 43. Критическое поле

Цилиндрический сверхпроводник в продольном магнитном поле обладает дополнительной магнитной энергией, равной

$$-\frac{\oint \mathcal{M}}{2} = \frac{\oint^2 V}{8\pi}.$$

В нормальном же (несверхпроводящем) состоянии полная энергия цилиндра практически не изменилась бы при включении внешнего поля (слабым диа- или парамагнетизмом несверхпроводящего металла мы здесь и ниже пренебрегаем, т. е. полагаем для него $\mu = 1$). Уже отсюда ясно, что в достаточно сильных магнитных полях сверхпроводящее состояние металла должно оказаться термодинамически менее выгодным, чем нормальное, и потому должно произойти, как говорят, разрушение сверхпроводимости.

Значение напряженности продольного магнитного поля, при котором наступает разрушение сверхпроводимости в цилиндрическом теле, зависит от рода металла, а также от его температуры (и давления). Это значение называют критическим полем (H_R); оно является одной из важнейших характеристик сверхпроводника¹⁾.

Разрушение сверхпроводимости в цилиндре при достижении полем критического значения наступает во всем его объеме, что связано с однородностью поля вдоль всей поверхности такого тела. В телах же другой формы разрушение сверхпроводимости представляет собой более сложный процесс, в котором объем, занятый веществом в нормальном состоянии, постепенно возрастает в целом интервале значений \mathfrak{H} (об этом будет идти речь подробнее в следующем параграфе).

Таким образом, при всякой температуре (ниже точки перехода) металл может существовать как в сверхпроводящем (s), так и в нормальном (n) состоянии. Обозначим посредством $\mathcal{F}_{s0}(V, T)$ и $\mathcal{F}_n(V, T)$ полные свободные энергии сверхпроводящего и нормального тела в отсутствие внешнего магнитного поля; эти величины, характеризуя вещество как таковое, зависят, разумеется, только от объема, но не от формы тела. Свободная энергия в n -состоянии вообще не меняется при включении внешнего поля (поэтому мы не пишем индекса 0 у \mathcal{F}_n). В s -состоянии же магнитное поле существенно меняет свободную энергию. Для сверхпроводящего цилиндра при

1) Резкий переход из сверхпроводящего в нормальное состояние имеет место только в «чистых» сверхпроводниках (см. примечание на стр. 215), которые только мы и рассматриваем. В сплавах же разрушение сверхпроводимости и проникновение магнитного поля в образец происходят постепенно, в сравнительно широком интервале полей, так что критического поля в указанном в тексте смысле для них не существует.

заданных T и V свободная энергия в продольном внешнем поле \mathcal{F} равна

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} V. \quad (43,1)$$

Отсюда можно найти все остальные термодинамические величины. Дифференцируя (43,1) по объему, найдем действующее на тело давление

$$p = p_0(V, T) - \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, \quad (43,2)$$

где $p_0(V, T)$ — давление (при заданных V и T) в отсутствие поля. Равенство (43,2) определяет зависимость между p , V и T , т. е. представляет собой уравнение состояния сверхпроводящего цилиндра во внешнем магнитном поле. Мы видим, что объем $V(p, T)$ при наличии магнитного поля такой же, каким был бы в отсутствие магнитного поля при давлении $p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$. Этот результат находится, естественно, в согласии с формулой (41,2) для силы, действующей на поверхность сверхпроводника в магнитном поле.

Термодинамический потенциал¹⁾ сверхпроводящего цилиндра равен

$$\mathcal{P}_s = \mathcal{F}_s + pV = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + p_0V,$$

причем объем V должен быть выражен здесь через p и T согласно (43,2). Поэтому можно написать $\mathcal{P}_s(p, T)$ в следующем виде:

$$\mathcal{P}_s(p, T) = \mathcal{P}_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43,3)$$

где $\mathcal{P}_{s0}(p, T)$ — термодинамический потенциал в отсутствие поля. Дифференцируя это равенство по T и по p , получим аналогичные соотношения для энтропии и объема:

$$\mathcal{S}_s(p, T) = \mathcal{S}_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43,4)$$

$$V_s(p, T) = V_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right). \quad (43,5)$$

Теперь можно написать условие, определяющее критическое поле. Переход цилиндра из s - в n -состояние произойдет тогда, когда (при заданных p и T) \mathcal{P}_n станет меньше \mathcal{P}_s . В момент же перехода должно быть $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_n$, т. е.

$$\mathcal{P}_{s0}\left(p + \frac{H_k^2}{8\pi}, T\right) = \mathcal{P}_n(p, T). \quad (43,6)$$

1) Здесь подразумевается то определение \mathcal{P} , о котором шла речь в § 12.

Это — точное термодинамическое соотношение ¹⁾. Обычно изменение термодинамического потенциала в магнитном поле представляет небольшую поправку к $\mathcal{P}_{s_0}(p, T)$. Тогда левую сторону уравнения (43,6) можно разложить в ряд, и первые члены разложения дают:

$$\mathcal{P}_{s_0}(p, T) + \frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} V_{s_0}(p, T) = \mathcal{P}_n(p, T), \quad (43,7)$$

где $V_{s_0}(p, T) = \partial \mathcal{P}_{s_0}(p, T) / \partial p$ — объем сверхпроводящего цилиндра в отсутствие поля. Таким образом, в этом приближении можно сказать, что термодинамический потенциал вещества (отнесенный к единице объема) в нормальном состоянии на $H_{\kappa}^2/8\pi$ больше, чем в сверхпроводящем.

Обозначим посредством $T_{\kappa} = T_{\kappa}(p)$ температуру перехода в отсутствие магнитного поля. Опыт показывает, что переход в этой точке является фазовым переходом второго рода. Поэтому, в частности, обращение $H_{\kappa}(T)$ в нуль при $T = T_{\kappa}$ должно происходить непрерывным образом. Из общей теории фазовых переходов второго рода известно ²⁾, что изменение термодинамического потенциала вблизи точки перехода пропорционально квадрату разности температур $T - T_{\kappa}$. Из (43,7) можно поэтому заключить, что вблизи T_{κ} критическое поле меняется с температурой по линейному закону

$$H_{\kappa} = \text{const} \cdot (T_{\kappa} - T). \quad (43,8)$$

Продифференцируем обе стороны равенства (43,6) по температуре вдоль кривой зависимости H_{κ} от T (при заданном давлении). Учитывая при этом формулы (43,4), (43,5), получим

$$\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \right), \quad (43,9)$$

где все величины \mathcal{P}_n , \mathcal{P}_s , V_s относятся к моменту перехода между обоими состояниями тела (т. е. к полю $H = H_{\kappa}$). Умножив эту разность на T , получим теплоту перехода

$$Q = T(\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_s) = -\frac{V_s H_{\kappa} T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\kappa}}{\partial T} \right)_p. \quad (43,10)$$

При переходе в точке $T = T_{\kappa}$ (в отсутствие магнитного поля) эта величина обращается в нуль вместе с H_{κ} , в соответствии с тем, что здесь мы имеем фазовый переход второго рода. Переход же, происходящий при $T < T_{\kappa}$ (в магнитном поле), сопровождается поглощением или выделением тепла, т. е. является фазовым переходом

¹⁾ Мы проводим здесь вычисления с большей точностью, чем это обычно требуется, имея в виду выявить более ясно взаимоотношение между различными термодинамическими величинами.

²⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 131, 1951.

первого рода. Опыт показывает, что H_{κ} монотонно растет с понижением температуры во всем интервале от T_{κ} до 0. Поэтому производная dH_{κ}/dT всегда отрицательна, и из (43,10) видно, что $Q > 0$, т. е. тепло поглощается при переходе (изотермическом) из сверхпроводящего в нормальное состояние.

При $T \rightarrow 0$ энтропия всякого тела согласно теореме Нерста должна обращаться в нуль. Поэтому из (43,9) видно, что при $T = 0$ должно быть $\partial H_{\kappa}/\partial T = 0$, т. е. кривая $H_{\kappa} = H_{\kappa}(T)$ пересекает ось H под прямым углом.

Продифференцируем разность $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$ (43,9) еще раз по температуре, снова используя при этом равенства (43,4), (43,5). Учитывая также, что $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, получим в результате

$$\frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \right) - 2 \frac{\partial V_s}{\partial T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial V_s}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \right) \right)^2. \quad (43,11)$$

Умножив обе стороны этого равенства на T , получим разность теплоемкостей (при постоянном давлении) обеих фаз. Члены, содержащие коэффициент теплового расширения и коэффициент сжимаемости вещества, обычно очень малы по сравнению с остальными членами; пренебрегая ими, получим

$$\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_n = \frac{V_s T}{4\pi} H_{\kappa} \frac{\partial^2 H_{\kappa}}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\kappa}}{\partial T} \right)^2. \quad (43,12)$$

Эту формулу можно получить и путем непосредственного дифференцирования приближенного соотношения (43,7). В этом приближении разница между V_s и V_{s0} незначительна; можно также считать одинаковыми \mathcal{E}_s и \mathcal{E}_{s0} .

При $T = T_{\kappa}$ первый член в (43,12) обращается в нуль, и мы получаем следующую формулу, связывающую скачок теплоемкости при фазовом переходе второго рода в отсутствие внешнего магнитного поля с температурной зависимостью H_{κ} :

$$\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_n = \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\kappa}}{\partial T} \right)^2 \quad (43,13)$$

(Рютгерс, 1933). Отсюда видно, в частности, что в этом случае $\mathcal{E}_s > \mathcal{E}_n$. При понижении температуры (т. е. когда сверхпроводимость разрушается магнитным полем) разность $\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_n$ меняет свой знак в соответствии с тем, что разность $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$, обращаясь в нуль при $T = 0$ и при $T = T_{\kappa}$, должна проходить в этом интервале через максимум.

Аналогичным образом можно рассмотреть эффекты, связанные с изменением объема при переходе. Для этого дифференцируем

уравнение (43,6) по давлению вдоль кривой зависимости H_{κ} от p (при заданной температуре); это дает:

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial p} \left(p + \frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \right)$$

или

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_{\kappa}}{4\pi} \frac{\partial H_{\kappa}}{\partial p}, \quad (43,14)$$

чем и определяется изменение объема в момент перехода ¹⁾. В точке $T = T_{\kappa}$ эта разность, как и разность энтропий, обращается в нуль. Переход же при температурах $T < T_{\kappa}$ сопровождается изменением объема, которое может иметь оба знака в зависимости от знака производной $(\partial H_{\kappa}/\partial p)_T$. При $T = T_{\kappa}$ изменение объема отсутствует, но имеется скачок коэффициента сжимаемости, который легко определить путем дифференцирования равенства (43,14).

Заметим, что если подставить в (43,14)

$$\left(\frac{\partial H_{\kappa}}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial H_{\kappa}}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{H_{\kappa}}$$

(что получается дифференцированием уравнения $H_{\kappa}(p, T) = \text{const}$), то получим «уравнение Клапейрона — Клаузиуса»:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{H_{\kappa}} = \frac{Q}{T(V_n - V_s)}, \quad (43,15)$$

где производная $(\partial p/\partial T)_{H_{\kappa}}$ определяет изменение давления, необходимое для того, чтобы приложенное внешнее поле как раз оставалось критическим при изменении температуры.

Критическое поле H_{κ} имеет значительно более широкий физический смысл, чем это отражено в его определении по поведению сверхпроводящего цилиндра. Равенство $H = H_{\kappa}$ является условием равновесия, которое должно выполняться в каждой точке поверхности раздела между нормальной (n) и сверхпроводящей (s) фазами вещества в одном и том же теле. Это очевидно уже из следующих простых соображений. Если цилиндр находится в продольном магнитном поле, как раз равном H_{κ} , то как граничные условия для магнитного поля, так и условия термодинамической устойчивости в равной степени выполняются для всех состояний, в которых любая

¹⁾ Эту разность следует, разумеется, отличать от изменения объема (магнострикции) сверхпроводника при изменении поля от нуля до H_{κ} . Последнее можно найти из (43,5):

$$V_s(p, T) - V_{s0}(p, T) \cong \frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \left(\frac{\partial V_s}{\partial p} \right)_T.$$

внутренняя цилиндрическая часть объема образца находится в сверхпроводящем, а внешняя — в нормальном состоянии. При этом на их границе поле $H = H_{\kappa}$. Таким образом, поверхность раздела, на которой $H = H_{\kappa}$, находится в «безразличном равновесии» по отношению к месту своего расположения. Это и есть свойство, характеризующее фазовое равновесие.

В переменном магнитном поле граница между сверхпроводящей и нормальной фазами перемещается. Кинетика этого перемещения представляет собой довольно сложный процесс, рассмотрение которого требует одновременного решения электродинамических уравнений и уравнения теплопроводности с учетом тепла, выделяющегося при фазовом переходе. Не останавливаясь здесь на этом исследовании ¹⁾, укажем лишь граничное условие, которое должно выполняться на движущейся границе между n - и s -фазами.

Для его вывода рассмотрим систему координат K' , движущуюся со скоростью v — скоростью перемещения границы между фазами. Согласно известной формуле преобразования полей электрическое поле E в системе K' выражается через поля E и B в неподвижной системе K согласно

$$E' = E + \frac{1}{c} [vB]$$

(см. (49,1)). Поскольку в системе K' граница раздела покоится, то на ней справедливо обычное условие непрерывности тангенциальной компоненты E' , т. е. величины

$$[nE'] = [nE] - \frac{v}{c} B$$

(n — единичный вектор нормали к поверхности, направленный вдоль скорости v). В сверхпроводящей фазе $E = 0$, $B = 0$, а в нормальной (на границе) $B = H_{\kappa}$. Мы находим, следовательно, что на движущейся поверхности раздела появляется тангенциальное электрическое поле, перпендикулярное к магнитному и по величине равное

$$E = \frac{v}{c} H_{\kappa}. \quad (43,16)$$

§ 44. Промежуточное состояние

Если сверхпроводящее тело произвольной формы находится во внешнем магнитном поле, напряженность \mathcal{H} которого постепенно увеличивается, наступает в конце концов момент, когда в каком-либо месте поверхности тела величина поля достигает критического значения H_{κ} , между тем как само \mathcal{H} еще меньше H_{κ} . Так, на поверхности эллипсоида (в поле \mathcal{H} , параллельном одной из его осей) поле

¹⁾ Полное исследование этого вопроса произведено И. М. Лифшицем (ЖЭТФ 20, 834, 1950; ДАН СССР 90, 363, 1953).

имеет наибольшее значение на экваторе (см. (42,3)); оно достигает значения H_k уже при $\xi = H_k(1 - n)$.

При дальнейшем увеличении ξ тело уже не может находиться целиком в сверхпроводящем состоянии. Оно не может перейти целиком и в нормальное состояние, так как при этом поле стало бы везде равным ξ . Поэтому должно наступить частичное разрушение сверхпроводимости.

На первый взгляд можно было бы представить себе это разрушение следующим образом. По мере увеличения ξ сверхпроводимость разрушается в постепенно увеличивающейся части объема тела, в то время как соответственно уменьшающаяся часть остается сверхпроводящей; тело целиком переходит в нормальное состояние при $\xi = H_k$. Легко, однако, видеть,

что такие состояния тела термодинамически неустойчивы. Для этого вспомним, что на поверхности раздела между сверхпроводящей и нормальной фазами магнитное поле касательно к поверхности (а по величине равно H_k). Другими словами, силовые линии поля лежат на этой поверхности. Если граница выпукла в сторону нормальной фазы, то эквипотенциальные

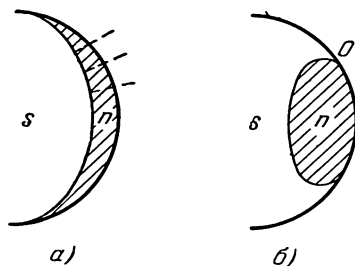


Рис. 22.

поверхности поля, перпендикулярные к его силовым линиям, будут расходиться вглубь нормальной области (как это показано на рис. 22, а пунктирными линиями). Но в направлении расхождения эквипотенциальных поверхностей величина поля убывает, так что в заштрихованной области было бы $H_k < H$, в противоречии с предположением о существовании здесь нормального состояния. Если же граница сверхпроводящей фазы вогнута, то заполняющие ее силовые линии при переходе на свободную поверхность сверхпроводящей области (к которой поле тоже касательно) будут иметь излом (точка O на рис. 22, б). Но в точке излома силовой линии поле обращается в бесконечность, что снова находится в противоречии с граничными условиями на поверхности сверхпроводника.

Изложенные соображения представляют собой, по существу, другой аспект того же положения, которое приводит к возникновению доменной структуры в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках. И здесь условия термодинамической устойчивости приводят к тому, что после достижения магнитным полем значения H_k хотя бы в одном месте поверхности тела последнее разбивается на большое количество параллельных тонких чередующихся нормальных и сверхпроводящих слоев (Л. Ландау, 1937). Это своеобразное состояние сверхпроводника называется промежуточным. По мере увели-

чения \mathfrak{H} общий объем нормальных слоев возрастает, пока при $\mathfrak{H} = H_K$ тело не перейдет целиком в нормальное состояние.

Следует подчеркнуть, что в общем случае тела произвольной формы не обязательно весь его объем должен находиться в промежуточном состоянии. В нем могут оставаться также и области чисто сверхпроводящего и чисто нормального состояний, соприкасающиеся с областью промежуточного состояния, но только не непосредственно друг с другом. В этом отношении более прост упомянутый выше случай эллипсоидальной формы тела. В поле, параллельном его оси, промежуточное состояние имеет место в интервале

$$H_K(1 - n) < \mathfrak{H} < H_K, \quad (44,1)$$

причем в этом состоянии находится весь объем эллипсоида ¹⁾.

Форма и размеры n - и s -слоев в промежуточном состоянии определяются условиями термодинамического равновесия тела в целом, аналогично тому, как определяется форма доменов в ферромагнетике (§ 39). Как и там, устанавливающаяся толщина слоев является результатом двух противоположных тенденций. «Поверхностное натяжение» на границах n - и s -фаз стремится уменьшить число слоев, т. е. увеличить их толщину. В обратном направлении действует «энергия выхода» слоев к свободной поверхности тела. Толщина слоев возрастает при увеличении размеров тела, в результате чего (по тем же причинам, что и для ферромагнитных доменов) в конце концов должно наступить их разветвление при подходе к поверхности тела ²⁾.

Промежуточное состояние допускает также и усредненное описание, если интересоваться участками тела, большими по сравнению с толщиной слоев (*P. Пайерлс, Ф. Лондон, 1936*). В этом описании принимается, что внутри тела имеется магнитное поле с индукцией \bar{B} , пробегающей значения от нуля (в чисто сверхпроводящем состоянии) до H_K (в чисто нормальном состоянии). Приписывая веществу в промежуточном состоянии отличную от нуля индук-

¹⁾ Так, для шара $n = 1/3$ и область промежуточного состояния простирается в интервале $2/3 H_K < \mathfrak{H} < H_K$. Для цилиндра в поперечном поле $n = 1/2$ и интервал промежуточного состояния есть $1/2 H_K < \mathfrak{H} < H_K$. В продольном же поле для цилиндра $n = 0$ промежуточное состояние вообще отсутствует и сверхпроводимость разрушается целиком при $\mathfrak{H} = H_K$. Наконец, для плоской параллельной пластинки в поперечном поле $n = 1$, и она находится в промежуточном состоянии в любом поле $\mathfrak{H} < H_K$.

²⁾ Вычисление толщины неразветвленных слоев — см. задачу 2 к этому параграфу. Расчет модели с многократным разветвлением слоев — см. Л. Ландау, ЖЭТФ 13, 377, 1943.

Вопрос о взаимоотношении между обеими моделями рассмотрен в статье Е. М. Лифшица, и Ю. В. Шарвина, ДАН СССР 79, 783, 1951.

В определенных условиях (внешние поля, близкие к нулю или к H_K) термодинамически более выгодной может оказаться не слоистая, а «нитевидная» структура. См. E. R. Andreev, Proc. Roy. Soc. 194A, 98, 1948.

цию, мы должны приписать ему также и определенное значение магнитной «напряженности» \bar{H} . Для определения связи между этими двумя величинами надо обратиться к истинной структуре промежуточного состояния.

Магнитное поле в нормальном слое на его границе со сверхпроводящим равно H_k , а в силу предположенной тонкости слоев можно считать, что это значение поле имеет и по всему объему слоя. В сверхпроводящих же слоях $B=0$. Поэтому, усредняя магнитное поле по объему, большому по сравнению с толщиной слоев, мы найдем, что средняя индукция $\bar{B} = x_n H_k$, где x_n — доля объема, приходящаяся на нормальное состояние. Далее, определим термодинамический потенциал единицы объема тела, причем будем отсчитывать его от значения, соответствующего чисто сверхпроводящему состоянию. В отсутствие магнитного поля единица объема нормальной фазы обладает избыточным термодинамическим потенциалом $H_k^2/8\pi^1$). При наличии в ней магнитного поля сюда добавляется еще такая же магнитная энергия, так что всего получаем $H_k^2/4\pi$. Средний термодинамический потенциал единицы объема в промежуточном состоянии равен, следовательно,

$$\Phi = \frac{H_k^2}{4\pi} x_n = \frac{H_k \bar{B}}{4\pi}. \quad (44,2)$$

Согласно общему правилу зависимость между \bar{B} и \bar{H} получается из термодинамического соотношения

$$H = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial B}.$$

В данном случае мы находим, что вектор \bar{H} параллелен \bar{B} , а его абсолютная величина

$$\bar{H} = H_k, \quad (44,3)$$

т. е. имеет постоянное значение, не зависящее от величины индукции.

Если изобразить зависимость \bar{B} от \bar{H} графически (рис. 23), то сверхпроводящему состоянию будет соответствовать отрезок OA оси абсцисс, нормальному — прямая BC ($\bar{B} = \bar{H}$). Вертикальный же отрезок AB ($\bar{H} = H_k$) отвечает промежуточному состоянию.

Пусть n — единичный вектор в направлении силовых линий усредненного магнитного поля. Написав $\bar{H} = H_k n$ и подставив в уравнение

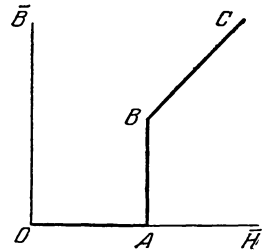


Рис. 23.

¹⁾ Мы пренебрегаем здесь всеми стрикционными эффектами. В этих условиях можно было бы говорить, вместо изменения термодинамического потенциала, о совпадающем с ним изменении свободной энергии.

$\text{rot } \bar{H} = 0$ (справедливое в отсутствие объемного тока), найдем, что $\text{rot } \mathbf{n} = 0$. С другой стороны, поскольку $n^2 = 1$, то

$$\text{grad } n^2 = 2(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} + 2[\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n}] = 0,$$

откуда заключаем, что и $(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} = 0$. Но это значит, что вектор \mathbf{n} постоянен по направлению. Таким образом, силовые линии среднего поля прямолинейны.

Применим полученные результаты к эллипсоиду, находящемуся в промежуточном состоянии. Для однородного поля внутри эллипсоида имеет место соотношение

$$(1-n)\bar{H} + n\bar{B} = \xi,$$

справедливое при любой зависимости B от H . Положив здесь $\bar{H} = H_k$, получим

$$\bar{B} = \frac{\xi}{n} - \frac{1-n}{n} H_k. \quad (44,4)$$

Таким образом, средняя индукция в эллипсоиде меняется с напряженностью внешнего поля по линейному закону от нуля при $\xi = (1-n)H_k$ до H_k при $\xi = H_k$.

Напишем также выражение для полного термодинамического потенциала $\tilde{\mathcal{F}}$ эллипсоида в промежуточном состоянии. Для этого исходим из общей формулы

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left[\Phi - \frac{H\mathbf{B}}{8\pi} - \frac{(B-H)\xi}{8\pi} \right] dV$$

(ср. (31,7)), также справедливой при любой зависимости B от H . Подставив сюда значения Φ , H , B из (44,2) — (44,4), получим

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \frac{V}{8\pi} \left[H_k^2 - \frac{1}{n} (H_k - \xi)^2 \right] \quad (44,5)$$

(V — объем эллипсоида); это значение отсчитывается от термодинамического потенциала чисто сверхпроводящего эллипсоида в отсутствие магнитного поля. Для сверхпроводящего же эллипсоида во внешнем поле ξ имеем

$$\tilde{\mathcal{F}}_s = -\frac{\mathcal{N}\xi}{2} = \frac{V\xi^2}{8\pi(1-n)}$$

(согласно (31,6) и (42,2)). Эти два выражения сравниваются, как и следовало, при $\xi = H_k(1-n)$.

Подчеркнем в заключение, что точность изложенного среднего описания промежуточного состояния фактически невелика ввиду сравнительно большой величины толщины слоев. По той же причине из этого описания вообще ускользают некоторые явления, связанные с особенностями слоистой структуры. Сюда относится тот факт, что переход из сверхпроводящего в промежуточное состояние

при увеличении внешнего поля происходит в действительности не точно при $\mathfrak{H} = (1-n)H_k$, а несколько позже. Происхождение этого «запаздывания» заключается в следующем. Переход в промежуточное состояние происходит тогда, когда это состояние становится термодинамически устойчивым, т. е. когда становится $\mathfrak{P}_t < \mathfrak{P}_s$. Но слоистая структура, помимо чисто «объемной» энергии (44,5), приписываемой ей в усредненном описании, связана также с дополнительной энергией, обусловленной наличием границ между слоями и изменениями их формы вблизи поверхности тела. Это обстоятельство и приводит к некоторому сдвигу момента перехода в сторону больших полей¹⁾.

Задачи

1. Определить теплоемкость эллипсоида в промежуточном состоянии.

Решение. Энтропию, а затем теплоемкость находим дифференцированием термодинамического потенциала (44,5) по температуре. Пренебрегая членами, содержащими коэффициент теплового расширения тела, получим

$$\mathcal{C}_t - \mathcal{C}_s = \frac{VT}{4\pi n} [(1-n)(H_k'^2 + H_k H_k'') - \mathfrak{H} H_k''']$$

(штрих означает дифференцирование по T); \mathcal{C}_s — теплоемкость тела в сверхпроводящем состоянии (ее слабой зависимостью от \mathfrak{H} мы здесь пренебрегаем). Отсюда видно, что при изменении \mathfrak{H} (при постоянной температуре) в точке $\mathfrak{H} = (1-n)H_k$ теплоемкость меняется скачком от \mathcal{C}_s до

$$\mathcal{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H_k^3,$$

затем меняется с \mathfrak{H} по линейному закону до значения (при $\mathfrak{H} = H_k$)

$$\mathcal{C}_s - \frac{VT}{4\pi} (H_k'^2 + H_k H_k') + \frac{VT}{4\pi n} H_k'^2 = \mathcal{C}_n + \frac{VT}{4\pi n} H_k'^2,$$

откуда падает скачком до \mathcal{C}_n .

2. Определить форму и размеры n - и s -слоев в промежуточном состоянии в плоскопараллельной пластинке в перпендикулярном к ней внешнем магнитном поле \mathfrak{H} ; слои предполагаются неразветвленными (*Л. Ландау*, 1937).

Решение. Области n - и s -фаз представляют собой расположенные вдоль поля слои, плоскопараллельность которых нарушается лишь вблизи поверхности пластинки.

Силовые линии магнитного поля (пунктирные линии на рис. 24) проходят только через n -слои, причем границы s -слоев тоже являются силовыми линиями (в силу условия $B_n = 0$ на них). Учитывая также, что на границе n - и s -фаз должно быть $H = H_k$, пишем следующие условия на границах s -слоя:

$$\left. \begin{array}{l} \text{на отрезке } BC: H_x = 0, \\ \text{на } BA \text{ и } CD: H_x^2 + H_y^2 = H_k^2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

(оси координат выбраны указанным на рис. 24 образом). Вдали от пластинки поле H должно совпадать с внешним полем \mathfrak{H} , т. е.

$$\text{при } x \rightarrow -\infty \quad H_x = \mathfrak{H}, H_y = 0. \quad (2)$$

1) См. об этом в указанной на стр. 230 литературе.

Введем скалярный и векторный потенциалы поля согласно формулам

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

и комплексный потенциал $w = \varphi - iA$ (ср. § 3, раздел 3).

Вдоль каждой силовой линии $A = \text{const}$. Положим $A = 0$ на силовой линии, подходящей к точке O и затем разветвляющейся на линии OCD и OBA , образуя границу одного из s -слоев. Разность значений A на границах двух последовательных s -слоев равна потоку магнитного поля через отрезок $a = a_s + a_n$; т. е. равна $\oint a$. Поэтому значения A на границах всех s -слоев будут целыми кратными $\oint a$. Вводя также «комплексную напряженность»

$$\eta = H_x - iH_y = -\frac{dw}{dz}, \quad z = x + iy,$$

напишем условия (1) в виде:

$$\text{на } BC: \operatorname{Re} \eta = 0,$$

$$\text{на } BA \text{ и } CD: |\eta| = H_k. \quad (3)$$

Введем новую величину

$$\zeta = e^{-2\pi i w / \oint a} - 1 \quad (4)$$

и будем рассматривать η как функцию от ζ . На всех граничных силовых линиях (вместе с их продолжениями вне пластинки) величина ζ вещественна: $\zeta = e^{-2\pi \varphi / \oint a} - 1$.

Поскольку φ определено с точностью до постоянной, то можно произвольно выбрать значение φ в одной точке. Пусть $\varphi = 0$ в точке O . Тогда в этой точке и $\zeta = 0$. На рассматриваемой граничной силовой линии вдали от пластинки $\zeta = -1$ (так как при $x \rightarrow -\infty$ имеем $\varphi \rightarrow -\oint a \rightarrow +\infty$). Значение ζ в точке B (или C), где силовая линия входит внутрь пластинки,

Рис. 24.

обозначим как ζ_0 . На ветвях CD и BA ζ меняется от ζ_0 до ∞ . Тогда условия (1) и (3) можно написать в виде:

$$\text{при } \zeta = -1 \quad \eta = \oint a, \quad (5)$$

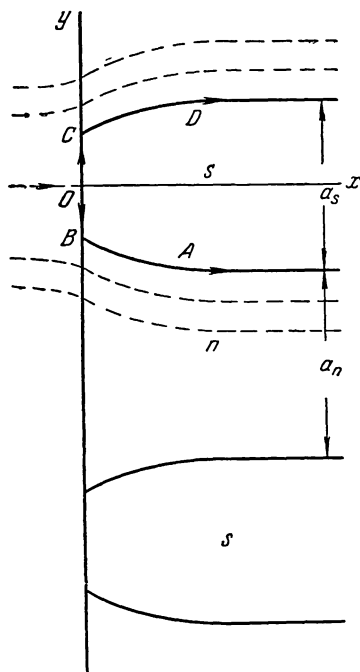
$$\text{при } 0 < \zeta < \zeta_0 \quad \operatorname{Re} \eta = 0;$$

$$\text{при } \zeta_0 < \zeta \quad |\eta| = H_k. \quad (6)$$

Кроме того, функция $\eta(\zeta)$ должна быть везде конечной.

Условиям (6) удовлетворяет функция

$$\eta = H_k \left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{-\frac{\zeta_0}{\zeta}} \right]. \quad (7)$$



При вещественных отрицательных значениях ζ оба корня вещественны и берутся с написанными здесь знаками. При $0 < \zeta < \zeta_0$ оба корня мнимы, причем берутся корни

$$\eta = \mp H_{\kappa} i \left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta} - 1} \right]$$

со знаками — или + соответственно на отрезках OC и OB . При $\zeta > \zeta_0$ надо писать

$$\eta = H_{\kappa} \left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} \mp i \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \right]$$

со знаками — и + соответственно на CD и BA . Значение ζ_0 определяется из условия (5) и равно

$$\zeta_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h} - h \right)^2, \quad (8)$$

где введено обозначение $h = \xi/H_{\kappa}$.

Форма слоя, т. е. уравнение граничной силовой линии, получается интегрированием соотношения $dz = -d\omega/\eta$ по вещественным ζ :

$$z = - \int \frac{d\omega}{\eta} = \frac{ah}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Подставив сюда $\eta(\zeta)$, отделяя вещественную и мнимую части и выбрав соответствующим образом постоянные интегрирования, получим следующее параметрическое уравнение линии CD :

$$x = \frac{ha}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = \frac{ha}{\pi} \left\{ \text{Arch} \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \sqrt{\zeta_0+1} \text{Arch} \sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}} \right\}, \quad (9)$$

$$y = Y - \frac{ha}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\infty} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = Y - \frac{ha}{\pi} \sqrt{\zeta_0} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \sqrt{\zeta} \right)$$

($Y = \frac{a_s}{2}$ — значение координаты y при $x \rightarrow \infty$; см. рис. 24).

Период слоистой структуры a связан с толщинами a_s и a_n s - и n -слоев равенствами $a = a_s + a_n$, $a\phi = a_n H_{\kappa}$. Второе из них является следствием непрерывности магнитного потока, проходящего целиком в n -слоях. Отсюда

$$a_s = a(1-h), \quad a_n = ha.$$

Период a определяется условием минимальности полного термодинамического потенциала пластинки. Наличие «поверхностного натяжения» на границе n - и s -фаз приводит к члену

$$\mathcal{S}_1 = \frac{2l}{a} \frac{H_{\kappa}^2}{8\pi} \Delta$$

в термодинамическом потенциале, отнесенном к 1 см^2 поверхности пластинки. Здесь l — толщина пластинки, а коэффициент поверхностного натяжения обозначен как $H_{\kappa}^2 \Delta / 8\pi$ (Δ имеет размерность длины). При вычислении этой части энергии закруглением слоев вблизи поверхности пластинки можно, конечно, пренебречь.

«Энергию выхода» слоев к поверхности пластинки можно представить в виде суммы двух частей. Во-первых, само по себе увеличение объема

n -слоев по сравнению с объемом, который они имели бы при сохранении плоскопараллельности на всем протяжении, приводит к дополнительной энергии

$$\mathcal{E}_2 = \frac{4}{a} \int_0^{\infty} (Y - y) dx \frac{H_k^2}{8\pi}$$

(множитель 4 учитывает наличие четырех углов — таких, как B и C на рис. 24 — с обеих сторон каждого из $\frac{1}{a}$ s -слоев).

Во-вторых, выход слоев к поверхности пластинки меняет энергию системы во внешнем поле, т. е. энергию $-1/2 c \mathcal{M} \mathcal{H}$. Магнитный момент пластинки обусловлен токами на поверхностях s -слоев. При скачке тангенциальной компоненты индукции от H до 0 поверхностная плотность токов $g = \pm cH/4\pi$. Поэтому на единицу длины оси z на каждую граничную поверхность s -слоя приходится магнитный момент

$$- \int_{OCD} \frac{H}{4\pi} y ds \quad (ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Если бы слой не выходил к поверхности, отрезок OC отсутствовал бы, а на CD было бы везде $y = Y$. Поэтому избыток магнитного момента для каждого из четырех углов равен

$$- \int_{OCD} \frac{H}{4\pi} y ds + \int_0^{\infty} \frac{H_k}{4\pi} Y dx.$$

Соответственно, избыточная энергия

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= -\frac{\mathcal{H}}{2} \frac{4}{a} \left[\int_0^{\infty} \frac{H_k}{4\pi} Y dx - \int_{OCD} \frac{H}{4\pi} y ds \right] = \\ &= \frac{\mathcal{H}}{2a\pi} \left[H_k \int_{CD} (-Y dx + y ds) + \int_{OC} H_y dy \right]. \end{aligned}$$

Координаты x и y , выраженные через ζ , пропорциональны a . Поэтому все интегралы в $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ пропорциональны a^2 , так что эта часть термодинамического потенциала пропорциональна a . Сумма же $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ имеет, следовательно, вид¹⁾

$$\mathcal{E} = \frac{H_k^2}{4\pi} \left[\frac{l\Delta}{a} + af(h) \right].$$

Условие ее минимальности дает

$$a = \sqrt{\frac{l\Delta}{f(h)}}.$$

Отметим, что в n -слоях вблизи поверхности пластинки магнитное поле может быть существенно меньшим, чем H_k , т. е. здесь имеет место ситуация, соответствующая изображенной на рис. 22, a . Ее термодинамическая невыгодность компенсируется в данном случае энергией поверхностного натяжения, препятствующей дальнейшему уменьшению толщины слоев.

¹⁾ Интегралы в \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 не выражаются через элементарные функции. Функция $f(h)$ протабулирована в статье Е. Лифшица и Ю. Шарвина (см. примечание на стр. 230).

ГЛАВА VII

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 45. Токи Фуко

До сих пор мы рассматривали лишь постоянные электрические и магнитные поля, а уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (45,1)$$

применялось нами (в § 30) лишь со вспомогательной целью при выводе выражения для энергии магнитного поля.

Характер переменных электромагнитных полей в материальных средах существенно зависит от рода этих сред и от порядка величины частоты поля. В этом параграфе мы рассмотрим явления, происходящие в массивных проводниках, помещенных во внешнее переменное магнитное поле. Мы будем предполагать при этом, что скорость изменения поля не слишком велика, будучи ограничена рядом условий, сформулированных ниже. Электромагнитные поля и токи, удовлетворяющие этим условиям, называют квазистационарными.

Прежде всего, будем считать, что длина волны $\lambda \sim c/\omega$, соответствующая (в пустоте или диэлектрической среде, окружающей проводник) частоте поля ω , велика по сравнению с размерами тела l :

$$\omega \ll \frac{c}{l}.$$

Тогда распределение магнитного поля вне проводника в каждый момент времени можно описывать уравнениями статического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (45,2)$$

пренебрегая всеми эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений. Разумеется, такое пренебрежение возможно лишь на не слишком больших (малых по сравнению с λ) расстояниях от тела (что во всяком случае достаточно для целей определения поля внутри него).

Полная же система уравнений поля внутри проводника складывается из уравнения (45,1) и уравнений¹⁾:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (45,3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (45,4)$$

Второе из этих уравнений было выведено, строго говоря, для постоянных токов и магнитных полей. Поэтому необходимо указать критерий, позволяющий с достаточной точностью использовать это уравнение для переменных полей. В уравнении (45,4) существенно, что связь тока с напряженностью электрического поля дается соотношением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ с постоянным значением σ , относящимся к стационарному случаю. Это имеет место, если период изменения поля велик по сравнению с временами, характерными для микроскопического механизма проводимости. Другими словами, частота поля должна быть мала по сравнению с обратным временем свободного пробега электронов в проводнике. Для типичных металлов (при комнатной температуре) предельные допускаемые этим условием частоты лежат в инфракрасной области спектра²⁾.

Кроме того, однако, есть и другое условие, ограничивающее в данном случае применимость уравнений. Будучи макроскопическими, эти уравнения предполагают малость длин свободного пробега электронов по сравнению с расстояниями, на которых заметно меняется поле. К этому условию мы еще вернемся ниже.

В уравнениях (45,1) и (45,4) \mathbf{E} есть напряженность индукционного электрического поля, возникающего благодаря переменности магнитного поля. По известному \mathbf{H} поле \mathbf{E} определяется непосредственно уравнением (45,4). Уравнение же для \mathbf{H} получается путем исключения \mathbf{E} из (45,1) и (45,4):

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{\sigma}. \quad (45,5)$$

В однородной среде с постоянными проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ множитель $1/\sigma$ можно вынести из-под знака rot ,

¹⁾ В анизотропном теле вместо $\sigma \mathbf{E}$ в правой стороне уравнения (45,4) должен стоять вектор с компонентами $\sigma_{ik} E_k$.

²⁾ Для плохих проводников (например, полупроводников) применимость уравнения (45,4) требует соблюдения еще одного условия, которое может оказаться даже более сильным. У таких тел может иметь смысл одновременное введение проводимости и диэлектрической постоянной. Тогда в правой

стороне уравнения (45,4) добавляется член $-\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и условие его малости по сравнению с $\frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}$ гласит: $\sigma/\omega \gg \epsilon$. У хороших же проводников — металлов — фактически $\sigma/\omega \gg 1$ во всей области частот, для которых еще можно говорить о постоянной проводимости (см. также примечание на стр. 242).

а согласно (45,3) имеем $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Поэтому $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, и мы получаем уравнение

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (45,6)$$

Вместе с уравнением $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ оно составляет полную систему, достаточную для определения магнитного поля. Отметим, что уравнение (45,6) имеет вид уравнения теплопроводности, причем роль «коэффициента температуропроводности» χ играет $c^2/4\pi\sigma\mu$.

Граничные условия для магнитного поля на поверхности проводника очевидны из вида самих уравнений и по-прежнему гласят:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{t1} = H_{t2}. \quad (45,7)$$

Выражение правой части уравнения (45,4) не влияет на второе из этих условий в силу своей ограниченности. При $\mu = 1$ можно написать просто ¹⁾

$$H_1 = H_2. \quad (45,8)$$

Непрерывность H_t приводит к непрерывности $(\operatorname{rot} \mathbf{H})_n$ и согласно уравнению (45,4) — к непрерывности $(\sigma \mathbf{E})_n$. Но вне проводника $\sigma = 0$, и поэтому мы приходим к выводу, что на поверхности

$$E_n^{(i)} = 0,$$

где индекс (i) отличает поле внутри проводника. Вместе с E_n обращается в нуль также и $j_n = \sigma E_n$. Таким образом, рассматриваемая система уравнений автоматически приводит к исчезновению (на поверхности проводника) нормальной компоненты плотности тока. Другими словами, в рассматриваемом приближении наличие переменного магнитного поля не может привести к появлению на поверхности проводника свободных зарядов.

Граничное условие (45,8) недостаточно для полной формулировки задачи, если проводник представляет собой составное тело, состоящее из участков с различными проводимостями. На границах раздела этих участков наряду с непрерывностью H необходимо учесть также и условие непрерывности E_t ; для магнитного поля это условие означает, что

$$\frac{(\operatorname{rot} \mathbf{H})_{t1}}{\sigma_1} = \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{H})_{t2}}{\sigma_2}. \quad (45,9)$$

¹⁾ Для обычных диа- и парамагнитных тел μ очень близко к 1 и учет μ в следующих ниже формулах был бы не имеющим смысла превышением точности. Заметно отличные от 1 значения μ могут представиться у ферромагнитных металлов, магнитные свойства которых (в достаточно слабых полях) можно описывать с помощью большой постоянной проницаемости. У этих веществ, однако, уже сравнительно рано наступает дисперсия μ (появление зависимости ее от частоты ω), сопровождающаяся уменьшением μ практически до 1. Имея в виду эти обстоятельства, ниже в этой главе мы полагаем $\mu = 1$.

Установив основные уравнения, перейдем к исследованию характера описываемых ими переменных полей.

Предположим, что проводник помещен в магнитное поле, источники которого в некоторый момент времени выключаются. Поле в проводнике (и вокруг него) не исчезнет при этом мгновенно, а ход его затухания со временем определяется уравнением (45,6). Для решения такого рода задач надо, следуя общим методам математической физики, поступить следующим образом. Ищем решения уравнения (45,6), имеющие вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x, y, z) e^{-\gamma_m t}$$

с постоянными γ_m . Для функций $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ получим уравнения

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}_m = -\gamma_m \mathbf{H}_m. \quad (45,10)$$

При заданной форме проводника эти уравнения имеют отличные от нуля решения (удовлетворяющие необходимым граничным условиям) лишь при определенных γ_m , составляющих набор его «собственных значений». Все эти значения вещественны и положительны¹⁾, а соответствующие им функции $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ составляют полную систему взаимно ортогональных векторных функций. Пусть распределение поля в начальный момент времени дается функцией $\mathbf{H}_0(x, y, z)$. Разлагая ее по системе функций \mathbf{H}_m ,

$$\mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_m c_m \mathbf{H}_m(x, y, z),$$

мы получим решение поставленной задачи о затухании поля в виде

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z). \quad (45,11)$$

Скорость затухания поля определяется в основном тем членом этой суммы, который соответствует наименьшему из γ_m ; пусть это будет γ_1 . «Время затухания» поля можно определить как $\tau = 1/\gamma_1$.

1) В этом легко убедиться следующим образом. Для того чтобы избежать необходимости учитывать граничные условия на поверхности тела, исходим из уравнения (45,5), в котором можно представлять себе, что σ обращается в нуль вне тела непрерывным образом. Умножив уравнение

$$\frac{4\pi}{c^2} \gamma_m \mathbf{H}_m = -\operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}_m}{\sigma}$$

с обеих сторон на \mathbf{H}_m^* и интегрируя по всему пространству, получим

$$\frac{4\pi}{c^2} \gamma_m \int |\mathbf{H}_m|^2 dV = \int \mathbf{H}_m^* \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}_m}{\sigma} dV = \int \frac{1}{\sigma} |\operatorname{rot} \mathbf{H}_m|^2 dV,$$

откуда вещественность и положительность γ_m очевидны.

Порядок величины этого времени очевиден из самого уравнения (45,10).

Поскольку $\Delta H \sim \frac{H}{l^2}$ (где l — размеры проводника), то

$$\tau \sim \frac{4\pi\sigma l^2}{c^2}. \quad (45,12)$$

Другого рода задачи связаны с поведением проводников, помещенных во внешнее переменное магнитное поле с заданной частотой ω . Магнитное поле, проникая внутрь проводника, индуцирует в нем переменное электрическое поле, а последнее в свою очередь вызывает появление токов (так называемые токи Фуко). Общее представление о характере проникновения поля в проводник можно получить уже, исходя из указанной выше аналогии между уравнением (45,6) и уравнением теплопроводности. Из теории теплопроводности известно, что величина, удовлетворяющая такому уравнению, за интервал времени t «распространяется» в пространстве на расстояние порядка $\sqrt{\chi t}$. Поэтому мы сразу можем заключить, что магнитное поле «проникает» вглубь проводника на расстояние δ порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma\omega}}.$$

То же самое относится, конечно, и к индуцируемым им электрическому полю и токам.

В переменном поле с частотой ω зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Уравнение (45,6) принимает при этом вид

$$\Delta H = -\frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2} H. \quad (45,13)$$

Рассмотрим два предельных случая. Если «глубина проникновения» δ велика по сравнению с размерами тела (малые частоты), то в первом приближении можно заменить правую сторону уравнения (45,13) нулем. Тогда распределение магнитного поля в каждый момент времени будет таким, каким оно было бы в стационарном случае при заданном значении внешнего поля вдали от тела. Обозначим это решение как $H_{ст}$; оно не зависит от частоты (точнее, содержит ее лишь во временном множителе $e^{-i\omega t}$). Индуцированное же электрическое поле появляется лишь в следующем приближении по ω , так как в стационарном случае оно вообще отсутствовало бы. Этому соответствует тот факт, что, вычисляя E по $H_{ст}$ согласно уравнению (45,4), мы получили бы нуль, так как $\text{rot } H_{ст} = 0$. Поэтому для вычисления E надо обратиться к уравнению (45,1), согласно которому

$$\text{rot } E = i \frac{\omega}{c} H_{ст}. \quad (45,14)$$

Это уравнение вместе с уравнением $\text{div } E = 0$ (следующим из (45,4)

при постоянной вдоль тела σ) полностью определяет распределение электрического поля. Отметим, что оно оказывается пропорциональным частоте ω .

Обратимся к обратному предельному случаю $\delta \ll l$ (большие частоты). Условие применимости макроскопических уравнений поля, о котором упоминалось в начале параграфа, требует, чтобы δ было все же велико по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости¹⁾.

При $\delta \ll l$ магнитное поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника. Для вычисления поля вне проводника можно пренебречь толщиной этого слоя, т. е. считать, что внутри тела магнитное поле вообще не проникает. В этом смысле проводник в высокочастотном магнитном поле ведет себя так же, как сверхпроводник в постоянном поле, и для вычисления поля вне его надо решить соответствующую стационарную задачу для сверхпроводника той же формы.

Исследование истинного распределения поля в поверхностном слое проводника можно произвести в общем виде, рассматривая небольшие участки поверхности как плоские. Речь идет тогда о решении уравнения (45,13) для проводящей среды, ограниченной плоской поверхностью, вне которой поле имеет заданное значение, которое обозначим как $H_0 e^{-i\omega t}$. Этот вектор получается указанным выше образом в результате решения внешней задачи и параллелен поверхности проводника. В силу граничного условия (45,8) магнитное поле в проводнике у его поверхности равно тому же $H_0 e^{-i\omega t}$.

Выберем поверхность проводника в качестве плоскости xu , причем проводящая среда заполняет полупространство $z > 0$. Ввиду однородности условий задачи по направлениям x и u искомое поле \mathbf{H} зависит только от координаты z (и времени). Поэтому имеем $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_z / \partial z = 0$, и так как на границе $H_z = 0$, то и везде $H_z = 0$. Согласно (45,13) имеем для \mathbf{H} уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}} i = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c} (1 + i).$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль вдали от поверхности ($z \rightarrow \infty$), пропорционально e^{ikz} .

Учитывая также граничное условие при $z = 0$, получим

$$\mathbf{H} = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}, \quad (45,15)$$

¹⁾ В металлах фактически именно это условие нарушается (при увеличении частоты) первым. Условие же $\omega \ll 1/\tau$, где τ — время свободного пробега, может оказаться более сильным для полупроводников с небольшой проводимостью.

где «глубина проникновения» δ определяется как

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad k = \frac{1+i}{\delta}. \quad (45,16)$$

Электрическое же поле определится теперь с помощью уравнения (45,4). Вводя единичный вектор \mathbf{n} в направлении оси z , получим

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} (1-i) [\mathbf{Hn}]. \quad (45,17)$$

Отметим, что $E \sim (\delta/\lambda) H$.

Если поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ «линейно поляризовано», то надлежащим выбором начала отсчета времени можно добиться вещественности \mathbf{H}_0 . Выберем тогда направление этого вектора в качестве направления оси y . Отделяя в (45,16) и (45,17) вещественную часть, получим

$$H_y = H = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), \quad (45,18)$$

$$E_x = E = H_0 \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Вместе с электрическим полем по такому же закону будет распределена плотность токов Фуко $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Возникновение токов Фуко сопровождается диссипацией энергии поля, выделяющейся в виде джоулева тепла. Средняя (по времени) энергия Q , диссипируемая в проводнике в 1 сек, равна

$$Q = \int \overline{\mathbf{jE}} dV = \int \sigma \overline{E^2} dV.$$

Ее можно вычислить и как среднее количество энергии поля, втекающей в 1 сек извне внутрь проводника, т. е. как интеграл

$$Q = \oint \overline{\mathbf{S}} df = \frac{c}{4\pi} \int [\overline{\mathbf{EH}}] df, \quad (45,19)$$

взятый по поверхности проводника ¹⁾.

1) Если какие-либо две величины $a(t)$ и $b(t)$ пишутся в комплексном виде (пропорциональном $e^{-i\omega t}$), то при образовании их произведения надо, разумеется, сначала отделить вещественную часть. Но если нас интересует только среднее (по времени) значение этого произведения, то его можно вычислить как

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ab^*\}.$$

Действительно, члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении обращаются в нуль, и потому

$$\frac{1}{4} \overline{(a+a^*)(b+b^*)} = \frac{1}{4} (ab^* + a^*b).$$

В частности, $\overline{\mathbf{S}}$ можно вычислить как вещественную часть «комплексного вектора Пойнтинга», согласно

$$\overline{\mathbf{S}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} [\mathbf{EH}^*] \right\}. \quad (45,19a)$$

Мы видели выше, что в предельном случае $\delta \gg l$ амплитуда магнитного поля внутри проводника не зависит от частоты, а амплитуда электрического поля пропорциональна ω . Поэтому диссипация энергии Q при малых частотах пропорциональна ω^2 .

В случае же $\delta \ll l$ магнитное и электрическое поля на поверхности проводника даются формулами (45,15) и (45,17) с $z=0$. Вектор Пойнтинга нормален к поверхности, а его среднее значение

$$S = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} |H_0|^2,$$

причем изменение H_0 вдоль поверхности определяется указанным выше образом решением задачи о поле вне сверхпроводника той же формы. Диссипация энергии

$$Q = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \oint |H_0|^2 df. \quad (45,20)$$

Отметим, что при больших частотах она оказывается пропорциональной $\sqrt{\omega}$.

Диссипация энергии может быть выражена и через полный магнитный момент \mathcal{M} , приобретаемый проводником в магнитном поле. В периодическом поле магнитный момент тоже есть периодическая функция времени с той же частотой. Согласно формуле (31,4) изменение свободной энергии тела со временем дается производной

$$-\mathcal{M} \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

где \mathfrak{H} — внешнее однородное поле, в которое помещен проводник.

Это выражение не дает еще непосредственно искомую диссипацию, так как энергия тела изменяется не только благодаря диссипации, но и благодаря периодическому ее мигрированию между телом и окружающим полем. Если же произвести усреднение по времени, то последняя часть исчезнет и, таким образом, средняя диссипация энергии в единицу времени

$$Q = -\overline{\mathcal{M} \frac{d\mathfrak{H}}{dt}}. \quad (45,21)$$

Если \mathcal{M} и \mathfrak{H} выражены в комплексном виде, то $\dot{\mathfrak{H}} = -i\omega\mathfrak{H}$ и Q можно вычислять как

$$Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{i\omega \mathcal{M} \mathfrak{H}^*\} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \{\mathcal{M} \mathfrak{H}^*\} \quad (45,22)$$

(по поводу появления здесь множителя $1/2$ см. примечание на стр. 243).

Компоненты магнитного момента \mathcal{M} являются линейными функциями внешнего поля:

$$\mathcal{M}_i = V \alpha_{ik} \mathfrak{H}_k, \quad (45,23)$$

где безразмерные коэффициенты $\alpha_{ik}(\omega)$ зависят от формы тела и его ориентации во внешнем поле (но не от его объема V); \mathcal{M} и \mathfrak{H} в этой формуле предполагаются написанными в комплексном виде, так что и величины α_{ik} , вообще говоря, комплексны. Тензор $V\alpha_{ik}$ можно назвать тензором магнитной поляризуемости тела как целого. В дальнейшем (§ 88) будет показано, что этот тензор симметричен:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (45,24)$$

Воспользовавшись этим свойством, можно написать

$$\mathcal{M}\mathfrak{H}^* = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k = \frac{V}{2}\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) = V\alpha_{ik}\operatorname{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}.$$

Если, кроме того, написать комплексные величины α_{ik} в виде

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + i\alpha''_{ik},$$

то для диссипации энергии (45,22) получим

$$Q = \frac{V}{2}\omega\alpha''_{ik}\operatorname{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}. \quad (45,25)$$

Таким образом, диссипация энергии определяется мнимой частью магнитной поляризуемости тела. Мы видели выше, что при малых частотах Q пропорциональна ω^2 , а при больших $\sqrt{\omega}$. Поэтому мы можем заключить, что величины α''_{ik} в этих двух предельных случаях пропорциональны соответственно ω и $\omega^{-1/2}$. Убывая как при $\omega \rightarrow 0$, так и при $\omega \rightarrow \infty$, они проходят в промежуточной области через максимум.

Магнитный момент проводника в переменном магнитном поле создается в основном возникающими в теле токами проводимости; он отличен от нуля даже при $\mu = 1$, когда статический момент обращается в нуль. Последний должен получаться из $\mathcal{M}(\omega)$ в пределе при $\omega \rightarrow 0$. Отсюда следует, что вещественная часть магнитной поляризуемости α'_{ik} стремится при $\omega \rightarrow 0$ к постоянному значению (к нулю при $\mu = 1$), соответствующему намагничению в постоянном поле. В пределе же $\omega \rightarrow \infty$, когда магнитное поле не проникает внутрь тела, величины α'_{ik} стремятся к другому постоянному пределу, соответствующему статическому намагничению сверхпроводника той же формы.

Задачи

1. Определить магнитную поляризуемость изотропного проводящего шара радиуса a в однородном периодическом внешнем поле.

Решение. Поле $\mathbf{H}^{(i)}$ внутри шара удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \mathbf{H}^{(i)} + k^2 \mathbf{H}^{(i)} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H}^{(i)} = 0 \quad \left(k = \frac{1+i}{\delta} \right).$$

Ищем его в виде $H^{(i)} = \text{rot } A$, причем A удовлетворяет уравнению $\Delta A + k^2 A = 0$; поскольку H — аксиальный, то A — полярный вектор. Ввиду симметрии шара единственным постоянным вектором, от которого может зависеть искомое решение, является напряженность внешнего поля \mathfrak{H} . Обозначим посредством f сферически симметричное решение скалярного уравнения $f\Delta + k^2 f = 0$:

$$f = \frac{\sin kr}{r}.$$

Тогда полярный вектор A , удовлетворяющий векторному уравнению $\Delta A + k^2 A = 0$ и зависящий линейно от аксиального постоянного вектора \mathfrak{H} , можно написать в виде

$$A = \beta \text{ rot } (f\mathfrak{H})$$

(β — постоянная). Таким образом, ищем $H^{(i)}$ в виде

$$H^{(i)} = \beta \text{ rot rot } (f\mathfrak{H}) = \beta \left(\frac{f''}{r} + k^2 f \right) \mathfrak{H} - \beta \left(\frac{3f'}{r} + k^2 f \right) n (n\mathfrak{H}),$$

где n — единичный вектор в направлении r (вторая производная f'' исключена с помощью уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$).

Поле $H^{(e)}$ вне шара удовлетворяет уравнениям $\text{rot } H^{(e)} = 0$, $\text{div } H^{(e)} = 0$. Ищем его в виде $H^{(e)} = -\text{grad } \varphi + \mathfrak{H}$, причем φ удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi = 0$, а на бесконечности обращается в нуль. Такая функция φ , зависящая линейно от постоянного вектора \mathfrak{H} , имеет вид

$$\varphi = -\alpha V \mathfrak{H} \nabla \frac{1}{r}$$

($V = 4\pi a^3/3$). Таким образом, ищем $H^{(e)}$ в виде

$$H^{(e)} = V\alpha \text{ grad} \left(\mathfrak{H} \nabla \frac{1}{r} \right) + \mathfrak{H} = \frac{V\alpha}{r^3} [3n (n\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}.$$

Очевидно, что $\alpha V \mathfrak{H}$ есть магнитный момент шара, так что $V\alpha$ — его магнитная поляризуемость (в силу симметрии шара тензор α_{ik} сводится к скаляру: $\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}$).

На поверхности шара ($r = a$) непрерывны все компоненты H . Приравняв отдельно компоненты, параллельные и перпендикулярные к n , получим два уравнения для определения α и β . Для интересующей нас поляризуемости (отнесенной к единице объема) получается:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + i\alpha'' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{a^2 k^2} + \frac{3}{ak} \text{ctg } ak \right], \\ \alpha' &= -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{a} \frac{\text{sh}(2a/\delta) - \sin(2a/\delta)}{\text{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right], \\ \alpha'' &= -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2} \left[1 - \frac{a}{\delta} \frac{\text{sh}(2a/\delta) + \sin(2a/\delta)}{\text{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right]. \end{aligned}$$

В предельном случае малых частот ($\delta \gg a$)

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{1}{105\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{4\pi}{105} \frac{a^4 \sigma^2 \omega^2}{c^4}, \\ \alpha'' &= \frac{1}{20\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{10c^2}. \end{aligned}$$

Для больших же частот ($\delta \ll a$)

$$\alpha' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \right] = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3c}{2a\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \right],$$

$$\alpha'' = \frac{9}{16\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{9c}{16\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

Предельное значение $V\alpha' = -a^3/2$ соответствует магнитному моменту сверхпроводящего шара, а значение α'' можно было бы найти и с помощью формулы (45,2), воспользовавшись формулой (42,3) для поля у поверхности сверхпроводящего шара.

2. То же для проводящего цилиндра (радиуса a) в однородном периодическом магнитном поле, перпендикулярном к его оси.

Решение. Задача является «двухмерным аналогом» задачи 1; ниже все векторные операции являются двухмерными операциями в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, а \mathbf{r} есть радиус-вектор в этой плоскости. Поле внутри цилиндра ищем в виде

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f\mathfrak{H}) = \beta \left(\frac{f'}{r} + k^2 f \right) \mathfrak{H} - \beta \left(\frac{2f'}{r} + k^2 f \right) \mathbf{n} (n\mathfrak{H}),$$

где $f = J_0(kr)$ — симметричное решение двухмерного уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, конечное при $r = 0$. Поле же вне цилиндра ищем как

$$\mathbf{H}^{(e)} = -2\alpha V \operatorname{grad} (\mathfrak{H} \nabla \ln r) + \mathfrak{H} = \frac{2\alpha V}{r^2} [2n(n\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}$$

($V = \pi a^2$). Магнитный момент единицы длины цилиндра есть $V\alpha\mathfrak{H}$ (см. задачу 2 § 3). Из условия $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ при $r = a$, как и в задаче 1, получим

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{ak} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right]$$

(использовано соотношение $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$).

При $\delta \gg a$, разлагая функции Бесселя по степеням ka , получим

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{\pi a^4 \sigma^2 \omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{4c^2}.$$

При $\delta \ll a$ используем асимптотические выражения функций Бесселя и находим

$$\alpha' = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta}{a} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \right),$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

3. То же для цилиндра в магнитном поле, параллельном его оси.

Решение. Магнитное поле параллельно оси цилиндра во всем пространстве. Вне цилиндра $\mathbf{H}^{(e)} = \mathfrak{H}$, а внутри $\mathbf{H}^{(i)} = f\mathfrak{H}$, где f — симметричное решение двухмерного уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, обращающееся в 1 при $r = a$:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathfrak{H} \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

Токи Фуко в цилиндре циркулярны (т. е. \mathbf{j} имеет в цилиндрических координатах только компоненту j_φ) и определяются по полю $H_z = H$ согласно

$$\frac{4\pi j}{c} = -\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Магнитный момент единицы длины цилиндра $\mathcal{M} = \pi a^2 \alpha \mathfrak{H}$, создаваемый токами проводимости, направлен вдоль его оси и равен

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int jr dV = -\frac{1}{4} \int \frac{\partial H}{\partial r} r^2 dr.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi} \left[1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right].$$

Таким образом, продольная поляризуемость цилиндра в два раза меньше поперечной поляризуемости, найденной в задаче 2.

4. Определить наименьший из коэффициентов затухания магнитного поля в проводящем шаре.

Решение. Среди решений уравнений (45,10) для шара имеются функции различной симметрии. Наиболее симметричным было бы решение, определяющееся заданием произвольного постоянного скаляра. Оно, однако, не может существовать по следующей причине. Такое решение было бы сферически симметричным: $H = H_r(r)$, и в силу уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = 0$ (которое справедливо как вне, так и внутри шара) было бы $H = \text{const}/r$. Но эта функция не удовлетворяет условию конечности в центре шара.

Наименьшему значению γ соответствует одно из решений, определяющихся заданием произвольного постоянного вектора. Вид этих решений совпадает, очевидно, с найденным в задаче 1, с той лишь разницей, что в поле $\mathbf{H}^{(e)}$ надо опустить постоянный член, так как на бесконечности должно быть $\mathbf{H} = 0$. При этом k есть теперь вещественная величина ($k^2 = 4\pi\gamma/c^2$), а вектор \mathfrak{H} играет роль произвольного постоянного вектора. Из граничного условия $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ при $r = a$ получаем два уравнения, исключая из которых α и β , найдем $\sin ka = 0$. Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения есть $ka = \pi$, так что наименьшее значение γ есть

$$\gamma = \frac{\pi c^2}{4\pi a^2}.$$

§ 46. Скин-эффект

Рассмотрим распределение плотности тока по сечению проводника, в котором течет отличный от нуля полный переменный ток. На основании полученных в предыдущем параграфе результатов мы заранее можем ожидать, что при увеличении частоты ток будет в основном концентрироваться вблизи поверхности проводника. Это явление называют скин-эффектом.

Точное решение задачи о скин-эффекте зависит, вообще говоря, не только от формы проводника, но и от способа возбуждения в нем тока, т. е. от характера внешнего переменного магнитного поля, индуцирующего ток. Есть, однако, важный случай, когда рас-

пределение тока можно считать не зависящим от способа его возбуждения. Это — ток в тонком проводе, толщина которого мала по сравнению с его длиной.

При вычислении распределения тока по сечению тонкого провода последний можно считать прямолинейным. При этом электрическое поле параллельно оси провода, а магнитный вектор \mathbf{H} лежит в плоскости, перпендикулярной к оси.

Рассмотрим провод кругового сечения. Этот случай особенно прост в связи с тем, что вид поля вне провода заранее очевиден. Действительно, в силу симметрии на поверхности провода $\mathbf{E} = \text{const}$ (в каждый данный момент времени). Но при таком граничном условии уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ в пространстве вне провода имеют решением лишь $\mathbf{E} = \text{const}$ во всем пространстве. По аналогичным причинам и магнитное поле вокруг провода будет таким же, каким оно было бы вокруг провода с постоянным током, равным данному мгновенному значению переменного тока.

Внутри провода электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

совпадающему с уравнением (45,6) для \mathbf{H} (оно получается путем исключения \mathbf{H} из уравнений (45,1) и (45,4) так же, как уравнение (45,6) было получено путем исключения \mathbf{E}). В цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси провода поле \mathbf{E} имеет лишь z -компоненту и зависит только от координаты r ; для периодического поля с частотой ω получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + k^2 E = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta}, \quad (46,1)$$

где δ есть введенная в предыдущем параграфе «глубина проникновения» (45,16). Решение этого уравнения, остающееся конечным при $r=0$, есть

$$E = E_z = \text{const} \cdot J_0(kr) e^{-i\omega t} \quad (46,2)$$

(J_0 — функция Бесселя). По такому же закону распределена плотность тока $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Магнитное же поле $H_\varphi = H$ находим по электрическому согласно уравнению (45,1):

$$\frac{i\omega}{c} H_\varphi = (\text{rot } \mathbf{E})_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (46,3)$$

Имея в виду, что $J_0'(u) = -J_1(u)$, получим

$$H = H_\varphi = -i \cdot \text{const} \cdot \sqrt{\frac{4\pi\sigma i}{\omega}} J_1(kr) e^{-i\omega t} \quad (46,4)$$

с той же const, что и в (46,2). Эту постоянную легко определить из условия, что на поверхности провода должно быть $H = 2I/ca$, где a — его радиус, а I — полный ток, протекающий по проводу.

В предельном случае малых частот ($a/\delta \ll 1$) на всем протяжении сечения провода можно ограничиться первыми членами разложения функции Бесселя:

$$\begin{aligned} E_z &= \text{const} \cdot \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \right] e^{-i\omega t}, \\ H_\varphi &= \text{const} \cdot \frac{2\pi\sigma}{c} r \left[1 - \frac{i}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (46,5)$$

Амплитуда E , а с нею и амплитуда плотности тока, возрастает при удалении от оси пропорционально $\left[1 + \left(\frac{r}{2\delta} \right)^4 \right]$.

В обратном предельном случае больших частот ($a/\delta \gg 1$) на большей части сечения провода можно воспользоваться известной асимптотической формулой

$$J_0(u \sqrt{2i}) \sim \frac{1}{\sqrt{u}} e^{(1-i)u}, \quad (46,6)$$

применимой при больших значениях аргумента функции Бесселя. Сохраняя лишь наиболее быстро меняющийся экспоненциальный множитель, получим

$$\begin{aligned} E_z &= \text{const} \cdot e^{-\frac{a-r}{\delta}} e^{i \left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t \right)}, \\ H_\varphi &= \text{const} \cdot (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} e^{-\frac{a-r}{\delta}} e^{i \left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t \right)}. \end{aligned} \quad (46,7)$$

Эти формулы, естественно, совпадают с формулами (45,15) — (45,17), которые при сильном скин-эффекте применимы вблизи поверхности проводника любой формы.

В общем случае провода с некруговым сечением точный расчет скин-эффекта представляет значительно более сложную задачу, так как требует одновременного определения поля как внутри, так и снаружи провода. Лишь в предельном случае сильного скин-эффекта задача снова упрощается, поскольку поле вне провода может быть заранее определено как статическое поле вокруг сверхпроводника той же формы (§ 45).

Отметим также, что при сильном скин-эффекте распределение тока в проводнике оказывается вполне однозначным (не зависящим от способа возбуждения тока) не только в тонком, но и в проводнике любой толщины. Это следует из указанной в § 42 однозначности распределения поверхностных токов в сверхпроводящем кольце.

§ 47. Комплексное сопротивление

До тех пор, пока частота переменного тока достаточно мала, мгновенное значение силы тока $J(t)$ в линейном контуре определяется значением электродвижущей силы $\mathcal{E}(t)$ в тот же момент времени, согласно

$$\mathcal{E}(t) = RJ(t), \quad (47,1)$$

где R — сопротивление провода постоянному току.

Но при произвольных частотах нет никаких оснований ожидать существования прямой связи между значениями \mathcal{E} и J в один и тот же момент времени. Можно лишь утверждать, что значение $J(t)$ должно зависеть линейным образом от значений $\mathcal{E}(t)$ во все предыдущие моменты времени. Запишем символически эту связь в виде $J = \hat{Z}^{-1}\mathcal{E}$ или, для обратной связи,

$$\mathcal{E} = \hat{Z}J, \quad (47,2)$$

где \hat{Z} — некоторый линейный оператор ¹⁾. Если функции $\mathcal{E}(t)$ и $J(t)$ разложены в интегралы Фурье, то для каждой из их «монохроматических» компонент (зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$) результат действия оператора \hat{Z} сводится, в силу линейности последнего, к умножению на некоторую величину Z , зависящую от значения частоты:

$$\mathcal{E} = Z(\omega)J. \quad (47,3)$$

Функция $Z(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Она называется комплексным сопротивлением или импедансом проводника.

Из сравнения (47,3) с (47,1) ясно, что обычное сопротивление R представляет собой нулевой член разложения функции $Z(\omega)$ по степеням ω . Для определения следующего члена надо учесть наряду с R также и самоиндукцию L проводника ²⁾.

Рассмотрим линейный контур, в котором действует переменная электродвижущая сила $\mathcal{E}(t)$. По определению последней работа, производимая в 1 сек электрическим полем над движущимися в проводе зарядами, дается произведением $\mathcal{E}J$. Эта работа частично переходит в джоулево тепло, а частично затрачивается на изменение энергии магнитного поля тока. По определению R и L джоулево тепло, выделяющееся в проводе в 1 сек, есть RJ^2 , а магнитная энергия тока есть $LJ^2/2c^2$. Поэтому закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{dLJ^2}{dt} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt}$$

¹⁾ Мы не останавливаемся здесь на обсуждении общих свойств этого оператора, так как они вполне аналогичны свойствам оператора $\hat{\epsilon}$, которые будут подробно изложены в §§ 58 и 62.

²⁾ Здесь и ниже мы понимаем под R и L величины, относящиеся к постоянному току.

или

$$\mathcal{E} = RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}. \quad (47,4)$$

Оперируя с квадратичными выражениями ($\mathcal{E}J$, J^2), надо писать величины \mathcal{E} и J в виде вещественных функций. Но после того как получено линейное уравнение (47,4), можно перейти к монохроматическим компонентам в комплексном представлении: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Тогда уравнение (47,4) сводится к алгебраическому соотношению

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i}{c^2} \omega L \right) J,$$

откуда

$$Z = R - \frac{i}{c^2} \omega L. \quad (47,5)$$

Отделяя в соотношении $J = \mathcal{E}/Z$ вещественную часть, получим

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2/c^4}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{tg } \varphi = \omega L/c^2 R, \quad (47,6)$$

чем определяется амплитуда тока и сдвиг фаз между током и э. д. с.

Вещественная часть выражения (47,5) совпадает с сопротивлением R , определяющим диссипацию энергии в контуре. Легко видеть, что и в общем случае произвольной зависимости $Z(\omega)$ имеется аналогичная связь между $\text{Re } Z$ и диссипацией энергии (при заданной силе тока).

Усреднив по времени мощность $\mathcal{E}J$, потребляемую в контуре при протекании в нем периодического тока, мы найдем ту ее часть, которая систематически затрачивается на покрытие диссипативных потерь. Таким образом, отнесенная к 1 сек диссипация энергии Q в контуре:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathcal{E} J^* \},$$

где \mathcal{E} и J выражены в комплексном виде (ср. примечание на стр. 243). Подставив сюда $\mathcal{E} = ZJ$ и обозначая вещественную и мнимую части Z соответственно как Z' и Z'' ¹⁾:

$$Z = Z' + iZ'', \quad (47,7)$$

получим

$$Q = \frac{1}{2} Z' |J|^2$$

или, с помощью вещественной функции $J(t)$,

$$Q = Z'(\omega) \bar{J}^2, \quad (47,8)$$

чем и устанавливается искомая связь.

1) Их называют иногда активным и реактивным сопротивлениями.

Отметим, что поскольку Q есть существенно положительная величина, то и Z' всегда положительно:

$$Z' > 0. \quad (47,9)$$

Вычислим $Z(\omega)$ для провода кругового сечения при произвольных¹⁾ частотах, т. е. не пренебрегая при этом скин-эффектом. Для этого снова воспользуемся законом сохранения энергии, представив его в другом виде.

Разобьем мощность $\mathcal{E}J$ (\mathcal{E} и J — вещественные выражения) на два члена, из которых один представляет теперь изменение энергии магнитного поля вне провода, а другой — полную энергию, потребляемую внутри провода (как на изменение энергии поля в нем, так и на выделение тепла). Вторую часть можно вычислить как полный поток энергии, втекающей в l сек внутрь проводника через его поверхность. Таким образом получим

$$J\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_e J^2}{2c^2} \right) + \frac{cEH}{4\pi} 2\pi al = \frac{L_e}{c^2} J \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} cEHal,$$

где L_e — внешняя часть самоиндукции провода, E и H — напряженности электрического и магнитного поля на его поверхности, a — его радиус, l — длина. Поле H связано с током J соотношением $H = 2J/ca$. Поэтому, разделив написанное равенство на J , получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c^2} L_e \frac{dJ}{dt} + El.$$

Это уравнение линейно, и потому можно перейти к комплексному представлению величин. Тогда

$$\mathcal{E} = ZJ = -\frac{i\omega L_e}{c^2} J + El,$$

откуда

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{lE}{J} = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{2El}{caH}. \quad (47,10)$$

При произвольных частотах сюда надо подставить E и H из (46,2) и (46,4):

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + R \frac{ak J_0(ak)}{2 J_1(ak)} \quad (47,11)$$

($R = l/\pi a^2 \sigma$). При слабом скин-эффекте пользуемся разложениями (46,5); производя вычисления с точностью до членов порядка $(a/\delta)^4$ и отделяя вещественную часть, получим

$$Z' = R \left[1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \right] = R \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \sigma \omega a^2}{c^2} \right)^2 \right]. \quad (47,11a)$$

1) Но, разумеется, удовлетворяющих условиям квазистационарности.

В обратном случае сильного скин-эффекта с помощью выражений (46,7) получим

$$\begin{aligned} Z' &= R \frac{a}{2\delta} = \frac{l}{ca} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}, \\ Z'' &= -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + L_i \frac{2\delta}{a} \right] = -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \right]. \end{aligned} \quad (47,12)$$

Из (47,11a) видно, что можно полагать $Z' = R$ при

$$\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2} \right)^2 \ll 12.$$

В то же время

$$\frac{Z''}{Z'} = \frac{\omega L}{c^2 R} = \left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2} \right) 2 \ln \frac{l}{a}$$

(L взято из (33,1)). Сравнивая с предыдущим неравенством, мы видим что область частот, в которой следует пользоваться выражением (47,5) не пренебрегая в нем самоиндукцией, зависит от отношения l/a и сравнительно узка.

На практике, однако, наиболее важен случай, когда основным носителем самоиндукции в цепи являются включенные в нее катушки, обладающие повышенной, по сравнению с растянутым проводом, самоиндукцией (см. § 33). В таких контурах область частот, в которых должна применяться формула (47,5) (т. е. уравнение (47,4) с постоянными R и L), достаточно широка.

Рассмотрим контур, находящийся во внешнем переменном магнитном поле H_e , которое может иметь любое происхождение. Помогая E_e обозначим электрическое поле, которое индуцировалось бы переменным полем H_e в отсутствие проводников. Как H_e , так и E_e очень слабо меняются на протяжении толщины тонкого провода (в противоположность собственному полю текущих по проводу токов). Поэтому можно рассматривать циркуляцию E_e по контуру тока, не уточняя, где именно внутри провода этот контур проведен. Эта циркуляция есть не что иное, как электродвижущая сила \mathcal{E} , индуцируемая в контуре переменным внешним магнитным полем. Согласно интегральной форме уравнения Максвелла имеем

$$\mathcal{E} = \oint E_e dl = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int H_e df = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}, \quad (47,13)$$

где Φ_e — поток внешнего поля через рассматриваемый контур. Подставляя это выражение в уравнение (47,4), получим

$$RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47,14)$$

Если перенести член с самоиндукцией в правую сторону равенства, то это уравнение запишется в виде

$$RJ = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \Phi_e + \frac{1}{c} LJ$ — полный магнитный поток, как от внешнего магнитного поля, так и от собственного поля тока. В таком виде это уравнение выражает собой закон Ома для цепи в целом, т. е. равенство между RJ и полной электродвижущей силой в цепи.

Формулировка уравнения (47,14), как выражающего собой закон Ома, позволяет обобщить его на случай, когда с течением времени меняется также и форма самого проводящего контура. При этом функцией времени будет и самоиндукция L и вместо (47,14) надо писать

$$RJ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(LJ) - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47,15)$$

При выводе же из закона сохранения энергии необходимо было бы учитывать еще работу, затрачиваемую на деформацию проводника.

Если имеется несколько расположенных вблизи друг от друга контуров с токами J_a , то для каждого из них роль Φ_e в уравнении (47,14) играет сумма магнитных потоков от других контуров (и от внешнего постороннего поля, если таковое имеется). Магнитный поток, создаваемый током J_b через контур тока J_a , есть $L_{ab}J_b/c$, где L_{ab} — коэффициент взаимной индукции обоих контуров. Поэтому получаем следующую систему уравнений для переменного тока в контурах:

$$R_a J_a + \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} \frac{dJ_b}{dt} = \mathcal{E}_a. \quad (47,16)$$

В сумму по b включен также и член с самоиндукцией ($b = a$), а \mathcal{E}_a есть электродвижущая сила, создаваемая в a -м контуре источниками, посторонними по отношению к рассматриваемой системе токов.

Для периодических (монокроматических) токов система дифференциальных уравнений (47,16) сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (47,17)$$

где величины

$$Z_{ab} = \delta_{ab} R_a - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab} \quad (47,18)$$

составляют «матрицу импеданса». Подобно (47,5) выражения (47,18) представляют собой первые члены разложения функций $Z_{ab}(\omega)$ по степеням частоты.

Отметим, что в этом приближении отсутствует взаимное влияние контуров на вещественную часть импеданса. Такое влияние осуществляется тем, что магнитное поле переменного тока в одном проводнике создает токи Фуко (а с ними и дополнительную диссипацию энергии) в другом проводнике. Для линейных проводников этот эффект ничтожен. Он может, однако, стать заметным при наличии расположенных вблизи них массовых проводников.

Наконец, остановимся на вопросе о том, каким образом связаны полученные в этом параграфе уравнения переменных токов в линейных контурах с общими уравнениями переменного магнитного поля в произвольных проводниках. Проследим за этой связью на простейшем примере тока, возникающего в контуре при выключении действовавшей в нем до момента времени $t = 0$ постоянной электродвижущей силы \mathcal{E}_0 . Из уравнения (47,4) имеем ¹⁾:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\mathcal{E}_0}{R} && \text{при } t < 0, \\ J &= \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{c^2 R}{L} t} && \text{при } t > 0. \end{aligned} \quad (47,19)$$

Мы видим, что после выключения э. д. с. ток затухает со временем по экспоненциальному закону с декрементом

$$\gamma = \frac{c^2 R}{L}. \quad (47,20)$$

С точки зрения точной формулировки задачи эта γ является наименьшей из величин γ_m , получающихся в результате решения точного уравнения (45,10) для данного проводника. Среди значений γ_m для линейного проводника есть одно (наименьшее из всех), которое по порядку величины в $\ln(l/a)$ раз меньше остальных; это и есть значение (47,20).

§ 48. Емкость в цепи квазистационарного тока

В отличие от постоянного тока переменный ток может течь не только в замкнутой, но и в разомкнутой цепи. Рассмотрим линейный контур, концы которого присоединены к обкладкам конденсатора, находящимся на малом расстоянии друг от друга. При распространении по контуру переменного тока обкладки конденсатора будут периодически заряжаться и разряжаться, тем самым играя роль «источников» и «стоков» тока в разомкнутой цепи.

¹⁾ Строго говоря, эти формулы непригодны для очень малых значений t , когда в спектральном разложении функции существенны компоненты с большими частотами и потому нельзя пользоваться уравнением (47,4). Но за этот малый промежуток времени ток J успевает измениться лишь весьма незначительно, и поэтому формула (47,19) достаточно точно определяет величину тока в дальнейшие моменты времени.

Ввиду малости расстояния между обкладками конденсатора магнитную энергию тока можно по-прежнему положить равной $LJ^2/2c^2$, где L — самоиндукция замкнутого контура, который получился бы из данного путем соединения обкладок коротким отрезком провода. При применении закона сохранения энергии надо, однако, наряду с магнитной энергией учесть также и энергию электрического поля в конденсаторе. Последняя равна $e^2/2C$, где C — емкость конденсатора, а $\pm e(t)$ — заряды, находящиеся на его обкладках. Поступая, как при выводе уравнения (47,4), получим ¹⁾

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{e^2}{2C} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt} + \frac{e}{C} \frac{de}{dt}.$$

Но сила тока J равна убыли заряда одной или приращению заряда другой обкладки:

$$J = -\frac{de}{dt}.$$

Сократив обе стороны уравнения на J и выразив в нем J через e , получим

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2e}{dt^2} + R \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathcal{E}. \quad (48,1)$$

Это и есть искоемое уравнение для переменного тока в цепи с емкостью.

Если \mathcal{E} есть периодическая функция времени с частотой ω , то уравнение (48,1) сводится к алгебраическому соотношению между \mathcal{E} и зарядом e , или, что то же, между \mathcal{E} и током $J = -i\omega e$. Именно, имеем $JZ = \mathcal{E}$, где импеданс Z определяется согласно

$$Z = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (48,2)$$

Отделяя в соотношении $J = \mathcal{E}/Z$ вещественную часть, получим

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (48,3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{1}{R},$$

чем определяется сила тока в цепи с приложенной извне электродвижущей силой $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

Если же $\mathcal{E} = 0$, то ток в цепи представляет собой «свободные» электрические колебания. Частота (комплексная) этих колебаний определяется условием $Z = 0$, откуда

$$\omega = -i \frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L} \right)^2}. \quad (48,4)$$

¹⁾ В этом параграфе скин-эффектом пренебрегаем.

В зависимости от знака подкоренного выражения мы будем иметь затухающие (с декрементом $Rc^2/2L$) колебания или же чисто апериодический затухающий разряд. В предельном случае $R \rightarrow 0$ имеем незатухающие колебания с частотой, выражающейся известной формулой Томсона:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}.$$

Уравнение (48,1) непосредственно обобщается на систему нескольких индуктивно связанных контуров с конденсаторами. Ток J_a в a -м контуре связан с зарядами $\pm e_a$ на обкладках соответствующего конденсатора посредством

$$J_a = \frac{de_a}{dt},$$

а вместо (48,1) имеем систему уравнений

$$\sum_b \frac{1}{c^2} L_{ab} \frac{d^2 e_b}{dt^2} + R_a \frac{de_a}{dt} + \frac{e_a}{C_a} = \mathcal{E}_a. \quad (48,5)$$

Для периодических (монокроматических) токов эти уравнения сводятся к алгебраической системе

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (48,6)$$

причем элементы матрицы Z_{ab} даются формулами

$$Z_{ab} = \delta_{ab} \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}. \quad (48,7)$$

Собственные частоты системы токов даются условием совместности уравнений (48,6) при $\mathcal{E}_a = 0$, т. е. условием равенства нулю определителя:

$$|Z_{ab}| = 0. \quad (48,8)$$

Если сопротивления R отличны от нуля, то все «частоты» имеют мнимую часть, т. е. электрические колебания являются затухающими.

Обратим внимание на то, что уравнения (48,5) формально совпадают с механическими уравнениями движения системы с несколькими степенями свободы, совершающей затухающие малые колебания. При этом роль обобщенных координат играют заряды e_a , роль обобщенных скоростей — токи $J_a = \dot{e}_a$. «Функция Лагранжа» системы есть

$$\mathcal{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2c^2} L_{ab} \dot{e}_a \dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a \mathcal{E}_a. \quad (48,9)$$

Роль кинетической и потенциальной энергии механической системы играют в ней соответственно магнитная и электрическая энергии

системы токов, а величины \mathcal{E}_a соответствуют приложенным извне силам, производящим вынужденные колебания системы. Величины же R_a входят в «диссипативную функцию»

$$R = \sum_a \frac{R_a \dot{e}_a^2}{2}. \quad (48,10)$$

Уравнения (48,5) совпадают с уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{e}_a}. \quad (48,11)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить собственные частоты электрических колебаний в двух индуктивно связанных контурах, содержащих самоиндукции L_1 и L_2 и емкости C_1 и C_2 ; сопротивлениями R_1 и R_2 пренебрегаем.

Решение. Искомые частоты определяются из условия

$$|Z_{ab}| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0,$$

где

$$Z_{11} = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad Z_{22} = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right), \quad Z_{12} = -\frac{i\omega}{c^2} L_{12}$$

Вычисление дает:

$$\omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp [(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4C_1 C_2 L_{12}^2]^{1/2}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

Обе частоты чисто вещественны, что является следствием пренебрежения R_1 и R_2 . При $L_{12} \rightarrow 0$ частоты ω_1 и ω_2 стремятся к значениям $c/\sqrt{L_1 C_1}$ и $c/\sqrt{L_2 C_2}$, соответствующим отдельным колебаниям в каждом из контуров.

2. То же для цепи из параллельно соединенных сопротивлений R , емкости C и самоиндукции L .

Решение. Импедансы трех ветвей цепи равны

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{i}{\omega C}, \quad Z_3 = -\frac{i\omega}{c^2} L,$$

а токи в них связаны соотношениями

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad Z_1 J_1 = Z_2 J_2 = Z_3 J_3.$$

Отсюда находим уравнение

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0,$$

решение которого дает

$$\omega = -\frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2 C^2}}.$$

3. Рассмотреть распространение электрических колебаний по цепи, составленной из бесконечной последовательности одинаковых ячеек, содержащих импедансы.

$$Z_1 = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad Z_2 = -i \left(\frac{\omega}{c^2} L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right),$$

как это показано на рис. 25. Найти область частот колебаний, которые могут распространяться вдоль цепи без затухания 1).

Решение. Токи i_α определим как контурные токи в каждой из ячеек цепи (рис. 25). Уравнение Кирхгофа для α -го контура гласит:

$$Z_1 i_\alpha + Z_2 (2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

Это есть линейное разностное уравнение (по целочисленной переменной α) с постоянными коэффициентами. Ищем его решение в виде

$$i_\alpha = \text{const} \cdot q^\alpha$$

и для параметра q получаем характеристическое уравнение

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \quad (1)$$

Пусть

$$-4 \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0,$$

чему соответствуют значения ω^2 , лежащие между меньшей и большей из величин

$$\frac{c^2}{L_1 C_1} \quad \text{и} \quad c^2 \frac{4/C_2 + 1/C_1}{4L_2 + L_1}.$$

Тогда уравнение (1) имеет два комплексно сопряженных корня с модулями $|q| = 1$. Это значит, что при переходе от одной ячейки цепи к следующей амплитуда тока не убывает, т. е. электрические колебания распространяются по

цепи без затухания. Если обозначить в этом случае $q = e^{ikl}$ (l — длина одной ячейки цепи), то k играет роль «волнового вектора» распространяющихся вдоль цепи колебаний. Скорость же распространения u можно вычислить по общим правилам как производную

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

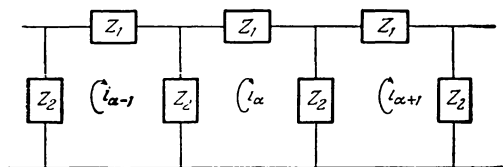


Рис. 25.

Если же ω лежит вне указанных пределов, то уравнение (1) имеет два вещественных корня q_1 и q_2 ; поскольку $q_1 q_2 = 1$, то один из них (пусть q_2) по абсолютной величине меньше, а другой (q_1) больше 1. Легко видеть, что это означает невозможность незатухающего распространения колебаний вдоль цепи. Для выяснения причины этого рассмотрим цепь большой, но конечной длины. Начальный колебательный импульс вносится в начале цепи, а на конце цепь тем или иным способом замкнута. Математически замкнутость конца цепи описывается определенным граничным условием, с помощью которого в общем решении

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)} + c_2 q_2^{-(\alpha_k - \alpha)}$$

(α_k — «координата» конца цепи) определяется отношение коэффициентов c_1/c_2 , которое при написанной форме решения будет порядка 1. Но тогда по мере увеличения $\alpha_k - \alpha$ второй член (в котором $|q_2| < 1$) быстро станет очень малым по сравнению с первым. Таким образом, почти по всей длине цепи,

1) Условие применимости квазистационарной теории к такой периодической цепи заключается в малости размеров отдельной ее ячейки по сравнению с «длиной волны» c/ω .

за исключением лишь малого ее участка вблизи конца, решение имеет вид $i_\alpha = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)}$, в котором $|i_\alpha|$ убывает по направлению от начала цепи к ее концу.

Следует подчеркнуть, что это затухание не имеет характера диссипативного поглощения (для которого нет причин ввиду отсутствия сопротивлений в цепи); оно может быть наглядно описано как результат отражений колебательного импульса от каждой последующей ячейки цепи.

§ 49. Движение проводника в магнитном поле

Во всем предыдущем изложении молчаливо подразумевалось, что проводники в электромагнитном поле покоятся (относительно системы отсчета K , в которой определены все величины E , H и т. д.). В частности, и связь $j = \sigma E$ между током и полем справедлива, вообще говоря, лишь для неподвижных проводников.

Для определения связи между током и полем в движущемся проводнике перейдем от системы отсчета K к другой системе, K' , в которой проводник (или его отдельный участок) в данный момент времени покоится. В этой системе имеем $j = \sigma E'$, где E' — напряженность электрического поля в K' . Но согласно известной формуле преобразования полей E' выражается через поле в системе K посредством ¹⁾

$$E' = E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B], \quad (49,1)$$

где \mathbf{v} — скорость системы K' относительно системы K , т. е. в данном случае — скорость проводника (которую мы предполагаем, естественно, малой по сравнению со скоростью света). Таким образом, находим

$$j = \sigma \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B] \right). \quad (49,2)$$

Это и есть формула, определяющая связь между током и полем в движущихся проводниках. По поводу ее вывода надо сделать еще следующее замечание. Производя переход от одной системы отсчета к другой, мы преобразовали поле, но оставили величину j неизменной. Преобразование плотности тока привело бы, при $v \ll c$, к появлению добавочных членов высшего порядка малости. В формуле же (49,2) второй член, появившийся в результате преобразования поля, вообще говоря, не мал по сравнению с первым, хотя и содержит множитель v/c . Так, если электрическое поле само обусловлено электромагнитной индукцией от переменного магнитного поля, то его порядок величины содержит лишний множитель $1/c$ по сравнению с магнитным полем.

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 23. Микроскопические значения напряженностей электрического и магнитного поля заменены их усредненными значениями $\bar{e} = E$, $\bar{h} = B$.

Диссипация энергии в проводнике при протекании в нем заданного тока не может, разумеется, зависеть от движения проводника. Поэтому плотность выделения (в 1 сек) джоулева тепла в движущемся проводнике, выраженная через плотность тока, дается той же формулой j^2/σ , как и в неподвижном проводнике. Но вместо произведения jE теперь имеем¹⁾

$$\frac{j^2}{\sigma} = j \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B] \right).$$

Таким образом, в движущемся проводнике сумма $E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B]$ играет роль «эффективной» напряженности электрического поля, создающей ток проводимости. Поэтому электродвижущая сила, действующая в замкнутой линейной цепи C , дается интегралом

$$\mathcal{E} = \oint_C \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B] \right) dl. \quad (49,3)$$

Преобразуем его следующим образом. Согласно уравнению Максвелла $\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ имеем

$$\oint_C E dl = \int_S \text{rot } E df = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S B df$$

или, обозначив посредством Φ магнитный поток через поверхность S , опирающуюся на контур тока,

$$\oint_C E dl = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\mathbf{v}=0}.$$

Производная по времени с индексом $\mathbf{v} = 0$ означает изменение магнитного потока, обусловленное изменением во времени самого магнитного поля при неизменном положении контура S .

Во втором же члене пишем $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, где $d\mathbf{u}$ — бесконечно малое смещение элемента контура. Тогда

$$\oint_C [\mathbf{v}B] dl = \int \frac{[d\mathbf{u}B]}{dt} dl = -\frac{\int B df}{dt},$$

1) Из этой формулы видно, что дополнительное тепло, выделяющееся (в течение времени δt) в проводнике при его движении в магнитном поле, есть

$$\delta t \cdot \frac{1}{c} \int j [\mathbf{v}B] dV = -\frac{1}{c} \int \mathbf{u} [jB] dV,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} \delta t$ — смещение за время δt . Эта величина равна и противоположна по знаку работе, произведенной за то же время над проводником объемными силами $\mathbf{f} = \frac{1}{c} [jB]$; тем самым разъясняется кажущееся противоречие, упомянутое на стр. 186.

где $df = [du \cdot dl]$ — элемент площади «боковой» поверхности s между двумя бесконечно близкими положениями C и C' контура тока, занимаемыми им в моменты времени t и $t + dt$ (рис. 26). Поскольку полный магнитный поток через всякую замкнутую поверхность равен нулю, то ясно, что поток через «боковую» поверхность равен разности потоков через поверхности, опирающиеся на C и C' . Таким образом,

$$\oint_C [\mathbf{vB}] dl = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\mathbf{B} = \text{const}},$$

где производная по времени означает изменение магнитного потока, связанное с перемещением проводника при неизменном поле.

Складывая оба члена, получим окончательно

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (49,4)$$

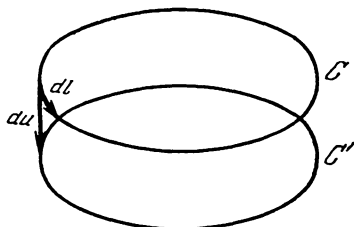


Рис. 26.

где производная по времени означает теперь полное изменение магнитного потока через движущийся контур. Таким образом, выражаемый формулой (49,4) закон Фарадея справедлив при любой причине изменения магнитного потока — как от изменения самого поля [о чем уже шла речь в § 47, формула (47,13)], так и от движения проводника.

В постоянном магнитном поле изменение потока может быть связано только с перемещением контура. Если контур движется так, что все его точки перемещаются вдоль силовых линий поля, никогда не пересекая их, то поток поля через контур не меняется. Это обстоятельство является очевидным следствием того, что магнитный поток через всякую замкнутую поверхность равен нулю, а поток через «боковую» поверхность, описываемую движущимся контуром, в этом случае равен нулю тождественно (так как на ней $B_n = 0$). Таким образом, можно сказать, что для возникновения индукционной электродвижущей силы проводник во всяком случае должен пересекать при своем движении магнитные силовые линии.

Электромагнитное поле в движущихся проводниках определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right), \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения \mathbf{E} через \mathbf{H} и подставив в первое, получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{vB}] = - \frac{c^2}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\text{rot } \mathbf{H}}{\sigma} \right). \quad (49,5)$$

В однородном проводнике с постоянными проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{vH}] = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (49,6)$$

Эти уравнения обобщают те, которые были получены в § 45.

Следует, однако, указать, что если имеется всего один проводник, движущийся как целое (не деформируясь) во внешнем магнитном поле, то решение задачи значительно упрощается при использовании системы координат, жестко связанной с телом. В этой системе проводник неподвижен, а внешнее поле меняется со временем по заданному закону, так что мы возвращаемся к типу задач о токах Фуко, рассмотренных в § 45. Возможность такого перехода связана, однако, не с галилеевским (или эйнштейновским) принципом относительности, так как новая система координат, вообще говоря, неинерциальна. Эквивалентность обеих задач есть следствие отмеченной выше независимости электромагнитной индукции от причины, вызывающей изменение магнитного потока. В ней можно убедиться и чисто математическим путем. Для этого раскроем выражение $\text{rot} [\mathbf{vB}]$, учитывая при этом, что $\text{div} \mathbf{B} = 0$, а при движении тела как целого также и $\text{div} \mathbf{v} = 0$ (это равенство выражает собой «несжимаемость» тела). Тогда левая сторона уравнения (49,5) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{v}. \quad (49,7)$$

Но эта сумма есть не что иное, как производная от \mathbf{B} по времени, определяющая изменение \mathbf{B} по отношению к вращающемуся телу. Действительно, сумма первых двух членов есть «субстанциональная» производная по времени $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$, дающая изменение \mathbf{B}

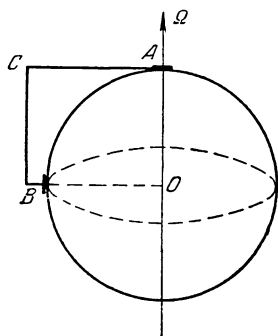


Рис. 27.

в точке, перемещающейся со скоростью \mathbf{v} . Третий же член учитывает изменение ориентации \mathbf{B} по отношению к телу: он равен нулю при чисто поступательном движении ($\mathbf{v} = \text{const}$) и равен $-\mathbf{B}\nabla \mathbf{v}$ при вращении тела ($\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \mathbf{r}$, где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость).

В заключение этого параграфа рассмотрим своеобразное явление (так называемую у н и п о л я р н у ю и н д у к ц и ю), возникающее при вращении намагниченного проводника. Оно заключается в том, что если при помощи двух скользящих контактов (A и B на рис. 27) присоединить к вращающемуся магниту неподвижный провод, то по последнему потечет ток. Не представляет труда вычислить электродвижущую силу, создающую этот ток. Для этого проще всего

перейти к системе координат, вращающейся вместе с магнитом. Если Ω — угловая скорость вращения магнита, то в новой системе провод вращается с угловой скоростью $-\Omega$ (а магнит неподвижен). Таким образом, мы имеем теперь дело с проводником, движущимся в заданном постоянном магнитном поле B , создаваемом неподвижным магнитом; искажением поля самим проводником мы пренебрегаем. Согласно формуле (49,3) электродвижущая сила, действующая между концами провода, дается интегралом

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_{ACB} [vB] \cdot dl = \frac{1}{c} \int_{ACB} [B[r\Omega]] \cdot dl, \quad (49,8)$$

взятым вдоль длины провода. Эта формула и решает поставленную задачу.

Задачи

1. Определить магнитный момент проводящего шара ($\mu = 1$), равномерно вращающегося в однородном постоянном магнитном поле; определить действующий на шар момент сил.

Решение. Пусть в неподвижной системе координат (с осью z вдоль вектора угловой скорости Ω) внешнее поле имеет составляющие $\mathfrak{H}_x, 0, \mathfrak{H}_z$. В системе координат ξ, η, z , вращающейся вместе с шаром, составляющие поля:

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x \cos \Omega t, \quad \mathfrak{H}_\eta = -\mathfrak{H}_x \sin \Omega t, \quad \mathfrak{H}_z$$

или, в комплексном виде,

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_\eta = -i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_z$$

Таким образом, вдоль осей ξ и η действует переменное поле с частотой Ω и индуцируемый им магнитный момент

$$\mathcal{M}_\xi = V \operatorname{Re} \{ \alpha \mathfrak{H}_\xi \} = V \mathfrak{H}_x (\alpha' \cos \Omega t + \alpha'' \sin \Omega t),$$

$$\mathcal{M}_\eta = V \operatorname{Re} \{ \alpha \mathfrak{H}_\eta \} = V \mathfrak{H}_x (-\alpha' \sin \Omega t + \alpha'' \cos \Omega t),$$

где $V\alpha$ — комплексная магнитная поляризуемость шара, определенная в задаче 1 § 45. Вдоль же оси z магнитное поле постоянно и потому не создает (при $\mu = 1$) магнитного момента. Составляющие магнитного момента относительно неподвижной системы координат:

$$\mathcal{M}_x = V\alpha' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_y = V\alpha'' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_z = 0.$$

Таким образом, в этой задаче α' и α'' определяют составляющие магнитного момента шара соответственно в плоскости векторов Ω, \mathfrak{H} и перпендикулярно к ней.

Действующий на шар момент сил $K = [c\mathcal{M}\mathfrak{H}]$. Его составляющие относительно неподвижных осей:

$$K_x = V\alpha'' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_y = -V\alpha' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_z = -V\alpha'' \mathfrak{H}_x^2.$$

2. Определить электродвижущую силу униполярной индукции, возникающую между полюсом и экватором (см. рис. 27) однородно намагниченного шара, равномерно вращающегося вокруг оси, совпадающей с направлением намагничивания.

Решение. Создаваемое шаром магнитное поле симметрично относительно оси вращения, причем вектор B лежит везде в меридиональных плоскостях (т. е. векторы B , Ω и r компланарны). В этом легко убедиться непосредственным вычислением или же просто замечая, что в постоянном поле $\text{rot}[\mathbf{v}B]$ совпадает с выражением (49,7), дающим изменение вектора B по отношению к вращающемуся телу; в данном случае симметрия поля такова, что это изменение равно нулю. Производя интегрирование вдоль отрезка AO оси вращения и вдоль радиуса OB , получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^a B_0 \Omega r dr = \frac{B_0 \Omega a^3}{2c}$$

(a — радиус шара, B_0 — магнитная индукция в нем). В однородно намагниченном шаре (в отсутствие приложенного внешнего поля) связь индукции с намагниченением определяется уравнениями $B_0 + 2H = 0$ (ср. (8,1)) и $B_0 - H = 4\pi M$, откуда $B_0 = 8\pi M/3$. Вводя полный магнитный момент шара \mathcal{M} , получим окончательно

$$\mathcal{E} = \frac{\Omega \mathcal{M}}{ca}.$$

3. Определить полный заряд, протекающий по линейному замкнутому контуру при изменении (по любой причине) магнитного потока через него от одного постоянного значения (Φ_1) до другого (Φ_2).

Решение. Искомый полный заряд есть интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} J dt$, где $J(t)$ — воз-

никающий в контуре индукционный ток. С математической точки зрения этот интеграл представляет собой «компоненту Фурье» функции $J(t)$ с частотой $\omega = 0$. Поэтому он связан с такой же компонентой электродвижущей силы соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} dt = Z(0) \int_{-\infty}^{+\infty} J dt$$

(см. (47,3)). Подставив $Z(0) = R$ (R — сопротивление контура для постоянного тока) и $\mathcal{E} = -(1/c) d\Phi/dt$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J dt = \frac{1}{cR} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

§ 50. Возбуждение тока ускорением

Рассматривая в предыдущем параграфе движение проводника, мы пренебрегли возможным влиянием ускорения (если таковое имеется). Между тем ускоренное движение металла эквивалентно появлению дополнительных инерционных сил, действующих на электроны проводимости. Если \mathbf{v} — ускорение проводника, а m — масса электрона, то эта сила равна $-m\mathbf{v}$. Она оказывает на электрон такое же действие, какое произвело бы электрическое поле с напряженностью $\frac{m}{e} \dot{\mathbf{v}}$, где $-e$ есть заряд электрона. Таким образом, «эффективное»

электрическое поле, действующее на электроны проводимости в ускоренно движущемся металле, есть

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{m}{e} \dot{\mathbf{v}}. \quad (50,1)$$

Соответственно для плотности тока имеем

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{m}{e} \dot{\mathbf{v}} \right). \quad (50,2)$$

Выразим из (50,1) \mathbf{E} через \mathbf{E}' и подставим в уравнение

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

(полагаем везде $\mu = 1$). Тогда

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e} \text{rot } \dot{\mathbf{v}}. \quad (50,3)$$

Напишем \mathbf{v} в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}],$$

где \mathbf{u} — скорость поступательного движения, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения тела. Дифференцируя по времени, найдем ускорение

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{\Omega} \mathbf{v}] + [\dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{r}] = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{u} \mathbf{\Omega}] + [\mathbf{\Omega} [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]] + [\dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{r}].$$

Первые два члена не зависят от \mathbf{r} и потому дают нуль при дифференцировании по координатам. Третий член может быть написан в виде

$$[\mathbf{\Omega} [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]] = -\text{grad } \frac{[\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]^2}{2},$$

и потому его rot тоже обращается в нуль. Наконец, $\text{rot } [\dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{r}] = 2\dot{\mathbf{\Omega}}$. Таким образом, подставив $\dot{\mathbf{v}}$ в (50,3), получим

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{2m}{e} \dot{\mathbf{\Omega}}$$

или

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (50,4)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{2mc}{e} \mathbf{\Omega}. \quad (50,5)$$

Поскольку $\dot{\mathbf{\Omega}}$ от координат не зависит, то уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

сохраняет свой вид, если выразить в нем \mathbf{H} через \mathbf{H}' :

$$\text{rot } \mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}'. \quad (50,6)$$

Исключив E' из уравнений (50,4) и (50,6), мы получим для H' уравнение

$$\Delta H' = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial H'}{\partial t}, \quad (50,7)$$

совпадающее с уравнением, которому удовлетворяет H в неподвижном проводнике.

Вне тела поле удовлетворяет уравнению $\Delta H = 0$ (длина волны предполагается большой по сравнению с размерами тела); такому же уравнению будет удовлетворять и H' .

Наконец, на поверхности проводника вместе с H будет непрерывным и H' . Различно лишь условие на бесконечности: H стремится к нулю, а H' — к конечному пределу $-2mc\Omega/e$.

Таким образом, задача об определении переменного магнитного поля H вокруг неравномерно вращающегося тела эквивалентна задаче об определении поля H' вокруг неподвижного тела, находящегося в однородном внешнем магнитном поле с напряженностью

$$\mathfrak{H} = -\frac{2mc}{e} \Omega. \quad (50,8)$$

По решению H' этой задачи искомое поле $H^{(2)}$ вне проводника получается вычитанием \mathfrak{H}^1 .

Возникающее таким образом магнитное поле, как и всякое переменное поле, индуцирует в самом проводнике электрические токи. В односвязном теле эти токи проявляются в виде приобретаемого телом магнитного момента. В неравномерно вращающемся кольце эффект проявляется как возникновение электродвижущей силы (так называемый эффект Стюарта — Толмэна).

Задачи

1. Определить магнитный момент неравномерно вращающегося шара (радиуса a). Скорость вращения предполагается настолько малой, что глубина проникновения $\delta \gg a$.

Решение. Магнитный момент, приобретаемый шаром в поле $\mathfrak{H}(t)$ (50,8), есть

$$\mathcal{M} = V \hat{a} \mathfrak{H},$$

где \hat{a} — оператор, действие которого на компоненты Фурье функции $\mathfrak{H}'(t)$ определяется формулами, полученными в задаче 1 § 45. Для компонент с частотами ω такими, что $\delta \gg a$, имеем

$$\mathcal{M} = V \alpha(\omega) \mathfrak{H} \cong -i\omega \frac{4\pi m a^5 \sigma}{15c e} \Omega.$$

1) Хотя в формулу (50,8) входит сама угловая скорость Ω , а не ее производная по времени, весь проведенный вывод, а потому и полученный результат, относится только к неравномерному вращению. Постоянное же магнитное поле, возникающее при равномерном вращении благодаря гиромангнитному эффекту, является малой величиной, не учитываемой нами здесь.

Эта формула, переписанная в виде

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi ma^5 \gamma}{15ce} \frac{d\Omega}{dt},$$

не содержит в явном виде ω , а поэтому справедлива и для не разложенных по Фурье функций $\Omega(t)$, $\mathcal{M}(t)$ (предполагая, что в их разложение входят в основном лишь частоты, удовлетворяющие поставленному условию).

2. Определить полный заряд, который протечет по тонкому круговому кольцу при остановке его равномерного вращения вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости.

Решение. В формуле, полученной в задаче 3 § 49, надо понимать под Φ поток поля \mathfrak{H} (50,8). Полный заряд, протекающий при изменении угловой скорости от Ω до 0, есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J dt = \frac{2mc}{eRc} \Omega \pi b^3 = \frac{m\sigma V}{2\pi e} \Omega$$

(b — радиус кольца, V — объем провода).

3. Определить ток, возникающий в сверхпроводящем круговом кольце при остановке его равномерного вращения.

Решение. Из условия постоянства полного магнитного потока через кольцо (см. (42,5)) найдем

$$J = \frac{2mc^2}{eL} \Omega \pi b^2 = \frac{mc^2 b \Omega}{2e \left[\ln \frac{8b}{a} - 2 \right]}$$

(значение L — см. примечание на стр. 220).

ГЛАВА VIII

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

§ 51. Уравнения движения жидкости в магнитном поле

Если проводящая жидкая (или газообразная) среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамических движениях в ней индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут существенно повлиять на движение жидкости. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости.

В качестве уравнений поля в движущейся проводящей среде мы будем пользоваться уравнениями (49,6). Магнитная проницаемость сред, о которых может идти речь в магнитной гидродинамике, мало отличается от единицы, и это отличие не имеет значения для изучаемых здесь явлений. Поэтому везде в этой главе мы будем полагать $\mu = 1$. Таким образом, имеем уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (51,1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (51,2)$$

Пользуясь этими уравнениями, мы тем самым предполагаем выполненными определенные условия. Именно, периоды изменения поля должны быть велики по сравнению со временем свободного пробега электронов проводимости. Тогда связь между током и электрическим полем определяется той же проводимостью σ , что и для постоянного тока (см. § 45)¹). При этом мы считаем, что σ постоянно

¹ В примечании на стр. 238 было указано также условие $\sigma/\omega \gg 1$, которое должно выполняться у плохих проводников и автоматически выполняется (при соблюдении остальных необходимых условий) у хороших проводников. В данном случае роль частоты играет отношение V/L , где L и V — характеристические параметры длины и скорости, определяющие свойства данного движения жидкости. Таким образом, подразумевается выполненным условие $\sigma L/V \gg 1$.

вдоль всей среды. Тем самым предполагается, в частности, что проводимость не зависит от магнитного поля. Для этого длина пробега электронов должна быть мала по сравнению с радиусом кривизны их траектории в магнитном поле. Другими словами, время свободного пробега должно быть мало по сравнению с ларморовой частотой электронов eH/mc . Это условие может нарушиться в слишком разреженной среде при сильном магнитном поле.

Гидродинамические уравнения содержат, прежде всего, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (51,3)$$

(ρ — плотность жидкости) и уравнение Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

где η, ζ — два коэффициента вязкости жидкости, а \mathbf{f} — объемная плотность сторонних, в данном случае электромагнитных, сил. Согласно формуле (34,4) имеем

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}].$$

Таким образом, уравнение движения жидкости приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (51,4)$$

К этим уравнениям надо еще присоединить уравнение состояния

$$p = p(\rho, T), \quad (51,5)$$

связывающее между собой давление, плотность и температуру жидкости, и так называемое уравнение переноса тепла. В обычной гидродинамике последнее гласит¹⁾:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\kappa \nabla T).$$

Здесь s — энтропия единицы массы жидкости, и выражение в левой стороне равенства представляет собой количество тепла (отнесенное к 1 см^3), выделяющееся в 1 сек в движущемся элементе жидкости. Выражение же в правой стороне равенства есть энергия, диссипируемая в том же объеме в 1 сек . Первый член в нем связан с вязкостью; σ'_{ik} есть вязкий тензор напряжений:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

¹⁾ См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 49.

Второй же член дает диссипацию, связанную с теплопроводностью (κ — коэффициент теплопроводности). В проводящей жидкости сюда должно быть добавлено джоулево тепло. Отнесенное к единице объема, оно равно

$$\frac{j^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\text{rot } H)^2.$$

Поэтому уравнение переноса тепла в магнитной гидродинамике гласит:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div} (\kappa \nabla T) + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\text{rot } H)^2. \quad (51,6)$$

Уравнения (51,1) — (51,6) составляют полную систему уравнений магнитной гидродинамики (при указанных в начале параграфа предположениях).

Уравнения (51,4) и (51,6) могут быть написаны также в виде, выражающем законы сохранения соответственно импульса и энергии. Именно, уравнение Навье — Стокса обычной гидродинамики может быть приведено (с использованием при этом также и уравнения непрерывности) к виду¹⁾

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (51,7)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, равный

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}.$$

К такому же виду приводится и уравнение (51,4), причем только в Π_{ik} появляется дополнительный член. Имеем

$$[H \text{ rot } H] = \frac{1}{2} \text{grad } H^2 - (H \nabla) H.$$

Поэтому для Π_{ik} получим:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \frac{1}{4\pi} \left[H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right]. \quad (51,8)$$

Как и должно было быть, к Π_{ik} добавляется максвелловский тензор напряжений магнитного поля.

Уравнение же переноса тепла преобразуется (с использованием других гидродинамических уравнений) к уравнению сохранения энергии. В обычной гидродинамике

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = - \text{div } \mathbf{q},$$

где \mathbf{q} — плотность потока энергии, равная

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - (\mathbf{v} \sigma') - \kappa \nabla T,$$

¹⁾См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 15.

а ε и $\omega = \varepsilon + p/\rho$ — соответственно внутренняя энергия и тепловая функция 1 г жидкости. При наличии в проводящей среде магнитного поля к плотности энергии добавляется магнитная энергия $H^2/8\pi$, а к плотности потока энергии — вектор Пойнтинга $\frac{c}{4\pi} [EH]$. Выразив в последнем E через H , получим:

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) + \frac{1}{4\pi} [H [\mathbf{v}H]] - \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} [H \operatorname{rot} H] - (\mathbf{v}\sigma') - \kappa \nabla T \quad (51,9)$$

и уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (51,10)$$

Не представляет труда проверить непосредственным вычислением эквивалентность уравнений (51,6) и (51,10).

Уравнения несколько упрощаются, если движущуюся жидкость можно считать несжимаемой. Уравнение непрерывности (51,3) сводится тогда к $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, а в уравнении (51,4) исчезает последний член. Выпишем еще раз (для дальнейших ссылок) соответствующую систему уравнений (в уравнениях (51,2) и (51,4) удобно при этом преобразовать соответственно члены $\operatorname{rot} [\mathbf{v}H]$ и $[H \operatorname{rot} H]$ с помощью известных векторных формул):

$$\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (51,11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) H = (H\nabla) \mathbf{v} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H, \quad (51,12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (H\nabla) H + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (51,13)$$

($\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость). Что касается уравнения (51,6), то для решения задачи о движении несжимаемой жидкости оно не нужно, если только мы не интересуемся специально распределением температуры в ней и его влиянием на движение.

Вернемся к общему уравнению (51,2). В предельном случае достаточно большой проводимости оно приобретает вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}H], \quad (51,14)$$

и ему может быть дано весьма важное наглядное истолкование. Раскроем rot в правой стороне равенства, учитывая при этом, что $\operatorname{div} H = 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (H\nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) H - H \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Подставив сюда согласно уравнению непрерывности (51,3)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\rho} \nabla \rho,$$

получим после простой перегруппировки членов

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right\} \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}.$$

Выражение в левой стороне равенства представляет собой «субстанциональную» производную, определяющую изменение величины при перемещении вместе с движущейся частицей жидкости; обозначая такую производную как d/dt , имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (51,15)$$

С другой стороны, рассмотрим какую-либо «жидкую линию», т. е. линию, перемещающуюся вместе с составляющими ее частицами жидкости. Пусть $\delta \mathbf{l}$ — элемент длины этой линии; определим, как он меняется с течением времени. Если \mathbf{v} есть скорость жидкости в точке на одном конце элемента $\delta \mathbf{l}$, то ее скорость на другом конце есть $\mathbf{v} + (\delta \mathbf{l} \nabla) \mathbf{v}$. Поэтому в течение времени dt элемент $\delta \mathbf{l}$ изменится на $dt (\delta \mathbf{l} \nabla) \mathbf{v}$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{l} = (\delta \mathbf{l} \nabla) \mathbf{v}.$$

Мы видим, что изменение векторов $\delta \mathbf{l}$ и \mathbf{H}/ρ со временем определяется одним и тем же уравнением. Отсюда следует, что если в начальный момент эти векторы совпадают по направлению, то они останутся параллельными и в дальнейшем, а их длины будут меняться пропорционально друг другу. Другими словами, если две бесконечно близкие частицы жидкости находятся на одной и той же силовой линии, то они будут всегда находиться на ней, а величина \mathbf{H}/ρ будет меняться пропорционально расстоянию между ними.

Переходя от бесконечно близких точек к точкам, находящимся на любом конечном расстоянии друг от друга, мы приходим, следовательно, к выводу, что каждая силовая линия перемещается вместе с находящимися на ней жидкими частицами. Можно сказать образно, что (в рассматриваемом предельном случае $\varepsilon \rightarrow \infty$) магнитные силовые линии как бы «приклеены» к веществу жидкости, перемещаясь вместе с ним. Величина же \mathbf{H}/ρ меняется в каждой точке пропорционально растяжению соответствующей «жидкой линии». Если движущуюся жидкость можно считать несжимаемой, то $\rho = \text{const}$ и тогда пропорционально растяжению силовых линий меняется сама напряженность \mathbf{H} .

Эти результаты имеют и другой наглядный аспект. Из них следует, что при перемещении со временем какого-либо замкнутого «жидкого» контура он не будет пересекать силовых линий, т. е. «число» проходящих через него силовых линий будет оставаться неизменным. Это значит (ср. § 49), что поток магнитного поля через всякую поверхность, опирающуюся на «жидкий» контур, остается неизменным со временем.

Вопрос о том, в каких случаях фактически можно пренебречь диссипативными процессами в жидкости, не имеет общего ответа, так как соответствующие условия существенно зависят от самого характера движения и, например, совершенно различны для стационарных и нестационарных движений. Мы не будем заниматься здесь общим исследованием этого вопроса.

З а д а ч а

Определить распределение скоростей в несжимаемой вязкой проводящей жидкости, стационарно движущейся в пространстве между двумя плоско-параллельными твердыми плоскостями; в направлении, перпендикулярном к плоскостям, приложено однородное внешнее магнитное поле H_0 (С. Гартман, 1937).

Решение. Естественно предположить, что скорость жидкости имеет везде одинаковое направление (которое выберем в качестве направления оси x); она зависит только от координаты z в направлении, перпендикулярном к плоскостям. То же относится и к возникающему благодаря движению жидкости продольному полю H_x . Давление же p зависит также и от x , так как в направлении движения должен иметься постоянный градиент давления, поддерживающий стационарное течение. Уравнение $\operatorname{div} v = 0$ выполняется автоматически, а из уравнения $\operatorname{div} H = 0$ следует, что $H_z = \text{const} = H_0$ z -компонента уравнения (51,13) дает

$$p + \frac{H_x^2}{8\pi} = P(x), \quad (1)$$

где $P(x)$ — функция только от x . Градиент давления вдоль оси — $dp/dx = -dP/dx$ есть постоянная величина.

Далее, x -компоненты уравнений (51,12), (51,13) дают

$$H_0 \frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0, \quad (2)$$

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{dH_x}{dz} = \text{const} \equiv \frac{dP}{dx}. \quad (3)$$

Граничные условия для скорости вязкой жидкости гласят: $v = 0$ при $z = \pm a$, где $2a$ — расстояние между твердыми плоскостями, а плоскость $z = 0$ расположена посередине между ними. Такое же условие, $H_x = 0$ при $z = \pm a$, должно выполняться для магнитного поля, так как вне жидкости имеется неизменное внешнее поле H_0 , а тангенциальная к границе компонента H непрерывна. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений (2), (3) есть

$$v = v_0 \frac{\operatorname{ch}(a/\Delta) - \operatorname{ch}(z/\Delta)}{\operatorname{ch}(a/\Delta) - 1}, \quad H_x = -v_0 \frac{4\pi}{c} \sqrt{\sigma\eta} \frac{(z/a) \operatorname{sh}(a/\Delta) - \operatorname{sh}(z/\Delta)}{\operatorname{ch}(a/\Delta) - 1}, \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$. Постоянная v_0 есть скорость жидкости в средней плоскости $z = 0$. Ее связь с градиентом давления можно получить, подставляя (4) в (3). Средняя (по сечению) скорость жидкости

$$\bar{v} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a v dz = -\frac{dP}{dx} \frac{a\Delta}{\eta} \left(\operatorname{cth} \frac{a}{\Delta} - \frac{\Delta}{a} \right).$$

Критерием степени влияния магнитного поля на течение жидкости оказывается отношение $\frac{a}{\Delta} = \frac{aH_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$. При $a/\Delta \ll 1$ получается

$$v = v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right), \quad \bar{v} = -\frac{dP}{dx} \frac{a^2}{3\eta}$$

в соответствии с результатом обычной гидродинамики. Если же $a/\Delta \gg 1$, то

$$v = v_0 (1 - e^{-(a-|z|/\Delta)}), \quad \bar{v} = -\frac{dP}{dx} \frac{ac}{H_0 \sqrt{\sigma\eta}}.$$

Увеличение магнитного поля делает профиль скоростей более плоским на большей части сечения и уменьшает среднюю скорость движения (при заданном градиенте давления).

§ 52. Магнитогидродинамические волны

Рассмотрим распространение малых возмущений в однородной проводящей среде, находящейся в однородном постоянном магнитном поле H_0 . Предположим при этом, что вязкость, теплопроводность и электрическое сопротивление ($1/\sigma$) среды настолько малы, что влиянием связанной с ними диссипации энергии на распространение возмущений можно в первом приближении пренебречь¹⁾. Тогда возмущения будут распространяться в виде незатухающих волн²⁾.

Опуская все диссипативные члены, перепишем систему основных уравнений (51,1)—(51,4) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (52,1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (52,2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (52,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]. \quad (52,4)$$

Что касается уравнения (51,6), то оно сводится к уравнению сохранения энтропии (условие адиабатичности движения). Если невозмущенная среда однородна, то в силу этого уравнения и в возмущенной среде будет $s = \text{const}$, т. е. движение будет изэнтропическим.

Напишем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (52,5)$$

¹⁾ Отметим, что, положив $1/\sigma = 0$, мы тем самым расширяем частотную область применимости рассматриваемых уравнений: становятся необязательными условия, обеспечивающие отсутствие дисперсии σ и ее независимость от магнитного поля.

²⁾ Условия возможности такого пренебрежения заключаются в малости коэффициента затухания волн, который вычислен в задаче к этому параграфу.

где индексом 0 отмечены постоянные равновесные значения величин, а \mathbf{h} , ρ' , p' — их малые изменения в волне. Малой того же порядка является и скорость \mathbf{v} , равная нулю в равновесии. Ввиду изэнтропичности движения изменения давления и плотности связаны друг с другом посредством

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho'.$$

Но $(\partial p / \partial \rho)_s$ есть квадрат обычной скорости звука в данной среде. Обозначая эту скорость посредством u_0 , имеем $p' = u_0^2 \rho'$. Пренебрегая в уравнениях (52,1)—(52,4) малыми величинами порядка выше первого, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\frac{u_0^2}{\rho} \nabla \rho' - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{h}]. \end{aligned} \quad (52,6)$$

Здесь и ниже для краткости обозначений мы опускаем индексы 0 у равновесных значений величин. Для периодического во времени возмущения первое из этих уравнений есть следствие второго и может отдельно не рассматриваться.

Будем искать решения этих уравнений, имеющие вид $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, т. е. описывающие распространение плоских волн с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω . Для них система (52,6) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -\omega \mathbf{h} &= [\mathbf{k} [\mathbf{v} \mathbf{H}]], \\ \omega \rho' &= \rho \mathbf{k} \mathbf{v}, \\ -\omega \mathbf{v} + \frac{u_0^2}{\rho} \rho' \mathbf{k} &= -\frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} [\mathbf{k} \mathbf{h}]]. \end{aligned}$$

Первое из них показывает прежде всего, что вектор \mathbf{h} перпендикулярен к направлению волнового вектора, которое мы выбираем ниже в качестве оси x . Плоскость же, проходящую через \mathbf{k} и \mathbf{H} , выберем в качестве плоскости xu . Кроме того, введем «фазовую скорость» волны

$$u = \frac{\omega}{k}.$$

Исключая ρ' с помощью второго уравнения и переписывая остальные в компонентах, получим следующую систему:

$$uh_z = -v_z H_x, \quad uv_z = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_z, \quad (52,7)$$

$$uh_y = v_x H_y - v_y H_x, \quad uv_y = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_y, \quad (52,8)$$

$$v_x \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) = \frac{H_y}{4\pi\rho} h_y.$$

Мы разбили здесь уравнения на две группы, из которых первая содержит только переменные h_z, v_z , а вторая — только h_y, v_x, v_y . Отсюда следует, что возмущения этих двух групп переменных распространяются независимо друг от друга. Что касается возмущений плотности (а с нею и давления), то они распространяются вместе с возмущениями h_y, v_x, v_y , будучи связаны с v_x соотношением

$$\rho' = \frac{\rho}{u} v_x. \quad (52,9)$$

Условие совместности двух уравнений (52,7) дает

$$u_1 = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (52,10)$$

В этих волнах испытывает колебания компонента h_z магнитного поля, перпендикулярная к направлению распространения волны и направлению постоянного поля H . Вместе с h_z колеблется скорость v_z , связанная с h_z посредством

$$v_z = -\frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (52,11)$$

Связь между ω и k (или, как говорят, закон дисперсии), даваемая формулой (52,10), существенно зависит от направления волнового вектора

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} Hk.$$

Физической же скоростью распространения волн является, как известно, так называемая «групповая скорость», даваемая производной $\partial\omega/\partial k$. В данном случае эта величина равна

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

и не зависит от направления k ; направление распространения волны, понимаемое как направление ее групповой скорости, совпадает с направлением H .

Обратимся к волнам, описываемым уравнениями (52,8). Составляя определитель этих уравнений и приравнявая его нулю, получим уравнение

$$(u^2 - u_0^2) \left(u^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \right) = \frac{u^2 H_y^2}{4\pi\rho}.$$

Это биквадратное (по u) уравнение имеет корни ¹⁾

$$u_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \pm \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} - \frac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \right\}. \quad (52,12)$$

Таким образом, мы получаем еще два типа волн. В них испытывают колебания величины h_y , v_x , v_y (и плотность ρ'). Векторы \mathbf{h} , \mathbf{v} в этих волнах лежат в плоскости векторов \mathbf{H} , \mathbf{k} .

В предельном случае, когда $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$, имеем $u_2 \cong u_0$, а из уравнений (52,8) следует, что $v_y \ll v_x$. Другими словами, этот тип волн в пределе переходит в обычные звуковые волны, распространяющиеся со скоростью u_0 . Слабое поперечное поле в волне связано с v_x посредством

$$h_y \cong v_x \frac{H_y}{u_0}.$$

В том же предельном случае u_3 в первом приближении совпадает с u_1 , причем $v_x \cong 0$, $v_y \cong -h_y / \sqrt{4\pi\rho}$, как и в волне первого типа, но только с векторами \mathbf{v} и \mathbf{h} , лежащими в плоскости \mathbf{kH} , а не перпендикулярно к ней.

Мы видим также, что в несжимаемой жидкости (чему формально соответствует предельный переход $u_0 \rightarrow \infty$) остается всего один тип волн, с двумя независимыми направлениями поляризации. Закон дисперсии для этих волн дается формулой (52,10), а векторы \mathbf{v} и \mathbf{h} перпендикулярны к волновому вектору и связаны соотношением

$$\mathbf{v} = - \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (52,13)$$

Эти волны были впервые рассмотрены *Х. Альфвен*ом (1942)²⁾.

Тот факт, что при наличии продольного магнитного поля поперечные смещения жидкости распространяются в ней в виде волн, имеет простое наглядное истолкование. Мы видели в конце § 51, что магнитные силовые линии ведут себя (в жидкости с $\sigma \rightarrow \infty$), как «жидкие». Поэтому поперечное смещение частиц жидкости

¹⁾ Корни биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ можно написать в виде

$$x = \pm \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{-p + 2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-p - 2\sqrt{q}} \right\}.$$

²⁾ Их называют иногда магнитогидродинамическими, в узком смысле слова. В общем случае не малых магнитных полей разделение волн на магнитогидродинамические и обычные звуковые невозможно.

приводит к их искривлению и тем самым к растяжению и, в некоторых местах, сгущению. Но характер действующих в магнитном поле сил (выражаемых максвелловским тензором напряжений) таков, как если бы магнитные силовые линии стремились сокращаться и в то же время отталкиваться друг от друга¹⁾. Поэтому при их искривлении возникают «квазиупругие» силы, стремящиеся вновь выпрямить их, что и приводит к возникновению колебаний.

Интересно, что в несжимаемой жидкости плоская магнитогидродинамическая волна, описываемая формулами (52,10) и (52,13), является в действительности точным решением уравнений, справедливым при любых, не обязательно малых, поперечных полях \mathbf{h} (это, однако, не относится к суперпозиции нескольких плоских волн, распространяющихся в различных направлениях). Действительно, обратимся к точным уравнениям (52,1)—(52,4). Третье из них в несжимаемой жидкости сводится к $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Если искать решение, в котором все величины зависят только от одной координаты x (и времени t), то из этого уравнения мы найдем, что $v_x = \text{const}$; переходом к другой системе координат, равномерно движущейся вдоль оси x , можно всегда добиться, чтобы было $v_x = 0$. Из уравнения же $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ следует, что $H_x = \text{const}$. Обозначив поперечные компоненты \mathbf{H} посредством \mathbf{h} , получим из уравнений (52,2) и (52,4) (при $v_x = 0$)

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{H_x}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x},$$

т. е. точные уравнения автоматически сводятся к линейным уравнениям, описывающим плоскую волну с фазовой скоростью (52,10), причем \mathbf{v} и \mathbf{h} связаны соотношением (52,13). x -компонента уравнения (52,4) дает

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$p + \frac{h^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (52,14)$$

чем определяется ход изменения давления в волне.

Обратимся снова к формулам (52,8) и (52,12) и рассмотрим обратный предельный случай, когда $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$. Для u_2 имеем тогда в первом приближении

$$u_2 = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Поскольку это выражение не зависит вовсе от \mathbf{k} , то групповая скорость совпадает по величине с u_2 и направлена вдоль \mathbf{k} . Вектор \mathbf{v}

¹⁾ Действительно, пусть силовая линия совпадает с осью z . Тогда продольное напряжение Π_{zz} (51,8) содержит отрицательный член $-H^2/8\pi$, а поперечные Π_{xx} , Π_{yy} — положительный член $H^2/8\pi$.

в этой волне перпендикулярен к \mathbf{H} (рис. 28) и его абсолютная величина связана с $h = h_y$ посредством

$$v = \frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Для u_3 имеем в этом случае

$$u_3 = u_0 \frac{H_x}{H}.$$

При этом групповая скорость

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = u_0 \frac{\mathbf{H}}{H}.$$

Вектор \mathbf{v} в этой волне антипараллелен \mathbf{H} , а по величине связан с h посредством

$$v = h \frac{H^2}{4\pi\rho u_0 H_y}.$$

При произвольном соотношении между H^2 и ρu_0^2 как u_2 , так и u_3 зависят от направления волнового вектора. При увеличении угла между \mathbf{k} и \mathbf{H} u_2 монотонно возрастает, а u_3 монотонно убывает. Легко видеть, что всегда имеют место неравенства

$$u_3 \leq u_1 \leq u_2, \quad u_2 \geq u_0, \quad u_3 \leq u_0. \quad (52,15)$$

Если $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ($H_y = 0$, $H_x = H$), то u_2 и u_3 равны соответственно большей и меньшей из величин u_0 и $u_1 = H/\sqrt{4\pi\rho}$. Если же $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ($H_x = 0$, $H_y = H$), то имеем

$$u_2 = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}}, \quad (52,16)$$

а u_1 и u_3 обращаются в нуль, т. е. остаются волны всего лишь одного типа.

В этом последнем случае оказывается возможным найти точные решения уравнений магнитной гидродинамики для плоской волны, не связанные с предположением о малости ее амплитуды (С. А. Каплан и К. П. Станюкович, 1954). При $H_x = 0$, $H_y = H$ уравнение (52,1) удовлетворяется тождественно, а уравнения (52,2)—(52,4) дают

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (v_x H)}{\partial x} = 0, \quad (52,17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v_x \rho)}{\partial x} = 0, \quad (52,18)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (52,19)$$

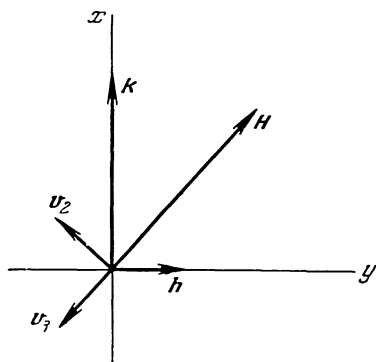


Рис. 28.

Из первых двух уравнений следует, как легко убедиться, что отношение $H/\rho = b$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

или $db/dt = 0$, где полная производная означает изменение величины при перемещении данного элемента жидкости. Отсюда следует, что если в начальный момент жидкость была однородна, так что b было в ней постоянно, то и в дальнейшем будет ¹⁾

$$\frac{H}{\rho} = b = \text{const.} \quad (52,20)$$

Подставив $H = \rho b$ в третье уравнение, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2 \right). \quad (52,21)$$

Таким образом, магнитное поле исключается из уравнений, и задача сводится к решению уравнений (52,18) и (52,21). Но эти уравнения отличаются от уравнений одномерного движения в обычной гидродинамике лишь изменением уравнения состояния газа: вместо истинного уравнения $p = p(\rho)$ (при заданной энтропии s) надо пользоваться уравнением

$$p^*(\rho) = p(\rho) + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2.$$

Это обстоятельство позволяет перенести на рассматриваемый случай магнитогидродинамического движения все результаты обычной гидродинамики. В частности, переносятся формулы точного решения для одномерных бегущих волн (риманово решение) ²⁾, причем роль скорости звука в них будет играть

$$u^* = \sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi} \rho} = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi \rho}},$$

в соответствии с формулой (52,16).

Задача

Определить коэффициент поглощения магнитогидродинамической волны (предполагая его малым) в несжимаемой жидкости.

Решение. Коэффициент поглощения волны определяется как

$$\gamma = \frac{\bar{Q}}{2q},$$

¹⁾ В соответствии с общими результатами для связи между H/ρ и «жидкими» силовыми линиями (§ 51), если учесть, что в данном случае длина последних не меняется со временем.

²⁾ См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 94.

где \bar{Q} — среднее (по времени) значение энергии, диссипируемой в 1 сек в 1 см³, а \bar{q} — средняя плотность потока энергии в волне; амплитуда волны убывает по мере ее распространения пропорционально $e^{-\gamma x}$. Q дается правой стороной уравнения (51,6); в несжимаемой жидкости для волны, распространяющейся вдоль оси x (соответственно чему $v_x = 0$), имеем

$$Q = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2.$$

В плотности же потока энергии (51,9) малые диссипативные члены опускаем и имеем

$$q_x = -\frac{1}{4\pi} H_x h v.$$

Используя формулы (52,10) и (52,13), получим в результате

$$\gamma = \frac{\omega^3}{2\mu_1^3} \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right).$$

§ 53. Тангенциальные и вращательные разрывы

Уравнения движения «идеальной» магнитогидродинамической среды (среда без вязкости, теплопроводности и электрического сопротивления) допускают разрывные течения, так же как и в обычной гидродинамике.

Для выяснения условий, которые должны выполняться на поверхности разрыва, рассмотрим какой-либо элемент этой поверхности и воспользуемся системой координат, движущейся вместе с ним¹⁾.

Прежде всего, на поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества: количество газа, входящего с одной стороны, должно быть равно количеству газа, выходящему с другой стороны поверхности. Это значит, что $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$, где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам разрыва, а индекс n означает нормальную к поверхности составляющую вектора. Ниже мы будем обозначать разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва посредством фигурных скобок. Таким образом,

$$\{\rho v_n\} = 0.$$

Далее, должен быть непрерывен поток энергии. Воспользовавшись выражением (51,9) (и опустив в нем диссипативные члены), получим

$$\{q_n\} = \left\{ \rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + \varpi \right) + \frac{1}{4\pi} [v_n H^2 - H_n (vH)] \right\} = 0.$$

Должен быть непрерывен также и поток импульса. Это условие означает, что $\{\Pi_{ik} n_k\} = 0$, где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса,

1) Этим условием система координат фиксируется лишь в отношении своей скорости в направлении, нормальном к поверхности. К касательной же ее скорости может еще быть добавлен произвольный постоянный вектор.

а \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности. С помощью (51,8) получим отсюда уравнения

$$\left\{ p + \rho v_n^2 + \frac{1}{8\pi} (H_t^2 - H_n^2) \right\} = 0,$$

$$\left\{ \rho v_n \mathbf{v}_t - \frac{1}{4\pi} H_n H_t \right\} = 0,$$

где индексом t отмечены тангенциальные к поверхности составляющие векторов.

Наконец, непрерывны нормальная составляющая магнитного поля и тангенциальная составляющая электрического поля. При бесконечной проводимости среды индукционное электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}H].$$

Поэтому условие $\{E_t\} = 0$ дает

$$\{H_n \mathbf{v}_t - H_t v_n\} = 0.$$

Ниже нам будет удобнее пользоваться вместо плотности газа его удельным объемом $V = 1/\rho$. Плотность же потока массы через разрыв обозначим посредством j :

$$j = \rho v_n = \frac{\dot{V}_n}{V}.$$

Учитывая непрерывность j и H_n , остальные граничные условия можно написать в следующем виде:

$$j \left\{ \omega + \frac{j^2 V^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} + \frac{V H_t^2}{4\pi} \right\} = \frac{H_n}{4\pi} \{H_t \mathbf{v}_t\}, \quad (53,1)$$

$$\{p\} + j^2 \{V\} + \frac{1}{8\pi} \{H_t^2\} = 0, \quad (53,2)$$

$$j \{\mathbf{v}_t\} = \frac{H_n}{4\pi} \{H_t\}, \quad (53,3)$$

$$H_n \{\mathbf{v}_t\} = j \{V H_t\}. \quad (53,4)$$

Это и есть основная система уравнений, описывающих разрывы в магнитной гидродинамике.

В обычной гидродинамике возможны, как известно, разрывы двух совершенно различных типов — ударные волны и тангенциальные разрывы¹⁾. Возникновение двух типов разрывов связано математически с тем, что некоторые из уравнений граничных условий оказывается возможным представить в виде равенства нулю произведения двух множителей; приравнявая нулю каждый из множителей в отдельности, мы получаем два совершенно независимых решения.

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 81.

В магнитной же гидродинамике уравнения (53,1) — (53,4) не имеют такого вида, и на этом основании можно было бы думать, что имеется всего один единый тип разрывов, охватывающий все возможные частные случаи. В действительности, однако, оказывается, что и здесь существуют различные типы разрывов, не являющиеся частными случаями один другого (Ф. Гoffман, Э. Теллер, 1950).

Рассмотрим, прежде всего, такие разрывы, в которых $j = 0$. Это значит, что $v_{1n} = v_{2n} = 0$, т. е. жидкость движется параллельно поверхности разрыва. Если при этом $H_n \neq 0$, то из уравнений (53,1) — (53,4) видно, что должны быть непрерывными скорость, давление и магнитное поле. Произвольный же скачок может испытывать плотность (а также энтропия, температура и т. п.). Такой разрыв, который можно назвать «контактным», представляет собой просто границу раздела между двумя неподвижными средами с различными плотностями и температурами.

Если же при $j = 0$ также и $H_n = 0$, то из четырех уравнений (53,1) — (53,4) тождественно удовлетворяются сразу три; уже отсюда ясно, что этот случай является особым. Таким образом, мы находим тип разрывов, которые можно назвать, как и в обычной гидродинамике, тангенциальными. На таком разрыве скорость и магнитное поле касательны к его поверхности и испытывают произвольные по величине и направлению скачки:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad \{v_t\} \neq 0, \quad \{H_t\} \neq 0. \quad (53,5)$$

Произволен также скачок плотности, а скачок давления связан со скачком H_t уравнением (53,2):

$$\{V\} \neq 0, \quad \left\{ p + \frac{H_t^2}{8\pi} \right\} = 0. \quad (53,6)$$

Скачки же других термодинамических величин (энтропии, температуры и т. д.) определяются по скачкам V и p с помощью уравнения состояния газа.

Другим типом разрывов являются разрывы, в которых плотность газа не испытывает скачка. Ввиду непрерывности потока $j = v_n/V$ из отсутствия скачка плотности сразу следует, что будет непрерывной и нормальная составляющая скорости

$$j \neq 0, \quad \{V\} = 0, \quad \{v_n\} = 0. \quad (53,7)$$

Далее, в правой стороне уравнения (53,4) выносим V за фигурные скобки и, разделив почленно уравнения (53,4) и (53,3) друг на друга, получаем

$$j = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi V}}. \quad (53,8)$$

После этого уравнение (53,3) или (53,4) дает

$$\{\mathbf{v}_t\} = \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \{H_t\}. \quad (53,9)$$

В уравнении (53,1) пишем $\omega = \varepsilon + pV$; учитывая непрерывность V , заменяя H_n согласно (53,8) и производя перегруппировку членов, переписываем его в виде

$$j\{\varepsilon\} + jV\left\{p + \frac{1}{8\pi} H_t^2\right\} + \frac{j}{2} \left\{(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} H_t)^2\right\} = 0.$$

Второй член здесь обращается в нуль в силу равенства (53,2), а третий — в силу (53,9), так что остается $\{\varepsilon\} = 0$, т. е. наряду с плотностью непрерывна также и внутренняя энергия. Но всякая другая термодинамическая величина однозначно определяется заданием двух величин — ε и V . Поэтому непрерывны и все остальные термодинамические величины, в том числе давление. Из уравнения же (53,2) следует тогда, что непрерывен также квадрат H_t^2 , т. е. абсолютная величина вектора H_t :

$$\{p\} = 0, \quad \{H_t\} = 0. \quad (53,10)$$

Одновременная непрерывность H_t и H_n означает, что остаются неизменными также полная абсолютная величина вектора H и угол, образуемый им с нормалью к поверхности.

Формулы (53,7) — (53,10) определяют все свойства рассматриваемых разрывов. На них непрерывны термодинамические величины газа, а магнитное поле поворачивается вокруг направления нормали, оставаясь неизменным по своей абсолютной величине. Вместе с вектором H_t испытывает скачок касательная составляющая скорости (согласно (53,9)), а нормальная составляющая скорости $v_n = jV$ непрерывна и равна

$$v_n = H_n \sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (53,11)$$

Мы будем называть разрывы этого типа вращательными.

Полезно заметить, что путем соответствующего выбора системы координат всегда можно добиться, чтобы с обеих сторон поверхности вращательного разрыва скорость газа была параллельна полю. Для этого достаточно перейти к новой системе координат (см. примечание на стр. 283), движущейся относительно исходной со скоростью, равной

$$\mathbf{v}_{1t} - H_{1t} \sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \mathbf{v}_{2t} - H_{2t} \sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

В этой новой системе координат с обеих сторон разрыва отношения всех трех составляющих \mathbf{v} к соответствующим компонентам H

одинаковы и равны $\sqrt{V/4\pi}$, т. е.

$$v_1 = H_1 \sqrt{\frac{V}{4\pi}}, \quad v_2 = H_2 \sqrt{\frac{V}{4\pi}}. \quad (53,12)$$

Таким образом, в этой системе координат скорость поворачивается вместе с магнитным полем, оставаясь неизменной по величине и по углу, образуемому ею с нормалью.

Скорость v_n , взятая с обратным знаком, есть в то же время скорость распространения разрыва относительно жидкости. Она совпадает с фазовой скоростью (u_1), одного из трех типов магнито-гидродинамических волн (§ 52). Тот факт, что это совпадение имеет место для любого вращательного разрыва, до известной степени случаен, но при малых скачках величин на разрыве такое совпадение обязательно. Действительно, такой разрыв представляет собой слабое возмущение, в котором скорость v и магнитное поле H получают малые приращения, перпендикулярные к плоскости, проходящей через H и нормаль к поверхности n . Это возмущение относится как раз к тому типу, который обладает фазовой скоростью u_1 . Физической скоростью распространения поверхности фронта малого возмущения является проекция групповой скорости на нормаль к ней, т. е. на волновой вектор k . Но ввиду линейности связи ω с k имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} k = \omega,$$

и потому указанная проекция совпадает с фазовой скоростью $\omega/k \equiv u_1$.

Хотя тангенциальные и вращательные разрывы представляют собой различные типы разрывов, но существуют разрывы, которые обладают одновременно свойствами тех и других. Такими являются разрывы, на которых v и H тангенциальны и лишь поворачиваются, не меняясь по абсолютной величине.

Как известно, в обычной гидродинамике тангенциальные разрывы всегда неустойчивы по отношению к бесконечно малым возмущениям, что приводит к их быстрому размыванию в турбулентные области. Магнитное же поле оказывает стабилизирующее влияние на движение проводящей жидкости, и тангенциальные разрывы в ней могут оказаться устойчивыми. Это обстоятельство является естественным следствием того, что поперечные (по отношению к полю) смещения жидкости при возмущении связаны с растяжением «приклеенных» к ней магнитных силовых линий и тем самым приводят к возникновению сил, стремящихся восстановить невозмущенное движение. Для разрывов в несжимаемой жидкости соответствующее исследование (произведенное С. И. Сыроватским, 1953) приводит к следующим двум неравенствам, которые должны одновременно выполняться для того, чтобы разрыв был устойчивым:

$$H_1^2 + H_2^2 > 2\pi\sigma v^2, \quad (53,13)$$

$$[H_1 H_2]^2 \geq 2\pi\sigma ([H_1 v]^2 + [H_2 v]^2),$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — скачок скорости на разрыве (см. задачу 1 к этому параграфу) ¹⁾.

Фактически, однако, благодаря наличию у жидкости малых, но все же конечных вязкости и электрического сопротивления тангенциальный разрыв не будет оставаться таковым в течение неограниченно долгого времени, даже если условия (53,13) выполнены. Хотя турбулентность при этом и не возникает, но вместо резкого разрыва получается постепенно расширяющаяся переходная область, в которой скорость и магнитное поле плавно меняются от одного своего значения к другому.

В этом легко убедиться на основании уравнений движения (51,12) и (51, 13), сохранив в них диссипативные члены. Выберем направление нормали к разрыву в качестве оси x . Предполагая все величины зависящими только от координаты x (и, возможно, от времени), напомним поперечные составляющие этих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_t}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (53,14)$$

(жидкость предполагаем несжимаемой). Если предположить движение стационарным, то левые стороны этих уравнений заменяются нулями. Но тогда единственное решение, остающееся конечным при $x \rightarrow \pm \infty$, есть просто $H_t = \text{const}$, $\mathbf{v}_t = \text{const}$, в противоречии с предположением о наличии изменения значений этих величин. Таким образом, тангенциальный разрыв не может иметь стационарной ширины (как ее имеет, например, слабая ударная волна). Уравнения (53,14) имеют вид уравнения теплопроводности. Как известно из теории теплопроводности, разрыв величины, описываемой этим уравнением, с течением времени размывается в переходную область, ширина которой растет пропорционально квадратному корню из времени. Ввиду различия коэффициентов в двух уравнениях (53,14), ширины δ_v и δ_H областей изменения скорости и поля будут различны:

$$\delta_v \sim \sqrt{\nu t}, \quad \delta_H \sim \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma}}. \quad (53,15)$$

Что касается вращательных разрывов, то они оказываются устойчивыми (в несжимаемой жидкости) по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях магнитного поля (С. И. Сыроватский, 1953). Однако, как и тангенциальные разрывы, они не

¹⁾ Если плотности несжимаемых сред с двух сторон разрыва различны, то в этих условиях ρ заменяется на

$$\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

могут иметь стационарной ширины и под влиянием вязкости и электрического сопротивления среды расширяются со временем (см. задачу 2).

Задачи

1. Получить условия устойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле (С. И. Сыроватский). Решени е¹). Пишем

$$v = v_0 + v', \quad p = p_0 + p', \quad H = H_0 + H',$$

где v_0, p_0, H_0 — постоянные (с каждой из сторон разрыва) невозмущенные значения величин, а v', p', H' — их малые возмущения. Подставляя в уравнения (51,11) — (51,13), получим для идеальной жидкости

$$\operatorname{div} u' = 0, \quad \operatorname{div} v' = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = (u\nabla) v' - (v\nabla) u', \quad (2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (v\nabla) v' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' - [u \operatorname{rot} u'] = -\frac{1}{\rho} \nabla (p' + \rho uu') + (u\nabla) u'. \quad (3)$$

Для краткости мы опускаем здесь и ниже индекс 0 и вводим обозначение $u = H/\sqrt{4\pi\rho}$. Применив к уравнению (3) операцию div и учитывая (1) получим

$$\Delta (p' + \rho uu') = 0. \quad (4)$$

Пусть $x=0$ есть плоскость разрыва; векторы v и u параллельны ей. В каждом из полупространств $x > 0$ и $x < 0$ ищем все величины v', u', p' в виде, пропорциональном $e^{i(kr - \omega t)} e^{\kappa x}$, где k — двухмерный вектор в плоскости y, z . Из уравнения (4) найдем, что $k^2 - \kappa^2 = 0$, так что надо положить $\kappa = +k$ на стороне $x < 0$ и $\kappa = -k$ на стороне $x > 0$. Далее, из x -компонент уравнений (2) и (3) исключаем v'_x и получаем²⁾

$$p' + \rho uu' = -u'_x \frac{i\rho}{\kappa} [(\omega - kv)^2 - (ku)^2]. \quad (5)$$

Пусть $\zeta = \zeta(y, z, t)$ есть смещение вдоль оси x поверхности разрыва при возмущении. На смещенной поверхности должны выполняться условия (53,5) и (53,6):

$$\begin{aligned} \{p + \rho (u + u')^2\} &\cong \{p' + \rho uu'\} = 0, \\ u_{n1} + u'_{n1} &\cong u'_{x1} - (u_1 \nabla) \zeta = 0, \\ u_{n2} + u'_{n2} &\cong u'_{x2} - (u_2 \nabla) \zeta = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(условие отсутствия потока жидкости через поверхность разрыва выполняется при этом автоматически).

Положив $\zeta = \operatorname{const} \cdot e^{i(kr - \omega t)}$ и исключая ζ, u_{x1}, u_{x2} из трех уравнений (6), получим уравнение, определяющее возможные значения ω :

$$(\omega - kv_1)^2 + (\omega - kv_2)^2 = (ku_1)^2 + (ku_2)^2.$$

¹⁾ Ср. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 30.

²⁾ Случай, когда выражение в квадратных скобках обращается в нуль, нас не интересует, так как при этом ω вещественно, а неустойчивость может быть связана лишь с комплексными значениями ω .

Это квадратное уравнение не имеет комплексных корней, если

$$2(ku_1)^2 + 2(ku_2)^2 - (k, v_2 - v_1)^2 > 0$$

или

$$[2u_{1i}u_{1k} + 2u_{2i}u_{2k} - (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})] k_i k_k > 0.$$

Эта квадратичная форма положительна, если положительны след и определитель тензора второго ранга, стоящего в квадратных скобках; отсюда и получаются указанные в тексте условия (53,13).

2. Найти закон расширения со временем вращательного разрыва.

Решение. Предполагая все величины зависящими только от координаты x (и времени), найдем из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, что $v_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. Пусть система координат выбрана так, что значения \mathbf{v} и \mathbf{H} по обеим сторонам разрыва (т. е. вдали от переходного слоя) связаны соотношениями (53,12); тогда $v_x = u_x$ (с тем же обозначением u , что и в задаче 1). Для поперечных составляющих u_t и v_t имеем из (51,12) и (51,13) уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial v_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial u_t}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку при $x = \pm \infty$ разность $v_t - u_t$ обращается в нуль в силу соотношений (53,12), то внутри переходного слоя она мала по сравнению с суммой $v_t + u_t$. Сложив уравнения (1), мы можем поэтому пренебречь членом с $v_t - u_t$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_t + u_t) = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_t + u_t).$$

Отсюда видно, что ширина разрыва меняется по закону

$$\delta \sim \sqrt{\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu \right) t}.$$

§ 54. Ударные волны

Перейдем к следующему типу разрывов, в котором

$$j \neq 0, \quad \{V\} \neq 0. \quad (54,1)$$

Эти разрывы, как и в обычной гидродинамике, называют ударными волнами. Они характеризуются наличием скачка плотности и тем, что газ движется сквозь них (v_{n1} и v_{n2} отличны от нуля). Что касается нормальной компоненты магнитного поля, то она, вообще говоря, отлична от нуля, но в частном случае может быть и $H_n = 0$.

Сравнивая уравнения (53,3) и (53,4), мы видим, что (при $H_n \neq 0$) векторы $H_{t2} - H_{t1}$ и $V_2 H_{t2} - V_1 H_{t1}$ параллельны одному и тому же вектору $v_{2t} - v_{1t}$, а потому параллельны между собой. Отсюда в свою очередь следует, что параллельны друг другу H_{t1} и H_{t2} , т. е. векторы H_1 и H_2 и нормаль к поверхности лежат в одной плоскости, в противоположность тангенциальным и вращательным разрывам, в которых, вообще говоря, плоскости H_1, n и H_2, n не совпадают. Этот результат справедлив и в случае $H_n = 0$, когда

из (53,4) следует, что $V_1 H_{1t} = V_2 H_{2t}$ (этот случай будет рассмотрен подробнее ниже).

Что касается скорости, то скачок $\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1}$ расположен в той же плоскости, что и $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$. Не ограничивая общности, можно, очевидно, считать, что и сами векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 лежат в той же плоскости, так что движение в ударной волне является по своей природе плоским. Более того, легко видеть, что путем соответствующего преобразования системы координат можно (при $H_n \neq 0$) всегда добиться того, чтобы с обеих сторон разрыва векторы \mathbf{v} и \mathbf{H} были параллельны друг другу. Для этого надо перейти к новой системе координат, движущейся относительно первоначальной со скоростью

$$\mathbf{v}_t - \frac{v_n}{H_n} \mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t - \frac{jV}{H_n} \mathbf{H}_t$$

(значения этой величины с обеих сторон разрыва одинаковы в силу граничного условия (53,4)). В следующих ниже формулах мы, однако, не будем предполагать этого специального выбора системы координат.

Выведем соотношение, играющее для ударных волн в магнитной гидродинамике роль адиабаты Гюгонио обычной гидродинамики. Исключив $\{\mathbf{v}_t\}$ из двух уравнений (53,3) и (53,4), получим соотношение

$$j^2 \{V H_t\} = \frac{H_n^2}{4\pi} \{H_t\}; \quad (54,2)$$

мы пишем здесь H_t вместо \mathbf{H}_t , имея уже в виду параллельность \mathbf{H}_{t1} и \mathbf{H}_{t2} . Для того чтобы исключить \mathbf{v}_t из уравнения (53,1); перепишем его тождественно в следующем виде:

$$\{\omega\} + \frac{j^2}{2} \{V^2\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\mathbf{v}_t - \frac{H_n}{4\pi j} \mathbf{H}_t \right)^2 \right\} + \frac{1}{4\pi} \{V H_t^2\} - \frac{1}{32\pi^2 j^2} H_n^2 \{H_t^2\} = 0.$$

Третий член обращается в нуль в силу уравнения (53,3) и, таким образом, \mathbf{v}_t выпадает. В последнем члене подставляем j^2 из (54,2), а в первом — из (53,2), т. е.

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1 + \frac{1}{8\pi} (H_{t2}^2 - H_{t1}^2)}{V_1 - V_2}. \quad (54,3)$$

После простых вычислений получим тогда окончательно

$$(\epsilon_2 - \epsilon_1) + \frac{p_2 + p_1}{2} (V_2 - V_1) + \frac{1}{16\pi} (V_2 - V_1) (H_{t2} - H_{t1})^2 = 0. \quad (54,4)$$

Это и есть искоемое «уравнение ударной адиабаты» в магнитной гидродинамике. Оно отличается от обычного уравнения третьим членом.

Выпишем здесь также еще раз уравнение (53,3)

$$v_{t2} - v_{t1} = \frac{H_n}{4\pi j} (H_{t2} - H_{t1}), \quad (54,5)$$

определяющее скачок v_t по скачку H_t . Уравнения (54,2)—(54,5) составляют полную систему уравнений, описывающих ударные волны. При стремлении скачков всех величин к нулю скорость распространения ударной волны должна стремиться к скорости распространения малых возмущений. В обычной гидродинамике это значит, что скорость слабых ударных волн стремится к скорости звука. В магнитной же гидродинамике имеются две различные скорости (u_2 и u_3), с которыми могут распространяться ударные волны слабой интенсивности¹⁾.

Рассмотрим слабые ударные волны более подробно и выясним, в каком направлении меняются в них различные величины. Разложив уравнение (54,4) по степеням скачков давления и энтропии, получим²⁾

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 - \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) (H_{2t} - H_{1t})^2. \quad (54,6)$$

При прохождении газа через ударную волну его энтропия может только увеличиться: $s_2 > s_1$. Но $\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s < 0$ согласно одному из термодинамических неравенств, а производная $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$ фактически положительна для всех сред, о которых может идти здесь речь. Поэтому из (54,6) видно, что из условия $s_2 > s_1$ вытекают неравенства $p_2 > p_1$ и, соответственно, $V_2 < V_1$. Таким образом, как и в обычной гидродинамике, ударная волна является волной сжатия. Этот результат, доказанный здесь для слабых ударных волн, по-видимому, справедлив и для ударных волн произвольной интенсивности.

Для слабых ударных волн можно высказать также и определенные утверждения о направлении изменения магнитного поля. Изменения различных величин при малом возмущении состояния газа связаны друг с другом формулами (52,8) и (52,9). Для изменений $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\delta(H_t^2) = H_{t2}^2 - H_{t1}^2$ находим

$$\delta(H_t^2) = 8\pi\delta\rho(u^2 - u_0^2).$$

Поскольку $u_2 > u_0$, $u_3 < u_0$ (см. (52,15)), а согласно сказанному выше всегда $\delta\rho > 0$, то мы видим, что в двух разновидностях слабых ударных волн направления изменения H_t^2 (а потому и $H^2 = H_t^2 + H_n^2$)

¹⁾ Со скоростью же u_1 распространяются возмущения, соответствующие по своему характеру вращательным разрывам, как уже было указано в предыдущем параграфе.

²⁾ См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 83.

различны. В волне, распространяющейся со скоростью $\sim u_2$, магнитное поле усиливается, а в волне со скоростью $\sim u_3$ ослабляется.

Рассмотрим теперь ударные волны в слабых магнитных полях, т. е. предположим, что по обеим сторонам разрыва $H^2 \ll \rho u^2$. В остальном же на скачки всех величин мы не налагаем никаких ограничений; в частности, скачок магнитного поля может быть сравним с его полной величиной.

Здесь снова имеются две возможности. Считая скачки плотности и давления не малыми, мы можем пренебречь, в первом приближении, в уравнении (54,4) последним членом, а также пренебречь магнитным полем в формуле (54,3). Тем самым мы вернемся к формулам обычной гидродинамики. Таким образом, связь между скачками различных термодинамических величин и скорость распространения волны будут такими же, как в обычных ударных волнах. Что же касается изменения магнитного поля, то его можно найти из соотношения (54,2). Так как правая сторона равенства является малой величиной третьего порядка (по полю), то то же самое должно относиться и к левой стороне. В первом приближении можно положить $\{VH_t\} = V_2 H_{t2} - -V_1 H_{t1} \cong 0$, откуда

$$\frac{H_{t2}}{H_{t1}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Поскольку в обычной ударной волне всегда $V_1 > V_2$, то мы видим, что в волне рассмотренного типа происходит усиление магнитного поля.

Уравнения (54,2)—(54,4) допускают и другую возможность. Предположение о малости поля совместимо с уравнением (54,2) также и у волны, в которой $V_1 \cong V_2$, а j^2 является малой величиной второго порядка, равной

$$j^2 = \frac{H_n^2}{4\pi V}, \quad (54,7)$$

где V — общее значение V_1 и V_2 . Из уравнения же (54,3) видно, что, положив $V_1 = V_2$, мы должны, в том же приближении, положить

$$p_2 - p_1 = -\frac{1}{8\pi} (H_{t2}^2 - H_{t1}^2). \quad (54,8)$$

Неизменность плотности означает, что ударную волну этого типа можно рассматривать как разрыв в несжимаемой жидкости. Вектор H_t (а с ним и v_t) испытывает на нем скачок по своей величине, оставаясь неизменным по направлению, а скачок давления (при неизменной плотности) определяется по скачку магнитного поля формулой (54,8). Скорость распространения этого разрыва есть

$$v_{n2} = v_{n1} = jV = H_n \sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

Этот результат вполне естествен, и необходимость существования таких разрывов можно было предвидеть заранее. Мы видели в § 52, что в несжимаемой жидкости имеется всего одна скорость распространения малых возмущений магнитного поля, равная $H/\sqrt{4\pi\rho}$. Поэтому со скоростью $u_1 = H_n/\sqrt{4\pi\rho}$ перемещаются поверхности фронта малых возмущений, как тех, в которых изменение поля перпендикулярно к плоскости, проходящей через H и n , так и тех, в которых δH лежит в этой плоскости. Первым из них соответствуют вращательные разрывы слабой интенсивности (о чем уже было сказано в предыдущем параграфе), вторым же соответствуют (при малой величине скачков) рассмотренные только что разрывы.

Для выяснения направления изменения величины магнитного поля в этих разрывах обратимся к неиспользованному еще уравнению (54,4), написав его в форме (54,6) (при выводе последнего малость скачка магнитного поля по сравнению с ним самим не предполагалась). Подставив разность $p_2 - p_1$ из (54,8), мы найдем, что второй член в правой стороне (54,6) является малой величиной четвертого порядка по полю, а первый — шестого и потому может быть опущен. Из условия $s_2 > s_1$ непосредственно следует, что

$$H_{t2} < H_{t1},$$

т. е. величина магнитного поля в этом разрыве уменьшается.

Возвращаясь снова к ударным волнам произвольной интенсивности в произвольных по величине магнитных полях, рассмотрим два частных случая. Пусть на стороне 1 магнитное поле перпендикулярно к фронту ударной волны, т. е. $H_{t1} = 0$. Тогда уравнение (54,2) принимает вид

$$j^2 V_2 H_{t2} = \frac{H_n^2}{4\pi} H_{t2}.$$

Отсюда видно, что либо $H_{t2} = 0$, либо H_{t2} имеет произвольное значение, а

$$j^2 = \frac{H_n^2}{4\pi V_2}.$$

В первом случае магнитное поле остается перпендикулярным к поверхности разрыва и вообще не сказывается на свойствах ударной волны, полностью выпадая из всех уравнений. Во втором же случае мы имеем ударную волну с изменением направления поля, распространяющуюся относительно остающегося за ней газа со скоростью

$$v_{n2} = jV_2 = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho_2}}.$$

Другой частный случай — ударная волна, перпендикулярная к

направлению поля с обеих сторон разрыва ($H_n = 0$)¹⁾. Из (54,5) имеем в этом случае $v_{t2} = v_{t1}$, т. е. тангенциальная составляющая скорости остается непрерывной. Соответствующим выбором системы координат можно поэтому всегда добиться, чтобы с обеих сторон разрыва было $v_t = 0$, т. е. газ двигался бы перпендикулярно к разрыву; будем считать это сделанным. Далее, из уравнения (54,2) имеем

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Имея в виду это соотношение, легко убедиться в том, что уравнения (54,3) и (54,4) могут быть написаны в виде

$$j^2 = \frac{p_2^* - p_1^*}{V_1 - V_2},$$

$$\epsilon_2^* - \epsilon_1^* + \frac{p_2^* + p_1^*}{2} (V_2 - V_1) = 0,$$

отличающемся от обычных уравнений для ударных волн в отсутствие магнитного поля лишь изменением уравнения состояния: вместо истинного уравнения $p = p(V, s)$ надо пользоваться уравнением $p^* = p^*(V, s)$, где

$$p^* = p + \frac{b^2}{8\pi V^2},$$

а буквой b обозначено постоянное произведение HV . Соответственно, ϵ^* должно быть определено так, чтобы выполнялось термодинамическое соотношение $\left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial V}\right)_s = -p^*$, откуда

$$\epsilon^* = \epsilon + \frac{b^2}{8\pi V}.$$

В предыдущем параграфе было указано, что существуют разрывы, обладающие одновременно свойствами тангенциальных и вращательных разрывов. В аналогичном соотношении эти разрывы находятся и с ударными волнами. Переходным между ударными волнами и вращательными разрывами является разрыв, в котором плотность не меняется, а изменение магнитного поля заключается в изменении знака H_t . Переходными же между ударными волнами и тангенциальными разрывами являются разрывы, на которых $v_n = 0$ и $H_n = 0$, а H_t испытывает произвольный скачок по своей величине, не меняя направления.

¹⁾ При $H_n = 0$ имеется всего один тип ударных волн в соответствии с тем, что одна из двух скоростей u_2 и u_3 обращается в нуль. Возмущениям, отвечающим равной нулю скорости u_3 , соответствуют слабые тангенциальные разрывы, неподвижные относительно самой жидкости.

В заключение произведенного в последних двух параграфах исследования магнитогидродинамических разрывов перечислим еще раз их существенно различные типы:

1. Контактные разрывы:

$$j = 0, \quad \{v_t\} = 0, \quad \{V\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad H_n \neq 0, \quad \{H_t\} = 0.$$

2. Тангенциальные разрывы:

$$j = 0, \quad \{v_t\} \neq 0, \quad \{V\} \neq 0, \quad \left\{ p + \frac{H_t^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad H_n = 0, \quad \{H_t\} \neq 0.$$

3. Вращательные разрывы:

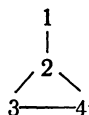
$$j \neq 0, \quad \{v_t\} \neq 0, \quad \{V\} = 0, \quad \{p\} = 0, \quad H_n \neq 0;$$

вектор H_t поворачивается, не меняясь по величине.

4. Ударные волны:

$$j \neq 0, \quad \{V\} \neq 0; \text{ векторы } H_1, H_2, n \text{ компланарны.}$$

Между этими четырьмя типами возможны переходные случаи по следующей схеме:



§ 55. Спонтанное магнитное поле при турбулентном движении проводящей жидкости

Турбулентное движение проводящей жидкости обладает замечательным свойством: оно может приводить к самопроизвольному возникновению сравнительно больших магнитных полей. В проводящей жидкости всегда существуют малые возмущения, вызванные факторами, посторонними по отношению к самому движению жидкости¹⁾, и сопровождающиеся появлением очень слабых электрических и магнитных полей. Вопрос заключается в дальнейшем поведении этих возмущений — будут ли они в результате турбулентного движения в среднем усиливаться со временем, или же затухнут. Излагаемые ниже соображения показывают, что в зависимости от свойств самой жидкости могут осуществляться обе эти возможности²⁾.

Ход изменения со временем раз возникших возмущений магнитного поля определяется игрой двух физических факторов. С одной стороны, в направлении уменьшения поля действует диссипация магнитной энергии, выделяющейся в виде джоулева тепла от индукционных

¹⁾ Например, магнитомеханическим эффектом во вращающихся участках жидкости или даже тепловыми флуктуациями.

²⁾ Излагаемые в этом параграфе результаты принадлежат Г. Батчелору (1950).

токов. С другой стороны, магнитное поле стремится увеличиться благодаря специфическому магнитогидродинамическому эффекту «растяжения» силовых линий. В конце § 51 было показано, что при движении жидкости (с достаточно большой проводимостью) магнитные силовые линии тоже перемещаются как «жидкие», причем напряженность магнитного поля меняется пропорционально растяжению силовой линии в каждой ее точке. Но при турбулентном движении любые две близкие частицы жидкости с течением времени в среднем расходятся. В результате силовые линии растягиваются, а магнитное поле усиливается.

Покажем, что при соответствующих условиях обе эти противоположные тенденции могут взаимно компенсироваться. Тем самым мы найдем критерий, определяющий, в каких случаях возмущения магнитного поля будут расти, а в каких — затухать.

До тех пор, пока появляющееся при движении жидкости магнитное поле является достаточно слабым, можно пренебречь его обратным влиянием на само движение. Другими словами, мы будем иметь дело с чисто гидродинамической турбулентностью, создающей заданный «фон», на котором развиваются магнитные возмущения. Турбулентное поле скоростей мы будем считать стационарным в принятом в теории турбулентности смысле, т. е. в смысле постоянства его средних характеристик¹⁾.

Математически указанное пренебрежение означает, что в уравнении движения (51,13) мы пренебрегаем квадратичными по полю членами, т. е. возвращаемся к обычному уравнению Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

(мы считаем жидкость несжимаемой). Если преобразовать член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ согласно

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}],$$

после чего применить к обеим сторонам уравнения операцию rot, то мы получим

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{\Omega}, \quad (55,1)$$

где для краткости введено обозначение $\mathbf{\Omega} = 1/2 \text{ rot } \mathbf{v}$.

Сравним это уравнение с уравнением (51,2)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad (55,2)$$

определяющим (при заданном распределении скоростей) изменение магнитного поля со временем. Мы видим, что $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{H} удовлетворяют

¹⁾ Имеется в виду усреднение по промежуткам времени порядка величины периодов соответствующих турбулентных пульсаций, но, конечно, малых по сравнению со всем временем наблюдения.

уравнениям одинакового вида, а если $\nu = c^2/4\pi\sigma$, то эти уравнения в точности совпадают. В этом последнем случае, следовательно, существует такое решение уравнения (55,2), в котором

$$H = \text{const} \cdot \Omega. \quad (55,3)$$

Таким образом, если

$$\nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (55,4)$$

то может существовать стационарное (в том же смысле слова) магнитное поле. Это поле в среднем не убывает и не возрастает при любом значении постоянного коэффициента в (55,3). Можно сказать, что имеет место безразличное равновесие, при котором оба указанных выше фактора, влияющих на изменение магнитного поля, взаимно компенсируются.

Отсюда в свою очередь очевидно, что если проводимость жидкости больше величины $c^2/4\pi\nu$, то диссипативные потери электромагнитной энергии будут меньше, чем это необходимо для компенсации эффекта возрастания магнитного поля благодаря растяжению силовых линий. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\frac{4\pi\nu\sigma}{c^2} > 1 \quad (55,5)$$

как условию самопроизвольного возникновения магнитных полей в результате возрастания малых магнитных возмущений¹⁾.

Можно сказать, что это есть условие неустойчивости турбулентного движения по отношению к бесконечно малым магнитным возмущениям. Замечательно, что оказывается возможным установить это условие не по порядку величины, а с точным численным коэффициентом²⁾.

Как критерий возрастания поля, условие (55,5) справедливо до тех пор, пока справедливо лежащее в основе его вывода пренебрежение обратным влиянием магнитного поля на движение жидкости. Возрастание поля будет продолжаться до тех пор, пока не установится определенное стационарное состояние, в котором обратным влиянием поля уже нельзя пренебречь. Хотя, строго говоря, в этом состоянии чисто гидродинамические свойства турбулентности уже не совпадают с заранее заданными, но для определения качественного характера

1) Условие (55,5) имеет весьма жесткий характер. Так, для ртути ($\sigma \cong 10^{16} \text{ сек}^{-1}$, $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}$) величина в левой стороне (55,5) есть всего лишь $1,5 \cdot 10^{-4}$. Поскольку σ и ν возрастают с увеличением длины пробега соответственно носителей заряда и массы, то условие (55,5) может выполняться для таких объектов, как хромосфера и корона Солнца, межзвездный ионизированный газ.

2) Следует указать, что изложенная аргументация при всей своей убедительности не является все же вполне доказательной. Так, Я. Б. Зельдович показал, что она заведомо неприменима для воображаемого случая «двухмерной» турбулентности (ЖЭТФ 31, 154, 1956).

распределения и порядка величины установившегося магнитного поля это обстоятельство несущественно.

Легко видеть, что распределение магнитного поля должно быть аналогично турбулентному распределению Ω . Действительно, с наглядной точки зрения Ω есть угловая скорость вращения жидкости в данной точке пространства. Поскольку магнитные силовые линии движутся вместе с жидкостью, то с этой же скоростью вращается и вектор H . Следовательно, если в каких-либо двух точках турбулентного потока мгновенные значения Ω в среднем не коррелированы друг с другом, то и векторы H в этих точках будут вращаться не коррелированным друг с другом образом и их взаимная ориентация будет меняться со временем совершенно хаотически.

Напомним в этой связи некоторые чисто гидродинамические свойства турбулентности¹⁾. Турбулентное движение можно рассматривать как совокупность «турбулентных пульсаций» разных масштабов, начиная от наибольшего «внешнего масштаба» l до наименьшего «внутреннего масштаба» λ_0 . Первый совпадает с характеристическими длинами, определяющими размеры области, в которой происходит турбулентное движение. Второй же определяет порядок величины расстояний, на которых становится существенной вязкость и связанная с ней диссипация энергии. λ_0 может быть выражено через l и число Рейнольдса $R \sim \frac{ul}{\nu}$ турбулентного движения в целом (u имеет порядок величины изменения средней скорости на расстояниях l) или же через энергию ϵ , диссипируемую в 1 сек в 1 г жидкости, по следующей формуле:

$$\lambda_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \sim \frac{l}{R^{3/4}}. \quad (55,6)$$

Корреляция скоростей v_1 и v_2 в двух точках 1 и 2 на расстоянии λ друг от друга определяется в основном пульсациями масштаба λ . Согласно закону Колмогорова — Обухова для расстояний $\lambda \gg \lambda_0$ имеем

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \propto \lambda^{2/3},$$

где $\Delta v = v_2 - v_1$. На расстояниях же $\lambda \ll \lambda_0$

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \propto \lambda^2.$$

Отсюда легко найти корреляцию угловых скоростей. Поскольку компоненты Ω_1 и Ω_2 выражаются соответственно через производные от v_1 и v_2 , то, дифференцируя $\overline{\Delta v_i \Delta v_k}$ один раз по координатам точки 1 и один раз по координатам точки 2, найдем

$$\begin{aligned} \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &\propto \lambda^{-1/3} \quad \text{при } \lambda \gg \lambda_0, \\ \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &= \text{const} \quad \text{при } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \quad (55,7)$$

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, §§ 31—33.

Эти формулы показывают, что существенная корреляция угловых скоростей имеется лишь на расстояниях до $\sim \lambda_0$, а на больших расстояниях быстро уменьшается.

Согласно сказанному выше такой же характер имеет распределение установившегося спонтанного магнитного поля. Коррелированное распределение имеется лишь в участках пространства с размерами $\sim \lambda_0$. На больших же расстояниях взаимная ориентация векторов \mathbf{H} практически вполне хаотична.

Порядок величины магнитного поля легко теперь определить путем оценки членов в полном уравнении движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \frac{P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}].$$

Поскольку вектор \mathbf{H} полностью меняет свое направление на расстояниях $\sim \lambda_0$, то порядок величины последнего члена в правой стороне уравнения есть

$$\frac{H^2}{4\pi\rho\lambda_0}.$$

С другой стороны, оценим член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$. Для пульсаций масштаба λ он имеет порядок величины v_λ^2/λ , где v_λ — изменение скорости на расстоянии λ . Но согласно известным из теории турбулентности формулам имеем

$$\begin{aligned} v_\lambda &\sim u \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{1/3} \quad \text{при } \lambda \gg \lambda_0, \\ v_\lambda &\sim \frac{u}{l} \sqrt{R} \lambda \quad \text{при } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \quad (55,8)$$

Поэтому отношение $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \propto \lambda^{-1/3}$ при $\lambda \gg \lambda_0$ и $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \propto \lambda$ при $\lambda \ll \lambda_0$ и, следовательно, максимально при $\lambda \sim \lambda_0$. Таким образом,

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \sim \frac{v_{\lambda_0}^2}{\lambda_0}.$$

Наконец, сравнивая оценки обоих членов, найдем

$$H^2 \sim 4\pi\rho v_{\lambda_0}^2. \quad (55,9)$$

Согласно (55,6) и (55,8) $v_{\lambda_0} \sim uR^{-1/4} \sim (v_\varepsilon)^{1/4}$. Поэтому можно также написать

$$H^2 \sim \frac{4\pi\rho u^2}{\sqrt{R}} \sim 4\pi\rho \sqrt{\varepsilon\nu}. \quad (55,10)$$

Этими формулами и определяется порядок величины спонтанного магнитного поля. Полезно сравнить энергию этого поля с кинетической энергией турбулентного движения жидкости. Последняя, как известно, сосредоточена в основном в наиболее крупномасштабных

пульсациях (масштабов $\sim l$) и по порядку величины равна ρu^2 . Магнитная же энергия сосредоточена в основном в «магнитных пульсациях» с малыми масштабами $\sim \lambda_0$. Она сравнима, согласно (55,9), с кинетической энергией турбулентных пульсаций этих же масштабов, но, согласно (55,10), мала по сравнению с полной кинетической энергией. Более точная математическая формулировка этих утверждений заключается в том, что если разложить пространственное распределение скоростей и магнитного поля в интеграл Фурье, то кинетическая энергия сосредоточится в основном в спектральных компонентах с малыми волновыми векторами $k \sim 1/l$, а магнитная энергия — в компонентах с большими волновыми векторами $k \sim 1/\lambda_0$.

При турбулентном движении происходит, практически без всякой диссипации, непрерывная передача энергии от крупно- к мелко-масштабным пульсациям. Этот «поток энергии» диссипируется лишь в пульсациях масштабов λ_0 . В отсутствие магнитного поля механизм диссипации целиком связан с вязкостью жидкости. В рассматриваемом же здесь турбулентном движении проводящей жидкости энергия в пульсациях масштабов λ_0 частично диссипируется благодаря вязкости, а частично переходит в энергию магнитного поля и лишь затем диссипируется, переходя в джоулево тепло.

Оценим время, необходимое для установления стационарного состояния, для чего обратимся к уравнению (55,2). Порядок величины двух членов в его правой части есть соответственно

$$\frac{Hv_{\lambda_0}}{\lambda_0} = \frac{Hv_{\lambda_0}\lambda_0}{\lambda_0^2} \sim \frac{Hv}{\lambda_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{c^2H}{4\pi\sigma\lambda_0^2}.$$

Поскольку нам известно точное условие (55,4), при котором имеет место безразличное равновесие, то тем самым нам известно точное соотношение между коэффициентами в этих двух членах и можно написать

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \left(v - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \frac{H}{\lambda_0^2}.$$

Отсюда видно, что малые возмущения растут со временем по экспоненциальному закону:

$$\exp \left\{ \left(v - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \frac{t}{\lambda_0^2} \right\}. \quad (55,11)$$

Если $4\pi\sigma v/c^2 \gg 1$, то имеем просто e^{vt/λ_0^2} . Время τ , в течение которого начальное малое возмущение $\sim H_0$ разовьется в стационарное поле H (55,10), будет тогда по порядку величины равно

$$\tau \sim \frac{\lambda_0^2}{v} \ln \frac{H^2}{H_0^2} \sim \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \ln \frac{\rho(\varepsilon v)^{1/2}}{H_0^2}. \quad (55,12)$$

Хаотичность изменения магнитного поля со временем при турбулентном движении означает, что среднее (по времени) значение H обращается в нуль. Другими словами, можно сказать, что в рассматриваемом случае (т. е. в условиях, допускающих спонтанное возникновение поля) наличие отличного от нуля среднего поля несовместимо с турбулентностью. Это свойство должно привести к тому, что при наложении не слишком сильного внешнего магнитного поля на турбулентно движущуюся (в ограниченном объеме) жидкость последняя будет вести себя как сверхпроводник. Достаточно же сильное магнитное поле ($H^2 \geq \rho u^2$) не может не проникнуть в жидкость и потому «подавит» турбулентность.

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 56. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии

В § 45 были написаны уравнения переменного электромагнитного поля в металлах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (56,1)$$

справедливые при достаточной «медленности» изменения поля: частоты поля должны быть такими, чтобы оставались справедливыми зависимости \mathbf{j} от \mathbf{E} и \mathbf{B} от \mathbf{H} (если последняя вообще существенна), относящиеся к стационарному случаю¹⁾.

Теперь мы обратимся к аналогичному вопросу для переменного электромагнитного поля в диэлектрической среде и сформулируем уравнения, справедливые для таких частот, при которых связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} и между \mathbf{B} и \mathbf{H} остается еще такой же, как в постоянных полях. Если, как это обычно бывает, эта связь сводится к простой пропорциональности, то указанное условие означает, что можно полагать

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (56,2)$$

со статическими значениями ϵ и μ .

Эти соотношения нарушаются (или, как говорят, появляется дисперсия ϵ и μ) при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление электрической или магнитной поляризации вещества. Порядок величины этих частот зависит от рода вещества и

¹⁾ Что касается условия $l \ll \lambda$, то оно не имеет отношения к применимости уравнений (56,1) как таковых. Роль этого условия для вопросов, рассматривавшихся в гл. VII, заключалась в том, что оно позволяло пренебречь эффектами запаздывания в поле вне проводника.

меняется в очень широких пределах. Он может быть также совершенно различным для электрических и магнитных явлений¹⁾.

Уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (56,3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (56,4)$$

получаются непосредственно путем замены \mathbf{e} и \mathbf{h} в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Поэтому эти уравнения ни при каких условиях не нуждаются в изменении. Что касается уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (56,5)$$

то оно получается (см. § 6) путем усреднения точного микроскопического уравнения $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$, причем используется лишь то обстоятельство, что полный заряд тела равен нулю. Очевидно, что этот вывод ни в какой степени не зависит от предполагавшейся в § 6 стационарности поля, и потому уравнение (56,5) сохраняет свой вид и в переменных полях.

Еще одно уравнение должно быть получено путем усреднения точного уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (56,6)$$

Непосредственное усреднение дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}. \quad (56,7)$$

Однако при зависящем от времени макроскопическом поле установление связи среднего значения $\overline{\rho \mathbf{v}}$ с ранее введенными величинами довольно затруднительно. Проще произвести требуемое усреднение не непосредственно, а следующим более формальным путем.

Предположим временно, что в диэлектрик введены посторонние по отношению к его веществу заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$. При своем движении эти заряды создают «сторонний» ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, а сохранение этих зарядов выражается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ст}} = 0.$$

Вместо уравнения (56,5) будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$$

¹⁾ Так, в алмазе электрическая поляризация имеет электронное происхождение и дисперсия ϵ начинается лишь в ультрафиолетовой области спектра. В такой полярной жидкости же, как вода, поляризация связана с ориентацией молекул с жесткими дипольными моментами и дисперсия ϵ наступает при частотах $\omega \sim 10^{11}$ (т. е. в сантиметровом диапазоне длин волн). Еще раньше может начаться дисперсия μ в ферромагнитных веществах.

(см. (6,8)). Продифференцировав это равенство по времени и воспользовавшись уравнением непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ст}}$$

или

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ст}} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор, стоящий под знаком div , может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, который обозначим как $c\mathbf{H}$; тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (56,8)$$

Вне тела это уравнение должно совпадать с точным уравнением Максвелла для поля в пустоте, соответственно чему вектор \mathbf{H} совпадает с напряженностью магнитного поля. Внутри же тела в статическом случае ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ связан с магнитным полем уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}},$$

где \mathbf{H} — величина, введенная в § 27 и определенным образом связанная со средней напряженностью \mathbf{B} . Отсюда следует, что в пределе стремящейся к нулю частоты вектор \mathbf{H} в уравнении (56,8) совпадает со статической величиной $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, а предполагаемая нами здесь «медленность» изменения поля означает, что и для этих переменных полей сохраняется та же зависимость $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Таким образом, \mathbf{H} становится вполне определенной величиной, и, опуская вспомогательную величину $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, мы приходим окончательно к уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (56,9)$$

Это уравнение заменяет собой для диэлектриков первое из уравнений (56,1), описывающих поле в металлах. Может возникнуть мысль о том, что и в металлах в этом уравнении для переменного поля следует учитывать член с производной $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, т. е. писать

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (56,10)$$

с постоянным коэффициентом ϵ .

Однако для хороших проводников (истинных металлов) введение такого члена было бы бессмысленным. Два члена в правой стороне уравнения (56,10) представляют собой, по существу, первые два члена разложения по степеням частоты поля. Поскольку последняя предполагается достаточно малой, то учет второго члена мог бы, в лучшем случае, означать введение малой поправки. В действительности

он не может иметь даже этого смысла, так как фактически в металлах поправки от влияния пространственной неоднородности поля становятся заметными раньше, чем поправка по частоте (см. примечание на стр. 242).

Есть, однако, особая категория тел (плохие проводники), для которых уравнение (56,10) может иметь смысл. В силу особых причин (малое число электронов проводимости в полупроводниках, малая подвижность ионов в растворах электролитов) проводимость этих веществ аномально мала, и потому второй член в правой стороне уравнения (56,10) может сравниться с первым или даже превзойти его уже при таких частотах, для которых можно еще считать σ и ϵ постоянными. В монохроматическом поле отношение второго члена к первому есть

$$\frac{\epsilon\omega}{4\pi\sigma}.$$

Если это отношение мало, то тело ведет себя как обычный проводник с проводимостью σ . При частотах же $\omega \gg 4\pi\sigma/\epsilon$ оно ведет себя как диэлектрик с диэлектрической постоянной ϵ .

В однородной среде с постоянными ϵ и μ уравнения (56,3) — (56,5) и (56,9) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (56,11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (56,12)$$

Исключая из этих уравнений обычным образом \mathbf{E} (или \mathbf{H}), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

и поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, то мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (56,13)$$

Плотность потока электромагнитной энергии в диэлектрической среде дается той же формулой

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (56,14)$$

что и в металлах. В этом легко убедиться, вычислив $\operatorname{div} \mathbf{S}$. Используя уравнения (56,4) и (56,9), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \quad (56,15)$$

в соответствии с выражением

$$dU = \frac{1}{4\pi} (E dD + H dB)$$

для дифференциала внутренней энергии диэлектрика при заданных плотности и энтропии.

Как известно, общие требования релятивистской инвариантности приводят к тому, что плотность потока энергии непременно совпадает (с точностью до множителя c^2) с пространственной плотностью импульса поля¹⁾. Поэтому последняя равна

$$\frac{1}{4\pi c} [EH]. \quad (56,16)$$

Это обстоятельство должно быть, в частности, учтено при определении сил, действующих на диэлектрическое вещество в переменном электромагнитном поле. Силу f (отнесенную к единице объема) можно вычислять по тензору напряжений σ_{ik} как

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

При этом, однако, необходимо учесть, что σ_{ik} есть плотность потока импульса, который идет на изменение импульса как вещества, так и электромагнитного поля. Если понимать под f силу, действующую лишь на среду, то из написанного выражения надо вычесть изменение импульса единицы объема поля:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} [EH]_i. \quad (56,17)$$

В постоянном поле последний член равен нулю, и потому этот вопрос раньше не возникал.

«Медленность» изменения поля позволяет воспользоваться для тензора напряжений прежними выражениями, полученными для постоянного поля. Так, для жидкой диэлектрической среды σ_{ik} дается суммой электрической (15,9) и магнитной (34,2) частей.

Но при дифференцировании этих выражений по координатам надо учесть, что вместо уравнений $\text{rot } E = 0$, $\text{rot } H = 0$ для постоянного поля (в отсутствие токов) мы имеем теперь уравнения (56,12). Вычисление приводит к следующему результату:

$$f = -\nabla p_0 - \frac{E^2}{8\pi} \nabla \epsilon + \nabla \left[\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{E^2}{8\pi} \right] - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu + \\ + \nabla \left[\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \frac{H^2}{8\pi} \right] + \frac{\epsilon \mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [EH]. \quad (56,18)$$

1) Это является следствием симметричности четырехмерного тензора энергии — импульса. См. «Теория поля», изд. 2-е, § 31.

§ 57. Электродинамика движущихся диэлектриков

Движение среды приводит к возникновению явлений взаимного влияния электрических и магнитных полей. Для проводников эти явления были рассмотрены в § 49, теперь же мы обратимся к изучению этого вопроса для диэлектриков. При этом фактически идет речь о явлениях, возникающих в движущихся телах при наличии внешнего электрического или магнитного полей. Подчеркнем, что они не имеют ничего общего с явлениями возникновения полей в результате самого движения тел (которые рассматривались в §§ 35 и 50).

Отправным пунктом в § 49 являлись формулы преобразования поля при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом нам было достаточно знать обычные формулы преобразования электрической и магнитной напряженности поля в пустоте, усреднение которых непосредственно дает формулы преобразования \mathbf{E} и \mathbf{B} . В диэлектриках вопрос значительно более сложен, в связи с наличием большего числа величин, описывающих электромагнитное поле.

При движении макроскопических тел речь может идти фактически лишь о скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Однако получить соответствующие приближенные формулы преобразования проще всего на основе точных релятивистских формул, справедливых при любых скоростях.

Как известно, в электродинамике поля в пустоте компоненты векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} электрической и магнитной напряженности в действительности являются компонентами антисимметрического четырехмерного тензора (4-тензора) второго ранга¹⁾. Поскольку \mathbf{E} и \mathbf{B} являются средними значениями \mathbf{e} и \mathbf{h} , то же самое относится и к ним. Таким образом, имеется 4-тензор F_{ik} со следующими компонентами²⁾:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (57,1)$$

С помощью этого тензора первая пара уравнений Максвелла,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (57,2)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, §§ 22, 25.

²⁾ В тексте этого параграфа (но не в задачах к нему) тензорные индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, соответствующие четырехмерным координатам $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

может быть написана в четырехмерном виде как

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad (57,3)$$

Тем самым выявляется релятивистская инвариантность этих уравнений. Подчеркнем, что сама по себе применимость уравнений (57,2) к движущимся телам очевидна, поскольку эти уравнения получаются непосредственно путем замены e и h в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями E и B .

Но и вторая пара уравнений Максвелла,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (57,4)$$

тоже сохраняет свой формальный вид и в движущихся средах. Это очевидно из приведенных в предыдущем параграфе рассуждений, в которых были использованы лишь такие общие свойства тел (например, равенство нулю полного заряда), которыми движущиеся тела обладают в той же степени, как и неподвижные. При этом, однако, связи величин \mathbf{D} и \mathbf{B} с величинами \mathbf{E} и \mathbf{H} уже отнюдь не должны совпадать с теми, которые имеют место в неподвижных средах.

Будучи справедливыми как для неподвижных, так и для движущихся тел, уравнения (57,4) должны сохранять свой вид при преобразовании Лоренца. Для поля в пустоте векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} совпадают с \mathbf{E} и \mathbf{B} и релятивистская инвариантность второй пары уравнений Максвелла проявляется в том, что и они могут быть написаны в четырехмерном виде с помощью того же тензора F_{ik} : $\partial F_{ik}/\partial x_k = 0^1$). Поэтому ясно, что для обеспечения релятивистской инвариантности уравнений (57,4) необходимо, чтобы компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} в действительности преобразовывались как компоненты 4-тензора, построенного в точности аналогично тензору F_{ik} ; обозначим этот тензор как H_{ik} :

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (57,5)$$

С его помощью уравнения (57,4) записываются в виде

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (57,6)$$

Выяснив четырехмерный тензорный характер величин \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , мы тем самым узнали закон их преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой. Нас, однако, интересует здесь

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 29.

не столько закон этого преобразования, сколько связь между этими величинами в движущейся среде, обобщающая соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, справедливые в неподвижных телах.

Обозначим посредством u_i 4-вектор скорости среды; его компоненты связаны с трехмерной скоростью \mathbf{v} посредством

$$u_{1,2,3} = \frac{v_{x,y,z}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Составим из этого 4-вектора и 4-тензоров F_{ik} и H_{ik} такие комбинации, которые в неподвижной среде переходят в \mathbf{E} и \mathbf{D} . Таковыми являются 4-векторы $F_{ik}u_k$ и $H_{ik}u_k$; при $\mathbf{v} = 0$ их временные компоненты обращаются в нуль, а пространственные — соответственно в \mathbf{E} и \mathbf{D} . Поэтому ясно, что четырехмерным обобщением равенства $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ является¹⁾

$$H_{ik}u_k = \varepsilon F_{ik}u_k. \quad (57,7)$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что обобщением соотношения $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ является четырехмерное равенство

$$F_{ik}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k = \mu (H_{ik}u_l + H_{kl}u_i + H_{li}u_k). \quad (57,8)$$

Переходя от четырехмерных обозначений снова к трехмерным величинам, получим из этих двух уравнений векторные соотношения²⁾:

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right), \quad (57,9)$$

$$\mathbf{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{Ev}] = \mu \left(\mathbf{H} + \frac{1}{c} [\mathbf{Dv}] \right).$$

Эти формулы, впервые полученные Г. Минковским (1908), являются точными в том смысле, что еще не сделано никаких предположений о величине скорости. Считая же отношение v/c малым и решая эти уравнения относительно \mathbf{D} и \mathbf{B} с точностью до членов первого порядка, получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} [\mathbf{vH}], \quad (57,10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} [\mathbf{Ev}]. \quad (57,11)$$

1) Следует заметить, что, написав соотношения, содержащие лишь местное значение скорости, мы тем самым пренебрегаем слабыми эффектами, связанными с возможностью существования градиента скорости (например, гиромангнитными эффектами; см. § 35).

2) Если какое-либо из соотношений $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ или $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ в неподвижной среде не имеет места, то и соответствующее из соотношений (57,9) заменяется другой функциональной зависимостью между двумя векторными суммами, стоящими в обеих сторонах равенства.

Эти формулы, вместе с уравнениями Максвелла (57,2) и (57,4), составляют основу электродинамики движущихся диэлектриков.

Граничные условия к уравнениям Максвелла тоже претерпевают некоторое изменение. Из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ по-прежнему следуют условия непрерывности нормальных компонент индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \quad (57,12)$$

Условия же для тангенциальных компонент поля проще всего можно получить путем перехода от неподвижной системы отсчета K к новой системе K' , движущейся вместе с данным элементом поверхности тела; скорость последнего (направленную вдоль нормали \mathbf{n}) обозначим как v_n . В системе K' справедливы обычные условия непрерывности \mathbf{E}'_t и \mathbf{H}'_t . Согласно релятивистским формулам преобразования¹⁾ эти требования эквивалентны условию непрерывности тангенциальных компонент векторов

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \text{ и } \mathbf{H} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{D}].$$

Проецируя их на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{n} , и учитывая равенства (57,12), получим искомые граничные условия:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \end{aligned} \quad (57,13)$$

Если подставить сюда выражения (57,10)—(57,11) и пренебречь членами высшего порядка по v/c , то мы получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] &= \frac{v_n}{c} (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{H}_t, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] &= -\frac{v_n}{c} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_t. \end{aligned} \quad (57,14)$$

В этом приближении в правой стороне равенств можно не различать между значениями \mathbf{H} и \mathbf{E} на обеих сторонах поверхности раздела.

Если тело движется так, что его поверхность не смещается в перпендикулярном к самой себе направлении (например, при поворачивании тела вращения вокруг его оси), то $v_n = 0$. Только в этом случае граничные условия (57,13) или (57,14) сводятся к обычным условиям непрерывности \mathbf{E}_t и \mathbf{H}_t .

Задачи

1. Диэлектрический шар равномерно вращается (в пустоте) в однородном постоянном магнитном поле \mathfrak{H} . Определить возникающее вокруг шара электрическое поле.

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 23.

Решение. При вычислении возникающего электрического поля магнитное поле надо принимать таким же, как при неподвижном шаре, так как учет обратного влияния изменения магнитного поля привел бы к поправкам более высокого порядка малости. Внутри шара магнитное поле однородно и равно

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{3}{2 + \mu} \mathfrak{H}$$

(ср. (8,2)).

Ввиду стационарности вращения возникающее электрическое поле постоянно и, как всякое постоянное электрическое поле, обладает потенциалом: $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Вне шара потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)} = 0$, а внутри шара — уравнению

$$\Delta\varphi^{(i)} = 2 \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\varepsilon} \mathbf{Q}\mathbf{H}^{(i)}, \quad (1)$$

где \mathbf{Q} — угловая скорость вращения (это уравнение получается из $\text{div } \mathbf{D}$ подстановкой для \mathbf{D} выражения (57,10) с $\mathbf{v} = [\mathbf{Q}\mathbf{r}]$). Условие непрерывности нормальной составляющей \mathbf{D} на поверхности шара гласит:

$$-\varepsilon \left. \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} a \{ \mathbf{Q}\mathbf{H}^{(i)} - (\mathbf{Q}\mathbf{n})(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{n}) \} = - \left. \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (2)$$

(a — радиус шара, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}).

Ввиду симметрии шара искомое электрическое поле определяется всего двумя постоянными векторами: \mathbf{Q} и \mathfrak{H} . Из их компонент можно составить линейным по \mathfrak{H} и \mathbf{Q} образом скаляр $\mathfrak{H}\mathbf{Q}$ и тензор

$$\mathfrak{H}_i\mathbf{Q}_k + \mathfrak{H}_k\mathbf{Q}_i - \frac{2}{3} \delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{Q}$$

с равной нулю суммой диагональных членов. Соответственно этому ищем потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi^{(e)} = \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{D_{ik}}{2} \frac{n_i n_k}{r^3}, \quad (3)$$

где D_{ik} — постоянный тензор (причем $D_{ii} = 0$); D_{ik} есть тензор квадрупольного электрического момента шара¹⁾. Члена же вида const/r в $\varphi^{(e)}$ не может быть, так как он давал бы отличный от нуля полный поток электрического поля через поверхность, охватывающую шар (между тем как шар не заряжен). Потенциал поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi^{(i)} = \frac{r^2}{2a^5} D_{ik} n_i n_k + \frac{\varepsilon\mu - 1}{3c\varepsilon} \mathbf{Q}\mathbf{H}^{(i)} (r^2 - a^2). \quad (4)$$

Первый член есть решение однородного уравнения $\Delta\varphi = 0$, а выбор коэффициента в нем обеспечивает непрерывность потенциала (а тем самым и \mathbf{E}_t) на поверхности шара. Подставляя (3) и (4) в (2), найдем

$$D_{ik} = - \frac{a^5}{c} \frac{3(\varepsilon\mu - 1)}{(3 + 2\varepsilon)(2 + \mu)} \left(\mathfrak{H}_i\mathbf{Q}_k + \mathfrak{H}_k\mathbf{Q}_i - \frac{2}{3} \delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{Q} \right). \quad (5)$$

Таким образом, вокруг вращающегося шара возникает электрическое поле квадрупольного характера, причем квадрупольный момент шара дается фор-

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 40.

мулой (5) ¹⁾. В частности, если шар вращается вокруг направления внешнего поля (ось z), то D_{jk} имеет лишь диагональные компоненты

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c} \frac{4(\epsilon\mu - 1)}{(3 + 2\epsilon)(2 + \mu)} \mathfrak{S}\Omega, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}.$$

2. Намагниченный шар равномерно вращается (в пустоте) вокруг своей оси, параллельной направлению намагничивания. Определить возникающее вокруг шара электрическое поле ²⁾.

Решение. Магнитное поле внутри шара однородно и выражается через постоянную намагниченность M согласно уравнениям $\mathbf{B}^{(i)} + 2\mathbf{H}^{(i)} = 0$ (ср. (8, 1)) и $\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)} = 4\pi M$, откуда

$$\mathbf{B}^{(i)} = \frac{8\pi M}{3}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = -\frac{4\pi M}{3}.$$

Вторая из формул (57,9) в данном случае не имеет места (ввиду несправедливости формулы $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ для неподвижного ферромагнетика), а из первой имеем внутри шара

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \epsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi(2\epsilon + 1)}{3c} [\mathbf{v}M].$$

Потенциал возникающего электрического поля вне шара удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)} = 0$, а внутри шара

$$\Delta\varphi^{(i)} = \frac{8\pi(2\epsilon + 1)}{3c\epsilon} M\Omega.$$

Граничное условие непрерывности D_n на поверхности шара:

$$-\epsilon \left. \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{4\pi(2\epsilon + 1)}{3c} a\Omega M \sin^2\theta = -\left. \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r} \right|_{r=a},$$

где θ — угол между нормалью \mathbf{n} и направлением $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{M} (ось z). Ищем $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$ в виде

$$\varphi^{(e)} = \frac{D_{ik}n_i n_k}{2r^3} = \frac{D_{zz}}{4r^3} (3 \cos^2\theta - 1),$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{r^2}{4a^5} D_{zz} (3 \cos^2\theta - 1) + \frac{4\pi(2\epsilon + 1)}{9c\epsilon} M\Omega (r^2 - a^2)$$

и из граничного условия получаем следующее выражение для квадрупольного электрического момента, возникающего у вращающегося шара:

$$D_{zz} = -\frac{4(2\epsilon + 1)}{3c(2\epsilon + 3)} a^2 \Omega M, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}$$

(M — полный магнитный момент шара). Для металлического шара надо положить $\epsilon \rightarrow \infty$, и тогда

$$D_{zz} = -\frac{4}{3c} \Omega M a^2.$$

1) Аналогично, вокруг шара, вращающегося в однородном электрическом поле, возникает квадрупольное магнитное поле. Квадрупольный магнитный момент шара дается при этом формулой, получающейся из (5) изменением знака и заменой ϵ , μ , \mathfrak{S} соответственно на μ , ϵ , \mathfrak{E} .

2) Если направления намагниченности и оси вращения не совпадают, то постановка задачи существенно меняется, так как возникает излучение электромагнитных волн от шара в окружающее пространство.

§ 58. Дисперсия диэлектрической проницаемости

Мы переходим теперь к изучению важнейшего вопроса о быстропеременных электромагнитных полях, частоты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электрической и магнитной поляризации вещества.

Переменное во времени электромагнитное поле необходимо является переменным также и в пространстве. При частоте ω пространственная периодичность определяется длиной волны, порядок величины которой $\lambda \sim c/\omega$. При дальнейшем увеличении частоты λ становится в конце концов сравнимой с атомными размерами a . В таких условиях становится невозможным макроскопическое описание поля.

В связи с этим может возникнуть вопрос о том, существует ли вообще область значений частот, в которой, с одной стороны, уже существенны дисперсионные явления, а с другой стороны, еще допустимо макроскопическое рассмотрение. Легко видеть, что такая область непременно должна существовать. Наиболее быстрый механизм установления электрической или магнитной поляризации в веществе — электронный. Его время релаксации — порядка величин атомных времен a/v , где a — атомные размеры, а v — электронные скорости в атоме. Но поскольку $v \ll c$, то даже соответствующая таким временам длина волны $\lambda \sim ac/v$ все еще велика по сравнению с a . Ниже мы предполагаем условие $\lambda \gg a$ выполненным ¹⁾. Следует, однако, иметь в виду, что это условие может оказаться недостаточным: у металлов при низких температурах существует область частот, в которой макроскопическая теория неприменима, несмотря на выполнение неравенства $c/\omega \gg a$ (см. § 67).

Излагаемая ниже формальная теория в равной степени относится как к металлам, так и к диэлектрикам. При частотах же, соответствующих внутриатомным электронным движениям (оптические частоты) и более высоких, фактически исчезает даже количественное отличие в свойствах металлов и диэлектриков.

Уже из приведенных в § 56 рассуждений ясно, что формальный вид уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (58,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (58,2)$$

остается таким же в произвольных переменных электромагнитных полях. Но эти уравнения в значительной степени беспредметны до тех пор, пока не установлена связь между входящими в них величинами \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{E} , \mathbf{H} . При рассматриваемых нами теперь больших частотах эта

¹⁾ Эффекты, связанные с членами следующего порядка по малому отношению a/λ (так называемая естественная оптическая активность), будут рассмотрены в § 83.

связь не имеет ничего общего с той, которая справедлива в статическом случае и которой мы пользовались в переменных полях при отсутствии дисперсии.

Прежде всего, нарушается даже имевшееся ранее основное свойство этой связи — однозначная зависимость D и B от значений E и H в тот же момент времени. В общем случае произвольного переменного поля значения D и B в некоторый момент времени отнюдь не определяются одними только значениями E и H в тот же момент времени. Напротив, можно утверждать, что значения D и B в данный момент времени зависят, вообще говоря, от значений функций $E(t)$, $H(t)$ во все предыдущие моменты времени. Это обстоятельство является выражением того, что установление электрической или магнитной поляризации вещества «не успевает» следовать за изменением электромагнитного поля. (При этом частоты, при которых возникают дисперсионные явления в электрических и магнитных свойствах вещества, могут быть совершенно различными.)

В этом параграфе мы будем говорить о зависимости D от E ; специфические же особенности дисперсии магнитных свойств вещества будут обсуждены в § 60.

В § 6 вектор поляризации P был введен согласно определению $\rho = -\operatorname{div} P$, где ρ — истинная (микроскопическая) плотность зарядов в веществе. Это равенство выражало собой электрическую нейтральность тела в целом, и его (вместе с условием $P = 0$ вне тела) было достаточно для того, чтобы показать, что полный электрический момент тела равен интегралу $\int P dV$. Очевидно, что этот вывод относится к переменным полям в той же степени, как и к постоянным. Таким образом, в любом переменном поле, в том числе при наличии дисперсии, вектор $P = \frac{1}{4\pi}(D - E)$ сохраняет свой физический смысл электрического момента единицы объема вещества.

В быстропеременных полях фактически всегда приходится иметь дело со сравнительно малыми напряженностями. Поэтому связь D с E всегда можно считать линейной¹⁾. Наиболее общий вид линейной зависимости между $D(t)$ и значениями функции $E_0(t)$ во все предыдущие моменты времени может быть написан в виде интегрального соотношения

$$D(t) = E(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) E(t - \tau) d\tau \quad (58,3)$$

¹⁾ Мы подразумеваем здесь, что D зависит линейно только от E , но не от H . В постоянном поле линейная зависимость D от H исключается требованием инвариантности по отношению к изменению знака времени. В переменном поле это условие уже не имеет места и линейная зависимость D от H оказывается возможной при определенных типах симметрии вещества. Она представляет собой, однако, малый эффект порядка a/λ , тот самый эффект, который упомянут в примечании на предыдущей странице.

(выделение члена $E(t)$ удобно по причинам, которые выяснятся в дальнейшем). Здесь $f(\tau)$ — функция времени, зависящая от свойств среды. По аналогии с электростатической формулой $D = \epsilon E$ будем писать соотношение (58,3) в символической форме

$$D = \hat{\epsilon} E,$$

где $\hat{\epsilon}$ — линейный интегральный оператор, действие которого определяется согласно (58,3).

Всякое переменное поле может быть сведено (путем разложения Фурье) к совокупности монохроматических компонент, в которых зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Для таких полей связь (58,3) между D и E приобретает вид

$$D = \epsilon(\omega) E, \quad (58,4)$$

где функция $\epsilon(\omega)$ определяется как

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (58,5)$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости как о коэффициенте пропорциональности между D и E , причем, однако, этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О зависимости ϵ от частоты говорят как о законе ее дисперсии.

Функция $\epsilon(\omega)$ является, вообще говоря, комплексной. Будем обозначать ее вещественную и мнимую части как ϵ' и ϵ'' :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega). \quad (58,6)$$

Из определения (58,5) непосредственно видно, что

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega). \quad (58,7)$$

Отделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$\epsilon'(-\omega) = \epsilon'(\omega), \quad \epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega). \quad (58,8)$$

Таким образом, ϵ' является четной, а ϵ'' — нечетной функцией частоты.

При малых (по сравнению с границей начала дисперсии) частотах функцию $\epsilon(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням ω . Разложение четной функции $\epsilon'(\omega)$ содержит члены лишь четных степеней, а разложение нечетной функции $\epsilon''(\omega)$ — члены нечетных степеней. В пределе $\omega \rightarrow 0$ функция $\epsilon(\omega)$ в диэлектриках стремится, разумеется, к электростатической диэлектрической постоянной (которую обозначим здесь как ϵ_0). Поэтому в диэлектриках разложение $\epsilon'(\omega)$ начинается с постоянного члена ϵ_0 ; разложение же $\epsilon''(\omega)$ начинается, вообще говоря, с члена, пропорционального ω .

Функцию $\epsilon(\omega)$ при малых частотах можно рассматривать и в металлах, если условиться определять ее так, чтобы в пределе $\omega \rightarrow 0$ уравнение

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$$

переходило бы в уравнение

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} \sigma E$$

для постоянного поля в проводниках. Сравнивая оба уравнения, мы видим, что при $\omega \rightarrow 0$ производная $\partial D/\partial t$ должна переходить в $4\pi\sigma E$. Но в периодическом поле $\partial D/\partial t = -i\omega\epsilon E$, и мы приходим к следующему предельному выражению для $\epsilon(\omega)$ при малых частотах:

$$\epsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (58,9)$$

Таким образом, в проводниках разложение функции $\epsilon(\omega)$ начинается с мнимого члена, пропорционального $1/\omega$, который выражается через обычную проводимость σ по отношению к постоянным токам¹⁾. Следующий член разложения $\epsilon(\omega)$ является вещественной постоянной. Это постоянная, однако, не имеет у металлов того электростатического смысла, которым она обладает у диэлектриков²⁾. Кроме того, надо снова указать, что этот член разложения может оказаться не имеющим никакого вообще смысла, если эффекты пространственной неоднородности поля электромагнитной волны появляются раньше, чем эффекты его временной периодичности.

В сверхпроводниках всегда имеется существенная неоднородность, связанная с малой «глубиной проникновения» в них магнитного поля. В настоящее время еще не ясно, имеет ли в связи с этим вообще смысл понятие диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ для сверхпроводников.

§ 59. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах

В пределе $\omega \rightarrow \infty$ функция $\epsilon(\omega)$ стремится к единице. Это очевидно уже из простых физических соображений: при достаточно быстром изменении поля процессы поляризации, приводящие к установлению отличной от E индукции D , вообще не успевают происходить.

1) Иногда представляют мнимую часть функции $\epsilon(\omega)$ при всех частотах в виде (58,9), что сводится к введению вместо $\epsilon''(\omega)$ новой функции $\sigma(\omega)$; этим переобозначением исчерпывается физический смысл этой функции.

2) Во избежание недоразумений обратим внимание на некоторое изменение обозначений по сравнению с § 56. В уравнении (56,10) для плохих проводников величиной $\epsilon(\omega)$ является сумма $\frac{4\pi i \sigma}{\omega} + \epsilon$.

Оказывается возможным установить справедливый для любых тел (безразлично — металлов или диэлектриков) предельный вид функции $\epsilon(\omega)$ при больших частотах. Именно, частота поля должна быть велика по сравнению с «частотами» движения всех (или, по крайней мере, большинства) электронов в атомах данного вещества. При соблюдении этого условия можно при вычислении поляризации вещества рассматривать электроны как свободные, пренебрегая их взаимодействием друг с другом и с ядрами атомов.

Скорости v движения электронов в атомах малы по сравнению со скоростью света. Поэтому расстояния v/ω , проходимые ими в течение периода волны, малы по сравнению с длиной волны c/ω . Ввиду этого при определении скорости, приобретаемой электроном в поле электромагнитной волны, можно считать последнее однородным.

Уравнение движения гласит:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = eE_0 e^{-i\omega t}$$

(e , m — заряд и масса электрона); отсюда $\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega$. Смещение же \mathbf{r} электрона под влиянием поля связано с \mathbf{v}' посредством $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}'$; поэтому $\mathbf{r} = -e\mathbf{E}/m\omega^2$. Поляризация \mathbf{P} вещества есть дипольный момент единицы его объема. Суммируя по всем электронам, находим

$$\mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2} N\mathbf{E},$$

где N — число электронов во всех атомах единицы объема вещества. С другой стороны, по определению электрической индукции, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Поэтому окончательно получаем следующую формулу:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (59,1)$$

Фактическая область применимости этой формулы начинается от далекого ультрафиолета у самых легких элементов или от рентгеновских частот у более тяжелых элементов¹⁾.

§ 60. Дисперсия магнитной проницаемости

В отличие от $\epsilon(\omega)$ магнитная проницаемость $\mu(\omega)$ при увеличении частоты сравнительно рано теряет свой физический смысл.

Для выяснения этого вопроса проанализируем, в какой мере сохраняется в переменном поле физический смысл величины

¹⁾ Для сохранения у величины $\epsilon(\omega)$ буквального смысла, с которым она входит в уравнения Максвелла, частота должна еще удовлетворять условию $\omega \ll c/a$. Мы, однако, увидим в дальнейшем (§ 99), что выражению (59,1) может быть приписан определенный физический смысл и при больших частотах.

$\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ как магнитного момента единицы объема. Магнитный момент тела есть, по определению, интеграл

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}] dV. \quad (60,1)$$

Среднее значение микроскопической плотности тока связано со средним полем уравнением (56,7):

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60,2)$$

Вычитая из него почленно уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

получим

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (60,3)$$

Между тем, интеграл (60,1) может быть приведен к виду $\int \mathbf{M} dV$ лишь при условии $\overline{\rho \mathbf{v}} = c \text{rot } \mathbf{M}$ (и $\mathbf{M} = 0$ вне тела), как это было показано в § 27.

Таким образом, физический смысл величины \mathbf{M} (а с нею и магнитной восприимчивости) связан с возможностью пренебрежения членом $\partial \mathbf{P} / \partial t$ в формуле (60,3). Выясним, в какой мере могут быть осуществлены условия, допускающие такое пренебрежение.

При заданной частоте наиболее благоприятные условия для измерения восприимчивости требуют по возможности малых размеров тела (для увеличения пространственных производных в $\text{rot } \mathbf{M}$) и по возможности слабого электрического поля (для уменьшения \mathbf{P}). Поле электромагнитной волны не удовлетворяет последнему условию, так как в нем $E \sim H$. Поэтому рассмотрим переменное магнитное поле, скажем, в соленоиде, причем исследуемое тело помещено на его оси. Электрическое поле возникает только в результате индукции от переменного магнитного поля. Порядок величины его напряженности внутри тела можно получить путем оценки обеих сторон уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

откуда $E/l \sim \omega H/c$ или $E \sim (\omega l/c) H$, где l — размеры тела. Полагая $\epsilon \sim 1$, будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \sim \omega E \sim \frac{\omega^2 l}{c} H.$$

Для пространственных же производных магнитного момента $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ имеем

$$c \text{rot } \mathbf{M} \sim \frac{c}{l} \chi H.$$

Сравнивая оба выражения, найдем, что первое мало по сравнению со вторым, если

$$l^2 \ll \gamma \frac{c^2}{\omega^2}. \quad (60,4)$$

Ясно, что понятие о магнитной восприимчивости может иметь смысл лишь если это неравенство допускает (хотя бы с не очень большим запасом) макроскопические размеры тела, т. е. если оно совместимо с неравенством $l \gg a$, где a — атомные размеры. Это условие заведомо нарушается уже в области оптических частот. Действительно, магнитная восприимчивость при этих частотах всегда является величиной $\sim v^2/c^2$ (v — электронные скорости в атоме); сами же оптические частоты $\omega \sim v/a$ и потому правая сторона неравенства (60,4) $\sim a^2$.

Таким образом, заведомо не имеет смысла пользоваться магнитной проницаемостью уже начиная с оптической области частот, и при рассмотрении соответствующих явлений надо полагать $\mu = 1$. Учет отличия между \mathbf{B} и \mathbf{H} в этой области был бы явным превышением точности. Фактически же учет отличия μ от 1 является превышением точности для большинства явлений уже при частотах, гораздо более низких, чем оптические.

§ 61. Энергия поля в диспергирующих средах

Формула

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (61,1)$$

для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных электромагнитных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это вполне очевидно из указанных уже в конце § 29 соображений: ввиду непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} формула (61,1) однозначно следует из условия непрерывности нормальной составляющей \mathbf{S} на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела.

Изменение (в 1 сек) энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как $\text{div } \mathbf{S}$. С помощью уравнений Максвелла это выражение приводится к виду

$$-\text{div } \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right) \quad (61,2)$$

(см. (56,15)). В диэлектрической среде в отсутствие дисперсии, когда ϵ и μ являются вещественными постоянными величинами, эту

1) Времена релаксации каких-либо пара- или ферромагнитных процессов заведомо велики по сравнению с оптическими периодами.

величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии

$$U = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad (61,3)$$

имеющей точный термодинамический смысл: это есть разность между внутренней энергией 1 см³ вещества при наличии поля и энергией в отсутствие поля при тех же плотности и энтропии.

При наличии дисперсии такое простое толкование уже невозможно. Более того, в общем случае произвольной дисперсии оказывается невозможным какое-либо разумное определение электромагнитной энергии как термодинамической величины. Это обусловлено тем, что наличие дисперсии связано, вообще говоря, с одновременным наличием диссипации энергии: диспергирующая среда в то же время является поглощающей.

Для определения этой диссипации рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле. Усреднив по времени величину (61,2), мы тем самым найдем систематическое изменение энергии, которое и является средним количеством тепла Q , выделяющимся в 1 сек в 1 см³ среды.

Поскольку выражение (61,2) квадратично по полю, то при его вычислении все величины должны быть написаны в вещественном виде. Если же понимать под E и H , как это удобно для монохроматического поля, комплексные представления величин, то в (61,2) надо подставить для E и $\partial D/\partial t$ соответственно выражения

$$\frac{1}{2}(E + E^*) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(-i\omega\varepsilon E + i\omega\varepsilon^* E^*)$$

и аналогично для H и $\partial B/\partial t$. При усреднении по времени произведения EE и E^*E^* , содержащие множители $e^{\mp 2i\omega t}$, обращаются в нуль; остается:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} \{(\varepsilon^* - \varepsilon)EE^* + (\mu^* - \mu)HH^*\} = \frac{\omega}{8\pi} (\varepsilon'' |E|^2 + \mu'' |H|^2).$$

Это выражение можно написать также в виде

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon'' \overline{E^2} + \mu'' \overline{H^2}), \quad (61,4)$$

где E и H — вещественные напряженности поля, а черта означает усреднение по времени.

Эта важная формула показывает, что поглощение (диссипация) энергии определяется мнимыми частями ε и μ ; о двух членах в (61,4) говорят соответственно как об электрических и магнитных потерях. В силу закона возрастания энтропии эти потери имеют вполне определенный знак: диссипация энергии сопровождается выделением

тепла, т. е. всегда $Q > 0$. Из формулы (61,4) следует поэтому, что мнимые части ϵ и μ всегда положительны:

$$\epsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0 \quad (61,5)$$

для всех веществ и при всех частотах ¹⁾. Знак же вещественных частей ϵ и μ (при $\omega \neq 0$) не ограничен никакими физическими условиями, так что ϵ' и μ' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Всякий нестационарный процесс в реальном веществе всегда в той или иной степени термодинамически необратим. Поэтому электрические и магнитные потери в переменном электромагнитном поле всегда в какой-то (хотя бы и малой) степени имеются. Другими словами, функции $\epsilon''(\omega)$ и $\mu''(\omega)$ не обращаются строго в нуль ни при каком отличном от нуля значении частоты. Мы увидим в следующем параграфе, что это утверждение имеет существенное принципиальное значение, хотя им ни в какой мере не исключается возможность существования таких областей частот, при которых потери становятся относительно весьма малыми.

Области частот, в которых ϵ'' и μ'' очень малы (по сравнению с ϵ' и μ'), называют областями прозрачности вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле в том же смысле, какой она имеет в постоянном поле.

Для определения этой величины недостаточно рассматривать чисто монохроматическое поле, так как благодаря его строгой периодичности в нем не происходит никакого систематического накопления электромагнитной энергии. Поэтому мы рассмотрим поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале вокруг некоторого среднего значения ω_0 . Напряженности такого поля можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (61,6)$$

где $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ — медленно (по сравнению с множителем $e^{-i\omega_0 t}$) меняющиеся функции времени. Вещественные части этих выражений должны быть подставлены в правую сторону (61,2), после чего мы произведем усреднение по времени по периоду $2\pi/\omega_0$, малому по сравнению со временем изменения множителей \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 .

¹⁾ Строго говоря, это утверждение относится к телам, находящимся (в отсутствие переменного поля) в термодинамически равновесном состоянии, что мы везде и подразумеваем. Если тело уже само по себе не находится в тепловом равновесии, то Q могло бы, в принципе, быть и отрицательным. Второй закон термодинамики требует лишь суммарного возрастания энтропии как под влиянием переменного электромагнитного поля, так и от термодинамической неравновесности, не имеющей отношения к наличию поля. Принципиально возможным примером такого тела может являться вещество, все томы которого искусственно (т. е. не под влиянием самопроизвольного теплового возбуждения) приведены в возбужденные состояния.

Первый член в (61,2) после перехода к комплексному представлению E принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} \frac{E + E^*}{2} \frac{\dot{D} + \dot{D}^*}{2}$$

(и аналогично для второго члена). Произведения $E\dot{D}$ и $E^*\dot{D}^*$ исчезнут при указанном усреднении по времени, и потому их вообще не надо рассматривать. Таким образом, остается лишь

$$\frac{1}{16\pi} \left(E \frac{\partial D^*}{\partial t} + E^* \frac{\partial D}{\partial t} \right). \quad (61,7)$$

Напишем производную $\partial D/\partial t$ в виде $\hat{f}E$, где \hat{f} обозначает оператор

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varepsilon},$$

и выясним, к какому результату приводит действие этого оператора на функцию вида (61,6). Если бы E_0 была постоянной, то мы имели бы просто

$$\hat{f}E = f(\omega)E,$$

где

$$f(\omega) = -i\omega\varepsilon(\omega).$$

В нашем же случае произведем разложение Фурье функции $E_0(t)$, представив ее в виде наложения компонент вида $E_{0\alpha} e^{-i\alpha t}$ с постоянными $E_{0\alpha}$. Медленность изменения $E_0(t)$ означает, что в это разложение войдут лишь компоненты с $\alpha \ll \omega_0$. Имея это в виду, пишем

$$\begin{aligned} \hat{f}E_{0\alpha} e^{-i(\omega_0+\alpha)t} &= f(\alpha + \omega_0) E_{0\alpha} e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \cong \\ &\cong f(\omega_0) E_{0\alpha} e^{-i(\omega_0+\alpha)t} + \alpha \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} E_{0\alpha} e^{-i(\omega_0+\alpha)t}. \end{aligned}$$

Производя теперь обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\hat{f}E_0(t) e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0) E_0 e^{-i\omega_0 t} + i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial E_0}{\partial t} e^{-i\omega_0 t}.$$

Опуская ниже индекс 0 у ω_0 , имеем, таким образом:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega) E + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} e^{-i\omega t}. \quad (61,8)$$

Подставив это выражение в (61,7) и помня, что мнимой частью функции $\varepsilon(\omega)$ мы пренебрегаем, получим

$$\frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \left(E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} + E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (EE^*)$$

(произведение $E_0 E_0^*$ совпадает с EE^*). Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, мы приходим к выводу, что скорость

систематического изменения энергии 1 см³ среды дается производной $d\bar{U}/dt$, где

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \mathbf{H}\mathbf{H}^* \right]. \quad (61,9)$$

С помощью вещественных напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} это выражение напишется в виде

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \overline{E^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \overline{H^2} \right]. \quad (61,10)$$

Это и есть искомый результат: \bar{U} есть среднее значение электромагнитной части внутренней энергии единицы объема прозрачной среды. При отсутствии дисперсии ϵ и μ постоянны и (61,10) переходит, как и следовало, в среднее значение выражения (61,3).

Если подвод электромагнитной энергии к телу извне прекращается, то фактически всегда имеющееся хотя бы очень малое поглощение приведет в конце концов к переходу всей энергии \bar{U} в тепло. Поскольку, согласно закону возрастания энтропии, это тепло должно именно выделяться, а не поглощаться, то должно быть $\bar{U} > 0$. Согласно формуле (61,9) для этого должны выполняться неравенства

$$\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0.$$

В действительности эти условия автоматически выполняются, как следствие еще более сильных неравенств, которым всегда удовлетворяют функции $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в областях прозрачности (см. § 64)¹⁾.

Представляет существенный интерес вопрос о среднем (по времени) тензоре напряжений, определяющем силы, действующие на вещество в переменном электромагнитном поле. Этот вопрос имеет смысл как для непоглощающей, так и для поглощающей среды, в противоположность вопросу о внутренней энергии, который может быть сформулирован лишь при пренебрежении поглощением. До настоящего времени, однако, соответствующие выражения еще не были никем получены.

§ 62. Связь между вещественной и мнимой частями $\epsilon(\omega)$

Функция $f(\tau)$ в (58,3) конечна при всех значениях своего аргумента, в том числе и при $\tau = 0$ ²⁾. У диэлектриков эта функция стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к нулю. Это обстоятельство является просто выражением того факта, что на значение $\mathbf{D}(t)$ в заданный момент

¹⁾ Взяв полусумму неравенств (64,1), и (64,2), мы найдем, что производная $d(\omega\epsilon)/d\omega$ не только положительна, но даже больше единицы.

²⁾ Именно для этой цели в интегральной зависимости (58,3) выделен член $\mathbf{E}(t)$; в противном случае функция $f(\tau)$ имела бы при $\tau = 0$ особенность типа δ -функции.

времени не могут заметно влиять значения $E(t)$ в очень давние моменты. Физический механизм, лежащий в основе интегральной зависимости вида (58,3), заключается в процессах установления электрической поляризации. Поэтому интервал значений, в котором функция $f(\tau)$ заметно отличается от нуля, — порядка величины времени релаксации, характеризующего скорость этих процессов.

Сказанное относится и к металлам, с той только разницей, что стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ не сама функция $f(\tau)$, а разность $f(\tau) - 4\pi\sigma\tau$. Это отличие связано с тем, что уже прохождение стационарного тока проводимости, хотя и не приводит к какому-либо реальному изменению физического состояния металла, но в наших уравнениях формально означает появление индукции D согласно $\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma E$ или

$$D(t) = \int_{-\infty}^t 4\pi\sigma E(\tau) d\tau = 4\pi\sigma \int_0^{\infty} E(t - \tau) d\tau.$$

Функция $\epsilon(\omega)$ была определена нами согласно

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau) d\tau. \quad (62,1)$$

Оказывается возможным получить для этой функции некоторые весьма общие соотношения путем использования математического аппарата теории функций комплексного переменного. Для этого будем рассматривать ω как комплексную переменную ($\omega = \omega' + i\omega''$) и выясним свойства функции $\epsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости этой переменной. Из определения (62,1) и из указанных выше свойств функции $f(\tau)$ следует, что во всей верхней полуплоскости $\epsilon(\omega)$ есть однозначная функция, нигде не обращающаяся в бесконечность, т. е. не имеющая никаких особых точек. Действительно, при $\omega'' > 0$ в подынтегральном выражении в формуле (62,1) имеется экспоненциально убывающий множитель $e^{-\omega''\tau}$, а поскольку и функция $f(\tau)$ конечна во всей области интегрирования, то интеграл сходится. Функция $\epsilon(\omega)$ не имеет особенностей и на самой вещественной оси ($\omega'' = 0$), за исключением, возможно, лишь начала координат (у металлов $\epsilon(\omega)$ имеет в этой точке простой полюс¹⁾).

1) В нижней же полуплоскости определение (62,1) неприменимо, так как интеграл расходится. Поэтому функция $\epsilon(\omega)$ в нижней полуплоскости может быть определена лишь как аналитическое продолжение формулы (62,1) из верхней полуплоскости. В этой области функция $\epsilon(\omega)$ имеет, вообще говоря, особые точки.

Функция $\epsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости имеет не только формальный математический, но и физический смысл: ею определяется связь между D и E для полей с возрастающей (как $e^{\omega''t}$) амплитудой. В нижней же полуплоскости такое физическое истолкование невозможно уже хотя бы потому, что наличие затухающего (как $e^{-|\omega''|t}$) поля предполагает его бесконечную величину при $t \rightarrow -\infty$.

Полезно обратить внимание на то, что вывод об отсутствии особых точек у функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости является с физической точки зрения следствием принципа причинности. Последний проявляется в том, что интегрирование в (58,3) производится лишь по времени, предшествующему данному моменту t , в результате чего в формуле (62,1) область интегрирования и распространяется от 0 до ∞ (а не от $-\infty$ до $+\infty$).

Из определения (62,1) очевидно, далее, что

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega). \quad (62,2)$$

Это есть обобщение соотношения (58,7), относящегося к вещественным значениям ω . В частности, для чисто мнимых значений ω имеем $\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega'')$, т. е. на мнимой оси функция $\varepsilon(\omega)$ вещественна:

$$\text{Im } \varepsilon = 0 \quad \text{при } \omega = i\omega''. \quad (62,3)$$

Подчеркнем, что свойство (62,2) выражает собой просто тот факт, что операторная связь $D = \hat{\varepsilon}E$ должна обеспечивать вещественность D при вещественном E . Если функция $E(t)$ дается вещественным выражением

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega^* t}, \quad (62,4)$$

то, применяя оператор $\hat{\varepsilon}$ к каждому из двух членов, получим:

$$D = \varepsilon(\omega) E_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*) E_0^* e^{i\omega^* t};$$

условие вещественности этой величины совпадает с (62,2).

Согласно результатам § 61 мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ положительна при положительных вещественных значениях $\omega = \omega'$, т. е. на правой части вещественной оси. Поскольку, согласно (62,2), $\text{Im } \varepsilon(-\omega') = -\text{Im } \varepsilon(\omega')$, то на левой части этой оси мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ отрицательна. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } \varepsilon > 0 & \quad \text{при } \omega = \omega' > 0, \\ \text{Im } \varepsilon < 0 & \quad \text{при } \omega = \omega' < 0. \end{aligned} \right\} \quad (62,5)$$

В точке же $\omega = 0$ функция $\text{Im } \varepsilon$ меняет знак, проходя через нуль (у диэлектриков) или через бесконечность (у металлов). Это — единственная точка на вещественной оси, в которой $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ может обратиться в нуль.

При стремлении ω к бесконечности по любому пути (в верхней полуплоскости) функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это обстоятельство было указано уже в § 59 для случая, когда $\omega \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси. В общем случае это видно из той же формулы (62,1): если $\omega \rightarrow \infty$ так, что $\omega'' \rightarrow \infty$, то интеграл в (62,1) обращается в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множи-

теля $e^{-\tau\omega''}$; если же ω'' остается конечным, а $|\omega'| \rightarrow \infty$, то обращение интеграла в нуль происходит благодаря наличию осциллирующего множителя $e^{i\omega'\tau}$.

Перечисленных свойств функции $\epsilon(\omega)$ достаточно для того, чтобы доказать следующую теорему: функция $\epsilon(\omega)$ не принимает вещественных значений ни в какой конечной точке верхней полуплоскости, за исключением лишь точек мнимой оси; на последней же $\epsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\epsilon_0 > 1$ (у диэлектриков) или от $+\infty$ (у металлов) при $\omega = i0$ до 1 при $\omega = i\infty$. Отсюда же, в частности, будет следовать, что функция $\epsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Для доказательства ¹⁾ воспользуемся известной теоремой теории функций комплексного переменного, согласно которой интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega} \frac{d\omega}{\epsilon(\omega) - a}, \quad (62,6)$$

взятый по замкнутому контуру C , равен разности между числом нулей и числом полюсов функции $\epsilon(\omega) - a$ в области, ограниченной

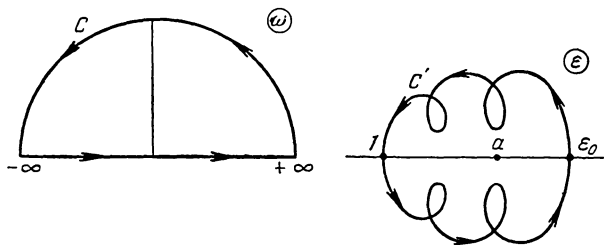


Рис. 29.

контуром C . Пусть a — вещественное число, а в качестве C выберем контур, состоящий из вещественной оси и бесконечно удаленной полуокружности в верхней полуплоскости (рис. 29). Предположим сначала, что функция $\epsilon(\omega)$ относится к диэлектрику, так что точка $\omega = 0$ не является особой. Поскольку в верхней полуплоскости функция $\epsilon(\omega)$, а потому и $\epsilon - a$, не имеет полюсов, то указанный интеграл дает просто число нулей разности $\epsilon(\omega) - a$, т. е. число точек, в которых $\epsilon(\omega)$ принимает вещественное значение a . Для вычисления интеграла пишем его в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{d\epsilon}{\epsilon - a},$$

причем интегрирование производится по контуру C' в плоскости

¹⁾ Излагаемое ниже доказательство принадлежит *Н. Н. Мейману*.

комплексного переменного ϵ , являющемуся отображением контура C из плоскости ω . Вся бесконечно удаленная полуокружность отображается в точку $\epsilon = 1$, а начало координат $\omega = 0$ — в другую, тоже вещественную, точку $\epsilon = \epsilon_0 > 1$ (электростатическое значение ϵ). Правая же и левая вещественные полуоси ω отображаются в плоскости ϵ в некоторые весьма сложные (вообще говоря, самопересекающиеся) кривые, лежащие соответственно целиком в верхней и в нижней полуплоскостях. Существенно, что эти кривые нигде (кроме точек $\epsilon = 1$ и $\epsilon = \epsilon_0$) не пересекают ось абсцисс, так как ϵ не принимает вещественных значений ни при каком (кроме $\omega = 0$) конечном вещественном значении ω . Ввиду этого свойства контура C' полное изменение аргумента комплексного числа $\epsilon - a$ при обходе вдоль него равно 2π (если число a лежит между 1 и ϵ_0 , как изображено на рис. 29) или нулю (если a лежит вне этого интервала), вне зависимости от наличия любого числа самопересечений контура. Отсюда следует, что выражение (62,6) равно 1 при $1 < a < \epsilon_0$ и нулю при всяком другом значении a .

Таким образом, мы приходим к выводу, что функция $\epsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости ω принимает всего по одному разу всякое вещественное значение a , лежащее в указанном интервале (и ни разу — значения, лежащие вне этого интервала). Отсюда, прежде всего, можно заключить, что на мнимой оси, где функция $\epsilon(\omega)$ вещественна, она не может иметь ни максимума, ни минимума: в противном случае она принимала бы некоторые значения по крайней мере дважды. Следовательно, на мнимой оси функция $\epsilon(\omega)$ меняется монотонно, пробегая здесь, и только здесь, по одному разу все вещественные значения от ϵ_0 до 1.

В случае металлов (когда $\epsilon(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = 0$) изложенное доказательство меняется лишь в том отношении, что при движении (в плоскости ω) вдоль вещественной оси надо обойти начало координат сверху по бесконечно малой полуокружности. Изменение контура C' на рис. 29 можно представлять себе при этом как результат отодвигания ϵ_0 на бесконечность. Функция $\epsilon(\omega)$ на мнимой оси ω в этом случае монотонно убывает от $+\infty$ до 1.

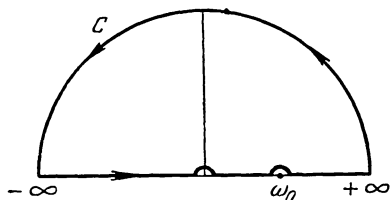


Рис. 30.

Далее, выведем формулу, связывающую мнимую и вещественную части функции $\epsilon(\omega)$ друг с другом. Для этого выберем какое-либо вещественное значение $\omega = \omega_0$ и проинтегрируем выражение $\frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0}$

по контуру, изображенному на рис. 30. Этот контур идет вдоль всей вещественной оси, обходя сверху точку $\omega = \omega_0 > 0$, а также точку $\omega = 0$, если последняя является (у металлов) полюсом функ-

ции $\varepsilon(\omega)$. Контур замыкается бесконечно удаленной полуокружностью. На бесконечности $\varepsilon \rightarrow 1$, и потому функция $\frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0}$ стремится к нулю быстрее, чем $1/\omega$. Поэтому интеграл

$$\int_C \frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega$$

сходится; поскольку же $\varepsilon(\omega)$ не имеет особых точек в верхней полуплоскости, а точка $\omega = \omega_0$ исключена из области интегрирования, то функция $\frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0}$ аналитична во всей области внутри контура C и написанный интеграл равен нулю.

Интеграл по бесконечно удаленной полуокружности обращается в нуль сам по себе. Точку же ω_0 обойдем по бесконечно малой полуокружности (радиуса $\rho \rightarrow 0$). Обход происходит по часовой стрелке и дает в интеграле вклад, равный $-i\pi [\varepsilon(\omega_0) - 1]$. Если мы имеем дело с функцией $\varepsilon(\omega)$, относящейся к диэлектрику, то обход начала координат излишен и интегрирование вдоль всей вещественной оси дает, таким образом:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\rho + \omega_0} \frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\rho + \omega_0}^{\infty} \frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \right\} - i\pi [\varepsilon(\omega_0) - 1] = 0.$$

Первый член есть интеграл от $-\infty$ до $+\infty$, понимаемый в смысле его главного значения. Отмечая это обстоятельство, как принято, перечеркнутым знаком интеграла, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi [\varepsilon(\omega_0) - 1] = 0. \quad (62,7)$$

Переменная интегрирования ω пробегает здесь лишь вещественные значения. Переобозначим ее буквой x , а посредством ω обозначим заданное вещественное значение ω_0 ; напомним также функцию $\varepsilon(\omega)$ вещественного переменного ω , как и в § 58, в виде $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Отделяя в (62,7) вещественную и мнимую части, найдем окончательно следующие две формулы:

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (62,8)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx. \quad (62,9)$$

Они были впервые получены Г. Крамерсом и Р. Кронигом (1927). Подчеркнем, что единственным существенным свойством функции $\varepsilon(\omega)$,

использованным при выводе этих формул, является отсутствие особых точек в верхней полуплоскости¹⁾. Поэтому можно сказать, что формулы Крамерса — Кронига (как и указанное свойство $\epsilon(\omega)$) являются прямым следствием физического принципа причинности.

Воспользовавшись тем, что $\epsilon''(x)$ есть нечетная функция, можно переписать (62,8) в виде

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x + \omega} dx$$

или

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (62,10)$$

Если речь идет о металле, то в точке $\omega = 0$ функция $\epsilon(\omega)$ имеет полюс, вблизи которого $\epsilon = 4\pi si/\omega$ (58,9). Обход этого полюса по полуокружности дает в интеграле дополнительный вещественный член $-\frac{4\pi\sigma}{\omega_0} \pi$, который должен быть прибавлен к левой стороне равенства (62,7). Соответственно, такой же член появится и в формуле (62,9):

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon'(x)}{x - \omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad (62,11)$$

формула же (62,8) или (62,10) остается неизменной. Кроме того, в случае металлов надо сделать еще следующее замечание. В конце § 58 было указано, что у металлов могут существовать области частот, в которых функция $\epsilon(\omega)$ теряет свой физический смысл в связи с эффектами пространственной неоднородности поля. Между тем, в рассматриваемых формулах интегрирование должно вестись по всем частотам. В таких случаях под $\epsilon(\omega)$ в соответствующих областях частот надо понимать функцию, получающуюся в результате решения формальной задачи о поведении тела в фиктивном пространственно однородном периодическом электрическом поле (а не в неизбежно неоднородном поле электромагнитной волны).

В особенности существенна формула (62,10). Она дает возможность вычислить функцию $\epsilon'(\omega)$, если известна хотя бы приближенным (например, эмпирическим) образом функция $\epsilon''(\omega)$ для данного тела. При этом существенно, что для любой функции $\epsilon''(\omega)$, удовле-

1) Что касается свойства $\epsilon \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$, то оно не является существенным: если бы предел $\epsilon(\infty)$ был отличен от 1, то надо было бы просто рассматривать вместо разности $\epsilon - 1$ разность $\epsilon - \epsilon(\infty)$ с соответствующим очевидным видоизменением формул (62,8) и (62,9).

творяющей физически необходимому требованию $\epsilon'' > 0$ при $\omega > 0$, формула (62,10) дает функцию $\epsilon'(\omega)$, не противоречащую никаким необходимым физическим требованиям, т. е. принципиально возможную (знак и величина ϵ' не ограничиваются никакими общими физическими условиями). Это обстоятельство и дает возможность использовать формулу (62,10) даже по приближенной функции $\epsilon''(\omega)$. Напротив, формула (62,9) не дает (в общем случае произвольной функции $\epsilon'(\omega)$) физически возможной функции $\epsilon''(\omega)$, так как не обеспечивает автоматическим образом положительность последней.

В теории дисперсии принято записывать выражение для $\epsilon'(\omega)$ в виде

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx, \quad (62,12)$$

где e , m — заряд и масса электрона, а $f(\omega)d\omega$ называется силой осцилляторов (или «числом дисперсных электронов») в интервале частот $d\omega$. Согласно (62,10) эта величина связана с $\epsilon''(\omega)$ посредством

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \omega \epsilon''(\omega). \quad (62,13)$$

У металлов $f(\omega)$ стремится к конечному пределу при $\omega \rightarrow 0$.

При достаточно больших значениях ω в подынтегральном выражении в (62,10) можно пренебречь x по сравнению с ω . Тогда

$$\epsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^{\infty} x \epsilon''(x) dx.$$

С другой стороны, для диэлектрической постоянной при больших частотах мы имеем формулу (59,1). Сравнение обоих выражений приводит к формуле

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^{\infty} \omega \epsilon''(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = N, \quad (62,14)$$

где N — полное число электронов в единице объема вещества.

Если $\epsilon''(\omega)$ не имеет особенности при $\omega = 0$, то в формуле (62,10) можно перейти к пределу $\omega \rightarrow 0$, и мы получим

$$\epsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x} dx. \quad (62,15)$$

Если же точка $\omega = 0$ является особой для функции $\epsilon''(\omega)$ (металлы), то предел, к которому стремится интеграл (62,10) при $\omega \rightarrow 0$, не

совпадает со значением, получающимся путем простого вычеркивания в нем ω . Для вычисления указанного предела необходимо предварительно заменить в подинтегральном выражении $\varepsilon''(x)$ на

$$\varepsilon''(x) = \frac{4\pi\sigma}{x};$$

эта замена не меняет значения интеграла, поскольку тождественно

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \omega^2} = 0.$$

Для диэлектриков формулу (62,15) можно переписать в виде

$$\varepsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \overline{\omega^{-2}}, \quad (62,16)$$

где черта обозначает усреднение с помощью «чисел осцилляторов»:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega^2} d\omega.$$

Это выражение может быть полезным при различных оценках величин ε_0 .

Выведем еще формулу, выражающую значения $\varepsilon(\omega)$ на верхней мнимой полуоси через значения $\varepsilon''(\omega)$ на вещественной оси. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int \frac{\omega [\varepsilon(\omega) - 1]}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega,$$

взятый по контуру C , состоящему из вещественной оси и бесконечно удаленной полуокружности в верхней полуплоскости (ω_0 — вещественное число). Этот интеграл вычисляется с помощью вычета подинтегрального выражения относительно полюса $\omega = i\omega_0$. С другой стороны, интеграл по бесконечно удаленной полуокружности исчезает, так что получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega [\varepsilon(\omega) - 1]}{\omega^2 + \omega_0^2} d\omega = \pi i [\varepsilon(i\omega_0) - 1].$$

В левой стороне равенства вещественная часть интеграла обращается в нуль в силу нечетности интегрируемой функции. Заменяв также обозначения ω_0 и ω на ω и x , получим окончательно

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \varepsilon''(x)}{x^2 + \omega^2} dx. \quad (62,17)$$

Если проинтегрировать это соотношение с обеих сторон по $d\omega$, то получается

$$\int_0^{\infty} [\varepsilon(i\omega) - 1] d\omega = \int_0^{\infty} \varepsilon''(\omega) d\omega. \quad (62,18)$$

Все изложенные результаты (с небольшим лишь видоизменением) относятся и к магнитной проницаемости $\mu(\omega)$. Отличие связано прежде всего с тем, что при увеличении частоты функция $\mu(\omega)$ сравнительно рано теряет физический смысл. Поэтому, например, применять формулы Крамерса — Кронига к $\mu(\omega)$ надо следующим образом. Вместо бесконечного рассматриваем конечный интервал значений ω (от 0 до ω_1), простирающийся до таких частот, при которых μ еще имеет смысл, но уже перестает меняться и ее мнимую часть можно считать равной нулю; соответствующее вещественное значение μ обозначим как μ_1 . Тогда формулу (62,10) надо писать в виде

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (62,19)$$

В противоположность ε_0 , значение $\mu_0 = \mu(0)$ может быть как меньше, так и больше 1. Изменение же $\mu(\omega)$ вдоль мнимой оси по-прежнему является монотонным убыванием — на этот раз от μ_0 до $\mu_1 < \mu_0$.

§ 63. Плоская монохроматическая волна

Уравнения Максвелла (58,2) для монохроматического поля гласят:

$$i\omega\mu(\omega)H = c \operatorname{rot} E, \quad i\omega\varepsilon(\omega)E = -c \operatorname{rot} H. \quad (63,1)$$

Эти уравнения сами по себе составляют полную систему, так как уравнения (58,1) следуют из них автоматически, и потому не должны рассматриваться отдельно. Предполагая среду однородной и исключив из этих уравнений H (или E), получим уравнение второго порядка

$$\Delta E + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (63,2)$$

(и такое же уравнение для H).

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в неограниченной однородной среде. В плоской волне в густоте зависимость поля от координат дается множителем вида e^{ikr} с вещественным волновым вектором k . При рассмотрении же распространения волн в материальных средах в общем случае оказывается необходимым вводить также и комплексные значения:

$$k = k' + ik'',$$

где k' , k'' — вещественные векторы.

Полагая \mathbf{E} и \mathbf{H} пропорциональными $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ и производя в уравнениях (63,1) дифференцирование по координатам, получим

$$\text{rot}\mathbf{H} = c[\mathbf{k}\mathbf{E}], \quad \text{div}\mathbf{E} = -c[\mathbf{k}\mathbf{H}]. \quad (63,3)$$

Исключив из этих двух соотношений \mathbf{E} или \mathbf{H} , найдем следующее выражение для квадрата «волнового вектора»:

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (63,4)$$

Мы видим, что \mathbf{k} может быть вещественным, только если ε и μ вещественны и положительны. Но даже и в этом случае \mathbf{k} может все же быть комплексным, причем только должно быть $k'k'' = 0$ (с таким случаем мы встретимся при рассмотрении полного отражения, см. § 66).

Следует иметь в виду, что в общем случае комплексных \mathbf{k} волна может быть названа «плоской» лишь в условном смысле. Написав

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}},$$

мы видим, что плоскости, перпендикулярные к вектору \mathbf{k}' , являются плоскостями постоянной фазы. Плоскостями же постоянной амплитуды являются плоскости, перпендикулярные к вектору \mathbf{k}'' , в направлении которого происходит затухание волны. Что же касается поверхностей постоянного значения самого поля, то они в общем случае вообще не будут плоскими. Такие волны называют «неоднородными плоскими волнами», в отличие от обычных «однородных» плоских волн.

Связь между компонентами электрического и магнитного полей в общем случае дается формулами (63,3). В частности, умножая эти формулы скалярно на \mathbf{k} , получим

$$\mathbf{k}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{H} = 0, \quad (63,5)$$

а возводя какую-либо из них в квадрат и используя (63,4), найдем

$$\mathbf{E}^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} \mathbf{H}^2. \quad (63,6)$$

Следует, однако, помнить, что ввиду комплексности всех трех векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} эти соотношения в общем случае не имеют того наглядного смысла, который они имели бы для вещественных величин.

Не останавливаясь на громоздких соотношениях, получающихся в общем случае, рассмотрим наиболее важные частные случаи.

Особенно простые результаты получаются для волны, распространяющейся без затухания в непоглощающей (прозрачной) однородной среде. Волновой вектор в этом случае вещественен и по величине равен

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c}, \quad (63,7)$$

где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ называется показателем преломления среды. Как электрическое, так и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{k} (чисто поперечная волна), причем перпендикулярны друг к другу и связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{l} \mathbf{E}] \quad (63,8)$$

(\mathbf{l} — единичный вектор в направлении \mathbf{k}). Отсюда следует, что $\epsilon E^2 = \mu H^2$; это, однако, не означает равенства электрической и магнитной энергий в волне (как в отсутствие дисперсии), поскольку последние даются другими выражениями (два члена в формуле (61,10)).

Скорость u распространения волны в среде определяется известным выражением для групповой скорости¹⁾:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}. \quad (63,9)$$

Легко проверить, что скорость

$$u = \bar{S}/\bar{U}, \quad (63,10)$$

в соответствии с ее смыслом как скорости переноса энергии в волновом пакете; здесь \bar{U} — плотность энергии, даваемая формулой (61,9), а

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \quad (63,11)$$

— среднее значение вектора Пойнтинга. В отсутствие дисперсии, когда показатель преломления не зависит от частоты, выражение (63,9) сводится просто к c/n (ср. (56,13)).

Далее, рассмотрим более общий случай распространения электромагнитной волны в поглощающей среде, причем волновой вектор имеет определенное направление, т. е. \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' параллельны друг другу. Такая волна является плоской в буквальном смысле, так как поверхностями постоянных значений поля в ней являются плоскости, перпендикулярные к направлению распространения («однородная» плоская волна).

В этом случае можно ввести «длину» k волнового вектора согласно $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ (где \mathbf{l} — единичный вектор в направлении \mathbf{k}' и \mathbf{k}'') и из (63,4) имеем $k = \sqrt{\epsilon\mu} \omega/c$. Комплексную величину $\sqrt{\epsilon\mu}$ обычно пишут в виде $n + ix$ с вещественными n и x , так что

$$k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} = (n + ix) \frac{\omega}{c}. \quad (63,12)$$

¹⁾ При наличии существенного поглощения введение понятия групповой скорости вообще невозможно, так как в поглощающей среде волновые пакеты не распространяются, а подвергаются быстрому «размазыванию».

Величину n называют показателем преломления, а χ — коэффициентом поглощения среды; последний определяет скорость затухания волны по мере ее распространения. Подчеркнем, однако, что затухание волны не обязательно связано с наличием истинного поглощения; диссипация энергии имеет место лишь при комплексных ϵ или μ , а коэффициент χ может быть отличным от нуля и при вещественных (отрицательных) ϵ и μ .

Выразим величины n и χ через вещественную и мнимую части диэлектрической постоянной, предполагая при этом, что $\mu = 1$. Из равенства $n^2 - \chi^2 + 2in\chi = \epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ имеем $n^2 - \chi^2 = \epsilon'$, $2n\chi = \epsilon''$. Решая эти уравнения относительно n и χ , получим¹⁾

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}{2}}, \quad \chi = \sqrt{\frac{-\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}{2}}. \quad (63,13)$$

В частности, для металлов в области частот, где справедлива формула (58,9), мнимая часть ϵ велика по сравнению с вещественной частью и связана с проводимостью посредством $\epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; пренебрегая ϵ' по сравнению с ϵ'' , найдем, что n и χ совпадают и равны:

$$n = \chi = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \quad (63,14)$$

Для связи между полями E и H в рассматриваемой однородной плоской волне снова получаем формулу (63,8), но только с комплексными ϵ и μ . Она снова показывает, что оба поля перпендикулярны к направлению распространения волны и друг к другу. Если $\mu = 1$, то, написав $\sqrt{\epsilon}$ в виде

$$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{n^2 + \chi^2} e^{i \operatorname{arctg}(\chi/n)},$$

мы видим, что магнитное поле по абсолютной величине превышает электрическое в $\sqrt{n^2 + \chi^2}$ раз, а по фазе отстает от него на угол $\operatorname{arctg} \frac{\chi}{n}$; в частности, в случае (63,14) сдвиг фаз равен $\pi/4$.

Задача

В заданный момент времени ($t = 0$) в некоторой области пространства имеется электромагнитное возмущение. Не поддерживаемое внешними источниками, оно будет затухать со временем. Найти условия, определяющие декремент этого затухания.

¹⁾ Поскольку $\epsilon'' > 0$, то знаки n и χ должны быть одинаковыми, в соответствии с тем, что волна затухает в направлении своего распространения. Выбор в (63,13) положительных знаков соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси x .

Решение. Разложим начальное возмущение в интеграл Фурье по координатам и рассмотрим какую-либо компоненту с волновым вектором \mathbf{k} (вещественный вектор!). Ее дальнейшая зависимость от времени дается (при достаточно большом t) множителем $e^{-i\omega t}$ с комплексной «частотой» ω , которую надо определить; декремент затухания есть $-\text{Im } \omega$.

Из уравнений

$$-\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \mathbf{E} = i[\mathbf{kE}], \quad \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \text{rot } \mathbf{H} = i[\mathbf{kH}]$$

имеем, исключая \mathbf{H} ,

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{D}} = [\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]. \quad (1)$$

Выберем направление \mathbf{k} в качестве оси x . Для «продольной» части возмущения имеем отсюда $\ddot{D}_x = 0$, а потому и $D_x = 0$.

С другой стороны, связь между D_x и E_x дается интегральным оператором вида

$$E_x(t) = \hat{\varepsilon}^{-1} D_x = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau \quad (2)$$

(ср. § 58). Поскольку в данном случае $D_x(\tau) = 0$ при $\tau > 0$, то

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^0 F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Отсюда видно, что при больших t зависимость E_x от времени определяется в основном временной зависимостью функции $F(t)$.

Для монохроматического поля имеем из (2)

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \int_0^{\infty} F(x) e^{i\omega x} dx$$

и, обратно,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Для оценки этого интеграла при больших значениях t смещаем путь интегрирования в нижнюю полуплоскость ω , где подынтегральное выражение быстро убывает. При этом надо обходить все особые точки функции $1/\varepsilon(\omega)$, т. е. нули функции $\varepsilon(\omega)$ и ее точки разветвления. В результате интеграл будет в основном пропорционален $e^{-i\omega_0 t}$, где ω_0 — ближайшая к вещественной оси из указанных особых точек. Этим и решается поставленный вопрос для продольной части возмущения.

Для поперечных компонент имеем из (1)

$$\frac{1}{c^2} \ddot{D}_y, z + k^2 E_y, z = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к заключению, что искомая «частота» ω_0 является в данном случае ближайшим к вещественной оси нулем или точкой разветвления функции

$$\omega^2 \varepsilon(\omega) - c^2 k^2.$$

§ 64. Прозрачные среды

Применим полученные в § 62 общие формулы к слабопоглощающим (в данной области частот) средам, т. е. будем предполагать, что для этих частот мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь.

В таком случае в формуле (62,10) взятие главного значения становится излишним, так как точка $x = \omega$ фактически выпадает из области интегрирования. После этого интеграл можно дифференцировать по параметру ω , как обычный интеграл, не имеющий особенностей в подынтегральном выражении. Производя такое дифференцирование, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x) dx}{(\omega^2 - x^2)^2}.$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения во всей области интегрирования мы приходим к выводу, что

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \quad (64,1)$$

т. е. в области отсутствия поглощения диэлектрическая проницаемость является монотонно возрастающей функцией частоты.

Аналогичным образом, в той же области частот получается еще и другое неравенство:

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2(\varepsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} dx > 0,$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} > \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega}. \quad (64,2)$$

Если $\varepsilon < 1$ или даже отрицательна, то это неравенство сильнее неравенства (64,1).

Отметим, что неравенства (64,1) и (64,2) (и аналогичные — для $\mu(\omega)$) автоматически гарантируют выполнение неравенства $u < c$ для скорости распространения волн. Так, при $\mu = 1$ имеем $n = \sqrt{\varepsilon}$ и, вводя n вместо ε в (64,1) и (64,2), получим

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \quad (64,3)$$

Поэтому для скорости u (63,9) получаются два неравенства: $u < c/n$ и $u < cn$, откуда видно, что $u < c$ как при $n > 1$, так и при $n < 1$. Эти неравенства показывают также, что $u > 0$, т. е. групповая скорость направлена в ту же сторону, что и волновой вектор. Это ее свойство вполне естественно, хотя с чисто логической точки зрения отнюдь не обязательно.

Предположим, что область слабого поглощения простирается в некотором широком интервале частот от ω_1 до ω_2 (причем $\omega_2 \gg \omega_1$), и рассмотрим частоты ω такие, что $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Область интегрирования в (62,10) разбивается на две части: $x < \omega_1$ и $x > \omega_2$. В первой из них можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения x по сравнению с ω , а во второй — ω по сравнению с x :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \epsilon''(x) \frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^{\omega_1} x\epsilon''(x) dx, \quad (64,4)$$

т. е. функция $\epsilon(\omega)$ в рассматриваемой области имеет вид $a - b/\omega^2$, где a и b — положительные постоянные. Вторую из них можно выразить через «число дисперсных электронов» N_1 , ответственных за поглощение в области от 0 до ω_1 (ср. (62,14)), и тогда

$$\epsilon(\omega) = a - \frac{4\pi N_1 e^2}{m\omega^2}. \quad (64,5)$$

Из этого выражения следует, в частности, что в достаточно широкой области слабого поглощения диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, проходит через нуль. Напомним в этой связи, что прозрачной в буквальном смысле слова является среда, в которой $\epsilon(\omega)$ не только вещественно, но и положительно; при отрицательном ϵ волна затухает вглубь среды, хотя в ней и не происходит истинной диссипации энергии.

Для частоты, при которой $\epsilon = 0$, индукция D тождественно обращается в нуль и уравнения Максвелла допускают существование переменного электрического поля, удовлетворяющего одному лишь уравнению $\operatorname{rot} E = 0$ при равном нулю магнитном поле. Другими словами, в этом случае возможно существование продольных электрических волн. Для определения скорости их распространения необходимо учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости не только по частоте, но и по волновому вектору. При этом функции последнего станет и то значение ω , при котором $\epsilon = 0$. Благодаря изотропности среды, первый после нулевого член разложения скалярной функции $\omega(\mathbf{k})$ пропорционален k^2 :

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha k^2.$$

Поэтому скорость распространения

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \alpha k$$

пропорциональна первой степени волнового вектора.

З а д а ч а

На границу полупространства ($x > 0$), заполненного прозрачной средой (с $\mu = 1$), падает в нормальном направлении плоская электромагнитная волна с резко обрывающимся передним фронтом. Определить структуру фронта волны, прошедшей внутрь среды (*А. Зоммерфельд и Л. Бриллюэн, 1914*).

Р е ш е н и е. Пусть волна падает на границу среды в момент $t = 0$, так что при $x = 0$ поле падающей волны (E или H)

$$\text{при } t < 0: \quad E = 0; \quad \text{при } t > 0: \quad E \propto e^{-i\omega_0 t}.$$

Разлагая это поле в интеграл Фурье по времени, сведем задачу к падению бесконечно протяженных волн различной частоты на ту же границу. Амплитуда компоненты Фурье с частотой ω пропорциональна

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau.$$

При падении волны с частотой ω прошедшая в среду волна имеет вид

$$a(\omega) e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c} nx},$$

где амплитуда $a(\omega)$ — медленно меняющаяся функция частоты. Поэтому в данном случае поле волны в среде

$$E \propto \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c} nx} \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau.$$

В области вблизи фронта волны в этом интеграле играют роль значения ω , близкие к ω_0 . Вводя новую переменную $\xi = \omega - \omega_0$, заменяем $a(\omega)$ на $a(\omega_0)$, а показатель разлагаем по степеням ξ . Опуская все несущественные постоянные и фазовые множители, получим

$$E \propto \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\xi \left(\tau - t + \frac{x}{u} \right) - \frac{i\xi^2}{2} x \frac{u'}{u^2} \right\} d\xi d\tau,$$

где $u = u(\omega_0)$ — скорость распространения (63,9), а $u' = \left. \frac{du}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}$. Производя интегрирование по $d\xi$, легко привести E к следующему виду:

$$E \propto \int_{\omega}^{\infty} e^{\pm i\eta^2} d\eta, \quad \omega = \frac{x - ut}{\sqrt{2x|u'|}}$$

(знак в показателе зависит от знака u'). Интенсивность же волны вблизи ее

фронта распределена по закону

$$I \propto \left| \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2.$$

Эта формула по виду совпадает с формулой, определяющей распределение интенсивности вблизи края тени при дифракции Френеля¹⁾. При $w > 0$ интенсивность монотонно падает с увеличением w , а при $w < 0$ совершает осцилляции с убывающей амплитудой вокруг постоянного значения, к которому стремится при $w \rightarrow -\infty$ ²⁾.

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 60.

²⁾ На больших расстояниях впереди рассмотренного фронта ему предшествуют так называемые «предвестники», распространяющиеся со скоростью c . Они соответствуют компонентам Фурье с большими частотами, для которых $\epsilon \rightarrow 1$.

ГЛАВА X

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 65. Геометрическая оптика

Условие применимости геометрической оптики ¹⁾ заключается как известно, в малости длины волны λ по сравнению с характеристическими размерами задачи l . Связь геометрической оптики с волновой устанавливается тем, что при $\lambda \ll l$ всякая величина φ , описывающая поле волны (любая из компонент E или H), выражается формулой вида

$$\varphi = ae^{i\psi},$$

где амплитуда a есть медленно меняющаяся функция координат и времени, а фаза ψ — большая величина, являющаяся «почти линейной» функцией координат и времени. Последняя называется в геометрической оптике эйконалом и играет в ней основную роль. Ее производная по времени определяет частоту волны:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega, \quad (65,1)$$

а производные по координатам — волновой вектор:

$$\nabla \psi = \mathbf{k} \quad (65,2)$$

и тем самым — направление лучей в каждой точке пространства.

У монохроматической волны в стационарных условиях частота есть постоянная величина и зависимость эйконала от времени дается слагаемым $-\omega t$. Введем тогда вместо ψ другую функцию ψ_1 (которую тоже будем называть эйконалом) согласно

$$\psi = -\omega t + \frac{i\omega}{c} \psi_1(x, y, z); \quad (65,3)$$

ψ_1 есть функция только от координат, а ее градиент

$$\nabla \psi_1 = \mathbf{n}, \quad (65,4)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 53.

где \mathbf{n} есть вектор, связанный с \mathbf{k} посредством

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (65,5)$$

Абсолютная величина вектора \mathbf{n} равна показателю преломления n среды ¹⁾. Поэтому уравнение эйконала для распространения лучей в среде с показателем преломления $n(x, y, z)$, являющимся заданной функцией координат, есть

$$(\nabla\psi_1)^2 \equiv \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \quad (65,6)$$

Уравнение распространения лучей (в стационарных условиях) может быть получено также из принципа Ферма, согласно которому для траектории луча между двумя заданными точками пространства A и B минимален интеграл $\int_A^B \mathbf{k} d\mathbf{l}$, или, что то же, интеграл

$$\psi_1 = \int_A^B n d\mathbf{l} = \int_A^B n dl.$$

Приравнявая нулю вариацию этого интеграла, имеем

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n \cdot d\mathbf{l} + n\delta dl) = 0.$$

Пусть $\delta\mathbf{r}$ — смещение траектории луча при варьировании. Тогда имеем

$$\delta n = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla n, \quad \delta dl = l d\delta\mathbf{r},$$

где l — единичный вектор касательной к лучу. Подставляя в $\delta\psi_1$ и производя во втором члене интегрирование по частям (учитывая, что в точках A и B $\delta\mathbf{r} = 0$), получим

$$\delta\psi_1 = \int_A^B \delta\mathbf{r} \cdot \nabla n dl + \int_A^B n l d\delta\mathbf{r} = \int_A^B \left(\nabla n - \frac{d(nl)}{dl} \right) \delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(nl)}{dl} = \nabla n. \quad (65,7)$$

Раскрывая производную и подставив $\frac{d\mathbf{n}}{dl} = l \nabla n$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dl}{dl} = \frac{1}{n} [\nabla n - l(l \nabla n)]. \quad (65,8)$$

Это и есть уравнение, определяющее форму лучей.

¹⁾ В геометрической оптике рассматриваются лишь прозрачные среды.

Как известно из дифференциальной геометрии, производная $d\mathbf{l}/dl$ вдоль луча равна \mathbf{N}/R , где \mathbf{N} — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Умножив уравнение (65,8) с обеих сторон на \mathbf{N} и учитывая взаимную перпендикулярность \mathbf{N} и \mathbf{l} , получим

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N} \frac{\nabla n}{n}. \quad (65,9)$$

Луч изгибается в сторону увеличения показателя преломления.

Скорость распространения лучей в геометрической оптике направлена вдоль \mathbf{l} и дается производной

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (65,10)$$

Эту скорость называют также групповой, а отношение ω/k — фазовой скоростью. Надо, однако, иметь в виду, что последняя не соответствует скорости реального физического распространения какой бы то ни было величины.

Легко написать также уравнение, определяющее изменение интенсивности света вдоль луча. Интенсивность I представляет собой абсолютную величину усредненного (по времени) вектора Пойнтинга. Последний направлен вместе с групповой скоростью вдоль \mathbf{l} :

$$\bar{\mathbf{S}} = I\mathbf{l}.$$

В стационарных условиях средняя плотность энергии поля в каждой точке пространства не меняется со временем. Поэтому уравнение сохранения энергии гласит: $\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} = 0$, или

$$\operatorname{div} (I\mathbf{l}) = 0. \quad (65,11)$$

Это и есть искомое уравнение.

Наконец, рассмотрим вопрос о том, как меняется вдоль луча направление поляризации линейно поляризованного света (С. М. Рытов, 1938).

Как известно из дифференциальной геометрии, пространственная кривая (в данном случае луч) характеризуется в каждой своей точке тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами касательной \mathbf{l} , главной нормали \mathbf{N} и бинормали \mathbf{b} (так называемый естественный трехгранник). В силу поперечности электромагнитных волн вектор \mathbf{E} (или \mathbf{H}) лежит всегда в нормальной плоскости — плоскости \mathbf{N} , \mathbf{b} .

Пусть в некоторой точке луча направление \mathbf{E} совпадает с направлением \mathbf{N} , т. е. лежит в соприкасающейся плоскости (плоскость \mathbf{N} , \mathbf{l}). Как известно, отклонение кривой на длине dl от соприкасающейся плоскости является бесконечно малой величиной высшего (третьего) порядка. Поэтому можно утверждать, что при перемещении вдоль луча на расстояние dl вектор \mathbf{E} остается в первоначальной сопри-

касающейся плоскости. Новая же соприкасающаяся плоскость поворачивается относительно старой на угол $d\varphi = dl/T$, где T — радиус кручения кривой. Этому же будет равен, следовательно, угол поворота вектора E по отношению к вектору N в нормальной плоскости. Таким образом, при перемещении вдоль луча направление поляризации вращается в нормальной плоскости так, что его угол с направлением главной нормали меняется согласно уравнению

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{T}. \quad (65,12)$$

В частности, в отсутствие кручения, т. е. когда луч является плоской кривой, направление вектора E в нормальной плоскости остается неизменным, что заранее очевидно из соображений симметрии.

З а д а ч а

Определить скорость распространения света в движущейся (относительно наблюдателя) среде.

Решение. Пусть ω и k — частота и волновой вектор световой волны в неподвижной системе отсчета K , а ω' , k' — те же величины в системе K' , движущейся относительно K вместе с жидкостью со скоростью v . В рассматриваемом ниже первом приближении по v/c движение в направлении, перпендикулярном к k , не отражается на распространении света; поэтому без ограничения общности будем считать, что направления v и k совпадают.

В системе K' жидкость неподвижна, и поэтому ω' и k' связаны соотношением

$$ck' = \omega' n(\omega'). \quad (1)$$

Согласно известным релятивистским формулам преобразования ¹⁾ имеем, с точностью до членов первого порядка по v/c ,

$$\omega' = \omega - kv, \quad k' = k - \frac{\omega}{c^2} v.$$

Подставляя эти выражения в (1) и разлагая функцию $n(\omega')$, получим с той же точностью

$$k = n \frac{\omega}{c} + \frac{v\omega}{c^2} \left(1 - n \frac{d(n\omega)}{d\omega} \right), \quad (2)$$

где $n = n(\omega)$. Для скорости распространения (групповой скорости) найдем отсюда

$$u = u_0 + v \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} \right) - \frac{vn\omega}{c} \frac{du_0}{d\omega}, \quad (3)$$

где $u_0 = c \frac{d}{d\omega} (n\omega)$ — скорость распространения в неподвижной среде. Фазовая же скорость

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Первые два члена в (3) могут быть получены просто путем применения релятивистской формулы сложения скоростей, а третий представляет собой эффект дисперсии (он был рассмотрен Г. А. Лоренцом).

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 47.

§ 66. Отражение и преломление волн

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между двумя однородными средами ¹⁾. Падение происходит из прозрачной среды (среда 1);

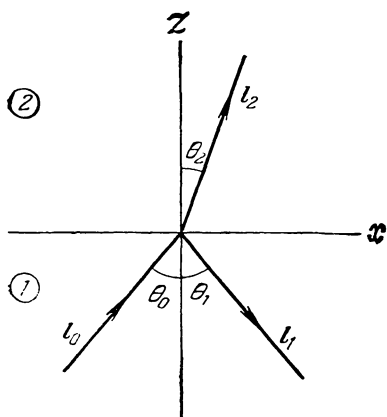


Рис. 31.

для второй же среды предположения о прозрачности пока делать не будем. Будем отмечать величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2 (рис. 31). Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси z (с положительным направлением вглубь среды 2).

Ввиду полной однородности в плоскости $xу$, зависимость решения уравнений поля от этих координат во всем пространстве должна быть одинаковой. Это значит, что компоненты k_x , k_y волнового

вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда следует прежде всего, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости; выберем ее в качестве плоскости xz .

Из равенств

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \quad (66,1)$$

следует для z -компонент этих векторов:

$$\begin{aligned} k_{1z} &= -k_{0z} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0, \\ k_{2z} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}. \end{aligned} \quad (66,2)$$

Вектор k_0 , по определению, вещественен. Вместе с ним вещественен также k_1 . Величина же k_{2z} в поглощающей среде комплексна, причем корень должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\text{Im } k_{2z} > 0$ в соответствии с тем, что преломленная волна затухает вглубь среды 2.

Если прозрачны обе среды, то из равенств (66,1) следуют известные законы отражения и преломления

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (66,3)$$

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн надо обратиться к граничным условиям на поверхности раздела ($x = 0$).

¹⁾ В обеих средах полагаем $\mu = 1$.

При этом мы рассмотрим отдельно два случая — когда электрическое поле E_0 лежит в плоскости падения или перпендикулярно к ней; тем самым мы рассматриваем и общий случай, когда E_0 может быть разложено на две такие компоненты.

Предположим сначала, что E_0 перпендикулярно к плоскости падения; из соображений симметрии очевидно, что то же будет относиться и к полям E_1 и E_2 в отраженной и преломленной волнах. Вектор же H лежит в плоскости x, z . Граничные условия требуют непрерывности $E_y = E$ и H_x ¹⁾; согласно (63,3) $H_x = -\frac{c}{\omega} k_z E_y$.

Поле в среде I есть сумма полей падающей и отраженной волн, так что мы получаем два уравнения:

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2.$$

Экспоненциальные множители в E сокращаются в обеих сторонах равенства ввиду одинаковости k_x (а также частоты ω) во всех трех волнах; ниже под E подразумеваются везде комплексные амплитуды волн. Решение написанных уравнений приводит к следующим, так называемым формулам Френеля:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0, \\ E_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0 = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0. \end{aligned} \quad (66,4)$$

Если прозрачны обе среды, то с помощью соотношений (66,3) можно представить эти формулы в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \\ E_2 &= \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0. \end{aligned} \quad (66,5)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда E лежит в плоскости падения; при этом удобнее производить вычисления для магнитного поля, перпендикулярного к плоскости падения. В результате получаются еще две формулы Френеля:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\epsilon_2 k_{0z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{0z} + \epsilon_1 k_{2z}} H_0 = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \\ H_2 &= \frac{2\epsilon_2 k_{0z}}{\epsilon_1 k_{2z} + \epsilon_2 k_{0z}} H_0 = \frac{2\epsilon_2 \cos \theta_0}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0. \end{aligned} \quad (66,6)$$

¹⁾ Граничные условия для нормальных компонент B и D не дают в данном случае ничего нового, в соответствии с тем, что уравнения $\operatorname{div} B = 0$, $\operatorname{div} D = 0$ являются следствиями уравнений (63,1).

Если прозрачны обе среды, то эти формулы можно представить в виде

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0,$$

$$H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (66,7)$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение среднего (по времени) отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Каждый из этих потоков дается средним значением z -компоненты вектора Пойнтинга (63,11) соответствующей волны:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 |E_1|^2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 |E_0|^2} = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2}.$$

При нормальном падении ($\theta_0 = 0$) оба случая поляризации эквивалентны и коэффициент отражения дается формулой

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2. \quad (66,8)$$

Эта формула справедлива как для прозрачной, так и для поглощающей отражающей среды. Если ввести n_2 и κ_2 согласно $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 + i\kappa_2$, то, например, при падении из пустоты ($\epsilon_1 = 1$) получим

$$R = \frac{(n_2 - 1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + 1)^2 + \kappa_2^2}. \quad (66,9)$$

Дальнейшее обсуждение полученных формул произведем в предположении прозрачности обеих сред. Предварительно сделаем следующее общее замечание. Граница раздела между двумя различными средами представляет собой в действительности не геометрическую поверхность, а тонкий переходный слой. Справедливость формул (66,1) не связана с какими бы то ни было предположениями о характере этого слоя. Вывод же формул Френеля, основанный на использовании условий на границе раздела, предполагает малость толщины переходного слоя δ по сравнению с длиной волны λ . Обычно толщина δ сравнима с межуатомными расстояниями, во всяком случае малыми по сравнению с λ (в противном случае было бы вообще невозможным макроскопическое рассмотрение поля); поэтому и условие $\lambda \gg \delta$ обычно выполняется. В обратном же предельном случае явление преломления имело бы совсем другой характер. При $\delta \gg \lambda$ выполнены условия применимости геометрической оптики (λ мало по сравнению с размерами неоднородностей среды). Поэтому в данном случае можно было бы рассматривать распространение волны как распространение лучей, испытывающих в переходном слое рефракцию, но проходящих через него без всякого отражения. Другими словами, коэффициент отражения был бы равен нулю.

Вернемся к формулам Френеля. При отражении от прозрачной среды коэффициенты пропорциональности между E_1 , E_2 и E_0 в этих формулах вещественны¹⁾. Это значит, что фаза волны либо остается неизменной, либо испытывает скачок на π , смотря по знаку этих коэффициентов. В частности, фаза преломленной волны всегда совпадает с фазой падающей волны. Отражение же может сопровождаться изменением фазы²⁾. Так, при нормальном падении фаза волны не меняется, если $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Если же $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то векторы E_1 и E_0 имеют противоположные знаки, т. е. происходит изменение фазы волны на π .

Коэффициенты отражения при наклонном падении даются согласно (66,5) и (66,7) формулами

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (66,10)$$

Здесь и ниже индексы \perp и \parallel отмечают случаи, когда поле E соответственно перпендикулярно или параллельно плоскости падения. Отметим следующую симметрию: выражения (66,10) не меняются при взаимной замене θ_2 и θ_0 (фазы же отраженных волн при этом меняются, согласно формулам (66,5) и (66,7), на π). Другими словами, коэффициент отражения для волны, падающей из среды 1 под углом θ_0 , равен коэффициенту отражения для волны, падающей из среды 2 под углом θ_2 .

Замечательным свойством обладает отражение света, падающего под таким углом θ_0 , при котором $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ (отраженный и преломленный лучи при этом взаимно перпендикулярны). Обозначим это значение посредством θ_p ; написав $\sin \theta_p = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos \theta_2$ и воспользовавшись законом преломления (66,3), получим

$$\operatorname{tg} \theta_p = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (66,11)$$

При $\theta_0 = \theta_p$ имеем $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2) = \infty$ и R_{\parallel} обращается в нуль. Поэтому при любом направлении поляризации света, падающего под этим углом, отраженный свет будет поляризован так, что электрическое поле в нем перпендикулярно к плоскости падения. Таким же поляризованным будет отраженный свет и при падении естественного света; все компоненты с другой поляризацией при этом вообще не отразятся. Угол θ_p называется углом полной поля-

1) Мы оставляем пока в стороне случай так называемого полного отражения (см. ниже).

2) Отражение от поглощающей среды приводит, вообще говоря, к возникновению эллиптической поляризации. Явные выражения для амплитудных и фазовых соотношений между тремя волнами при этом чрезвычайно громоздки. Их можно найти в книге Стрэттона «Теория электромагнетизма», гл. IX.

ризации или углом Брюстера. Отметим, что, в то время как отражение может приводить к полной поляризации естественного света, в преломленном свете полная поляризация не достигается ни при каком угле падения.

Отражение и преломление поляризованного света всегда приводит снова к плоскополяризованному свету, но с направлением поляризации, вообще говоря не совпадающим с таковым у падающего света. Пусть γ_0 — угол между направлением E_0 и плоскостью падения, а γ_1 и γ_2 — аналогичные углы для отраженной и преломленной волн. С помощью формул (66,5) и (66,7) легко получить соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = - \frac{\cos(\theta_0 - \theta_2)}{\cos(\theta_0 + \theta_2)} \operatorname{tg} \gamma_0, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \cos(\theta_0 - \theta_2) \operatorname{tg} \gamma_0. \quad (66,12)$$

Углы γ_0 , γ_1 , γ_2 совпадают при всех углах падения лишь в очевидных случаях $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi/2$; они совпадают также при нормальном ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) и скользящем ($\theta_0 = \pi/2$) падениях (в последнем случае преломленная волна вообще отсутствует). Во всех же остальных случаях из (66,12) следуют (учитывая, что $0 < \theta_0, \theta_2 < \pi/2$ и полагая, что $0 < \gamma_0 < \pi/2$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$) неравенства

$$\gamma_1 > \gamma_0, \quad \gamma_2 < \gamma_0.$$

Таким образом, направление E при отражении поворачивается от плоскости падения, а при преломлении — к ней.

Сравнение двух формул (66,10) показывает, что при всех углах падения (за исключением только $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$)

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

Поэтому, например, при падении естественного света отраженный свет оказывается частично поляризованным с преимущественным направлением электрического поля, перпендикулярным к плоскости падения. Преломленный же свет будет частично поляризованным с преимущественным направлением E в плоскости падения.

Характер зависимости R_{\parallel} и R_{\perp} от угла падения существенно различен. Коэффициент R_{\perp} монотонно возрастает по мере увеличения θ_0 , начиная от значения (66,8) при $\theta_0 = 0$. Коэффициент же R_{\parallel} , равный тому же значению (66,8) при $\theta_0 = 0$, по мере увеличения θ_0 сначала убывает, обращается в нуль при $\theta_0 = \theta_p$ и лишь затем начинает монотонно возрастать.

При этом надо различать два существенно отличных случая. Если отражение происходит, как говорят, от «оптически более плотной» среды, т. е. $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то возрастание R_{\parallel} и R_{\perp} продолжается вплоть до $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ («скользящее падение»), когда оба достигают значения 1. Если же отражающая среда «оптически менее

плотна», $\epsilon_2 < \epsilon_1$, то оба коэффициента обращаются в 1 уже при угле падения $\theta_0 = \theta_r$, где θ_r определяется равенством

$$\sin \theta_r = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (66,13)$$

и называется предельным углом полного отражения. При $\theta_0 = \theta_r$ угол преломления $\theta_2 = \pi/2$, т. е. преломленная волна распространяется параллельно поверхности раздела.

Отражение под углами $\theta_0 > \theta_r$ от оптически менее плотной среды требует особого рассмотрения. В этом случае k_{2z} (см. (66,2)) чисто мнимо, т. е. поле в преломляющей среде затухает. Затухание волны вглубь среды при отсутствии в ней истинного поглощения (т. е. диссипации энергии) означает, что поток энергии из первой во вторую среду в среднем отсутствует (путем простого вычисления легко непосредственно убедиться в том, что вектор \bar{S} среднего потока энергии во второй среде действительно имеет лишь x -компоненту). Другими словами, вся падающая на границу раздела энергия отражается обратно в первую среду, т. е. коэффициенты отражения

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1.$$

Это явление называется полным отражением¹⁾. В последнем равенстве для R_{\perp} и R_{\parallel} можно убедиться, разумеется, и непосредственно с помощью формул Френеля (66,4) и (66,6).

При $\theta_0 > \theta_r$ коэффициенты пропорциональности между E_1 и E_0 становятся комплексными величинами вида $(a - ib)/(a + ib)$. Величины же R_{\perp} и R_{\parallel} даются квадратами модулей этих коэффициентов, равными единице. Эти формулы, однако, позволяют определить не только отношение абсолютных значений поля в отраженной и падающей волнах, но и разницу в их фазах. Для этого надо представить их в виде

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_{\parallel}} E_{0\parallel}.$$

Имеем²⁾

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 (\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2)}}{\epsilon_2 \cos \theta_0}. \quad (66,14)$$

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным, вообще говоря, для компонент поля, параллельной и перпендикулярной к плоскости падения. Поэтому при отражении волны, поляризованной в плоскости, наклонной к плоскости

¹⁾ Упомянем, что коэффициент отражения всегда равен единице при отражении от среды с вещественным, но отрицательным ϵ . В такой среде тоже нет истинного поглощения, но волна не может проникнуть вглубь нее.

²⁾ Если $\frac{a - ib}{a + ib} = e^{-i\delta}$, то $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}$.

падения, отраженная волна будет эллиптически поляризована¹⁾. Для разности фаз $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ легко получается выражение

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \theta_0}}. \quad (66,15)$$

Эта разность обращается в нуль лишь при $\theta_0 = \theta_r$ и $\theta_0 = \pi/2$.

З а д а ч и

1. Найти закон обращения коэффициента отражения в 1 вблизи угла полного отражения.

Решение. Полагаем $\theta_0 = \theta_r - \delta$, где δ — малая величина, и разлагаем в формулах (66,10) $\sin \theta_0$ и $\cos \theta_0$ по степеням δ . В результате получаем:

$$R_{\perp} = 1 - 4 \sqrt{2\delta} (n^2 - 1)^{-1/4},$$

$$R_{\parallel} = 1 - 4 \sqrt{2\delta} n^2 (n^2 - 1)^{-1/4},$$

где $n^2 = \epsilon_1/\epsilon_2 > 1$. Производные $dR/d\delta$ обращаются при $\delta \rightarrow 0$ в бесконечность как $\delta^{-1/2}$.

2. Найти коэффициент отражения при почти скользющем падении света из пустоты на поверхность тела с близким к 1 значением ϵ .

Решение. Формулы (66,10) дают одинаковый коэффициент отражения:

$$R_{\perp} \cong R_{\parallel} \cong \frac{(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \epsilon - 1})^4}{(\epsilon - 1)^2},$$

где $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$.

3. Определить коэффициент отражения при падении волны из пустоты на границу среды с отличными от единицы ϵ и μ .

Решение. Вычисления, полностью аналогичные произведенным в тексте, приводят к результату:

$$R_{\perp} = \left| \frac{\mu \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0}}{\mu \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0}} \right|^2,$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0}}{\epsilon \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0}} \right|^2.$$

4. Плоскопараллельный слой вещества 2 находится между вакуумом (среда 1) и произвольной средой 3. Из вакуума на слой падает свет, поляризованный в плоскости падения (или перпендикулярно к ней). Выразить коэффициент отражения от слоя R через коэффициенты отражения при падении света на полубесконечную среду 2 или 3.

Решение. Обозначим посредством A_0 и A_1 амплитуды поля (E или H — смотря по тому, какой из этих векторов параллелен плоскости слоя) в падающей и отраженной волнах. Поле в слое складывается из преломленной волны (амплитуда A_2) и волны, отраженной от границы 2—3 (амплитуда A_2'). Граничное условие на поверхности 1—2 дает равенство вида

$$A_2' = a (A_1 - r_{12} A_0), \quad (1)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 48.

где a и r_{12} — постоянные. При отражении от полубесконечной среды 2 волна A_2' отсутствует, так что (1) дает $r_{12} = A_1/A_0$, т. е. r_{12} есть амплитуда отражения для этого случая. Еще одно уравнение получается из (1) перестановкой A_1 с A_0 и заменой A_2' на A_2 , что соответствует просто изменению знака z -компонент волнового вектора:

$$A_2 = a(A_0 - r_{12}A_1). \quad (2)$$

В среде 3 имеется только одна (прошедшая) волна. Для ее амплитуды A_3 имеем условия

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \quad A_2' e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \quad (3)$$

(аналогичные условиям (1), (2) с $A_1 = 0$); экспоненциальные множители учитывают изменение фазы волны на толщине слоя h , причем

$$\psi = \frac{\omega}{c} h \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0}. \quad (4)$$

Исключая из уравнений (3) A_3 , имеем

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23}A_2 e^{i\psi} \quad (5)$$

($r_{23} = -r_{32}$).

Из уравнений (1), (2), (5) найдем амплитуду отражения от слоя:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}} \quad (6)$$

(коэффициент отражения $R = |r|^2$). Смысл постоянной r_{23} выясняется из того, что при $h = 0$ r должно совпадать с амплитудой отражения r_{13} от полубесконечной среды 3; отсюда находим

$$r_{23} = \frac{r_{12} - r_{13}}{r_{12}r_{13} - 1}. \quad (7)$$

Формулы (6), (7) решают поставленную задачу. Подчеркнем, что их вывод не связан с какими-либо предположениями о свойствах сред 2 и 3, которые могут быть как прозрачными, так и поглощающими.

Если среды 2 и 3 прозрачны, то все величины ψ , r_{12} , r_{13} вещественны, а r_{23} представляет собой амплитуду отражения на границе между полубесконечными средами 2 и 3. Из (6) имеем при этом

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \psi}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \psi}. \quad (8)$$

При изменении ψ эта величина меняется в пределах между

$$\left(\frac{r_{12} + r_{23}}{r_{12}r_{23} + 1} \right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{r_{12} - r_{23}}{r_{12}r_{23} - 1} \right)^2.$$

При нормальном падении света $r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, и аналогичные соотношения имеют место для r_{13} и r_{23} . Если $n_2^2 = n_1 n_3$, то $r_{12} = r_{23}$ и при соответствующем выборе толщины слоя R может обратиться в нуль.

Если среда 3 является вакуумом, то $r_{13} = 0$, $r_{23} = -r_{12}$ и из (6) имеем

$$r = \frac{r_{12}(e^{-2i\psi} - 1)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = - \frac{\text{sh } i\psi}{\text{sh } [i\psi + \ln(-r_{12})]}. \quad (9)$$

Если при этом среда 2 прозрачна, то

$$R = \frac{4R_{12} \sin^2 \psi}{(1 - R_{12})^2 + 4R_{12} \sin^2 \psi}.$$

Коэффициент прохождения D через слой (из вакуума в вакуум) совпадает с $1 - R$, лишь если среда 2 прозрачна. В противном случае для вычисления D надо исходить из уравнений (1) — (3), положив в них $r_{32} = r_{12}$ «Амплитуда прохождения» d равна:

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-i\psi} - r_{12}^2 e^{i\psi}}, \quad (10)$$

а коэффициент прохождения $D = |d|^2$.

5. Определить коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении света на пластинку с очень большой комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ .

Решение. В этом случае

$$r_{12} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}} \approx -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\right),$$

и согласно формуле (9) предыдущей задачи

$$r = -\frac{1}{1 - (2/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{cth} i\psi}, \quad \psi = \frac{\omega}{c} h \sqrt{\epsilon}.$$

Если пластинка настолько тонка, что $h\omega/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}$, то можно написать

$$r = -\frac{1}{1 + (2ic/\epsilon\omega h)}.$$

При этом можно еще различать два случая:

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{1}{|\epsilon|} \ll \frac{\omega}{c} h \ll \frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}} & \quad R = 1 - \frac{4c}{\omega h} \frac{\epsilon''}{|\epsilon|^2}, \\ \text{при } \frac{\omega}{c} h \ll \frac{1}{|\epsilon|} & \quad R = \frac{\omega^2 h^2}{4c^2} |\epsilon|^2. \end{aligned}$$

Для коэффициента прохождения имеем согласно формуле (10)

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{\omega}{c} h \sim \frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}} & \quad d = -\frac{2}{\sqrt{\epsilon} \operatorname{sh} i\psi}, \\ \text{при } \frac{\omega}{c} h \ll \frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}} & \quad d = \frac{1}{1 - i\epsilon\omega h/2c}. \end{aligned}$$

В последнем случае можно еще различать

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\epsilon|} \ll \frac{\omega}{c} h \ll \frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}} & \quad D = \frac{4c^2}{\omega^2 h^2 |\epsilon|^2}, \\ \frac{\omega}{c} h \ll \frac{1}{|\epsilon|} & \quad D = 1 - \frac{\epsilon''\omega h}{c}. \end{aligned}$$

§ 67. Поверхностный импеданс металлов

Диэлектрическая проницаемость металлов по своей абсолютной величине при не слишком больших частотах велика по сравнению с 1 (при $\omega \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности как $1/\omega$). В этих

условиях «длина волны» $\delta \sim c/\omega \sqrt{|\varepsilon|}$ в металле¹⁾ мала по сравнению с длиной волны $\lambda \sim c/\omega$ в пустоте. Если при этом δ (но не обязательно λ) мала также и по сравнению с радиусами кривизны поверхности металла, то этим обстоятельством можно воспользоваться для существенного упрощения задачи об отражении произвольных электромагнитных волн от металла.

Малость δ означает, что производные от компонент поля внутри металла в направлении нормали к поверхности велики по сравнению с производными в тангенциальных направлениях. Поэтому поле внутри металла вблизи поверхности можно рассматривать как поле плоской волны и, соответственно, поля E_t и H_t связаны друг с другом соотношением

$$E_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [H_t n], \quad (67,1)$$

где n — нормаль к поверхности, направленная внутрь металла. Поскольку, с другой стороны, E_t и H_t непрерывны, то таким же соотношением должны быть связаны их значения для поля вне металла у его поверхности. Равенством (67,1) можно воспользоваться (как было указано *М. А. Леонтовичем*, 1948) в качестве граничного условия при определении поля вне проводника. Таким образом, внешнюю электромагнитную задачу можно решать, совершенно не рассматривая поля внутри металла.

Величину $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ называют поверхностным импедансом металла; мы будем обозначать ее посредством $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ ²⁾:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (67,2)$$

В области частот, для которых ε выражается через обычную проводимость металла, имеем

$$\zeta = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}. \quad (67,3)$$

Среднее (по времени) значение потока энергии через поверхность металла есть

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_t H_t^*] = \frac{c\zeta'}{8\pi} |H_t|^2 n. \quad (67,4)$$

1) Большие значения $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ практически всегда являются комплексными. При этом электромагнитное поле затухает вглубь тела, так что «длина волны» в нем является в то же время «глубиной проникновения» поля. Если $\varepsilon(\omega)$ выражается через проводимость σ (согласно (58,9)), то эта величина совпадает с глубиной проникновения, введенной в § 45.

2) Обычно поверхностным импедансом называют величину, отличающуюся от ζ множителем $4\pi/c$; мы, однако, находим такое обозначение неудобным.

Этот поток представляет собой энергию, втекающую извне внутрь металла и диссипирующуюся в нем. Отсюда видно, в частности, что должно быть

$$\zeta' > 0. \quad (67,5)$$

Этим неравенством устанавливается знак корня (67,2).

При увеличении частоты глубина проникновения δ сравнивается по порядку величины с длиной свободного пробега l электронов проводимости¹⁾. В таком случае пространственная неоднородность поля делает невозможным его макроскопическое описание с помощью диэлектрической проницаемости ϵ (на существование связанных с этим явлений впервые указал Г. Лондон, 1940). Любопытно, что при этом еще не нарушается условие $v/l \gg \omega$ (v — скорость электронов проводимости), обеспечивающее отсутствие дисперсии проводимости, которая остается равной своему значению σ для постоянного тока.

Весьма существенно, что граничное условие вида

$$E_t = \zeta [H_t n] \quad (67,6)$$

справедливо и при таких частотах. При этом поле внутри металла вблизи его поверхности можно по-прежнему рассматривать как плоскую волну, хотя она и не описывается теперь обычными макроскопическими уравнениями Максвелла. В такой волне поля E и H должны быть связаны друг с другом линейным соотношением, а единственно возможный вид линейного соотношения между полярным вектором H и аксиальным вектором E есть (67,6). Коэффициент ζ в этом соотношении есть единственная величина, характеризующая свойства металла, которую надо знать для решения внешней электромагнитной задачи.

При дальнейшем увеличении частоты (обычно в инфракрасной области) вновь становится возможным макроскопическое описание поля и понятие ϵ вновь приобретает смысл. Причина этого явления заключается в том, что, поглощая большой квант $\hbar\omega$, электрон проводимости приобретает большую энергию, в результате чего длина его пробега уменьшается, так что снова выполняется неравенство $l \ll \delta$. Импеданс ζ снова становится величиной, обратно пропорциональной $\sqrt{\epsilon^{-2}}$. В этой области частот $\epsilon(\omega)$ имеет большую отрицатель-

¹⁾ Длина пробега существенно зависит от температуры металла. Фактически речь идет обычно об очень низких температурах в гелиевой области, а рассматриваемые явления возникают в диапазоне ультракоротких радиочастот.

²⁾ Следует, однако, помнить, что пользоваться равенством (67,6) в качестве граничного условия можно лишь до тех пор, пока $|\epsilon|$ велико (т. е. ζ мало); это условие, во всяком случае, не удовлетворяется уже при оптических частотах. Мы предполагаем, что $\mu \sim 1$; тогда большим $|\epsilon|$ соответствуют малые ζ . Укажем, что если $\mu \gg 1$, то неравенство $\delta \ll \lambda$, необходимое для применимости граничного условия (67,6), означает, что должно быть $\sqrt{\mu\epsilon} \gg 1$; при этом $\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ может и не быть малым.

ную вещественную и малую мнимую части. Неравенство $l \ll \delta$ является условием того, что имеют макроскопический смысл обе величины ϵ' и ϵ'' . Для того чтобы имела макроскопический смысл лишь большая величина ϵ' , достаточно, однако, выполнения более слабого условия $v/\omega \ll \delta$, где v — скорость электронов проводимости в металле (его наблюдение позволяет рассматривать движение электронов, пренебрегая пространственной неоднородностью поля).

Неравенство $\zeta' > 0$ справедливо для вещественной части импеданса в любом случае. Если же имеет место формула (67,2), то можно высказать некоторые суждения и о знаке мнимой части ζ . Так, если дисперсия ϵ более существенна, чем дисперсия μ (т. е. μ можно считать вещественной величиной), то из $\epsilon'' > 0$ следует $\zeta'\zeta'' < 0$, а поскольку всегда $\zeta' > 0$, то

$$\zeta'' < 0.$$

Это — наиболее обычный случай. Если же дисперсия ζ определяется дисперсией μ , то тем же путем найдем, что $\zeta'' > 0$.

Понятие об импедансе может быть применено и к сверхпроводникам. Характерной особенностью последних является существование в них малой глубины проникновения δ и в статическом случае ($\omega = 0$). При не слишком больших частотах можно принять, что распределение магнитного поля совпадает со статическим. Для определения же электрического поля пишем уравнение

$$\text{rot } \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}.$$

Направим ось z по внешней нормали к поверхности сверхпроводника. Пренебрегая производными в тангенциальных направлениях по сравнению с большими производными по z , имеем

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} H_y$$

(и аналогично для E_y). Интегрируем это равенство по глубине z внутри тела:

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^0 H_y dz;$$

$E_x(0)$ — значение E_x при $z = 0$, т. е. на поверхности тела. Определим глубину проникновения количественно следующим образом:

$$\int_{-\infty}^0 H_y dz = H_y(0) \delta. \quad (67,7)$$

Тогда

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} H_y(0) \delta.$$

Сравнивая с граничным условием вида (67,6), находим, что импеданс сверхпроводника (в рассматриваемой области не слишком больших частот ¹⁾) дается формулой

$$\zeta = -i \frac{\omega}{c} \delta. \quad (67,8)$$

Это выражение представляет собой первый член разложения $\zeta(\omega)$ по степеням частоты, которое, таким образом, начинается у сверхпроводников с члена, пропорционального ω . Следующий член разложения пропорционален ω^2 и вещественен; это есть первый член разложения ζ' .

Импеданс $\zeta(\omega)$, рассматриваемый как функция комплексного переменного ω , обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам функции $\epsilon(\omega)$ (В. Л. Гинзбург, 1954). Граничное условие, которое для монохроматической волны имеет вид (67,6), в общем случае надо понимать как операторное соотношение

$$E_t = \hat{\zeta} [H_t n], \quad (67,9)$$

выражающее значение E_t в некоторый момент времени через значения H_t во все предыдущие моменты времени (ср. § 58). Так же как и в § 62, отсюда следует, что функция $\zeta(\omega)$ не имеет особых точек в верхней полуплоскости ω , включая вещественную ось (кроме только точки $\omega = 0$). Далее, условие вещественности E_t при вещественном H_t приводит к соотношению

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

Наконец, поскольку диссипация энергии определяется вещественной (а не мнимой, как у $\epsilon(\omega)$) частью функции $\zeta(\omega)$, то $\zeta'(\omega)$ положительно и не обращается в нуль ни при каком вещественном значении ω , за исключением только значения $\omega = 0$. Рассуждения, аналогичные проведенным в § 62, позволяют затем сделать вывод, что

$$\operatorname{Re} \zeta(\omega) > 0$$

также и во всей верхней полуплоскости. Отсюда следует, в частности, что $\zeta(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Отсутствие у $\zeta(\omega)$ особых точек в верхней полуплоскости снова приводит к формулам Крамерса — Кронига. При этом в особенности существенна формула

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega} dx.$$

¹⁾ Фактически идет речь о частотах примерно до сантиметрового диапазона радиоволн.

Воспользовавшись четностью функции $\zeta'(x)$, ее можно переписать в виде

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x)-1}{x+\omega} dx$$

или

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x)}{x^2-\omega^2} dx \quad (67,10)$$

(1 в числителе подынтегрального выражения можно опустить, поскольку главное значение интеграла от $1/(x^2-\omega^2)$ все равно есть нуль).

Все сказанное о функции $\zeta(\omega)$ в той же степени относится, разумеется, и к обратной функции $1/\zeta(\omega)$; оператор ζ^{-1} выражает $[H_t n]$ через E_t . В частности, вместо (67,10) будем иметь

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2} dx. \quad (67,11)$$

При малых ζ эта формула может быть более удобной для использования, чем (67,10). В написанном виде, однако, она неприменима к сверхпроводникам, у которых ζ^{-1} имеет согласно (67,8) при $\omega=0$ полюс. Простое видоизменение вывода (ср. переход от (62,9) к (62,11)) приводит при этом к формуле

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2} dx + \frac{c}{\omega^3}. \quad (67,12)$$

В заключение этого параграфа в качестве примера использования понятия импеданса рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны, падающей из пустоты на плоскую поверхность металла с поверхностным импедансом ζ . Если вектор E поляризован перпендикулярно к плоскости падения, то граничное условие (67,6) дает

$$E_0 + E_1 = \zeta(H_0 - H_1) \cos \theta_0 = \zeta(E_0 - E_1) \cos \theta_0$$

(обозначения те же, что и в § 66). Отсюда имеем, учитывая малость ζ ,

$$\frac{E_1}{E_0} = -(1 - 2\zeta \cos \theta_0)$$

и коэффициент отражения

$$R_{\perp} = 1 - 4\zeta' \cos \theta_0. \quad (67,13)$$

Если же E_0 лежит в плоскости падения, то граничное условие пишем в виде $\zeta H_t = [nE_t]$, т. е.

$$\zeta(H_0 + H_1) = (E_0 - E_1) \cos \theta_0 = (H_0 - H_1) \cos \theta_0,$$

откуда коэффициент отражения

$$R_{||} = \left| \frac{\cos \theta_0 - \zeta}{\cos \theta_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67,14)$$

При углах падения, не слишком близких к $\pi/2$,

$$R_{||} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos \theta_0}. \quad (67,15)$$

Если же угол $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \ll 1$, то

$$R_{||} = \left| \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67,16)$$

Это выражение имеет при $\varphi_0 = |\zeta|$ минимум, равный

$$R_{||} = (|\zeta| - \zeta') / (|\zeta| + \zeta').$$

За исключением особого случая (67,16), коэффициент отражения от поверхности с малым ζ близок к единице. Поверхность с $\zeta \rightarrow 0$ (или, как говорят, «идеально проводящая» поверхность) является в то же время «идеально отражающей». Граничное условие на такой поверхности гласит просто $E_t = 0$, аналогично условию для электростатического поля на поверхности проводника. Но в отличие от случая постоянного поля, в переменном поле это условие автоматически влечет за собой выполнение также и определенного условия для магнитного поля. Именно, в силу уравнения $(i\omega/c)H = \text{rot } E$ из равенства $E_t = 0$ на поверхности следует равенство $H_n = 0$. Таким образом, на «идеально проводящей» поверхности в переменном электромагнитном поле обращается в нуль нормальная составляющая магнитного поля. В этом смысле такая поверхность аналогична поверхности сверхпроводника в постоянном магнитном поле.

Задача

Определить интенсивность теплового излучения (заданной частоты) от плоской поверхности с малым импедансом.

Решение. Согласно закону Кирхгофа, интенсивность dI теплового излучения (в элемент телесного угла $d\omega$) от произвольной поверхности связана с интенсивностью излучения от поверхности абсолютно черного тела dI_0 соотношением $dI = (1 - R) dI_0$, где R — коэффициент отражения от данной поверхности для естественного света. Вычисляя $R = 1/2(R_{\perp} + R_{||})$ с помощью формул (67,13) и (67,14) и учитывая изотропию излучения с поверхности абсолютно черного тела ($dI_0 = I_0 d\omega/2\pi$), получим

$$I = 2I_0 \zeta' \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta + 2\zeta' \cos \theta + \zeta'^2 + \zeta'^2} \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Производя интегрирование и опуская члены высшего порядка по ζ , находим

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left[\ln \frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \operatorname{arctg} \frac{\zeta''}{\zeta'} \right].$$

В частности, для металла с импедансом, определяемым формулой (67,3), имеем ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left[\ln \frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{\pi}{2} \right].$$

§ 68. Распространение волн в неоднородной среде

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в электрически неоднородной (но изотропной) среде ¹⁾. В уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\varepsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E}$$

(полагаем везде $\mu = 1$) ε есть функция координат точки. Подставив \mathbf{H} из первого уравнения во второе, получим для \mathbf{E} уравнение

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (68,1)$$

Исключение же \mathbf{E} дает для \mathbf{H} уравнение

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon} [\nabla \varepsilon \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}] = 0. \quad (68,2)$$

Эти уравнения существенно упрощаются в «одномерном» случае, когда ε меняется лишь в одном направлении в пространстве. Выберем это направление в качестве оси z и рассмотрим волну, направление распространения которой лежит в плоскости xz . В такой волне все величины не зависят вовсе от координаты y , а ввиду однородности пространства вдоль оси x можно рассматривать зависимость от x , даваемую множителем e^{ikx} с постоянным k . При $k = 0$ поле зависит только от z , т. е. речь идет о «нормальном» прохождении волны через слой вещества с $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Если же $k \neq 0$, то говорят о наклонном прохождении волны.

При этом надо различать (при $k \neq 0$) два независимых случая поляризации. В одном из них вектор \mathbf{E} перпендикулярен к плоскости распространения волны (т. е. направлен вдоль оси y), а магнитное поле \mathbf{H} соответственно лежит в этой плоскости. Уравнение (68,1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbf{E} = 0. \quad (68,3)$$

В другом случае вдоль оси y направлено поле \mathbf{H} , а \mathbf{E} лежит в плоскости распространения. В этом случае удобнее исходить из

¹⁾ О распространении волн в анизотропной (в связи с наличием постоянного магнитного поля) среде см. книгу Я. Л. Альперта, В. Л. Гинзбурга и Е. Л. Фейнберга «Распространение радиоволн», М.—Л., 1953.

уравнения (68,2), которое дает

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\chi^2}{\epsilon} \right) H = 0. \quad (68,4)$$

Будем условно называть эти два типа волн соответственно E - и H -волнами.

Уравнения могут быть решены в общем виде в важном случае, когда условия распространения близки к условиям геометрической оптики; функцию $\epsilon(z)$ предполагаем ниже вещественной¹⁾. В уравнении (68,3) величина $2\pi/\sqrt{f}$, где

$$f(z) = \epsilon k^2 - \chi^2,$$

играет роль «длины волны» в направлении оси z . Приближению геометрической оптики соответствует неравенство

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1, \quad (68,5)$$

а два независимых решения уравнения (68,3) имеют вид

$$\frac{\text{const}}{f^{1/4}} e^{\pm i \int \sqrt{f} dz}. \quad (68,6)$$

Условие (68,5) заведомо нарушается вблизи точки (если таковая имеется), в которой $f=0$. Пусть это есть точка $z=0$, причем $f>0$ при $z<0$ и $f<0$ при $z>0$. На достаточно больших расстояниях по обе стороны от точки $z=0$ решение уравнения (68,3) имеет вид (68,6), но для того, чтобы установить соответствие между коэффициентами в этом решении в областях $z>0$ и $z<0$, надо исследовать точное решение уравнения (68,3) вблизи $z=0$. В окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно разложить по степеням z и представить в виде $f=-\alpha z$. Решение уравнения

$$\frac{d^2 E}{dz^2} - \alpha z E = 0,$$

конечное при всех z , есть

$$E = \frac{A}{\alpha^{1/4}} \Phi(\alpha^{1/2} z), \quad (68,7)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + u\xi\right) du$$

¹⁾ Уравнение (68,3) имеет формальное сходство с уравнением Шредингера для одномерного движения частицы в квантовой механике, а приближению геометрической оптики соответствует квазиклассический случай. Ниже мы приводим окончательные результаты, отсылая за выводом их к курсу квантовой механики (см. «Квантовая механика», гл. VII).

есть так называемая функция Эйри (множитель $e^{-i\omega t + izx}$ в E везде опускаем). Асимптотический же вид решения уравнения (68,3) при больших $|z|$ есть

$$E = \frac{A}{f^{1/4}} \cos \left(\int_0^z \sqrt{f} dz + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{при } z < 0, \quad (68,8)$$

$$E = \frac{A}{2|f|^{1/4}} e^{-\int_0^z \sqrt{|f|} dz} \quad \text{при } z > 0,$$

с тем же коэффициентом A , что и в (68,7). Первое из этих выражений представляет собой стоячую волну, получающуюся в результате наложения падающей (в положительном направлении оси z) волны и волны, отраженной от плоскости $z=0$. Амплитуды этих волн одинаковы (и равны $A/2f^{1/4}$), т. е. коэффициент отражения равен единице. В область $z > 0$ проникает лишь экспоненциально затухающее поле.

При приближении к точке отражения амплитуда волны возрастает, как это видно уже из наличия $f^{1/4}$ в знаменателе в (68,8). Для определения величины поля в непосредственной близости этой точки надо, однако, воспользоваться выражением (68,7). Эта функция монотонно убывает вглубь области $z > 0$ и имеет осциллирующий характер в области $z < 0$, причем величина максимумов $|E|$ постепенно убывает. Первый, наибольший из максимумов достигается при $\alpha^{1/2}z = -1,02$ и равен

$$E = 0,949 \cdot A z^{-1/6}.$$

До сих пор мы писали решения для E -волн. Легко видеть, что в приближении геометрической оптики вполне аналогичные формулы могут быть написаны и для H -волн. Если сделать в уравнении (68,4) подстановку $H = u \sqrt{\epsilon}$, то производные от ϵ войдут умноженными только на u (но не на u'); пренебрегая затем членами, содержащими эти производные (малыми в силу условия (68,5)), получим для функции $u(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - k^2 \right) u = 0,$$

совпадающее с уравнением (68,3). Поэтому все формулы для H отличаются от формул (68,6) — (68,8) лишь множителем $\sqrt{\epsilon}$.

Своеобразное отличие в поведении обоих типов волн возникает при отражении наклонно ($\alpha \neq 0$) падающей волны от слоя вещества, в котором $\epsilon(z)$ проходит через нуль. Отражение происходит при этом от плоскости, на которой $f(z) = \epsilon k^2 - k^2 = 0$, т. е. «не доходя» до точки $\epsilon = 0$. E -волна проникает за эту плоскость лишь в виде экспоненциально затухающего поля. При отражении же H -волны на

общем фоне такого затухающего поля возникает вблизи точки $\epsilon = 0$ резкое усиление поля (см. задачу 1 к этому параграфу) ¹⁾.

Задачи

1. Определить электрическое поле вблизи точки, где $\epsilon = 0$, при отражении наклонно ($\chi \neq 0$) падающей H -волны.

Решение. Пусть $\epsilon = 0$ в точке $z = 0$; вблизи этой точки пишем $\epsilon = az$, и уравнение (68,4) принимает вид

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dH}{dz} + (ak^2 z - \chi^2) H = 0.$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений одно из решений этого уравнения (назовем его $H_1(z)$) не имеет особенности при $z = 0$, а его разложение по степеням z начинается с члена z^2 :

$$H_1(z) = z^2 + \frac{\chi^2}{8} z^4 - \frac{ak^2}{15} z^6 + \dots$$

Второе независимое решение обладает логарифмической особенностью, а его разложение имеет вид:

$$H_2(z) = H_1(z) \ln(\chi z) + \frac{2}{\chi^2} - \frac{2k^2 a}{3\chi^2} z^3 + \dots$$

Поле $H(z)$ составляется из обоих этих решений и, таким образом, стремится при $z \rightarrow 0$ к постоянной (обозначим ее H_0). Главные же члены в составляющих электрического поля

$$E_x = -\frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial z} \cong -\frac{i\chi^2 H_0}{ak} \ln(\chi z),$$

$$E_z = \frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\chi}{\epsilon k} H \cong -\frac{\chi H_0}{ak} \frac{1}{z},$$

т. е. обращаются при $z \rightarrow 0$ в бесконечность. В действительности, разумеется благодаря непременному наличию в среде хотя бы малого поглощения (т. е. не обращаемой в нуль мнимой части ϵ) поле достигает лишь относительно (по сравнению с окружающим слабым фоном) больших, но конечных значений.

2. По границе раздела между двумя средами соответственно с положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями (ϵ_1 и $-\epsilon_2$) может распространяться «поверхностная» H -волна, затухающая вглубь обеих сред. Определить связь между ее частотой и волновым вектором.

Решение. Выберем границу раздела в качестве плоскости xu , причем волна распространяется вдоль оси x , а поле H параллельно оси y . Пусть полупространство $z > 0$ заполнено средой с положительной (ϵ_1), а полупространство $z < 0$ — средой с отрицательной (ϵ_2) проницаемостью. Ищем поле в затухающей при $z \rightarrow \pm \infty$ волне в виде

$$H_1 = H_0 e^{ikx - \chi_1 z}, \quad \chi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1} \quad \text{при } z > 0,$$

$$H_2 = H_0 e^{ikx + \chi_2 z}, \quad \chi_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\epsilon_2|} \quad \text{при } z < 0,$$

¹⁾ Отметим, что эта точка является особой для уравнения (66,4), и потому вблизи нее приближенно геометрической оптики становится неприменимым, несмотря на то, что $f(z)$ не обращается в нуль и условие (66,5) может не нарушаться.

причем k , κ_1 , κ_2 вещественны. Граничное условие непрерывности $H_y = H$ уже удовлетворено, а условие непрерывности E_x дает

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

или $\kappa_1/\epsilon_1 = \kappa_2/|\epsilon_2|$. Это равенство может быть выполнено лишь при условии

$$\epsilon_1 < |\epsilon_2|$$

(и подразумеваемомся $\epsilon_1 \epsilon_2 < 0$). При этом связь между k и ω дается уравнением

$$k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 |\epsilon_2|}{c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1)}.$$

Распространение же «поверхностных» E -волн, как легко убедиться, вообще невозможно.

§ 69. Принцип взаимности

Излучение монохроматических электромагнитных волн от источника, представляющего собой тонкий провод, расположенный в произвольной среде, описывается уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}}, \quad (69,1)$$

где $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ — плотность протекающих по проводу «сторонних» (по отношению к среде) периодических токов.

Пусть в среде расположены два различных источника (одинаковой частоты); будем отмечать индексами 1 и 2 поля, создаваемые каждым из этих источников в отдельности. Среда может быть произвольным образом неоднородна и анизотропна. Единственное, что предполагается ниже о ее свойствах, это — линейные соотношения $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, $B_i = \mu_{ik} H_k$ с симметричными тензорами ϵ_{ik} и μ_{ik} . В этих условиях оказывается возможным получить определенное соотношение, связывающее между собой поля обоих источников и сторонние токи в них.

Умножим оба уравнения

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_1 &= ik \mathbf{B}_1, \\ \text{rot } \mathbf{H}_1 &= -ik \mathbf{D}_1 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)} \end{aligned}$$

соответственно на \mathbf{H}_2 и \mathbf{E}_2 , а такие же уравнения для поля \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 — на $-\mathbf{H}_1$ и $-\mathbf{E}_1$. Сложив почленно все эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 \text{ rot } \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \text{ rot } \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \text{ rot } \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \text{ rot } \mathbf{E}_2) = \\ = i \frac{\omega}{c} (\mathbf{B}_1 \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2) + i \frac{\omega}{c} (\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \mathbf{E}_2) + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)} \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)} \mathbf{E}_1). \end{aligned}$$

Но $\mathbf{B}_1 \mathbf{H}_2 = \mu_{ik} H_{1k} H_{2i} = \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 \mathbf{E}_2$, так что два первых

члена в правой стороне равенства обращаются в нуль. Левая же сторона преобразуется по известной формуле векторного анализа, и мы находим

$$\operatorname{div} \{[E_1 H_2] - [E_2 H_1]\} = \frac{4\pi}{c} (j_{\text{ст}}^{(1)} E_2 - j_{\text{ст}}^{(2)} E_1).$$

Проинтегрируем это равенство по всему пространству; интеграл в левой стороне равенства преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и исчезает. Поэтому получим

$$\int j_{\text{ст}}^{(1)} E_2 dV_1 = \int j_{\text{ст}}^{(2)} E_1 dV_2. \quad (69,2)$$

Интегралы в левой и правой сторонах берутся соответственно лишь по объемам первого и второго источников, так как только в них отличны от нуля токи $j_{\text{ст}}^{(1)}$ и $j_{\text{ст}}^{(2)}$. Ввиду тонкости проводов влиянием каждого из них на поле другого провода можно пренебречь, и, таким образом, E_1 и E_2 в формуле (69,2) представляют собой поля излучений первого и второго источников, создаваемые каждым из них в месте нахождения другого источника, как если бы последнего не было. Формула (69,2) и является искомым соотношением, известным под названием теоремы взаимности.

Если размеры источников малы по сравнению с длиной волны, а также по сравнению с их взаимным расстоянием, то выражение теоремы взаимности можно упростить. Поле каждого источника слабо меняется на протяжении размеров другого источника, и в (69,2) можно вынести E_1 и E_2 из-под знаков интеграла, написав их просто как $E_1(2)$ и $E_2(1)$, где 1 и 2 обозначают точки нахождения обоих источников:

$$E_2(1) \int j_{\text{ст}}^{(1)} dV_1 = E_2(2) \int j_{\text{ст}}^{(2)} dV_2.$$

Интеграл $\int j_{\text{ст}} dV$ есть не что иное, как производная по времени от полного дипольного момента источника \mathcal{P} . Поскольку $\dot{\mathcal{P}} = -i\omega\mathcal{P}$, то окончательно имеем

$$E_2(1) \mathcal{P}_1 = E_1(2) \mathcal{P}_2. \quad (69,3)$$

Такая форма теоремы взаимности применима, разумеется, лишь к дипольному излучению. Если же дипольный момент источника равен нулю (или аномально мал), то приближение, сделанное при переходе от общей формулы (69,2) к (69,3), недостаточно (см. задачу 1 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Вывести теорему взаимности для квадрупольных и магнитно-дипольных излучателей.

Решение. Если $\int J_{\text{ст}} dV = 0$, то в интегралах (69,2) надо взять следующие члены разложения:

$$\int J_1 E_2 dV_1 \cong \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} \int x_k j_{1i} dV_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_k j_{1i} + x_i j_{1k}) dV_1 + \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_k j_{1i} - x_i j_{1k}) dV_1$$

(индекс «ст» у J для краткости опускаем). Вводим тензор квадрупольного момента и вектор магнитного момента согласно

$$\dot{D}_{ik} = -i\omega D_{ik} = \int \{3(x_i j_k + x_k j_i) - 2\delta_{ik} r_j j_j\} dV, \\ \mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int [rj] dV.$$

Воспользовавшись уравнением $\text{rot } E = \frac{i\omega}{c} B$ и считая, что вблизи источников $\epsilon = \text{const}$ (в силу чего $\text{div } E = 0$), получим

$$\int J_1 E_2 dV = -\frac{i\omega}{12} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) D_{ik}^{(1)} + i\omega B_2(1) \mathcal{M}_1.$$

Отсюда видно, что для квадрупольных излучателей теорема взаимности гласит:

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i} \right) D_{ik}^{(1)} = \left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_i} \right) D_{ik}^{(2)},$$

а для магнитно-дипольных

$$B_2(1) \mathcal{M}_1 = B_1(2) \mathcal{M}_2.$$

2. Определить зависимость интенсивности излучения дипольного источника, погруженного в однородную изотропную среду, от проницаемостей ϵ и μ среды.

Решение. В результате подстановки

$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} E', \quad H = H', \quad \omega = \frac{\omega'}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

уравнения (69,1) принимают вид

$$\text{rot } E' = \frac{i\omega'}{c} H', \quad \text{rot } H' = -i \frac{\omega'}{c} E' + \frac{4\pi}{c} j_{\text{ст}},$$

не содержащий ϵ и μ . Решение этих уравнений для дипольного излучения приводит к векторному потенциалу поля в волновой зоне ¹⁾

$$A' = \frac{1}{cR_0} \int J_{\text{ст}} dV$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 67.

(R_0 — расстояние от источника; здесь и ниже мы опускаем несущественные для вычисления интенсивности фазовые множители). Отсюда видно, что при заданном $J_{\text{ст}}$ можно написать $A' = A_0$, где индекс 0 отличает поле источника в пустоте. Для величин H' , E' имеем:

$$H' = i [k'A'] = i \sqrt{\epsilon\mu} [kA_0] = \sqrt{\epsilon\mu} H_0, \quad E' = H'.$$

Отсюда

$$H = \sqrt{\epsilon\mu} H_0, \quad E = \mu E_0,$$

и для интенсивности:

$$I = I_0 \mu^{3/2} \epsilon^{1/2},$$

чем и решается поставленная задача.

§ 70. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

Рассмотрим электрическое поле в пустом пространстве, ограниченном идеально проводящими стенками. Уравнения монохроматического поля в пустоте гласят:

$$\text{rot } E = i \frac{\omega}{c} H, \quad \text{rot } H = -i \frac{\omega}{c} E. \quad (70,1)$$

Граничные же условия на поверхности идеально проводящего тела (т. е. тела с импедансом $\zeta = 0$):

$$E_t = 0, \quad H_n = 0. \quad (70,2)$$

Для решения задачи достаточно рассматривать одну из величин E или H . Исключив, например, H из уравнений (70,1), получим для E волновое уравнение

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0, \quad (70,3)$$

к которому надо также присоединить уравнение

$$\text{div } E = 0, \quad (70,4)$$

не вытекающее автоматически из (70,3). Решая эти уравнения с граничным условием $E_t = 0$, определим поле E , после чего H вычисляется непосредственно по второму из уравнений (70,1), причем граничное условие $H_n = 0$ выполняется автоматически.

При заданных размерах и форме полости уравнения (70,3) и (70,4) имеют решения лишь при вполне определенном наборе значений ω . Эти значения называют собственными частотами электромагнитных колебаний данного резонатора¹⁾. При $\zeta = 0$ электро-

¹⁾ Все формулы для резонатора, полость которого заполнена непоглощающей диэлектрической средой с отличными от 1 значениями ϵ и μ , получаются из формул для пустого резонатора путем замены в последних величин ω , E , H соответственно на $\omega \sqrt{\epsilon\mu}$, $\sqrt{\epsilon} E$, $\sqrt{\mu} H$. Это ясно из того, что при таком преобразовании уравнения (70,1) переходят в правильные уравнения Максвелла в среде

$$\text{rot } E = i \frac{\omega}{c} \mu H, \quad \text{rot } H = -i \frac{\omega}{c} \epsilon E.$$

В частности, наличие среды уменьшает все собственные частоты в $\sqrt{\epsilon\mu}$ раз.

магнитное поле не проникает вглубь металла и потери в нем отсутствуют. Поэтому все собственные колебания являются незатухающими, т. е. все собственные частоты вещественны. Число различных собственных частот резонатора бесконечно. Порядок величины наименьшей из них есть

$$\omega_1 \sim \frac{c}{l},$$

где l — линейные размеры полости. Это очевидно уже непосредственно из соображений размерности, поскольку l есть единственный размерный параметр, характеризующий условия задачи (при заданной форме резонатора). Большие же собственные частоты ($\omega \gg c/l$) расположены очень близко друг к другу, причем их число, приходящееся на единичный интервал значений ω , равно

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3};$$

оно зависит только от объема резонатора V , но не от его формы¹⁾.

Средние (по времени) значения электрической и магнитной энергии поля в резонаторе даются соответственно интегралами

$$\frac{1}{2} \int \frac{|E|^2}{8\pi} dV \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \int \frac{|H|^2}{8\pi} dV.$$

Покажем, что эти две величины равны друг другу. С помощью первого из уравнений (70,1) пишем

$$\int \mathbf{H}\mathbf{H}^* dV = \frac{c^2}{\omega^2} \int \text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^* dV.$$

Второй интеграл преобразуем по частям:

$$\int \text{rot } \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}^* dV = \oint \text{rot } \mathbf{E}^* [d\mathbf{f} \mathbf{E}] - \int \mathbf{E} \text{ rot rot } \mathbf{E}^* dV.$$

Поскольку на границе объема $E_t = 0$, то интеграл по поверхности обращается в нуль и остается

$$\int |H|^2 dV = -\frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \text{ rot rot } \mathbf{E}^* dV = \frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \Delta \mathbf{E}^* dV,$$

или, ввиду (70,3),

$$\int |H|^2 dV = \int |E|^2 dV, \quad (70,5)$$

что и требовалось доказать²⁾.

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 52.

2) Мы понимаем везде под \mathbf{E} и \mathbf{H} напряженности поля, соответствующего одной определенной собственной частоте. Не представляет также труда показать, что поля, соответствующие двум различным собственным частотам ω_a и ω_b , удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\int E_a E_b^* dV = \int H_a H_b^* dV = 0.$$

Незатухающие колебания в резонаторе получаются в предположении равного нулю импеданса его стенок. Выясним теперь, какое влияние на собственные частоты оказывает наличие у стенок малого, но все же конечного импеданса.

Среднюю (по времени) энергию, диссипируемую в 1 сек в стенках резонатора, можно вычислить как поток энергии, втекающей в стенки из электромагнитного поля в полости. Учитывая граничное условие (67,6) на поверхности тела с импедансом ζ , напомним нормальную составляющую плотности потока энергии:

$$\bar{S}_n = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ [E_t H_t^*] \} = \frac{c\zeta'}{8\pi} |H_t|^2$$

(ζ' — вещественная часть ζ). В этом выражении, которое уже содержит малый множитель ζ' , в первом приближении можно понимать под H поле, получающееся при решении задачи с $\zeta = 0$. Полная диссипируемая энергия дается интегралом

$$\frac{c}{8\pi} \oint \zeta' |H|^2 df, \quad (70,6)$$

взятым по внутренней поверхности резонатора. Декремент затухания амплитуды поля со временем получится делением этой величины на удвоенную полную энергию поля, равную

$$\frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \int (|E|^2 + |H|^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int |H|^2 dV.$$

Декремент затухания определяется мнимой частью $|\omega''|$ комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$ ¹⁾. Написав формулу в комплексном виде:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{ic}{2} \frac{\oint \zeta |H|^2 df}{\int |H|^2 dV} \quad (70,7)$$

(ω и ω_0 — значения частоты с учетом и без учета ζ), мы можем с ее помощью определить не только декремент затухания, но и сдвиг самих собственных частот. Последний, как мы видим, определяется мнимой частью ζ . В § 67 было указано, что обычно $\zeta'' < 0$; при этом сдвиг собственных частот происходит в сторону их уменьшения.

Для фактического вычисления может оказаться удобнее преобразовать стоящий в знаменателе (70,7) объемный интеграл в интеграл

¹⁾ В радиотехнике обычно вводят вместо декремента затухания $|\omega''|$ так называемую добротность резонатора, определяемую как отношение $\omega'/2|\omega''|$.

по поверхности. Результат преобразования гласит ¹⁾:

$$\int |H|^2 dV = \frac{1}{2} \oint (|H|^2 - |E|^2) (r df). \quad (70,8)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить частоты собственных колебаний в резонаторе с идеально проводящими стенками, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда.

Решение. Оси x , y , z выбираем по трем ребрам параллелепипеда, имеющим длины a_1 , a_2 , a_3 . Решения уравнений (70,3) и (70,4), удовлетворяющие граничному условию $E_t = 0$:

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t} \quad (1)$$

и аналогично для E_y , E_z , где

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{a_1}, \quad k_y = \frac{n_2 \pi}{a_2}, \quad k_z = \frac{n_3 \pi}{a_3} \quad (2)$$

(n_1 , n_2 , n_3 — целые положительные числа), постоянные A_1 , A_2 , A_3 связаны соотношением

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0, \quad (3)$$

а собственные частоты

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Магнитное поле вычисляется из (1):

$$H_x = -i \frac{c}{\omega} (A_3 k_y - A_2 k_z) \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

и аналогично для H_y , H_z .

Если все три или два из чисел n_1 , n_2 , n_3 равны нулю, то $E \equiv 0$. Поэтому первой (наименьшей) частоте соответствует колебание, в котором одно из этих чисел равно нулю, а два — единице.

Ввиду наличия связи (3) решение (1) (с заданными отличными от нуля n_1 , n_2 , n_3 содержит всего две независимые произвольные постоянные, т. е. каждая собственная частота двукратно вырождена. Частоты же, для которых одно из чисел n_1 , n_2 , n_3 равно нулю — не вырождены.

1) Ввиду тангенциальности вектора H к поверхности пишем тождественно

$$\oint (H H^*) (r df) = \oint (H H^*) (r df) - \oint (H r) (H^* df) - \oint (H^* r) (H df).$$

Стоящие справа интегралы преобразуем в объемные заменой $df \rightarrow dV \cdot \nabla$; используя при этом уравнения (70,1), получим

$$\oint (H H^*) (r df) = ik \int r ([H E] - [H^* E]) dV + \int H H^* dV.$$

Аналогичным образом, учитывая тождество $[r [E df]] = E (r df) - (r E) df = 0$ (являющееся следствием граничного условия $E_t = 0$), получим

$$\begin{aligned} \oint (E E^*) (r df) &= - \oint (E E^*) (r df) + \oint (E r) (E^* df) + \oint (E^* r) (E df) = \\ &= ik \int r ([H E^*] - [H^* E]) dV - \int E E^* dV. \end{aligned}$$

Вычитая почленно друг из друга оба полученных равенства и учитывая (70,5), получим формулу (70,8).

2. Определить частоты дипольно-электрических и дипольно-магнитных колебаний в сферическом резонаторе (радиуса a).

Решение. В стоячей сферической волне дипольно-электрического типа поля E и H имеют вид¹⁾

$$E = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\sin kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad H = -ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\sin kr}{r} \mathbf{b} \right),$$

где \mathbf{b} — постоянный вектор, а $k = \omega/c$. Граничное условие $[nE] = 0$ при $r = a$ приводит к уравнению

$$\operatorname{ctg} ka = \frac{1}{ka} - ka.$$

Его наименьший корень есть $ka = 2,74$. Частота $\omega = 2,74 c/a$ есть наименьшая из всех собственных частот сферического резонатора.

В стоячей сферической волне дипольно-магнитного типа

$$E = ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\sin kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad H = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\sin kr}{r} \mathbf{b} \right).$$

Граничное условие для E приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} ka = ka.$$

Его первый корень есть $ka = 4,49$.

§ 71. Распространение электромагнитных волн в волноводах

В отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе резонаторов, имеющих конечный объем, волновод представляет собой полость несграниченной длины — бесконечно длинную полую трубу²⁾. В то время как собственные колебания в резонаторе представляют собой стоячие волны, в волноводе волна является «стоячей» лишь в поперечных направлениях, а в направлении вдоль длины трубы возможно распространение бегущих волн.

Рассмотрим прямолинейный волновод с произвольной (односвязной) формой поперечного сечения, неизменной вдоль его длины. Будем считать сначала, что стенки волновода являются идеально проводящими. Направление длины волновода выберем в качестве оси z . В волне, бегущей вдоль оси z , зависимость всех величин от z дается множителем вида $e^{ik_z z}$ с постоянным k_z .

Все возможные в таком волноводе электромагнитные волны можно разбить на два типа: в одном из них $H_z = 0$, а в другом $E_z = 0$ (Рэлей, 1897). Волны первого типа, с чисто поперечным магнитным полем, называют волнами электрического типа или E -волнами. Волны же с чисто поперечным электрическим полем называют волнами магнитного типа или H -волнами³⁾.

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 71.

²⁾ Ниже мы пишем все формулы для пустого волновода. Переход к формулам для волновода, заполненного непоглощающим диэлектриком, осуществляется преобразованием, указанным в примечании на стр. 368.

³⁾ E - и H -волны называют также соответственно ТМ и ТЕ («поперечно-магнитными» и «поперечно-электрическими») волнами.

Рассмотрим сначала E -волны; x - и y -компоненты уравнений (70,1) дадут

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y &= i \frac{\omega}{c} H_x, & -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x &= i \frac{\omega}{c} H_y, \\ ik_z H_y &= i \frac{\omega}{c} E_x, & ik_z H_x &= -i \frac{\omega}{c} E_y. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (71,1)$$

где введено обозначение

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2.$$

Таким образом, в E -волне все поперечные компоненты E и H могут быть выражены через продольную компоненту электрического поля. Последняя же должна быть определена путем решения волнового уравнения, сводящегося к двумерному уравнению

$$\Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \quad (71,2)$$

(Δ_2 — двумерный оператор Лапласа). Граничные условия к этому уравнению заключаются в обращении в нуль касательных составляющих E на стенке волновода. Для этого достаточно потребовать

$$E_z = 0 \text{ на контуре сечения.} \quad (71,3)$$

Согласно формулам (71,1) двумерный вектор с составляющими E_x, E_y пропорционален двумерному градиенту величины E_z . Поэтому при выполнении условия (71,3) автоматически обратится в нуль также и тангенциальная составляющая E в плоскости xy .

Аналогичным образом, в H -волне поперечные составляющие E и H могут быть выражены через продольную компоненту магнитного поля согласно формулам

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (71,4)$$

Продольное же поле H_z дается решениями уравнения

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0 \quad (71,5)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на контуре сечения.} \quad (71,6)$$

Это условие обеспечивает согласно формулам (71,4) обращение в нуль нормальной компоненты H .

Таким образом, задача об определении электромагнитного поля в волноводе сводится к нахождению решений двухмерного волнового уравнения вида $\Delta_2 f + \chi^2 f = 0$ с граничным условием $f = 0$ или $df/dn = 0$ на контуре сечения. Для заданного контура такие решения имеются лишь при вполне определенных «собственных» значениях параметра χ^2 .

Каждому собственному значению χ^2 соответствует своя зависимость

$$\omega^2 = c^2 (k_z^2 + \chi^2) \quad (71,7)$$

между частотой ω и «волновым вектором» k_z волны. Скорость распространения волны вдоль длины волновода дается производной

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \chi^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \quad (71,8)$$

При заданном χ она пробегает значения от 0 до c , когда k_z меняется от 0 до ∞ .

Средняя (по времени) плотность потока энергии вдоль длины волновода дается z -компонентой вектора Пойнтинга. Простое вычисление с помощью формул (71,1) дает для E -волны

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ [EH^*]_z \} = \frac{\omega k_z}{8\pi \chi^4} |\nabla_2 E_z|^2.$$

Полный поток энергии q получается путем интегрирования \bar{S}_z по площади сечения волновода. Имеем

$$\int |\nabla E_z|^2 df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z df.$$

Первый интеграл берется по контуру сечения и обращается в нуль в силу граничного условия $E_z = 0$. Во втором же интеграле заменяем $\Delta_2 E_z$ на $-\chi^2 E_z$ и окончательно получаем

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi \chi^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71,9)$$

Для H -волны получается такое же выражение с H_z вместо E_z .

Аналогичным образом можно вычислить плотность электромагнитной энергии W (отнесенную к единице длины волновода). Проще, однако, получить W непосредственно из q , поскольку должно быть $q = Wu_z$. Так, из (71,8) и (71,9) получим

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi \chi^2 c^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71,10)$$

Из (71,7) следует, что для каждого типа волн (соответствующих определенному значению χ^2) существует минимальное возможное

значение частоты, равное cx . При меньших частотах распространение данного типа волн становится невозможным. Но среди всех собственных значений x есть наименьшее, x_{\min} , тоже отличное от нуля (см. ниже). Поэтому мы приходим к выводу, что существует нижняя граница частот, $\omega_{\min} = cx_{\min}$, за которой вообще невозможно распространение вдоль волновода каких бы то ни было волн. По порядку величины $\omega_{\min} \sim c/a$, где a — поперечные размеры трубы.

Это утверждение, однако, справедливо лишь для волноводов с односвязной формой сечения, которые мы до сих пор и имели в виду. Положение совершенно меняется при многосвязной форме сечения¹⁾. В таких волноводах, наряду с описанными выше E - и H -волнами, оказывается возможным распространение еще одного типа волн, частота которых не ограничена никакими условиями.

Этот тип волн — так называемая главная волна — характеризуется тем, что $k_z = k$ (т. е. $x = 0$); скорость ее распространения совпадает со скоростью света c . Выясним основные свойства этой волны; одновременно мы увидим, почему этот тип волн невозможен при односвязной форме сечения волновода.

Все компоненты поля в главной волне удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа $\Delta_2 f = 0$. При граничном условии $f = 0$ единственное решение этого уравнения, регулярное во всей области (одно- или многосвязной), есть $f \equiv 0$. Поэтому в главной волне $E_z = 0$.

При граничном же условии $df/dn = 0$ регулярное решение $f = \text{const}$. Легко, однако, видеть, что для $f = H_z$ эта const может быть только нулем (напомним, что const означает величину, не зависящую от x, y ; зависимость же от z и t дается множителем $e^{i(k_z z - \omega t)}$). Действительно, проинтегрировав уравнение

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + i \frac{\omega}{c} H_z = 0$$

по площади сечения, получаем

$$\oint H_n dl + \frac{i\omega}{c} \int H_z df = 0;$$

ввиду равенства $H_n = 0$ на контуре сечения и постоянства H_z по его площади отсюда следует, что $H_z = 0$.

Таким образом, главная волна является чисто поперечной. При $E_z = H_z = 0$ x - и y -компоненты уравнений (70,1) дают

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \quad (71,11).$$

¹⁾ Речь может идти как о пространстве между двумя вставленными одна в другую трубами, так и о пространстве вне двух параллельных проводов.

т. е. поля \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и равны друг другу по абсолютной величине. Для определения этих полей имеем уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

с граничным условием $E_t = 0$.

Мы видим, что зависимость \mathbf{E} (а с ним и \mathbf{H}) от x, y дается решением двумерной электростатической задачи: $\mathbf{E} = -\nabla_2 \varphi$, где потенциал φ удовлетворяет уравнению $\Delta_2 \varphi = 0$ с граничным условием $\varphi = \text{const}$. В односвязной области это граничное условие приводит к $\varphi = \text{const}$ (а потому $\mathbf{E} = 0$) как единственному решению, регулярному во всей области. Тем самым доказывается невозможность распространения этого типа волн по волноводам с односвязным сечением. В многосвязной же области значение const в граничном условии не обязано быть одним и тем же на различных граничных контурах, и тогда уравнение Лапласа имеет нетривиальные решения. При этом распределение электрического поля в поперечном сечении волновода соответствует плоскому электростатическому полю между обкладками конденсатора, находящимися при заданной разности потенциалов.

До сих пор мы предполагали стенки волновода идеально проводящими¹⁾. Наличие же у стенки малого, но все же конечного импеданса приводит к появлению потерь и тем самым к затуханию волны при ее распространении вдоль волновода. Коэффициент затухания может быть вычислен аналогично тому, как в предыдущем параграфе было вычислено затухание со временем электромагнитных колебаний в резонаторе.

Количество энергии, диссипируемой в 1 сек в стенках волновода (отнесенное к единице его длины), дается интегралом

$$\frac{c}{8\pi} \zeta' \oint |\mathbf{H}|^2 dl,$$

взятым по контуру сечения; \mathbf{H} есть магнитное поле, вычисленное в предположении $\zeta = 0$. Разделив эту величину на удвоенный поток энергии q вдоль волновода, мы получим искомый коэффициент затухания α . При таком определении α дает скорость затухания амплитуды волны, убывающей вдоль длины волновода, как $e^{-\alpha z}$.

Выражая все величины через E_z или H_z согласно формулам (71,1) или (71,4), получим следующие формулы для коэффициента поглощения E -волны

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{2\pi^2 k_z c} \frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2 dl}{\int |E_z|^2 df} \quad (71,12)$$

1) Отметим, в частности, что лишь при этом условии вообще возможно строгое разделение на волны с $E_z = 0$ и волны с $H_z = 0$.

и для H -волны:

$$\alpha = \frac{cx^2\zeta'}{2k_z\omega} \frac{\oint \{ |H_z|^2 + (k_z^2/x^4) |\nabla_2 H_z|^2 \} dl}{\int |H_z|^2 df}. \quad (71,13)$$

Для фактического вычисления может оказаться удобным преобразовать стоящие в знаменателях поверхностные интегралы в интегралы по контуру. Приведем получающиеся таким образом формулы, вывод которых аналогичен выводу формулы (70,8):

$$\int |E_z|^2 df = \frac{1}{2x^2} \oint (nr) |\nabla_2 E_z|^2 dl, \quad (71,14)$$

$$\int |H_z|^2 df = \frac{1}{2x^2} \oint (nr) \{ x^2 |H_z|^2 - |\nabla_2 H_z|^2 \} dl.$$

Когда $k_z \rightarrow 0$ (т. е. частота $\omega \rightarrow cx$), выражения (71,12) и (71,13) стремятся к бесконечности. При этом, однако, эти формулы перестают быть применимыми, так как их вывод предполагает малость x по сравнению с k_z .

Формулы (71,12) и (71,13) не относятся к главной волне (в волноводе с многосвязным сечением), в которой равны нулю все величины E_z , H_z и x . В этом случае можно выразить все компоненты поля через скалярный потенциал φ . Учитывая взаимную перпендикулярность и равенство по величине полей \mathbf{H} и $\mathbf{E} = -\nabla_2 \varphi$ в главной волне, получим для ее коэффициента поглощения следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\zeta' \oint |\nabla_2 \varphi|^2 dl}{2 \int |\nabla_2 \varphi|^2 df}. \quad (71,15)$$

Распространение главной волны вдоль волновода может быть сравнительно просто рассмотрено и в тех случаях, когда ее коэффициент поглощения не мал (так что формула (71,15) неприменима), если при этом длина волны c/ω велика по сравнению с поперечными размерами волновода.

Как было указано выше, поперечное электрическое поле в главной волне (в каждый момент времени) соответствует электростатическому полю в конденсаторе, образованном стенками волновода, заряженными равными и противоположными зарядами. Обозначим эти заряды, отнесенные к единице длины волновода, посредством $\pm e(z)$. Они связаны с токами $\pm J(z)$, текущими по стенкам волновода, «уравнением непрерывности»

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z},$$

или, для монохроматического поля,

$$i\omega e = \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Пусть, далее, C — емкость единицы длины волновода. «Разность потенциалов» между его стенками $\varphi_2 - \varphi_1 = e/C$; дифференцируя ее по z , мы получим э. д. с., поддерживающую протекание тока по стенкам (напомним, что при наличии поглощения поле не является чисто поперечным). Приравняв его ZJ (Z — импеданс единицы длины волновода), получим

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{e}{C} = ZJ,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + i\omega ZJ = 0. \quad (71,16)$$

Подставив сюда $Z = R - i\omega L/c^2$ (где R и L — сопротивление и самоиндукция единицы длины волновода), мы можем перейти от монохроматических компонент тока обратно к произвольной функции времени. Предполагая также емкость C постоянной вдоль длины волновода, получим так называемое телеграфное уравнение:

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \quad (71,17)$$

В отсутствие поглощения ($R = 0$) это уравнение, как и следовало, сводится к волновому уравнению со скоростью распространения волн, равной $\sqrt{c^2/LC} = c$ ¹).

Задачи

1. Найти значения χ для волн, распространяющихся по волноводу прямоугольного сечения (длины сторон a , b). Найти коэффициенты затухания этих волн.

Решение. В E -волнах²)

$$E_z = \text{const} \cdot \sin k_x x \sin k_y y,$$

где

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_2 \pi}{b},$$

а n_1, n_2 — целые числа, начиная от единицы. В H -волнах

$$H_z = \text{const} \cdot \cos k_x x \cos k_y y,$$

1) Равенство $LC = 1$ следует из математической эквивалентности задач об определении $1/C$ и L при заданной форме контуров. Электрическое и магнитное поля между поверхностями идеальных проводников перпендикулярны по направлению и равны по величине (см. (71,11)), причем значение последней на самих поверхностях определяет в первом случае плотность зарядов, а во втором случае — плотность токов. Поэтому совпадают и коэффициенты пропорциональности ($1/C$ и L) между энергией поля и квадратами соответственно заряда или тока.

2) Множитель $e^{i(k_z z - \omega t)}$ везде опускаем.

причем одно из чисел n_1, n_2 может быть равно нулю. В обоих типах волн

$$\kappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Наименьшее значение κ соответствует волне H_{10} (индексы указывают значения n_1, n_2) и равно $\kappa_{\min} = \pi/a$ (полагаем, что $a > b$).

Коэффициенты затухания вычисляются по формулам (71,12) и (71,13) и равны: для E -волн

$$\alpha = \frac{2\zeta'\omega}{c\kappa^2 k_z ab} (k_x^2 b + k_y^2 a),$$

для волн $H_{n,0}$

$$\alpha = \frac{\zeta'\omega}{c k_z ab} \left(a + \frac{2\kappa^2}{k^2} b \right)$$

и для волн H_{n_1, n_2} ($n_1, n_2 \neq 0$)

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2 \zeta'}{\omega k_z ab} \left[a + b + \frac{k_z^2}{\kappa^4} (k_x^2 a + k_y^2 b) \right].$$

2. То же для волновода кругового сечения (радиуса a).

Решение. Решая волновое уравнение в полярных координатах r, φ , получим в E -волнах

$$E_z = \text{const} \cdot J_n(\kappa r) \frac{\sin}{\cos} n\varphi,$$

с условием $J_n(\kappa a) = 0$, определяющим значения κ . В H -волнах такая же формула дает H_z , а значения κ определяются условием $J'_n(\kappa a) = 0$. Наименьшим значением κ обладает первая из волн H_1 ; оно равно $\kappa_{\min} = 1,84/a$.

Коэффициент затухания вычисляется по формулам (71,12) — (71,14) и равен для E -волн

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{c a k_z},$$

а для H -волн

$$\alpha = \frac{c \zeta' \kappa^2}{\omega k_z a} \left[1 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2 \kappa^2 (a^2 \kappa^2 - n^2)} \right].$$

§ 72. Рассеяние электромагнитных волн на малых частицах

Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн на макроскопических частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной рассеиваемой волны $\lambda \sim c/\omega$ (Рэлей, 1871). При выполнении этого условия электромагнитное поле вблизи частицы можно считать однородным. Находясь в однородном периодическом поле, частица приобретает определенные электрический и магнитный моменты \mathcal{P} и \mathcal{M} , зависимость которых от времени дается множителями $e^{-i\omega t}$. Рассеянная волна может быть описана как результат излучения этими переменными моментами. На больших (по сравнению с λ) расстояниях R

от частицы, в волновой зоне поле рассеянной волны дается формулами ¹⁾

$$\begin{aligned} H' &= \frac{\omega^2}{c^2 R} \{ [n\mathcal{P}] + [n[\mathcal{M}n]] \}, \\ E' &= [H'n], \end{aligned} \quad (72,1)$$

где единичный вектор n указывает направление рассеяния, а значения \mathcal{P} и \mathcal{M} должны быть взяты в момент времени $t - R/c$ (поле рассеянной волны будем обозначать буквами со штрихом, а поле падающей волны — буквами без штриха). Средняя (по времени) интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол $d\omega$, равна

$$dI = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |H'|^2 R^2 d\omega,$$

а разделив на плотность потока энергии в падающей волне

$$\frac{c}{8\pi} |H|^2 = \frac{c}{8\pi} |E|^2,$$

получим эффективное сечение рассеяния.

Вычисление \mathcal{P} и \mathcal{M} в особенности просто, если размеры частицы малы не только по сравнению с λ , но и по сравнению с «длиной волны» δ , соответствующей частоте ω в веществе частицы. В этом случае можно вычислять поляризуемость частицы по формулам, относящимся к внешнему однородному статическому полю, разумеется, с той разницей, что для ϵ и μ берутся не статические значения, а значения, соответствующие данной частоте ω . Если, как это обычно имеет место, μ близко к единице, то в формуле (72,1) можно опустить магнитно-дипольный член.

Так, для сферической частицы радиуса a имеем (см. (8,9))

$$\mathcal{P} = V\alpha E, \quad \alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (72,2)$$

и эффективное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4} |\alpha|^2 V^2 \sin^2 \theta d\omega, \quad (72,3)$$

где θ — угол между направлением n рассеяния и направлением электрического поля E линейно поляризованной падающей волны. Полное эффективное сечение

$$\sigma = \frac{8\pi |\alpha|^2 \omega^4 V^2}{3c^4}. \quad (72,4)$$

Зависимость эффективного сечения от частоты заключена как в множителе ω^4 , так и в поляризуемости. Если частоты настолько малы, что дисперсия α отсутствует, то рассеяние пропорционально ω^4 .

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 77.

Отметим также, что эффективное сечение пропорционально квадрату объема частицы.

Если падающая волна не поляризована (естественный свет), то для получения дифференциального эффективного сечения надо произвести усреднение (72,3) по всем направлениям вектора \mathbf{E} в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (т. е. к ее волновому вектору \mathbf{k}). Обозначив посредством ϑ и φ полярный угол и азимут направления \mathbf{n} по отношению к \mathbf{k} (причем φ отсчитываем от плоскости \mathbf{k}, \mathbf{E}), имеем $\cos \vartheta = \sin \vartheta \cos \varphi$ (рис. 32), так что

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4} |\alpha|^2 V^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\varphi. \quad (72,5)$$

Усреднив по φ , получим следующую формулу для эффективного сечения рассеяния неполяризованной волны ¹⁾:

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{2c^4} V^2 |\alpha|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\varphi, \quad (72,6)$$

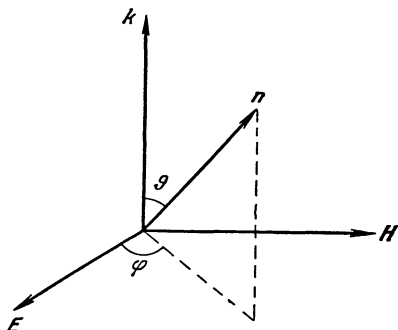


Рис. 32.

где ϑ — угол между направлениями падения и рассеяния.

Из формулы (72,5) легко найти также степень деполяризации рассеянного света. Для этого замечаем, что при заданном направлении \mathbf{E} направление \mathbf{E}' лежит в плоскости \mathbf{E}, \mathbf{n} . Поэтому направление электрического поля \mathbf{E} в рассеянной волне будет лежать в плоскости \mathbf{k}, \mathbf{n} (плоскость рассеяния) или перпендикулярно к ней, соответственно, в случаях, когда азимут вектора \mathbf{E} по отношению к плоскости \mathbf{k}, \mathbf{n} равен $\varphi = 0$ или $\pi/2$. Пусть I_{\parallel} и I_{\perp} — интенсивности рассеяния с этими двумя поляризациями; степень деполяризации определяется как отношение меньшей из этих величин к большей. Согласно (72,5) получим

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \cos^2 \vartheta. \quad (72,7)$$

Если рассеивающая частица обладает большой диэлектрической проницаемостью, то $\delta \sim c/\omega \sqrt{|\varepsilon|} \ll \lambda$. Размеры частицы могут при этом быть малыми по сравнению с λ и в то же время не малыми по сравнению с δ . В первом приближении по $1/\varepsilon$ электрический момент частицы можно при этом вычислять просто как момент

¹⁾ Для дальнейших справок отметим формулу

$$\overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta).$$

проводника ($\epsilon \rightarrow \infty$) в однородном постоянном внешнем поле. При вычислении же магнитного момента в этих условиях существенны возникающие в частице индукционные токи и задача не сводится к статической; вместо этого надо искать решение уравнения (63,2):

$$\Delta \mathbf{H} + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0 \quad (72,8)$$

(полагаем $\mu = 1$), обращаясь вдали от частицы в поле падающей волны. Магнитный и электрический моменты оказываются при этом одного порядка величины, и в формуле (72,1) должны быть сохранены оба члена. Угловое распределение и величина рассеяния при этом существенно меняются по сравнению с рассмотренным выше случаем (см. задачу 2).

Задачи

1. Линейно поляризованный свет рассеивается на хаотически ориентированных малых частицах, имеющих три различных главных значения тензора электрической поляризуемости. Определить коэффициент деполаризации рассеянного света.

Решение. Пренебрегая, как и в тексте, магнитным моментом, имеем из (72,1)

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2}{c^2 R} [\mathbf{n} \mathcal{P} \mathbf{n}].$$

Искомый коэффициент деполаризации дается отношением главных значений двумерного тензора

$$I_{\alpha\beta} = \overline{E'_\alpha E'^*_\beta},$$

где черта означает усреднение по ориентациям рассеивающей частицы при заданном направлении рассеяния \mathbf{n} , а индексы α и β пробегают два значения в плоскости, перпендикулярной \mathbf{n} ¹⁾. Удобнее, однако, усреднять трехмерный тензор $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*$, после чего спроецировать его на плоскость, перпендикулярную \mathbf{n} ; эти компоненты тензора $\overline{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*}$ пропорциональны соответствующим компонентам $I_{\alpha\beta}$.

Подставив $\mathcal{P}_i = \alpha_{ik} E_k$, имеем

$$\overline{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*} = \overline{\alpha_{il} \alpha_{km}^*} E_l E_m^*.$$

Для проведения усреднения пользуемся формулой

$$\overline{\alpha_{ik} \alpha_{lm}^*} = A \delta_{ik} \delta_{lm} + B (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

Это есть наиболее общий вид тензора четвертого ранга, симметричного по парам индексов l, k и l, m и содержащего лишь скалярные постоянные. Последние определяются из двух равенств, получающихся путем упрощения

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 50.

тензора один раз по парам $l = k, l = m$, а другой раз — по $l = l, k = m$; они равны

$$A = \frac{2|\alpha_{ii}|^2 - |\alpha_{ik}|^2}{15} = \frac{1}{15} \{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + 4\text{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*) \},$$

$$B = \frac{3|\alpha_{ik}|^2 - |\alpha_{ii}|^2}{30} = \frac{1}{15} \{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - \text{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*) \},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — главные значения тензора α_{ik} .

В линейно поляризованной волне амплитуда поля $E^{(i)}$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем считать опущенным) всегда может быть определена как вещественная величина. Тогда получим

$$\overline{\mathcal{F}_i \mathcal{F}_k^*} = (A + B) E_i E_k + B \delta_{ik} E^2. \quad (1)$$

Пусть ось z направлена вдоль n , а плоскость xz проходит через векторы n и E ; эти оси являются главными осями тензора $I_{\sigma\beta}$. Взяв соответствующие компоненты тензора (1), получим коэффициент деполяризации

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{B}{(A + B) \sin^2 \theta + B}$$

(θ — угол между E и n).

2. Определить эффективное сечение рассеяния на шарике (радиуса a), обладающем большим ϵ ; предполагается, что $\lambda \gg a \sim \delta$.

Решение. Задача о вычислении магнитного момента, приобретаемого в переменном магнитном поле H шариком с данным значением ϵ (и $\mu = 1$), совпадает с решенной в § 45 (задача 1), с той лишь разницей, что в полученных там формулах надо положить $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$. Поэтому имеем

$$\mathcal{M} = -a^3 \gamma H,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{ka} \text{ctg } ka - \frac{3}{(ka)^3} \right).$$

Электрический же момент вычисляется в первом приближении по $1/\epsilon$ просто как момент проводящего ($\epsilon \rightarrow \infty$) шара в постоянном однородном электрическом поле:

$$\mathcal{P} = a^3 E.$$

Учитывая взаимную перпендикулярность E и H , получим после простого вычисления с помощью (72,1) следующую формулу для эффективного сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{a^6 \omega^4}{c^4} \{ |\gamma|^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - (\gamma + \gamma^*) \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + |\gamma|^2 \sin^2 \varphi) \} d\omega,$$

где φ и ϑ — углы, указанные на рис. 32. При рассеянии неполяризованного света

$$d\sigma = \frac{a^6 \omega^4}{c^4} \left\{ \frac{1}{2} (1 + |\gamma|^2) (1 + \cos^2 \vartheta) - (\gamma + \gamma^*) \cos \vartheta \right\} d\omega,$$

а степень деполяризации рассеянного света

$$\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \left| \frac{\gamma - \cos \vartheta}{1 - \gamma \cos \vartheta} \right|^2.$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi a^6 \omega^4}{3c^4} (1 + |\gamma|^2).$$

В пределе $ka \rightarrow \infty$ (т. е. когда $\lambda \gg a \gg \delta$) имеем $\gamma = 1/2$; этот предел соответствует рассеянию на идеально отражающем шарике, вглубь которого вообще не проникают ни электрическое, ни магнитное поля.

§ 73. Поглощение электромагнитных волн на малых частицах

Рассеяние электромагнитных волн сопровождается одновременным их поглощением на частицах. Эффективное сечение этого процесса дается отношением средней диссипируемой (в 1 сек) в частице энергии Q к плотности падающего потока энергии. Для вычисления Q можно при этом воспользоваться формулой

$$Q = -\mathcal{P}\mathfrak{E} - \mathcal{M}\mathfrak{H}, \quad (73,1)$$

где \mathcal{P} и \mathcal{M} — полные электрический и магнитный моменты частицы, а роль внешних полей \mathfrak{E} и \mathfrak{H} играют электрическое E и магнитное H поля рассеиваемой волны (ср. (45,21)).

Пользуясь комплексным представлением величин, пишем (см. примечание на стр. 243)

$$Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathcal{P}E^* + \mathcal{M}H^* \} = \frac{\omega}{2} V (\alpha_e'' + \alpha_m'') |E|^2,$$

где α_e , α_m — электрическая и магнитная поляризуемости частицы. Разделив на падающий поток энергии, получим

$$\sigma = \frac{4\pi\omega}{c} V (\alpha_e'' + \alpha_m''). \quad (73,2)$$

Применим эту формулу к поглощению на шарике радиуса a ($a \ll \lambda$), предполагая его вещество немагнитным ($\mu = 1$). Характер поглощения существенно зависит от величины диэлектрической проницаемости.

Если ϵ невелико, то наряду с $a \ll \lambda$ имеем также и $a \ll \delta$. В этом случае магнитной поляризуемостью можно пренебречь по сравнению с электрической. Взяв последнюю из (72,2), получим

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3 \epsilon''}{c [(\epsilon' + 2)^2 + \epsilon''^2]}. \quad (73,3)$$

Если же $|\epsilon| \gg 1$, то электрическая часть поглощения становится малой и магнитное поглощение может стать существенным, даже если все еще $\delta \gg a$. При $\delta \gg a$ (т. е. $|ka| \ll 1$) магнитная поляризуемость

$$\alpha_m = \frac{(ak)^2}{40\pi} = \frac{a^2\omega^2\epsilon}{40\pi c^2}$$

и эффективное сечение поглощения

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3 \epsilon''}{c} \left(\frac{1}{|\epsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2} \right). \quad (73,4)$$

При дальнейшем увеличении ϵ электрическая часть поглощения становится малой по сравнению с магнитной. В предельном случае $\delta \ll a$ (т. е. $|ka| \gg 1$, $\text{ctg } ka \rightarrow -i$) имеем

$$\alpha_m = \frac{9i}{8\pi a k} = \frac{9ic}{8\pi\omega a} \zeta,$$

где $\zeta = 1/\sqrt{\epsilon}$ — поверхностный импеданс шарика. Отсюда

$$\sigma = 6\pi a^2 \zeta'. \quad (73,5)$$

Заметим, что эту формулу можно было бы получить и более прямым путем, без использования общего выражения для магнитной поляризуемости шарика $\alpha_m(\omega)$. При малом ζ диссипация энергии Q может быть вычислена «интегрированием» среднего вектора Пойнтинга (67,4) по поверхности шарика, причем распределение магнитного поля на поверхности дается решением (42,3) задачи о сверхпроводящем ($\zeta = 0$) шаре в однородном магнитном поле.

Зная эффективное сечение поглощения шариком, можно непосредственно определить интенсивность испускаемого им самим теплового излучения. Согласно закону Кирхгофа¹⁾ интенсивность dI (в интервале частот $d\omega$) выражается через $\sigma(\omega)$ формулой

$$dI = 4\pi c \sigma(\omega) e_0(\omega) d\omega,$$

где

$$e_0(\omega) = \frac{h\omega^3}{4\pi^3 c^3 (e^{h\omega/T} - 1)}$$

— спектральная плотность черного излучения, отнесенная к единице объема и к единичному интервалу телесных углов.

§ 74. Диффракция на клине

Обычная приближенная теория диффракции²⁾ основана на предположении о малости отклонений от геометрической оптики. Тем самым предполагается, во-первых, что все размеры велики по сравнению с длиной волны; это относится как к размерам тел (экранов) или отверстий в них, так и к расстояниям от тел до точек испускания и наблюдения света. Во-вторых, рассматриваются лишь малые углы диффракции, т. е. распределение света по направлениям, близким к направлению границы геометрической тени. В этих условиях конкретные оптические свойства вещества тел вообще несущественны; существен лишь самый факт непрозрачности экранов.

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 60.

2) См. «Теория поля», изд. 2-е, §§ 59—61.

Если же указанные условия не выполнены, то решение задачи дифракции требует точного решения волнового уравнения с учетом соответствующих граничных условий на поверхности тел, зависящих от их конкретных свойств. Нахождение таких решений представляет исключительные математические трудности и произведено лишь для сравнительно небольшого числа задач. При этом обычно делается определенное упрощающее предположение о свойствах тела, на котором происходит дифракция: оно предполагается идеально проводящим (и тем самым, с оптической точки зрения, идеально отражающим).

Отметим в этой связи следующее обстоятельство. Могло бы показаться естественным решать задачу дифракции, предполагая поверхность тела «черной», т. е. полностью поглощающей падающий на нее свет. В действительности, однако, в постановке точной задачи дифракции такое предположение о свойствах тела было бы внутренне противоречивым. Дело в том, что если само вещество тела является сильно поглощающим, то коэффициент отражения от его поверхности не мал, а, напротив, близок к единице (см. § 67). Поэтому осуществление близкого к нулю коэффициента отражения требует слабо поглощающего вещества, но зато достаточно большой (по сравнению с длиной волны) толщины тела. В точной же теории дифракции неизбежно играют существенную роль участки поверхности тела вблизи (на расстояниях порядка длины волны) от его края; но толщина тела вблизи его края во всяком случае мала, так что предположение о его «черноте» здесь заведомо не будет справедливым.

Существенный теоретический интерес представляет точное решение задачи о дифракции света от края идеально проводящего клина, ограниченного двумя пересекающимися полуплоскостями (это решение было впервые получено *А. Зоммерфельдом*, 1894). Полное изложение этой весьма сложной математической теории, требующей применения особых математических приемов, выходит за рамки настоящей книги. Мы изложим здесь для справочных целей лишь окончательные результаты¹⁾.

Выберем край клина за ось z цилиндрической системы координат r, φ, z . Передней поверхности клина (OA на рис. 33) соответствует $\varphi = 0$, а задней (OB) $\varphi = \gamma$, где $2\pi - \gamma$ — угол раззора

¹⁾ Подробное проведение вычислений можно найти в книгах: *А. Зоммерфельд*, *Оптика*, ИЛ, 1953; *Ф. Франк и Р. Мизес*, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*, ч. 2, гл. XX, ОНТИ, 1937. Другой метод решения, принадлежащий *М. И. Конторовичу* и *Н. Н. Лебедеву*, изложен в книге *Г. А. Гринберга*, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*, гл. XXII, Изд. АН СССР, 1948.

Видоизменение решения для дифракции цилиндрической волны (испускаемой линейным источником, параллельным краю клина) дано *Карлслю* (*Proc. Lond. Math. Soc.* 30, 121, 1893).

клина; области вне клина соответствуют углы $0 \leq \varphi \leq \gamma$. Пусть плоская монохроматическая волна с равной единице амплитудой падает в плоскости r, φ на переднюю поверхность клина под углом φ_0 к ней (ввиду симметрии клина достаточно рассматривать значения $\varphi_0 < \gamma/2$). Будем различать два независимых случая поляризации падающей (а с нею и диффрактированной) волны: когда краю клина (оси z) параллелен вектор \mathbf{E} , или вектор \mathbf{H} . Буквой u обозначается в этих случаях соответственно E_z или H_z .

Электромагнитное поле во всем пространстве дается тогда формулой (временной множитель $e^{-i\omega t}$ везде опускаем)

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \\ &= v(r, \varphi - \varphi_0) \mp v(r, \varphi + \varphi_0), \end{aligned} \quad (74,1)$$

где верхний и нижний знаки отвечают соответственно поляризациям с \mathbf{E} и \mathbf{H} вдоль оси z , а функция $v(r, \varphi)$ определяется комплексным интегралом

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\gamma} \int_C e^{-ikr \cos \zeta} \frac{d\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta + \varphi)/\gamma}} \quad (74,2)$$

($k = \omega/c$). Путь интегрирования $C = C_1 + C_2$ в плоскости ζ состоит из двух петель, изображенных на рис. 34. Концы этих петель уходят на бесконечность в тех частях плоскости ζ (заштрихованных на рис. 34), в которых $\text{Im}(\cos \zeta) < 0$, и потому множитель $e^{-ikr \cos \zeta}$ стремится к нулю на бесконечности. Подынтегральное выражение в (74,2) имеет полюсы, лежащие на вещественной оси ζ в точках $\zeta = -\varphi + 2n\gamma$, где n — целые числа. Вместо пути C можно производить интегрирование по пути $D = D_1 + D_2$ (рис. 34), добавив к интегралу вычеты подынтегрального выражения в полюсах, расположенных на отрезке $-\pi \leq \zeta \leq \pi$, если таковые имеются. Представим v в виде

$$v(r, \varphi) = v_0(r, \varphi) + v_d(r, \varphi), \quad (74,3)$$

где v_d — интеграл (74,2), взятый по пути D , а v_0 — вклад, происходящий от вычетов в указанных полюсах. От каждого полюса возникает в v_0 член, равный

$$e^{-ikr \cos(\varphi - 2n\gamma)},$$

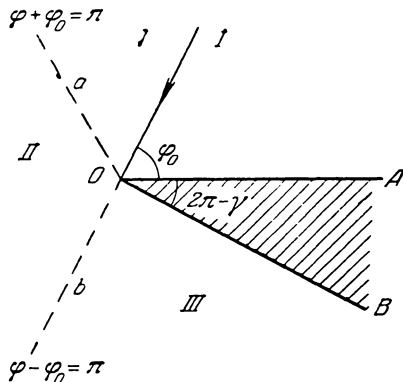


Рис. 33.

изображающий собой либо падающую волну, либо какую-либо из волн, отраженных от поверхности клина по законам геометрической оптики. Функция же v_d описывает собственно дифракционное искажение волн. Наибольший интерес представляет поле на больших

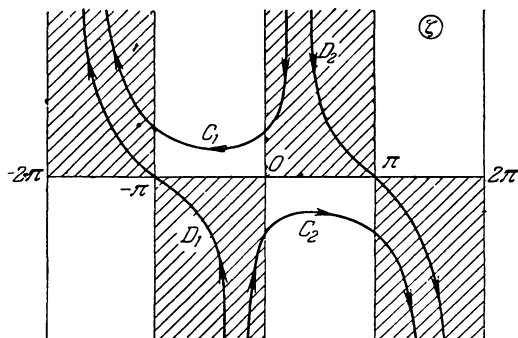


Рис. 34.

(по сравнению с длиной волны) расстояниях от края клина. При $kr \gg 1$ справедлива асимптотическая формула¹⁾

$$v_d(r, \psi) = \frac{\pi}{\gamma \sqrt{2\pi kr}} e^{i(kr + \pi/4)} \frac{\sin(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)}, \quad (74,4)$$

если только угол ψ удовлетворяет условию

$$\left(\cos \frac{\pi^2}{\gamma} - \cos \frac{\pi\psi}{\gamma} \right)^2 \gg \frac{1}{kr}. \quad (74,5)$$

Зависимость функции v_d , а с нею и поля

$$u_d(r, \varphi) = v_d(r, \varphi - \varphi_0) \mp v_d(r, \varphi + \varphi_0)$$

от r дается множителем e^{ikr}/\sqrt{r} , т. е. это поле имеет характер цилиндрической волны, как бы излучаемой краем клина.

В написанном виде формулы (74,1) — (74,5) справедливы при любых значениях углов γ и φ_0 . Более подробное обсуждение этих формул мы для определенности произведем при таком соотношении между углами γ и φ_0 ($\gamma > \pi + \varphi_0$), которое приводит, с точки зрения геометрической оптики, к возникновению двух границ: границы Ob полной тени (область III на рис. 33) и границы Oa «тени» волны, отраженной от поверхности OA^2).

¹⁾ Следующие члены этого асимптотического разложения найдены В. Паули (Phys. Rev. 54, 924, 1938).

²⁾ На рис. 33 $\varphi_0 < \pi/2$; если же $\varphi_0 > \pi/2$, то граница Oa лежит справа от направления падающей волны.

При $\gamma < \pi + \varphi_0$ область полной тени вообще отсутствует, а отражение (одно- или даже многократное) происходит от обеих сторон клина.

В областях *I*, *II*, *III* функция

$$u_0(r, \varphi) = v_0(r, \varphi - \varphi_0) \mp v_0(r, \varphi + \varphi_0)$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{в области } I & \quad u_0 = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mp e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}, \\ \text{в области } II & \quad u_0 = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \\ \text{в области } III & \quad u_0 = 0. \end{aligned} \quad (74,6)$$

Эти выражения, не обращающиеся в нуль при $kr \rightarrow \infty$, описывают не искаженные диффракцией падающую (в области *II*) или совокупность падающей и отраженной (в области *I*) волн. Диффракционное же искажение поля дается формулой (74,4), но условие (74,5) нарушается при значениях ψ , слишком близких к π (когда разность $|\psi - \pi|$ перестает быть малой по сравнению с $1/\sqrt{kr}$).

Значения $\psi = \pi$ соответствуют геометрическим границам тени; при $\psi = \varphi - \varphi_0$ это есть граница полной тени, а при $\psi = \varphi + \varphi_0$ — граница тени отраженной волны. В непосредственной близости этих значений надо применять другое асимптотическое выражение, справедливость которого требует лишь соблюдения неравенства $|\psi - \pi| \ll 1$. Это условие вместе с условием $kr \gg 1$ как раз обеспечивает применимость обычной приближенной теории диффракции Френеля¹⁾. В соответствии с этим, вблизи границы *Ob* полной тени получается следующее асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \\ w &= -(\varphi - \varphi_0 - \pi) \sqrt{\frac{kr}{2}}. \end{aligned} \quad (74,7)$$

Аналогично вблизи границы *Oa* «тени» отраженной волны

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \\ w &= -(\varphi + \varphi_0 - \pi) \sqrt{\frac{kr}{2}}. \end{aligned} \quad (74,8)$$

В этом приближении диффракционная картина не зависит от направления поляризации волны и от угла раствора клина.

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 60.

Области применимости формул (74,4) и (74,7), (74,8) частично перекрываются. Так, вблизи границы полной тени совместная область применимости дается неравенствами

$$1 \gg |\varphi - \varphi_0 - \pi| \gg 1/\sqrt{kr},$$

и в ней

$$u(r, \varphi) = u_0(r, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \frac{1}{\varphi - \varphi_0 - \pi} \quad (74,9)$$

(с u_0 из (74,6)). Из (74,7) это выражение получается с помощью известных асимптотических формул для интеграла Френеля при больших $|\omega|$:

$$\int_{-\infty}^{\omega} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega^2} \quad \text{при } \omega > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\omega} e^{i\eta^2} d\eta = \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega^2} \quad \text{при } \omega < 0.$$

§ 75. Диффракция на плоском экране

Точная формула (74,2) для диффракции на клине может быть приведена к сравнительно простому виду в частном случае диффракции на полуплоскости (чему соответствует $\gamma = 2\pi$)¹). Именно, комплексный интеграл в (74,2) может быть сведен к интегралу Френеля:

$$v(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(kr \cos \psi + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{\omega} e^{i\eta^2} d\eta, \quad (75,1)$$

$$\omega = \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Эта формула справедлива при любых значениях r и ψ . При $kr \gg 1$ и углах $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$ пригодно асимптотическое выражение

$$v_d(r, \psi) = -e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr} \cos(\psi/2)} \quad (75,2)$$

(формула (75,4) с $\gamma = 2\pi$)²).

¹) См. литературу, указанную в примечании на стр. 386.

²) Ю. В. Вандакуровым (ЖЭТФ 26, 3, 1954) получено точное решение трехмерной задачи о диффракции на полуплоскости электромагнитных волн, испускаемых произвольно ориентированным электрическим или магнитным диполем, находящимся на конечном расстоянии от края полуплоскости.

С помощью формулы (75,2) может быть получено в замкнутом виде решение задачи о диффракции на плоском идеально проводящем экране любой формы. При этом предполагается лишь, что размеры экранов и расстояния до них велики по сравнению с длиной волны, а углы диффракции не слишком малы (причем эта область перекрывается с областью малых углов, в которой применимы обычные формулы диффракции Френеля). Результат выражается в виде интеграла по контуру края экрана, аналогично тому, как в обычной приближенной теории¹⁾ диффракционное поле выражается в виде интеграла по поверхности, закрывающей отверстия в экране. Мы не станем останавливаться здесь на этих вычислениях.

В точной теории диффракции на плоских идеально проводящих экранах можно высказать теорему (принадлежащую *Л. И. Мандельштаму* и *М. А. Леонтовичу*), в известном смысле аналогичную теореме Бабинэ в приближенной теории диффракции.

Рассмотрим плоский экран с отверстием произвольной формы; выберем плоскость экрана в качестве плоскости $z=0$, и пусть электромагнитная волна падает со стороны $z < 0$. Пусть E_0, H_0 — суммарное поле падающей волны и волны, отраженной от экрана (так, как если бы отверстие отсутствовало); будем представлять его продолженным по другую сторону от экрана ($z > 0$). Поскольку $H_z=0, E_t=0$ при $z=0$ (в силу граничных условий на идеально проводящей поверхности), то значения E_0, H_0 при $z > 0$ и $z < 0$ будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} E_{0z}(x, y, z) &= E_{0z}(x, y, -z), & E_{0t}(x, y, z) &= -E_{0t}(x, y, -z), \\ H_{0z}(x, y, z) &= -H_{0z}(x, y, -z), & H_{0t}(x, y, z) &= H_{0t}(x, y, -z). \end{aligned} \quad (75,3)$$

Пусть, далее, E', H' — поле, которое получилось бы при помещении в поле E_0, H_0 плоской пластинки, по форме, величине и положению совпадающей с отверстием в экране и обладающей магнитной проницаемостью $\mu = \infty$. Тогда решение диффракционной задачи на отверстие в экране дается выражениями

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(E_0 + E'), & H &= \frac{1}{2}(H_0 + H') \quad \text{при } z < 0, \\ E &= \frac{1}{2}(E_0 - E'), & H &= \frac{1}{2}(H_0 - H') \quad \text{при } z > 0. \end{aligned} \quad (75,4)$$

Для доказательства этого утверждения замечаем, что поле E', H' обладает той же симметрией (выражаемой формулами (75,3)), что и поле E_0, H_0 . Поэтому на плоскости $z=0$ оно удовлетворяет

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, § 59.

условиям

$$\begin{aligned} E'_t &= 0, & H'_z &= 0 & \text{вне отверстия,} \\ E'_{t1} &= -E'_{t2}, & H'_{z1} &= -H'_{z2} & \text{на отверстии} \end{aligned}$$

(индексы 1 и 2 соответствуют $z \rightarrow \pm 0$). Кроме того, оно удовлетворяет условиям

$$E'_z = 0, \quad H'_t = 0 \quad \text{на отверстии,}$$

так как граничные условия на поверхности тела с $\mu = \infty$ обратны (в смысле замены E, H на H, E) условиям на идеально проводящей ($\epsilon = \infty$) поверхности. Отсюда ясно, что поле (75,4) удовлетворяет необходимым условиям $E_t = 0, H_z = 0$ на поверхности экрана ($z \rightarrow -0$) вне отверстия и непрерывно на отверстии. Наконец, поскольку поле E', H' стремится на бесконечности к E_0, H_0 , то поле (75,4) стремится к E_0, H_0 при $z \rightarrow -\infty$ и к нулю при $z \rightarrow +\infty$. Тем самым оно удовлетворяет всем условиям поставленной диффракционной задачи, и теорема доказана.

Таким образом, задача о диффракции на отверстии в экране с $\epsilon = \infty$ эквивалентна задаче о диффракции на дополнительном экране с $\mu = \infty$.

Задачи

1. Плоская монохроматическая волна падает нормально на прорезанную в идеально проводящем плоском экране щель ширины $2a$, большей по сравнению с длиной волны. Определить распределение интенсивности света за щелью на больших расстояниях от нее для больших углов диффракции.

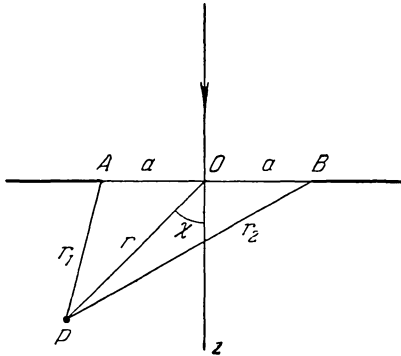


Рис. 35.

Решение. При $a \gg \lambda$ диффракционное поле за щелью можно рассматривать как наложение полей, происходящих от независимой диффракции на каждом из двух краев щели и определяющихся с помощью асимптотической формулы (75,2). Когда расстояния $AP = r_1$ и $BP = r_2$ от краев щели до точки наблюдения (рис. 35) велики по сравнению с a , в множителях e^{ikr_1} и e^{ikr_2} пишем:

$$r_1 = r - a \sin \chi, \quad r_2 = r + a \sin \chi;$$

во всех же других местах полагаем $r_1 \cong r_2 \cong r$, а все углы между AP, OP, BP и осью z — равными одному и тому же углу диффракции χ .

В результате получаем

$$u = \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \left\{ \frac{\sin(ka \sin \chi)}{\sin \frac{\chi}{2}} \pm i \frac{\cos(ka \sin \chi)}{\cos \frac{\chi}{2}} \right\}.$$

Отсюда интенсивность света, диффрагировавшего в интервал углов $d\chi$ (отношенная к полной интенсивности падающего на щель света):

$$dI = \frac{1}{4a\pi k} \left\{ \left[\frac{\sin(ka \sin \chi)}{\sin \frac{\chi}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\cos(ka \sin \chi)}{\cos \frac{\chi}{2}} \right]^2 \right\} d\chi =$$

$$= \frac{ka}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin(ka \sin \chi)}{ka \sin \chi} \right]^2 \cos \chi + \frac{1}{\left[2ka \cos \frac{\chi}{2} \right]^2} \right\} d\chi.$$

При малых χ это выражение переходит в формулу для диффракции Фраунгофера на щели:

$$dI = \frac{1}{\pi ka} \frac{\sin^2(ka\chi)}{\chi^2} d\chi.$$

2. Плоская волна падает на идеально проводящую плоскость с круглым отверстием радиуса a , малого по сравнению с длиной волны. Определить интенсивность диффрагированного света, прошедшего через отверстие (Рэлея, 1897).

Решение. Согласно изложенному в тексте, данная задача приводится к задаче о диффракции на круглой пластинке с $\mu = \infty$, а поскольку $a \ll \lambda$, то мы имеем дело с рассеянием на малой частице. Согласно § 72, для решения задачи о таком рассеянии надо определить статические электрическую и магнитную поляризуемости диска. Поле E_0 перпендикулярно к плоскости диска, а граничное условие $E'_z = 0$ формально совпадает с условием, которое имело бы место в электростатике на поверхности тела с $\epsilon = 0$. Поле же H_0 параллельно диску, а граничное условие $H'_t = 0$ соответствует магнитостатической задаче с $\mu = \infty$. Поэтому электрический и магнитный моменты диска (см. задачу 4 § 4 и задачу к § 42):

$$\mathcal{P} = -\frac{2a^3}{3\pi} E_0, \quad \mathcal{M} = \frac{4a^3}{3\pi} H_0.$$

При переходе к задаче о диффракции на отверстии эти выражения надо умножить, в соответствии с формулами (75,4), на $1/2$ и затем подставить в формулу рассеяния (72,1).

Таким образом, интенсивность диффрагированного излучения в телесном угле $d\omega$)

$$dI = \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ [nE_0] - 2[n[H_0n]] \}^2 d\omega =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ [nE_0]^2 + 4[nH_0]^2 + 4n[H_0E_0] \} d\omega.$$

Полная интенсивность диффракции получается интегрированием по полусфере и равна

$$I = \frac{c}{4\pi} \frac{4\omega^4 a^6}{27\pi c^4} (E_0^2 + 4H_0^2).$$

«Эффективное сечение диффракции» определим как отношение интенсивности диффрагированного излучения к плотности потока энергии в падающей волне

1) Множители $e^{-i\omega t}$ предполагаем опущенными, так что E и H вещественны.

($cE^2/4\pi$; буквы без индекса относятся к полю падающей волны). Различаем два случая поляризации падающей волны:

а) вектор E в падающей волне перпендикулярен к плоскости падения (плоскости xz), т. е. параллелен плоскости экрана (плоскость xy). Сумма полей падающей и отраженной волн у поверхности экрана

$$E_0 = 0, \quad H_{0x} = 2H \cos \alpha = 2E \cos \alpha$$

(α — угол падения). Отсюда

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\alpha.$$

Здесь ϑ — угол между направлением диффракции n и нормалью к экрану (ось z), а φ — азимут вектора n по отношению к плоскости падения. Полное сечение

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4} \cos^2 \alpha.$$

б) Вектор E в плоскости падения. Тогда

$$E_0 = E_{0z} = -2E \sin \alpha, \quad H_0 = H_{0y} = 2H = 2E.$$

Дифференциальное эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \left\{ \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \left(\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right) - \sin \vartheta \sin \alpha \cos \varphi \right\} d\alpha,$$

полное сечение

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right).$$

Для естественного падающего света

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 - \frac{3}{8} \sin^2 \alpha \right).$$

ГЛАВА XI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 76. Диэлектрическая проницаемость кристаллов

Свойства анизотропной среды по отношению к электромагнитным волнам определяются тензорами $\epsilon_{ik}(\omega)$ и $\mu_{ik}(\omega)$, устанавливающими связь между индукцией и напряженностью согласно формулам ¹⁾

$$D_i = \epsilon_{ik}(\omega) E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega) H_k.$$

Ниже мы для определенности говорим об электрическом поле и тензоре ϵ_{ik} ; все получаемые результаты полностью справедливы и для тензора μ_{ik} .

При $\omega \rightarrow 0$ величины ϵ_{ik} принимают свои статические значения, для которых в § 13 была доказана симметричность по индексам i, k . Это доказательство имело чисто термодинамический характер и поэтому относилось лишь к термодинамически равновесным состояниям. В переменном же поле состояния вещества, разумеется, не равновесно, и потому указанное доказательство неприменимо. Для выяснения свойств тензора ϵ_{ik} надо теперь обратиться к обобщенному принципу симметрии кинетических коэффициентов (§ 88).

Легко видеть, что компоненты тензора ϵ_{ik} подпадают под общее определение величин α_{ab} , фигурирующих в § 88. Для этого замечаем, что изменение энергии (в 1 сек) в переменном электрическом поле дается интегралом

$$\int \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \quad (76,1)$$

Сравнивая с формулой (88,6), мы видим, что если выбрать в качестве величин x_a значения компонент вектора \mathbf{E} в каждой точке тела, то соответствующими величинами f_a будут компоненты \mathbf{D} (индекс a пробегает непрерывный ряд значений, нумеруя как компоненты векторов, так и все точки тела). При этом роль коэффициентов α_{ab}

¹⁾ Напомним, что все величины относятся к переменному полю в волне; возможное же наличие постоянной индукции (в пирозлектрическом или ферромагнитном кристалле) не имеет отношения к рассматриваемым здесь вопросам.

будут играть компоненты тензора ϵ_{ik}^{-1} . Все же свойства симметрии обратного (ϵ_{ik}^{-1}) и прямого (ϵ_{ik}) тензоров, разумеется, совпадают.

Заметим, что под то же определение подпадают также и компоненты тензора поляризуемости тела как целого, т. е. коэффициенты в равенствах

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathcal{E}_k.$$

Действительно, изменение энергии тела, внесенного во внешнее переменное поле \mathcal{E} , дается формулой

$$- \mathcal{P} \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (76,2)$$

Отсюда видно, что если величинами x_a являются три компоненты вектора \mathcal{P} , то соответствующими величинами f_a будут компоненты вектора \mathcal{E} , так что коэффициенты α_{ab} совпадают с $V\alpha_{ik}$.

Таким образом, мы можем применить полученный в § 88 обобщенный принцип симметрии кинетических коэффициентов, выражаемый формулой (88,12), и приходим к выводу, что тензор ϵ_{ik} симметричен:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}; \quad (76,3)$$

при этом предполагается, что тело не находится во внешнем магнитном поле¹⁾.

Повторив для анизотропного случая произведенный в § 61 вывод формулы (61,4), мы найдем, что электрические потери даются выражением

$$\frac{i\omega}{8\pi} (\epsilon_{ik}^* - \epsilon_{ki}) E_i E_k^*. \quad (76,4)$$

Условие же отсутствия поглощения заключается в равенстве $\epsilon_{ik}^* = \epsilon_{ki} = \epsilon_{ik}$, т. е. сводится, как и в изотропной среде, к вещественности всех ϵ_{ik} .

В отсутствие поглощения может быть определена, как мы видели в § 61, электромагнитная внутренняя энергия единицы объема тела. Повторив вывод формулы (61,9) для анизотропной среды, мы получим аналогичную формулу:

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \frac{d}{d\omega} (\omega\epsilon_{ik}) E_i^* E_k. \quad (76,5)$$

В § 67 было введено понятие о поверхностном импедансе ζ , с помощью которого могут быть сформулированы граничные условия на поверхности металла даже в тех случаях, когда понятие диэлектрической проницаемости теряет смысл. На поверхности анизотроп-

1) Свойства тензора ϵ_{ik} при наличии внешнего магнитного поля будут рассмотрены в § 82.

ного тела граничное условие, аналогичное (67,6), должно быть написано в виде

$$E_{\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} [Hn]_{\beta}, \quad (76,6)$$

где $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ — двухмерный тензор на поверхности тела. Следует иметь в виду, что значения этого тензора, вообще говоря, зависят и от кристаллографического направления грани кристалла.

Поток энергии, втекающий внутрь тела, есть

$$\frac{c}{4\pi} [EH] n = \frac{c}{4\pi} E [Hn] = \frac{c}{4\pi} E_{\alpha} [Hn]_{\alpha}$$

(здесь E и H вещественны). Отсюда видно, что если при применении принципа симметрии выбрать в качестве величин x_{α} компоненты E_{α} , то соответствующими f_{α} будут — $[Hn]_{\alpha}$, т. е. (возвращаясь к комплексному представлению) величинами f_{α} будут — $(i/\omega) [Hn]_{\alpha}$. Поэтому коэффициенты α_{ab} совпадают, с точностью до множителя, с компонентами $\zeta_{\alpha\beta}$, и мы приходим к выводу, что

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \quad (76,7)$$

(в отсутствие внешнего магнитного поля).

З а д а ч а

Выразить компоненты тензора $\zeta_{\alpha\beta}$ через компоненты тензора $\eta_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta}^{-}$ (предполагая, что последний существует); тело немагнитно ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

Решение. В анизотропном случае равенство (67,2) $\zeta^2 = 1/\epsilon$ заменяется следующим:

$$\zeta_{\alpha\gamma} \zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

В компонентах 1):

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^2 + \zeta_{12} \zeta_{21} &= \eta_{11}, & \zeta_{22}^2 + \zeta_{12} \zeta_{21} &= \eta_{22}, \\ \zeta_{12} (\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{12}, & \zeta_{21} (\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{21}. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений:

$$\zeta_{12} = \frac{\eta_{12}}{\xi}, \quad \zeta_{21} = \frac{\eta_{21}}{\xi},$$

$$\zeta_{11} = \frac{1}{\xi} [\eta_{11} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}], \quad \zeta_{22} = \frac{1}{\xi} [\eta_{22} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}]$$

$$(\xi^2 = \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2 \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}).$$

Выбор знаков определяется условием положительности поглощения энергии.

§ 77. Плоская волна в анизотропной среде

При изучении оптики анизотропных тел — кристаллов — мы ограничимся наиболее важным случаем, когда среду можно считать (в данной области частот) немагнитной и прозрачной. В соответствии

1) Мы не предполагаем $\zeta_{12} = \zeta_{21}$, допуская, таким образом, также и случай наличия внешнего магнитного поля.

с этим связь между напряженностями и индукциями электрического и магнитного полей дается равенствами

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (77,1)$$

причем все компоненты диэлектрического тензора ϵ_{ik} вещественны, а его главные значения положительны.

Уравнения Максвелла для поля монохроматической волны гласят:

$$i\omega \mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega \mathbf{D} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (77,2)$$

В плоской волне, распространяющейся в прозрачной среде, все величины пропорциональны $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ с вещественным волновым вектором \mathbf{k} . Производя дифференцирование по координатам, получим

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{H} = [\mathbf{k}\mathbf{E}], \quad \frac{\omega}{c} \mathbf{D} = -[\mathbf{k}\mathbf{H}]. \quad (77,3)$$

Отсюда, прежде всего, видно, что три вектора \mathbf{k} , \mathbf{D} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны. Кроме того, вектор \mathbf{H} перпендикулярен к \mathbf{E} .

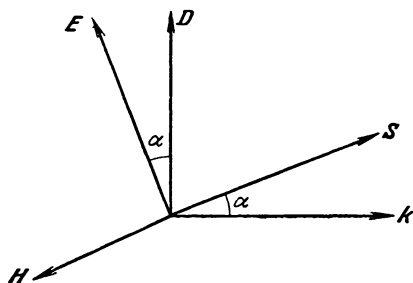


Рис. 36.

Поскольку вектор \mathbf{H} перпендикулярен одновременно к трем векторам \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{k} , то последние лежат в одной плоскости. Рис. 36 иллюстрирует взаимное расположение всех векторов. По отношению к направлению волнового вектора поперечны \mathbf{D} и \mathbf{H} , но не \mathbf{E} . На рисунке указано также направление потока энергии \mathbf{S} в волне. Оно определяется векторным произведением $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ т. е. перпендикулярно к \mathbf{E} и \mathbf{H} . В отличие от волны в изотропной среде, здесь направление потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора. Очевидно, что вектор \mathbf{S} компланарен с векторами \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{k} и составляет с вектором \mathbf{k} угол, равный углу между \mathbf{E} и \mathbf{D} .

Выделим из абсолютной величины вектора \mathbf{k} множитель ω/c и будем писать

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (77,4)$$

Абсолютная величина определенного таким образом вектора \mathbf{n} в анизотропной среде зависит от его направления, в отличие от изотропной среды, в которой $n = \sqrt{\epsilon}$ зависит только от частоты¹⁾.

¹⁾ О величине n и здесь принято говорить как о «показателе преломления», хотя она теперь не имеет такого простого отношения к закону преломления, как в изотропных телах.

С помощью обозначения (77,4) основные формулы (77,3) напишутся в виде

$$\mathbf{H} = [n\mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = -[n\mathbf{H}]. \quad (77,5)$$

Выпишем также выражение для вектора потока энергии в плоской волне:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \{nE^2 - \mathbf{E}(\mathbf{E}n)\} \quad (77,6)$$

(в этой формуле \mathbf{E} и \mathbf{H} вещественны).

До сих пор мы не использовали еще соотношения (77,1), содержащего материальные константы ϵ_{ik} . Совместное использование этого соотношения и уравнений (77,5) позволяет определить зависимость $\omega(\mathbf{k})$.

Подставляя первую из формул (77,5) во вторую, получим

$$\mathbf{D} = [n[\mathbf{E}n]] = n^2\mathbf{E} - n(n\mathbf{E}). \quad (77,7)$$

Если приравнять компоненты этого вектора выражениям $\epsilon_{ik}E_k$ согласно (77,1), мы получим три однородных линейных уравнения для трех составляющих вектора \mathbf{E} :

$$n^2E_i - n_in_kE_k = \epsilon_{ik}E_k$$

или

$$(n^2\delta_{ik} - n_in_k - \epsilon_{ik})E_k = 0. \quad (77,8)$$

Условие совместности этих уравнений требует обращения в нуль определителя, составленного из их коэффициентов:

$$|n^2\delta_{ik} - n_in_k - \epsilon_{ik}| = 0. \quad (77,9)$$

Фактическое вычисление этого определителя удобно производить, воспользовавшись в качестве декартовых осей координат x, y, z главными осями тензора ϵ_{ik} (называемыми в этой связи главными диэлектрическими осями). Главные значения тензора обозначим посредством $\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}, \epsilon^{(z)}$. Простое вычисление приводит к следующему уравнению:

$$n^2(\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2) - [n_x^2\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + n_y^2\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + n_z^2\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)} = 0. \quad (77,10)$$

Отметим, что старшие члены (шестой степени по n_i) при раскрытии определителя взаимно сокращаются; это обстоятельство, разумеется, не случайно и связано в конечном счете с тем, что волна имеет всего два, а не три независимых направления поляризации.

Уравнение (77,10) — так называемое уравнение Френеля — одно из основных уравнений кристаллооптики. Оно определяет в неявном виде закон дисперсии, т. е. зависимость между частотой и волновым вектором [следует помнить, что функциями частоты являются главные значения $\epsilon^{(i)}$, а в некоторых случаях (см. § 79)

также и направления главных осей тензора ϵ_{ik}]. Обычно, однако, при рассмотрении монохроматических волн частота, а с нею и все $\epsilon^{(i)}$ являются заданными постоянными величинами, и тогда уравнение (77,10) определяет абсолютную величину волнового вектора по его направлению. При заданном направлении \mathbf{n} (77,10) есть квадратное уравнение для n^2 с вещественными коэффициентами. Поэтому каждому направлению \mathbf{n} соответствуют в общем случае два различных абсолютных значения волнового вектора.

Уравнение (77,10) (с постоянными коэффициентами $\epsilon^{(i)}$) определяет в координатах n_x, n_y, n_z некоторую поверхность — «поверхность волновых векторов»¹⁾. В общем случае это есть поверхность четвертого порядка; ее подробное исследование будет произведено в следующих параграфах. Здесь же мы укажем лишь некоторые ее важные общие свойства.

Предварительно введем еще одну величину, характеризующую свет, распространяющийся в анизотропной среде. Направление световых лучей (в геометрической оптике) определяется вектором групповой скорости $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. В изотропной среде его направление всегда совпадает с направлением волнового вектора; в анизотропной же среде это, вообще говоря, не так. Для характеристики лучей мы введем вектор \mathbf{s} , по направлению совпадающий с групповой скоростью, а по абсолютной величине определяющийся равенством

$$n\mathbf{s} = 1. \quad (77,11)$$

Будем называть \mathbf{s} лучевым вектором. Смысл этой величины выясняется следующим образом.

Рассмотрим пучок лучей (с одинаковой частотой), распространяющихся во все стороны из некоторого центра. Значение эйконала ψ (совпадающего с точностью до множителя ω/c с фазой волны; см. § 65) в каждой точке луча дается интегралом $\int \mathbf{n} d\mathbf{l}$, взятым вдоль луча. Вводя вектор \mathbf{s} , определяющий направление луча, напишем

$$\psi = \int \mathbf{n} d\mathbf{l} = \int \frac{n\mathbf{s}}{s} dl = \int \frac{d\mathbf{l}}{s}.$$

В однородной среде s постоянно вдоль луча, так что $\psi = L/s$, где L — длина данного отрезка луча. Отсюда видно, что если вдоль каждого радиуса, выходящего из центра пучка лучей, отложить отрезок, равный (или пропорциональный) s , то мы получим поверхность, во всех точках которой лучи имеют одинаковую фазу. Эту поверхность называют *лучевой о*.

¹⁾ В литературе часто пользуются гораздо менее удобным построением, так называемой «поверхностью нормалей» (или «поверхностью индексов»), получающейся путем откладывания вдоль каждого направления отрезка, равного не n , а обратной величине, $1/n$.

Введенные таким образом поверхности волновых векторов и лучевая поверхность находятся в своеобразном «дуальном» взаимоотношении. Напишем уравнение поверхности волновых векторов условно в виде $f(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0$. Тогда компоненты вектора групповой скорости

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = - \frac{\partial f / \partial k_i}{\partial f / \partial \omega}, \quad (77,12)$$

т. е. пропорциональны производным $\partial f / \partial k_i$, или, что то же (поскольку эти производные берутся при постоянных ω), — производным $\partial f / \partial n_i$. Им же, следовательно, пропорциональны компоненты лучевого вектора ¹⁾. Но вектор $\partial f / \partial \mathbf{n}$ направлен по нормали к поверхности $f = 0$. Таким образом, мы приходим к результату, что направление лучевого вектора волны с заданным значением \mathbf{n} определяется нормалью к соответствующей точке поверхности волновых векторов.

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: нормали к лучевой поверхности определяют направления соответствующих волновых векторов. Действительно, перпендикулярность \mathbf{s} к поверхности волновых векторов выражается соотношением

$$\mathbf{s} \delta \mathbf{n} = 0,$$

где $\delta \mathbf{n}$ — любое бесконечно малое изменение \mathbf{n} (при заданном ω), т. е. вектор бесконечно малого смещения на поверхности. Но, дифференцируя (тоже при заданном ω) равенство $\mathbf{n} \mathbf{s} = 1$, мы получим $\mathbf{n} \delta \mathbf{s} + \mathbf{s} \delta \mathbf{n} = 0$, откуда видно, что и

$$\mathbf{n} \delta \mathbf{s} = 0,$$

чем и доказывается сделанное утверждение.

Описанная связь между поверхностями \mathbf{n} и \mathbf{s} может быть еще уточнена. Пусть \mathbf{n}_0 есть радиус-вектор какой-либо точки поверхности волновых векторов, а \mathbf{s}_0 — соответствующий ей лучевой вектор; напишем уравнение (в координатах n_x, n_y, n_z) касательной в этой точке плоскости. Это есть

$$\mathbf{s}_0 (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = 0,$$

чем выражается перпендикулярность \mathbf{s}_0 к любому вектору $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$, лежащему в данной плоскости. Поскольку \mathbf{s}_0 и \mathbf{n}_0 связаны

¹⁾ Дифференцируя левую сторону уравнения (77,10) по n_i и определяя коэффициент пропорциональности между s_i и $\partial f / \partial n_i$, из условия $\mathbf{n} \mathbf{s} = 1$ получим следующие формулы для связи между векторами \mathbf{s} и \mathbf{n} :

$$s_x = n_x \frac{\varepsilon^{(x)} (\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}) - 2\varepsilon^{(x)} n_x^2 - (\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)}) n_y^2 - (\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}) n_z^2}{2\varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)} - n_x^2 \varepsilon^{(x)} (\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}) - n_y^2 \varepsilon^{(y)} (\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}) - n_z^2 \varepsilon^{(z)} (\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)})} \quad (77,12a)$$

и аналогично — для s_y, s_z .

соотношением $s_0 n_0 = 1$, то это уравнение можно написать в виде

$$s_0 n = 1. \quad (77,13)$$

Отсюда видно, что $1/s_0$ есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, касательную к поверхности волновых векторов в точке n_0 .

Обратно: если к некоторой точке s_0 лучевой поверхности построена касательная плоскость, то длина перпендикуляра, опущенного (из начала координат) на эту плоскость, равна $1/n_0$.

Выясним расположение лучевого вектора по отношению к векторам напряженности поля в волне. Для этого замечаем, что направление групповой скорости всегда совпадает с направлением среднего (по времени) вектора потока энергии. Действительно, рассмотрим волновой пакет, заключенный в малом участке пространства. Очевидно, что при перемещении пакета сосредоточенная в нем энергия должна перемещаться вместе с ним, а это и значит, что направление ее потока совпадает с направлением скорости пакета, т. е. групповой скорости ¹⁾.

Поскольку вектор Пойнтинга перпендикулярен H и E , то мы заключаем теперь, что то же самое относится и к вектору s :

$$sH = 0, \quad sE = 0. \quad (77,14)$$

Непосредственное вычисление с помощью формул (77,5), (77,11) и (77,14) приводит к соотношениям

$$H = [sD], \quad E = -[sH]. \quad (77,15)$$

Так,

$$[sH] = [s[nE]] = n(sE) - E(ns) = -E.$$

¹⁾ Легко доказать также и математическим путем совпадение направлений групповой скорости и вектора Пойнтинга. Дифференцируя формулы (77,5) (при заданном ω), получим

$$\delta D = [\delta H \cdot n] + [H \delta n], \quad \delta H = [n \delta E] + [\delta n \cdot E].$$

Умножим первое равенство скалярно на E , а второе на H :

$$E \delta D = H \delta H + [EH] \delta n, \quad H \delta H = D \delta E + [EH] \delta n.$$

Но $D \delta E = \epsilon_{ik} E_k \delta E_i = E \delta D$; поэтому, складывая оба равенства, получим

$$[EH] \delta n = 0,$$

т. е. вектор $[EH]$ нормален поверхности волновых векторов, что и требовалось доказать.

Полученный таким образом результат относится к мгновенному (а не только к среднему) значению потока энергии. Однако в приведенном доказательстве существенным образом использована симметричность тензора ϵ_{ik} . Поэтому в таком виде результат не будет справедливым для сред с несимметричным ϵ_{ik} (гиротропные среды — см. § 82). Утверждение же для среднего значения вектора Пойнтинга справедливо и в этом случае.

Если сравнить формулы (77,15) с формулами (77,5), то мы увидим, что они получаются друг из друга заменой

$$E \text{ на } D, D \text{ на } E, n \text{ на } s, \epsilon_{ik} \text{ на } \epsilon_{ik}^{-1} \quad (77,16)$$

(причем не нарушается, разумеется, и соотношение $ns = 1$). Последняя из этих четырех замен должна быть введена для того, чтобы не нарушалась также и связь (77,1) между D и E . Таким образом, можно высказать следующее правило, полезное при различных вычислениях: если имеется какое-либо уравнение, справедливое для одного ряда перечисленных величин, то замена (77,16) приводит к правильному аналогичному уравнению для другого ряда величин.

В частности, применив это правило к уравнению (77,10), сразу же получим аналогичное уравнение для вектора s :

$$s^2 (\epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)} s_x^2 + \epsilon^{(x)} \epsilon^{(z)} s_y^2 + \epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} s_z^2) - \\ - [s_x^2 (\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + s_y^2 (\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + s_z^2 (\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + 1 = 0. \quad (77,17)$$

Этим уравнением определяется форма лучевой поверхности. Как и поверхность волновых векторов, это есть поверхность четвертого порядка. При заданном направлении s (77,17) дает квадратное уравнение для s^2 , имеющее в общем случае два различных вещественных корня. Таким образом, вдоль каждого направления в кристалле могут распространяться два луча с различными волновыми векторами.

Перейдем к вопросу о характере поляризации волн, распространяющихся в анизотропной среде. Уравнения (77,8), из которых было получено уравнение Френеля, для этой цели неудобны, так как в них входит напряженность E , в то время как поперечной в волне (по отношению к заданному n) является индукция D . Для того чтобы с самого начала учесть поперечность вектора D , выберем временно новую систему координат, одна из осей которой направлена вдоль волнового вектора волны. Две же поперечные оси будем отмечать греческими индексами, пробегающими значения 1, 2. Поперечные составляющие равенства (77,7) дают $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; подставив сюда $E_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ (где $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ — компонента тензора, обратного тензору ϵ_{ik}), получим $D_\alpha - n^2 \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta = 0$ или

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right) D_\beta = 0. \quad (77,18)$$

Условие совместности этих двух ($\alpha = 1, 2$) уравнений с двумя неизвестными D_1, D_2 заключается в равенстве нулю их определителя. Это условие совпадает, разумеется, с написанным в исходной системе координат x, y, z уравнением Френеля. Мы видим теперь, однако, что соответствующие двум значениям n векторы D

направлены вдоль главных осей двухмерного симметричного тензора второго ранга $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$. Согласно общим теоремам отсюда следует, что эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, в двух волнах с одинаковым направлением волнового вектора векторы электрической индукции линейно поляризованы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Уравнения (77,18) допускают простую геометрическую интерпретацию. Построим в системе координат x, y, z (снова возвращаемся к главным диэлектрическим осям) тензорный эллипсоид, соответствующий тензору ϵ_{ik}^{-1} , т. е. поверхность

$$\epsilon_{ik}^{-1} x_i x_k = \frac{x^2}{\epsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(z)}} = 1 \quad (77,19)$$

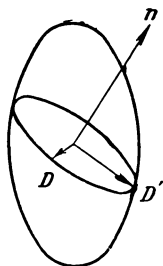


Рис. 37.

(рис. 37). Пересечем эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной к заданному направлению n . Фигурой сечения будет в общем случае эллипс; длины его главных осей определяют значения n , а их направления — соответствующие направления колебаний (векторы D).

Из этого построения (в общем случае различных $\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}, \epsilon^{(z)}$) непосредственно очевидно, в частности, что если волновой вектор направлен, скажем, вдоль оси x , то направления поляризации D будут оси y и z . Если же вектор n лежит в одной из координатных плоскостей, например в плоскости xu , то одно из направлений поляризации лежит тоже в плоскости xu , а другое — перпендикулярно к ней.

Совершенно аналогичными свойствами обладают поляризации двух волн с одинаковым направлением лучевого вектора. Вместо направлений индукции D здесь надо рассматривать направления поперечного к s вектора E , причем вместо уравнений (77,18) будем иметь аналогичные уравнения

$$\left(\frac{1}{s^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta} \right) E_\beta = 0. \quad (77,20)$$

Геометрическое построение осуществляется в этом случае с помощью тензорного эллипсоида

$$\epsilon_{ik} x_i x_k = \epsilon^{(x)} x^2 + \epsilon^{(y)} y^2 + \epsilon^{(z)} z^2 = 1, \quad (77,21)$$

соответствующего прямому тензору ϵ_{ik} (так называемый эллипсоид Френеля).

Следует подчеркнуть тот факт, что распространяющиеся в анизотропной среде плоские волны оказываются полностью линейно поляризованными в определенных плоскостях. В этом отношении оптические свойства анизотропных сред существенно отличаются от

свойств изотропных сред. Распространяющаяся в изотропной среде плоская волна в общем случае поляризована эллиптически, и лишь в частных случаях эллиптическая поляризация сводится к линейной. Это существенное отличие связано с тем, что случай полной изотропии среды является в известном смысле вырожденным: двум направлениям поляризации соответствует здесь один и тот же волновой вектор, вместо двух различных (с одинаковым направлением) в общем случае анизотропной среды; распространяясь же с одним и тем же значением n , две линейно поляризованные волны складываются в эллиптически поляризованную.

§ 78. Оптические свойства одноосных кристаллов

Оптические свойства кристалла зависят в первую очередь от симметрии его диэлектрического тензора ϵ_{ik} . В этом отношении все кристаллы делятся на три категории — кубические, одноосные и двухосные (см. § 13).

В кристалле кубической системы $\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik}$, т. е. три главных значения тензора совпадают, а направления главных осей вполне произвольны. Поэтому в отношении своих оптических свойств кубические кристаллы вообще не отличаются от изотропных тел.

К одноосным относятся кристаллы ромбоэдрической, тетрагональной и гексагональной систем. Одна из главных осей тензора ϵ_{ik} совпадает здесь с осью симметрии соответственно третьего, четвертого или шестого порядка; эту ось называют в оптике оптической осью кристалла (ниже мы выбираем эту ось в качестве оси z , а соответствующее главное значение ϵ_{ik} обозначаем как ϵ_{\parallel}). Направления же двух других главных осей (в плоскости, перпендикулярной к оптической оси) произвольны, а соответствующие главные значения диэлектрического тензора совпадают (ниже они обозначены ϵ_{\perp}).

Если в уравнении Френеля (77,10) положить $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon^{(z)} = \epsilon_{\parallel}$, то выражение в его левой части распадается на два квадратичных множителя:

$$(n^2 - \epsilon_{\perp}) [\epsilon_{\parallel} n_z^2 + \epsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}] = 0.$$

Другими словами, уравнение четвертого порядка распадается на два уравнения второго порядка:

$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad (78,1)$$

$$\frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\epsilon_{\parallel}} = 1. \quad (78,2)$$

Геометрически это означает, что поверхность волновых векторов (в общем случае — поверхность четвертого порядка) распадается на две отдельные поверхности — сферу и эллипсоид. На рис. 38 изображен продольный разрез этих поверхностей. Здесь возможны

два случая: если $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$, то сфера лежит вне эллипсоида, а если $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$ — то внутри его (в первом случае одноосный кристалл называют отрицательным, а во втором — положительным). Обе поверхности касаются друг друга в двух точках — противоположных полюсах, лежащих на оси n_z . Иначе говоря, направлению оптической оси соответствует всего одно значение волнового вектора.

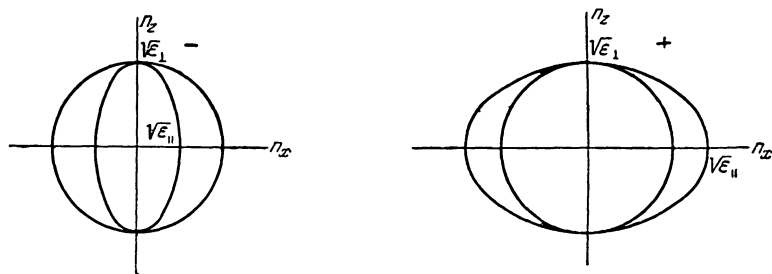


Рис. 38.

Совершенно аналогичный вид имеет лучевая поверхность. Согласно правилу (77,16) ее уравнение получается из (78,1) и (78,2) заменой \mathbf{n} на \mathbf{s} и ϵ на $1/\epsilon$:

$$s^2 = \frac{1}{\epsilon_{\perp}}, \quad (78,3)$$

$$\epsilon_{\perp} s_z^2 + \epsilon_{\parallel} (s_x^2 + s_y^2) = 1. \quad (78,4)$$

В положительном кристалле эллипсоид лежит внутри сферы, а в отрицательном — наоборот.

Таким образом, мы видим, что в одноосном кристалле могут распространяться волны двух типов. По отношению к одному из этих типов волн (так называемые обыкновенные волны) кристалл ведет себя как изотропное тело с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Абсолютная величина волнового вектора равна $\omega n/c$ вне зависимости от его направления, а направление лучевого вектора совпадает с направлением \mathbf{n} .

В волнах же второго типа (так называемые необыкновенные волны) величина волнового вектора зависит от угла θ его наклона к оптической оси. Согласно (78,2)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}. \quad (78,5)$$

Что касается лучевого вектора необыкновенной волны, то его направление не совпадает с направлением волнового вектора, но лежит в той же проходящей через оптическую ось плоскости (эту плоскость называют принадлежащим данному \mathbf{n} главным сече-

нием). Пусть эта плоскость совпадает с плоскостью zx ; дифференцируя левую сторону равенства (78,2) по n_z и по n_x и взяв отношение этих производных, найдем направление лучевого вектора:

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{\epsilon_{\perp} n_x}{\epsilon_{\parallel} n_z}.$$

Другими словами, угол θ' между лучевым вектором и оптической осью связан с углом θ простым соотношением:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta. \quad (78,6)$$

Направления \mathbf{n} и \mathbf{l} совпадают лишь для волн, распространяющихся вдоль оптической оси и перпендикулярно к ней.

Вопрос о направлении поляризации обыкновенной и необыкновенной волн решается очень просто. Для этого достаточно заметить, что четыре вектора \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{s} , \mathbf{n} во всякой волне всегда компланарны. В необыкновенной волне направления \mathbf{s} и \mathbf{n} не совпадают, но лежат в одном и том же главном сечении. Поэтому эта волна поляризована так, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} лежат в этом же сечении. С другой стороны, векторы \mathbf{D} в обыкновенной и необыкновенной волнах с одинаковым направлением \mathbf{n} (или векторы \mathbf{E} при одинаковом направлении \mathbf{s}) взаимно перпендикулярны. Поэтому поляризация обыкновенной волны такова, что \mathbf{E} и \mathbf{D} лежат в плоскости, перпендикулярной к главному сечению.

Исключением являются лишь волны, распространяющиеся в направлении оптической оси. В этом направлении различие между обыкновенной и необыкновенной волнами исчезает, их поляризации соответственно складываются, давая в общем случае эллиптически поляризованную волну.

Явление преломления плоской волны, падающей на поверхность кристалла, существенно отличается от преломления на границе двух изотропных сред. Закон преломления (и отражения) и здесь получается из условия непрерывности касательной к плоскости раздела составляющей n_t волнового вектора. Поэтому волновой вектор преломленной (как и отраженной) волны лежит в плоскости падения. При этом, однако, в кристалле возникают одновременно две различные преломленные волны (так называемое двойное преломление) соответственно двум возможным значениям нормальной компоненты n_n , даваемым уравнением Френеля при заданном n_t . Кроме того, необходимо помнить, что наблюдаемое направление распространения лучей определяется не волновым, а лучевым вектором \mathbf{s} ; оно отличается от направления \mathbf{n} и в общем случае лежит вне плоскости падения.

В одноосном кристалле при преломлении возникают обыкновенная и необыкновенная преломленные волны. Первая полностью

аналогична обычным преломленным волнам в изотропных телах; в частности, ее лучевой вектор (совпадающий по направлению с ее волновым вектором) лежит в плоскости падения. Направление же лучевого вектора необыкновенной волны лежит, вообще говоря, не в плоскости падения.

Задачи

1. Найти направление необыкновенного луча при преломлении света (падающего из пустоты) на поверхности одноосного кристалла, перпендикулярной к его оптической оси.

Решение. Преломленный луч в данном случае остается в плоскости падения (которую выберем в качестве плоскости xz с осью z по нормали к поверхности). При преломлении сохраняется x -компонента волнового вектора $n_x = \sin \vartheta$ (ϑ — угол падения); компоненту n_z для преломленной волны находим по (78,2):

$$n_z = \sqrt{\epsilon_{\perp} - \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \sin^2 \vartheta}.$$

Направление преломленного луча (ϑ' — угол преломления) находим из (78,6):

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \frac{n_x}{n_z} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp}} \sin \vartheta}{\sqrt{\epsilon_{\parallel} (\epsilon_{\parallel} - \sin^2 \vartheta)}}.$$

2. Найти направление необыкновенного луча при нормальном падении света на поверхность одноосного кристалла с произвольно направленной оптической осью.

Решение. Преломленный луч лежит в плоскости xz , проходящей через нормаль к поверхности (ось z) и оптическую ось; угол между оптической осью и нормалью пусть будет α . Лучевой вектор (компоненты которого пропорциональны производным от левой стороны уравнения (78,2) по соответствующим компонентам n) пропорционален

$$s \propto \frac{n}{\epsilon_{\parallel}} + (nl) l \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right),$$

где l — единичный вектор в направлении оптической оси. В данном случае волновой вектор n направлен по оси z , так что

$$s_x \propto \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \right), \quad s_z \propto \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}}.$$

Отсюда находим для угла преломления ϑ' :

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \sin 2\alpha}{\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \cos 2\alpha}.$$

§ 79. Двухосные кристаллы

У двухосных кристаллов все три главных значения тензора ϵ_{ik} различны. Сюда относятся кристаллы триклинной, моноклинной и ромбической систем. В кристаллах триклинной системы положение главных диэлектрических осей не связано с какими бы то ни было

определенными кристаллографическими направлениями; в частности, оно меняется с изменением частоты, от которой зависят все компоненты ϵ_{ik} . В кристаллах моноклинной системы кристаллографически фиксирована одна из главных диэлектрических осей (она совпадает с осью симметрии второго порядка или перпендикулярна к плоскости симметрии); положение же двух других главных осей зависит от частоты. Наконец, в кристаллах ромбической системы фиксировано положение всех трех главных осей — они должны совпадать с тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Изучение оптических свойств двухосных кристаллов связано с исследованием уравнения Френеля (77,10) в его общем виде.

Примем в дальнейшем для определенности, что

$$\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)} < \epsilon^{(z)}. \quad (79,1)$$

Для выяснения характера формы поверхности четвертого порядка, определяемой уравнением (77,10), прежде всего найдем форму ее сечений координатными плоскостями. Положив в уравнении (77,10) $n_z = 0$, найдем, что его левая часть распадается на два множителя:

$$(n^2 - \epsilon^{(z)})(\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 - \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}) = 0.$$

Отсюда видно, что контур сечения в плоскости xu состоит из круга

$$n^2 = \epsilon^{(z)} \quad (79,2)$$

и эллипса

$$\frac{n_x^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\epsilon^{(x)}} = 1, \quad (79,3)$$

причем согласно условию (79,1) эллипс лежит внутри круга. Аналогично найдем, что сечения плоскостями uz и xz тоже состоят из эллипса и круга, но в плоскости uz эллипс лежит вне круга, а в плоскости xz они пересекают друг друга. Таким образом, поверхность волновых векторов есть самопересекающаяся поверхность изображенного на рис. 39 типа (на рисунке изображена поверхность в одном октанте).

Эта поверхность имеет четыре особые точки — четыре точки самопересечения, лежащие по одной в каждом квадранте плоскости xz . Особые точки поверхности, заданной уравнением вида $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, определяются, как известно, равенством нулю всех трех первых производных функции f . Дифференцируя выражение в левой стороне уравнения (77,10), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} n_x [\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(x)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_y [\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(y)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_z [\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)}) - \epsilon^{(z)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0 \end{aligned} \quad (79,4)$$

(причем должно удовлетворяться, конечно, и само уравнение (77,10)). Заранее зная, что искомые направления \mathbf{n} лежат в плоскости xz , полагаем $n_y = 0$, а из двух остающихся уравнений после простого вычисления находим¹⁾:

$$n_x^2 = \frac{\varepsilon^{(z)} (\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}, \quad n_z^2 = \frac{\varepsilon^{(x)} (\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}. \quad (79,5)$$

Направления этих векторов \mathbf{n} наклонены к оси z под углом β , для которого

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm \operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)} (\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)} (\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}}. \quad (79,6)$$

Этой формулой определяются две оси (два направления) в плоскости xz , каждая из которых проходит через две противоположные

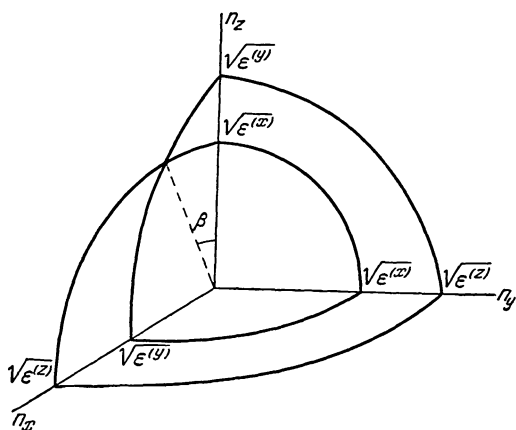


Рис. 39.

особые точки и наклонена под углом β к оси z . Они называются оптическими осями (или бинормальями) кристалла; на рис. 39 пунктиром показана одна из них. Направления оптических осей

¹⁾ Легко непосредственно убедиться в том, что найденное таким образом решение есть единственное вещественное решение уравнений (79,4). Если все три компоненты n_x, n_y, n_z отличны от нуля, то три уравнения (79,4) противоречат друг другу (в них, по существу, входят всего две неизвестные: n^2 и $\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2$). Если же $n_x = 0$ или $n_z = 0$, то уравнения имеют мнимые решения.

являются, очевидно, единственными направлениями, в которых волновой вектор может иметь всего одно значение¹⁾.

Совершенно аналогичными свойствами обладает лучевая поверхность. Для получения соответствующих формул достаточно заменить n на s и ϵ на $1/\epsilon$. В частности, имеются две «оптические оси лучей» (или «бирадиали»), расположенные тоже в плоскости xz и наклоненные к оси z под углом γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon(y) - \epsilon(x)}{\epsilon(x) - \epsilon(y)}} = \sqrt{\frac{\epsilon(x)}{\epsilon(z)}} \operatorname{tg} \beta. \quad (79,7)$$

Так как $\epsilon(x) < \epsilon(z)$, то $\gamma < \beta$.

Направления соответствующих друг другу векторов n и s определяются общими формулами (77, 12а). Направления n и s совпадают лишь для волн, распространяющихся в направлениях координатных осей (т. е. главных диэлектрических осей). Если n лежит в какой-либо из координатных плоскостей, то s лежит в той же плоскости. Из этого правила имеется, однако, одно замечательное исключение — для волновых векторов, направленных вдоль оптических осей.

При подстановке значений n из (79, 5) формулы (77, 12а) дают для компонент s неопределенность вида 0/0. Происхождение и смысл этой неопределенности вполне понятны из следующих геометрических соображений. Вблизи особой точки внешняя и внутренняя полости поверхности волновых векторов представляют собой конусы с общей вершиной. В этой вершине (особой точке) направление нормали к поверхности становится неопределенным; между тем формулы (77, 12а) определяют направление s именно как направление нормали. В действительности волновому вектору, направленному вдоль оптической оси (бинормали), соответствует бесконечное множество лучевых векторов, направления которых заполняют определенную коническую поверхность (так называемый конус внутренней конической рефракции).

Для нахождения этого конуса лучей можно было бы исследовать направления нормалей в окрестности особой точки. Более наглядно, однако, путь, основанный на геометрическом построении с помощью лучевой поверхности.

На рис. 40 изображено в одном квадранте (сплошными кривыми) сечение лучевой поверхности плоскостью xz . В этих же осях координат изображено (в произвольно измененном масштабе) сечение поверхности волновых векторов. Прямая OS есть бирадиаль, а ON — бинормаль; волновой вектор, соответствующий точке N , обозначим как n_N . Легко видеть, что особой точке N поверхности волновых векторов соответствует на лучевой поверхности особая касательная

¹⁾ На тензорном эллипсоиде (77, 19) бинормали определяются как направления, перпендикулярные к которым сечения эллипсоида являются окружностями. Как известно, трехосный эллипсоид имеет два таких сечения.

плоскость — плоскость, перпендикулярная к направлению ON и касающаяся поверхности не в отдельной точке, а по целой кривой (как оказывается, — по окружности). На рис. 40 сечение этой плоскости изображено отрезком ab . Это непосредственно следует из указанного в § 77 геометрического соответствия между поверхностью волновых векторов и лучевой поверхностью: если в какой-либо точке s лучевой поверхности провести касательную плоскость, то перпендикуляр, опущенный из начала координат на эту плоскость, совпадает по направлению с n и по величине равен $1/n$, где n — волновой вектор, соответствующий данному s . В нашем случае

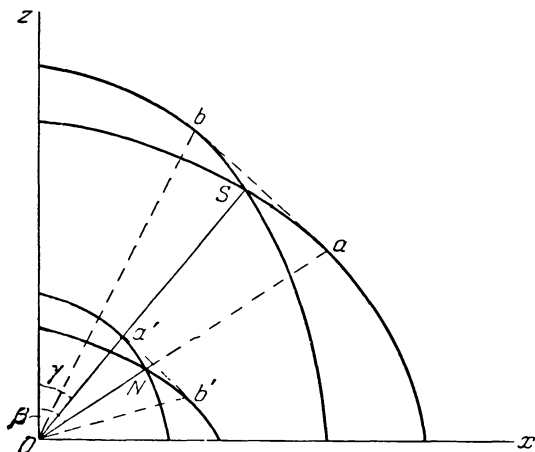


Рис. 40.

должно иметься бесконечное множество векторов \dot{s} , соответствующих одному и тому же $n = n_N$; поэтому отвечающие всем им точки лучевой поверхности должны лежать на одной и той же касательной плоскости, причем эта плоскость перпендикулярна к n_N . Таким образом, на рис. 40 треугольник Oab есть след сечения конуса внутренней конической рефракции плоскостью xz .

Количественный расчет описанной геометрической картины не представляет особых трудностей, но мы не будем излагать его здесь, ограничившись приведением окончательных формул. Уравнение окружности, по которой конус рефракции пересекает лучевую поверхность, дается совокупностью следующих двух формул:

$$(\varepsilon(z) - \varepsilon(x))s_y^2 + (s_x \sqrt{\varepsilon(x)(\varepsilon(z) - \varepsilon(y))} - s_z \sqrt{\varepsilon(z)(\varepsilon(y) - \varepsilon(x))}) \times \\ \times \left(s_x \sqrt{\frac{\varepsilon(z) - \varepsilon(y)}{\varepsilon(x)}} - s_z \sqrt{\frac{\varepsilon(y) - \varepsilon(x)}{\varepsilon(z)}} \right) = 0, \quad (79,8)$$

$$s_x \sqrt{\varepsilon(z)(\varepsilon(y) - \varepsilon(x))} + s_z \sqrt{\varepsilon(x)(\varepsilon(z) - \varepsilon(y))} = \sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon(x)}. \quad (79,9)$$

Первое из этих уравнений, если понимать в нем s_x , s_y , s_z как три независимые переменные, есть уравнение самого конуса рефракции. Второе же дает уравнение касательной (к лучевой поверхности) плоскости. В частности, при $s_y = 0$ уравнение (79, 8) распадается на два уравнения

$$\frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}}, \quad \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(z)})}{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)} - \varepsilon^{(y)})}},$$

которые определяют направления крайних лучей (соответственно Oa и Ob на рис. 40) в плоскости сечения xz . Первое из них совпадает с направлением бинормали (ср. (79, 6)), которое в то же время перпендикулярно к касательной ab .

Совершенно аналогичное положение имеет место для волновых векторов, соответствующих заданному лучевому вектору. Вектору \mathbf{s} , направленному по бирадиали, соответствует бесконечное множество волновых векторов, направления которых заполняют так называемый конус внешней конической рефракции (на рис. 40 треугольник $Oa'b'$ есть след сечения этого конуса плоскостью xz). Соответствующие формулы получаются, как всегда, заменой $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$, $\varepsilon \rightarrow 1/\varepsilon$ в формулах (79,8), (79,9) и гласят:

$$\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)})n_y^2 + (n_x \sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} - n_z \sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}) \times \\ \times (n_x \varepsilon^{(x)} \sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} - n_z \varepsilon^{(z)} \sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}) = 0, \\ n_x \sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}} + n_z \sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} = \sqrt{\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)})}$$

Для фактического наблюдения внутренней конической рефракции¹⁾ можно воспользоваться плоскопараллельной пластинкой, вырезанной из кристалла перпендикулярно к бинормали (рис. 41). Поверхность пластинки закрыта узкой диафрагмой, выделяющей из перпендикулярно падающей на пластинку плоской волны (волны с определенным направлением волнового вектора) узкий пучок. Волновой вектор в прошедшем в пластинку свете будет иметь это же направление, совпадающее с бинормалью, и потому его лучи распределятся по поверхности конуса внутренней рефракции. Свет же, выходящий из другой поверхности пластинки, имея тот же волновой вектор, что и падающий свет, распределится по поверхности кругового цилиндра.

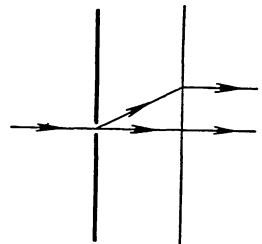


Рис. 41.

Для наблюдения же внешней конической рефракции пластинка должна быть вырезана перпендикулярно к бирадиали, а ее обе поверхности — закрыты диафрагмами с малыми отверстиями, расположенными в точности одно против другого. При освещении

1) Следующее ниже описание весьма схематично.

пластинки сходящимся пучком света (т. е. пучком, содержащим лучи со всевозможными направлениями n) диафрагмы выделяют внутри пластинки лучи с направлением s вдоль бирадиали и, соответственно, с направлениями n , заполняющими поверхность конуса внешней конической рефракции. Выходящий из второго отверстия свет распределится поэтому тоже по конической поверхности (которая, однако, вследствие преломления на выходе не точно совпадает с конусом внешней рефракции).

Законы преломления на поверхности двухосного кристалла при произвольном направлении падения чрезвычайно громоздки, и мы не будем останавливаться на них ¹⁾. Укажем лишь, что, в отличие от одноосного кристалла, обе преломленные волны являются «необыкновенными» и, в частности, их лучи не лежат в плоскости падения.

§ 80. Двойное преломление в электрическом поле

Изотропное тело в постоянном электрическом поле становится оптически анизотропным. Появление этой анизотропии может быть описано как результат изменения диэлектрической постоянной под влиянием постоянного поля. Хотя это изменение является относительно весьма слабым, но в данном случае оно существенно, так как приводит к качественному изменению оптических свойств тела.

Будем обозначать в этом параграфе посредством E напряженность постоянного электрического поля в теле ²⁾ и произведем разложение диэлектрического тензора ϵ_{ik} по степеням этой величины. В изотропном теле в нулевом приближении $\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik}$. Членов первого порядка по полю в ϵ_{ik} не может быть, так как в изотропном теле не существует никакого постоянного вектора, с помощью которого можно было бы составить линейный по E тензор второго ранга. Поэтому следующие члены разложения ϵ_{ik} будут квадратичными по полю. Из компонент вектора можно составить два симметричных тензора второго ранга: $E^2\delta_{ik}$ и E_iE_k . Из них первый не меняет симметрии тензора $\epsilon^{(0)}\delta_{ik}$, и прибавление к последнему члена вида $\text{const} \cdot E^2\delta_{ik}$ сводится просто к малой поправке к скалярной постоянной $\epsilon^{(0)}$; эта поправка не приводит, очевидно, к появлению какой-либо оптической анизотропии и потому не представляет интереса. Таким образом, мы приходим к следующему виду зависящего от поля диэлектрического тензора:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k, \quad (80,1)$$

где α — скалярная постоянная.

¹⁾ Подробное изложение соответствующих вычислений можно найти в Handbuch d. Physik, Bd. XX, Berlin, 1928.

²⁾ Не смешивать с напряженностью обычно весьма слабого переменного электрического поля волны!

Одна из главных осей этого тензора совпадает с направлением электрического поля, и соответствующее главное значение равно

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon^{(0)} + \alpha E^2. \quad (80,2)$$

Остальные два главных значения равны друг другу,

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon^{(0)}, \quad (80,3)$$

а положение соответствующих главных осей в плоскости, перпендикулярной к полю, произвольно. Таким образом, изотропное тело в электрическом поле ведет себя в оптическом отношении как одноосный кристалл (так называемый эффект Керра).

Изменение оптической симметрии в электрическом поле может иметь место и у кристалла (так, оптически одноосный кристалл может превратиться в двухосный, оптически изотропный кубический кристалл может стать оптически анизотропным). В отличие от соответствующего явления у изотропных тел, здесь эффект может быть и первого порядка по полю. Этому линейному эффекту соответствует диэлектрический тензор вида

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l,$$

где совокупность коэффициентов α_{ikl} составляет тензор третьего ранга, симметричный по индексам i и k ($\alpha_{ikl} = \alpha_{kil}$). Симметрия этого тензора совпадает с симметрией пьезоэлектрического тензора. Поэтому рассматриваемый эффект существует у кристаллов тех же 20 классов, которые допускают пьезоэлектричество.

§ 81. Динамооптические явления

Наряду с рассмотренным в предыдущем параграфе эффектом Керра существуют и другие случаи изменения оптической симметрии среды под влиянием внешних воздействий.

Сюда относится, прежде всего, влияние упругих деформаций на оптические свойства твердых тел. В частности, в результате деформации изотропное твердое тело может стать оптически анизотропным. Эти явления описываются введением в $\epsilon_{ik}(\omega)$ дополнительных членов, пропорциональных компонентам тензора деформации. Соответствующие формулы имеют вид, в точности совпадающий с формулами (16,1) и (16,6), которые были написаны для статической диэлектрической проницаемости, с той лишь разницей, что стоящие в них коэффициенты являются теперь функциями частоты. Так, при деформации изотропного тела

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)} \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll} \delta_{ik}. \quad (81,1)$$

Коэффициенты $a_1(\omega)$ и $a_2(\omega)$ называют упругооптическими постоянными.

Другой случай — это возникновение оптической анизотропии в движущейся жидкости. Разумеется, поступательное движение жидкости как целого не может привести ни к какой анизотропии; поэтому необходимо наличие в ней градиентов скорости. Соответствующее общее выражение для диэлектрического тензора

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)} \delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (81,2)$$

представляет собой первые члены разложения ϵ_{ik} по степеням производных скорости. В несжимаемой жидкости $\partial v_i / \partial x_i \equiv \text{div } \mathbf{v} = 0$, и два последних члена в (81,2) дают при упрощении нуль. При этом $\epsilon^{(0)}$ совпадает с диэлектрической проницаемостью неподвижной жидкости ¹⁾.

Второй и третий члены в (81,2) соответственно симметричен и антисимметричен по индексам i, k . При равномерном вращении жидкости как целого $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]$ ($\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения) и симметричный член обращается в нуль. Неравный же нулю антисимметричный член представляет собой при этом эффект (пропорциональный первой степени $\mathbf{\Omega}$), возникающий под действием кориолисовых сил ²⁾. Но в классической статистике кориолисовы силы вообще не влияют на свойства вращающихся тел ³⁾. Это значит, что коэффициент λ_2 в (81,2) должен был бы равняться нулю, а отличные от нуля значения λ_2 могут быть связаны лишь с квантовыми эффектами.

Фактически рассматриваемые явления имеют заметную величину лишь в таких объектах, как суспензии и коллоидальные растворы с анизотропными по форме частицами. Квантовые эффекты при этом, естественно, сравнительно ничтожны, так что $\lambda_2 \ll \lambda_1$ и достаточно писать

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)} \delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (81,3)$$

Описываемый этой формулой так называемый эффект Максвелла связан с ориентирующим воздействием градиентов скорости на взвешенные в жидкости частицы.

¹⁾ Во избежание недоразумений подчеркнем, что к выражению (81,2) не применимы те соотношения симметрии, которые рассматриваются в § 88 (обобщенный принцип симметрии кинетических коэффициентов). Вывод последних предполагает, что процессы, описываемые рассматриваемыми коэффициентами, являются единственным источником диссипации энергии в системе. Но в данном случае наряду с диссипацией в переменном электромагнитном поле волны имеется еще и другой источник диссипации, не имеющий никакого отношения к полю — внутреннее трение в неоднородном потоке жидкости.

²⁾ Об оптических свойствах, связанных с антисимметричной частью тензора ϵ_{ik} , см. § 82.

³⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 34.

§ 82. Магнитооптические эффекты

При наличии постоянного магнитного поля H^1) тензор ϵ_{ik} перестает быть симметричным. Обобщенный принцип симметрии кинетических коэффициентов, выражаемый формулой (88,13), требует:

$$\epsilon_{ik}(H) = \epsilon_{ki}(-H). \quad (82,1)$$

Условие отсутствия поглощения требует лишь эрмитовости этого тензора:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^* \quad (82,2)$$

(как это видно из (76,4)), а не его вещественности. Из (82,2) следует только, что вещественная и мнимая части ϵ_{ik} должны быть соответственно симметричной и антисимметричной:

$$\epsilon'_{ik} = \epsilon'_{ki}, \quad \epsilon''_{ik} = -\epsilon''_{ki}. \quad (82,3)$$

Учитывая (82,1), имеем

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ik}(H) &= \epsilon'_{ki}(H) = \epsilon'_{ik}(-H), \\ \epsilon''_{ik}(H) &= -\epsilon''_{ki}(H) = -\epsilon''_{ik}(-H), \end{aligned} \quad (82,4)$$

т. е. в непоглощающей среде величины ϵ'_{ik} являются четными, а ϵ''_{ik} — нечетными функциями H .

Такими же свойствами симметрии обладает, очевидно, и обратный тензор ϵ_{ik}^{-1} . В дальнейших вычислениях будет удобнее пользоваться именно этим тензором. Во избежание многочисленных индексов мы введем для него специальное обозначение²⁾:

$$\epsilon_{ik}^{-1} = \eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}. \quad (82,5)$$

Как известно, всякий антисимметрический тензор второго ранга эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору; для тензора η''_{ik} мы обозначим этот вектор посредством G . С помощью совершенно антисимметрического единичного тензора e_{ikl} связь между компонентами тензора η''_{ik} и вектора G записывается в виде

$$\eta''_{ik} = e_{ikl} G_l, \quad (82,6)$$

а в компонентах:

$$\eta''_{xy} = G_z, \quad \eta''_{zx} = G_y, \quad \eta''_{yz} = G_x.$$

Связь $E_i = \eta_{ik} D_k$ между электрической индукцией и напряженностью принимает при этом следующий вид:

$$E_i = (\eta'_{ik} + i e_{ikl} G_l) D_k = \eta'_{ik} D_k + i [DG]_i. \quad (82,7)$$

1) Не смешивать с периодическим слабым по тем электромагнитной волны!

2) Разумеется, η'_{ik} и η''_{ik} сами не являются тензорами, обратными ϵ'_{ik} и ϵ''_{ik} .

Среду с такой формой зависимости E от D называют гиротропной¹⁾.

Произведем общее исследование характера волн, распространяющихся в произвольной гиротропной среде, считая при этом среду анизотропной и не делая никаких предположений о величине магнитного поля²⁾.

Выберем направление волнового вектора в качестве оси z и напишем уравнения (77,18):

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = \left(\eta'_{\alpha\beta} + i\eta''_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = 0, \quad (82,8)$$

где индексы α, β пробегает значения x, y . Направления осей x и y мы выберем вдоль главных осей двухмерного тензора $\eta'_{\alpha\beta}$, а соответствующие главные значения этого тензора обозначим как n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2} ; тогда уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_x + iG_z D_y &= 0, \\ -iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_y &= 0. \end{aligned} \quad (82,9)$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает квадратное по n^2 уравнение:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_z^2, \quad (82,10)$$

1) Вектором гирации обычно называют вектор g в прямой связи

$$D_i = \varepsilon'_{ik} E_k + l [Eg]. \quad (82,7a)$$

Связь между коэффициентами в (82,7) и (82,7a) дается следующими формулами (ср. задачу 1 § 21):

$$\begin{aligned} \eta'_{ik} &= \frac{1}{|\varepsilon|} \left\{ \varepsilon'_{ik}{}^{-1} |\varepsilon'| - g_i g_k \right\}, \\ G_i &= -\frac{1}{|\varepsilon|} \varepsilon'_{ik} g_k, \end{aligned} \quad (82,76)$$

где $|\varepsilon|$ и $|\varepsilon'|$ — определители тензоров ε_{ik} и ε'_{ik} .

2) Мы по-прежнему будем считать среду немагнитной по отношению к переменному полю электромагнитной волны (т. е. полагаем $\mu_{ik}(\omega) = \delta_{ik}$). Этим, однако, не исключается возможность намагничения среды постоянным полем (т. е. статическая проницаемость может быть отлична от 1).

Все излагаемые свойства $\varepsilon_{ik}(\omega)$ в той же степени относятся к тензору $\mu_{ik}(\omega)$, когда в данной области частот существенна дисперсия магнитной проницаемости.

корни которого определяют два значения n , относящиеся к заданному направлению n^1):

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right)^2 + G_z^2}. \quad (82,11)$$

Подставляя эти значения обратно в уравнения (82,9), найдем соответствующие отношения:

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{i}{G_z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right)^2 + G_z^2} \right]. \quad (82,12)$$

Чисто мнимое отношение D_y/D_x означает, что волны эллиптически поляризованы, причем главные оси эллипсов поляризации совпадают с осями x , y . Произведение двух значений этого отношения равно, как легко видеть, единице. Другими словами, если в одной волне

$$D_y = i\rho D_x$$

(где вещественное число ρ есть отношение длин осей эллипса поляризации), то во второй волне

$$D_y = -\frac{i}{\rho} D_x.$$

Это значит, что эллипсы поляризации двух волн имеют одинаковое отношение осей, но повернуты друг относительно друга на 90° ; направление вращения в них противоположно (рис. 42)²⁾.

Компоненты вектора \mathbf{G} и тензора η'_{ik} являются функциями напряженности магнитного поля. Если (как это обычно имеет место) магнитное поле является сравнительно слабым, то можно произвести разложение по его степеням. Вектор \mathbf{G} равен нулю в отсутствие поля; поэтому в слабом поле можно положить

$$G_i = f_{ik} H_k, \quad (82,13)$$

1) В отсутствие поля $\mathbf{G} = 0$ и $n = n_{01}$ или n_{02} . Следует, однако, иметь в виду, что при наличии поля величины n_{01} и n_{02} в уравнении (82,10) не имеют, вообще говоря, смысла значений n при $\mathbf{H} = 0$, так как от поля зависит не только вектор \mathbf{G} , но и компоненты тензора η'_{ik} .

2) Если обозначить векторы \mathbf{D} в обеих волнах как \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 , то полученные соотношения могут быть записаны в виде

$$D_1 D_2^* = D_{1x} D_{2x}^* + D_{1y} D_{2y}^* = 0.$$

Такое соотношение является общим свойством собственных векторов, возникающих при приведении к главным осям эрмитова тензора (в данном случае — тензора $\eta'_{\alpha\beta}$).

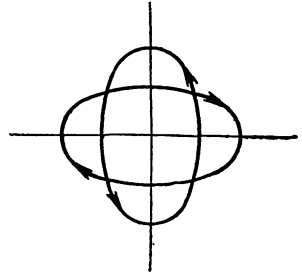


Рис. 42.

где f_{ik} — тензор второго ранга, в общем случае несимметричный. Такая форма зависимости находится в согласии с общим правилом (§ 76), согласно которому в прозрачной среде компоненты антисимметрического тензора η'_{ik} (как и тензора ϵ''_{ik}) должны быть нечетными функциями H . Что же касается симметричного тензора η'_{ik} , то его компоненты являются четными функциями магнитного поля. Поэтому первые поправочные (по сравнению со значениями в отсутствие поля) члены в η'_{ik} — второго порядка по полю¹⁾.

В общем случае произвольного направления волнового вектора магнитное поле сравнительно мало влияет на распространение света в кристалле, вызывая лишь появление слабой эллиптичности колебаний с малым (первого порядка по полю) отношением длин осей эллипса поляризации.

Исключение в отношении характера магнитооптического эффекта представляют лишь направления оптических осей (и близкие к ним), вдоль которых оба значения n в отсутствие поля совпадают. Корни уравнения (82,10) отличаются тогда от этих значений на величины первого порядка малости²⁾ и возникают эффекты, аналогичные эффектам в изотропных телах, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем.

Магнитооптический эффект в изотропных телах (а также в кристаллах кубической системы) представляет особый интерес ввиду его своеобразного характера и сравнительно большой величины.

Пренебрегая величинами второго порядка малости, имеем $\eta'_{ik} = \epsilon^{-1}\delta_{ik}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость изотропной среды в отсутствие магнитного поля. Зависимость между D и E дается формулой

$$E = \frac{1}{\epsilon} D + i [DG], \quad (82,14)$$

или же

$$D = \epsilon E + i [EG], \quad (82,15)$$

причем векторы g и G связаны, в том же приближении, соотношением

$$G = -\frac{1}{\epsilon^2} g. \quad (82,16)$$

1) При пренебрежении величинами второго порядка формулы (82,76) сводятся к следующим более простым соотношениям:

$$\eta'_{ik} = \epsilon'^{-1}_{ik}, \quad G_i = -\frac{1}{|\epsilon'|} \epsilon'_{ik} g_k. \quad (82,13a)$$

2) Обратим внимание на то, что оба корня уравнения (82,10) при этом несколько отличаются друг от друга. Геометрически это означает, что обе полости (внутренняя и внешняя) поверхности волновых векторов оказываются полностью разделенными.

Зависимость \mathbf{g} (или \mathbf{G}) от внешнего поля сводится в изотропной среде к простой пропорциональности:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \quad (82,17)$$

скалярная постоянная может быть как положительной, так и отрицательной.

В уравнении (82,10) имеем теперь $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\varepsilon}$; это есть коэффициент преломления в отсутствие поля. Отсюда

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} \mp G_z$$

или, с той же точностью,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \quad (82,18)$$

Вспоминая, что ось z выбрана вдоль вектора \mathbf{n} , можно написать эту формулу с той же точностью в следующем векторном виде:

$$\left(\mathbf{n} \mp \frac{1}{2n_0} \mathbf{g}\right)^2 = n_0^2. \quad (82,19)$$

Отсюда видно, что поверхность волновых векторов представляет собой в данном случае собокупность двух сфер радиуса n_0 , центры которых смещены вдоль направления \mathbf{G} на расстояние $\pm g/2n_0$ от начала координат.

Каждому из двух значений n соответствует своя поляризация волны; именно,

$$D_x = \mp iD_y, \quad (82,20)$$

где знаки соответствуют знакам в (82,18). Равенство абсолютных значений D_x и D_y при сдвиге фаз между ними $\mp \pi/2$ означает круговую поляризацию волны с направлением вращения вектора \mathbf{D} соответственно против и по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления волнового вектора (или, как принято говорить, соответственно право- и левополяризованные волны).

Разница между показателями преломления лево- и правополяризованных волн приводит к тому, что при преломлении на поверхности гиротропного тела возникают две поляризованные по кругу преломленные волны (так называемое двойное круговое преломление).

Пусть линейно поляризованная плоская волна падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества (толщины l). Направление падения выберем в качестве оси z , а направление вектора $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ в падающей волне — в качестве оси x . Линейное колебание можно представить в виде суммы двух круговых колебаний с противоположными направлениями вращения, которые будут затем распространяться в слое вещества с различными волновыми

векторами $k_{\pm} = (\omega/c)n_{\pm}$. Положив амплитуду волны условно равной единице, будем иметь

$$D_x = \frac{1}{2}(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}), \quad D_y = \frac{l}{2}(-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}),$$

или, вводя $k = 1/2(k_+ + k_-)$ и $\chi = 1/2(k_+ - k_-)$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz}(e^{i\chi z} + e^{-i\chi z}) = e^{ikz} \cos \chi z,$$

$$D_y = \frac{l}{2}e^{ikz}(-e^{i\chi z} + e^{-i\chi z}) = e^{ikz} \sin \chi z.$$

при выходе волны из слоя будем иметь

$$\frac{D_y}{D_x} = \operatorname{tg} \chi l = \operatorname{tg} \left(l \frac{\omega g}{2cn_0} \right).$$

Вещественность этого отношения означает, что волна остается линейно поляризованной, но с повернутым относительно первоначального направлением поляризации (так называемый эффект Фарадея). Угол поворота плоскости поляризации пропорционален пройденному волной пути; на единице длины вдоль направления волнового вектора он составляет

$$\frac{\omega g}{2cn_0} \cos \theta,$$

где θ — угол между n и g .

Следует отметить, что при заданном направлении магнитного поля направление вращения плоскости поляризации (по отношению к направлению n) при изменении знака n меняется на обратное — правое вращение переходит в левое и наоборот. Поэтому, если луч проходит один и тот же путь дважды (туда и обратно), то суммарное вращение плоскости поляризации будет вдвое больше, чем после одного прохождения.

При $\theta = \pi/2$ (волновой вектор перпендикулярен к магнитному полю) линейный по полю эффект, описываемый формулами (82,18), исчезает (в соответствии с указанным выше общим правилом, что из всех компонент вектора g на распространение света влияет лишь его проекция на направление n). Поэтому при углах θ , близких к $\pi/2$, должны учитываться также и члены, пропорциональные квадрату поля. В частности, должны быть учтены члены второго порядка и в тензоре η'_{ik} . В силу аксиальной симметрии вокруг направления поля два главных значения симметрического тензора η'_{ik} будут одинаковы (как у одноосного кристалла). Мы выбираем ниже ось x вдоль направления поля и обозначаем главные значения η'_{ik} в направлениях параллельно и перпендикулярно к магнитному полю посредством η_{\parallel} и η_{\perp} ; разность $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ пропорциональна H^2 .

Рассмотрим чисто квадратичный эффект, возникающий при взаимно перпендикулярных n и g (так называемый эффект Коттона —

М у т о н а). В уравнениях (82,9) и (82,10) имеем в этом случае $G_z = 0$, а n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2} равны соответственно η_{\parallel} и η_{\perp} . Таким образом, в одной из волн

$$\frac{1}{n^2} = \eta_{\parallel}, \quad D_y = 0;$$

эта волна линейно поляризована, с вектором D , направленным параллельно оси x . В другой же волне

$$\frac{1}{n^2} = \eta_{\perp}, \quad D_x = 0,$$

т. е. в ней D направлен вдоль оси y . Пусть линейно поляризованный свет падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества, находящийся в параллельном ему магнитном поле. Две компоненты прошедшего в вещество света (с векторами D в плоскостях xz и yz) распространяются с различными значениями n . В результате этого свет, выходящий через противоположную сторону слоя, оказывается эллиптически поляризованным.

Задачи

1. Определить направления лучей при преломлении падающего из пустоты луча на поверхности изотропного тела в магнитном поле.

Решение. Направление лучевого вектора s определяется нормалью к поверхности волновых векторов; дифференцируя левую сторону уравнения (82,19) по компонентам вектора n , найдем, что вектор s пропорционален $n \pm g/2n_0$. Квадрат абсолютной величины этого выражения равен n_0^2 , поэтому единичный вектор в направлении луча дается формулой

$$\frac{s}{s} = \frac{1}{n_0} \left(n \pm \frac{1}{2n_0} g \right). \quad (1)$$

Обозначим угол падения посредством θ . Преломленные лучи не лежат, вообще говоря, в плоскости падения, и их направление определяется углом θ' с направлением нормали к поверхности и азимутом φ' , отсчитываемым от плоскости падения. Выберем последнюю в качестве плоскости xz с осью z , перпендикулярной к преломляющей поверхности. При преломлении остаются постоянными компоненты n_x, n_y волнового вектора. В падающем луче они равны $n_x = \sin \theta, n_y = 0$. Подставив эти значения в (1), найдем x - и y -компоненты единичного вектора s/s , непосредственно дающие направление преломленных лучей:

$$\sin \theta' \cos \varphi' = \frac{1}{n_0} \sin \theta \pm \frac{1}{2n_0^2} g_x,$$

$$\sin \theta' \sin \varphi' = \pm \frac{g_y}{2n_0^2}.$$

При не слишком малых углах падения малым является азимут φ' и можно написать

$$\varphi' = \pm \frac{g_y}{2n_0 \sin \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{n_n} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}.$$

При нормальном падении ($\theta = 0$) выбираем плоскость xz проходящей через вектор \mathbf{G} ; тогда $\varphi' = 0$, а для θ' имеем

$$\theta' \cong \sin \theta' = \pm \frac{1}{2n_c^2} g_x.$$

Хотя в эту формулу и не входит g_z , но она неприменима, если $g_z = 0$, так как при взаимно перпендикулярных \mathbf{n} и \mathbf{g} недостаточно линейное приближение по полю.

2. Определить поляризацию отраженного света при нормальном падении линейно поляризованной волны из пустоты на поверхность изотропного тела в магнитном поле.

Решение. При нормальном падении направление волнового вектора остается неизменным при переходе волны во вторую среду. Поэтому во всех волнах (падающей, отраженной и преломленной) векторы \mathbf{H} параллельны поверхности раздела (плоскость xy). Что же касается электрического вектора \mathbf{E} , то в падающей и отраженной волнах он тоже параллелен плоскости xy , а в преломленной волне, хотя $E_z \neq 0$, связь между x - и y -компонентами \mathbf{E} и \mathbf{H} такая же, как в изотропном теле ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Если поляризация падающей волны совпадает с поляризацией одного из двух типов волн, которые могут распространяться в данной анизотропной (преломляющей) среде в данном направлении \mathbf{n} , то возникает всего одна преломленная волна с этой же поляризацией. В таких условиях задача формально не отличается от задачи об отражении от изотропного тела, и поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_0 в отраженной и падающей волнах связаны друг с другом посредством

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1-n}{1+n} \mathbf{E}_0 \quad (1)$$

где n — соответствующий данной поляризации коэффициент преломления.

Линейную поляризацию можно рассматривать как результат сложения двух круговых поляризаций с противоположными направлениями вращения; если в падающей волне \mathbf{E}_0 направлен по оси x , то пишем $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^+ + \mathbf{E}_0^-$, где

$$\mathbf{E}_{0x}^+ = i\mathbf{E}_{0y}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{E}_{0x}^- = -i\mathbf{E}_{0y}^- = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0.$$

Воспользовавшись для каждой из волн \mathbf{E}_0^\pm формулой (1) с соответствующим n_\pm из (82,18), получим:

$$E_{1x} = \frac{F_0}{2} \left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-} \right] \cong E_0 \frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{iE_0}{2} \left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+} \right] \cong iE_0 \frac{\sigma \cos \theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ — угол между направлением падения и вектором \mathbf{g}). Отсюда видно, что отраженная волна эллиптически поляризована, причем большая ось эллипса расположена по оси x , а отношение малой оси к большой равно

$$\frac{g \cos \theta}{n_0(n_0^2 - 1)}.$$

3. Определить предельный закон зависимости вектора гирации от частоты при больших значениях последней.

Решение. Вычисления аналогичны произведенным в § 59, с той разницей, что в уравнение движения электрона надо добавить лоренцову силу от внешнего постоянного магнитного поля H :

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = eE_0 e^{-i\omega t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}'H].$$

При соблюдении условия $\omega \gg eH/mc$ это уравнение можно решать последовательными приближениями. С точностью до члена первого порядка по H получим

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2 c} [EH],$$

после чего найдем индукцию в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + if(\omega) [EH],$$

где $\varepsilon(\omega)$ совпадает с (59,1), а

$$f(\omega) = -\frac{4\pi Ne^3}{cm^2\omega^3}.$$

§ 83. Естественная оптическая активность

Частотная дисперсия диэлектрической (и магнитной) проницаемости является выражением зависимости макроскопических свойств вещества от временного изменения электромагнитного поля. Зависимость же от пространственной неоднородности во всей предыдущей теории вообще не учитывалась. Условие допустимости такого пренебрежения заключается в малости атомных размеров a по сравнению с длиной волны λ (см. § 58).

Неравенство $a \ll \lambda$ является необходимым условием применимости макроскопической теории вообще. Но при полном пренебрежении величинами, содержащими малое отношение a/λ , выпадают некоторые качественно новые явления, появляющиеся при учете следующих после нулевого членов разложения по a/λ . К изучению этих явлений мы теперь и обратимся.

Разложению по степеням a/λ соответствует в макроскопической теории разложение индукции \mathbf{D} по степеням не только самого поля \mathbf{E} , но и его пространственных производных. Ограничиваясь членами первого порядка, мы должны учесть в этом разложении члены, пропорциональные первым степеням производных первого порядка. Для монохроматического (с частотой ω) поля мы напишем разложение в виде

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}, \quad (83,1)$$

где величины $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ и γ_{ikl} являются функциями частоты.

Перед тем как перейти к исследованию этого выражения, необходимо сделать следующее замечание. При интересующей нас теперь степени точности теряет физический смысл разделение среднего значения микроскопической плотности тока $\rho\mathbf{v}$ на две части — $\partial\mathbf{P}/\partial t$

и с rot \mathbf{M} . Поэтому в излагаемой теории представляется рациональным писать уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (83,2)$$

не вводя наряду со средней напряженностью $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ микроскопического магнитного поля еще другую величину \mathbf{H} . Вместо этого все члены, возникающие в результате усреднения микроскопических токов, предполагаются включенными в определение \mathbf{D} .

Свойства симметрии тензора γ_{ikl} в (83,1) выясняются путем применения обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов, подобно тому как это было сделано в § 76 для тензора ϵ_{ik} . Мы видели там, что если в качестве величин x_a выбрать компоненты вектора \mathbf{E} в каждой точке тела, то соответствующими величинами f_a будут компоненты вектора \mathbf{D} . Однако наличие пространственных производных в соотношениях (83,1) затрудняет непосредственное применение принципа симметрии. Здесь удобно применить последний в следующей формулировке. Пусть x_a и x'_a — два различных набора значений величин x_a , а f_a и f'_a — соответствующие им наборы значений величин f_a . В силу симметрии ($\alpha_{ab} = \alpha_{ba}$) коэффициентов в соотношениях

$$x_a = \sum_b \alpha_{ab} f_b, \quad x'_b = \sum_a \alpha_{ab} f'_a$$

мы можем написать

$$\sum_a x_a f'_a = \sum_a x'_a f_a. \quad (83,3)$$

В данном случае это равенство принимает вид

$$\int E_i D'_i dV = \int E'_i D_i dV.$$

Подставив сюда (83,1) и учтя известную уже нам симметрию $\epsilon_{ik}^{(0)}$, получим

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = \int \gamma_{ikl} E'_i \frac{\partial E_k}{\partial x_l} dV$$

или, производя в одной из сторон равенства интегрирование по частям,

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E'_i}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{kil} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV.$$

Ввиду произвольности функций E и E' отсюда следует искомое свойство симметрии:

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{ilk}. \quad (83,4)$$

Далее будем предполагать, что в среде отсутствует поглощение. Выясним, какие условия налагаются этим на тензор γ_{ikl} . Диссипация энергии в периодическом поле дается средним (по времени) значением интеграла

$$-\frac{1}{4\pi} \int E \frac{\partial D}{\partial t} dV.$$

Здесь E и D вещественны; если же пользоваться комплексным представлением величин, то усредняемый интеграл можно написать как

$$-\frac{1}{16\pi} \int \left(E \frac{\partial D^*}{\partial t} + E^* \frac{\partial D}{\partial t} \right) dV = -\frac{i\omega}{16\pi} \int (ED^* - E^*D) dV.$$

Подставив сюда (83,1) и учитывая известную уже нам вещественность $\epsilon_{ik}^{(0)}$ в прозрачной среде, получим

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} - \gamma_{ikl} E_i^* \frac{\partial E_k}{\partial x_l} \right) dV = \\ = -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} + \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E_i^*}{\partial x_l} \right) dV = \\ = -\frac{i\omega}{16\pi} \int (\gamma_{ikl}^* + \gamma_{kil}) E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} dV. \end{aligned}$$

Это выражение тождественно обращается в нуль при условии

$$\gamma_{ikl}^* = -\gamma_{kil} = \gamma_{ilk}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что условие отсутствия поглощения требует вещественности тензора γ_{ikl} .

Для плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{n}$ имеем

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_l} = i \frac{\omega}{c} E_k n_l,$$

так что

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k,$$

где введено обозначение

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + i \frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} n_l \quad (83,5)$$

для тензора диэлектрической проницаемости, обладающего теперь дисперсией как по частоте, так и по волновому вектору¹⁾.

1) При $\omega \rightarrow 0$ величины γ_{ikl} , не имеющие отношения к разложению по частотам, стремятся к постоянным значениям. Мнимая же часть ϵ_{ik} стремится, следовательно, к нулю пропорционально первой степени частоты.

Введем вместо антисимметрического тензора второго ранга $\gamma_{ikl}n_l$ дуальный ему аксиальный «вектор гирации» \mathbf{g} согласно

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} n_l = e_{ikl} g_l, \quad (83,6)$$

т. е. напомним ε_{ik} в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + i e_{ikl} g_l, \quad (83,7)$$

формально совпадающем с использованной в § 82 формой записи. Разница заключается в том, что там вектор \mathbf{g} зависел только от свойств среды (и приложенного магнитного поля), между тем как здесь вектор гирации зависит и от волнового вектора поля. Согласно (83,6) компоненты этого вектора являются линейными функциями компонент \mathbf{n} , т. е.

$$g_i = g_{ik} n_k. \quad (83,8)$$

Подставив (83,8) в (83,6), найдем

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} n_l = e_{ikm} g_m n_l,$$

откуда ввиду произвольности \mathbf{n}

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} = e_{ikm} g_m, \quad (83,9)$$

чем устанавливается связь между компонентами истинного тензора третьего ранга γ_{ikl} и псевдотензора второго ранга g_{ik} ¹⁾.

Конкретная кристаллографическая симметрия тела накладывает определенные ограничения на компоненты тензора γ_{ikl} (или g_{ik}) и, в частности, может приводить к тождественному равенству нулю всех компонент. Так, тензор γ_{ikl} не может существовать у тел, обладающих центром симметрии. Действительно, при изменении знака всех трех координат (инверсия) все компоненты тензора третьего ранга (и соответственно псевдотензора второго ранга) меняют знак, между тем как симметрия тела требовала бы их неизменности при этом преобразовании.

О телах с отличным от нуля тензором g_{ik} говорят, что они обладают естественной оптической активностью. Таким образом, существование оптической активности во всяком случае требует отсутствия у тела центра симметрии.

Рассмотрим сначала естественную оптическую активность изотропных тел. Если жидкость (или газ) состоит из вещества, не имеющего стереоизомеров, то она симметрична не только по отношению к любому повороту, но и по отношению к отражению (инверсии) в любой точке, и естественная активность в ней исклю-

1) В компонентах:

$$g_{xx} = \frac{\omega}{c} \gamma_{yzz}, \quad g_{xy} = \frac{\omega}{c} \gamma_{yzy}, \quad g_{yx} = \frac{\omega}{c} \gamma_{zxx}$$

чена. Оптически активными являются лишь жидкости из веществ с двумя стереоизомерными формами, причем оба изомера должны содержаться в жидкости в различных количествах; такая жидкость не обладает центром симметрии.

В изотропном теле (а также в кристаллах с кубической симметрией) псевдотензор g_{ik} сводится к псевдоскаляру:

$$g_{ik} = f\delta_{ik} \quad (83,10)$$

(тензор же γ_{ikl} выражается через f согласно $\gamma_{ikl} = (c/\omega) f e_{ikl}$). Псевдоскаляр есть величина, меняющая знак при инверсии координат. Два стереоизомерных вещества формально переходят друг в друга в результате операции инверсии; поэтому их значения величины f имеют противоположные знаки.

Таким образом, у оптически активного изотропного тела вектор гирации $g = fn$, и связь между индукцией и напряженностью электрического поля волны дается формулой

$$D = \varepsilon^{(0)}E + if[En]. \quad (83,11)$$

Так как $Dn = 0$, то отсюда следует, что и $En = 0$. Другими словами, в такой волне поперечна (по отношению к направлению n) не только индукция D , как во всякой среде, но и напряженность E .

Изменение показателя преломления n при учете естественной активности вещества является малой величиной. Поэтому при ее определении можно положить в малом члене $[Eg]$ в (83,11) $n = n_0 = \sqrt{\varepsilon^{(0)}}$. Тогда задача о вычислении разности $n - n_0$ формально совпадает с рассмотренной в предыдущем параграфе задачей об изменении n под влиянием магнитного поля, отличаясь от нее лишь смыслом вектора g и тем, что он всегда параллелен направлению n (ось z в § 82). Поэтому по аналогии с формулой (82,18) мы можем сразу написать

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm fn_0. \quad (83,12)$$

Этим двум значениям соответствуют (ср. (82,20)) следующие отношения обеих компонент вектора E (или D):

$$E_x = \pm iE_y, \quad (83,13)$$

т. е. круговая левая и правая поляризация волн. Отметим также, что величина вектора n не зависит от его направления; поэтому направления n и лучевого вектора s совпадают.

Таким образом, мы видим, что оптические свойства естественно-активного изотропного тела имеют сходство со свойствами, приобретаемыми неактивным телом в магнитном поле: оно обладает двойным круговым преломлением, а при распространении в нем линейно поляризованной волны происходит вращение ее плоскости поляризации. Угол вращения на единицу длины пути луча равен $\omega f/2c$.

У двух стереоизомерных модификаций вещества знак постоянной g , а с нею и направления вращения, противоположен; в связи с этим говорят о право- и левовращающих стереоизомерах.

В отличие от вращения плоскости поляризации в магнитном поле, в естественно-активных веществах величина и знак вращения не зависят от направления распространения луча. Поэтому, если линейно поляризованный световой луч проходит дважды — туда и обратно — один и тот же путь в естественно-активной среде, то в результате он окажется поляризованным в первоначальной плоскости.

Перейдем к естественно-активным кристаллам. Не входя здесь в систематический разбор всех возможных случаев симметрии (см. задачу к этому параграфу), отметим, что естественная активность исключается наличием центра симметрии, но она возможна при существовании плоскости симметрии или зеркально-поворотной оси. Подчеркнем, что условия существования естественной активности у кристаллов не совпадают, следовательно, с условиями, допускающими существование кристаллов в двух зеркально-изомерных (так называемых энантиоморфных) формах; последние являются более жесткими и требуют отсутствия не только центра, но и плоскостей симметрии. Таким образом, кристалл может быть оптически активным и в то же время совпадать со своим зеркальным изображением.

В естественно-активном кристалле (одно- или двухосном) при распространении света с произвольным направлением волнового вектора мы имеем дело практически с обычным двойным преломлением линейно поляризованных волн; учет активности сводится в основном к замене строго линейной поляризации на эллиптическую с малым (первого порядка малости) отношением осей.

Исключение составляют лишь направления оптических осей, вдоль которых, без учета активности, оба корня уравнения Френеля совпадают. В этих направлениях явление естественной активности кристаллов аналогично активности изотропных тел: имеет место двойное круговое преломление первого порядка и соответственное вращение плоскости поляризации линейно поляризованных волн. При отклонении волнового вектора от направления оптической оси эти явления быстро спадают.

Для количественного расчета явлений естественной активности в кристаллах удобнее пользоваться не выражением D через E , а обратными формулами, выражающими E через D (как мы это делали и в § 82). С точностью до величин первого порядка эти формулы гласят:

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{(0)-1} D_k + [DG]_i, \quad (83,14)$$

где вектор G связан с ранее введенным вектором g посредством

$$G_i = - \frac{1}{|\varepsilon^{(0)}|} \varepsilon_{ik}^{(0)} g_k$$

(см. (82,13а)). Ввиду формального совпадения этого выражения с выражением (82,7), остаются без изменения также и уравнения (82,9), (82,10). В этих уравнениях G_z есть проекция вектора G на направление n . Если представить G в виде

$$G_i = G_{ik}n_k \quad (83,15)$$

(аналогичном (83,8)), то эта проекция пропорциональна

$$nG = G_{ik}n_in_k. \quad (83,16)$$

Этой квадратичной формой определяются оптические свойства естественно-активного кристалла. Сам по себе тензор G_{ik} не должен обязательно быть симметричным, но если разделить его на симметричную и антисимметричную части, то при образовании формы (83,16) антисимметричная часть выпадает. Мы приходим, следовательно, к выводу, что при исследовании оптических свойств естественно-активных кристаллов можно считать тензор G_{ik} симметричным.

ЗАДАЧА

Найти ограничения, накладываемые кристаллической симметрией на компоненты тензора G_{ik} .

Решение. При всяком повороте псевдотензор G_{ik} ведет себя как истинный тензор; в частности, наличие оси симметрии выше второго порядка приводит, как и для истинного симметричного тензора второго ранга, к полной изотропии в плоскости, перпендикулярной оси. Поведение же псевдотензора G_{ik} при отражениях определяется тем, что он дуален истинному тензору третьего ранга; именно, при всяком отражении, меняющем знак компоненты истинного тензора второго ранга, такая же компонента G_{ik} остается неизменной, и наоборот. Так, при отражении в плоскости yz компоненты G_{xx} , G_{zz} , G_{yz} меняют знак, а G_{xy} , G_{xz} остаются неизменными.

Ниже указаны исчезающие компоненты тензора G_{ik} для всех кристаллических классов, допускающих естественную активность. Ось z выбрана вдоль оси симметрии третьего, четвертого или шестого порядка или вдоль единственной оси второго порядка (в классах C_2 , C_{2v}), а в классе C_8 — перпендикулярно к плоскости симметрии; при наличии трех взаимно перпендикулярных осей симметрии координатные оси совпадают с ними.

Класс C_1 : все компоненты G_{ik} .

Класс C_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} , G_{xy} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить G_{xy} в нуль.

Класс C_8 : G_{xz} , G_{yz} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс C_{2v} : G_{xy} (плоскости xz и yz совпадают с плоскостями симметрии).

Класс D_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} .

Классы C_8 , C_4 , C_6 , D_3 , D_4 , D_6 : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Класс S_4 : $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс D_{2d} : G_{xy} (оси x , y лежат в вертикальных плоскостях симметрии).

Классы T , O : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Отметим, что в одноосных кристаллах классов S_4 и D_{2d} скаляр (83,16) обращается в нуль, если вектор n направлен вдоль оси z , поскольку $G_{zz} = 0$. Это значит, что в этих кристаллах отсутствуют эффекты естественной активности вдоль оптической оси.

В двухосном кристалле класса C_{2v} оптические оси лежат в одной из плоскостей симметрии. Но для векторов n , лежащих в плоскостях xz или yz , скаляр (83,16) в данном случае тоже обращается в нуль, так что и здесь эффекты вдоль оптических осей отсутствуют. Единственным кристаллическим классом, допускающим явление вращения плоскости поляризации вдоль оптической оси и в то же время не допускающим энантиоморфизм, является моноклинный класс C_2 .

ГЛАВА XII

ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

§ 84. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Нерелятивистский случай

Быстрая заряженная частица, проходя через вещество, ионизирует его атомы и тем самым теряет свою энергию¹⁾. В газах ионизационные потери могут быть определены как результат столкновений быстрой частицы с отдельными атомами. В конденсированной же среде во взаимодействие с пролетающей частицей может вовлекаться одновременно много атомов. Влияние этого обстоятельства на потерю энергии частицей является, с макроскопической точки зрения, результатом диэлектрической поляризации среды ее зарядом. Мы рассмотрим этот эффект сначала для случая нерелятивистских скоростей частицы. Как выяснится из результатов, в этом случае поляризация среды мало отражается на величине потерь. Соответствующий вывод, однако, представляет методический интерес ввиду дальнейших применений аналогичного метода.

Выясним, прежде всего, условия, допускающие макроскопическое рассмотрение этого явления. В спектральное разложение поля, создаваемого движущейся (со скоростью v) частицей на расстоянии r от ее пути, входят главным образом частоты порядка v/r (обратное «время столкновения»). Ионизацию же атома могут производить компоненты поля с частотами $\omega \geq \omega_0$, где ω_0 — некоторая средняя частота, отвечающая движению большинства электронов в атоме. Поэтому частица будет взаимодействовать одновременно со многими атомами, если длина v/ω_0 велика по сравнению с межуатомными расстояниями; в конденсированных телах последние совпадают (по порядку величины) с размерами a самих атомов. Таким образом, мы приходим к условию $v \gg a\omega_0$, т. е. скорость ионизирующей частицы должна

¹⁾ Мы говорим, как это принято, об «ионизационных» потерях, но в них включаются, разумеется, также и потери на возбуждение дискретных атомных уровней.

быть велика по сравнению со скоростями атомных электронов (или, по крайней мере, большинства из них)¹⁾.

Определим поле, создаваемое заряженной частицей, движущейся в материальной среде. В нерелятивистском случае достаточно рассмотреть лишь электрическое поле, определяющееся одним только скалярным потенциалом φ . Последний удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\hat{\epsilon}\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (84,1)$$

в котором «диэлектрическая постоянная» понимается в операторном смысле, а выражение $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ в правой стороне равенства есть плотность, создаваемая точечным зарядом e , движущимся с постоянной скоростью \mathbf{v} ²⁾.

Разложим φ в интеграл Фурье по координатам:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (84,2)$$

Применив к обеим сторонам этого равенства оператор Лапласа, получим

$$\Delta\varphi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k,$$

откуда видно, что компонента Фурье от $\Delta\varphi$ равна

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, взяв компоненту Фурье от обеих сторон уравнения (84,1), имеем

$$\hat{\epsilon}(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = -\frac{e}{2\pi^2} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{k}t}.$$

Сравнивая обе формулы, получаем

$$\hat{\epsilon}\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 k^2} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{k}t}.$$

Отсюда видно, что $\varphi_{\mathbf{k}}$ зависит от времени посредством множителя $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{k}t}$. Но оператор $\hat{\epsilon}$, действуя на функцию $e^{-i\omega t}$, умножает

1) Для энергии E частицы отсюда получается условие

$$E \gg \frac{M}{m} I,$$

где M — масса частицы, m — масса электрона, I — некоторая средняя энергия ионизации для большинства электронов в атоме.

2) Предполагая движение частицы прямолинейным, мы тем самым пренебрегаем рассеянием, что в рассматриваемой задаче всегда законно.

Если частица обладает зарядом ze , то все формулы для торможения в этом и следующем параграфах должны быть умножены на z^2 .

ее на $\varepsilon(\omega)$. Поэтому окончательно имеем для φ_k следующее выражение:

$$\varphi_k = \frac{e \mathbf{v}}{2\pi^2 k^2 \varepsilon(k\mathbf{v})} e^{-itvk}.$$

Компонента Фурье напряженности поля связана с компонентой Фурье потенциала посредством

$$E_k e^{ikr} = -\text{grad } \varphi_k e^{ikr} = -ik\varphi_k e^{ikr},$$

или $E_k = -ik\varphi_k$. Таким образом,

$$E_k = -\frac{iek}{2\pi^2 k^2 \varepsilon(k\mathbf{v})} e^{-itkv}. \quad (84,3)$$

Полная напряженность поля получается обратным суммированием ее компонент Фурье:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} E_k e^{ikr} d^3k. \quad (84,4)$$

Интересующая нас потеря энергии движущейся частицей есть не что иное, как работа, производимая обратной силой торможения eE , действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля. Взяв значение поля в той точке, в которой находится частица, т. е. в точке $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, мы получим в подынтегральном выражении в (84,4) множитель e^{itvk} , который сокращается с множителем e^{-ikvt} в выражении (84,3) для E_k . Поэтому сила торможения F дается следующим интегралом:

$$F = -\frac{ie^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon(k\mathbf{v})} d^3k.$$

Заранее очевидно, что сила F направлена антипараллельно скорости \mathbf{v} ; направление последней выберем в качестве оси x . Вводя обозначения $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ и заменяя $dk_y dk_z$ на $2\pi q dq$, перепишем абсолютную величину F в виде

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{q_0} \frac{q \omega dq d\omega}{\varepsilon(\omega) (q^2 v^2 + \omega^2)} \quad (84,5)$$

(о выборе верхнего предела интегрирования по q см. ниже).

Необходимо сделать еще следующее замечание по поводу интегрирования по $d\omega$ в формуле (84,5). При $\omega \rightarrow \infty$ функция $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ и интеграл расходится (логарифмически). Это обстоятельство связано с тем, что из поля E в действительности надо было бы вычесть то поле, которое имелось бы при движении частицы в пустоте (т. е.

при $\epsilon = 1$); ясно, что это поле не имеет отношения к торможению частицы в веществе. Такое вычитание привело бы к замене в подынтегральном выражении (84,5) $1/\epsilon$ на $(1/\epsilon) - 1$, после чего интеграл будет сходиться. Можно, однако, достичь того же результата без указанной замены, если условиться понимать интегрирование в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ как интегрирование в симметричных пределах от $-R$ до $+R$, после чего $R \rightarrow \infty$. Ввиду четности функции $\epsilon'(\omega)$ вещественная часть подынтегрального выражения есть нечетная функция частоты и при таком способе интегрирования дает нуль; интеграл же от мнимой части подынтегрального выражения сходится.

Ниже нам будет иногда удобно пользоваться обозначением

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'', \quad (84,6)$$

где $\eta'(\omega)$, $\eta''(\omega)$ — соответственно четная и нечетная функции, причем $\eta'' = -\epsilon''/|\epsilon|^2 < 0$. Формулу (84,5) можно переписать в явно вещественном виде:

$$F = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^q \frac{q\omega |\eta''(\omega)|}{(q^2v^2 + \omega^2)} dq d\omega. \quad (84,7)$$

Потеря энергии частицей на единице длины ее пути есть работа силы торможения на этом пути, т. е. как раз совпадает с величиной F .

Согласно общим правилам квантовой механики фурье-компонента поля с волновым вектором \mathbf{k} передает ионизационному электрону (δ -электрону) импульс $\hbar\mathbf{k}$. При достаточно больших значениях q ($q \gg \omega_0/v$) имеем $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2 \approx q^2$, так что передаваемый импульс приближенно совпадает с $\hbar q$. Заданному значению q соответствуют столкновения с «прицельным расстоянием» $\sim 1/q$. Поэтому условие применимости рассматриваемого макроскопического метода требует $1/q \gg a$. В соответствии с этим выберем в качестве верхнего предела интегрирования значение q_0 , удовлетворяющее условию $\omega_0/v \ll q_0 \ll 1/a$; величина $F(q_0)$ есть торможение быстрой частицы с передачей атомному электрону импульса, не превышающего q_0 .

Производя в (84,7) интегрирование по dq , получим

$$F(q_0) = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^{\infty} \omega |\eta''(\omega)| \ln \frac{q_0 v}{\omega} d\omega. \quad (84,8)$$

Эта формула в своем общем виде уже не может быть преобразована дальше, но ее можно представить в более удобной форме путем введения соответствующих обозначений.

Предварительно вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\varepsilon} d\omega.$$

Для этого замечаем, что если производить интегрирование в комплексной плоскости ω по контуру, состоящему из вещественной оси и бесконечно удаленной верхней полуокружности σ , то интеграл обратится в нуль, так как подынтегральное выражение не имеет полюсов в верхней полуплоскости. При больших значениях аргумента функция $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (59,1):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \quad (84,9)$$

Интегрирование по бесконечно удаленной полуокружности σ производится с помощью этой формулы, и в результате получаем¹⁾

$$-\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega = -i \frac{2\pi N e^2}{m} \int_{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \quad (84,10)$$

Введем некоторое среднее значение частоты движения атомных электронов, определяемое равенством

$$\ln \bar{\omega} = \frac{\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) \ln \omega \cdot d\omega}{\int_0^{\infty} \omega \eta''(\omega) d\omega} = \frac{m}{2\pi^2 N e^2} \int_0^{\infty} \omega |\eta''(\omega)| \ln \omega d\omega. \quad (84,11)$$

С помощью этого обозначения формула (84,8) напишется в виде

$$F(q_0) = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \ln \frac{q_0 v}{\omega}. \quad (84,12)$$

Сделаем в этом месте следующее замечание. По виду формулы (84,7) или (84,11) можно было бы думать, что заметный вклад в ионизационное торможение (84,12) вносят только те области частот, в которых имеется существенное поглощение. Это, однако, необязательно, и в указанных формулах может содержаться заметный вклад также от областей, в которых ε'' мало. Причина заключается в том, что в таких областях функция $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega)$ может проходить

¹⁾ Это значение совпадает со значением интеграла $\int_0^{\infty} \omega \varepsilon''(\omega) d\omega$ (см. (62,14)),

как и должно было быть, поскольку при $|\omega| \rightarrow \infty$ имеем $|\varepsilon| \rightarrow 1$, и потому $\eta'' \rightarrow \varepsilon''$.

через нуль. Но из формулы (84,5) видно, что нули $\epsilon(\omega)$ являются полюсами подынтегрального выражения. В действительности, конечно, $\epsilon''(\omega)$ не равно нулю строго, и потому нуль функции $\epsilon(\omega)$ расположен не на самой вещественной оси, а чуть ниже ее. Это значит, что при использовании проходящего через нуль вещественного выражения для $\epsilon(\omega)$ полюс подынтегрального выражения должен быть обойден сверху, и это дает соответствующий вклад в интеграл. Так, если функция $\epsilon(\omega)$ дается формулой (64,5), то вклад в торможение (84,12), возникающий от обхода полюсов $\pm\omega_1$ (где $\epsilon(\omega_1) = 0$), равен, как легко убедиться прямым вычислением по (84,7),

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2 a^2} \ln \frac{q_1 v}{\omega_1}.$$

Для того чтобы найти торможение $F(q_1)$ с передачей импульса, не превышающего некоторого значения $q_1 > q_0$, надо «сшить» формулу (84,12) с формулой квантовомеханической теории столкновений, соответствующей торможению при столкновениях с отдельными атомами. Это можно сделать благодаря тому, что области применимости обеих формул перекрываются. Как известно из теории столкновений, торможение с передачей импульса в интервале $\hbar dq$ есть

$$dF = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \frac{dq}{q}, \quad (84,13)$$

причем эта формула применима (в нерелятивистском случае) для любых значений $q \gg \omega_0/v$, допускаемых законами сохранения импульса и энергии, при условии лишь, чтобы передаваемая энергия была мала по сравнению с первоначальной энергией быстрой частицы¹⁾. Торможение же со всеми значениями q между q_0 и q_1 есть соответственно

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_1}{q_0}.$$

При прибавлении этой величины к формуле (84,12) в последней q_0 просто заменяется на q_1 , так что

$$F(q_1) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_1 v}{\omega}. \quad (84,14)$$

1) См. «Квантовая механика», § 121; величина F отличается от введенного там «эффективного торможения» множителем N .

Формула (84,13) отвечает столкновениям со свободными электронами. Однако ее область применимости ($q \gg \omega_0/v$) начинается от таких значений q , при которых атомные электроны фактически еще нельзя рассматривать как свободные. Последнее требовало бы значений $q \gg \omega_0/v_0$ (v_0 — порядок величины скоростей большинства атомных электронов), когда энергия δ -электрона $\hbar^2 q^2/2m$ была бы велика по сравнению с атомными энергиями.

Если атомному электрону передается большой (по сравнению с атомными) импульс $\hbar q_1$, то получаемая им энергия равна $E_1 = \hbar^2 q^2 / 2m$. Вводя эту величину, напишем

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \ln \frac{2m v^2 E_1}{\hbar^2 \omega^2}. \quad (84,15)$$

Эта формула определяет торможение быстрой частицы (например, электрона) путем ионизации с передачей энергии, не превышающей E_1 . Она отличается от обычной формулы, получающейся путем микроскопического рассмотрения столкновений без учета взаимодействия между атомами¹⁾, лишь определением «энергии ионизации», роль которой играет теперь $\hbar \omega$. Однако средняя (по электронам) энергия ионизации атома обычно вообще мало зависит от его взаимодействия с другими атомами, так как основную роль в ней играют электроны внутренних оболочек, почти не затрагиваемых этим взаимодействием. К тому же в данном случае эта величина входит под знаком логарифма, и потому способ ее точного определения тем более слабо сказывается на величине торможения.

При торможении быстрой тяжелой частицы максимальная энергия, которая может быть передана атомному электрону, равна $2m v^2$ и все еще мала по сравнению с ее собственной энергией²⁾. Подставив это значение в (84,15) вместо E_1 , получим полное ионизационное торможение тяжелой частицы:

$$F = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \ln \frac{2m v^2}{\hbar \omega}. \quad (84,16)$$

Эта формула отличается от обычно используемой³⁾ лишь определением ионизационной энергии $\hbar \omega$.

§ 85. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Релятивистский случай.

При скоростях, сравнимых со скоростью света, влияние поляризации среды на торможение быстрой частицы может стать, как

1) См. «Квантовая механика», § 121, формула (121,13).

2) При столкновении тяжелой частицы с электроном даже максимальный передаваемый импульс $\hbar q_{\max}$ мал по сравнению с импульсом частицы Mv . Поэтому изменение энергии тяжелой частицы равно $v \cdot \hbar q$; приравнявая эту величину энергии электрона, получим

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \hbar v q \leq \hbar v q,$$

откуда $\hbar q_{\max} = 2mv$, $E_{1\max} = 2mv^2$.

3) См. «Квантовая механика», § 122, формула (122,10).

мы увидим, весьма существенным, причем не только в конденсированных веществах, но даже и в газах¹⁾.

Для вывода соответствующих формул применим метод, аналогичный использованному в предыдущем параграфе. При этом, однако, надо исходить из полных уравнений Максвелла. При наличии сторонних зарядов (с пространственной плотностью $\rho_{\text{ст}}$) и сторонних токов (с плотностью $\mathbf{j}_{\text{ст}}$) эти уравнения гласят²⁾:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (85,1)$$

$$\operatorname{div} \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 4\pi \rho_{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}}. \quad (85,2)$$

В данном случае распределение сторонних зарядов и токов дается формулами

$$\rho_{\text{ст}} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \quad \mathbf{j}_{\text{ст}} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}). \quad (85,3)$$

Вводим скалярный и векторный потенциалы согласно обычным определениям:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad (85,4)$$

в результате которых уравнения (85,1) удовлетворяются тождественно. На потенциалы \mathbf{A} и φ накладываем дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \varphi}{\partial t} = 0, \quad (85,5)$$

являющееся обобщением обычно налагаемого в теории излучения «условия Лоренца». Тогда подстановка (85,4) в (85,2) приводит к следующим уравнениям для потенциалов:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \quad (85,6)$$

$$\hat{\epsilon} \left(\Delta \varphi - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}).$$

Разложим \mathbf{A} и φ в интегралы Фурье по координатам. Взяв компоненты Фурье от обеих сторон уравнений (85,6), получим (ср. § 84)

$$k^2 \mathbf{A}_k + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_k}{\partial t^2} = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c} e^{-ikvt},$$

$$\hat{\epsilon} \left(k^2 \varphi_k + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} \right) = \frac{e}{2\pi^2} e^{-ikvt}.$$

1) Этот эффект был указан Э. Ферми (1940) и рассчитан им для специальной модели газа из атомов, рассматриваемых как гармонические осцилляторы. Излагаемый ниже общий вывод принадлежит Л. Ландау.

2) Мы полагаем везде $\mu(\omega) = 1$, так как при тех частотах, которые существенны для ионизационных потерь, вещество ведет себя как немагнитное.

Отсюда видно, что зависимость A_k и φ_k от времени дается множителями e^{-ikvt} . Снова вводим обозначение $\omega = k v = k_x v$ и получаем

$$A_k = \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{v}{k^2 - \omega^2 \frac{\epsilon(\omega)}{c^2}} e^{-i\omega t},$$

$$\varphi_k = \frac{e}{2\pi^2 \epsilon(\omega)} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \frac{\epsilon(\omega)}{c^2}} e^{-i\omega t}.$$
(85,7)

Компонента Фурье напряженности электрического поля

$$E_k = \frac{i\omega}{c} A_k - ik\varphi_k.$$
(85,8)

С помощью полученных формул действующая на частицу сила торможения $F = eE$ ¹⁾ находится так же, как это было сделано в предыдущем параграфе. С теми же обозначениями получим теперь для величины этой силы следующую формулу:

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{q_0} \frac{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2}\right) \omega q dq d\omega}{\epsilon \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2}\right) \right]}$$
(85,9)

(при $c \rightarrow \infty$ эта формула переходит, разумеется, в (84,5)).

Начнем с интегрирования по частотам. Имея в виду производить интегрирование в комплексной плоскости ω , выясним предварительно, в каких точках верхней полуплоскости подынтегральное выражение имеет полюсы. Функция $\epsilon(\omega)$ не имеет в этой области ни особых точек, ни нулей; поэтому искомыми полюсами могут быть только нули выражения

$$\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) - q^2.$$

Покажем, что при всяком значении положительного вещественного числа q^2 это выражение обращается в нуль только при одном значении ω .

Доказательство можно провести аналогично тому, как это было сделано в § 62 для нулей функции $\epsilon(\omega)$. Пусть

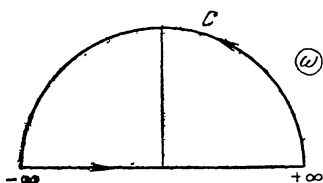
$$f(\omega) = \omega^2 \left(\frac{\epsilon(\omega)}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right);$$

рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df(\omega)}{d\omega} \frac{d\omega}{f(\omega) - a},$$

1) Что касается магнитной силы $\frac{e}{c} [vH]$, то из соображений симметрии очевидно, что она обращается в нуль (не говоря уже о том, что эта сила, будучи перпендикулярна к скорости частицы, вообще не производила бы над ней работы).

взятый по контуру C , состоящему из вещественной оси и бесконечно удаленной полуокружности (рис. 43). Функция $f(\omega)$ не имеет полюсов нигде в верхней полуплоскости (и на самой вещественной оси¹⁾); поэтому рассматриваемый интеграл непосредственно дает число нулей



функции $f(\omega) - a$ в верхней полуплоскости. Для вычисления пишем этот интеграл в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df}{f-a}. \quad (85,10)$$

При $\omega = 0$ функция $f = 0$. При положительных вещественных значениях ω имеем $\text{Im} f > 0$, а при отрицательных $\text{Im} f < 0$.

На бесконечности же $f \rightarrow -\omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right)$; поэтому f пробегает бесконечно удаленную окружность, когда ω пробегает полуокружность. Отсюда видно, что контур интегрирования C' в плоскости f выглядит так, как это схематически показано на рис. 43. Пусть $a = q^2$ — положительное вещественное число (как на рис. 43). Тогда при обходе вдоль C' аргумент комплексного числа $f - a$ меняется на 2π и интеграл (85,10) равен единице. Тем самым наше утверждение доказано²⁾.

Более того, легко видеть, что этот единственный корень уравнения $f(\omega) - q^2 = 0$ лежит на мнимой оси ω . Действительно, при чисто мнимых ω функция $f(\omega)$ (вместе с функцией $\epsilon(\omega)$) вещественна и пробегает все значения от 0 до ∞ , в том числе все положительные значения q^2 .

Вернемся к интегралу по $d\omega$ в (85,9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right) \omega d\omega}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)}.$$

Его можно представить в виде разности между интегралом по контуру C и интегралом по бесконечно удаленной полуокружности. Второй из них равен

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = i\pi,$$

¹⁾ У металлов $\epsilon(\omega)$ имеет полюс при $\omega = 0$, но $\omega^2 \epsilon$ все равно стремится к нулю.

²⁾ Если же a — отрицательное число, то при обходе вдоль C' аргумент $f - a$ меняется на 4π , так что интеграл (85,10) равен 2; другими словами, уравнение $f(\omega) = -|a|$ имеет два нуля в верхней полуплоскости.

а первый равен умноженному на $2\pi i$ вычету подынтегрального выражения относительно его единственного полюса. Будем понимать под $\omega(q)$ функцию, определяемую равенством

$$\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) = q^2. \quad (85,11)$$

Тогда согласно известному правилу нахождения вычетов¹⁾ найдем, что интеграл по C равен

$$2\pi i \frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{-\frac{d}{d\omega} \left[\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \right]} = 2\pi i \frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{-\frac{dq^2}{d\omega}}.$$

Собирая полученные выражения и подставляя в (85,9), найдем

$$F = e^2 \int_0^{q_0} \left[\frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{q dq/d\omega} + 1 \right] q dq$$

или, заменив в первом члене интегрирование по dq интегрированием по $d\omega$,

$$\begin{aligned} F &= e^2 \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{v^2 \epsilon(\omega)} - \frac{1}{c^2} \right] \omega d\omega + \frac{e^2 q_0^2}{2} = \\ &= \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right) \omega d\omega + \frac{e^2 q_0^2}{2} + \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(q_0) - \omega^2(0)], \end{aligned} \quad (85,12)$$

Большим значениям q соответствуют большие по абсолютной величине ω корни уравнения (85,11). Воспользовавшись соответственно этому выражением (84,9) для $\epsilon(\omega)$, найдем

$$\omega^2(q_0) = -\frac{v^2}{\beta^2} \left(q_0^2 + \frac{4\pi N e^2}{m c^2} \right),$$

где введено обозначение

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Подставив в (85,12), получим

$$F = \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{i v q_0 / \beta} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega - \frac{2\pi N e^4}{m c^2} - \frac{e^2 \beta^2}{2 v^2} \omega^2(0) \quad (85,13)$$

(в интеграле достаточно оставить в $\omega(q_0)$ главный член $i v q_0 / \beta$).

¹⁾ Вычет выражения $f(z)/\varphi(z)$ относительно полюса $z = z_0$ равен $f(z_0)/\varphi'(z_0)$.

Интегрирование в (85,13) производится по чисто мнимым значениям ω . Введем вещественную переменную согласно $\omega = i\omega''$, обозначим нижний предел интеграла посредством $\omega(0) = i\xi$ и снова введем обозначение (84,6) $1/\varepsilon = \eta$. Мы должны вычислить интеграл

$$- \int_{\xi}^{vq_0/\beta} [\eta(i\omega'') - 1] \omega'' d\omega''.$$

Значения функции $\eta(\omega)$ на мнимой оси могут быть выражены через значения ее мнимой части на вещественной оси по формуле

$$\eta(i\omega'') - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\eta''(x)}{x^2 + \omega''^2} dx$$

ср. формулу (62,17)). Поэтому для рассматриваемого интеграла получаем (пренебрегая x по сравнению с vq_0)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{\xi}^{vq_0/\beta} \frac{x |\eta''(x)| \omega'' d\omega'' dx}{x^2 + \omega''^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x |\eta''(x)| \ln \frac{v^2 q_0^2}{\beta^2 (x^2 + \xi^2)} dx.$$

Подставим этот результат в (85,13), причем для упрощения записи введем обозначение

$$\ln \Omega = \frac{1}{2} \overline{\ln(\omega^2 + \xi^2)}, \quad (85,14)$$

где черта обозначает усреднение с весом $\omega |\eta''(\omega)|$, как это было сделано в (84,11). Тогда получим

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_0 v}{\beta \Omega} - \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} + \frac{e^2 \beta^2}{2v^2} \xi^2. \quad (85,15)$$

При дальнейшем исследовании этой формулы надо отдельно рассмотреть два случая. Предположим сначала, что среда является диэлектриком, а скорость частицы удовлетворяет условию

$$v^2 < \frac{c^2}{\varepsilon_0}, \quad (85,16)$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ — электростатическое значение диэлектрической проницаемости. На мнимой оси функция $\varepsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\varepsilon_0 > 1$ при $\omega = 0$ до 1 при $\omega = i\infty$. Выражение же в левой стороне уравнения (85,11) при этом монотонно возрастает от 0 до ∞ . Поэтому при $q = 0$ уравнение (85,11) дает и $\omega = 0$. Таким образом, в (85,15) надо положить $\xi = 0$; при этом Ω переходит в среднюю атомную частоту $\bar{\omega}$ (84,11):

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left[\ln \frac{q_0 v}{\beta \bar{\omega}} - \frac{v^2}{2c^2} \right] \quad (85,17)$$

(при $v \ll c$ эта формула, как и следовало, переходит в (84,12)).

Значение q_0 удовлетворяет условию $q_0 \ll 1/a$, где a — порядок величины межуатомных расстояний (в конденсированной среде — размеров атомов). Для того чтобы продлить эту формулу в область больших значений передачи импульса и энергии, надо произвести ее «сшивку» с формулами обычной теории столкновений, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе. Здесь, однако, эта «сшивку» должна быть произведена в два этапа. Сначала с помощью формулы (84,13) переходим к области значений q , соответствующих передачам энергии, большим по сравнению с атомными энергиями, но все еще нерелятивистским. Вид формулы (85,17) при этом не изменится, но в нее можно будет ввести энергию δ -электрона, как $\hbar^2 q^2 / 2m$. Обозначив ее E_1 , получим

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^2}{m v^2} \left[\ln \frac{2m E_1 v^2}{\beta^2 \hbar^2 \omega^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (85,18)$$

Далее, мы можем перейти в область релятивистских значений E_1 , воспользовавшись формулой релятивистской теории столкновений, согласно которой торможение с передачей энергии в интервале между E' и $E' + dE'$ равно

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \frac{dE'}{E'}, \quad (85,19)$$

если E' мало по сравнению с максимальной передачей $E_{1\max}$, допускаемой законами сохранения импульса и энергии при столкновении данной быстрой частицы со свободным электроном (в нерелятивистском случае эта формула совпадает с (84,13)). Поскольку при интегрировании выражение (85,19) дает $\ln E'$, то ясно, что вид формулы (85,18) в результате не изменится, так что она относится ко всем значениям $E_1 \ll E_{1\max}$.

При торможении тяжелой частицы (с массой M) максимальная передача энергии электрону составляет $E_{1\max} \approx 2m v^2 / \beta^2$ ¹⁾. Если $E_{1\max}$ все еще мало по сравнению с полной энергией E быстрой частицы (для чего должно быть $E \ll M^2 c^2 / m$), то дифференциальная формула для торможения на свободных электронах гласит:

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{\beta^2}{2m c^2} \right) dE'$$

при любых значениях E' , вне зависимости от природы тяжелой частицы. Дополнительное (по отношению к (85,18)) торможение с передачей энергии от E_1 до $E_{1\max}$ (причем $E_1 \ll E_{1\max}$) составляет в этом случае

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{E_{1\max}}{E_1} - \frac{\beta^2 E_{1\max}}{2m c^2} \right) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2}{\beta^2 E_1} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85,20)$$

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 12.

Прибавляя это к (85,18), найдем полное торможение тяжелой частицы:

$$F = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{\beta^2 \hbar \omega} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85,21)$$

Формулы (85,18) и (85,21) отличаются от формул, даваемых обычной теорией, лишь определением «энергии ионизации» $\hbar\bar{\omega}$.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда скорость частицы удовлетворяет условию

$$v^2 > \frac{c^2}{\epsilon_0} \quad (85,22)$$

(этот случай, в частности, всегда имеет место для металлов, так как у них $\epsilon(0) = \infty$). Выражение $\omega^2(\epsilon/c^2 - 1/v^2)$ в левой стороне уравнения (85,11) в этом случае проходит (на мнимой оси ω) через нуль дважды — при $\omega = 0$ и при $\omega = i\xi$, где ξ определяется равенством

$$\epsilon(i\xi) = \frac{c^2}{v^2}. \quad (85,23)$$

В интервале между 0 и $i\xi$ это выражение отрицательно, а при $|\omega| > \xi$ принимает все положительные значения от 0 до ∞ . Поэтому при $q \rightarrow 0$ корень уравнения (85,11) стремится в этом случае к значению ξ , которое и должно быть подставлено в (85,14) и (85,15).

Здесь можно различать два предельных случая. Если значение ξ оказывается малым по сравнению с атомными частотами ω_0 , то в (85,15) можно пренебречь последним членом, а $\Omega \approx \bar{\omega}$. В результате мы снова приходим к формуле (85,17). В особенности же интересен обратный предельный случай, когда $\xi \gg \omega_0$. Поскольку при больших значениях ξ функция $\epsilon(i\xi)$ стремится к 1, то из (85,23) ясно, что этот случай соответствует ультрарелятивистским скоростям частицы. Воспользовавшись для $\epsilon(\omega)$ формулой (84,9), напомним уравнение (85,23) в виде

$$1 + \frac{4\pi Ne^2}{\mu \xi^2} = \frac{c^2}{v^2},$$

откуда

$$\xi^2 = \frac{4\pi Ne^2 v^2}{mc^2 \beta^2} \approx \frac{4\pi Ne^2}{m\beta^2}.$$

При увеличении скорости частицы условие $\xi \gg \omega_0$ в конце концов выполнится в любой среде, т. е. при любом значении электронной плотности N (в том числе и в газе). Однако необходимые скорости тем выше, чем меньше N , т. е. чем более разреженной является среда.

Из (85,14) имеем теперь просто $\Omega \approx \xi$; положив также $v \approx c$, мы найдем, что последние два члена в (85,15) взаимно сокращаются и остается

$$F(q_0) = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \ln \frac{mc^2 q_0^2}{4\pi Ne^2}.$$

Продлевая эту формулу в область больших значений передачи импульса и энергии таким же образом, как это было сделано выше, найдем следующее выражение для торможения ультрарелятивистской частицы с передачей энергии, не превышающей E_1 (причем $E_1 \ll E_{1\max}$):

$$F(E_1) = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \ln \frac{m^2 c^2 E_1}{2\pi Ne^2 h^2}. \quad (85,24)$$

Этот результат существенно отличается от того, который дается обычной теорией столкновений, не учитывающей поляризации среды. Согласно последней в ультрарелятивистском случае торможение $F(E_1)$ продолжает возрастать (хотя и сравнительно медленно — по логарифмическому закону) при увеличении энергии частицы. Поляризация же среды приводит к такому экранированию заряда, в результате которого рост торможения в конце концов прекращается и оно стремится к конечному пределу, даваемому формулой (85,24), не содержащей β .

Для тяжелых частиц можно написать формулу и для полного торможения с любой передачей энергии вплоть до $E_{1\max}$ (при условии, что $E_{1\max}$ мало по сравнению с энергией самой частицы). Используя снова выражение (85,20) (в котором можно теперь положить $v = c$), найдем

$$F = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \left[\ln \frac{m^3 c^4}{\pi Ne^2 h^2 \beta^2} - 1 \right]. \quad (85,25)$$

Мы видим, что полное торможение все же продолжает возрастать со скоростью частицы — за счет «близких» столкновений с большой передачей энергии, в которых экранирующее влияние поляризации среды не проявляется. Это возрастание, однако, несколько более медленное, чем даваемое теорией, не учитывающей поляризации среды.

Отметим также, что наличие электронной плотности N в аргументе логарифма в формулах (85,24) и (85,25) приводит к следующей особенности торможения ультрарелятивистских частиц: при прохождении такой частицей слоев различных веществ, содержащих одинаковое число электронов (на 1 см^2 их поверхности), торможение оказывается меньшим в веществах с большими N .

Наконец, укажем, что измерение торможения быстрых частиц в веществе дает принципиальную возможность построить функцию

$\epsilon(i\xi)$ для данного вещества. Легко показать, что точное выражение для F , соответствующее случаю (85,22), удовлетворяет соотношению

$$\frac{d[(F - F_0)v^2]}{d(v^2)} = -\frac{e^2\xi^2}{2c^2}, \quad (85,26)$$

где F_0 есть величина, даваемая формулой (85,18) или (85,21). F измеряется, а производная $d(F_0v^2)/d(v^2)$ содержит только известные величины (N , v) и может быть вычислена. Таким образом, с помощью (85,26) каждому значению ξ приводится в соответствие определенное значение v , после чего согласно (85,23) вычисляется соответствующее значение $\epsilon(i\xi)$.

§ 86. Излучение Черенкова

Заряженная частица, движущаяся в прозрачной среде, в определенных условиях испускает своеобразное излучение; оно было впервые наблюдено *П. Черенковым* и *С. И. Вавиловым* и теоретически истолковано и рассчитано *И. Е. Таммом* и *И. М. Франком* (1937). Подчеркнем, что это излучение не имеет ничего общего с фактически всегда имеющим место (при движении быстрого электрона) тормозным излучением. Последнее испускается самим движущимся электроном при его столкновениях с атомами. В явлении же Черенкова мы имеем по существу дело с излучением, испускаемым средой под влиянием поля движущейся в ней частицы. Различие между обоими типами излучений в особенности ясно проявляется при переходе к пределу сколь угодно большой массы частицы: тормозное излучение при этом исчезает вовсе, а излучение Черенкова вообще не меняется.

Волновой вектор и частота электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной среде, связаны соотношением $k = n\omega/c$, где $n = \sqrt{\epsilon}$ — вещественный показатель преломления¹⁾. С другой стороны, мы видели, что частота фурье-компоненты поля равномерно движущейся в среде частицы связана с x -компонентой волнового вектора (ось x — в направлении скорости частицы) соотношением $\omega = k_x v$. Для того чтобы такая компонента представляла собой свободно распространяющуюся волну, соотношения $k = n\omega/c$ и $k_x = \omega/v$ не должны противоречить друг другу. Именно, поскольку

¹⁾ Мы по-прежнему считаем среду немагнитной и изотропной.

Излучение Черенкова в анизотропной среде рассмотрено в работах: В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 10, 608, 194; А. А. Коломенский, ДАН СССР 86, 1097, 1952; М. И. Каганов, ЖЭТФ 23, 507, 1953.

Излучение Черенкова частицей, движущейся по оси диэлектрического цилиндра, погруженно в среду с другой диэлектрической проницаемостью, рассмотрено В. Л. Гинзбургом и И. М. Франком, ДАН СССР 56, 699, 1947.

должно быть $k > k_x$, то необходимо выполнение условия

$$v > \frac{c}{n(\omega)}. \quad (86,1)$$

Таким образом, излучение с частотой ω происходит в том случае, когда скорость частицы превосходит фазовую скорость волн этой частоты в данной среде.

Пусть θ — угол между направлением движения частицы и направлением излучения. Имеем $k_x = k \cos \theta = (n\omega/c) \cos \theta$ и, сравнивая с равенством $k_x = \omega/v$, найдем, что

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}. \quad (86,2)$$

Таким образом, излучению данной частоты соответствует вполне определенное значение угла θ . Другими словами, излучение каждой частоты происходит вперед по направлению движения частицы и распределяется по поверхности конуса с углом раствора θ , определяемым формулой (86,2). Угловое распределение излучения и его распределение по частотам находятся, следовательно, в определенной связи друг с другом.

Излучение электромагнитных волн (в тех случаях, когда оно имеет место) связано с определенной потерей энергии движущейся частицей. Эта потеря составляет часть, хотя и незначительную, того полного торможения, которое было вычислено в предыдущем параграфе¹⁾. В этом смысле название полных потерь «ионизационными» в данном случае не вполне точно. Выделим теперь эту часть из полных потерь; тем самым мы определим интенсивность излучения Черенкова.

Согласно (85,9) потеря энергии в интервале частот $d\omega$ дается выражением

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2 \epsilon} \right) \int \frac{q dq}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)},$$

где знак \sum означает, что надо взять сумму выражений с $\omega = \pm |\omega|$. Введем новую переменную

$$\xi = q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right).$$

Тогда

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2 \epsilon} \right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

При интегрировании вдоль вещественной оси ξ особая точка $\xi = 0$ (как раз соответствующая выполнению соотношения $q^2 + k_x^2 = k^2$) должна быть обойдена определенным образом. Направление обхода определяется тем, что хотя мы и считаем $\epsilon(\omega)$ вещественной величиной (среда прозрачна!), но в действительности она обладает не-

1) Тормозное излучение в эти потери не входит.

которой, хотя и малой, мнимой частью, положительной при $\omega > 0$ и отрицательной при $\omega < 0$. Соответственно ξ обладает малой отрицательной (положительной) мнимой частью, и интегрирование должно было бы производиться по пути, проходящему под (над) вещественной осью. Это значит, что, когда мы сместили путь интегрирования на вещественную ось, особая точка должна быть обойдена снизу (сверху). Именно эти обходы и дают вклад в dF , а вещественные части полностью аннулируются при взятии суммы. Производя обходы по бесконечно малым полуокружностям, получим

$$\sum \omega \int \frac{d\xi}{\xi} = \omega \left\{ \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi} - \int_{\gamma'} \frac{d\xi}{\xi} \right\} = 2i\omega\pi.$$

Таким образом, приходим к окончательной формуле

$$dF = \frac{e^2}{c^3} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) \omega d\omega, \quad (86,3)$$

определяющей интенсивность излучения в частотном интервале $d\omega$. Согласно (86,2) это излучение сконцентрировано в интервале углов

$$d\theta = \frac{c}{vn^2 \sin \theta} \frac{dn}{d\omega} d\omega. \quad (86,4)$$

Полная интенсивность излучения дается интегралом от выражения (86,3), взятым по всем частотам в области прозрачности среды.

Легко выяснить также вопрос о поляризации излучения Черенкова. Как видно из (85,7), векторный потенциал поля излучения направлен вдоль скорости \mathbf{v} . Магнитное поле $\mathbf{H}_k = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_k]$ направлено, следовательно, перпендикулярно к плоскости, проходящей через \mathbf{v} и направление луча \mathbf{k} . Электрическое же поле (в «волновой зоне» излучения) перпендикулярно к магнитному и потому лежит в указанной плоскости.

В связи с рассмотрением вопроса об излучении частицей, движущейся в материальной среде, упомянем еще об одном эффекте, необходимость существования которого была указана *В. Л. Гинзбургом* и *И. М. Франком*: частица должна излучать при переходе из одной среды в другую. Это «переходное» излучение принципиально отличается от эффекта Черенкова в том отношении, что оно должно иметь место при любой скорости частицы, а не только при скоростях, превышающих фазовую скорость света в среде. Оно не имеет ничего общего и с тормозным излучением (которое тоже возникает при падении заряженных частиц на поверхность раздела двух сред). Как и для излучения Черенкова, разница в особенности наглядна при переходе к пределу сколь угодно большой массы частицы — тормозное излучение при этом исчезает, а «переходное» остается¹⁾.

¹⁾ Подробный расчет «переходного» излучения см. *В. Л. Гинзбург* и *И. М. Франк*, ЖЭГФ 16, 25, 1946.

ГЛАВА XIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

§ 87. Общая теория квантовых флуктуаций одной величины

Исследование электромагнитных флуктуаций может быть произведено на основе общей теории флуктуаций. При этом, однако, недостаточна обычная теория, в которой флуктуации предполагаются классическими (не квантовыми) и термодинамическими¹⁾. Поэтому мы предположим в следующих параграфах изложение общей теории флуктуаций, не используя указанных предположений. Начнем со случая, когда имеется всего одна флуктуирующая величина x , которую мы предполагаем вещественной и определяем таким образом, что ее среднее значение (в отсутствие внешних воздействий на систему) равно нулю.

В соответствии с правилами квантовой механики введем оператор $\hat{x}(t)$, соответствующий физической величине $x(t)$. Определим его «компоненты Фурье» согласно²⁾

$$\hat{x}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (87,1)$$

и обратно,

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (87,2)$$

Оператор \hat{x}_ω , вообще говоря, не коммутирует с сопряженным ему оператором $\hat{x}_\omega^+ \equiv \hat{x}_{-\omega}$.

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, §§ 117—120. Этот и следующий параграфы надо рассматривать как продолжение гл. XII «Статистической физики». Используемые здесь обозначения соответствуют обозначениям этой главы.

2) Написанный интеграл в действительности расходится, поскольку $x(t)$ не стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно для следующего ниже формального вывода, имеющего целью вычисление заведомо конечных средних квадратных величин.

Мы благодарны С. М. Рытову, указавшему нам на преимущество такого способа определения компонент Фурье по сравнению со способом, использованным в § 117 «Статистической физики».

Корреляция между флуктуациями величины $x(t)$ в различные моменты времени характеризуется функцией

$$\varphi(t' - t) \equiv \frac{1}{2} \overline{[\hat{x}(t) \hat{x}(t') + \hat{x}(t') \hat{x}(t)]}, \quad (87,3)$$

где черта обозначает усреднение с помощью точных квантовомеханических вероятностей¹⁾; ввиду стационарности состояния эта функция может зависеть только от разности $\tau = t' - t$. Подставив сюда (87,2), получим

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)} e^{i(\omega t + \omega' t')} d\omega d\omega'.$$

Интеграл в правой стороне равенства будет функцией только от $t - t'$, если подынтегральное выражение содержит δ -функцию от $\omega + \omega'$. Это значит, что должно быть

$$\frac{1}{2} \overline{(\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)} = (x^2)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (87,4)$$

Эту формулу надо рассматривать как определение величины, обозначенной здесь символически как $(x^2)_\omega$. Отметим, что эта величина очевидным образом вещественна (достаточно заметить, что левая сторона равенства (87,4), как и правая, отлична от нуля лишь при $\omega' = -\omega$, а переход к комплексно сопряженному выражению означает изменение знака ω , т. е. просто перестановку ω и ω').

Подставив (87,4) в $\varphi(\tau)$ и производя интегрирование по $d\omega'$, получим

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2)_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (87,5)$$

В частности, $\varphi(0)$ есть не что иное; как средний квадрат флуктуирующей величины. Таким образом²⁾,

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2)_\omega d\omega. \quad (87,6)$$

1) Как известно, согласно основным принципам статистики результат усреднения в действительности не зависит от того, производится ли оно чисто механическим образом по точной волновой функции стационарного состояния системы, или с помощью распределения Гиббса. Разница заключается лишь в том, что в первом случае искомая величина выражается через полную энергию тела, а во втором случае — через его температуру.

2) При сравнении с формулами гл. XII «Статистической физики» следует учесть, что введенная здесь более удобная нормировка величины $(x^2)_\omega$ (обозначавшейся там как $\lim |x_\omega|^2$) отличается от прежней множителем 2π .

Мы видим, что «спектральной плотностью» среднего квадрата флуктуации является как раз величина $(x^2)_\omega$ (или $2(x^2)_\omega$, если производить интегрирование только по положительным значениям ω).

Пусть тело, к которому относится величина x , находится в некотором определенном (n -м) стационарном состоянии. Среднее значение (87,4) вычисляется как соответствующий диагональный матричный элемент оператора:

$$\frac{1}{2}(\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)_{nn} = \frac{1}{2} \sum_m [(x_{\omega})_{nm} (x_{\omega'})_{mn} + (x_{\omega'})_{nm} (x_{\omega})_{mn}],$$

где суммирование распространяется по всему спектру уровней энергии (ввиду комплексности оператора \hat{x}_ω два члена в квадратных скобках не совпадают друг с другом).

Зависимость оператора \hat{x} от времени означает, что вычисление его матричных элементов должно производиться с помощью зависящих от времени волновых функций. Поэтому имеем

$$(x_{\omega})_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{nm} e^{i(\omega_{nm} + \omega)t} dt = x_{nm} \delta(\omega_{nm} + \omega), \quad (87,7)$$

где x_{nm} — обычный, не зависящий от времени матричный элемент оператора \hat{x} , выраженного через координаты частиц тела, а $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/h$ — частота перехода между состояниями n и m . Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{x}_\omega \hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'} \hat{x}_\omega)_{nn} &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_m |x_{nm}|^2 [\delta(\omega_{nm} + \omega) \delta(\omega_{mn} + \omega') + \delta(\omega_{nm} + \omega') \delta(\omega_{mn} + \omega)] \end{aligned}$$

(здесь учтено, что ввиду вещественности x $x_{nm} = x_{mn}^*$). Произведения δ -функций в квадратных скобках можно, очевидно, переписать в виде

$$\delta(\omega_{nm} + \omega) \delta(\omega + \omega') + \delta(\omega_{mn} + \omega) \delta(\omega + \omega').$$

Сравнивая после этого с (87,4), получим следующую формулу:

$$(x^2)_\omega = \frac{1}{2} \sum_m |x_{nm}|^2 [\delta(\omega + \omega_{nm}) + \delta(\omega + \omega_{mn})]. \quad (87,8)$$

В связи с формой записи этого выражения сделаем следующее замечание. Хотя уровни энергии макроскопического тела, строго говоря, дискретны, но они расположены так густо, что фактически образуют непрерывный спектр. Формулу (87,8) можно написать без δ -функций, если усреднить ее по малым (но содержащим все же

много уровней) интервалам частот. Если $\Gamma(E)$ — число уровней энергии тела, меньших E , то

$$(x^2)_{\omega} = \frac{\hbar}{2} |x_{nm}|^2 \left[\frac{d\Gamma}{dE_m} + \frac{d\Gamma}{dE'_m} \right],$$

где $E_m = E_n + \hbar\omega$, $E'_m = E_n - \hbar\omega$.

Предположим теперь, что на тело действует периодическое (с частотой ω) возмущение, энергия которого пропорциональна величине x . Оператор этого возмущения напишем в виде

$$\hat{V} = -f\hat{x} = -\frac{1}{2} (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}) \hat{x}, \quad (87,9)$$

где f_0 — постоянная. В качестве иллюстрации укажем, например, что величиной x может являться дипольный момент системы, оператор которого $\mathcal{P} = \sum e r$ (суммирование по всем зарядам, входящим в состав системы). При этом возмущение состоит в воздействии внешнего периодического электрического поля.

Под влиянием возмущения система совершает переходы, причем вероятность перехода $n \rightarrow m$ (в единицу времени) дается формулой ¹⁾

$$\omega_{nm} = \frac{\pi |f_0|^2}{2\hbar^2} |x_{mn}|^2 \{ \delta(\omega + \omega_{mn}) + \delta(\omega - \omega_{nm}) \}. \quad (87,10)$$

Два члена в этом выражении возникают соответственно из двух членов в (87,8). При каждом переходе система поглощает (или испускает) квант $\hbar\omega_{mn}$. Сумма

$$Q = \sum_m \omega_{nm} \hbar\omega_{mn}$$

дает среднюю энергию, поглощаемую телом (в единицу времени); источником этой энергии является внешнее возмущение, а поглощаясь телом, она диссипируется в нем. Подставив (87,10), получим

$$Q = \frac{\pi}{2\hbar} |f_0|^2 \sum_m |x_{nm}|^2 \{ \delta(\omega + \omega_{mn}) + \delta(\omega - \omega_{nm}) \} \omega_{mn}$$

или, учитывая, что δ -функции отличны от нуля лишь при равном нулю аргументе,

$$Q = \frac{\pi}{2\hbar} \omega |f_0|^2 \sum_m |x_{nm}|^2 \{ \delta(\omega - \omega_{nm}) - \delta(\omega + \omega_{mn}) \}. \quad (87,11)$$

Влияние возмущения на тело удобно характеризовать величиной α , определяемой следующим образом. В отсутствие возмущения среднее (по квантовомеханическому состоянию тела) значение величины x равно нулю. При наличии же внешнего воздействия возникает отлич-

¹⁾ См. «Квантовая механика», § 42.

ное от нуля \bar{x} , пропорциональное величине возмущения. Напишем его в виде

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (\alpha f_0 e^{-i\omega t} + \alpha^* f_0^* e^{i\omega t}). \quad (87,12)$$

Это равенство и представляет собой определение величины $\alpha(\omega)$ (если пользоваться комплексным представлением величин x и f с временным множителем $e^{-i\omega t}$, то связь между ними напишется как $\bar{x} = \alpha f$).

Поглощение энергии тоже может быть выражено через величину α . Для этого воспользуемся тем, что производная dU/dt от средней внутренней энергии тела по времени равна среднему значению частной производной по времени от гамильтониана тела¹⁾:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t},$$

а поскольку в $\bar{\mathcal{H}}$ зависит явно от времени лишь возмущение \hat{V} , то имеем $\dot{U} = -\dot{f} \bar{x}$. Таким образом, мы приходим к простой формуле:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{df}{dt} \bar{x} = \frac{i\omega}{2} (f_0 e^{-i\omega t} - f_0^* e^{i\omega t}) \bar{x}, \quad (87,13)$$

играющей весьма существенную роль в приложениях излагаемой теории. Выбрав для того или иного конкретного процесса величину x и зная конкретное выражение для изменения энергии, путем сравнения последнего с выражением (87,13) можно установить, какая величина играет роль соответствующего f .

Средняя диссипация энергии (в 1 сек) Q получается по (87,13) подстановкой \bar{x} из (87,12) и усреднением по периоду внешнего возмущения. Члены с множителями $e^{\pm 2i\omega t}$ при этом выпадают, и мы находим

$$Q = \frac{i\omega}{4} (\alpha^* - \alpha) |f_0|^2 = \frac{\omega}{2} \alpha'' |f_0|^2, \quad (87,14)$$

где $\alpha''(\omega)$ — мнимая часть $\alpha(\omega)$. Сравнивая формулы (87,11) и (87,14), найдем

$$\alpha''(\omega) = \frac{\pi}{\hbar} \sum_m |x_{nm}|^2 \{ \delta(\omega + \omega_{nm}) - \delta(\omega - \omega_{mn}) \}. \quad (87,15)$$

Вычисленные таким образом величины $(x^2)_\omega$ и α'' связаны между собой простым соотношением. Оно выявляется, однако, лишь после того, как эти величины будут выражены через температуру тела.

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 11.

Для этого производим усреднение с помощью распределения Гиббса (ср. примечание на стр. 452). Для $(x^2)_\omega$ имеем

$$(x^2)_\omega = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m e^{\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}} |x_{nm}|^2 \{\delta(\omega + \omega_{nm}) + \delta(\omega + \omega_{mn})\},$$

где E_n — уровни энергии, \mathcal{F} — свободная энергия тела, T — его абсолютная температура. Поскольку суммирование производится теперь по обоим индексам n и m , то можно менять их обозначение. Раскрыв фигурные скобки и заменив во втором члене m и n друг на друга, получим

$$\begin{aligned} (x^2)_\omega &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \left(e^{\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}} + e^{\frac{\mathcal{F} - E_m}{T}} \right) |x_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m e^{\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}} \left(1 + e^{\frac{\hbar\omega_{nm}}{T}} \right) |x_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}), \end{aligned}$$

или, ввиду наличия в суммируемом выражении δ -функции,

$$(x^2)_\omega = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} \right) \sum_n \sum_m e^{\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}} |x_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}).$$

Совершенно аналогичным образом получим

$$\alpha'' = \frac{\pi}{\hbar} \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} \right) \sum_n \sum_m e^{\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}} |x_{nm}|^2 \delta(\omega + \omega_{nm}).$$

Сравнивая друг с другом эти два выражения, найдем

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar\alpha''}{2\pi} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{\hbar\alpha''}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right\}. \quad (87,16)$$

Полный же средний квадрат флуктуирующей величины дается интегралом

$$\overline{x^2} = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty \alpha''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} d\omega. \quad (87,17)$$

Эти важные формулы (полученные Г. Калленом и Т. Вельтоном, 1951) связывают флуктуации физических величин с диссипативными свойствами системы при внешнем воздействии на нее. Обратим внимание на то, что множитель в фигурных скобках (87,16) представляет собой формально среднюю энергию (в единицах $\hbar\omega$) при температуре T осциллятора с частотой ω ; член $1/2$ отвечает нулевым колебаниям.

Полученные результаты можно представить в другом виде, рассматривая чисто формальным образом самопроизвольные флуктуации

величины x как результат воздействия некоторых фиктивных «случайных сил» f . При этом удобно записывать формулы, вводя «компоненты Фурье» x_ω и f_ω так, как если бы x было обычной (не операторной) величиной. Связь между ними дается соотношением

$$x_\omega = \alpha(\omega) f_\omega, \quad (87,18)$$

после чего средние квадратичные флуктуации записываются в виде

$$\overline{x_\omega x_{\omega'}} = \alpha(\omega) \alpha(\omega') \overline{f_\omega f_{\omega'}} = (x^2)_\omega \delta(\omega + \omega') = |\alpha|^2 (f^2)_\omega \delta(\omega + \omega').$$

Для спектральной плотности среднего квадрата случайной силы имеем, следовательно, из (87,16)

$$(f^2)_\omega = \frac{\hbar \alpha''}{2\pi |\alpha|^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T}. \quad (87,19)$$

Изложенная трактовка флуктуаций может представить определенные преимущества в конкретных применениях теории.

Таким образом, флуктуации величины x полностью определяются заданием мнимой части функции $\alpha(\omega)$. Отметим, что сама $\alpha(\omega)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного ω , обладает рядом общих свойств, полностью аналогичных выясненным в § 62 свойствам функции $\epsilon(\omega)$. Это вполне естественно, поскольку $\epsilon(\omega)$ является одним из примеров величин, подпадающих под определение (87,12).

Из определения (87,12) очевидно, что $\alpha(-\omega^*) = \alpha^*(\omega)$. Далее, из того факта, что значение x в некоторый момент времени может зависеть лишь от хода внешнего воздействия на систему в предыдущие моменты времени, следует (ср. § 62), что величина $\alpha(\omega)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Из связи мнимой части $\alpha(\omega)$ с диссипацией энергии следует, что $\alpha''(\omega)$ не имеет нулей при вещественных (отличных от нуля) значениях ω . В § 62 было показано, как из этих свойств можно вывести ряд дальнейших свойств функции. Мы не будем снова перечислять здесь все эти свойства; в их числе фигурируют и формулы Крамерса — Кронига (62,7) — (62,10).

Если $\alpha(\omega)$ определено так, что $\alpha \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, то в этих формулах надо писать α вместо $\epsilon - 1$. Так, вместо (62,7) имеем

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\xi) d\xi}{\xi - \omega}, \quad (87,20)$$

а вместо (62,10) —

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\xi \alpha''(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi. \quad (87,21)$$

При температурах $T \gg h\omega$ имеем $\text{cth}(h\omega/2T) \approx 2T/h\omega$, и формула (87,16) принимает вид

$$\langle x^2 \rangle_\omega = \frac{T}{\pi\omega} \alpha''(\omega). \quad (87,22)$$

Из нее выпадает квантовая постоянная в соответствии с тем, что в этих условиях флуктуации классичны.

Если неравенство $T \gg h\omega$ справедливо при всех существенных частотах (частоты, для которых $\alpha''(\omega)$ существенно отлично от нуля), то к классическому пределу можно перейти и в интегральной формуле (87,17):

$$\overline{x^2} = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha''(\omega)}{\omega} d\omega.$$

Но согласно формуле (87,21) стоящий здесь интеграл выражается через статическое значение α' , а поскольку при $\omega = 0$ мнимая часть $\alpha'' = 0$, то имеем

$$\overline{x^2} = T\alpha(0), \quad (87,23)$$

как и должно было быть ¹⁾.

З а д а ч а

Получить формулу (87,21) путем непосредственного квантовомеханического вычисления среднего значения x в возмущенной системе.

Р е ш е н и е. Пусть $\Psi_n^{(j)}(t)$ — волновые функции невозмущенной системы. Следуя общему методу ²⁾, ищем волновые функции возмущенной системы в первом приближении в виде

$$\Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \sum_{m \neq n} a_{mn} \Psi_m^{(0)},$$

где коэффициенты a_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$i\hbar \frac{da_{mn}}{dt} = V_{mn} e^{i\omega_{mn}t} = -\frac{1}{2} x_{mn} e^{i\omega_{mn}t} (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}).$$

Отсюда

$$a_{mn} = \frac{1}{2\hbar} x_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \left(\frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\omega_{mn} - \omega} + \frac{f_0^* e^{i\omega t}}{\omega_{mn} + \omega} \right);$$

¹⁾ Согласно известной формуле теории классических флуктуаций вычисление $\overline{x^2}$ требует знания работы, необходимой для изменения x от нуля до заданного значения. Эта работа равна $x^2/2\alpha(0)$ (что и приводит к (87,23)). Действительно, условие минимальности суммы

$$\frac{x^2}{2\alpha(0)} - fx$$

дает правильное значение $\overline{x} = \alpha(0) f$ для среднего значения x при воздействии постоянного внешнего возмущения.

²⁾ См. «Квантовая механика», § 4J.

при этом предполагаем, что $|\omega|$ не совпадает ни с одной из частот ω_{mn} . С помощью полученной функции Ψ_n вычисляем среднее значение величины x как соответствующий диагональный матричный элемент оператора \hat{x} ; в том же приближении имеем

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int \Psi_n^* \hat{x} \Psi_n dq = \sum_{mn} (a_{mn} x_{nm} e^{i\omega_{nm}t} + a_{mn}^* x_{mn} e^{i\omega_{mn}t}) = \\ &= \frac{1}{2\hbar} \sum_m \left[\frac{x_{mn} x_{nm}}{\omega_{mn} - \omega} + \frac{x_{mn} x_{nm}}{\omega_{mn} + \omega} \right] (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |x_{nm}|^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} (f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с определением (87,12), найдем

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |x_{nm}|^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \quad (1)$$

(мнимая часть α при этом вычислении, естественно, выпадает, поскольку мы предположили, что $|\omega| \neq \omega_{mn}$). Подставив (1) и (87,15) в формулу (87,21), легко убедиться в том, что последняя действительно удовлетворяется тождественно (при этом надо заметить, что при интегрировании по положительным ξ в $\alpha''(\xi)$ может быть отлична от нуля лишь одна из δ -функций).

§ 88. Общая теория квантовых флуктуаций нескольких величин

Изложенные результаты легко могут быть обобщены на случай, когда рассматриваются одновременно несколько флуктуирующих величин x_a . Приведем этот вывод, не повторяя подробно вычислений, полностью аналогичных произведенным в предыдущем параграфе.

Пусть x_a и x_b — какие-либо две из рассматриваемых физических величин. Введем квантовомеханические средние значения симметризованных операторных произведений

$$\frac{1}{2} (\hat{x}_{a\omega} \hat{x}_{b\omega'} + \hat{x}_{b\omega'} \hat{x}_{a\omega}) = (x_a x_b)_\omega \delta(\omega + \omega'), \quad (88,1)$$

обобщающие выражение (87,4). Вычисление, аналогичное выводу формулы (87,8), приводит к следующему результату:

$$(x_a x_b)_\omega = \frac{1}{2} \sum_m \{ (x_a)_{nm} (x_b)_{mn} \delta(\omega + \omega_{nm}) + (x_b)_{nm} (x_a)_{mn} \delta(\omega + \omega_{mn}) \}. \quad (88,2)$$

Действующее на систему внешнее возмущение пишем в виде

$$\hat{V} = - \sum_a f_a \hat{x}_a = - \frac{1}{2} \sum_a \{ f_{0a} e^{-i\omega t} + f_{0a}^* e^{i\omega t} \} \hat{x}_a. \quad (88,3)$$

Для количества энергии, поглощаемой системой в единицу времени, вычисление (аналогичное выводу (87,11)) дает

$$Q = \frac{\pi}{2\hbar} \omega \sum_{a,b} \sum_m f_{0a} f_{0b}^* [(x_a)_{mn} (x_b)_{nm} \delta(\omega + \omega_{nm}) - (x_a)_{nm} (x_b)_{mn} \delta(\omega + \omega_{mn})]. \quad (88,4)$$

Определение (87,12) обобщается следующим образом:

$$\bar{x}_a = \frac{1}{2} \sum_b (\alpha_{ab} f_{0b} e^{-i\omega t} + \alpha_{ab}^* f_{0b}^* e^{i\omega t}), \quad (88,5)$$

или

$$\bar{x}_a = \sum_b \alpha_{ab} f_b,$$

если все величины выражены в комплексном виде ($\sim e^{-i\omega t}$). Изменение же внутренней энергии выражается через внешнее возмущение согласно

$$\frac{dU}{dt} = - \sum_a j_a \bar{x}_a. \quad (88,6)$$

Последняя формула, как и формула (87,13), обычно служит в конкретных применениях теории для установления фактического соответствия между величинами x_a и f_a .

Подставив (88,6) в (88,5) и усреднив также по периоду внешнего возмущения, получим вместо (87,14) следующее выражение для диссипации энергии:

$$Q = \frac{i\omega}{4} \sum_{a,b} (\alpha_{ab}^* - \alpha_{ba}) f_{0a} f_{0b}^*. \quad (88,7)$$

Сравнение с (88,4) дает

$$\alpha_{ab}^* - \alpha_{ba} = - \frac{2\pi i}{\hbar} \sum_m [(x_a)_{mn} (x_b)_{nm} \delta(\omega + \omega_{nm}) - (x_a)_{nm} (x_b)_{mn} \delta(\omega + \omega_{mn})]. \quad (88,8)$$

Усредняя это выражение и (88,2) по распределению Гиббса, как это было сделано в предыдущем параграфе, мы найдем в результате следующую формулу, обобщающую соотношение (87,16):

$$(x_a x_b)_\omega = \frac{i\hbar}{4\pi} (\alpha_{ba}^* - \alpha_{ab}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (88,9)$$

Аналогично формулам (87,18) и (87,19), можно представить и формулу (88,9) в виде, соответствующем флуктуациям фиктивных «случайных сил», действие которых дало бы результат, эквивалентный

самопроизвольным флуктуациям величин x_a . Для этого пишем

$$x_{a\omega} = \sum_b \alpha_{ab} f_{b\omega}, \quad f_{a\omega} = \sum_b \alpha_{ab}^{-1} x_{b\omega} \quad (88,10)$$

и, далее,

$$(fafb)_\omega = \sum_{c,d} (\alpha_{ac}^{-1} \alpha_{bd}^{-1*}) (x_c x_d)_\omega.$$

Подставив сюда (88,9), получим

$$(fafb)_\omega = \frac{i\hbar}{4\pi} (\alpha_{ab}^{-1} - \alpha_{ba}^{-1*}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (88,11)$$

Полученные формулы позволяют сделать определенные заключения о свойствах симметрии величин $\alpha_{ab}(\omega)$ ¹⁾. Предположим сначала, что величины x_a, x_b таковы, что остаются неизменными при изменении знака времени; тогда соответствующие им операторы \hat{x}_a, \hat{x}_b чисто вещественны. Кроме того, будем считать, что тело не обладает «магнитной структурой» и не находится во внешнем магнитном поле; тогда вещественны и волновые функции его стационарных состояний²⁾. Поэтому будут вещественными также и матричные элементы величин x , а учитывая эрмитовость матриц x_{nm} , имеем $x_{nm} = x_{mn}^* = x_{mn}$. Мы видим тогда, что правая, а потому и левая стороны равенства (88,8) симметричны по индексам a, b . Таким образом, $\alpha_{ab}^* - \alpha_{ba} = \alpha_{ba}^* - \alpha_{ab}$, или $\alpha_{ab} + \alpha_{ab}^* = \alpha_{ba} + \alpha_{ba}^*$, т. е. мы приходим к заключению о симметричности вещественной части α_{ab} .

Но вещественная α'_{ab} и мнимая α''_{ab} части каждой из величин α_{ab} связаны друг с другом линейными интегральными соотношениями — формулами Крамерса — Кронига. Поэтому из симметричности α'_{ab} следует симметричность также и α''_{ab} , а потому и целиком α_{ab} . Таким образом, мы приходим к окончательному результату

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}. \quad (88,12)$$

Вид соотношений (88,12) несколько меняется, если тело находится во внешнем постоянном магнитном поле H . Волновые функции системы в магнитном поле не вещественны, а обладают свойством

$$\psi^*(H) = \psi(-H).$$

¹⁾ Излагаемые результаты принадлежат Г. Каллену, М. Баррашу Ю. Джексоу и Р. Грину (1952).

²⁾ Точные уровни энергии системы взаимодействующих частиц могут быть вырождены только по направлениям полного момента системы. Этот источник вырождения можно исключить, предполагая тело заключенным в сосуд с неподвижными стенками. После этого уровни энергии тела будут невырожденными, а потому соответствующие им точные волновые функции могут быть выбраны вещественными.

Соответственно для матричных элементов величин x имеем

$$x_{nm}(H) = x_{mn}(-H),$$

и выражение в правой стороне равенства (88,8) не меняется при перестановке индексов a, b лишь при условии одновременного изменения знака H . Поэтому мы приходим к соотношению

$$\alpha_{ab}^*(H) - \alpha_{ba}(H) = \alpha_{ba}^*(-H) - \alpha_{ab}(-H).$$

Еще одно соотношение дает формула Крамерса — Кронига (87,20), в силу которой имеет место связь вида

$$\alpha_{ba} = i\hat{J}(\alpha_{ba}),$$

где \hat{J} — вещественный линейный оператор. Сложив это равенство с эрмитово-сопряженным равенством $\alpha_{ab}^* = -i\hat{J}(\alpha_{ab}^*)$, получим

$$\alpha_{ab}^* + \alpha_{ba} = -i\hat{J}(\alpha_{ab}^* - \alpha_{ba})$$

(все α_{ab} берутся здесь, разумеется, при одном и том же значении H). Отсюда видно, что если разность $\alpha_{ab}^* - \alpha_{ba}$ обладает каким-либо свойством симметрии, то тем же свойством обладает и сумма $\alpha_{ab}^* + \alpha_{ba}$, а потому и сами величины α_{ab} . Таким образом,

$$\alpha_{ab}(H) = \alpha_{ba}(-H). \quad (88,13)$$

Пусть, наконец, среди величин x есть такие, которые меняют знак при изменении знака времени. Квантовомеханический оператор, соответствующий такой величине, — чисто мнимый, и потому $x_{nm} = x_{mn}^* = -x_{mn}$. Если обе величины x_a, x_b относятся к такому роду, то весь вывод и соотношения (88,12) остаются неизменными. Если же лишь одна из двух величин меняет знак при изменении знака времени, то мы видим, что при перестановке индексов a, b правая сторона равенства (88,8) меняет знак. Соответственно вместо (88,12) мы получим

$$\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}. \quad (88,14)$$

Аналогичным образом в магнитном поле будем иметь вместо (88,13)

$$\alpha_{ab}(H) = -\alpha_{ba}(-H). \quad (88,15)$$

Все эти соотношения можно, разумеется, получить и из формулы (88,9) как следствие временной симметрии флуктуаций. В компонентах Фурье изменение знака времени проявляется как замена ω на $-\omega$ (если сама по себе величина x инвариантна по отношению к изменению знака времени). В выражениях (88,1) (фактически отличных от нуля лишь при $\omega' = -\omega$) это означает перестановку ω и ω' или, что то же, перестановку индексов a и b . Поэтому временная симметрия флуктуаций означает, что

$$(x_a x_b)_\omega = (x_b x_a)_\omega,$$

т. е. левая (а потому и правая) сторона равенства (88,9) симметрична по индексам a, b , и мы снова придем к соотношениям (88,12). Такой вывод свойств симметрии величин α_{ab} аналогичен обычному выводу принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера¹⁾; мы увидим ниже, что формулы (88,12) — (88,15) можно рассматривать как обобщение этого принципа.

Покажем теперь, в каком взаимоотношении находится изложенная общая теория с теорией термодинамических флуктуаций. Напомним, что термодинамическими мы называем флуктуации таких величин, заданием которых может определяться какое-либо состояние неполного равновесия; другими словами, время релаксации этой величины должно быть велико по сравнению с временами релаксации других процессов приближения к равновесию, возможных в данной системе. Для таких величин характерна справедливость уравнений вида

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b,$$

которыми описывается поведение замкнутой системы, не находящейся в равновесии (X_b обозначают производные $-\partial\mathcal{S}/\partial x_b$ от полной энтропии системы). Если система не замкнута, а находится под действием внешних сил, то в правую часть этих уравнений должны быть введены дополнительные члены, которые мы обозначим как y_b :

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b + y_b. \quad (88,16)$$

Легко выразить y_a через величины f_a , характеризующие данное возмущение.

Для этого предположим, что на тело действуют статические силы, т. е. f_a постоянны. Это воздействие приводит к «смещению» состояния равновесия, в котором средние значения величин X_a уже не будут равны нулю. Эти новые средние значения можно выразить через f_a следующим образом. Энергия тела, находящегося под действием постоянного возмущения, равна

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 - \sum_a f_a \bar{x}_a,$$

где \mathcal{U}_0 — энергия тела в отсутствие возмущения. Для ее дифференциала имеем

$$d\mathcal{U} = Td\mathcal{S} + \sum_a \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial f_a} df_a.$$

Но согласно общему правилу²⁾

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial f_a} \right)_{\mathcal{S}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_a} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial f_a} = - \bar{x}_a.$$

1) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 118.

2) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 11.

так что

$$d\mathcal{U} = d(\mathcal{U}_0 - \sum_a f_a \bar{x}_a) = Td\mathcal{S} - \sum_a \bar{x}_a df_a$$

или

$$d\mathcal{U}_0 = Td\mathcal{S} + \sum_a f_a d\bar{x}_a.$$

Отсюда находим равновесные значения

$$X_a = - \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_a} \right)_{\mathcal{U}_0} = \frac{f_a}{T}.$$

С другой стороны, в состоянии равновесия правая сторона уравнений (88,16) должна обращаться в нуль. Мы видим, следовательно, что с помощью величин f_a эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} \left(X_b - \frac{f_b}{T} \right). \quad (88,17)$$

Теперь можно связать фигурирующие в изложенной выше общей теории величины α_{ab} с кинетическими коэффициентами γ_{ab} . Для этого подставим в (88,17) x_a из (88,5), а X_a представим в виде линейных комбинаций:

$$X_a = \sum_b \beta_{ab} x_b. \quad (88,18)$$

Отделяя в (88,17) члены, содержащие $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\omega t}$, получим

$$\sum_a i\omega x_{ad} f_{0d} = \sum_{b, c, d} \gamma_{ab} \beta_{bc} \alpha_{cd} f_{0d} - \frac{1}{T} \sum_d \gamma_{ad} f_{0d},$$

откуда ввиду произвольности f_{0d} следуют соотношения между коэффициентами:

$$i\omega x_{ad} - \sum_{b, c} \gamma_{ab} \beta_{bc} \alpha_{cd} = - \frac{\gamma_{ad}}{T},$$

или

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{T} (\beta_{ab}^{-1} - i\omega \gamma_{ab}^{-1})^{-1}, \quad (88,19)$$

где -1 в показателях означает взятие обратной матрицы. Это и есть искомые соотношения.

Величины β_{ab} , по определению, симметричны по своим индексам (так как $\beta_{ab} = -\partial^2 \mathcal{S} / \partial x_a \partial x_b$). Поэтому из симметрии α_{ab} следует

также и симметрия γ_{ab} , т. е. обычный принцип симметрии кинетических коэффициентов¹⁾.

Уравнениям (88,17) может быть, как известно²⁾, придан еще и другой смысл. Именно, величины f_a можно рассматривать не как результат внешнего воздействия на систему, далекую от состояния равновесия, а как «случайные силы», введение которых в уравнения делает последние применимыми к флуктуационным изменениям величин x в замкнутой системе. Такой трактовке соответствует и представление основной формулы в виде (88,11).

Подставив (88,19) в (88,11), получим

$$(f_a f_b)_\omega = \frac{\hbar\omega T}{4\pi} (\gamma_{ab}^{-1} + \gamma_{ba}^{-1}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}$$

или, для величин $y_a = \sum_b \gamma_{ab} f_b / T$:

$$(y_a y_b)_\omega = \frac{\hbar\omega}{4\pi T} (\gamma_{ab} + \gamma_{ba}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}.$$

В классическом пределе, т. е. при $\hbar\omega \ll T$, это дает:

$$(y_a y_b)_\omega = \frac{1}{2\pi} (\gamma_{ab} + \gamma_{ba}),$$

в согласии с формулами теории флуктуаций классических величин³⁾.

§ 89. Флуктуации тока в линейных цепях

Применим изложенную в § 87 общую теорию к интересному вопросу о флуктуациях тока в линейных электрических цепях (впервые рассмотренному *Найквистом*, 1928).

Флуктуации тока представляют собой свободные (т. е. происходящие в отсутствие приложенной извне э.д.с.) электрические колебания в проводнике. В линейной замкнутой цепи наибольший интерес представляют, естественно, те колебания, при которых возникает текущий вдоль провода полный ток J . Ниже мы предполагаем выполненным условие квазистационарности — размеры цепи малы по сравнению с длиной волны $\lambda \sim c/\omega$. Тогда полный ток J одинаков во всех участках цепи и является функцией лишь от времени.

¹⁾ В случае же (88,14) должно быть и $\gamma_{ab} = -\gamma_{ba}$. Это тоже следует из (88,19), если заметить, что в этом случае $\beta_{ab} = 0$. Действительно, β_{ab} есть коэффициент при произведении $x_a x_b$ в квадратичной форме, дающей изменение \mathcal{S} при отклонении от равновесия. Но энтропия есть величина инвариантная по отношению к изменению знака времени, а произведение $x_a x_b$ в данном случае меняет знак при замене t на $-t$. Поэтому такого члена в энтропии не может быть, т. е. $\beta_{ab} = 0$.

²⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 117 и 120.

³⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, ф-ла (120,10).

Имея в виду нахождение спектрального распределения флуктуаций тока, выберем J в качестве величины x , фигурирующей в общих формулах § 87. Для того чтобы выяснить при этом смысл величины α , предположим, что в цепи действует внешняя электродвижущая сила \mathcal{E} . Тогда диссипация энергии в цепи $Q = J\mathcal{E}$. Сравнивая с формулой (87,13), мы видим, что $\dot{f} = -\mathcal{E}$, или, полагая в этом линейном соотношении f и \mathcal{E} пропорциональными $e^{-i\omega t}$,

$$\mathcal{E} = i\omega f.$$

С другой стороны, ток и э.д.с. в линейной цепи связаны соотношением $\mathcal{E} = ZJ$, где $Z(\omega)$ — импеданс цепи (см. § 47). Поэтому имеем

$$J = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{i\omega}{Z} f,$$

откуда заключаем, что $\alpha(\omega) = i\omega/Z(\omega)$. Мнимая часть

$$\alpha'' = \text{Im} \frac{i\omega}{Z} = \frac{\omega}{|Z|^2} R,$$

где $R(\omega) = \text{Re} \{Z(\omega)\}$. Природа явлений, ответственных за дисперсию сопротивления цепи, совершенно несущественна для следующих ниже формул.

По формуле (87,16) находим теперь для искомого флуктуаций тока

$$(J^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi |Z|^2} R \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (89,1)$$

Эту формулу можно представить в другом виде, описывая флуктуации тока как результат действия «случайной» э.д.с. $\mathcal{E}_\omega = Z(\omega)J_\omega$. Для нее имеем

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi} R(\omega) \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (89,2)$$

В классическом случае ($\hbar\omega \ll kT$)

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = \frac{T}{\pi} R(\omega). \quad (89,3)$$

§ 90. Флуктуации электромагнитного поля

Электромагнитные величины E, H, \dots , фигурирующие в макроскопической электродинамике, получаются в результате усреднения, которое можно представить как совокупность двух операций. Если исходить, для наглядности, из классической точки зрения, то можно различать усреднение по физически бесконечно малому объему при заданном расположении всех частиц в нем и затем усреднение полученной величины по движению частиц. При рассмотрении электромагнитных флуктуаций речь идет о колебаниях со временем величин,

усредненных лишь по физически бесконечно малым объемам, и ниже-все величины будут пониматься именно в этом смысле.

Следует заметить, что при квантовомеханическом рассмотрении говорить об усреднении по объему можно, разумеется, не для самой физической величины, а лишь для ее оператора; вторая же стадия усреднения заключается в определении математического ожидания этого оператора с помощью квантовомеханических вероятностей. Поэтому, строго говоря, фигурирующие ниже величины E, H, \dots надо понимать как квантовомеханические операторы. Это обстоятельство, однако, совершенно, не отражается на окончательных результатах излагаемой ниже теории, и для упрощения записи формул мы рассматриваем все величины как классические.

В результате флуктуационных колебаний расположения и движения зарядов в теле в нем возникают местные спонтанные электрические и магнитные моменты; величину этих моментов, отнесенных к единице объема тела, обозначим соответственно посредством $K/4\pi$ и $L/4\pi$. Эти моменты в известном смысле аналогичны спонтанной поляризации пироэлектрических тел и спонтанной намагниченности ферромагнетиков, но, разумеется, отличаются от них в том отношении, что при усреднении обращаются в нуль. Связь между индукцией и напряженностью флуктуационных электрического и магнитного полей дается формулами:

$$D_i = \hat{\varepsilon}_{ik} E_k + K_i, \quad B_i = \hat{\mu}_{ik} H_k + L_i, \quad (90,1)$$

а для их «компонент Фурье»:

$$\begin{aligned} D_{i\omega} &= \varepsilon_{ik}(\omega) E_{k\omega} + K_{i\omega}, \\ B_{i\omega} &= \mu_{ik}(\omega) H_{k\omega} + L_{i\omega}. \end{aligned} \quad (90,2)$$

При этом уравнения Максвелла гласят:

$$(\text{rot } E_{\omega})_i = \frac{i\omega}{c} (\mu_{ik} H_{k\omega} + L_{i\omega}), \quad (90,3)$$

$$(\text{rot } H_{\omega})_i = -\frac{i\omega}{c} (\varepsilon_{ik} E_{k\omega} + K_{i\omega}). \quad (90,4)$$

Мы будем называть K и L флуктуационными «сторонними» индукциями; такое название имеет, конечно, чисто условный характер и подчеркивает лишь формальный способ введения этих величин, а не их природу.

Для того чтобы можно было воспользоваться общими формулами, выведенными в § 88, необходимо установить соответствие между рассматриваемыми здесь электромагнитными величинами и величинами x_a, f_a , фигурирующими в общей теории. Сделаем это с помощью следующего приема. Будем рассматривать чисто формальным образом величины K и L не как спонтанно возникающие моменты, а как результат внешнего воздействия, заключающегося во введении извне в тело

определенных электрических зарядов и токов. Вычислим связанное с этим воздействием изменение энергии тела.

Для этого замечаем, что уравнение сохранения энергии в том виде, как оно следует из уравнений Максвелла, гласит:

$$\int \frac{1}{4\pi} \left\{ E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right\} dV = -\frac{c}{4\pi} \oint [EH] df$$

или, после подстановки сюда (90,1),

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon}_{ik} E_k) + H_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mu}_{ik} H_k) \right\} = \\ = -\frac{c}{4\pi} \oint [EH] df - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ E \frac{\partial K}{\partial t} + H \frac{\partial L}{\partial t} \right\} dV. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что интересующее нас изменение энергии, связанное с рассматриваемым «внешним воздействием», дается интегралом

$$-\frac{1}{4\pi} \int \left\{ E \frac{\partial K}{\partial t} + H \frac{\partial L}{\partial t} \right\} dV. \quad (90,5)$$

В § 88 мы рассматривали дискретный ряд флуктуирующих величин x_a , между тем как теперь мы имеем дело с непрерывным рядом (значения поля в каждой точке тела). Это несущественное затруднение мы обойдем пока формальным путем, разделив объем тела на малые, но конечные участки ΔV и рассматривая некоторые средние значения поля в каждом из них; переход к бесконечно малым элементам мы произведем в окончательных формулах. Таким образом, вместо интеграла в (90,5) пишем сумму

$$-\frac{1}{4\pi} \sum \left\{ E \frac{\partial K}{\partial t} + H \frac{\partial L}{\partial t} \right\} \Delta V$$

по всем участкам ΔV .

Сравнивая это выражение с выражением (88,6), мы видим, что если в качестве величин x_a выбрать компоненты векторов $E \Delta V / 4\pi$, $H \Delta V / 4\pi$ в каждом из участков ΔV , то соответствующими величинами f_a будут компоненты векторов K и L :

$$\begin{aligned} x_a \rightarrow E \frac{\Delta V}{4\pi}, \quad H \frac{\Delta V}{4\pi}, \\ f_a \rightarrow K, \quad L. \end{aligned} \quad (90,6)$$

Роль соотношений (88,10),

$$f_{a\omega} = \sum_b \alpha_{ab}^{-1}(\omega) x_{b\omega}, \quad (90,7)$$

устанавливающих связь между величинами f_ω и x_ω , играют при этом уравнения Максвелла (90,3) и (90,4), из которых имеем

$$\begin{aligned} K_{i\omega} &= -\epsilon_{ik} E_{k\omega} + \frac{ic}{\omega} (\text{rot } H_\omega)_i, \\ L_{i\omega} &= -\mu_{ik} H_{k\omega} - \frac{ic}{\omega} (\text{rot } E_\omega)_i. \end{aligned} \quad (90,8)$$

Коэффициенты α_{ab}^{-1} находятся путем сравнения (90,8) с (90,7) с учетом определений (90,6), причем индексы a, b нумеруют компоненты векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} и участки, в которых берутся их значения.

Дифференциальные операторы rot в (90,8) надо при этом понимать как разностные операторы, определенные на дискретной системе точек (скажем, центрах участков ΔV). Конкретный вид этих операторов, впрочем, совершенно несуществен, так как для дальнейшего достаточно заметить, что в двух равенствах (90,8) операторы, применяемые соответственно к \mathbf{H}_ω и \mathbf{E}_ω , чисто мнимы и отличаются лишь знаком. Это значит, что между теми из коэффициентов α_{ab}^{-1} , которые связывают значения величин \mathbf{K} и \mathbf{L} (в данной точке пространства) со значениями соответственно величин \mathbf{H} и \mathbf{E} в различных точках пространства, выполняются соотношения

$$\alpha_{ab}^{-1} = (\alpha_{ba}^{-1})^*.$$

Согласно общей формуле (88,11) отсюда сразу следует, что

$$(K_i^{(1)} L_k^{(2)})_\omega = 0, \quad (90,9)$$

где индексы (1) и (2) означают, что величины берутся в точках с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ; формула (90,9) справедлива как при $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, так и при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

Далее, из первого равенства (90,8) (с учетом (90,6)) мы видим, что те из коэффициентов α_{ab}^{-1} , которые связывают значения $K_{i\omega}$ со значениями $E_{k\omega}$, равны $-\varepsilon_{ik} 4\pi/\Delta V$, если \mathbf{K}_ω и \mathbf{E}_ω относятся к одной и той же точке пространства, и равны нулю, если значения \mathbf{K}_ω и \mathbf{E}_ω взяты в различных точках. Согласно (88,11) имеем поэтому

$$(K_i^{(1)} K_k^{(2)})_\omega = 0 \quad (\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2),$$

$$(K_i K_k)_\omega = ih (\varepsilon_{ki}^* - \varepsilon_{ik}) \frac{1}{\Delta V} \text{cth} \frac{h\omega}{2T}.$$

Переходя теперь к пределу $\Delta V \rightarrow 0$, мы можем, очевидно, написать обе эти формулы в виде единой формулы:

$$(K_i^{(1)} K_k^{(2)})_\omega = ih (\varepsilon_{ki}^* - \varepsilon_{ik}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{cth} \frac{h\omega}{2T}, \quad (90,10)$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы любых двух точек тела. Ниже мы будем предполагать, что тело не находится во внешнем постоянном магнитном поле; тогда $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ и (90,10) можно написать в виде

$$(K_i^{(1)} K_k^{(2)})_\omega = 2h\varepsilon_{ik}'' \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{cth} \frac{h\omega}{2T}. \quad (90,11)$$

Совершенно аналогичным образом получим формулу

$$(L_i^{(1)} L_k^{(2)})_\omega = 2h\mu_{ik}'' \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{cth} \frac{h\omega}{2T}. \quad (90,12)$$

Таким образом, флуктуации «сторонних» индукций в различных точках тела коррелированы друг с другом лишь в пределе равного нулю расстояния между точками ($r_2 \rightarrow r_1$). Разумеется, этот предел надо понимать в смысле, соответствующем макроскопической точке зрения; высказанное утверждение означает, что в действительности корреляция этих величин распространяется лишь на атомные расстояния. Подчеркнем существенное обстоятельство, что корреляционные формулы для «сторонних» индукций оказываются не зависящими от геометрической формы тела, в котором рассматриваются флуктуации, и в этом смысле являются универсальными.

Формулам (90,11), (90,12) можно придать другой вид в области сравнительно малых частот («квазистационарная» область), в которой тензор ϵ_{ik} может быть выражен через постоянный (не зависящий от частоты) тензор проводимости σ_{ik} согласно

$$\epsilon_{ik} = \frac{4\pi l \sigma_{ik}}{\omega}. \quad (90,13)$$

При этом вместо K введем новую величину j согласно $j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial K}{\partial t}$ или

$$j_{\omega} = -\frac{l\omega}{4\pi} K_{\omega}. \quad (90,14)$$

Смысл этой величины выясняется из вида, который принимает уравнение (90,4):

$$(\text{rot } H_{\omega})_i = \frac{4\pi}{c} (\sigma_{ik} E_{k\omega} + j_{i\omega}). \quad (90,15)$$

Отсюда видно, что полная флуктуационная плотность тока есть $\sigma_{ik} E_{k\omega} + j_{i\omega}$, так что вектор j представляет ее «стороннюю» часть, не связанную с электрическим полем E . Для частот, при которых выполняется (90,13), и для не слишком низких температур имеем $kT \gg \hbar\omega$, так что $\text{cth}(\hbar\omega/2T) \approx 2T/\hbar\omega$. В результате формула (90,11) принимает вид

$$(j_i^{(1)} j_k^{(2)})_{\omega} = \frac{T}{\pi} \sigma_{ik} \delta(r_2 - r_1). \quad (90,16)$$

Формула (90,16) была получена (другим методом) М. А. Леонтовичем и С. М. Рытовым (1952), а формулы (90,11), (90,12) — С. М. Рытовым (1953). Вместе с уравнениями (90,3) и (90,4) эти формулы решают принципиально вопрос о вычислении электромагнитных флуктуаций в любом теле. Ход решения задач при этом таков. Рассматривая K_{ω} и L_{ω} как заданные функции координат, решаем уравнения (90,3), (90,4) относительно E_{ω} и H_{ω} , учитывая при этом необходимые граничные условия непрерывности тангенциальных компонент E_{ω} и H_{ω} на поверхности тела (вне тела, разумеется, $K=L=0$, но E и H отличны от нуля). В результате получаем E_{ω} , H_{ω} , выраженные в виде некоторых линейных функционалов от K_{ω} , L_{ω} . Соответственно,

любая квадратичная (или билинейная) по E_ω , H_ω величина выражается через квадратичные функционалы от K_ω , L_ω , после чего их средние значения вычисляются с помощью формул (90,11), (90,12), и K_ω , L_ω выпадают из ответа.

В качестве примера рассмотрим электромагнитные флуктуации в неограниченной изотропной среде (С. М. Рытов, 1953). Будем предполагать магнитную проницаемость среды равной единице; тогда $\nu'' = 0$ и надо положить также $L = 0$. Таким образом, уравнения (90,3) и (90,4) принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E_\omega &= i \frac{\omega}{c} H_\omega, \\ \operatorname{rot} H_\omega &= -i \frac{\omega}{c} (\varepsilon E_\omega + K_\omega), \end{aligned} \quad (90,17)$$

причем

$$(K_i^{(1)} K_k^{(2)})_\omega = 2h\varepsilon'' \delta_{ik} \delta(r_2 - r_1) \operatorname{cth} \frac{h\omega}{2T}. \quad (90,18)$$

Представим K_ω в виде пространственного интеграла Фурье:

$$K_\omega(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(p) e^{ipr} d^3p. \quad (90,19)$$

При этом

$$g_\omega(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\omega(r) e^{-ipr} d^3r, \quad g_\omega^*(p) = g_{-\omega}(-p).$$

Найдем функцию корреляции компонент $g_\omega(p)$. Для этого пишем их произведение в виде двойного интеграла

$$g_{i\omega}(p) g_{k\omega'}(p') = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i\omega}(r_1) K_{k\omega'}(r_2) e^{-i(p'r_1 + p'r_2)} d^3r_1 d^3r_2.$$

Усреднив согласно

$$\overline{K_{i\omega}(r_1) K_{k\omega'}(r_2)} = (K_i^{(1)} K_k^{(2)})_\omega \delta(\omega + \omega'),$$

подставив (90,18) и производя одно интегрирование (d^3r_1 или d^3r_2), получим ввиду наличия в подынтегральном выражении множителя $\delta(r_2 - r_1)$:

$$\overline{g_{i\omega}(p) g_{k\omega'}(p')} = 2h\varepsilon'' \delta(\omega + \omega') \delta_{ik} \operatorname{cth} \frac{h\omega}{2T} \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p+p')r} d^3r$$

или окончательно

$$\overline{g_{i\omega}(p) g_{k\omega'}(p')} = \frac{h}{4\pi^3} \varepsilon'' \delta_{ik} \delta(\omega + \omega') \delta(p + p') \operatorname{cth} \frac{h\omega}{2T}. \quad (90,20)$$

Будем решать уравнения (90,17) методом Фурье. Наряду с представлением K_{ω} в виде интеграла (90,19), полагаем

$$E_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(p) e^{ipr} d^3p, \quad H_{\omega} = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} [pa] e^{ipr} d^3p.$$

Тем самым первое из уравнений (90,17) уже удовлетворено, а подстановка во второе уравнение дает

$$[p[pa]] = -k^2(\varepsilon a + g),$$

откуда

$$a = \frac{k^2 \varepsilon g - p(pg)}{\varepsilon(p^2 - \varepsilon k^2)}.$$

Воспользовавшись этим выражением и формулой (90,20), получим для корреляции компонент Фурье электрического поля следующий результат:

$$\begin{aligned} \overline{a_{i\omega}(p) a_{k\omega'}(p')} &= & (90,21) \\ &= \frac{\hbar \varepsilon''}{4\pi^3 |\varepsilon|^2} \delta(p + p') \delta(\omega + \omega') \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega k^4 |\varepsilon|^2 \delta_{ik} - p_i p_k [k^2(\varepsilon + \varepsilon^*) - p^2]}{2T |p^2 - k^2 \varepsilon|^2}. \end{aligned}$$

Наконец, пространственную корреляцию флуктуационного электрического поля мы получим путем обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \overline{E_{i\omega}(r_1) E_{k\omega'}^*(r_2)} &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{a_{i\omega}(p) a_{k\omega'}(p')} e^{i(p r_1 + p' r_2)} d^3p d^3p'. \end{aligned}$$

Одно интегрирование производится сразу ввиду наличия δ -функции в (90,21). Для проведения же второго интегрирования надо разложить выражение (90,21) на простые дроби, после чего воспользоваться формулами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipr}}{p^2 + \chi^2} d^3p = 2\pi^2 \frac{e^{-\chi r}}{r}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_i p_k e^{ipr}}{p^2 + \chi^2} d^3p = -2\pi^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{e^{-\chi r}}{r} \right);$$

первая из этих формул получается путем взятия компонент Фурье от обеих сторон известного соотношения

$$(\Delta - \chi^2) \frac{e^{-\chi r}}{r} = -4\pi \delta(r), \quad (90,22)$$

а вторая получается дифференцированием первой.

В результате получим

$$\begin{aligned} (E_i^{(1)} E_k^{(2)})_{\omega} &= \frac{\hbar}{4\pi i} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \frac{k^2}{r} (e^{-k \sqrt{-\varepsilon} r} - e^{-k \sqrt{-\varepsilon^*} r}) \delta_{ik} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\varepsilon|^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[\frac{1}{r} (\varepsilon^* e^{-k \sqrt{-\varepsilon} r} - \varepsilon e^{-k \sqrt{-\varepsilon^*} r}) \right] \right\}, \quad (90,23) \end{aligned}$$

где $r = |r_2 - r_1|$, а корень $\sqrt{-\varepsilon}$ должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\operatorname{Re} \sqrt{-\varepsilon} > 0$. В частности, производя упрощение по индексам i, k и воспользовавшись соотношением (90,22), найдем

$$(E^{(1)} E^{(2)})_{\omega} = \frac{\hbar}{4\pi i} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \frac{2k^2}{r} (e^{-k \sqrt{-\varepsilon} r} - e^{-k \sqrt{-\varepsilon^*} r}) + \frac{8\pi i \varepsilon''}{|\varepsilon|^2} \delta(r) \right\}. \quad (90,24)$$

Аналогичным образом можно вычислить корреляцию между различными компонентами H_{ω} друг с другом и с компонентами E_{ω} ; мы не станем останавливаться здесь на этом.

§ 91. Черное излучение в прозрачной среде

Наличие множителя ε'' или μ'' в формулах (90,11) и (90,12) ясно подчеркивает связь электромагнитных флуктуаций с поглощением в данной среде. Но, если произвести переход к пределу $\varepsilon'' \rightarrow 0$ (одновременно предполагая $\varepsilon' > 0$) в формуле (90,23) или (90,24), мы получим конечное, отличное от нуля выражение. Это обстоятельство связано с порядком перехода к двум пределам — бесконечным размерам среды и равной нулю ε'' . Поскольку в бесконечной среде уже сколь угодно малое ε'' приводит, в конце концов, к поглощению, то при использованном нами порядке перехода к пределам получающийся результат относится к физически прозрачной среде, в которой, как и во всякой реальной среде, сколько-нибудь отличное от нуля поглощение все же имеется.

Произведем, например, указанный переход в формуле (90,24). Для этого замечаем, что при малом ε''

$$\sqrt{-\varepsilon} = \sqrt{-\varepsilon' - i\varepsilon''} \approx -i \sqrt{\varepsilon'} \left(1 + i \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right),$$

$$\sqrt{-\varepsilon^*} = \sqrt{-\varepsilon' + i\varepsilon''} \approx i \sqrt{\varepsilon'} \left(1 - i \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right);$$

выбор знаков в обоих выражениях определяется условием положительности их вещественной части. Поэтому в пределе $\varepsilon'' \rightarrow 0$ получим

$$(E^{(1)} E^{(2)})_{\omega} = \frac{\omega^2 \hbar}{\pi c^2} \frac{\sin \left(\frac{\omega}{c} nr \right)}{r} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T},$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления. Ввиду отсутствия члена с δ -функцией это выражение остается конечным, и при совпадающих точках r_1 и r_2

$$(E^2)_{\omega} = \frac{\omega^3 \hbar}{\pi c^3} n \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T}. \quad (91,1)$$

Спектральная плотность энергии электрического поля (на 1 см^3 объема среды) дается выражением (см. (61,10) и (87,6))

$$\frac{1}{8\pi} 2 (E^2)_\omega \frac{d(n^2\omega)}{d\omega}.$$

Подставив сюда (91,1), получим

$$\frac{\omega^3 h n}{4\pi^2 c^3} \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} \text{cth} \frac{h\omega}{2T}.$$

Аналогичным образом можно вычислить средний квадрат магнитного поля. При этом оказывается, что $(H^2)_\omega = \varepsilon (E^2)_\omega$, и потому магнитная энергия

$$\frac{1}{8\pi} 2 (H^2)_\omega = \frac{\omega^3 h n^3}{4\pi^2 c^3} \text{cth} \frac{h\omega}{2T}$$

(мы не приводим здесь соответствующих вычислений, имея в виду, что получаемый ниже окончательный результат довольно очевиден и сам по себе).

Таким образом, полная спектральная плотность электромагнитной энергии флуктуационного поля равна

$$\frac{\omega^3 h}{4\pi^2 c^3} \left(n \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} + n^3 \right) \text{cth} \frac{h\omega}{2T} = \left(\frac{h\omega}{2} + \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \right) \frac{\omega^3 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega} (n\omega).$$

Первый член в скобках связан с нулевыми колебаниями поля. Второй же член дает энергию термодинамически равновесного электромагнитного излучения в прозрачной среде (т. е. энергию так называемого черного излучения):

$$\frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \frac{\omega^3 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega} (n\omega). \quad (91,2)$$

Эту формулу можно было бы получить и без рассмотрения флуктуаций, путем соответствующего обобщения формулы Планка для черного излучения в пустоте. Согласно последней энергия черного излучения (в единице объема) с компонентами волнового вектора в интервалах dk_x, dk_y, dk_z дается формулой

$$\frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \frac{2dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$$

(множитель 2 учитывает два направления поляризации). Соответственно для получения спектральной плотности энергии надо заменить $dk_x dk_y dk_z$ на $4\pi k^2 dk$ и подставить $k = \omega/c$. Для перехода от

пустоты к прозрачной среде достаточно положить $k = n\omega/c$ вместо $k = \omega/c$, т. е. написать

$$k^2 dk = k^2 \frac{dk}{d\omega} d\omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^3} \frac{d(n\omega)}{d\omega},$$

что дает формулу (91,2). Заметим, что последняя остается справедливой и при $\mu \neq 1$, когда под n надо понимать $\sqrt{\epsilon_\mu}$.

§ 92. Силы молекулярного притяжения между твердыми телами

Теория электромагнитных флуктуаций может быть применена к вычислению сил взаимодействия между любыми двумя макроскопическими телами, поверхности между которыми сближены до очень малых расстояний (Е. М. Лифшиц, 1954). Ниже предполагается лишь, что эти расстояния велики по сравнению с межуатомными; это условие позволяет подойти к рассматриваемому вопросу чисто макроскопическим образом.

Именно, можно рассматривать взаимодействие тел, как осуществляющееся через посредство флуктуационного электромагнитного поля, которое всегда присутствует внутри всякой поглощающей среды и выходит также и за ее пределы. Если пространство между поверхностями тел является вакуумом, то этот механизм передачи взаимодействия заведомо исчерпывает собой весь эффект.

Представим себе взаимодействующие тела в виде двух сред, заполняющих полупространства с плоскопараллельными границами, отстоящими друг от друга на расстояние l . Флуктуационное электромагнитное поле в обеих средах и в пространстве между ними может быть найдено путем решения уравнений (90,17)¹⁾ с соответствующими граничными условиями (непрерывность тангенциальных составляющих E_ω и H_ω) на обеих поверхностях. Наиболее удобным образом решение осуществляется путем разложения искомых функций (и величины K_ω) в интеграл Фурье по поперечным координатам y, z (ось x перпендикулярна к плоскости щели), после чего для определения зависимости поля от x получается система обыкновенных неоднородных линейных уравнений. В результате их решения поля E_ω, H_ω получаются в виде интегральных выражений, содержащих под интегралами флуктуационные «сторонние» поля $K_{1\omega}$ и $K_{2\omega}$ в обеих средах. Фактически достаточно получить в явном виде поля E_ω, H_ω лишь в пространстве щели, так как силу F_ω взаимного притяжения (действующую на 1 см^2 поверхности каждого из тел) можно вычислить по этому полю, как xx -компоненту максвелловского тензора напряжений, подвергнутому статистическому усреднению с помощью формулы (90,18). Поскольку все вычисления производятся

1) Магнитные проницаемости обоих тел полагаем равными единице.

при этом с отдельными спектральными компонентами поля, то определение искомой полной силы притяжения F требует еще интегрирования F_ω по всем частотам¹⁾.

Соответствующие вычисления, однако, весьма громоздки; мы не станем излагать их здесь и приведем окончательную формулу для силы²⁾:

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int p^2 \omega^3 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T} \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{-\frac{2ip\omega l}{c}} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \varepsilon_1 p)(s_2 + \varepsilon_2 p)}{(s_1 - \varepsilon_1 p)(s_2 - \varepsilon_2 p)} e^{-\frac{2ip\omega l}{c}} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\omega, \quad (92,1)$$

где $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$ — диэлектрические проницаемости обоих тел, а

$$s_1 = \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - 1 + p^2}, \quad s_2 = \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - 1 + p^2}, \quad (92,2)$$

причем корень берется с таким знаком, чтобы мнимая часть s была положительна³⁾. Пути интегрирования показаны на рис. 44, а: интегрирование по $d\omega$ производится по вещественным значениям от 0 до ∞ , а по dp — по вещественной оси от 1 до 0 и затем по мнимым значениям от 0 до $i\infty$.

Если температуру тел можно считать равной нулю (см. ниже), то $\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$ в (92,1) заменяется единицей. Рассмотрим сначала формулу (92,1) именно в этом случае.

Формула (92,1) неудобна как своей комплексной формой, так и тем, что подынтегральное выражение содержит осциллирующее (на вещественной части пути интегрирования по dp) выражение $e^{-2ip\omega l/c}$. Последнее обстоятельство особенно затрудняет вычисление интеграла при больших значениях l , когда осцилляция становится очень быстрой. Эти затруднения можно ликвидировать путем соответствующих изменений путей интегрирования в плоскостях комплексных переменных ω и p . Именно, можно сместить одновременно эти пути так, чтобы по dp интегрирование велось только по вещественным, а по

1) Получающаяся в результате вычисления F_ω содержит член, расходящийся при интегрировании по $d\omega$. Этот расходящийся член, однако, не зависит от расстояния l и представляет собой давление, оказываемое на поверхность черным излучением в вакууме. В реальных условиях эти силы, действующие на тело со всех его сторон, взаимно компенсируются. Поэтому указанный член не имеет отношения к интересующей нас силе взаимного притяжения тел и должен быть опущен.

2) См. Е. М. Ли ф ш и ц, ЖЭТФ 29, 94, 1955.

3) Поскольку мнимая часть подкоренного выражения (ε'') положительна, то при $\operatorname{Im} s > 0$ будет и $\operatorname{Re} s > 0$.

$d\omega$ — только по мнимым значениям (рис. 44, б); тогда показатель в $e^{-2ip\omega l/c}$ будет везде вещественным¹⁾.

В результате получаем следующее выражение для силы взаимодействия (при $T = 0$):

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty p^2 \xi^3 \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{\frac{2p\xi l}{c}} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \varepsilon_1 p)(s_2 + \varepsilon_2 p)}{(s_1 - \varepsilon_1 p)(s_2 - \varepsilon_2 p)} e^{\frac{2p\xi l}{c}} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\xi. \quad (92,3)$$

Здесь введено обозначение $\omega = i\xi$ для мнимых значений ω , а под ε_1 и ε_2 везде надо понимать вещественные функции $\varepsilon_1(i\xi)$ и $\varepsilon_2(i\xi)$. Знак Re опущен, поскольку написанное выражение явно вещественно. Формула (92,3) дает, принципиально, возможность вычислить силу F при любом расстоянии l , если только для обоих тел известны функции $\varepsilon(i\xi)$. Последние же могут быть выражены через значения мнимой части функции $\varepsilon(\omega)$ при вещественных ω согласно формуле (62,17). Таким образом, можно сказать, что закон взаимодействия тел полностью определяется заданием их функции $\varepsilon''(\omega)$.

Рассмотрим предельный случай расстояний l , малых по сравнению с основными длинами волн λ_0 , фигурирующими в спектре поглощения данных тел. Температуры, о которых может идти речь для конденсированных тел, во всяком случае малы по сравнению с играющими здесь роль значениями $\hbar\omega \sim \hbar\omega_0$ (где $\omega_0 \sim 2\pi c/\lambda_0$). Поэтому можно считать, что $T = 0$, и соответственно пользоваться формулой (92,3).

Благодаря наличию экспоненциально возрастающего множителя $e^{2p\xi l/c}$ в знаменателях подынтегрального выражения, основную роль при интегрировании по dp играют такие значения p , что $p l \xi / c \sim 1$.

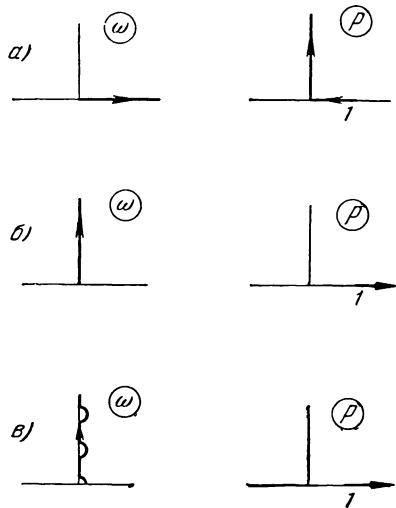


Рис. 44.

1) Условие допустимости этого преобразования заключается в существовании такого способа одновременного смещения обоих путей, при котором подынтегральное выражение нигде не проходит через свои полюсы. Специальное исследование, основанное на общих свойствах функции $\varepsilon(\omega)$ (изложенных в § 62), доказывает существование такого способа.

При этом $p \gg 1$, и потому при определении главных членов можно положить $s_1 \approx s_2 \approx p$. В этом приближении первый член в квадратных скобках (92,3) обращается в нуль. Второй же член после введения переменной интегрирования $x = 2pl\xi/c$ дает

$$F = \frac{h}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 dx d\xi}{\left(\frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_1 - 1}\right) \left(\frac{\varepsilon_2 + 1}{\varepsilon_2 - 1}\right) e^x - 1} \quad (92,4)$$

(нижний предел $2l\xi/c$ интегрирования по dx заменен в этом же приближении нулем).

Формула (92,4) определяет силу притяжения в предельном случае малых l . Она оказывается обратно пропорциональной кубу расстояния. Функция $\varepsilon(i\xi) - 1$ монотонно убывает с увеличением ξ , стремясь к нулю. Поэтому значения ξ , начиная с некоторого ξ_0 , перестают вносить существенный вклад в интеграл; условие малости l означает, что должно быть $l \ll c/\xi_0$.

Покажем, каким образом осуществляется в (92,4) предельный переход к взаимодействию отдельных атомов. Для этого предположим, формальным образом, обе среды достаточно разреженными. Тогда разности $\varepsilon_1 - 1$ и $\varepsilon_2 - 1$ близки к нулю и из (92,4) имеем, с должной точностью,

$$\begin{aligned} F &= \frac{h}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x} (\varepsilon_1 - 1) (\varepsilon_2 - 1) dx d\xi = \\ &= \frac{h}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty [\varepsilon_1(i\xi) - 1] [\varepsilon_2(i\xi) - 1] d\xi. \end{aligned}$$

Выражая $\varepsilon(i\xi)$ через значения $\varepsilon''(\omega)$ на вещественной оси согласно (62,17), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [\varepsilon_1(i\xi) - 1] [\varepsilon_2(i\xi) - 1] d\xi &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \varepsilon_1''(\omega_1) \varepsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \xi^2)(\omega_2^2 + \xi^2)} d\xi d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1) \varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

и для силы F находим:

$$F = \frac{h}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1) \varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (92,5)$$

С другой стороны, силу взаимодействия между разреженными средами можно рассматривать как результат взаимодействия между отдельными парами молекул. Тогда сила (92,5) соответствует взаимодействию молекул с энергией, зависящей от расстояния R между

ними, согласно

$$U = -\frac{3h}{8\pi^4 R^6 N^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (92,6)$$

где N — число атомов в единице объема ((92,5) получается отсюда интегрированием по двум полупространствам, разделенным щелью ширины l , и последующим дифференцированием полной энергии по расстоянию l). Формула (92,6) совпадает с известной формулой Ф. Лондона, получающейся с помощью обычной квантовомеханической теории возмущений, примененной к дипольному взаимодействию двух атомов. При сравнении следует учесть, что $\epsilon''(\omega)$ связана со спектральной плотностью $f(\omega)$ «сил осцилляторов» соотношением (62,13); силы же осцилляторов обычным образом выражаются через квадраты матричных элементов дипольного момента атома. Мы видим, таким образом, как микроскопическая формула восстанавливается из макроскопической теории.

Перейдем к обратному предельному случаю расстояний, больших по сравнению с основными длинами волн в спектре поглощения тел ($l \gg \lambda_0$). И здесь будем сначала считать температуру равной нулю.

В общей формуле (92,3) снова вводим новую переменную интегрирования $x = 2pl\xi/c$, но в качестве второй переменной оставляем не ξ , а p :

$$F = \frac{hc}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1+\epsilon_1 p)(s_2+\epsilon_2 p)}{(s_1-\epsilon_1 p)(s_2-\epsilon_2 p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx. \\ \epsilon = \epsilon \left(i \frac{xc}{2pl} \right), \quad s = \sqrt{\epsilon \left(i \frac{xc}{2pl} \right) - 1 + p^2}.$$

Благодаря наличию e^x в знаменателях, в интервале по dx играют роль значения $x \sim 1$, а поскольку $p \gg 1$, то аргумент функций ϵ при больших l близок к нулю во всей существенной области значений переменных. В соответствии с этим можно заменить ϵ_1 и ϵ_2 просто их значениями при $\omega = 0$, т. е. электростатическими диэлектрическими проницаемостями, которые обозначим как ϵ_{10} , ϵ_{20} . У металлов функция $\epsilon(\omega)$ стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow 0$; поэтому для них надо будет считать $\epsilon_0 = \infty$.

Таким образом, получим окончательно следующий результат:

$$F = \frac{hc}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_{10}+p)(s_{20}+p)}{(s_{10}-p)(s_{20}-p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{10}+\epsilon_{10} p)(s_{20}+\epsilon_{20} p)}{(s_{10}-\epsilon_{10} p)(s_{20}-\epsilon_{20} p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \quad (92,7) \\ s_{10} = \sqrt{\epsilon_{10} - 1 + p^2}, \quad s_{20} = \sqrt{\epsilon_{20} - 1 + p^2}.$$

Сила притяжения оказывается здесь обратно пропорциональной l^4 . Замечательно, что в этом предельном случае она зависит только от электростатических диэлектрических проницаемостей обеих сред.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В особенности простой результат получается для двух металлов. Положив в (92,7) $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \infty$, получим

$$F = \frac{hc}{16\pi^2 l^4} \int_0^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x^3 dp dx}{p^2 (e^x - 1)} = \frac{hc}{l^4} \frac{\pi^2}{240}. \quad (92,8)$$

Эта сила вообще не зависит от рода металлов (это свойство не имеет места на малых расстояниях, где величина взаимодействия зависит от функции $\epsilon(i\xi)$ при всех значениях ξ , а не только при $\xi = 0$)¹⁾.

Для двух одинаковых диэлектриков ($\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \epsilon_0$) приведем результат, получающийся из (92,7) путем численного интегрирования:

$$F = \frac{hc}{l^4} \frac{\pi^2}{240} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2 \varphi(\epsilon_0), \quad (92,9)$$

где $\varphi(\epsilon_0)$ — функция, значения которой даны на графике рис. 45.

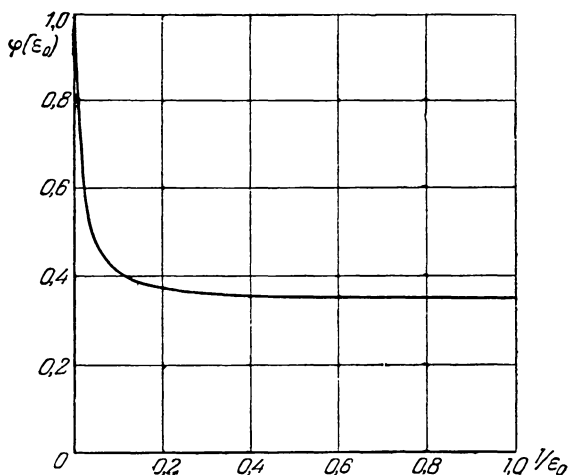


Рис. 45.

Наконец, произведем в формуле (92,7) переход к взаимодействию отдельных молекул. Как и выше, для этого предполагаем обе среды достаточно разреженными, т. е. разности $\epsilon_{10} - 1$ и $\epsilon_{20} - 1$ малыми.

¹⁾ Формула (92,8) была ранее получена *Казимиром* (1948) другим методом.

Сохранив в подынтегральном выражении в (92,7) лишь первый неисчезающий член разложения по этим разностям, получим

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \int_1^\infty \frac{1 - 2p^2 + 2p^4}{8p^8} dp (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)$$

или

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \frac{23}{640\pi^2} (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1). \quad (92,10)$$

Эта сила соответствует взаимодействию молекул с энергией

$$U = -\frac{23\hbar c}{64\pi^3 R^7} \frac{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)}{N^2} = -\frac{23\hbar c}{4\pi R^7} \alpha_1 \alpha_2, \quad (92,11)$$

где α_1, α_2 — статические поляризуемости обеих молекул. Эта формула совпадает с результатом квантовомеханического расчета *Казимира* и *Польдера* (1948) для притяжения двух молекул на достаточно больших расстояниях, когда становятся существенными эффекты запаздывания взаимодействия.

Для получения формул, учитывающих влияние температуры, вернемся к исходному выражению (92,1) и посмотрим, в каком отношении должно быть изменено при $T \neq 0$ преобразование, которое при $T = 0$ привело к формуле (92,3). Функция $\text{cth}(\hbar\omega/2T)$ имеет бесконечное множество полюсов, расположенных на мнимой оси и равных

$$\omega_n = i\xi_n = i \frac{2\pi T}{\hbar} n, \quad (92,12)$$

где n — целые числа. Поэтому при смещении пути интегрирования по $d\omega$ на мнимую ось надо обходить эти полюсы по полуокружностям, за исключением полюса $\omega = 0$, который обходится по четверти окружности (рис. 44, в). Именно эти обходы дают вклады в вещественную часть интеграла, равные умноженным на πi ($\pi i/2$ для полюса $n = 0$) вычетам подынтегрального выражения относительно полюсов; интегрирование же по участкам мнимой оси между полюсами дает чисто мнимые величины, выпадающие при взятии Re .

Таким образом, получаем следующую формулу:

$$F = \frac{T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^3 \int_1^\infty p^2 \left\{ \left[\frac{(s_{1n} + p)(s_{2n} + p)}{(s_{1n} - p)(s_{2n} - p)} e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{1n} + \epsilon_{1n} p)(s_{2n} + \epsilon_{2n} p)}{(s_{1n} - \epsilon_{1n} p)(s_{2n} - \epsilon_{2n} p)} e^{2p\xi_n l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp, \quad (92,13)$$

$$s_n = \sqrt{\epsilon_n - 1 + p^2}, \quad \epsilon_n = \epsilon(i\xi_n)$$

(штрих у знака суммы означает, что член с $n = 0$ должен быть взят с половинным весом). При $T \rightarrow 0$ расстояния между полюсами тоже стремятся к нулю, суммирование по n можно заменить интегрированием по $d\xi$ и мы возвращаемся к формуле (92,3), не содержащей T .

В то время как в предельном случае малых расстояний при определении силы взаимодействия фактически всегда можно считать температуру тел равной нулю, на больших расстояниях влияние температуры может стать существенным. Характеристическая температура, связанная с длиной l , есть hc/l , и условие, позволяющее положить $T = 0$, есть, грубо говоря, $lT/hc \ll 1$. При достаточно низких температурах это условие, конечно, всегда может быть совместным с условием $l \gg \lambda_0$. Но при высоких температурах эти два условия могут оказаться противоречащими друг другу, и тогда область применимости предельного закона (92,7) фактически отсутствовала бы.

Рассмотрим предельный случай настолько больших расстояний, что $lT/hc \gg 1$. Тогда из всех членов суммы в (92,13) надо сохранить лишь первый. Положить, однако, в нем сразу $n = 0$ нельзя ввиду возникающей при этом неопределенности (множитель ξ_n^3 обращается в нуль, но интеграл по p расходится). Это затруднение можно обойти, вводя сначала вместо p новую переменную интегрирования $x = 2p\xi_n l/c$ (в результате чего множитель ξ_n^3 исчезает). Положив затем $n = 0$, получим

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{(\epsilon_{10} + 1)(\epsilon_{20} + 1)}{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \quad (92,14)$$

Таким образом, на достаточно больших расстояниях убывание силы взаимодействия замедляется и снова происходит по закону l^{-3} с коэффициентом, зависящим от температуры и от электростатического значения диэлектрической проницаемости. Все следующие члены суммы (92,13) при больших lT/hc убывают экспоненциально.

ГЛАВА XIV

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 93. Общая теория рассеяния в изотропных средах

В изложенной в главах IX—XI теории распространения электромагнитных волн в прозрачных средах совершенно не рассматривалось сравнительно слабое, но в то же время принципиально важное явление рассеяния. Это явление заключается в возникновении слабых («рассеянных») волн с частотами и направлениями, отличающимися от частоты и направления распространения основной волны.

Происхождение рассеяния сводится к изменению движения входящих в состав среды зарядов под влиянием поля падающей волны; это изменение приводит к излучению новых — рассеянных — волн. Исследование микроскопического механизма рассеяния должно производиться на основе квантовой механики; оно, однако, не требуется для развития излагаемой ниже макроскопической теории. Поэтому мы ограничимся лишь краткими замечаниями о характере процессов, приводящих к изменению частоты волн при рассеянии.

Основной тип элементарных актов рассеяния заключается в поглощении первоначального кванта $h\omega$ рассеивающей системой с одновременным испусканием ею другого кванта $h\omega'$. Частота ω' рассеянного кванта может быть как меньше, так и больше частоты ω (эти случаи называют соответственно *стоксовым* и *антистоксовым*). В первом случае энергия $h(\omega - \omega')$ поглощается системой, а во втором энергия $h(\omega' - \omega)$ отдается ею за счет перехода в энергетически более низкое состояние. Так, в простейшем случае газа рассеяние происходит на отдельных молекулах, и изменение частоты может произойти как за счет перехода молекулы на другой уровень энергии, так и за счет изменения кинетической энергии ее движения как целого.

Другой тип элементарного акта заключается в том, что первоначальный квант $h\omega$ остается неизменным, но под его влиянием рассеивающая система излучает сразу два кванта: еще один квант $h\omega$ с неизменной частотой и направлением и «рассеянный» квант $h\omega'$. Энергия $h(\omega + \omega')$ отбирается при этом у рассеивающей системы. Процессы этого типа, однако, в обычных условиях чрезвычайно

редки по сравнению с процессами первого типа и практически не играют никакой роли в явлении рассеяния¹⁾.

Переходя к изложению макроскопической теории рассеяния, прежде всего необходимо уточнить смысл производимых в ней усреднений. Как уже было указано в начале § 90, усреднение величин в макроскопической электродинамике можно представить как совокупность двух операций: усреднения по физически бесконечно малому объему при заданном расположении всех частиц в нем и затем усреднения полученной величины по движению частиц. В теории рассеяния, однако, такое усреднение с самого начала не может быть произведено, так как усреднение по движению частиц приведет к исчезновению самого интересующего нас явления. Поэтому, например, фигурирующие в теории рассеяния напряженность и индукцию поля рассеянной волны надо понимать как результат лишь первой части усреднения. Монохроматические компоненты понимаемых таким образом величин поля рассеянной волны мы будем обозначать ниже в этом параграфе посредством E' , H' , D' , B' .

Поле же падающей волны будем обозначать буквами E , H без штриха. Везде в этой главе падающая волна предполагается монохроматической с частотой ω .

Для самого процесса распространения рассеянной волны по среде имело бы место соотношение $D' = \varepsilon(\omega')E'$ между индукцией и напряженностью электрического поля (предполагаем рассеивающую среду изотропной). Это соотношение, однако, не содержит в себе явления рассеяния, т. е. возникновения рассеянной волны под влиянием падающей. Для его описания надо учесть в выражении для D' дополнительные малые члены. В первом приближении такие члены должны быть линейны по полю падающей волны; наиболее общий вид такой зависимости:

$$D'_i = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k + \beta_{ik} E_k^* \quad (93,1)$$

Здесь ε' обозначает $\varepsilon(\omega')$, а α_{ik} , β_{ik} — тензоры, характеризующие рассеивательные свойства среды. В общем случае они не обладают никакими свойствами симметрии, а их компоненты являются функциями как от частоты ω' рассеянной волны, так и от первоначальной частоты ω ²⁾.

Последний член в (93,1) связан с той частью рассеяния, которая осуществляется элементарными актами вынужденного испускания.

¹⁾ Мы увидим ниже (§ 94), что эффект вынужденного излучения очень мал при всех температурах, для которых $T \ll h(\omega + \omega')$. Он может стать существенным в области радиочастот.

²⁾ Тензорный характер величин α и β , разумеется, не противоречит предполагаемой изотропии среды. Изотропными являются лишь полностью усредненные свойства среды; местные же отклонения от средних свойств, к которым и относятся дополнительные члены в (93,1), не обязаны быть изотропными.

Действительно, все члены в правой стороне равенства (93,1) должны соответствовать той же частоте ω' , что и D' в левой стороне равенства. Поскольку E^* имеет частоту ω , то частота величин β_{ik} должна быть $\omega + \omega'$, чтобы частота произведений $\beta_{ik}E_k^*$ была ω' . Но $\omega + \omega'$ есть частота, характерная как раз для актов вынужденного излучения. Ввиду упомянутой выше малости этого эффекта можно пренебречь соответствующими членами в (93,1), и мы будем писать ниже

$$D'_i = \epsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k. \quad (93,2)$$

Аналогичными формулами выражается также и связь между B' и H' . Мы, однако, будем пренебрегать магнитными свойствами среды, обычно совершенно несущественными для явления рассеяния света, и потому положим $B' = H'$.

Уравнения Максвелла для поля рассеянной волны гласят:

$$\text{rot } E' = i \frac{\omega'}{c} H', \quad \text{rot } H' = -i \frac{\omega'}{c} D'.$$

Исключив H' из этих уравнений, найдем

$$\text{rot rot } E' = \frac{\omega'^2}{c^2} D'.$$

Подставив сюда согласно (93,2)

$$E' = \frac{1}{\epsilon'} D' - \frac{1}{\epsilon'} (\alpha E)$$

(αE) обозначает вектор с составляющими $\alpha_{ik} E_k$ и учитывая, что $\text{div } D' = 0$, получим следующее уравнение для D' :

$$\Delta D' + k'^2 D' = -\text{rot rot } (\alpha E), \quad (93,3)$$

где $k' = (\omega/c) \sqrt{\epsilon'}$ — волновой вектор рассеянной волны.

Для точной формулировки условий, в которых должно быть решено уравнение (93,3), разделим рассеивающую среду на малые участки (размеры которых, однако, велики по сравнению с молекулярными расстояниями). В силу молекулярного характера процессов рассеяния корреляция между этими процессами в различных точках среды (не кристаллической!) распространяется, вообще говоря, лишь на расстояния порядка молекулярных ¹⁾. Поэтому рассеянный свет, исходящий из различных участков среды, некогерентен. Мы можем, следовательно, рассматривать рассеяние от одного из участков так, как если бы в остальном объеме среды свет распространялся

¹⁾ Исключение могут представлять особые случаи рассеяния, о которых будет идти речь в § 96. В этих случаях размеры рассеивающих участков должны предполагаться большими также и по сравнению с длиной волны света или еще большими.

без рассеяния. Поступая таким образом, вычислим поле рассеянной волны на большом расстоянии от рассеивающего участка тела. Воспользовавшись известным приближенным выражением для западающих потенциалов на большом расстоянии от источника¹⁾, можно сразу написать требуемое решение уравнения (93,3):

$$D' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{e^{ik'R_0}}{R_0} \int (\alpha E) e^{-ik'r} dV. \quad (93,4)$$

Здесь R_0 — радиус-вектор от какой-либо точки внутри рассеивающего объема (по которому производится интегрирование) до точки наблюдения поля, а вектор k' имеет направление R_0 . Стоящий здесь интеграл не зависит от координат точки наблюдения; производя дифференцирование и сохраняя, как обычно, лишь члены с $1/R_0$, получаем

$$D' = -\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0} \left[k' \left[k' \int (\alpha E) e^{-ik'r} dV \right] \right].$$

Поскольку в точке наблюдения мы рассматриваем среду как не рассеивающую, то связь между D' и E' в этой точке дается просто соотношением $D' = \epsilon' E'$. В поле падающей волны E выделим пространственный периодический множитель, написав

$$E = E_0 e^{ikr}.$$

Вводя затем обозначение

$$G = \int (\alpha E_0) e^{-iqr} dV, \quad (93,5)$$

где

$$q = k' - k,$$

напишем

$$E' = -\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0 \epsilon'} [k' [k' G]]. \quad (93,6)$$

Вектор E' перпендикулярен к направлению k' рассеянной волны и определяется перпендикулярной к k' проекцией вектора G .

Определив таким образом неусредненное поле рассеянной волны, мы можем теперь перейти к исследованию интенсивности и поляризации рассеянного света. Для этого надо образовать тензор

$$I_{ik} = \overline{E'_i E'^*_k}, \quad (93,7)$$

где черта означает не производившееся до сих пор окончательное усреднение по движению частиц в теле; усреднение квадратичного выражения дает, естественно, отличный от нуля результат. Поскольку $E' \perp k'$, то тензор I_{ik} имеет отличные от нуля компоненты лишь в плоскости, перпендикулярной k' ; эти компоненты соста-

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 67.

вляют (в этой плоскости) двухмерный тензор $I_{\alpha\beta}$ (греческими буквами обозначаем индексы, пробегающие два значения). Тензор $I_{\alpha\beta}$, по определению, эрмитов: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}^*$. Он может быть приведен к «главным осям», причем отношение его двух главных значений дает степень деполяризации, а их сумма пропорциональна полной интенсивности света ¹⁾.

В произведении $E_i' E_k^*$ входят произведения интегралов G_i ; они-то и должны быть подвергнуты усреднению. Написав произведение двух интегралов в виде двойного интеграла, имеем

$$G_i G_k^* = E_{0i} E_{0m}^* \int \int \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} dV_1 dV_2. \quad (93,8)$$

Верхние индексы (1), (2) указывают, что значения α берутся в двух различных точках пространства.

При усреднении подынтегрального выражения надо учесть, что корреляция между значениями α в разных точках тела распространяется, вообще говоря, лишь на расстояния порядка молекулярных. Это значит, что после усреднения подынтегральное выражение будет существенно отлично от нуля лишь при $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim a$, где a — порядок величины молекулярных расстояний. Показатель степени в экспоненциальном множителе $\sim a/\lambda$, где λ — длина рассеиваемой волны; но $a/\lambda \ll 1$ уже в силу необходимого условия применимости макроскопической теории вообще. Мы можем, следовательно, заменить экспоненциальный множитель единицей ²⁾.

Далее, интегрирование по координатам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 можно заменить интегрированием по $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Поскольку подынтегральное выражение зависит (после усреднения) только от \mathbf{r} , то мы получим

$$\overline{G_i G_k^*} = V E_{0i} E_{0m}^* \int \overline{\alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*}} dV, \quad (93,9)$$

где V — объем рассеивающего участка тела; тот факт, что рассеяние должно быть пропорциональным V , очевиден и заранее. Отметим, что из формулы (93,9), а потому и из всех следующих ниже формул полностью выпадает направление волнового вектора \mathbf{k} падающей волны.

¹⁾ См. «Теория поля», изд. 2-е, § 50. Приведение эрмитова тензора к главным осям означает представление его в виде $I_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(2)*} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*}$, где $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$ — в общем случае комплексные «единичные» взаимно перпендикулярные векторы: $\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)*} = \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)*} = 1$, $\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)*} = 0$. Главные значения λ_1, λ_2 эрмитова тензора вещественны.

²⁾ Допустимость этого пренебрежения требует, однако, специальных оговорок при так называемом рэлеевском рассеянии (см. § 96).

Стоящие в (93,9) интегралы образуют тензор четвертого ранга, зависящий только от свойств рассеивающей среды. Ввиду изотропии среды наиболее общий вид такого тензора

$$\int \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} dV = \frac{a+c}{2} \delta_{il} \delta_{km} + \frac{a-c}{2} \delta_{im} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{lm}, \quad (93,10)$$

где a, b, c — скалярные постоянные (точнее, функции ω и ω'). Этот тензор автоматически симметричен относительно перестановки пары индексов i, l с парой k, m ; но такая перестановка эквивалентна переходу к комплексно сопряженной величине (ввиду эквивалентности точек 1 и 2); поэтому тензор (93,10), а тем самым и постоянные a, b, c вещественны.

Подставляя (93,10) в (93,9), получим

$$\overline{G_i G_k^*} = V \left\{ \frac{a+c}{2} E_{0i} E_{0k}^* + \frac{a-c}{2} E_{0i}^* E_{0k} + b E_{0l} E_{0l}^* \delta_{ik} \right\}. \quad (93,11)$$

Это выражение можно было бы написать и сразу, как наиболее общий вид эрмитова тензора второго ранга, квадратичного по E_0 и не содержащего никаких других избранных направлений. Этот тензор, разумеется, не «трансверсален» направлению k' . Искомый же общий вид тензора $I_{\alpha\beta}$ получится путем «проецирования» тензора (93,11) на плоскость, перпендикулярную к k' (для чего достаточно выбрать систему координат с одной из осей вдоль k' и взять компоненты тензора по двум другим осям).

Рассмотрим рассеяние линейно поляризованной волны. Амплитуда ее поля E_0 может быть определена как чисто вещественная величина¹⁾. Вместе с нею будут вещественными и все компоненты тензора $I_{\alpha\beta}$ рассеянного света. Это значит, что рассеянный свет частично поляризован, причем может быть разложен на две независимые (некогерентные) волны, каждая из которых линейно поляризована. Ввиду наличия всего двух избранных направлений (E_0 и k'), от которых зависит тензор $I_{\alpha\beta}$, заранее очевидно, что одна из этих волн поляризована с вектором E' в плоскости E_0, k' , а другая — перпендикулярно к этой плоскости; интенсивности этих двух компонент рассеянного света обозначим соответственно как I_1 и I_2 ; они определяются соответствующими главными значениями тензора $I_{\alpha\beta}$.

При вещественном E_0 выражение (93,11) приобретает вид

$$\overline{G_i G_k^*} = V \{ a E_{0i} E_{0k} + b E_0^2 \delta_{ik} \}. \quad (93,12)$$

Прежде всего отметим, что рассеяние линейно поляризованного света определяется всего двумя, а не тремя независимыми постоянными. Для определения I_1 и I_2 проецируем вектор E_0 на два указанных

1) См. «Теория поля», изд. 2-е, §§ 48, 50. Мы не будем рассматривать здесь рассеяния эллиптически поляризованного света ввиду сложности получающихся формул.

направления поляризации и, взяв соответствующие компоненты тензора (93,12), получим

$$I_1 \propto a \sin^2 \theta + b, \quad I_2 \propto b \quad (93,13)$$

(с одинаковыми коэффициентами пропорциональности), где θ — угол между \mathbf{E}_0 и направлением рассеяния \mathbf{k}' . Отметим, что интенсивность компоненты рассеянного света, электрическое поле которой поляризовано перпендикулярно к плоскости $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}'$, не зависит от направления рассеяния.

При прохождении через среду естественного света рассеянный свет будет частично поляризован, и из соображений симметрии очевидно, что две его некогерентные компоненты будут линейно поляризованы с электрическим полем в плоскости \mathbf{k}, \mathbf{k}' (плоскость рассеяния) и перпендикулярно к ней. Обозначим интенсивности этих компонент соответственно как I_{\parallel} и I_{\perp} . Для их определения усредним выражение (93,11) еще по всем направлениям вектора \mathbf{E}_0 в плоскости, перпендикулярной \mathbf{k} . При таком усреднении произведения $E_{0i}E_{0k}^*$ дают

$$\overline{E_{0i}E_{0k}^*} = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0|^2 (\delta_{ik} - n_i n_k) \quad (93,14)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{k}); это есть тензор второго ранга, зависящий только от направления \mathbf{k} , дающий при упрощении $|\mathbf{E}_0|^2$ и удовлетворяющий условию

$$\overline{n_i E_{0i} E_{0k}^*} = \overline{(n \mathbf{E}_0) E_{0k}^*} = 0.$$

Таким образом, при рассеянии естественного света имеем

$$\overline{G_i G_k^*} = V |\mathbf{E}_0|^2 \left\{ \frac{a}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k) + b \delta_{ik} \right\}. \quad (93,15)$$

Наконец, взяв компоненты этого тензора по обоим направлениям поляризации, получим искомые формулы:

$$I_{\parallel} \propto \frac{a}{2} \cos^2 \vartheta + b, \quad I_{\perp} \propto \frac{a}{2} + b, \quad (93,16)$$

где ϑ — угол рассеяния (угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}').

Вернемся к формуле (93,10), связывающей скалярные постоянные a, b, c с тензором α_{ik} . Как и всякий тензор второго ранга, тензор α_{ik} можно представить в общем случае в виде суммы трех независимых частей:

$$\alpha_{ik} = \frac{\alpha}{3} \delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \quad (93,17)$$

где $\alpha = \alpha_{ii}$ — скаляр, s_{ik} — симметричный тензор с равным нулю следом ($s_{ik} = s_{ki}$, $s_{ii} = 0$), а a_{ik} — антисимметрический тензор.

Подставим это в (93,10) и произведем упрощение по различным парам индексов; в результате получим следующие три уравнения 1):

$$\begin{aligned} 6a + 3b + 3c &= \int \overline{\alpha_{ii}^{(1)} \alpha_{kk}^{(2)*}} dV = \int \overline{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)*}} dV, \\ 3a + 9b &= \int \overline{\alpha_{ik}^{(1)} \alpha_{ik}^{(2)*}} dV = \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)*}} dV + \int \overline{s_{ik}^{(1)} s_{ik}^{(2)*}} dV + \int \overline{a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)*}} dV, \quad (93,18) \\ 6a + 3b - 3c &= \int \overline{\alpha_{ik}^{(1)} \alpha_{ki}^{(2)*}} dV = \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)*}} dV + \int \overline{s_{ik}^{(1)} s_{ik}^{(2)*}} dV - \int \overline{a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)*}} dV. \end{aligned}$$

Правые стороны этих уравнений, а потому и их решения для a , b , c не содержат перекрестных произведений величин α , s_{ik} , a_{ik} . Это значит, что всякое рассеяние может быть представлено в виде наложения трех процессов — типов рассеяния, — которые можно назвать соответственно скалярным, симметричным и антисимметричным. Рассмотрим эти типы каждый в отдельности.

Сохранив в правых частях уравнений (93,18) только первые члены, получим

$$a = c = \frac{1}{9} \int \overline{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)*}} dV, \quad b = 0. \quad (93,19)$$

Из формул (93,13) мы видим, что при скалярном рассеянии поляризованного света рассеянный свет тоже полностью поляризован, а угловое распределение его интенсивности дается формулой

$$I = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

(здесь и ниже выражения для I нормированы так, что их усредненное по направлениям значение равно 1). При рассеянии же естественного света угловое распределение полной интенсивности и

1) Интегралы, стоящие в правых частях этих уравнений, являются положительными величинами, поскольку каждый из них может быть написан в виде полного квадрата путем преобразования, обратного тому, которое было произведено при переходе от (93,8) к (93,9). Выразив эти три интеграла через a , b , c (т. е. решив относительно них уравнения (93,18)), мы можем получить для последних определенные неравенства. Они гласят:

$$2a + b + c > 0,$$

$$2b + c - a > 0,$$

$$2b + a - c > 0.$$

Из этих неравенств следует, в частности, что $b > 0$.

степень деполяризации рассеянного света даются согласно (93,16) формулами

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \cos^2 \vartheta$$

(см. формулу в примечании на стр. 381).

Для симметричного рассеяния уравнения (93,18) дают

$$a = \frac{b}{3} = -\frac{c}{5} = \frac{1}{30} \int s_{ik}^{(1)} s_{ik}^{(2)*} dV. \quad (93,20)$$

При рассеянии поляризованного света имеем

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{20}(6 + \sin^2 \theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3 + \sin^2 \theta},$$

а при рассеянии естественного света

$$I = \frac{3}{40}(14 - \sin^2 \vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = 1 - \frac{1}{7} \sin^2 \vartheta.$$

Наконец, для антисимметричного рассеяния получим

$$b = c = -a = \frac{1}{6} \int \overline{a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)*}} dV. \quad (93,21)$$

При рассеянии поляризованного света

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \quad \frac{I_1}{I_2} = \cos^2 \theta,$$

а при рассеянии естественного света

$$I = \frac{3}{8}(2 + \sin^2 \vartheta), \quad \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \sin^2 \vartheta}.$$

§ 94. Принцип детального равновесия при рассеянии

Общий квантовомеханический принцип детального равновесия ¹⁾ позволяет получить определенное соотношение, связывающее между собой интенсивности различных процессов рассеяния.

Обозначим посредством $d\omega_{12}$ вероятность претерпевания квантом $\hbar\omega_1$ (на единице пути) процесса рассеяния с возникновением кванта $\hbar\omega_2$, распространяющегося в элементе телесного угла $d\omega_2$. Посредством же $d\omega_{21}$ обозначим вероятность обратного процесса рассеяния кванта $\hbar\omega_2$ с возникновением кванта $\hbar\omega_1$ в телесном угле $d\omega_1$. Принцип детального равновесия устанавливает следующую связь между этими двумя вероятностями:

$$\frac{d\omega_{12}}{k_2^2 d\omega_2} = \frac{d\omega_{21}}{k_1^2 d\omega_1},$$

¹⁾ См. «Квантовая механика», § 116.

где k_1, k_2 — волновые векторы обоих квантов. Подставив $k_1^2 = \epsilon_1 \omega_1^2 / c^2$, $k_2^2 = \epsilon_2 \omega_2^2 / c^2$ (где $\epsilon_1 = \epsilon(\omega_1)$, $\epsilon_2 = \epsilon(\omega_2)$), получим

$$\epsilon_1 \omega_1^2 \frac{d\omega_{12}}{d\omega_2} = \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{d\omega_{21}}{d\omega_1}. \quad (94,1)$$

В этом соотношении предполагается, что начальное и конечное состояния рассеивающей системы соответствуют дискретным уровням энергии E_1 и E_2 , связанным друг с другом посредством

$$E_1 + h\omega_1 = E_2 + h\omega_2.$$

Такая постановка вопроса не вполне соответствует реальному положению вещей, поскольку спектр уровней энергии макроскопического тела чрезвычайно густ и должен рассматриваться как квазинепрерывный.

Поэтому вместо вероятности рассеяния $d\omega_{12}$ со строго определенным изменением частоты надо ввести вероятность рассеяния в интервале частот $d\omega_2$, т. е. с переходом тела в состояние с энергией в интервале $dE_2 = h d\omega_2$. Обозначив эту вероятность (снова на 1 см пути) как dh_{12} , имеем

$$dh_{12} = d\omega_{12} d\Gamma_2 = d\omega_{12} \frac{d\Gamma_2}{dE_2} h d\omega_2,$$

где $d\Gamma_2$ — число квантовых состояний тела в интервале энергий dE_2 . Вместо (94,1) пишем теперь

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{d\omega_2 d\omega_2} = \frac{d\Gamma_2}{dE_2} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{d\omega_1 d\omega_1}.$$

Но согласно известной связи между статистическим весом макроскопического состояния тела и его энтропией \mathcal{S} производная $\frac{d\Gamma}{dE}$ в основном совпадает с $e^{\mathcal{S}}$, так что отношение

$$\frac{d\Gamma_1/dE_1}{d\Gamma_2/dE_2} = e^{\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2}.$$

Поскольку изменение энергии тела в результате рассеяния одного кванта ничтожно мало по сравнению с самой энергией, то относительно мало также и изменение энтропии, которое можно поэтому положить равным

$$\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = \frac{d\mathcal{S}}{dE} (E_1 - E_2) = \frac{1}{T} (E_1 - E_2) = \frac{h}{T} (\omega_2 - \omega_1).$$

Учитывая это обстоятельство, напомним окончательно выражение принципа детального равновесия для рассеяния в следующем виде:

$$e^{-\frac{h\omega_1}{T}} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{d\omega_2 d\omega_2} = e^{-\frac{h\omega_2}{T}} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{d\omega_1 d\omega_1}. \quad (94,2)$$

Величину dh (имеющую размерность $см^{-1}$) называют дифференциальным коэффициентом экстинкции света при рассеянии. Его определение можно сформулировать также и следующим образом: это есть отношение числа квантов, рассеянных (в направлении $d\omega$, в интервале частот $d\omega$) в единицу времени в единице объема среды, к плотности потока фотонов в падающем свете. Проинтегрировав dh по всем направлениям и всем частотам рассеянного света, мы получим полный коэффициент экстинкции, который представляет собой декремент затухания плотности потока фотонов при его распространении в рассеивающей среде.

Пусть $\omega_2 < \omega_1$. Соотношение (94,2) связывает между собой интенсивности (коэффициенты экстинкции) стоксова ($1 \rightarrow 2$) и обратного, антистоксова ($2 \rightarrow 1$) рассеяний. Мы видим, что вторая, вообще говоря, меньше первой, в основном в отношении множителя

$$e^{-\frac{\hbar(\omega_1 - \omega_2)}{T}}.$$

Это обстоятельство имеет довольно общий характер и соответствует тому, что передача энергии от тела к электромагнитному полю затрудняет процесс, ослабляя его в отношении $e^{-\Delta E/T}$, где ΔE — передаваемая энергия. В частности, по этой причине обычно весьма слабым является эффект вынужденного испускания, при котором тело отдает в единичном акте рассеяния энергию $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$. Вероятность такого процесса при $\hbar(\omega_1 + \omega_2) \gg T$ содержит малый множитель

$$e^{-\frac{\hbar(\omega_1 + \omega_2)}{T}}.$$

Общее соотношение (94,2) сильно упрощается в важном случае рассеяния с относительно малым изменением частоты. Обозначим ω_1 просто как ω , а малую разность $\omega_2 - \omega_1$ как $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega$). Кроме того, введем для краткости обозначение

$$\frac{dh_{12}}{d\omega_2 d\omega_1} = I(\omega, \Delta\omega).$$

В неэкспоненциальных множителях $\varepsilon\omega^2$ в (94,2) можно пренебречь разностью $\Delta\omega$, после чего они сокращаются в обеих сторонах равенства, так что остается

$$I(\omega, \Delta\omega) e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega) e^{-\hbar(\omega + \Delta\omega)/T}.$$

В первом из аргументов функции $I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega)$, указывающем начальную частоту света, можно пренебречь $\Delta\omega$, т. е. относить интенсивность рассеяния к несколько смещенному значению частоты падающего света. Тогда

$$I(\omega, \Delta\omega) = I(\omega, -\Delta\omega) e^{-\hbar\Delta\omega/T}. \quad (94,3)$$

В этом приближении l в обеих сторонах равенства относится к одинаковой частоте падающего света. Другими словами, соотношение (94,3) устанавливает простую связь между стоксовым и антистоксовым рассеянием одного и того же света с одинаковыми абсолютными значениями сдвига частоты $\Delta\omega$.

§ 95. Рассеяние с малым изменением частоты

Развитая в § 93 теория обладает полной общностью и применима ко всем случаям рассеяния в изотропной среде вне зависимости от их конкретного механизма. Естественно, однако, что при такой степени общности вычисления могут быть продвинуты лишь сравнительно недалеко, и дальнейшее исследование явления рассеяния возможно лишь при более частных предположениях.

В большинстве наблюдаемых случаев рассеяние света сопровождается относительно малым изменением частоты $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Следующие ниже вычисления относятся именно к таким случаям, причем, помимо условия $\Delta\omega \ll \omega$, мы будем также предполагать, что изменение коэффициента преломления среды в интервале частот $\Delta\omega$ относительно мало. Последнее условие означает, что частота ω не должна быть расположена слишком близко к какой-либо из областей (или линий) поглощения рассеивающей среды.

Если ω относится к оптической области спектра, то микроскопический механизм рассеяния с малыми $\Delta\omega$ может быть связан с различного рода движениями атомов и молекул как таковых (т. е. с перемещениями атомных ядер в противоположность чисто электронным движениям, ответственным за оптические переходы). Ими могут быть внутримолекулярные колебания атомов, вращения или колебания молекул как целого и т. п.

Пусть $q = q(t)$ условно обозначает совокупность координат, описывающих движение, ответственное за рассеяние ¹⁾. Относительная медленность этого движения позволяет подойти к макроскопическому описанию рассеяния с новой точки зрения. Именно, можно ввести тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ik}(q)$, компоненты которого (в каждый момент времени) зависят как от параметров лишь от значений координат q в этот же момент времени. Последнее связано именно с предполагаемой нами малостью относительного изменения ϵ . Введенная таким образом диэлектрическая проницаемость относится к полю, усредненному по электронному движению при заданном расположении ядер. Для полностью усредненного (в том числе и по движению ядер) поля диэлектрическая проницаемость

¹⁾ Для простоты мы проводим рассмотрение с классической точки зрения; получаемые ниже результаты оказываются в действительности справедливыми и при квантовомеханическом рассмотрении движения ядер.

сводится к скаляру $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Отклонение ε_{ik} от этого значения обозначим как $\delta\varepsilon_{ik}$:

$$\varepsilon_{ik}(q) = \varepsilon\delta_{ik} + \delta\varepsilon_{ik}(q). \quad (95,1)$$

Тензором ε_{ik} определяется связь между напряженностью и индукцией поля как функциями времени. Подчеркнем, что падающая волна по-прежнему предполагается монохроматической (с частотой ω), но поле E' рассеянной волны рассматривается теперь как функция времени, не разложенная на монохроматические компоненты. Полное поле складывается из поля E падающей и поля E' рассеянной волн; таким образом,

$$D_i + D'_i = \varepsilon_{ik}(E_k + E'_k).$$

Сокращая, по определению, члены D и εE и опуская член $\delta\varepsilon_{ik}E'_k$ как малый второго порядка, получим

$$D'_i = \varepsilon E'_i + \delta\varepsilon_{ik}(q)E_k. \quad (95,2)$$

Соотношение (95,2) — того же вида, что и формула (93,2). Разница, однако, заключается в том, что при изложенном подходе к вопросу ясно, что в данном случае тензор $\alpha_{ik} = \delta\varepsilon_{ik}$ симметричен. Это следует непосредственно из общей теоремы о симметричности тензора диэлектрической проницаемости. Кроме того, в соответствии с вещественностью диэлектрической проницаемости прозрачной среды можно утверждать, что тензор $\delta\varepsilon_{ik}$ веществен.

Отсутствие у тензора α_{ik} антисимметричной части означает, что из указанных в конце § 93 трех видов рассеяния один (антисимметричный) при рассеянии с малым изменением частоты отсутствует.

Вычислим полную интенсивность рассеяния (со всеми сдвигами частот $\Delta\omega \ll \omega$). В рассматриваемом случае это легко сделать следующим образом. В уравнении (93,3) для поля рассеянной волны можно заменить k' на $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ (а также взять значение α при $\omega' = \omega$), после чего оно вообще не будет содержать ω' , т. е. будет одинаковым для всех спектральных компонент поля. Поэтому то же уравнение будет справедливым и для не разложенного по Фурье поля рассеянной волны, которое мы обозначаем здесь той же буквой E' . Воспользовавшись решением уравнения в форме (93,6), получим

$$|E'|^2 = \frac{k^4}{16\pi^2\varepsilon^2R_0^2} |G|^2 \sin^2\theta = \frac{\omega^4}{16\pi^2R_0^2c^4} |G|^2 \sin^2\theta,$$

где θ — угол между k и G , а черта обозначает, как и в § 93, окончательное усреднение по движению частиц (т. е. усреднение по временной зависимости $q(t)$).

Введем коэффициент экстинкции h как отношение полной интенсивности рассеянного (по всем направлениям) света к плотности

потока падающего света, отнесенного к единице объема рассеивающей среды ¹⁾:

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}|^2} \int |\mathbf{E}'|^2 R_0^2 d\omega' = \frac{\omega^4}{6\pi c^4 V} \frac{|\mathbf{G}|^2}{|\mathbf{E}|^2}.$$

Как мы видели в § 93, при вычислении среднего значения $|\mathbf{G}|^2$ можно заменить экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении \mathbf{G} единицей, так что

$$|\mathbf{G}|^2 = E_{0i} E_{0k}^* \int \delta\epsilon_{li} dV \int \delta\epsilon_{lk} dV.$$

Усредняемое здесь выражение представляет собой тензор второго ранга и ввиду изотропии среды дает после усреднения

$$\overline{\int \delta\epsilon_{li} dV \int \delta\epsilon_{lk} dV} = \frac{1}{3} \delta_{ik} \left(\overline{\int \delta\epsilon_{lm} dV} \right)^2.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} \frac{1}{V} \left(\overline{\int \delta\epsilon_{lm} dV} \right)^2, \quad (95,3)$$

или

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} V \overline{(\delta\epsilon_{lm})_V^2}, \quad (95,4)$$

где введено обозначение $(\dots)_V$ для величины, усредненной по объему V .

Среднее значение квадрата интеграла можно написать и в виде среднего значения от двойного интеграла, причем выясняется (ср. § 93), что оно пропорционально объему V . Поэтому значение коэффициента экстинкции, как и следовало, не зависит от величины рассеивающего объема. Отметим также, что коэффициент h не зависит от поляризации падающего света.

Формула (95,4) допускает следующую трактовку. Мы можем сказать формально, что в полностью однородной среде (т. е. среде со строго постоянной диэлектрической проницаемостью) рассеяние вообще отсутствовало бы. Рассеяние можно описывать с макроскопической точки зрения, как происходящее на неоднородностях среды. Временной же ход изменения этих неоднородностей (подвергнутый спектральному разложению) определяет изменение частоты света при рассеянии.

¹⁾ Это определение отличается от данного в § 94 общего определения (по числу рассеянных квантов) множителем ω'/ω . В данном случае этот множитель можно считать равным 1 и оба определения эквивалентны.

§ 96. Рэлеевское рассеяние в газах и жидкостях

По характеру изменения частоты света различают два типа рассеяния: 1) комбинационное рассеяние (эффект Рамана — Ландсберга — Манделъштама), приводящее к возникновению в рассеянном свете линий, смещенных (по частоте) относительно возбуждающего света, и 2) рэлеевское рассеяние, происходящее без существенного изменения частоты.

Механизм комбинационного рассеяния в газах заключается в изменении под влиянием падающего света колебательного, вращательного или электронного состояния молекулы¹⁾. Рэлеевское же рассеяние не связано ни с каким изменением внутреннего состояния молекулы. В предельном случае разреженного газа (длина пробега молекул l велика по сравнению с длиной волны света λ) рассеяние происходит независимо на каждой молекуле; это явление может рассматриваться чисто микроскопическим, квантовомеханическим образом.

Мы будем рассматривать здесь обратный случай, когда $l \ll \lambda^2$). В этом случае рэлеевское рассеяние в газе можно разделить на две части. Одна из них связана с нерегулярностями в ориентации молекул (так называемые флуктуации анизотропии). Другая же представляет собой рассеяние на флуктуациях плотности газа. Ориентация молекулы полностью изменяется в результате нескольких столкновений, т. е. за время порядка величины времени свободного пробега τ . Поэтому рассеяние на флуктуациях анизотропии приводит к возникновению сравнительно размытой линии с максимумом при $\omega' = \omega$ и шириной $\sim h/\tau$. Рассеяние же на флуктуациях плотности приводит к появлению на этом фоне значительно более резкой линии. Как мы увидим ниже, для рассеяния света с длиной волны λ существенны флуктуации плотности, происходящие в объемах λ^3 . Ввиду большой величины этих объемов изменение флуктуаций в них происходит сравнительно медленно, с чем и связана узость соответствующей линии рассеяния. Мы условимся называть ниже «несмещенной» именно эту резкую линию.

Рассеяние на флуктуациях плотности относится к скалярному типу (см. конец § 93); очевидно, что поскольку плотность ρ есть скалярная величина, то скалярным будет и связанное с изменением ρ изменение диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$. Изменение же диэлектрической проницаемости при флуктуациях анизотропии описывается

1) В обычных условиях наблюдения электронные переходы не играют роли.

2) Точнее, необходимое ниже условие гласит: $l \ll \lambda \sin \frac{\vartheta}{2}$, где ϑ — угол рассеяния. Причина этого заключается в том, что в выражение (96,4), определяющее интенсивность рассеяния, частота света входит лишь в комбинации $q = \frac{2\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}$.

симметрическим тензором $\delta\varepsilon_{ik}$ с равным нулю следом; последнее ясно из того, что при усреднении по всем направлениям этот эффект должен вообще исчезать. Таким образом, рассеяние на флуктуациях анизотропии относится к симметрическому типу.

В жидкостях ситуация более сложна. Комбинационное рассеяние здесь может быть связано лишь с изменением колебательного (или электронного) состояния молекул. Вращательных же комбинационных линий при рассеянии в жидкости не возникает. Дело в том, что ввиду сильного взаимодействия молекул в жидкости не существует их свободного вращения, которое обладало бы дискретными уровнями энергии. Поэтому вращение молекул, как и всякое другое движение с изменением их взаимного расположения, вносит в жидкости свой вклад лишь в создание общей сравнительно широкой линии рассеяния вокруг $\omega' = \omega$, которую целиком в этом случае естественно называть рэлеевской. Время релаксации указанных движений существенно связано с вязкостью жидкости.

Возможность выделения из общего рэлеевского рассеяния в жидкости части, связанной с термодинамическими флуктуациями (плотности, температуры), зависит от величины различных времен релаксации. Необходимо, чтобы времена релаксации всех процессов установления равновесия в жидкости были малы по сравнению со временем изменения указанных флуктуаций. В таких условиях будет наблюдаться узкая «несмещенная» линия, окруженная более размытым фоном. Рассеяние, соответствующее несмещенной линии, скалярно. Что же касается фона, то, в отличие от газов, нельзя, вообще говоря, утверждать, что оно будет чисто симметричным, без «примеси» скалярной части.

Полная интенсивность несмещенной линии легко вычисляется с помощью общей формулы (95,4). При скалярном рассеянии $\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon \delta_{ik}$, и потому коэффициент экстинкции

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \overline{(\delta\varepsilon)^2}. \quad (96,1)$$

Если $\delta\rho$ и δT — изменения плотности и температуры, то

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \delta T.$$

Согласно известным формулам ¹⁾, флуктуации плотности и температуры статистически независимы ($\overline{\delta T \delta\rho} = 0$), а средние квадраты каждой из них

$$\overline{(\delta T)^2}_V = \frac{T^2}{\rho c_v V}, \quad \overline{(\delta\rho)^2}_V = \frac{T\rho}{V} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T$$

(c_v — теплоемкость единицы массы среды).

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 110.

Таким образом, окончательно имеем

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left[T\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T + \frac{T^2}{\rho c_v} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \right]. \quad (96,2)$$

Эта формула была впервые получена *Эйнштейном* (1910).

Для газов формула (96,2) сильно упрощается. Диэлектрическая проницаемость газа (в оптической области частот) почти не зависит от температуры; поэтому вторым членом в квадратных скобках можно пренебречь. Зависимость же от плотности сводится к прямой пропорциональности между $\epsilon - 1$ и ρ ; поэтому

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \approx \epsilon - 1 \approx 2(n - 1)$$

($n = \sqrt{\epsilon}$ — коэффициент преломления). Учитывая также, что согласно уравнению состояния идеального газа $(1/\rho)(\partial \rho/\partial p)_T = 1/NT$ (N — число частиц в 1 см^3), получим

$$h = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4} \frac{(n - 1)^2}{N}. \quad (96,3)$$

Эта формула была впервые получена *Рэлеем* (1881).

Далее перейдем к вопросу о тонкой структуре «несмещенной» линии. Для этого надо рассмотреть временной ход флуктуаций. Как известно, в этом отношении термодинамические флуктуации делятся на две категории¹⁾. Адиабатические флуктуации давления в жидкости (или газе) распространяются в виде незатухающих волн со скоростью звука u (от поглощения звука мы здесь отвлекаемся, так как оно приводит лишь к некоторому уширению линии; см. ниже). Флуктуации же энтропии при постоянном давлении вообще не распространяются относительно жидкости (затухая лишь постепенно под влиянием теплопроводности).

Временной ход интенсивности (не усредненной по времени) определяется квадратом модуля интеграла

$$G(t) = \int \delta \varepsilon(t) \cdot e^{-iqr} dV \cdot E_0, \quad (96,4)$$

в котором $\delta \varepsilon$ рассматривается как функция времени. Для того чтобы определить форму линии рассеяния, надо произвести спектральное разложение $G(t)$ (что сводится к разложению величины $\delta \varepsilon(t)$), после чего распределение интенсивности по частотам $\Delta\omega$ будет даваться квадратом модуля спектральной компоненты $G_{\Delta\omega}$. При этом, однако, нельзя заменять в (96,4) множитель e^{-iqr} единицей, как это мы делали до сих пор. Дело в том, что величина $|G_{\Delta\omega}|^2$ существенно зависит от корреляции временного хода флуктуаций в различных

¹⁾ См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 79.

точках пространства; это ясно видно из выражения $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$, написанного в виде двойного интеграла

$$\int \int \delta\varepsilon(t) \cdot \delta\varepsilon(t') e^{-i\mathbf{q}(r-r')} e^{i\Delta\omega(t-t')} dV dV' dt dt'.$$

Между тем, в силу волнового характера распространения звуковых возмущений временной ход флуктуаций давления коррелирован даже на больших расстояниях. Это обстоятельство было несущественно при вычислении полной интенсивности линии, определявшейся усредненным по времени квадратом $|\mathbf{G}(t)|^2$; поскольку $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{G}^*(t)$ берутся здесь в один и тот же момент времени, то для этой величины существенна лишь корреляция между значениями $\delta\varepsilon$ в различных точках пространства в один и тот же момент времени, а эта корреляция распространяется лишь на близкие расстояния.

Рассмотрим сначала изменения $\delta\varepsilon$, связанные с флуктуациями давления. Величина (96,4) есть компонента пространственного разложения Фурье флуктуации $\delta\varepsilon$ с волновым вектором \mathbf{q} . Но такая звуковая флуктуация зависит от времени по закону $e^{-i\Delta\omega t}$, где

$$\Delta\omega = \pm q u.$$

Поскольку $\omega \approx \omega'$, то

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

(ϑ — угол между \mathbf{k}' и \mathbf{k}); обозначая соответствующее значение $\Delta\omega$ как $\Delta\omega_0$, имеем, следовательно,

$$\Delta\omega_0 = uq = \pm 2\omega \frac{u}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (96,5)$$

Таким образом, рассеяние на флуктуациях давления приводит к возникновению дублета с расстоянием между компонентами $2\Delta\omega_0$, зависящим от угла рассеяния (так называемый дублет Мандельштама—Бриллюэна).

Флуктуации же энтропии обладают, в соответствии со сказанным выше, нулевой частотой. Поэтому рассеяние на них приводит к возникновению еще одной, центральной линии с $\Delta\omega = 0$.

Определим интенсивности линий дублета и центральной линии. Суммарная интенсивность несмещенной линии определяется формулой (96,2), так что достаточно определить, например, отношение $I_{\text{дубл}}/I_{\text{полн}}$ (под $I_{\text{дубл}}$ мы будем понимать сумму интенсивностей обеих компонент дублета, т. е. удвоенную интенсивность каждой из них¹⁾). Поскольку линии дублета обусловлены рассеянием на адиабатических флуктуациях давления, то их интенсивность определяется средним квадратом

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_S^2 (\delta p)_V^2.$$

¹⁾ Разница в интенсивностях обеих компонент согласно формуле (14, обычно совершенно несущественна, поскольку $h\Delta\omega_0 \ll T$.

Воспользовавшись известной формулой для адиабатических флуктуаций давления и производя простое преобразование с помощью известной формулы для отношения адиабатической и изотермической сжимаемостей, получим

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2 \overline{(\delta p)_V^2} = \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2 = \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2 = \frac{\rho T c_v}{V c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S^2. \quad (96,6)$$

Адиабатическую производную $(\partial \varepsilon / \partial \rho)_S$ можно выразить через более удобные величины, преобразовав ее к переменным ρ , T :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T + \frac{T}{c_v \rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho.$$

Искомое отношение интенсивностей дается отношением величины (96,6) к среднему квадрату полной флуктуации (выражение в квадратных скобках в (96,2)). Не выписывая здесь громоздкой общей формулы, напишем простую формулу, получающуюся при пренебрежении зависимостью ε от температуры:

$$\frac{h_{\text{дубл}}}{h_{\text{полн}}} = \frac{c_v}{c_p} \quad (96,7)$$

(Л. Ландау, Г. Плачек, 1933).

Для определения формы линий надо рассмотреть те диссипативные процессы, которые приводят к «рассасыванию» флуктуаций. В результате этих процессов амплитуда флуктуации затухает со временем по закону $e^{-\gamma t}$ с определенным коэффициентом γ . Если «собственная частота» колебаний во флуктуации есть $\Delta \omega_0$, то общая временная зависимость дается множителем $e^{-t(i\Delta \omega_0 + \gamma)}$. Распределение интенсивности в линии пропорционально квадрату модуля компонент Фурье этого множителя, т. е.

$$dI = \frac{I_0}{\pi} \frac{\gamma}{(\Delta \omega - \Delta \omega_0)^2 + \gamma^2} d\Delta \omega, \quad (96,8)$$

где I_0 — полная интенсивность линии (такую форму линии называют дисперсионной). «Ширина» линии дается величиной γ .

Согласно известным формулам для поглощения звука ¹⁾ коэффициент затухания звуковых флуктуаций с волновым вектором q есть

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right],$$

где η , ζ — коэффициенты вязкости жидкости, а κ — коэффициент ее теплопроводности. Подставив $q^2 = 2(\omega/c)^2(1 - \cos \vartheta)$, получим для

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, § 77.

ширины компонент дублета следующее выражение:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{\rho c^2} (1 - \cos \vartheta) \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (96,9)$$

Затухание же изобарических флуктуаций энтропии (а с ними и температуры) определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

(χ — коэффициент температуропроводности среды). Для флуктуаций с волновым вектором q (т. е. с пространственной зависимостью e^{iqr}) отсюда получается

$$\gamma = \chi q^2 = 2\chi \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \cos \vartheta). \quad (96,10)$$

Форма центральной линии дается формулой (96,8) с $\Delta\omega_0 = 0$ и шириной γ из (96,10).

Как уже было указано в начале этого параграфа, изложенная здесь теория применима к рассеянию в жидкости при условии, что все времена релаксации в ней малы по сравнению со временем изменения флуктуаций. Следует иметь в виду, что у всякой жидкости имеются времена релаксации различного порядка величины. Наиболее быстрым релаксационным процессом является, по-видимому, «рассасывание» упругих напряжений в жидкости. Соответствующее («максвелловское») время релаксации $\tau_M \sim \eta/G$, где G — модуль сдвига¹⁾. Более медленно происходит перераспределение молекул по их ориентациям, т. е. «рассасывание» флуктуаций анизотропии. Соответствующее (так называемое «дебаевское») время релаксации $\tau_D \sim \eta a^2/kT$, где a — размеры молекулы; разница между τ_M и τ_D особенно велика в жидкостях с большими молекулами. Наконец, возможны различного рода другие медленные релаксационные процессы, приводящие к дисперсии звука (например, химические реакции, замедленная передача энергии в колебательные степени свободы молекулы и др.). Существенны для рассеяния те процессы, для которых $1/\tau$ сравнимо с частотой тех «звуковых» возмущений, на которых происходит рассеяние. Полного разбора всех возможных здесь случаев в настоящее время в литературе не имеется, и мы не будем останавливаться на этом вопросе. Укажем лишь, что при достаточно большой вязкости жидкости, когда

$$\tau_M \gg \frac{1}{qu} \sim \frac{c}{\omega u \sin \frac{\vartheta}{2}},$$

жидкость ведет себя в отношении рассеяния света, как аморфное твердое тело.

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 2, § 31.

Упомянем в заключение о своеобразном явлении рассеяния, возникающем на свободной поверхности жидкости. В результате флуктуационных колебаний поверхность жидкости не является идеально плоской. Наличие этой флуктуационной «шероховатости» поверхности приводит к частичному рассеянию отражаемого от нее света (Л. И. Мандельштам, 1913) ¹⁾.

ЗАДАЧА

Свет рассеивается в газе из молекул линейной формы с поляризуемостями α_{\parallel} и α_{\perp} в направлениях соответственно вдоль и поперек оси. Определить интенсивности различных типов рассеяния.

Решение. Полная интенсивность рассеяния (при заданных колебательных и электронных состояниях молекул) включает в себя все рэлеевское и вращательное часть комбинационного рассеяния. Поскольку рассеяние происходит независимо на каждой из молекул газа, то полный коэффициент экстинкции проще всего получить по формуле (72,3), умножив ее на число N частиц в 1 см^3 и заменив квадрат поляризуемости частицы на $1/3 \alpha_{ik}^2 = 1/3 (\alpha_{\parallel}^2 + 2\alpha_{\perp}^2)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} (\alpha_{\parallel}^2 + 2\alpha_{\perp}^2). \quad (1)$$

Несмещенная рэлеевская линия связана со скалярной частью поляризуемости, т. е. происходит так, как если бы тензор поляризуемости молекулы был равен $1/3 \alpha_{ik} \delta_{ik}$. По той же формуле (72,3) найдем поэтому

$$h_{\text{несмещ}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\parallel} + 2\alpha_{\perp})^2}{3}. \quad (2)$$

Разность $h_{\text{полн}} - h_{\text{несмещ}}$ содержит в себе «фон» несмещенной линии (рассеяние на «флуктуациях анизотропии») и вращательное комбинационное рассеяние. Для того чтобы выделить первое, надо предварительно усреднить тензор поляризуемости молекулы по ее вращению вокруг некоторой определенной оси (перпендикулярной к оси молекулы). Очевидно, что усредненная таким образом поляризуемость вдоль оси вращения совпадает с α_{\perp} , а вдоль любого направления в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, равна $1/2 (\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel})$. Другими словами, вращающуюся вокруг заданной оси молекулу надо рассматривать как частицу с главными значениями тензора поляризуемости, равными

$$\alpha_{\perp}, 1/2(\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel}), 1/2(\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel}).$$

С их помощью должен быть вычислен симметрический тензор $\alpha_{ik} - 1/3 \alpha_{ll} \delta_{ik}$

¹⁾ См. Л. И. Мандельштам, Собр. соч., т. I, стр. 246, Изд. АН СССР, 1948. В этой работе расчет произведен для света, рассеиваемого в плоскости падения.

с равным нулю следом, после чего вычисление, аналогичное выводу формул (1) и (2), дает

$$h_{\text{фон}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel})^2}{6}. \quad (3)$$

Наконец, интенсивность вращательного комбинационного рассеяния получится вычитанием (2) и (3) из (1):

$$h_{\text{комб}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel})^2}{2}.$$

§ 97. Критическая опалесценция

Как известно, изотермическая сжимаемость вещества $(\partial\rho/\partial p)_T$ неограниченно возрастает при приближении к критическому состоянию. Вместе с нею возрастает также и выражение (96,2) для полной интенсивности скалярного рэлеевского рассеяния. Это свидетельствует о резком усилении рассеяния вблизи критической точки (так называемая критическая опалесценция)¹⁾. Сама формула (96,2) становится, однако, при этом неприменимой в связи с тем, что становятся неправильными использованные при ее выводе выражения для термодинамических флуктуаций.

Возрастание интенсивности имеет место не для всех трех компонент тонкой структуры рэлеевской линии, а лишь для центральной компоненты. Что касается интенсивности дублета, то согласно (96,2) и (96,7) имеем

$$h_{\text{дубл}} \approx \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{T\rho c_p}{c_p} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2.$$

Согласно известной термодинамической формуле

$$c_p - c_v = \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial\rho/\partial T)_p^2}{(\partial\rho/\partial p)_T}$$

находим вблизи критической точки конечную величину

$$h_{\text{дубл}} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{\rho^3 c_v}{(\partial\rho/\partial T)_p^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2. \quad (97,1)$$

Как мы увидим ниже, вблизи критической точки нельзя заменять в (96,4) множитель e^{-iqr} единицей даже при вычислении полной интенсивности (а не только тонкой структуры) рассеяния. Обозначим

¹⁾ Аналогичное явление имеет место при рассеянии в твердом теле вблизи критической точки фазовых переходов второго рода. Оно было рассмотрено В. Л. Гинзбургом (ДАН СССР 105, 240, 1955).

посредством dh дифференциальный коэффициент экстинкции, относящийся к рассеянию в заданный телесный угол $d\omega$ (чему соответствует заданное значение $q = k - k'$). Ограничиваясь для определенности рассеянием естественного света и помня, что его угловая зависимость (при скалярном рассеянии) дается множителем $3/4(1 + \cos^2 \vartheta)$, имеем для dh :

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{1}{V} \left| \int \delta\varepsilon \cdot e^{-iqr} dV \right|^2 \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (97,2)$$

Вблизи критической точки флуктуации плотности возрастают, а флуктуации температуры остаются конечными. Поэтому достаточно рассмотреть флуктуацию $\delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T \delta\rho$, так что

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 \frac{1}{V} \left| \int \delta\rho \cdot e^{-iqr} dV \right|^2 \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (97,3)$$

Согласно известной теории средний квадрат флуктуаций плотности вблизи критической точки может быть выражен через коэффициенты a и b в формуле

$$F - \bar{F} = \frac{a}{2} (\delta\rho)^2 + \frac{b}{2} (\nabla \delta\rho)^2, \quad (97,4)$$

где F — свободная энергия единицы объема тела ¹⁾.

Эта формула представляет собой первые члены разложения изменения свободной энергии по степеням самого $\delta\rho$ и его градиента; необходимость в учете последнего связана с усилением местных неоднородностей в теле вблизи критической точки. Постоянная a выражается через обычные термодинамические величины согласно ²

$$a = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T. \quad (97,5)$$

Средний квадрат, входящий в (97,3), выражается через a и b согласно формуле

$$\left| \int \delta\rho e^{-iqr} dV \right|^2 = \frac{VT}{a + bq^2}. \quad (97,6)$$

Подставив ее в (97,3), получим следующий окончательный результат:

$$dh = \frac{\omega^4}{32\pi^2 c^4} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T + 2 \frac{\omega^2}{c^2} b (1 - \cos \vartheta)} d\omega' \quad (97,7)$$

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 2-е, § 115.

²⁾ Производная $\left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_T$ есть термодинамический потенциал единицы массы тела. Поэтому вторая производная

$$a = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \right)_T = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T.$$

(формула такого вида была впервые получена *Орнштейном* и *Цернике*, 1914). Для не слишком малых углов ϑ можно пренебречь первым членом в знаменателе, и тогда

$$dh = \frac{\omega^2}{64\pi^2 c^2 b} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} d\sigma'. \quad (97,8)$$

Полная интенсивность рассеяния по всем направлениям получается интегрированием (97,7) по $d\sigma'$. При $(\partial \rho / \partial \rho)_T = 0$ (т. е. в самой критической точке) интеграл логарифмически расходится при малых углах. В действительности интегрирование должно производиться лишь до углов порядка величины угла диффракции ($\sim \lambda/L$, где L — размеры тела). В результате полная интенсивность будет зависеть логарифмически от размеров рассеивающего тела.

§ 98. Рассеяние в аморфных твердых телах

Рэлеевское рассеяние в аморфных твердых телах¹⁾ существенно отличается от рассеяния в жидкостях и газах. В изотропном твердом теле имеются, как известно, не одна, а две скорости распространения звука — продольная u_l и поперечная u_t . В связи с этим тонкая структура рэлеевской линии содержит не один дублет Мандельштама — Бриллюэна, а два. Они связаны с рассеянием на поперечных и на продольных «звуковых волнах» и отстоят от центра линии соответственно на $\pm \Delta\omega_l$ и $\pm \Delta\omega_t$, где

$$\Delta\omega_l = u_l q, \quad \Delta\omega_t = u_t q.$$

Поскольку всегда $u_l > u_t$, то $\Delta\omega_l > \Delta\omega_t$. Центральная же компонента линии снова связана с рассеянием на тех флуктуациях, которые не распространяются относительно среды. Среди этих флуктуаций основную роль играют в данном случае флуктуации структуры. В аморфном теле, с его беспорядочным расположением атомов, эти флуктуации сравнительно велики и практически не меняются со временем (ввиду чрезвычайной медленности диффузионных процессов в твердом теле). Рассеяние на них приводит к возникновению интенсивной линии с практически равной нулю шириной. По своей поляризации и угловому распределению это рассеяние представляет собой совокупность скалярного и симметричного типов.

Обратимся к дублетным компонентам рэлеевской линии в аморфных телах. В отличие от того, что мы имели в жидкостях и газах, здесь нельзя полагать $e^{-iqr} = 1$ в интеграле G даже при вычислении полной интенсивности (и поляризации) рассеянного света; вместе с этим отпадает и классификация типов рассеяния по их угловой

¹⁾ Изложение теории рассеяния в кристаллах можно найти в книге М. В. Волькенштейна, Молекулярная оптика, Гостехиздат, 1951.

зависимости, данная в § 93. Причина этого заключается в том, что в твердом теле влияние всякой (в данном случае флуктуационной) деформации распространяется на значительные расстояния. Поэтому флуктуации в различных точках тела (в один и тот же момент времени) коррелированы даже на больших (по сравнению с $1/q$) расстояниях.

Поле рассеянной световой волны дается формулой

$$E' = -\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2} [n' [n' G]], \quad (98,1)$$

где

$$G_i = \int \delta\varepsilon_{ik} e^{-iqr} dV \cdot E_{0k}, \quad (98,2)$$

а n' — единичный вектор в направлении рассеяния. Изменение диэлектрической проницаемости при деформации изотропного тела дается формулой

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll} \delta_{ik}, \quad (98,3)$$

где u_{ik} — тензор деформации (см. (81,1)). Поскольку интеграл (98,2) выделяет из $\delta\varepsilon_{ik}$ пространственную компоненту Фурье с волновым вектором q , то и в (98,3) надо понимать под u_{ik} деформацию в звуковой волне с этим волновым вектором. Поэтому пишем вектор смещения при деформации в виде

$$u = \text{Re} \{u_0 e^{iqr}\} = \frac{1}{2} (u_0 e^{iqr} + u_0^* e^{-iqr}), \quad (98,4)$$

откуда тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \text{Re} \left\{ \frac{i}{2} (u_{0i} q_k + u_{0k} q_i) e^{iqr} \right\},$$

а интеграл по объему

$$\int u_{ik} e^{-iqr} dV = \frac{iV}{4} (u_{0i} q_k + u_{0k} q_i). \quad (98,5)$$

Рассмотрим сначала рассеяние на поперечных «звуковых» волнах. Поскольку в поперечной волне $u \perp q$ и $u_{ll} = 0$, то

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik}.$$

Используя (98,5), находим поэтому

$$G = \frac{iVa_1}{4} \{u_0 (qE_0) + q(u_0 E_0)\}. \quad (98,6)$$

Поперечная звуковая волна может иметь два независимых направления поляризации: вектор u может лежать в плоскости k, k' или перпендикулярно к ней. Учитывая также, что $E \perp k$, легко видеть, что в первом случае проекция G на плоскость, перпендикулярную

к \mathbf{k}' , равна нулю. Таким образом, поперечные звуковые волны, «поляризованные» в плоскости \mathbf{k}, \mathbf{k}' , вообще не рассеивают свет.

Если же вектор смещения \mathbf{u} перпендикулярен к плоскости \mathbf{k}, \mathbf{k}' , то простое вычисление с помощью (98,1) и (98,6) дает для поля рассеянной волны следующие выражения:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= \frac{e^{ikR_0\omega^2}}{4\pi R_0 c^2} \frac{a_1 i V}{4} q u_0 \cos \frac{\vartheta}{2} E_{\perp}, \\ E'_{\perp} &= \frac{e^{ikR_0\omega^2}}{4\pi R_0 c^2} \frac{a_1 i V}{4} q u_0 \cos \frac{\vartheta}{2} E_{\parallel} \end{aligned} \quad (98,7)$$

(ϑ , как везде, — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' , а индексы \parallel и \perp обозначают составляющие векторов в плоскости рассеяния и перпендикулярно к ней). Коэффициенты пропорциональности в обеих этих формулах содержат одну и ту же флуктуирующую величину u_0 . Это значит, что при рассеянии не происходит деполаризации — линейно поляризованный свет остается линейно поляризованным (хотя и в другой плоскости).

Ввиду полного совпадения коэффициентов в формулах (98,7) коэффициент экстинкции dh не зависит от состояния поляризации падающего света и равен

$$dh = \left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2} \right)^2 V \overline{|u_0|^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} d\omega. \quad (98,8)$$

Остается определить средний квадрат амплитуды флуктуационного смещения u_0 .

С точки зрения общей теории термодинамических флуктуаций, звуковую волну (98,4) можно рассматривать как совокупность двух (волн, распространяющиеся вправо и влево) классических осцилляторов, каждый из которых должен обладать средней кинетической энергией $T/2$. Поскольку частота колебаний в данном случае есть $\Delta\omega = u_t q$, то средняя кинетическая энергия

$$\frac{1}{2} V \rho \overline{u^2} = \frac{1}{4} V \rho (u_t q)^2 \overline{|u_0|^2}.$$

Приравнивая это выражение $2 \cdot T/2$, получим

$$\overline{|u_0|^2} = \frac{4T}{V \rho u_t^2 q^2}. \quad (98,9)$$

Наконец, подставив (98,9) в (98,8), получим окончательно:

$$dh = \frac{a_1^2 \omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2 \rho} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} d\omega. \quad (98,10)$$

Обратим внимание на своеобразную угловую зависимость, рассеяния, совершенно отличную от той, которую мы имели в жидкостях и газах.

Перейдем к рассеянию на продольных «звуковых» волнах. В этих волнах $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$, и с помощью (98,3) и (98,4) находим

$$\mathbf{G} = \frac{iV}{2} u_0 q \left\{ a_1 \frac{\mathbf{q} (qE_0)}{q^2} + a_2 E_0 \right\}.$$

Простое вычисление дает для поля рассеянной волны:

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{e^{ikR_0\omega^2}}{4\pi R_0 c^2} \frac{iVu_0 q}{2} a_2 E_{\perp}, \\ E_{\parallel} &= \frac{e^{ikR_0\omega^2}}{4\pi R_0 c^2} \frac{iVu_0 q}{2} \left[\frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + a_2 \right) \cos \vartheta \right] E_{\parallel}. \end{aligned} \quad (98,11)$$

И в этом случае при рассеянии нет деполяризации. Но угловое распределение и величина коэффициента экстинкции зависят от состояния и направления поляризации падающего света. Мы не станем выписывать здесь соответствующих, довольно громоздких формул; вычисления в точности аналогичны произведенным выше, причем выражение для $|\overline{u_0}|^2$ отличается лишь заменой u_t на u_l в (98,9).

ГЛАВА XV

ДИФФРАКЦИЯ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ В КРИСТАЛЛАХ

§ 99. Общая теория диффракции рентгеновых лучей

Явление диффракции рентгеновых лучей в кристаллах занимает особое место в электродинамике материальных сред, так как их длина волны сравнима с межуатомными расстояниями. По этой причине обычный макроскопический подход к веществу как сплошной среде здесь совершенно неприменим, и мы должны исходить из рассмотрения рассеяния на отдельных заряженных частицах (электронах)¹⁾.

Частоты движения электронов в атоме порядка величины $\omega_0 \sim v/a$, где v — их скорость, а a — атомные размеры. Если $\lambda \sim a$, то ввиду $v \ll c$ эти частоты малы по сравнению с частотой рентгеновых лучей $\omega \sim c/\lambda$. Это обстоятельство позволяет написать уравнение движения электрона в поле электромагнитной волны в виде

$$m\dot{v}' = eE, \quad (99,1)$$

т. е. рассматривать электроны как свободные (см. § 59).

Из уравнения (99,1) находим для скорости, приобретаемой электроном под влиянием поля волны:

$$v' = \frac{ie}{m\omega} E.$$

Обозначим посредством $n(x, y, z)$ плотность числа электронов в кристалле, усредненную по квантовомеханическому электронному состоянию и по статистическому распределению теплового движения ядер в решетке. Подчеркнем, однако, что здесь не производится обычного в макроскопической теории усреднения по физически бесконечно малым элементам объема, т. е. $n(x, y, z)$ есть истинная квантовомеханическая плотность «электронного облака» в кристаллической решетке. Соответствующая плотность тока, создаваемого полем волны, есть

$$j' = env' = \frac{ie^2 n}{m\omega} E. \quad (99,2)$$

¹⁾ Рассеяние на ядрах ввиду большой массы последних, разумеется, несущественно.

Введем этот ток в микроскопические уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \quad (99,3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}' = -\frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right) \mathbf{E}. \quad (99,4)$$

Тем самым мы учтем его обратное влияние на поле, т. е. эффект рассеяния. При этом, разумеется, предполагается, что этот эффект мал, т. е. что справедливо неравенство

$$\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \ll 1. \quad (99,5)$$

Путем введения обозначения $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, где

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \quad (99,6)$$

соответствующего обычному определению индукции, уравнение (99,4) приводится к обычному виду $\operatorname{rot} \mathbf{H} = -(i\omega/c) \mathbf{D}$. В этом смысле мы видим, что выражение (99,6) для диэлектрической проницаемости (ср. (59,1)) может применяться и при длинах волн $\lambda \sim a$. При этом, разумеется, следует помнить, что буквальный смысл фигурирующих здесь величин \mathbf{E} , \mathbf{D} не совпадает с прежним, поскольку они относятся к полю, не усредненному по физически бесконечно малым объемам. Соответственно, ϵ является теперь функцией координат.

При рассеянии рентгеновых лучей на тяжелых атомах может иметь место случай, когда условие $\omega \gg \omega_0$ выполняется для внешних электронных оболочек и в то же время не выполняется для внутренних электронов, для которых $\omega \leq \omega_0$ и соответственно справедливо неравенство $\lambda \gg a$. В таком случае тоже может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости (как коэффициенте пропорциональности между \mathbf{D} и \mathbf{E}), но формулой вида (99,6) определяется при этом лишь вклад в нее со стороны внешних электронов. Вклад же внутренних электронов должен, принципиально, вычисляться путем усреднения по объему этих оболочек. Таким образом, если писать в общем виде $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ с зависящей от координат ϵ , мы автоматически учтем все возможные случаи. Для определенности мы будем пользоваться ниже везде выражением (99,6).

Производя в (99,2) усреднение электронной плотности и получив в результате не зависящую от времени $n(x, y, z)$, мы тем самым исключаем возможное изменение частоты при рассеянии. Другими словами, мы рассматриваем строго когерентное рассеяние без изменения частоты.

Исключив \mathbf{H} из двух уравнений (99,3) и (99,4), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}.$$

Подставим сюда

$$E = D + \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} E$$

и раскроем выражение $\text{rot rot } E$, учитывая, что $\text{div } D = 0$ (как это следует из (99,4)). Тогда получим

$$\Delta D + \frac{\omega^2}{c^2} D = \text{rot rot } \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} E. \quad (99,7)$$

В правой части этого уравнения, уже содержащей малую величину $4\pi e^2 n/m\omega^2$, следует понимать под E заданное поле падающей волны. Найдем решение уравнения (99,7) в пространстве вне рассеивающего кристалла на больших расстояниях от него¹⁾. Поскольку это уравнение совпадает по форме с уравнением (93,3), то мы можем сразу написать искомое решение по аналогии с (93,4):

$$E = \frac{e^2}{m\omega^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} [k' [k' E_0]] \int ne^{-iqr} dV. \quad (99,8)$$

Здесь R — расстояние от начала координат, расположенного внутри кристалла, до точки наблюдения поля; $q = k' - k$; $k = k' = \omega/c$; E_0 — амплитуда падающей волны; в левой стороне равенства мы пишем E вместо D , так как в пустоте вне тела $D = E$.

Для характеристики интенсивности диффракции рентгеновых лучей введем эффективное сечение σ , определяемое как отношение интенсивности излучения, диффрагировавшего в телесный угол $d\theta'$, к плотности потока энергии в падающей волне. Согласно (99,8) имеем

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \left| \int ne^{-iqr} dV \right|^2 d\theta', \quad (99,9)$$

где θ — угол между E_0 и k' . Если падающие лучи «естественны» (а не поляризованы), то множитель $\sin^2 \theta$ в этой формуле заменяется на $1/2(1 + \cos^2 \theta)$, где θ — угол между k и k' (см. примечание на стр. 381):

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \left| \int ne^{-iqr} dV \right|^2 d\theta'. \quad (99,10)$$

Ниже мы будем, для определенности, предполагать везде именно этот случай.

Мы видим, что интенсивность лучей, диффрагировавших в заданном направлении, в основном определяется квадратом модуля интеграла

$$\int ne^{-iqr} dV, \quad (99,11)$$

¹⁾ В § 93 при решении уравнения (93,3) нельзя было рассматривать поле вне тела, так как это потребовало бы учета граничных условий на его поверхности, поскольку левая часть уравнения содержала величину (ϵ'), различную внутри и вне тела. Левая же сторона уравнения (99,7) не меняет своего вида во всем пространстве.

т. е. пространственной компоненты Фурье (с соответствующим значением q) электронной плотности. При $q \rightarrow 0$ этот интеграл сводится просто к усредненной по объему кристалла (т. е. по его элементарной ячейке) электронной плотности \bar{n} . Но если в уравнениях (99,3) и (99,4) заменить n на \bar{n} , то мы получим обычные макроскопические уравнения Максвелла с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 \bar{n}}{m\omega^2}.$$

Согласно этим уравнениям при прохождении рентгеновых лучей через кристалл произойдет их преломление по обычным законам (с показателем преломления $\sqrt{\varepsilon}$). Таким образом, диффракция на малые углы сводится к не интересующему нас здесь обычному преломлению. Ниже мы будем везде подразумевать, что q заметно отличен от нуля.

Электронная плотность (как и всякая другая функция точки в кристаллической решетке) может быть разложена в ряд Фурье вида

$$n = \sum_b n_b e^{2\pi i b r}, \quad (99,12)$$

где суммирование производится по всем периодам b обратной решетки¹⁾. При подстановке (99,12) в (99,11) и интегрировании по объему кристалла заметно отличный от нуля результат получается лишь при значениях q , близких к какому-либо из $2\pi b$. В промежутках же между этими значениями интенсивность практически равна нулю. В связи с этим можно рассматривать каждый из диффракционных максимумов отдельно, полагая при этом $n = n_b e^{2\pi i b r}$ с заданным значением b . Подставив это выражение в (99,10), получим

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \left| \int e^{-i(k' - k - 2\pi b) \cdot r} dV \right|^2 d\omega'. \quad (99,13)$$

Наиболее интенсивные максимумы возникают в направлениях, в которых выполняется точное равенство

$$k' - k = 2\pi b \quad (99,14)$$

(так называемое уравнение Лауэ); эти максимумы называют главными. При заданном b главный максимум может, однако, осуществляться отнюдь не при произвольном направлении (и частоте) падающих лучей. Написав равенство (99,14) в виде $k' = k + 2\pi b$, возведя его в квадрат и учитывая, что $k^2 = k'^2$, получим

$$b k = -\pi b^2. \quad (99,15)$$

Этим уравнением определяются те значения волнового вектора k , для которых возможны главные максимумы с заданным значением b .

¹⁾ См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 128.

Геометрически (99,15) есть уравнение плоскости в k -пространстве, перпендикулярной к вектору b и расположенной на расстоянии πb от начала координат. Мы видим, в частности, что непременно должно быть $k \geq \pi b$.

Поскольку $|k' - k| = 2k \sin \frac{\vartheta}{2}$, то из (99,14) следует, что

$$k \sin \frac{\vartheta}{2} = \pi b, \quad (99,16)$$

чем определяется угол диффракции в главном максимуме (уравнение Брэгга — Вульфа).

Как известно, каждый вектор b обратной решетки определяет семейство кристаллических плоскостей по уравнениям $rb = \text{const}$, где const пробегает целые значения. Эти плоскости перпендикулярны к направлению вектора b , и по отношению к ним векторы k и k' (отвечающие условию (99,14)) направлены под одинаковыми углами «падения» и «отражения» (рис. 46). В связи с этим о диффракции в главном максимуме иногда говорят как об «отражении» от соответствующих кристаллических плоскостей.

Полная интенсивность диффракционного «пятна» вблизи какого-либо максимума получается интегрированием (99,13) по телесным углам вблизи соответствующего направления k' . Определим полную интенсивность вблизи главного максимума.

Обозначим посредством k'_0 значение k' , соответствующее точному выполнению условия Лауэ (при заданном k): $k'_0 = k + 2\pi b$. Введем также $x = k' - k'_0$. В области вблизи максимума x мало, а поскольку k' и k'_0 различаются только направлением, то $x \perp k'_0$. Поэтому элемент телесного угла можно написать в виде

$$d\omega = \frac{1}{k'^2} dx_x dx_y = \frac{1}{k^2} dx_x dx_y, \quad (99,17)$$

где ось z выбрана в направлении k'_0 . Таким образом, имеем

$$\sigma = \frac{1}{2k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \left| \int \int dx_x dx_y \int e^{-ixr} dV \right|^2.$$

В объемном интеграле можно произвести интегрирование по dz , поскольку e^{-ixr} от этой координаты не зависит:

$$\int e^{-ixr} dV = \int Z e^{-ixr} df,$$

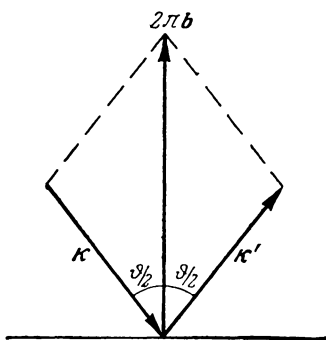


Рис. 46.

где $df = dx dy$, а $Z = Z(x, y)$ — длина тела в направлении \mathbf{k}'_0 . Наконец, воспользуемся известной формулой теории интегралов Фурье:

$$\int |\varphi_x|^2 dx_x dx_y = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi^2 dx dy, \quad (99,18)$$

где

$$\varphi_x = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(x, y) e^{-ixr} dx dy$$

— компоненты двумерного разложения Фурье. В результате получим следующую окончательную формулу:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df = \\ &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df. \end{aligned} \quad (99,19)$$

Стоящий здесь интеграл — порядка величины L^4 , где L — линейные размеры тела. Таким образом, полное эффективное сечение (или, что то же, полная интенсивность пятна) пропорционально $V^{4/3}$, где V — объем тела. Отметим, что интенсивность в самом максимуме пропорциональна другой степени объема: при $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b}$ интеграл в (99,13) есть просто V , так что $d\sigma$ пропорционально V^2 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma'} \right)_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 V^2. \quad (99,20)$$

Тот факт, что интенсивность в максимуме пропорциональна более высокой степени V , чем полная интенсивность, наглядно иллюстрирует резкость максимума. «Ширина» последнего пропорциональна, очевидно, $V^{1/3}/V^2 = V^{-5/3}$.

Развиваемая здесь теория применима лишь при условии, что весь эффект дифракции является малым. Это требование налагает, как мы теперь видим, определенное условие на размеры кристалла. Именно, σ должно быть мало по сравнению с геометрической площадью сечения тела ($\sim L^2$), откуда

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{L}{k} |n_b| \ll 1. \quad (99,21)$$

Задачи

1. Определить распределение интенсивности в дифракционном пятне вокруг главного максимума при диффракции на кристалле, имеющем форму прямого параллелепипеда с длинами сторон L_x, L_y, L_z .

Решение. Вводим, как и в тексте, вектор $\mathbf{x} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$, а систему координат выбираем с осями, параллельными ребрам параллелепипеда, и началом в его центре.

Интеграл $\int e^{-ixr} dV$ разбивается на произведение трех интегралов вида

$$\int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} e^{-ix_x x} dx = \frac{2}{x_x} \sin \frac{x_x L_x}{2}.$$

Таким образом,

$$d\sigma = 32 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{x_x^2 x_y^2 x_z^2} \sin^2 \frac{x_x L_x}{2} \sin^2 \frac{x_y L_y}{2} \sin^2 \frac{x_z L_z}{2} d\sigma'.$$

Следует помнить, что компоненты вектора \mathbf{x} не независимы, а связаны условием $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}'_0 = 0$.

2. То же при диффракции на шарообразном кристалле радиуса a .

Решение. Снова вводим $\mathbf{x} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$, а систему координат выбираем с осью z вдоль направления \mathbf{x} (и с началом в центре шара). Имеем

$$\int e^{-ixz} dV = \int_{-a}^a \pi (a^2 - z^2) e^{-ixz} dz = \frac{4\pi}{x^3} (\sin xa - xa \cos xa).$$

Таким образом,

$$d\sigma = 8\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{x^3} (\sin xa - xa \cos xa)^2 d\sigma'.$$

3. Определить полную интенсивность диффракционного пятна вокруг побочного максимума.

Решение. В данном случае волновой вектор \mathbf{k} падающей волны не удовлетворяет условию (99,15). Как было указано в тексте, (99,15) есть уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{b} ; обозначим малое смещение конца вектора \mathbf{k} от этой плоскости посредством $\eta \mathbf{b}$, где $\eta \ll 1$. Другими словами, представим \mathbf{k} в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta \mathbf{b}$, где \mathbf{k}_0 удовлетворяет уравнению (99,15) (рис. 47).

Максимуму интенсивности в пятне соответствует такое направление \mathbf{k}' , при котором разность $\mathbf{k}' - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})$ имеет минимальное значение (так что интеграл в (99,13) максимален). Но абсолютная величина разности двух векторов (из которых один имеет произвольное направление) достигает наименьшего значения,

когда направления этих векторов совпадают. Поэтому имеем (учитывая, что $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$)

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} = k - |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}| = \frac{k^2 - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2}{k + |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}|}.$$

Поскольку \mathbf{k} близко к \mathbf{k}_0 и мы рассматриваем область вблизи максимума, то $\mathbf{k}' \cong \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$ и знаменатель написанного выражения можно заменить на $2k$. В числителе же раскрываем скобки и получаем

$$-2\mathbf{k} \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2 = [-2k_0 \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2] - 2\eta\mathbf{b} \cdot 2\pi\mathbf{b} = -4\pi\eta b^2.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} \cong -\frac{2\pi\eta b^2}{k}.$$

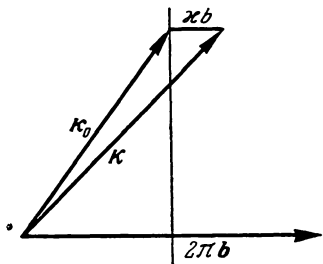


Рис. 47.

Далее, вводим κ согласно

$$\kappa' = (\kappa + 2\pi b) \left(1 - \frac{2\pi\eta b^2}{k^2} \right) + \kappa$$

и, выбрав ось z вдоль направления $\kappa + 2\pi b$, сводим задачу к вычислению интеграла (ср. вывод формулы (99,19))

$$\begin{aligned} \left| \iint dx_x dx_y \int \exp \left\{ i \frac{2\pi\eta b^2}{k} z - i\kappa r \right\} dV \right|^2 = \\ = \left| \iint dx_x dx_y \int e^{-i\kappa r} \frac{\sin(\pi\eta b^2 Z/k)}{\pi\eta b^2/k} df \right|^2. \end{aligned}$$

Наконец, воспользовавшись формулой (99,18), получим окончательно:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int \frac{\sin^2(\pi\eta b^2 Z/k)}{(\pi\eta b^2/k)^2} df.$$

При $\eta \rightarrow 0$ эта формула переходит в (99,19). Если же $\pi\eta b^2 Z/k \gg 1$ (что не противоречит условию $\eta \ll 1$), то квадрат синуса заменяется его средним значением $1/2$ и получается

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\eta^2 b^4} |n_b|^2 S,$$

где S — площадь проекции («тени») тела на плоскость x, y .

§ 100. Интегральная интенсивность

Формулы, полученные в предыдущем параграфе, определяют интенсивность дифракции при падении на кристалл строго монохроматической и строго плоской волны. Рассмотрим теперь ряд случаев, в которых эти условия не выполнены.

Начнем со случая, когда падающая волна является плоской, но не монохроматической¹⁾. Другими словами, ее спектральное разложение содержит волны с волновыми векторами κ , одинаковыми по направлениям, но различными по величине $k = \omega/c$. Обозначим посредством $\rho(k)$ плотность распределения интенсивности падающего излучения по частотам, нормированную на единицу условием $\int \rho(k) dk = 1$.

Полная интенсивность дифракционного пятна определяется эффективным сечением, получающимся интегрированием выражения (99,13) по do' и по $\rho(k) dk$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \left| \int \int \int e^{-i(\kappa' - \kappa - 2\pi b) r} dV \right|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \rho(k) do' dk. \quad (100,1)$$

Введем временно обозначение $K = \kappa' - \kappa - 2\pi b$ и напишем квадрат модуля в виде двойного интеграла:

$$\left| \int e^{-iKr} dV \right|^2 = \int \int e^{iK(r_1 - r_2)} dV_1 dV_2.$$

¹⁾ Этот случай соответствует известному методу Лауэ рентгеноструктурного анализа кристаллов.

Вводя вместо r_1 и r_2 переменные $1/2(r_1 + r_2)$ и $r = r_2 - r_1$ и производя интегрирование по первым по объему тела, получим

$$\left| \int e^{i\mathbf{K}r} dV \right|^2 = V \int e^{i\mathbf{K}r} dV.$$

В оставшемся интеграле можно теперь производить интегрирование по всем переменным в бесконечных пределах¹⁾, в результате чего находим

$$\left| \int e^{i\mathbf{K}r} dV \right|^2 = (2\pi)^3 V \delta(\mathbf{K}). \quad (100,2)$$

Подставив этот результат в формулу (100,1), переписываем последнюю в виде

$$\sigma = 4\pi^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \times \\ \times \int \int \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \rho(k) d\mathbf{o}' dk; \quad (100,3)$$

ввиду наличия δ -функции в подынтегральном выражении мы вынесли множитель $1 + \cos^2 \vartheta$, заменив его значением при $\vartheta = \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' , удовлетворяющими условиям Лауэ (обозначим их как \mathbf{k}_0 и $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{b}$).

Интегрирование по $d\mathbf{o}'$ удобно произвести, заметив, что оно эквивалентно интегрированию по

$$d^3k' = k'^2 dk' d\mathbf{o}' = \frac{1}{2} k' d(k'^2) d\mathbf{o}'$$

при условии введения в подынтегральное выражение дополнительного множителя $(2/k) \delta(k'^2 - k^2)$. Таким образом, интеграл в (100,3) заменяется на

$$\int \int \frac{2}{k} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \delta(k'^2 - k^2) \rho(k) d^3k' dk.$$

Производя интегрирование по d^3k' с помощью первой δ -функции, мы должны заменить во второй k'^2 на $(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2$, в результате чего получаем

$$\int \frac{2}{k} \delta(4\pi^2 b^2 + 4\pi\mathbf{b}\mathbf{k}) \rho(k) dk = \int \frac{1}{2\pi k} \delta(\mathbf{b}\mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk,$$

так что

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b}\mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk. \quad (100,4)$$

¹⁾ Это можно сделать постольку, поскольку мы имеем целью вычислить лишь полную интенсивность дифракционного пятна, а не его ширину.

Наконец, произведем последнее интегрирование по dk (при заданном направлении $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$). Аргумент δ -функции обращается в нуль при $k = k_0$, и интеграл равен

$$\frac{\rho(k_0)}{k_0} \frac{1}{|b\mathbf{n}|} = \frac{\rho(k_0)}{|b\mathbf{k}_0|} = \frac{\rho(k_0)}{\pi b^2}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \frac{\rho(k_0)}{b^2}. \quad (100,5)$$

Рассмотрим теперь другой случай, в котором падающая волна монохроматична, но содержит компоненты с различными направлениями \mathbf{k} , получающимися друг из друга вращением вокруг некоторой оси ¹⁾. Единичный вектор вдоль направления последней обозначим посредством \mathbf{l} , а угол поворота вокруг нее посредством ψ . Функция $\rho(\psi)$ пусть дает распределение интенсивности падающего излучения по углам, нормированное на единицу: $\int_0^{2\pi} \rho(\psi) d\psi = 1$.

Все вычисления, приведшие к формуле (100,4), полностью относятся и к этому случаю, с той лишь разницей, что интегрирование по $\rho(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ надо заменить интегрированием по $\rho(\psi) d\psi$:

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(b\mathbf{k} + \pi b^2) \rho(\psi) d\psi. \quad (100,6)$$

Снова обозначим посредством \mathbf{k}_0 значение \mathbf{k} , для которого обращается в нуль аргумент δ -функции, и будем отсчитывать ψ от плоскости \mathbf{l}, \mathbf{k}_0 . Для малых ψ имеем

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + [l\mathbf{k}_0] \psi.$$

Тогда интеграл в (100,6) принимает вид

$$\int \frac{1}{k} \delta(b[l\mathbf{k}_0] \psi) \rho(\psi) d\psi = \frac{\rho(0)}{k|b[l\mathbf{k}_0]|} = \frac{\rho(0)}{k^2|b[l\mathbf{n}_0]|} = \frac{\rho(0) \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}{\pi^2 b^2 |b[l\mathbf{n}_0]|}.$$

Таким образом,

$$\sigma = \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} (1 + \cos^2 \vartheta_0) |n_b|^2 V \frac{\rho(0)}{|b[l\mathbf{n}_0]|}. \quad (100,7)$$

Наконец, рассмотрим диффракцию монохроматической плоской волны от тела, представляющего собой совокупность хаотически ориентированных кристалликов ²⁾.

¹⁾ Этот случай соответствует известному методу Брэгга (или методу вращения) рентгеноструктурного анализа, причем фактически речь идет не о повороте направления \mathbf{k} , а о вращении самого кристалла вокруг оси \mathbf{l} .

²⁾ Этот случай соответствует рентгеноструктурному методу порошков (метод Дебая — Шеррера).

Обозначим посредством \mathbf{k}'_0 и \mathbf{b}_0 векторы \mathbf{k}' и \mathbf{b} , направленные так, чтобы удовлетворялось условие Лауэ $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}_0$. Направления \mathbf{k}'_0 и \mathbf{b}_0 неоднозначны, так как условие Лауэ, разумеется, продолжает выполняться при любом повороте треугольника \mathbf{k} , $2\pi\mathbf{b}_0$, \mathbf{k}'_0 вокруг направления \mathbf{k} . Таким образом, главному максимуму отвечают направления \mathbf{k}' , заполняющие коническую поверхность с углом $2\vartheta_0$ при вершине; вместо диффракционного «пятна» мы будем иметь теперь диффракционное «кольцо».

Искомое полное эффективное сечение определится формулой, отличающейся от (100,4) лишь заменой интегрирования по $\rho(k)dk$ усреднением по направлениям \mathbf{b} :

$$\sigma = 2\pi^2 V \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b}\mathbf{k} + \pi\mathbf{b}^2) \frac{d\omega_b}{4\pi} \quad (100,8)$$

($d\omega_b$ — элемент телесного угла в направлении \mathbf{b}). Обозначив угол между \mathbf{k} и \mathbf{b} посредством α , пишем интеграл в (100,8) в виде

$$\int \frac{1}{k} \delta(bk \cos \alpha + \pi b^2) \frac{2\pi d \cos \alpha}{4\pi} = \frac{1}{2bk^2} = \frac{1}{2b^3 \pi^2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Таким образом,

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \frac{V}{b^3} (1 + \cos^2 \vartheta_0) \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (100,9)$$

Каждый из трех рассмотренных случаев соответствует определенному способу усреднения диффракционной картины. Отметим, что зависимость полной усредненной интенсивности диффракции от объема тела сводится при этом, как и следовало ожидать, к простой пропорциональности. Напомним, что в неусредненной картине зависимость интенсивности и ее распределения по пятну от объема более резкая.

§ 101. Диффузное тепловое рассеяние рентгеновых лучей

В двух предыдущих параграфах мы понимали под $n(x, y, z)$ электронную плотность в кристалле, усредненную по времени. Тем самым из нее выпадали вызываемые различными причинами колебания плотности, а с ними и соответствующая (некогерентная) часть рассеяния рентгеновых лучей. Одним из источников некогерентного рассеяния являются тепловые флуктуации плотности. Это рассеяние «диффузно» распределено по всем направлениям, но его характерной особенностью является сравнительно большая интенсивность вблизи направлений, соответствующих резким линиям «структурного» рассеяния, рассмотренного в предыдущих параграфах. Мы рассмотрим теперь именно эти максимумы теплового рассеяния (В. Захариасен, 1940).

Тепловые колебания кристаллической решетки будем представлять разложенными на отдельные «звуковые» волны. Как будет видно из дальнейшего, в создании интересующих нас максимумов теплового рассеяния участвуют волны с большими (по сравнению с постоянной решетки) длинами. Вызываемое такой волной изменение электронной плотности можно рассматривать в каждой точке пространства как результат простого сдвига решетки на величину, равную местному значению вектора смещения \mathbf{u} в волне. Таким образом, изменение плотности (не усредненной по времени!) при прохождении заданной звуковой волны можно выразить через среднюю плотность посредством

$$\delta n = n(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - n(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{u} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}.$$

Рассматривая диффузное рассеяние вблизи определенной линии, надо заменить n на $n_b e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ с заданным \mathbf{b} , так что

$$\delta n = -2\pi i (\mathbf{b} \mathbf{u}) n_b e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}. \quad (101,1)$$

Рассеяние на флуктуациях плотности, разумеется, некогерентно с рассеянием на средней плотности и потому не интерферирует с ним. Поэтому эффективное сечение диффузного рассеяния можно найти по формуле (99,10), подставив в нее δn вместо n и производя затем статистическое усреднение по флуктуациям:

$$d\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left| \int (\mathbf{u} \mathbf{b}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} dV \right|^2 d\omega', \quad (101,2)$$

где введено обозначение $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi \mathbf{b}$. Интенсивность рассеяния велика в тех направлениях, для которых вектор \mathbf{K} мал ($K \ll 2\pi b$).

Интеграл $\int \mathbf{u} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} dV$ выделяет из \mathbf{u} пространственную компоненту Фурье с волновым вектором \mathbf{K} ; поэтому мы можем понимать под \mathbf{u} просто вектор смещения в звуковой волне с этим волновым вектором. Неравенство $K \ll 2\pi b$ означает, следовательно, что длина рассеивающей звуковой волны велика по сравнению с размерами элементарной ячейки кристалла.

Таким образом, пишем

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{u}_0^* e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}), \quad (101,3)$$

так что

$$\int (\mathbf{b} \mathbf{u}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} V (\mathbf{b} \mathbf{u}_0)$$

и эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k \overline{u_{0i} u_{0k}} V^2 d\omega'. \quad (101,4)$$

Усреднение произведений компонент u_0 производится аналогично тому, как это было сделано в § 98 для звуковой волны в изотропном теле. Упругая энергия единицы объема деформированного кристалла дается выражением

$$\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm},$$

где u_{ik} — тензор деформации, а λ_{iklm} — тензор модулей упругости¹⁾. Поэтому средняя упругая энергия всего кристалла равна

$$\frac{1}{2} V \overline{\lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}}.$$

Подставим сюда

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (iK_k u_{0i} + iK_i u_{0k}) e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} \}.$$

Члены с множителями $e^{\pm 2i\mathbf{K}\mathbf{r}}$ при усреднении обращаются в нуль. Учитывая также свойства симметрии тензора λ_{iklm} (симметрия по индексам i, k и l, m и по перестановке пары i, k с парой l, m), получим

$$\frac{V}{4} \lambda_{iklm} K_k K_m \overline{u_{0i} u_{0l}^*}$$

или

$$\frac{V}{4} g_{ik} \overline{u_{0i} u_{0k}^*},$$

где введено обозначение

$$g_{ik} = \lambda_{iklm} K_l K_m. \quad (101,5)$$

Согласно общей теории термодинамических флуктуаций мы можем теперь сразу написать для искомых средних значений²⁾

$$\overline{u_{0i} u_{0k}^*} = \frac{4T}{V} g_{ik}^{-1} \quad (101,6)$$

(g_{ik}^{-1} — тензор, обратный тензору g_{ik}), а для эффективного сечения рассеяния окончательно имеем:

$$d\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 TV |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k g_{ik}^{-1} \cdot do'. \quad (101,7)$$

1) См. «Механика сплошных сред», изд. 2-е, часть 2, § 10.

2) См. «Статистическая физика», изд. 3-е, § 109. Если распределение вероятностей для флуктуирующих величин x_1, x_2, \dots имеет вид

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_{ik} x_i x_k \right\},$$

то $\overline{x_i x_k} = \lambda_{ik}^{-1}$. Лишний множитель 2 в формуле (101,6) связан с тем, что каждое из комплексных u_{0i} представляет собой совокупность двух независимых величин.

Таким образом, интенсивность диффузного рассеяния, как и следовало ожидать, пропорциональна объему кристалла. Характерной особенностью этого рассеяния является распределение его интенсивности по площади пятна. Отвлекаясь от множителя $(1 + \cos^2 \vartheta)$, практически постоянного для заданного пятна, мы видим, что распределение интенсивности определяется выражением $g_{ik}^{-1} b_i b_k$. Последнее представляет собой произведение K^{-2} на довольно сложную функцию направления вектора K относительно кристаллографических осей. При рассеянии вблизи главного максимума интенсивность диффузного рассеяния тоже максимальна в точке $K=0$ (само выражение (101,7), обращающееся при $K=0$ в бесконечность, разумеется, становится при этом неприменимым). Если же условие (99,15) $b_k = -\pi b^2$ не выполняется, то равенство $K=0$ невозможно и максимум интенсивности диффузного рассеяния расположен при некотором отличном от нуля K , вообще говоря, не совпадающем с положением максимума структурного рассеяния. В обоих случаях диффузное рассеяние создает фон, интенсивность которого спадает в основном как $1/K^2$, т. е. значительно медленнее, чем интенсивность в более резкой линии структурного рассеяния, которую он окружает.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Ниже приведен для справок ряд формул, относящихся к векторным операциям в криволинейных координатах в общем и в некоторых специальных случаях.

В произвольной ортогональной системе криволинейных координат u_1, u_2, u_3 квадрат элемента длины имеет вид

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2,$$

где h_i — функции координат. Элемент объема в тех же координатах

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3.$$

Различные векторные операции выражаются с помощью функций h_i по нижеследующим формулам. Векторные операции со скаляром:

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} f)_i &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}, \\ \Delta f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right),\end{aligned}$$

где суммирование производится по круговым перестановкам индексов 1, 2, 3. Векторные операции с вектором:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} (h_2 h_3 A_i), \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right]\end{aligned}$$

(остальные компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ получаются круговой перестановкой индексов).

Цилиндрические координаты r, φ, z . Элемент длины:

$$\begin{aligned}dl^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \\ h_r &= 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1.\end{aligned}$$

Векторные операции:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \quad (\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

В выражениях для компонент вектора $\Delta \mathbf{A}$ под ΔA_i понимается результат действия оператора Δ на величину A_i , рассматриваемую при этом как скаляр.

Сферические координаты r, θ, φ . Элемент длины:

$$\begin{aligned}dl^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ h_r &= 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.\end{aligned}$$

Векторные операции:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right], \\ (\Delta \mathbf{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ (\Delta \mathbf{A})_\theta &= \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ (\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right].\end{aligned}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Активность оптическая естественная изотропных тел 428—430
— — — кристаллов 430—432
- Возбуждение тока ускорением 266
- Волна главная в волноводе 375—377
— необыкновенная 406
— — при нормальном падении на одноосный кристалл 408
— — при преломлении на одноосном кристалле 408
— обыкновенная 406
- Волновод многосвязный 374—376
— односвязный 372—374
— с идеальными стенками 373—375
— с поглощающими стенками 376—378
- Волновой вектор 260, 279
— — комплексный 333
- Волны в гиротропной среде 418—422
— — —, преломление на границе 423
— магнитогидродинамические 276, 279
— —, поглощение 282
— — ударные 290
— — — в слабых полях 293
— — — слабые 292
— на заряженной поверхности жидкого проводника 53
— электромагнитные плоские монохроматические 333
— — — неоднородные 334
— — — —, структура фронта при прохождении во вторую среду 340
— —, отражение 347—348
— —, — от металла 359
— —, преломление 316
— —, распространение в поглощающей среде 337
— —, — в прозрачной среде 335
- Восприимчивость диэлектрическая 58
— —, положительность 88
— магнитная 152
- Время затухания поля 240
— — — наименьшее 256
- Гирации вектор 418, 428
- Гирромагнитный эффект 189
- Гистерезис ферромагнетиков 196
- Глубина проникновения электромагнитного поля в проводник 241, 355, 356
— — — — в сверхпроводник 216, 257
- Граничные условия для движущихся диэлектриков 311
— — для магнетиков 152
— — для преломления света 347
— — для проводника в переменном поле 355, 356, 368
— — — в статическом магнитном поле 239
— — — — — электрическом поле 12
— — на поверхности раздела диэлектриков 57—58
— — — — проводящих сред 126
- Дисперсионные соотношения 322—324, 329, 358—359, 457, 461
- Дисперсия в оптике 345
— диэлектрической проницаемости 314, 316
— — — при больших частотах 318
— — — при малых частотах 317
— — —, учет пространственной зависимости 425
— магнитной проницаемости 318—320
- Диффракция на клине 385—390
— на плоском экране 390—394
— рентгеновых лучей, главные максимумы 513
— — —, общая теория 510—517
— — —, случай Брэгга 519
— — —, — Дебая — Шеррера 519
— — —, — Лауэ 517
- Длина волны в металле 355
— пробега электронов в металле 356
- Дублет Мандельштама — Бриллюэна 500

- Е-волны** в волноводах 372
 — — в неоднородных средах 362
Емкость взаимная двух проводников 19
 — — параллельных цилиндров 32
 — — в цепи квазистационарного тока 256
 — плоского конденсатора, краевая поправка 35
 — полого проводящего сегмента 34
 — проводящего шара в анизотропном диэлектрике 100
- Н-волны** в волноводах 372
 — — в неоднородных средах 362
 — —, связь частоты с волновым вектором 364
- Задачи электростатические, методы решения** 21—32
Закон Био и Савара 162
 — Джоуля — Ленца 126
 — Кирхгофа 385
 — Кюри — Вейсса 193
 — Фарадея для электромагнитной индукции 263
Заряды сторонние 57
 — — в диэлектрике 95
Затухание главной волны 376
 — поля резонатора 370
 — электромагнитного возмущения 337
- Излучение быстрой частицы «переходное»** 450
 — Черенкова 448
 — черное в прозрачной среде 473
Импеданс см. Сопротивление комплексное
 —, матрица 255
 — поверхностный кристаллов 397
 — — металлов 351
 — — рассеивающего шарика 385
 — провода кругового сечения 253
 — сверхпроводников 357
Индукция магнитная 150
 — униполярная 264, 265
 — флуктуационная «сторонняя» 467
 — —, корреляция 470
 — электромагнитная 263
 — электростатическая 57
- Интенсивность** в дифракционном пятне, распределение 515—516
 — дипольного излучения в изотропной среде 367
 — диффрагированного света за круглым отверстием 393
 — — — за щелью 392
- Интенсивность дифракционного пятна** вокруг побочного максимума, полная 516
 — диффузного рассеяния рентгеновых лучей 522—523
 — дублета Мандельштама — Бриллюэна 501—506
 — интегральная 517—520
 — несмещенной линии при рассеянии 498—500
 — рассеяния в газе с полярными молекулами 503
 — — с малым изменением частоты 495
 — рассеянного излучения, определение 380
 — теплового излучения плоской поверхности с малым импедансом 360
- Колебания электромагнитные** в резонаторах 368—372
Конус внешней конической рефракции 413
 — внутренней конической рефракции 411
Координаты криволинейные — (сводка) 524—525
 — сфероидальные 38
 — эллипсоидальные 36
Коэффициент взаимной индукции 173
 — деполяризации 42
 — — при рассеянии 382
 — емкости 15
 — затухания волн в волноводах 378—379
 — — главной волны в волноводе 376
 — — магнитного поля в проводящем шаре 248
 — отражения 348
 — — при нормальном падении света на границу поглощающей среды 354
 — — при падении света из пустоты в диэлектрик 353
 — — при почти скользющем падении света 353
 — Пельтье 144
 — поглощения, определение 336
 — размагничивания 65, 219
 — самоиндукции 173
 — Томсона 143
 — электростатической индукции 15
 — — — двух проводников 20
- Критическая опалесценция** 504—506
 — точка, смещение в электрическом поле 114
Критическое поле в сверхпроводнике 223

- Критическое состояние диэлектрика 113
- Лучевой вектор 400
 — — необыкновенной волны 408
 — — обыкновенной волны 407
- Магнитогидродинамические волны 276—279
 — —, поглощение 282
- Магнитострикция ферромагнетиков 201
 — — в сильных полях 204
 — —, магнитоупругость 202
 — ферромагнитного эллипсоида 205
- Метод изображений 22
 — инверсии 24
 — конформного отображения 26
- Момент магнитный дипольный равномерно вращающегося шара 265
 — — — неравномерно вращающегося шара 268
 — — квадрупольный вращающегося шара 313
 — — проводника в переменном магнитном поле 245
 — — сверхпроводящего диска 222
 — — системы, полный 163
 — —, физический смысл в переменных полях 319
 — сил, действующих на анизотропный диэлектрик 100
 — —, — — диэлектрический шар в пустоте 88
 — —, — — эллипсоид в электрическом поле 66
- Момент электрический дипольный 19
 — — — диэлектрика 56
 — — — тонкого проводящего стержня 33
 — — — квадрупольный вращающегося шара 313
 — — — заряженного эллипсоида 43
- Намагниченность в сильном поле кубического поликристалла 201
 — — — одноосного поликристалла 200
- Направление легкого намагничения 195
- Неравенства термодинамические 110
- Области прозрачности 322
- Опалесценция критическая 504—506
- Оптика геометрическая 342
 — кристаллов 395
 — — двухосных 405
- Оптика кристаллов одноосных 408
- Оптическая анизотропия в движущейся жидкости 416
- Оси главные диэлектрические 399
 — оптические в магнитном поле 420—421
 — — двухосных кристаллов 410
 — — одноосных кристаллов 406
- Отражение плоской волны от металла с поверхностным импедансом 359
 — света 348—351
 — — полное 351
- Переход сверхпроводящий 214
- Пирозлектрики 84
 —, группы симметрии 85—86
 —, поле в пустоте 86
 —, термодинамика 85
- Плотность тока в кристалле 510
 — — проводимости 125, 141
 — — электронов в кристалле 510—511
- Поверхность волновых векторов в гиротопном теле 420
 — — — для двухосных кристаллов 409
 — — — для одноосных кристаллов 405
 — — —, определение 400
 — — лучевая двухосных кристаллов 411
 — —, определение 400
 — —, форма 403
- Поглощение электромагнитных волн на малых частицах 384—385
- Пойнтинга вектор 164, 244, 306, 320, 344, 348, 355, 370, 374, 397, 402
- Показатель преломления в геометрической оптике 343, 475
 — — одноосного кристалла 406
 — —, определение 335—336
- Поле возле точки $\epsilon = 0$ при отражении наклонной H -волны 364
 — вокруг диэлектрического шара, вращающегося в магнитном поле 311—312
 — движущейся в среде частицы 434
 — магнитное линейного кругового тока 164
 — — постоянное 150—151
 — — — тока в магнитно-анизотропной среде 166
 — — при турбулентном движении проводящей жидкости 296
 — — рассеянной волны 486, 507
 — — электромагнитное квазистационарное 237—266

- Поле электростатическое бесконечной заряженной нити у границы раздела двух диэлектриков 60—62
 — — бесконечного проводящего цилиндра 30
 — — вблизи клиновидного края проводника 30
 — — круглого заряженного диска 43
 — — — острая на проводнике 31
 — — — углубления на проводнике 31
 — — в диэлектриках 55—57
 — — в плоскопараллельной анизотропной пластинке 87
 — — в плоскости диэлектрического полого цилиндра 67
 — — — — шара 66
 — — в пьезоэлектрике 105
 — — деполаризующее 65
 — — на земленной плоскости с отверстием 46—47
 — — пироэлектрического шара 86
 — — проводников 11—14
 — — проводящего незаряженного шара 29
 — — точечного заряда в анизотропной среде 87
 — — — — у границы раздела двух диэлектриков 60
 — —, энергия 14
 Поляризация волн в анизотропной среде 404
 — — в гиротропной среде 419
 — — в двухосном кристалле 407
 — диэлектрика в переменном поле 315
 — — в статическом поле 56
 — света в геометрической оптике 344
 — —, отраженного от гиротропного тела 424
 Поляризуемость 384
 — магнитная в периодическом поле проводящего цилиндра 247
 — — — — шара 245
 Постоянные упругооптические 415
 Потенциал векторный 159, 165, 367, 440
 — комплексный 27
 — скалярный 164, 440
 — термодинамический диэлектрика 72—73
 — — ферромагнетика 191
 Потери 321
 — ионизационные, нерелятивистский случай 433—439
 — —, релятивистский случай 439—448
 — —, эффект Черенкова 449
 Поток магнитной индукции 175
 — электростатической индукции 60
 — энергии см. Пойнтинга вектор
 — — в проводнике 163
 Преломление двойное 407
 — — в электрическом поле 414—415
 — — круговое 421
 — на поверхности двухосного кристалла 414
 Преобразование инверсии 24
 Принцип детального равновесия при рассеянии 491—494
 — причинности 326, 330
 — симметрии кинетических коэффициентов 127, 141, 145, 417, 426
 — Ферма 343
 Проницаемость диэлектрическая 57—62
 — —, дисперсия 314, 318
 — —, — при больших частотах 317
 — — кристаллов в переменном поле 395
 — — смеси 67
 — —, тензор 83
 — — эмульсии 69
 — магнитная 152
 Пьезомагнетизм 158, 188
 Пьезоэлектрики 85, 102
 —, группы симметрии 105—108
 —, модуль Юнга 108
 —, поле в них 105
 —, скорость звука в них 109
 Работа выхода 133
 Разность потенциалов контактная 133
 — — между стенками волновода 378
 Разрывы вращательные 286
 — контактные 285
 — переходные к ударным волнам 295
 — тангенциальные 285
 — —, устойчивость 289
 Распределение зарядов в проводнике 12
 — — на острие 33
 — — на поверхности круглого диска 44
 — — — — проводящего эллипсоида 44
 — интенсивности в дифракционном пятне 515
 — — при дифракции монохроматического света на щели 392
 — поля в поверхностном слое проводника 242
 — потенциала в проводящей сфере с током 129
 — — в электростатическом поле 14

- Распределение скоростей в вязкой проводящей жидкости 275
 — тока в магнетиках 155—156
 — в проводящей среде 130
 — по сечению тонкого провода 249
 Рассеяние комбинационное 497
 — рентгеновых лучей в изотропных средах, общая теория 483—491
 — — — диффузное 520—523
 — — — когерентное 511
 — — — на флуктуациях плотности 521
 — электромагнитных волн в аморфных телах 506—509
 — — — на малых частицах 379—382
 — — — на флуктуациях 497—503
 — — —, поляризация 488
 — — — рэлееское в газах и жидкостях 497—498
 — — — с малым изменением частоты 494
 Резонатор, добротность 370
 —, — — собственные частоты 368
 —, — — для идеально проводящих стенок 371
 —, — — при дипольных колебаниях 372
 Самоиндукция двойного провода 182
 — замкнутого провода 179
 — линейных проводников 177
 — плоского контура в магнетике 184
 — сверхпроводящего кольца 220, 254
 — тороидального соленоида 182
 — цилиндрического соленоида, краевая поправка 183
 Сверхпроводники, магнитные свойства 178, 215
 — многосвязные 220
 — односвязные 218
 —, отсутствие объемных токов 217
 —, постоянство магнитного потока в кольце 221
 —, промежуточное состояние 228
 —, разрушение сверхпроводимости 223
 —, уравнивание состояния в магнитном поле 224, 227
 Сегнетоэлектрики 114—124
 —, домены 120
 —, классы симметрии 115
 —, количественная теория 116—123
 —, упругие свойства 122
 Сегнетоэлектрическая ось 116
 Сечение эффективное дифракции рентгеновых лучей 520—521
 Сила изображения 22
 — лоренцова 186
 — торможения 435—437, 441—445
 — в ультрарелятивистском случае 447
 Силы в жидких диэлектриках 90
 — взаимного отталкивания проводников 51, 52
 — — — притяжения диэлектрических полшарий 101
 — в магнитном поле 184
 — в твердых телах 90, 96
 —, действующие на проводник без тока 48
 —, — — с током в магнитном поле 187
 — квазиупругие в магнитной гидродинамике 280
 — молекулярного притяжения твердых тел 475—478
 — объемные в диэлектрике при наличии сторонних зарядов 102
 — пондеромоторные 90
 — «случайные» 457, 465
 Скин-эффект 178, 248
 Скорость групповая 278, 344, 345, 401
 — распространения волны вдоль волновода 374
 — — света в движущейся среде 345
 — фазовая 277, 344, 345
 — электрона в электромагнитном поле 510
 Слой двойной 138, 140
 Соленоид см. Самоиндукция
 Сопротивление комплексное 251—252
 Среда гиротропные 417—418
 — прозрачные 338—340
 Структура магнитная 155
 Тензор диэлектрической проницаемости 83
 — — — в деформированных телах 98
 — — — изотропного тела в магнитном поле 417
 — — — — в электрическом поле 414
 — — — с учетом дисперсии 427, 494, 495
 — магнитной поляризуемости-245
 — — проницаемости 158
 — проводимости 127, 130
 — пьезоэлектрический 103
 Теорема взаимности 366
 — — для квадрупольного излучения 367
 Тепло джоулево 126

- Тепло джоулево в движущемся проводнике 262
 — — системы электродов 128
 Термогальваномагнитные явления 145—147
 Термоэлектричество 140—142
 Ток в движущихся проводниках 261
 — в кольце при остановке вращения 269
 —, возбуждение ускорением 266
 — в электролите 149
 — постоянный 125
 — —, плотность 125, 141
 — проводимости 158
 — сверхпроводимости 149, 218
 Токи в анизотропной среде 166
 — линейные 162—164
 — сторонние 365
 — Фуко 237
 Томсона постоянная 143
 — соотношения 145
 — теорема 18
 — формула для частоты электромагнитных колебаний 258
 Точка Кюри антиферромагнетиков 213
 — — сверхпроводящего перехода 214, 225
 — — сегнетоэлектриков 115
 — — ферромагнетиков 190
- Угол Брюстера 350
 — предельный полного отражения 351
 Уравнение Брэгга — Вульфа 514
 — Лауэ 513
 — телеграфное 378
 — Френеля 399, 409
 Условие квазистационарности флуктуаций тока 465
 — Лоренца 440
 Устойчивость заряженной сферической капли 54
 — тангенциального разрыва в проводящей жидкости 289
- Ферромагнетики вблизи точки Кюри 190
 —, доменная структура 197, 205, 208
 —, — — одноосного кристалла 210—211
 —, — —, переходной слой 207, 210—211
 —, — — слоистая 209
 —, магнитострикция 201
 Флуктуации анизотропии 497
 — квантовые нескольких величин, общая теория 459—465
- Флуктуации квантовые одной величины, дисперсионные соотношения 457
 — — — —, корреляция 452
 — — — —, общая теория 451—459
 — — — —, связь с теорией термодинамических флуктуаций 463
 — — — —, средний квадрат 452—458
 — — — —, — — случайной силы 457
 — плотности, средний квадрат 505
 — тока в линейных цепях 465—466
 — электромагнитного поля 466—473
 Формула Планка 74
 Формулы Крамерса — Кронига 329
 — — — для металлов 358—359
 — — — для флуктуаций 457, 461
 — Френеля 347
- Частоты собственные колебаний в контурах 259
 — — — в резонаторах 368—372
 Число осцилляторов 331
- Шар диэлектрический во внешнем поле 62
 — — — —, изменение формы 101
- Эйконал 342, 400
 Электрокапиллярность 138—139
 Электрострикция диэлектриков 79—81
 — диэлектрического эллипсоида 81
 — проводников 50—52
 — проводящего шара 52
 Элемент гальванический 136—137
 Эллипсоид диэлектрический 62
 — —, электрострикция 81
 — проводящий 36
 — сверхпроводящий 219
 — —, теплоемкость в промежуточном состоянии 233
 — ферромагнитный, магнитострикция 205
 — Френеля 404
 Энергия взаимодействия проводников 173
 — внутренняя тела в электромагнитном поле 322—323
 — диэлектриков, полная свободная 74, 75, 92, 97, 111
 — магнетиков, полная свободная 169, 176, 207
 — магнитного поля вблизи ферромагнетика 206
 — магнитной анизотропии 191, 194, 199
 — магнитоупругая 202
 — неоднородности ферромагнетика 206

- Энергия притяжения диполя к плоскому проводу 32
— свободных токов, собственная 173
— системы токов 172
— электромагнитного поля в диспергирующих средах 320—324
— электростатического поля 14
- Эффект Барнетта 188
— Керра 415
— Коттона—Муттона 422
— Ледюка—Риги 144
— Максвелла 416
- Эффект Нернста 144
— Пельтье 143
— Стюарта—Толмэна 268
— Томсона 143
— Фарадея 422
— Холла 130
— Эйнштейна—де Хааса 188
— электрокалорический 81—82
— Эттингсхаузена 144
- Эффекты магнитооптические 417—425
- Явления гироманнитные 187
— диффузионно-электрические 147
-

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
10	4 св.	\mathfrak{S}	\mathfrak{S}
19	14 сн.	\mathfrak{E}_0	\mathfrak{E}
119	Рис. 13	Отрезки AC и $A'C'$ должны быть изображены тонкой сплошной линией.	
233	21 сн.	$H_k^{\Delta^2}$	$H_k'^2$
312	13 св.	$\operatorname{div} D$	$\operatorname{div} D = 0$
381	15 сн.	E	E'