

Л. Д. ЛАНДАУ

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

1

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Е. М. ЛИФШИЦА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА». МОСКВА 1969

КОМИССИЯ ПО ИЗДАНИЮ ТРУДОВ Л. Д. ЛАНДАУ

А. А. АБРИКОСОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ,
Б. П. КОНСТАНТИНОВ, Е. М. ЛИФШИЦ,
М. А. МАРКОВ, И. М. ХАЛАТНИКОВ

В собрание трудов выдающегося советского физика академика Л. Д. Ландау вошли почти все его научные статьи, опубликованные в различное время на русском и иностранных языках. Часть работ публикуется на русском языке впервые. Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, преподавателей вузов, студентов университетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	9
1. К теории спектров двухатомных молекул. 1926	11
2. Проблема затухания в волновой механике. 1927	19
3. Квантовая электродинамика в конфигурационном пространстве. (Совместно с Р. Пайерсом). 1930	32
4. Диамагнетизм металлов. 1930	47
5. Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию. (Совместно с Р. Пайерсом). 1931	56
6. К теории передачи энергии при столкновениях. I. 1932]	71
7. К теории передачи энергии при столкновениях. II. 1932	81
8. К теории звезд. 1932	86
9. О движении электронов в кристаллической решетке. 1933	90
10. Второй закон термодинамики и Вселенная. (Совместно с М. Бронштейном). 1933	92
11. Возможное объяснение зависимости восприимчивости от поля при низких температурах. 1933	97
12. Внутренняя температура звезд. (Совместно с Г. Гамовым). 1933	102
13. Структура несмещенной линии рассеяния. (Совместно с Г. Плачеком). 1934	104
14. К теории торможения быстрых электронов излучением. 1934	106
15. Об образовании электронов и позитронов при столкновении двух частиц. (Совместно с Е. М. Лифшицем). 1934	110
16. К теории аномалий теплоемкости. 1935	123

17. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел. (Совместно с Е. М. Лифшицем). 1935	128
18. О релятивистских поправках к уравнению Шредингера в задаче многих тел. 1935.	144
19. К теории коэффициента аккомодации. 1935	146
20. К теории фотоэлектродвижущей силы в полупроводниках. (Совместно с Е. М. Лифшицем). 1936	157
21. К теории дисперсии звука. (Совместно с Е. Теллером). 1936	181
22. К теории мономолекулярных реакций. 1936	189
23. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. 1936	199
24. О свойствах металлов при очень низких температурах. (Совместно с И. Померанчуком). 1936	208
25. Рассеяние света на свете. (Совместно с А. Ахиезером и И. Померанчуком). 1936	222
26. Об источниках звездной энергии. 1937	224
27. О поглощении звука в твердых телах. (Совместно с Ю. Б. Румером). 1937	227
28. К теории фазовых переходов. I. 1937	234
29. К теории фазовых переходов. II. 1937	253
30. К теории сверхпроводимости. 1937	262
31. К статистической теории ядер. 1937	272
32. Рассеяние рентгеновых лучей кристаллами вблизи точки Кюри. 1937	280
33. Рассеяние рентгеновых лучей кристаллами с переменной структурой. 1937	292
34. Образование ливней тяжелыми частицами. (Совместно с Ю. Б. Румером). 1937	299
35. Стабильность неона и углерода по отношению к α -распаду. 1937	301
36. Наскадная теория электронных ливней. (Совместно с Ю. Б. Румером). 1938	302
37. Об эффекте де-Гааза — ван-Альфена. 1939	317
38. О поляризации электронов при рассеянии. 1940	320

39. О «радиусе» элементарных частиц. 1940	322
40. О рассеянии мезотронов «ядерными силами». 1940	326
41. Угловое распределение частиц в ливнях. 1940	328
42. К теории вторичных ливней. 1941	337
43. О рассеянии света мезотронами. (Совместно с Я. А. Смородинским). 1941	341
44. Теория сверхтекучести гелия II. 1941	352
45. Теория устойчивости сильно заряженных лиофобных золь и слипания сильно заряженных частиц в растворах электролитов. (Совместно с Б. В. Дерягиным). 1941	386
46. Увлечение жидкости движущейся пластинкой. (Совместно с В. Г. Левичем). 1942	412
47. К теории промежуточного состояния сверхпроводников. 1943	423
48. О соотношении между жидким и газообразным состоянием у металлов. (Совместно с Я. Б. Зельдовичем). 1943	439
49. Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса. 1944	443
50. К проблеме турбулентности. 1944	447
51. К гидродинамике гелия II. 1944	453
52. К теории медленного горения. 1944	458
53. Рассеяние протонов протонами. (Совместно с Я. А. Смородинским). 1944	467
54. О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию. 1944	482
55. Об изучении детонации конденсированных взрывчатых веществ. (Совместно с К. П. Станюковичем). 1945	491
56. Определение скорости истечения продуктов детонации некоторых газовых смесей. (Совместно с К. П. Станюковичем). 1945	
57. Определение скорости истечения продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ. (Совместно с К. П. Станюковичем). 1945	499
58. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. 1945	504

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее Собрание вошли почти все опубликованные научные статьи Льва Давидовича Ландау. Исключены лишь статьи, содержание которых заведомо устарело. При отборе статей мы руководствовались высказанным автором желанием, чтобы это Собрание имело чисто научный, а не биографический характер. Но книга, подготовлявшаяся еще при жизни Льва Давидовича, выходит в свет уже после его смерти. Тем самым она неизбежно приобретает также и мемориальный характер. Поэтому было решено снабдить это Собрание биографической статьей; она будет помещена в конце 2-го тома.

В текст публикуемых работ не вносилось никаких изменений, за исключением лишь исправления нескольких численных ошибок и небольшой модернизации обозначений.

Перевод работ, которые были опубликованы в прежние годы только на немецком или английском языках, осуществлен И. Е. Дзялошинским.

*Комиссия по изданию
трудов Л. Д. Ландау*

Согласно новой квантовой механике, рассчитана модель двухатомной молекулы как ротатора с внутренним импульсом. Для частот получаются обычные результаты теории полосатых спектров. Вычислены все интенсивности. Рассмотрено также поведение молекулы в электрическом и магнитном полях (эффекты Штарка и Зеемана в полосатых спектрах).

Гамильтониан двухатомной молекулы имеет вид

$$H = U + \frac{1}{2m} \sum p^2 + \frac{1}{2M_1} P_1^2 + \frac{1}{2M_2} P_2^2, \quad (1)$$

где строчными буквами обозначены величины, относящиеся к электронам, а прописными — к ядрам; U — потенциальная энергия¹.

Выделим движение молекулы как целого, для чего произведем следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} - \frac{M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}, & \mathbf{R} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1, \\ \mathbf{C} &= \frac{m \Sigma \mathbf{r} + M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{\Sigma m + M_1 + M_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве новых координат электронов $\bar{\mathbf{r}}$ мы ввели их расстояние (понимаемое векторно) от центра инерции ядер, \mathbf{R} представляет собой расстояние между ядрами, а \mathbf{C} — радиус-вектор центра

¹ Здесь и в дальнейшем все координаты и импульсы следует понимать как матрицы.

инерции молекулы в целом. Преобразованный гамильтониан приобретает вид

$$H = U + \frac{1}{2m} \sum \bar{p}^2 + \frac{1}{2(M_1 + M_2)} (\sum \bar{p}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) P^2 + \frac{1}{2(\Sigma m + M_1 + M_2)} \gamma^2 \quad (3)$$

(здесь γ — импульс, сопряженный координате C). Очевидно, что последний член в (3) представляет собой энергию движения молекулы как целого; поэтому в дальнейшем он не представит для нас никакого интереса, и мы его не будем рассматривать. Кроме того, опустим теперь черточки над \bar{r} и \bar{p} . Тогда момент количества движения молекулы запишется как

$$M = \sum [rp] + [RP]. \quad (4)$$

Если ввести, наконец, для R полярные координаты R, θ, φ , то для (3) и (4) получим

$$H = U + \frac{1}{2m} \sum p^2 + \frac{1}{2(M_1 + M_2)} (\sum p)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) p_R^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{1}{R^2} \left\{ p_\theta^2 - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) \right\}; \quad (5)$$

$$M_x = -\sin \varphi p_\theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta (p_\varphi \cos \varphi + \cos \varphi p_\varphi) + D_x,$$

$$M_y = \cos \varphi p_\theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta (p_\varphi \sin \varphi + \sin \varphi p_\varphi) + D_y, \quad (6)$$

$$M_z = p_\varphi + D_z,$$

где D_x, D_y, D_z — компоненты момента количества движения электронов $D = \sum [rp]$.

Углы θ и φ содержатся явно также и в потенциальной энергии; чтобы их оттуда исключить, нужно провести новое преобразование координат. Ось z новой координатной системы направим вдоль вектора R , а новую ось x' — перпендикулярно осям z и z' . В новой системе

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = U + \frac{1}{2m} \sum p'^2 + \frac{1}{2(M_1 + M_2)} (\sum p')^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) p_R^2, \quad (7)$$

$$H_1 = \frac{1}{2J} \left\{ (p'_\theta + D_{x'})^2 - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[(p'_\varphi + \sin \theta D_{y'} - \cos \theta D_{z'})^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right] \right\},$$

где

$$\frac{1}{J} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{1}{R^2},$$

$$D_{x'} = \sum (y' p_{z'} - z' p_{y'}) \text{ и т. д.}$$

Компоненты момента относительно старых координатных осей в новых переменных приобретают вид

$$\begin{aligned} M_x &= -\sin \varphi p'_\theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta (\cos \varphi p'_\varphi + p'_\varphi \cos \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} D_{z'}, \\ M_y &= \cos \varphi p'_\theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta (\sin \varphi p'_\varphi + p'_\varphi \sin \varphi) + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} D_{z'}, \\ M_z &= p'_\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Благодаря тому, что J велико по сравнению с соответствующими величинами, входящими в H_0 , H_1 можно рассматривать как возмущение, ограничившись в первом приближении только гамильтонианом H_0 . В этом приближении при движении молекулы ядра всегда остаются на оси z' . Легко видеть, что при этом z' -компонента момента количества движения электронов остается постоянной. В соответствии с этим матрица $D_{z'}$ диагональна. Как показали Борн, Гейзенберг и Иордан [1], в этом случае

$$\begin{aligned} D_{z'n}^n &= k\hbar, \\ z'_{n_1}^n &= R_{n_1}^n = p_{Rn_1}^n = 0, & \text{если } k \neq k_1, \\ x'_{n_1}^n &= y'_{n_1}^n = D_{x'n_1}^n = D_{y'n_1}^n = 0, & \text{если } k \neq k_1 \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n обозначает всю совокупность квантовых чисел, а k — одно из этих чисел.

Учет H_1 добавляет благодаря появлению новых степеней свободы еще два квантовых числа. По отношению к ним собственные значения H_0 вырождены, и поэтому может возникнуть необходимость еще в одном каноническом преобразовании. Соответствующая матрица преобразования S должна удовлетворять условиям [1]

$$S_{n_1 l_1}^{n l} = 0, \quad \text{если } n \neq n_1 \quad (10)$$

(здесь l — упомянутые новые квантовые числа). Учитывая, что все найденные в первом приближении величины A могут быть представлены в виде

$$A_{(0)n_1 l_1}^{n l} = A_{n_1}^n \delta_{l_1}^l,$$

явная Больцмана). Таким образом, мы находим, что приближенно

$$\alpha = \frac{kT_C}{as^2}. \quad (10)$$

Согласно (9) «ширину» промежуточной области можно определить как $\sqrt{\alpha/\beta}$. Учитывая (10), получаем

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{kT_C}{a\beta s^2}}.$$

Для Ni температура Кюри $T_C = 630^\circ \text{ K}$, момент насыщения единицы объема $s = 480$ (при 18° C) и постоянная решетки $a = 3,5 \times 10^{-8} \text{ см}$. Константу в энергии анизотропии β мы возьмем из экспериментов Беккера и Керстена [4]. Они измеряли магнитную восприимчивость натянутой никелевой проволоки и нашли, что минимальная величина, достигаемая при больших напряжениях, равна 0,6. Это соответствует постоянной $\beta = 1/0,6 = 1,7$. Используя это значение, находим для «ширины» промежуточной области величину $2,5 \cdot 10^{-6}$, т. е. приблизительно 70 постоянных решеток.

§ 2. Анализ, приведенный в предыдущем параграфе, дает только распределение направлений магнитных моментов в промежуточных областях, но не позволяет определить толщину слоев. Чтобы найти эту последнюю, необходимо обсудить свойства поверхности кристалла. Для этой цели воспользуемся здесь следующим методом. Сначала мы вычислим распределение магнитных моментов вблизи поверхности кристалла при заданном значении толщины слоя d , после чего определим эту толщину, исходя из требования минимальности энергии кристалла как целого.

Вблизи поверхности имеется магнитное поле; пусть \mathbf{H} будет его макроскопической напряженностью. Внутри кристалла поле \mathbf{H} и магнитный момент должны удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{s}) = 0;$$

снаружи

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Промежуточные области между слоями, а следовательно, и энергия $1/2 \alpha s^2$ для нахождения распределения s вблизи поверхности несущественны. Если бы энергия магнитной анизотропии равнялась нулю, т. е. $\beta = 0$, то равновесие, т. е. распределение, дающее минимум магнитной энергии, отвечало бы полю \mathbf{H} , равному нулю. Тогда для s внутри кристалла можно было бы написать

$$\operatorname{div} s = 0 \quad (11)$$

мы можем написать

$$A = SA_0S^{-1}, \quad A_{n_1 l_1}^{n_1 l_1} [S_n S_{n_1}^{-1}]_{l_1}^{l_1} = A_{n_1}^{n_1} S_{n_1}^{n_1 l_1},$$

$$(S_{(n) l_1}^l = S_{n_1}^{n_1 l_1}), \quad (11)$$

где s не зависит от природы величин A . Если $n = n_1$, то

$$S_{n_1 l_1}^{n_1 l_1} = \delta_{l_1}^{l_1}, \quad A_{n_1 l_1}^{n_1 l_1} = A_{n_1}^{n_1}. \quad (12)$$

Для любой из функций θ , φ , p_θ , p_φ благодаря малости H_1 в первом приближении справедливо уравнение

$$\frac{dB}{dt} = 0,$$

из которого без труда можно получить, что

$$B_{n_1 l_1}^{n_1 l_1} = 0, \quad \text{если } n \neq n_1. \quad (13)$$

С учетом всего предыдущего можно написать [1]

$$E_{(1)n, l} = H_{(1)n, l}^{n, l} = \left[\frac{1}{2J} \left(p_\theta'^2 - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{p_\varphi'^2 - 2 \cos \theta p_\varphi' D_z' + D_z'^2 - \hbar^2/4}{\sin^2 \theta} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_x'^2 + D_y'^2 - D_z'^2 \right) \right]_{n, l}^{n, l} = \\ = \left[\frac{1}{2J} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 + D_x'^2 + D_y'^2 - D_z'^2) \right]_{n, l}^{n, l}, \quad (14)$$

так как согласно (9) $D_x'^n = D_y'^n = 0$.

Борн, Гейзенберг и Йордан показали, что

$$M_{n, l}^2 = (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)_{n, l} = \hbar^2 j(j+1), \quad (15)$$

где j — одно из двух квантовых чисел l . Из (14) и (15) следует с учетом (12), что

$$E_{(1)n, l} = a_n j(j+1) + b_n,$$

или

$$E_{n, l} = E_{(0)n, l} + E_{(1)n, l} = A_n + a_n j(j+1); \quad (16)$$

величины A_n и a_n зависят только от n , но не от l . Известные формулы (16) приводят с учетом правил отбора по j [1] к следующим частотам переходов:

$$\begin{aligned} v_n^{n',j} &= v_n^{n'} + \beta_n^{n'} j(j+1), \\ v_n^{n',j-1} &= v_n^{n'} + j(\alpha_n^{n'} + \beta_n^{n'} j), \\ v_n^{n',j-1} &= v_n^{n'} + j(-\alpha_n^{n'} + \beta_n^{n'} j); \end{aligned} \quad (17)$$

$\alpha_n^{n'}$ и $\beta_n^{n'}$ представляют собой константы, характеризующие переходы в полосе $n \rightarrow n'$.

Перейдем теперь к вычислению интенсивностей переходов. Согласно Борну, Гейзенбергу и Иордану [1],

$$\begin{aligned} (\xi + i\eta)_{j,m-1}^{j,m} &= f_j^j \sqrt{(j+m)(j-m+1)}, \\ (\xi + i\eta)_{j-1,m-1}^{j,m} &= -f_{j-1}^j \sqrt{(j+m)(j+m-1)}, \\ (\xi - i\eta)_{j-1,m}^{j,m-1} &= f_{j-1}^j \sqrt{(j-m)(j-m+1)}, \\ (\xi + i\eta)_{j,m-1}^{j-1,m} &= (\xi - i\eta)_{j-1,m}^{j,m-1}, \quad (\xi - i\eta)_{j,m}^{j-1,m-1} = (\xi + i\eta)_{j,m-1}^{j,m}, \\ (\xi - i\eta)_{j,m}^{j-1,m-1} &= (\xi + i\eta)_{j-1,m-1}^{j,m}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\zeta_{j,m}^{j-1,m} = \zeta_{j-1,m}^{j,m}, \quad \zeta_{j,m}^{j,m} = f_j^j m, \quad \zeta_{j-1,m}^{j,m} = f_{j-1}^j \sqrt{(j+m)(j-m)}.$$

Здесь ξ, η, ζ представляют собой определенные комбинации соответственно из x и X, y и Y, z и Z ; величины f не зависят от m . Легко увидеть, что аналогичные формулы пригодны также для компонент единичного вектора в направлении \mathbf{R} , т. е. для $\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta$. Кроме того, из (8), если исключить оттуда p_θ и p_φ , следует, что

$$\sin \theta \cos \varphi M_x + \sin \theta \sin \varphi M_y + \cos \theta M_z = D_z \quad (19)$$

или

$$\frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} (M_x - iM_y) + \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} (M_x + iM_y) + \cos \theta M_z = D_z. \quad (20)$$

Диагональные матричные элементы равенства (20) с учетом того, что [1]

$$\begin{aligned} (M_x + iM_y)_{j,m-1}^{j,m} &= (M_x - iM_y)_{j,m}^{j,m-1} = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}, \quad (21) \\ M_{z,j,m}^{j,m} &= \hbar m, \end{aligned}$$

дают

$$u_{k,j}^{k,j} = \frac{k}{j(j+1)} \quad (22)$$

(величины u_j^j представляют собой значения функций f_j^j для $\sin \theta \cos \varphi$, $\sin \theta \sin \varphi$, $\cos \theta$). Наконец, из соотношений

$$\begin{aligned} \sin \theta e^{i\varphi} \cdot \cos \theta - \cos \theta \cdot \sin \theta e^{i\varphi} &= 0, \\ \sin \theta e^{i\varphi} \cdot \sin \theta e^{-i\varphi} + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

получается

$$u_{k,j-1}^{k,j} = u_{k,j}^{k,j-1} = \frac{1}{j} \sqrt{\frac{(j+k)(j-k)}{(2j+1)(2j-1)}}. \quad (23)$$

Формула (23) показывает, что должно быть

$$j \geq |k|. \quad (24)$$

Вспомнив теперь, что согласно уравнению (9) диагональные по k матричные элементы x' и y' равны нулю, мы можем написать

$$x_k^k = z_k^k \sin \theta \cos \varphi, \quad y_k^k = z_k^k \sin \theta \sin \varphi, \quad z_k^k = z_k^k \cos \theta.$$

Так как выражения такого же типа имеют место и для координат ядер

$$X_k^k = R_k^k \sin \theta \cos \varphi \quad \text{и т. д.,}$$

то можно заключить, что аналогичные соотношения справедливы также для всех возможных ξ , η , ζ . Отсюда следует, что

$$f_{k,j}^{k,j} = f_k^k \frac{k}{j(j+1)}, \quad f_{k,j-1}^{k,j} = f_{k,j}^{k,j-1} = f_k^k \frac{1}{j} \sqrt{\frac{(j+k)(j-k)}{(2j+1)(2j-1)}}, \quad (25)$$

где f_k^k не зависят от j . Для вычисления $f_{k-1,j}^{k,j}$ используем матричный элемент между состояниями с k и $k-1$ от перестановочного соотношения

$$z \cos \theta - \cos \theta z = 0.$$

Отсюда получится

$$\begin{aligned} f_{k-1,j}^{k,j} &= f_{k-1}^{k-1} \frac{\sqrt{(j+k)(j-k+1)}}{j(j+1)}, \\ f_{k-1,j-1}^{k,j} &= -f_{k-1}^{k-1} \frac{1}{j} \sqrt{\frac{(j+k)(j+k-1)}{(2j+1)(2j-1)}}, \\ f_{k-1,j}^{k,j-1} &= f_{k-1}^{k-1} \frac{1}{j} \sqrt{\frac{(j-k)(j-k+1)}{(2j+1)(2j-1)}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогичные формулы получаются также для $f_{k,j}^{k-1,j}$.

Благодаря малости E_1 частоты $\nu_n^{n'}$ приближенно равны ν_n^n и, следовательно (в первом приближении), не зависят от j и m .

Поэтому формулы (25), (26) можно применить также для производных по времени любого порядка от ξ , η , ζ и получить таким образом амплитуды излучения.

В отсутствие внешнего поля уровни системы вырождены по m . В этом случае, как легко убедиться, для интенсивности неполяризованного излучения справедлива формула

$$I = 3 \sum_{m=-j}^{m=j} (A_m)^2, \quad (27)$$

где A_m представляют собой амплитуды излучения, поляризованного в направлении оси z (в невырожденной системе). Подстановка A_m из (18) дает

$$I_j^j = (f_j^j)^2 j(j+1)(2j+1), \quad I_{j-1}^j = (f_{j-1}^j)^2 j(2j-1)(2j+1)$$

$$I_{j-1}^{j-1} = I_{j-1}^j, \quad (28)$$

или

$$I_{k,j}^{k,j} = I_k^k \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} \right) k^2, \quad I_{k,j-1}^{k,j} = I_k^k \frac{(j+k)(j-k)}{j},$$

$$I_{k,j}^{k,j-1} = I_{k,j-1}^{k,j},$$

$$I_{k-1,j}^{k,j} = I_{k-1}^{k-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} \right) (j+k)(j-k+1),$$

$$I_{k-1,j-1}^{k,j} = I_{k-1}^{k-1} \frac{(j+k)(j+k-1)}{j}, \quad I_{k-1,j}^{k,j-1} = I_{k-1}^{k-1} \frac{(j-k)(j-k+1)}{j},$$

$$I_{k,j}^{k-1,j} = I_{k-1,j}^{k,j}, \quad I_{k,j-1}^{k-1,j} = I_{k-1,j-1}^{k,j}, \quad I_{k,j}^{k-1,j-1} = I_{k-1,j-1}^{k,j}. \quad (29)$$

Магнитное поле H , направленное вдоль оси z , приводит к следующей добавке к гамильтониану молекулы²:

$$\Delta H = \frac{e|\mathbf{H}|}{2\mu c} D_z. \quad (30)$$

Отсюда следует

$$\Delta E = \frac{e|\mathbf{H}|}{2\mu c} D_z \cos \theta = \frac{eh}{2\mu c} |\mathbf{H}| \frac{k^2 m}{j(j+1)}, \quad (31)$$

так как ввиду (9)

$$(D_x)_n^n = (D_y)_n^n = 0.$$

² Здесь и далее мы обозначаем через μ массу электрона, чтобы не путать ее с квантовым числом m .

С помощью (30) мы исследовали эффект Зеемана в молекулярных спектрах; расщепление получается из (31), а интенсивности и поляризации — из (18) и (25), (26). Линии, соответствующие переходам в полосе n, n' , для которых $k = k' = 0$, вообще не расщепляются. Для достаточно сильных полей необходимо, с одной стороны, учесть поправку второго порядка по H_1 в (7), а с другой, — принять во внимание члены, квадратичные по возмущению (30). Несколько сложные вычисления дают

$$(\Delta E)_{k=0} = |\mathbf{H}| \gamma_n m + |\mathbf{H}|^2 \kappa_n \frac{j(j+1) + (m-1)(m+1)}{(2j-1)(2j+3)}; \quad (32)$$

γ_n имеет порядок величины $1/M$ (M — масса ядра).

Точно так же выглядит решение в случае электрического поля E . Именно,

$$\Delta H = |E| C_z \quad (33)$$

(C_z означает z -компоненту вектора электрической поляризации молекулы) и с учетом (18) и (25)

$$\Delta E = |E| \varepsilon_n k \frac{m}{j(j+1)}. \quad (34)$$

При $k = 0$ результаты зависят от того, состоит ли молекула из одинаковых атомов или нет. В первом случае для штарк-эффекта справедлива формула, подобная (32). Напротив, для полярной молекулы вместо второго члена в формуле (32) следует подставить выражение

$$|E|^2 \lambda_n \frac{3m^2 - j(j+1)}{j(j+1)(2j-1)(2j+3)}, \quad (35)$$

где λ_n имеет порядок величины M .

Ленинград

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan. Zs. Phys., 35, 595, 1926.

ПРОБЛЕМА ЗАТУХАНИЯ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Zs. Phys., 45, 430, 1927

Установлена формула для рассмотрения затухания в волновой механике. С ее помощью исследованы некоторые относящиеся сюда вопросы; находят свое истолкование также и явления когерентности. Получено выражение для спонтанного испускания, и этим путем решаются вопросы интенсивности спектральных линий.

§ 1. Связанные системы в волновой механике

Состояние системы в волновой механике не может быть определено однозначно; в ней всегда приходится иметь дело с совокупностью вероятностей (статистическое истолкование¹). Если же система взаимодействует с какой-либо другой системой, то неопределенность в ее поведении удваивается.

Пусть состояние первой системы характеризуется величинами a_n , так что

$$\psi = \sum a_n \psi_n; \quad (1)$$

для второй системы

$$\psi' = \sum b_r \psi'_r. \quad (2)$$

Тогда шредингеровская функция для обеих систем вместе имеет вид

$$\Psi = \psi\psi' = \sum_n \sum_r a_n b_r \psi_n \psi'_r = \sum_n \sum_r c_{nr} \psi_n \psi'_r, \quad (3a)$$

¹ Гейзенберг [1] в последнее время показал, что причина этого лежит в самой природе вещей, чем был решен, наконец, вопрос о модели волновой механики. О связи с классической механикой см. работу Д. Иваненко и Л. Ландау [2].

где
$$c_{nr} = a_n b_r. \quad (36)$$

Если включено взаимодействие, то c_{nr} станут функциями времени и уже не будут более распадаться на множители, как в формуле (36). Кроме того, потеряет смысл использование a_n и b_r в отдельности.

Для любой функции f , зависящей только от координат (и импульсов) первой системы, мы получим²

$$\tilde{f} = \int f \Psi \Psi^* d\tau d\tau' = \sum_n \sum_m \sum_r c_{nr}^* c_{mr} \int f \Psi_n^* \Psi_m d\tau = \sum_n \sum_m \alpha_{nm} f_{nm}, \quad (4a)$$

где
$$\alpha_{nm} = \sum_r c_{nr}^* c_{mr} \quad (4б)$$

и f_{nm} обозначает матричный элемент f :

$$f_{nm} = \int f \Psi_n^* \Psi_m d\tau.$$

Теперь можно характеризовать «состояние» системы при помощи величин α_{nm} . Для системы, определяемой величинами a_n , справедлива известная формула

$$\tilde{f} = \int f \Psi \Psi^* d\tau = \sum_n \sum_m a_n^* a_m f_{nm}. \quad (5)$$

В этом специальном случае α_{nm} равно $a_n^* a_m$; однако в общем случае такое представление невозможно, и α_{nm} следует понимать теперь как некоторое среднее от $a_n^* a_m$.

§ 2. Черное излучение в волновой механике

Волновая механика обычно имеет дело с объектами, обладающими ограниченным числом степеней свободы. Общая задача квантования электромагнитного поля (квантовая электродинамика) представляет пока еще непреодолимые трудности. Если, однако, не интересоваться структурой поля, ограничившись свойствами излучения, рассматриваемого как целое, то задача существенно упрощается.

Будем считать, что излучение заключено в сосуд произвольной формы. Тогда оно, как известно, распадается на не зависящие друг от друга собственные колебания s , вообще говоря, различ-

² Через \tilde{f} обозначено математическое ожидание для f .

ными частотами. Поскольку каждое собственное колебание соответствует отдельной степени свободы, то такая система обладает хотя и бесконечным, но все же дискретным набором степеней свободы. Благодаря своей независимости от других каждая степень свободы может быть проквантована отдельно. В качестве координаты собственного колебания мы выберем фазу соответствующей этому колебанию напряженности электрического (или магнитного) поля в какой-либо определенной точке³. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (6)$$

где φ обозначает фазу, а ω — частоту, умноженную на 2π . Введя энергию \mathcal{E} , можно переписать (6) следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{d\frac{\mathcal{E}}{\omega}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad (7)$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{E} - \dot{\varphi}$ — функция Гамильтона, а

$$p = \frac{\mathcal{E}}{\omega} \quad (8)$$

следует понимать как импульс, сопряженный координате φ (второе уравнение Гамильтона в силу соотношения $d\mathcal{E}/dt=0$ приводит к тождеству).

Для получения уравнения Шредингера мы воспользуемся операторным методом. Из

$$\omega p - \mathcal{E} = 0$$

следует

$$\frac{\hbar}{i} \omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

или

$$\omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Так как φ является циклической координатой, то допустимые решения (9) должны быть периодическими с периодом 2π ; кроме того, величины \mathcal{E} (энергии!) должны быть положительными для любой комбинации таких решений. Разделение переменных дает

$$\psi_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ir(\varphi - \omega t)}, \quad (10)$$

Здесь я следую идее Дирака [3]. Введение световых квантов, однако, произвольно и не является необходимым.

где r — постоянная, которая (в силу первого условия) может принимать только целочисленные значения. Для энергии получаем

$$\mathcal{E}_r = r\hbar\omega; \quad (11)$$

r обязательно положительно⁴. В дальнейшем нам понадобятся также величины $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$; все элементы соответствующих им матриц, кроме

$$(e^{i\varphi})_{r, r-1} = e^{i\omega t}, \quad (e^{-i\varphi})_{r-1, r} = e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

равны нулю.

§ 3. Затухание атомных систем

В этом случае к результатам предыдущих параграфов могут быть применены методы обычной теории возмущений, поскольку все явления, связанные с затуханием, вызываются обратным действием поля излучения атома.

Вид возмущающей функции известен:

$$\eta = C\mathbf{E}; \quad (13)$$

здесь C — вектор электрической поляризации атома и \mathbf{E} — электрическое поле в центре атома. Последнее можно представить в виде электрических полей, соответствующих отдельным собственным колебаниям:

$$\mathbf{E} = \sum_x \mathbf{E}_x, \quad \eta = C \sum_x \mathbf{E}_x. \quad (14)$$

Выберем центр атома в качестве точки, в которой определяется значение фазы. Тогда

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{e}_x \cos \varphi_x, \quad (15)$$

где \mathbf{e}_x не зависит от времени. Для полной энергии собственного колебания получим⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{H}_x^2) dV = \frac{1}{4\pi} \int \overline{\mathbf{E}_x^2} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{e}_x^2 \overline{\cos^2 \varphi_x} dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{e}_x^2 dV \end{aligned} \quad (16)$$

⁴ Применяя непосредственно статистику Планка, можно вывести из (11) планковскую формулу излучения (см. также [4]).

⁵ Черта здесь означает усреднение по времени.

или, введя усредненное по объему значение e_x^2 ,

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{8\pi} V \overline{e_x^2}, \quad \overline{e_x^2} = \frac{8\pi \mathcal{E}_x}{V}.$$

Поэтому

$$e_x = \sqrt{\frac{8\pi \mathcal{E}_x}{V}} n_x, \quad (17)$$

где n_x зависит только от положения центра атома и удовлетворяет условию

$$\overline{n_x^2} = 1. \quad (18)$$

Подставив (17) в (15), мы получим

$$E_x = \sqrt{\frac{8\pi \mathcal{E}_x}{V}} \cos \varphi_x n_x. \quad (19)$$

Если теперь рассматривать \mathcal{E}_x и $\cos \varphi_x$ как матрицы, то η и соответственно E_x должны быть симметризованы:

$$E_x = \sqrt{\frac{2\pi}{V}} (V \mathcal{E}_x e^{i\varphi_x} + e^{-i\varphi_x} V \mathcal{E}_x) n_x. \quad (20)$$

Согласно общей теории возмущений для коэффициентов в разложении $\psi = \sum c_N \psi_N$ имеет место уравнение

$$\frac{dc_N}{dt} = \frac{i}{\hbar} \sum_M \eta_{NM} c_M. \quad (21)$$

Вводя кроме атомных квантовых чисел n (m, k, \dots) квантовые числа излучения r_x и учитывая (14) и (19), с одной стороны, и (11) и (12) — с другой, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(r_x, n) = i S \sum_y \left\{ c(r_x - \delta_{xy}, m) \sqrt{\frac{2\pi r_y \omega_y}{\hbar V}} e^{i\omega_y t} + \right. \\ \left. + c(r_x + \delta_{xy}, m) \sqrt{\frac{2\pi (r_y + 1) \omega_y}{\hbar V}} e^{-i\omega_y t} \right\} n_y c_{nm}, \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

Выберем ради простоты в качестве начального состояния атома определенное обычным образом «состояние» (ср. § 1); окончательные формулы могут быть без труда распространены на об-

щий случай. Кроме того, мы предположим еще, что в начальный момент отсутствует поле излучения, поскольку поле, испущенное в более ранние моменты времени, не оказывает на атом никакого действия; тем самым все коэффициенты c , кроме $c(0, n)$, равны нулю. В последующие моменты следует учесть еще и $c(\delta_{xy}, n)$, поскольку только они, как показывает (22), имеют отличные от нуля производные по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(\delta_{xy}, n) &= i \sqrt{\frac{2\pi\omega_n}{\hbar V}} e^{i\omega_y t} \sum_m c(0, m) \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{nm}, \\ \frac{d}{dt} c(0, n) &= i \sum_y \sum_m c(\delta_{xy}, m) \sqrt{\frac{2\pi\omega_y}{\hbar V}} e^{-i\omega_y t} \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{nm}. \end{aligned} \quad (23)$$

Состояние атома согласно (4) характеризуется величиной

$$\alpha_{nm} = c^*(0, n) c(0, m) + \overline{\sum_y} c^*(\delta_{xy}, n) c(\delta_{xy}, m). \quad (24)$$

Производная по времени от α_{nm} равна

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{nm}}{dt} &= i \sum_k \sum_y \left\{ c^*(0, n) c(\delta_{xy}, k) \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{\hbar V}} e^{-i\omega_y t} \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{mk} - \right. \\ &- c^*(\delta_{xy}, k) c(0, m) \sqrt{\frac{2\pi\omega_y}{\hbar V}} e^{i\omega_y t} \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{kn} + \\ &+ c^*(\delta_{xy}, n) c(0, k) \sqrt{\frac{2\pi\omega_y}{\hbar V}} e^{i\omega_y t} \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{mk} - \\ &\left. - c^*(0, k) c(\delta_{xy}, m) \sqrt{\frac{2\pi\omega_y}{\hbar V}} e^{-i\omega_y t} \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{kn} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если подставить начальные условия $c_0(\delta_{xy}, n) = 0$ непосредственно в (25), то мы приходим к абсурдному заключению: $\frac{d\alpha_{nm}}{dt} = 0$. Причина этого, очевидно, лежит в расходимости бесконечной суммы по частотам. Для получения приемлемого результата применим (25) не к начальному моменту, а к некоторому более позднему моменту T . Тогда в том же приближении

$$\begin{aligned} c(\delta_{xy}, n) &= i \sqrt{\frac{2\pi\omega_y}{\hbar V}} \sum_m c_0(0, m) \int_0^T \mathbf{n}_y \mathbf{C}_{nm} e^{i\omega_y t} dt, \\ c(0, n) &= c_0(0, n), \end{aligned} \quad (26)$$

и, следовательно, с учетом соотношения $\alpha_{nm}^{(0)} = c_0^* (0, n) c_0 (0, m)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{nm}}{dt} = & \sum_k \sum_e \sum_y S \frac{2\pi\omega_y}{\hbar V} \left\{ -\alpha_{ne}^{(0)} n_y C_{mk} e^{-i\omega_y T} \int_0^T n_y C_{ke} e^{i\omega_y t} dt - \right. \\ & - \alpha_{em}^{(0)} n_y C_{kn} e^{i\omega_y T} \int_0^T n_y C_{ek} e^{-i\omega_y t} dt + \\ & + \alpha_{ek}^{(0)} n_y C_{mk} e^{i\omega_y T} \int_0^T n_y C_{en} e^{-i\omega_y t} dt + \\ & \left. + \alpha_{ke}^{(0)} n_y C_{kn} e^{-i\omega_y T} \int_0^T n_y C_{me} e^{i\omega_y t} dt \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

Так как мы считаем объем V бесконечно большим, то сумму по частотам можно заменить интегралом. Число собственных колебаний в интервале частот между ω и $\omega + d\omega$, как известно, равно

$$N_\omega d\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (28)$$

Вместо каждого выражения типа

$$nA \cdot nB$$

следует подставить

$$\frac{1}{3} AB \quad (29)$$

вследствие содержащегося здесь усреднения с учетом (18).

Поэтому уравнение (27) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{nm}}{dt} = & \sum_k \sum_e \int_0^\infty \left\{ \alpha_{ek}^{(0)} C_{mk} e^{i\omega T} \int_0^T C_{en} e^{-i\omega t} dt + \right. \\ & + \alpha_{ke}^{(0)} C_{kn} e^{-i\omega T} \int_0^T C_{me} e^{i\omega t} dt - \alpha_{ne}^{(0)} C_{mk} e^{-i\omega T} \int_0^T C_{ke} e^{i\omega t} dt - \\ & \left. - \alpha_{em}^{(0)} C_{kn} e^{i\omega T} \int_0^T C_{ek} e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{2\omega^3}{3\pi\hbar c^3} d\omega. \quad (30) \end{aligned}$$

Ряд соображений, которых я не привожу, показывает, что стоящие здесь (расходящиеся!) двойные интегралы следует считать

не зависящими от верхнего предела T . Устремив T к бесконечности и возвращаясь к начальному моменту при помощи теории интегралов Фурье, получим

$$\frac{d\alpha_{nm}}{dt} = \sum_k \sum_e \frac{2i}{3\hbar c^3} \left\{ \alpha_{ek} C_{mk} \frac{d^3}{dt^3} C_{en}^+ - \alpha_{ke} C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{me}^- + \right. \\ \left. + \alpha_{ne} C_{mk} \frac{d^3}{dt^3} C_{ke}^- - \alpha_{em} C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek}^+ \right\} \quad (31)$$

ИЛИ

$$\frac{d\alpha_{nm}}{dt} = \sum_k \sum_e \frac{2i}{3\hbar c^3} \left\{ \alpha_{ke} \left(C_{me} \frac{d^3}{dt^3} C_{kn}^+ - C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{me}^- \right) + \right. \\ \left. + \alpha_{nk} C_{me} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek}^- - \alpha_{em} C_{kn} \frac{d^3}{dt^3} C_{ek}^+ \right\};$$

знаки $+$ или $-$ означают, что взята только часть величины, содержащая соответственно положительные или отрицательные частоты. Это обстоятельство связано с тем, что интегрирование происходит только по положительным ω .

Формула (31) имеет фундаментальное значение для теории затухания. Величины a_n не имеют к этой проблеме никакого отношения; для характеристики «атомного состояния» следует вводить величины α_{nm} .

Если внешнее воздействие на атом имеет квазипериодический характер, то под его влиянием затухание величин α_{nm} будет изменяться в определенном направлении, стремясь (в первом приближении) асимптотически к определенным значениям. «Атомное состояние», соответствующее этим значениям α_{nm} , мы будем называть нулевым состоянием. Иногда имеется несколько таких состояний, из которых некоторые могут быть метастабильными.

Для произвольной величины f , описываемой матрицей f_{nm} , из (46) получается

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_n \sum_m \alpha_{nm} f_{nm} = \sum_n \sum_m \left(\alpha_{nm} \frac{df_{nm}}{dt} + \frac{d\alpha_{nm}}{dt} f_{nm} \right) = \\ = \frac{d_0 \tilde{f}}{dt} + \sum_n \sum_m \frac{d\alpha_{nm}}{dt} f_{nm}; \quad (32)$$

через $d_0 \tilde{f}/dt$ обозначена производная от f по времени, вычисленная без учета затухания. Подстановка (31) в (32) и переход к матричным обозначениям (пляпка над буквой) дают

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{dt} &= \frac{d_0\hat{f}}{dt} + \frac{2i}{3\hbar c^3} \left(\frac{d^3\hat{C}^+}{dt^3} \hat{f}\hat{C} - \hat{C}\hat{f} \frac{d^3\hat{C}^-}{dt^3} + \hat{f}\hat{C} \frac{d^3\hat{C}^-}{dt^3} - \frac{d^3\hat{C}^+}{dt^3} \hat{C}\hat{f} \right) = \\ &= \frac{d_0\hat{f}}{dt} + \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^3\hat{C}^+}{dt^3} \hat{F} + \hat{F} \frac{d^3\hat{C}^-}{dt^3} \right), \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$\hat{f}\hat{C} - \hat{C}\hat{f} = \frac{\hbar}{i} \hat{F}.$$

Для $f = \text{const}$ члены в (33), связанные с затуханием, как и следовало ожидать, обращаются в нуль. То же самое справедливо, как это следует из коммутационных соотношений, и для произвольной функции, зависящей только от координат. Для импульса электронов получается

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d_0\mathbf{H}}{dt} - \frac{2e}{3c^3} \left(\frac{d^3\hat{C}^+}{dt^3} + \frac{d^3\hat{C}^-}{dt^3} \right) = \frac{d_0\mathbf{H}}{dt} - \frac{2e}{3c^3} \frac{d^3\hat{C}}{dt^3} \quad (34)$$

(e — заряд электрона). Это уравнение находится в полном соответствии с классической теорией. Так как линейные соотношения всегда переходят в волновую механику без изменений, то этот результат может служить подтверждением (31). Если в качестве f взять энергию атомной системы ε , то

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{d\hat{C}}{dt}, \\ \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} &= \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^3\hat{C}^+}{dt^3} \frac{d\hat{C}}{dt} + \frac{d\hat{C}}{dt} \frac{d^3\hat{C}^-}{dt^3} \right). \quad (35) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить из этой формулы выражение для излученной энергии, мы воспользуемся классической теорией; исключение полного дифференциала дает

$$\hat{J} = - \frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2\hat{C}^+}{dt^2} \frac{d^2\hat{C}}{dt^2} + \frac{d^2\hat{C}}{dt^2} \frac{d^2\hat{C}^-}{dt^2} \right). \quad (36)$$

Эта формула важна не только для теории затухания. Она дает также выражение интенсивности излучения в волновой механике, которое нельзя было бы получить из формулы для «среднего» (в смысле замечания к (5)) поля⁶.

Для области непрерывного «спектра» суммы в (31) должны быть заменены интегралами.

⁶ Выражение для квадрата какой-либо величины в волновой механике не равно квадрату выражения для этой величины — величины a_n могут появляться только во второй степени. Поэтому результаты, полученные Иоссом [5], неудовлетворительны.

§ 4. Пример

Применим теперь полученные результаты к системе, которая, если отвлечься от затухания, является консервативной. Как известно, в этом случае для любой не зависящей явно от времени величины

$$f_{nm} = f^{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad (37a)$$

$$\tilde{f} = \sum_n \sum_m \alpha_{nm} f_{nm} = \sum_n \sum_m \alpha_{nm} f^{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad (37b)$$

где

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar} (E_n - E_m)$$

и f^{nm} не зависят от времени.

Чтобы получить выражение для интенсивности спектральной линии, используем формулу (36)

$$J^{nm} = \frac{2}{3c^3} \left(\sum_k^{E_k < E_n} \omega_{nk}^2 \omega_{km}^2 C^{nk} C^{ln} + \sum_k^{E_k < E_m} \omega_{nk}^2 \omega_{km}^2 C^{nk} C^{lm} \right), \quad (38)$$

$$\tilde{J} = \sum_n \sum_m a_n^* a_m J^{nm} e^{i\omega_{nm}t}$$

или после усреднения по времени

$$\bar{\tilde{J}} = \sum_n |a_n|^2 J^{nn} = \sum_n \sum_k^{E_n > E_k} \frac{2}{3c^3} \omega_{nk}^4 |C_{nk}|^2 |a_n|^2. \quad (39)$$

Каждый член этой формулы можно истолковать как интенсивность излучения соответствующей частоты. Тем самым характерные интенсивности (а также поляризация и т. п.) спектральной линии полностью определяются амплитудными коэффициентами поля излучения (матричными элементами d^2C/dt^2). Кроме того, как и следовало ожидать, интенсивность излучения частоты ω_{nk} пропорциональна величинам $|a_n|^2$ или, по обычной терминологии, числу атомов в начальном состоянии (состоянии с наивысшей энергией).

Чтобы проанализировать процесс затухания, обратимся к основной формуле (31):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{nm}}{dt} = & \sum_k \sum_e^{E_k > E_n} \frac{2\omega_{kn}^3}{3\hbar c^3} C^{kn} C^{me} e^{i(\omega_{ke} + \omega_{nm})t} \alpha_{ke} + \\ & + \sum_k \sum_e^{E_e > E_m} \frac{2\omega_{em}^3}{3\hbar c^3} C^{kn} C^{me} e^{i(\omega_{ke} + \omega_{mn})t} \alpha_{ke} - \sum_k \sum_e^{E_k > E_e} \frac{2\omega_{ne}^3}{3\hbar c^3} C^{me} C^{ek} e^{i\omega_{mk}t} \alpha_{nk} - \\ & - \sum_k \sum_e^{E_k < E_e} \frac{2\omega_{ek}^3}{3\hbar c^3} C^{ln} C^{ek} e^{i\omega_{en}t} \alpha_{em}, \quad (40a) \end{aligned}$$

и при $m = n$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{nn}}{dt} = & \sum_k \sum_e^{E_k > E_n} \frac{2\omega_{kn}^3}{3\hbar c^3} C^{kn} C^{ne} e^{i\omega_{ke}t} \alpha_{ke} + \sum_k \sum_e^{E_e > E_n} \frac{2\omega_{en}^3}{3\hbar c^3} C^{ln} C^{ne} e^{i\omega_{ke}t} \alpha_{ke} - \\ & - \sum_k \sum_e^{E_k > E_e} \frac{2\omega_{ek}^3}{3\hbar c^3} C^{ne} C^{ek} e^{i\omega_{nk}t} \alpha_{nk} - \sum_k \sum_e^{E_k < E_e} \frac{2\omega_{ek}^3}{3\hbar c^3} C^{ln} C^{ek} \alpha_{en}. \quad (40b) \end{aligned}$$

Если все частоты ω_{nm} различны между собой⁷, то после усреднения по времени получим

$$\overline{\frac{d\alpha_{nm}}{dt}} = - \left\{ \sum_e^{E_m > E_e} \frac{2\omega_{me}^3}{\hbar c^3} |C^{me}|^2 + \sum_k^{E_n > E_k} \frac{2\omega_{nk}^3}{3\hbar c^3} |C^{nk}|^2 \right\} \alpha_{nm}, \quad (41a)$$

$$\overline{\frac{d\alpha_{nn}}{dt}} = - \sum_k^{E_k > E_n} \frac{4\omega_{kn}^3}{3\hbar c^3} |C^{kn}|^2 \alpha_{kk} - \alpha_{nn} \sum_k^{E_k < E_n} \frac{4\omega_{nk}^3}{3\hbar c^3} |C^{nk}|^2. \quad (41b)$$

Формулу (41b) можно получить и из элементарных соображений (α_{nm} соответствует величинам $|a_n|^2$). В соответствии с ними находится также соотношение

$$J(\omega_{nm}) = |a_n|^2 A_{nm} \hbar \omega_{nm},$$

где

$$A_{nm} = \frac{4\omega_{nm}^3}{3\hbar c^3} |C^{nm}|^2 \quad (42)$$

⁷ Большинство следующих ниже результатов остаются справедливыми также для обычных случаев вырождения (вырождение по направлениям, задача многих тел).

представляет собой эйнштейновскую вероятность перехода для спонтанного испускания. Для времени жизни τ_n в n -м состоянии из (41б) получается

$$\frac{1}{\tau_n} = \sum_k^{E_k < E_n} A_{nk}. \quad (43)$$

Состояние с минимальной энергией (основное состояние атома), очевидно, является здесь нулевым состоянием. Состояния с большими энергиями, переходы из которых в нулевое состояние в этом приближении невозможны, разумеется, только метастабильны; следующие приближения к (31) дадут конечное время жизни и для этих состояний.

Уравнение (40а) показывает, что величины α_{nm} в среднем всегда уменьшаются со временем. Поскольку интенсивность излучения ведет себя согласно (39) и (41б) совершенно иначе, причина этого лежит в растущей неопределенности значений фаз, которая несет за собой уменьшение когерентности излучения⁸. Для «длительности» когерентности τ_{nm} из (41а) получается

$$\frac{1}{\tau_{nm}} = \lambda_{nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m} \right). \quad (44)$$

Вместо величин α_{nm} , которые соответствуют невозмущенной системе и становятся функциями времени, можно пользоваться также и не зависящими от времени величинами

$$\tilde{f} = \sum_n \sum_m \alpha'_{nm} f'_{nm}, \quad (45)$$

где α'_{nm} — произвольные постоянные. Если мы введем новые величины, чтобы исключить время из (37),

$$\gamma_{nm} = \alpha_{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad (46)$$

то (40) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{nm}}{dt} = & i\omega_{nm}\gamma_{nm} + \sum_k^{E_k > E_n} \sum_e \frac{2\omega_{kn}^3}{3\hbar c^3} C^{l,n} C^{me} \gamma_{ke} + \sum_h \sum_e^{E_e > E_m} \frac{2\omega_{em}^3}{3\hbar c^3} C^{l,n} C^{me} \gamma_{ke} - \\ & - \sum_k \sum_e^{E_k < E_n} \frac{2\omega_{ke}^3}{3\hbar c^3} C^{me} C^{ek} \gamma_{nk} - \sum_k \sum_e^{E_k < E_m} \frac{2\omega_{ek}^3}{3\hbar c^3} C^{l,n} C^{ek} \gamma_{km}. \quad (47) \end{aligned}$$

⁸ Это явление определяется процессами затухания только частично. Также и другие причины, благодаря которым поддерживается стационарность излучения (например, черное излучение, оптическое возбуждение и т. д.), приводят к нарушению когерентности.

Экспоненциальному решению этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами соответствуют определенные соотношения между γ и вместе с ними также определенные выражения для f'_{nm} в формуле для \tilde{f} . В первом приближении

$$f'_{nm} = e^{(i\omega_{nm} - \lambda_{nm})t} f'^{nm} = \exp \left[\frac{i(E_n - E_m) - j_n - j_m}{\hbar} t \right] f'^{nm}, \quad (48)$$

где

$$j_n = \frac{1}{2} \hbar \sum_k^{E_k < E_n} A_{nk} = \sum_k^{E_k < E_n} \frac{2\omega_{nk}^3}{3c^3} |C^{nk}|^2$$

и f'^{nm} — константы. Величины f'^{nm} , очевидно, представляют собой линейные комбинации f^{nm} . Они могут быть легко получены из (16). Для нулевого состояния, очевидно,

$$f'^{00} = f^{00} \quad (49)$$

и

$$\alpha'_{00} = 1. \quad (50)$$

Последнее соотношение заменяет обычное условие $\sum_n \alpha_{nn} = 1$.

Для ширины линии (также и сюда относятся предыдущие замечания) получается

$$\Delta\omega_{nm} = \pi\lambda_{nm} = \frac{1}{\hbar} (\pi j_n + \pi j_m), \quad (51)$$

поэтому можно также ввести понятие «ширины терма»

$$\Delta E_n = \pi j_n.$$

В заключение выражаю благодарность моему другу и коллеге Д. Иваненко за плодотворные обсуждения.

Ленинград, Физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Heisenberg. Zs. Phys., 43, 172, 1927.
- [2] Д. Иваненко, Л. Ландау. ЖРФХО, стр. 253, 1927.
- [3] P. A. M. Dirac. Proc. Roy Soc., A114, 243, 1927.
- [4] D. Iwanenko, L. Landau. Zs. Phys., 42, 562, 1927.
- [5] G. Joos. Munch. Ber., N 3, 399, 1927.

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Совместно с Р. ПАЙЕРЛСОМ

Zs. Phys., 62, 188, 1930

Электромагнитное поле и его взаимодействие с материей описывается с помощью уравнения Шредингера в конфигурационном пространстве световых квантов. Результаты тождественны с полученными Гейзенбергом и Паули.

Введение

Гейзенберг и Паули [1, 2] построили квантовую теорию электромагнитного поля и его взаимодействия с материей. Для этого они использовали метод квантованных волн. Нам кажется целесообразным ввести по аналогии с обычной квантовой механикой конфигурационное пространство для световых квантов. При этом оказывается, что вид уравнений удастся установить на основании небольшого числа физически ясных допущений. Исследования Дирака [3] и других авторов [4—6] делают вполне правдоподобным предположение об эквивалентности уравнений в обеих теориях; в § 4 эта эквивалентность будет доказана прямыми вычислениями.

В частности, и в нашей теории не удастся избавиться от трудностей, связанных с тем, что взаимодействие частицы с самой собой оказывается бесконечно большим. Уравнения поэтому заведомо не являются еще физически корректными, и мы не думаем, что такое печальное положение вещей можно устранить чисто формальным изменением уравнений.

§ 1. Волновое уравнение для светового кванта

Неоднократно высказывалось мнение, что, поскольку число световых квантов не сохраняется, для них нельзя написать волнового уравнения. Паули и Гейзенберг [2] впервые высказали

мысль, что эта трудность может быть легко преодолена. Для этого следует рассмотреть систему функций соответственно в 0, 3, 6 . . . - мерных пространствах; N -я функция определяет вероятность того, что существует N частиц, а их конфигурация дается рассматриваемой точкой в $3N$ -мерном пространстве. Задача теперь состоит в написании для этих функций системы зацепляющихся уравнений.

В качестве первого шага рассмотрим случай, когда материя отсутствует. Тогда упомянутые функции не будут зависеть друг от друга и можно ограничиться рассмотрением «одного кванта». От соответствующего трехмерного уравнения нужно потребовать, чтобы его решения отвечали всем возможным состояниям движения и поляризации светового кванта, т. е. всем решениям уравнений Максвелла:

$$\dot{\mathbf{E}} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (1a)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (1б)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Однако решения уравнений Максвелла отличаются от наших функций тем, что последние для светового кванта с частотой ω должны иметь временную зависимость $e^{i\omega t}$, чтобы (при взаимодействии с материей) выполнялся закон сохранения энергии. Кроме того, нет необходимости требовать вещественности \mathbf{E} и \mathbf{H} . Вместо этого следует ввести другое дополнительное условие, выражающее тот факт, что в природе существуют только кванты с положительной энергией. Рассмотрим это условие на примере плоскополяризованной волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}r)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}r)}.$$

Если ω отрицательно, то его можно заменить на $-c|\mathbf{k}|$ (при обычной форме записи положительным энергиям соответствуют отрицательные частоты). Из уравнений Максвелла следует, что в этом случае

$$-ik\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (3)$$

Мы должны потребовать, чтобы (3) выполнялось для каждой фурье-компоненты любого другого решения. Для компактности записи введем оператор $\sqrt{\Delta}$, определив его таким образом, чтобы он переводил произвольную функцию

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \varphi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}r} d\Omega, \quad d\Omega = dk_x dk_y dk_z,$$

в функцию

$$V\bar{\Delta}\Phi = \int ik \cdot \varphi(k) e^{ikr} d\Omega. \quad (4)$$

Обозначение $V\bar{\Delta}$ оправдано тем, что повторное применение этой операции дает, очевидно, оператор Лапласа. Тогда в качестве дополнительного условия мы должны потребовать, чтобы

$$-\text{rot } \mathbf{H} = V\bar{\Delta}\mathbf{E}. \quad (5)$$

Это условие тривиальным образом совместимо с уравнениями Максвелла. \mathbf{H} теперь однозначно определяется по \mathbf{E} , так что нам необходимо определить только одну из двух функций. В дальнейшем мы будем обозначать волновую функцию не через \mathbf{E} , а через \mathbf{F} , поскольку в теории не осталось почти никаких связей с полевыми величинами. Из (1а), (2) и (5) тогда следует

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{F}} = -V\bar{\Delta}\mathbf{F}, \quad (6a)$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{F}} = 0. \quad (6b)$$

Мы должны, кроме того, добавить еще условие нормировки, выражающее тот факт, что речь идет об одном кванте. Проще всего поступить следующим образом. Если снова вернуться к монохроматической волне, то в классической теории Максвелла ее энергия дается выражением

$$\frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV,$$

а число световых квантов выражением

$$\frac{1}{2\hbar|\omega|} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV.$$

В случае монохроматической волны для числа световых квантов можно пользоваться также выражением¹

$$\frac{1}{2\hbar|\omega|} \int \mathbf{F}\mathbf{F}^* dV. \quad (7)$$

В силу нашего дополнительного условия мы снова можем заменить $|\omega|$ на ck и определять число квантов для произвольной

¹ Формула (7) справедлива, поскольку, согласно (5) и (2),

$$\int \mathbf{E}\mathbf{E}^* dV = \int \mathbf{H}\mathbf{H}^* dV.$$

функции, которую представим (в заданный момент времени) в виде

$$F(\mathbf{r}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\Omega,$$

по формуле

$$N = \frac{1}{2\hbar} \int dV \int \frac{\mathbf{f}(\mathbf{k}) \mathbf{f}^*(\mathbf{k}')}{ck} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\Omega d\Omega'. \quad (8)$$

Определим в соответствии с (4) оператор

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{ik} \varphi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\Omega, \quad (9)$$

который при помощи теоремы Фурье может быть записан также как интегральный оператор

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int \frac{\Phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dV'. \quad (9a)$$

Используя это определение, представим (8) как

$$N = \frac{i}{2\hbar c} \int \mathbf{F}^*(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} F(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{4\pi^2 \hbar c} \int \frac{\mathbf{F}^*(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dV dV'. \quad (10)$$

Таким образом, условие нормировки требует, чтобы интеграл (10) равнялся единице.

Нельзя, однако, использовать $\mathbf{F}^* \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{F}$ в качестве плотности вероятности, поскольку эта величина не является положительно определенной. Правильного выражения для плотности вероятности найти пока не удалось.

§ 2. Частицы без взаимодействия

Перейдем теперь к случаю произвольного числа световых квантов и электронов. При этом достаточно записать уравнения для случая, когда имеется только один электрон; они могут быть без труда обобщены на случай большего числа электронов. Если N — число квантов, то соответствующее уравнение действует в $(3N + 3)$ -мерном пространстве. Его решения должны представлять собой произведение решений уравнений (6) на решение уравнения Дирака в отсутствие внешних сил. Поэтому оно является $4 \cdot 3^N$ -компонентной величиной. Запишем его в виде

$$F_{m_1 m_2 \dots m_N \rho}^N(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}, t); \quad (11)$$

ρ связано с индексом дираковской функции, m_ν обозначает три направления в пространстве ν -го кванта, $Q = Q_1, Q_2, Q_3$ — три координаты электрона, $q^\nu = q_1^\nu, q_2^\nu, q_3^\nu$ — ν -го кванта. Однако ради обозримости формул мы будем часто опускать индексы и писать просто F^N . При этом, как понятно без дальнейших пояснений, всякий дифференциальный оператор, действующий на координаты ν -й частицы, действует также всегда и на индекс m_ν , например

$$\operatorname{div}_\nu = \sum_{m_\nu} \frac{\partial}{\partial q_{m_\nu}^\nu}.$$

Дифференциальные операторы без индекса относятся к координатам электрона. Кроме того, мы не будем писать индексов у дираковских матриц $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 = \alpha$ (их первые три компоненты можно писать в виде вектора α), считая, что они всегда действуют на индекс ρ стоящей после них функции.

В силу своего определения и условий (6) функция F удовлетворяет также уравнению

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \operatorname{grad} + \frac{imc}{\hbar} \alpha \right) F^N + \sum_\nu V \overline{\Delta}_\nu F^N = 0. \quad (12)$$

Разумеется, мы выбираем известным образом в качестве F^N не простые произведения одночастичных функций, но такие их линейные комбинации, которые остаются неизменными при одновременной перестановке координат q_ν и относящихся к ним индексов m_ν (принцип симметрии).

Выпишем для ясности уравнения для случаев $N = 0$ и $N = 1$ в явном виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F_\rho^0 + \alpha_{\rho\sigma} \operatorname{grad} F_\sigma^0 + \frac{imc}{\hbar} \alpha_{\rho\sigma} F_\sigma^0 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F_\rho^1 + (\alpha_{\rho\sigma} \operatorname{grad}) F_\sigma^1 + \frac{imc}{\hbar} \alpha_{\rho\sigma} F_\sigma^1 + V \overline{\Delta}_1 F_\rho^1 = 0. \quad (14)$$

Кроме того, еще, разумеется, выполняется краевое условие

$$\operatorname{div}_\nu F^N = 0, \quad (12a)$$

например,

$$\operatorname{div}_1 F^1(q_1, Q) = 0. \quad (14a)$$

В качестве нормировки мы должны потребовать, чтобы

$$J_{N1} = \left(\frac{i}{2\hbar c}\right)^N \int F^{N*} \frac{1}{V_{\Delta_1}} \dots \frac{1}{V_{\Delta_N}} F^N dW dV_1 \dots dV_N = 1, \quad (15)$$

$$dW = dQ_1 dQ_2 dQ_3,$$

$$dV_\nu = dq_1^\nu dq_2^\nu dq_3^\nu.$$

Из вывода (12) очевидно, что условия (12а) и (15) совместимы с уравнением; таким образом, они справедливы в любой момент времени, если выполнены в начальный.

§ 3. Взаимодействие

Если теперь пожелать принять в расчет взаимодействие частиц между собой, то нам придется изменить уравнения во многих пунктах. Прежде всего, не будет больше выполняться закон сохранения числа световых квантов. Поэтому мы не можем больше требовать, чтобы интеграл J_N в (15) оставался постоянным; он теперь представляет собой скорее вероятность того, что существует именно N квантов. Однако мы все еще должны требовать, чтобы выполнялось условие вида

$$\sum_{N=0}^{\infty} J_N = 1. \quad (16)$$

Оно должно, разумеется, оставаться справедливым для всех времен. Как будет видно, этим исключается большое число возможностей при выводе уравнений.

Далее нужно принять во внимание, что уравнение (2) пригодено лишь в отсутствие материи и в противном случае должно быть заменено на

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho. \quad (17)$$

Мы отложим несколько выяснение вопроса о том, как следует сформулировать это уравнение в нашей теории в общем случае, т. е. что в общем случае следует¹ использовать вместо (12а). Однако на этот вопрос легко ответить в частном случае $N = 1$, т. е. для (14а). ρ в правой части (17) представляет собой плотность заряда в точке \mathbf{q} при условии, что электрон находится в точке \mathbf{Q} . Поэтому едва ли возможно найти вместо (14а) какое-нибудь другое разумное выражение, кроме

$$\operatorname{div}_1 \mathbf{F}_\rho^1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = e\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \mathbf{F}_\rho^0(\mathbf{Q}). \quad (18)$$

Здесь $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ — трехмерная сингулярная функция Дирака [7].

Учтем теперь, что соотношение (5) относится только к свободной от дивергенции части \mathbf{E} . Если разложить \mathbf{E} на свободную от дивергенции и безвихревую (поперечную и продольную) части, то легко убедиться, что первая дается выражением

$$-\frac{\text{rot rot}}{\Delta} \mathbf{E}.$$

Следовательно, операторы $\sqrt{\Delta}$, в (12) следует заменить на

$$-\frac{\text{rot}_v \text{rot}_v}{\Delta_v}. \quad (19)$$

Точно так же мы могли бы потребовать, чтобы нормировочный интеграл сохранил свою форму (10) только для поперечной части F , и считать вклад продольной части произвольным. Однако уравнения приобретают наиболее простой вид, если сохранить нормировку (10) для полной функции F . Наглядное истолкование этого способа записи заключается в том, что в этом случае продольный и поперечный кванты с одинаковой длиной волны имеют одинаковые амплитуды напряженности электрического поля.

Кроме того, мы должны учесть действие поля на электрон. Пока нет ни одного кванта, т. е. пока только F^0 отлична от нуля, единичный электрон будет двигаться свободно. Напротив, свободное движение, вообще говоря, нарушится, если существует хотя бы один квант. Поэтому в уравнение (13) следует добавить еще члены, зависящие от F^1 . Эти члены будут, конечно, аналогичны потенциальным членам в уравнении Дирака, впрочем, с некоторым характерным отличием. Именно, рассмотрим один электрон под действием внешнего постоянного во времени электрического поля, так что в классике его энергия имеет вид eV . Будем, с другой стороны, считать, что все поле создано самими электронами; тогда, чтобы получить правильное выражение для взаимодействия, энергию каждого электрона следует писать в виде $\frac{1}{2} eV$, ибо в противном случае мы учли бы каждую энергию дважды. Из этого прекрасно известного в классической теории обстоятельства следует, что мы должны вставить в уравнение Дирака только половину потенциала. До сих пор мы работали только с напряженностями полей, так что нам предстоит еще выразить потенциалы через напряженности. Такое представление будет однозначным лишь после наложения дополнительного условия. Наиболее удобным оказывается условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (20)$$

С помощью этого условия и равенств

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

потенциалы можно представить в виде²

$$\mathbf{A} = -\frac{\text{rot}}{\Delta} \mathbf{H}, \quad \varphi = -\frac{\text{div}}{\Delta} \mathbf{E}. \quad (21)$$

Итак, величины, которые следует подставить в уравнение Дирака вместо φ , \mathbf{A} , примут, если учесть (5), (19) и (21), вид

$$-\frac{1}{2} \frac{\text{div}_1}{\Delta_1} F^1_\rho(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), \quad -\frac{1}{2} \frac{\text{rot}_1 \text{rot}_1}{\Delta_1^{3/2}} F^1_\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{Q}). \quad (22)$$

Поэтому уравнение (13) перейдет в

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^0 + \alpha \text{grad } F^0 + \frac{imc}{\hbar} \alpha F^0 + \\ + \frac{ie}{2\hbar c} \left[\frac{\text{div}_1}{\Delta_1} \mathbf{F}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) + \alpha \frac{\text{rot}_1 \text{rot}_1}{\Delta_1^{3/2}} \mathbf{F}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \right] = 0. \quad (23)$$

Кроме того, дополнительные члены в выражении для $\partial F^0/\partial t$ дадут вклад в $\partial J_0/\partial t$. Для сохранения нормировки эта добавка должна быть скомпенсирована соответствующим изменением J_1 , и, следовательно, к (14) должен быть прибавлен дополнительный член, зависящий от F^0 . (Физически это означает, что из существования действия поля на электрон с необходимостью следует существование обратного действия электрона на поле.) Для получения вида этого члена вычислим $\partial J_0/\partial t$. При этом, как легко убедиться, продольные члены в (22) не дадут, если принять во внимание (18), никакого вклада, так что мы можем совсем опустить первый член в (22), а второй заменить на

$$\frac{ie}{2\hbar c} \alpha \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \mathbf{F}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}).$$

В результате получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_0}{\partial t} = \int F^{0*}(\mathbf{Q}) \frac{ie}{2\hbar c} \alpha \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \mathbf{F}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) dW + \\ + \int F^0(\mathbf{Q}) \frac{ie}{2\hbar c} \alpha^* \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \mathbf{F}^{1*}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) dW.$$

² Смысл оператора $1/\Delta$ полностью ясен из предыдущего.

Это выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{i}{2\hbar c} \int \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \mathbf{F}^{1*}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) e z F^0(\mathbf{Q}) dV_1 dW + \dots$$

Отсюда видно, что для постоянства ΣJ_N к (14) необходимо добавить выражение

$$e \alpha \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) F^0(\mathbf{Q}). \quad (24)$$

Появления такого члена в этом месте вполне следовало ожидать, ибо $e \alpha \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q})$ в теории Дирака есть как раз выражение для плотности тока в точке \mathbf{q} , и (24) в точности соответствует члену с плотностью тока в уравнениях Максвелла. Тем самым мы получаем, кроме того, дополнительное подтверждение правильности множителя $1/2$ в потенциальном члене нулевого уравнения.

Вид дополнительного члена можно было бы получить также из требования совместности условия обращения в нуль дивергенции с уравнениями. А именно, возьмем дивергенцию от уравнения (14) с добавкой (24) и примем во внимание (18); тогда получится уравнение (13), умноженное на $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q})$. Тем самым совместимость уравнений доказана с точностью до дополнительного члена, отличающего (23) от (13). Мы должны произвести еще два изменения: во-первых, добавить еще соответствующий дополнительный член в (14) и, кроме того, ввести аналогичное (18) дополнительное условие, связывающее F^2 и F^1 . Но тогда из условия постоянства нормировки снова вытекает необходимость добавления к уравнению для F^3 члена, аналогичного (24). В конце концов можно выписать следующие общие уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha \text{grad}) + \frac{imc}{\hbar} \alpha \right) F^N - \sum_v \frac{\text{rot}_v \text{rot}_v}{\sqrt{\Delta_v}} F^N + \\ & + \frac{ie}{2\hbar c} \left[\frac{\text{div}_{N+1}}{\Delta_{N+1}} F^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}) + \right. \\ & \left. + \alpha \frac{\text{rot}_{N+1} \text{rot}_{N+1}}{\Delta_{N+1}^{3/2}} F^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \right] + \\ & + e \alpha \sum_v F^{N-1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{v-1}, \mathbf{q}_{v+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}) \delta(\mathbf{q}_v - \mathbf{Q}) = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

наложив при этом в качестве дополнительных условия

$$\text{div}_v F^N = e \delta(\mathbf{q}_v - \mathbf{Q}) F^{N-1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{v-1}, \mathbf{q}_{v+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}). \quad (25a)$$

Мы можем теперь пояснить, каким образом следует обобщить уравнения на случай большего числа электронов. При этом не нужно вводить никаких взаимодействий между электронами, достаточно просто прибавить члены, описывающие взаимодействия между световыми квантами и каждым электроном в отдельности. Не увеличивается также и число уравнений для материи, так как мы считаем справедливым закон сохранения числа частиц. В этом случае получается ³

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_p (\alpha_p \text{grad}_p) + \frac{imc}{\hbar} \alpha_p \right) F^N (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N) - \\ & - \sum_v \text{rot}_v \text{rot}_v \frac{1}{V \Delta_v} F^N + \\ & + \frac{ie}{2\hbar c} \sum_p \left[\frac{\text{div}_{N+1}}{\Delta_{N+1}} F^{N+1} (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n) + \right. \\ & \left. + \alpha_p \frac{\text{rot}_{N+1} \text{rot}_{N+1}}{\Delta_{N+1}^{3/2}} F^{N+1} (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n) \right] + \\ & + e \sum_{p, v} \alpha_p \delta(\mathbf{q}_v - \mathbf{Q}_p) F^{N-1} (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{v-1}, \mathbf{q}_{v+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} & \text{div}_v F^N (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N) = \\ & = e \sum_p \delta(\mathbf{q}_v - \mathbf{Q}_p) F^{N-1} (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{v-1}, \mathbf{q}_{v+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n). \end{aligned} \quad (26a)$$

§ 4. Сравнение с теорией Гейзенберга — Паули

В этом параграфе мы покажем, что полученные здесь уравнения полностью эквивалентны уравнениям Гейзенберга и Паули. Тем самым мы получим доказательство релятивистской инвариантности наших уравнений, которая неотчетливо видна из-за способа их вывода, использовавшего трехмерные обозначения и тем самым предполагавшего определенную систему отсчета. Разумеется, инвариантность может быть проверена также и прямым расчетом, для чего достаточно вычислить заново для нашего уравнения оператор Λ , соответствующий преобразованию Лоренца (ср. [2]).

³ Матрицы α_p , α_p действуют на] принадлежащий p -му электрону индекс p_p у стоящей после них функции.

Для прямого сравнения обеих теорий целесообразно преобразовать уравнения Гейзенберга и Паули. А именно, для наших целей удобнее иметь дело не со стоячими собственными колебаниями полости, а с бегущими волнами, на которые, чтобы получить дискретные собственные колебания, надо наложить периодические граничные условия.

Заметим также, что для напряженностей полей мы пользуемся единицами Хэвисайда. Тогда для гамильтоновой функции получается выражение (ср. выражение (42) в [2])

$$H = \int dV \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \Pi_l^2 + e \Phi_k \alpha_{\rho\sigma}^l \psi_\rho^* \psi_\sigma \right]. \quad (27)$$

Здесь не выписаны члены, относящиеся только к материи, вид которых в обеих теориях одинаков. Разложим Φ и Π в ряд Фурье

$$\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon}} L^{-3/2} \sum_k e^{2\pi i k r / L} \sqrt{\frac{cL}{k}} [e_i^{k1} (A_{k1} + A_{k-1}) + e_i^{k2} (A_{k2} + A_{k-2}) + e_i^{k3} q_{k3} \sqrt{2}], \quad (28)$$

$$\Pi_i = L^{-3/2} \sum_k e^{2\pi i k r / L} \sqrt{\frac{\pi k}{Lc}} [-ie_i^{k1} (A_{k1} - A_{k-1}) - ie_i^{k2} (A_{k2} - A_{k-2}) + e_i^{k3} p_{k3} \sqrt{2}]. \quad (29)$$

Здесь e^{k1} и e^{k2} — единичные векторы, перпендикулярные k ; $e^{k3} \parallel k$. Далее, $e^{k1} = e^{-k1}$, $e^{k2} = e^{-k2}$, но $e^{k3} = -e^{-k3}$. Кроме того, должны выполняться следующие перестановочные соотношения:

$$[A_{k\lambda}, A_{k-\lambda}] = 0, \quad [A_{k\lambda}, A_{-k\lambda}] = 0, \quad [A_{k\lambda}, A_{-k-\lambda}] = \hbar \quad (\lambda = 1, 2); \quad (30)$$

$$[p_{k3}, q_{-k3}] = -i\hbar. \quad (30a)$$

Эти соотношения, а также условия вещественности Φ и Π , откуда следует эрмитовость их операторов, выполняются, если записать $A_{k\lambda}$ в виде

$$A_{k\lambda} = \sqrt{\hbar} e^{-i\theta_{k\lambda}/\hbar} N_{k\lambda}^{1/2}, \quad A_{-k-\lambda} = \sqrt{\hbar} N_{k\lambda}^{1/2} e^{i\theta_{k\lambda}/\hbar}. \quad (31)$$

Для продольной части целесообразно применить другой прием. В теории существует еще дополнительное условие, которое в наших переменных записывается так:

$$\left(p_{k3} + \frac{ie}{\sqrt{8\pi^3 c k^3}} e^{-2\pi i k Q / L} \right) \varphi(N_{k\lambda}, p_{k3}, Q) = 0. \quad (32)$$

Функционалы, удовлетворяющие этому дополнительному условию, образуют подсистему, никак не комбинирующуюся с осталь-

ными функционалами. Кроме того, для всех q -чисел физический смысл имеют только те матричные элементы, которые связывают между собой пары состояний, совместимых с дополнительным условием.

Введем вместо (32) условие

$$\left(B_{k_3} + \frac{ie}{\sqrt{8\pi^3 c k^3}} e^{-2\pi i k Q/L} \right) \varphi = 0, \quad B_{k_3} = p_{k_3} + iq_{-k_3}, \quad (32a)$$

в соответствии с чем заменим в гамильтоновой функции p_{k_3} на B_{k_3} . Хотя мы получим таким путем другие функционалы, однако соотношения между всеми градиентно-инвариантными величинами останутся неизменными, поскольку для выделяемой с помощью (32a) подсистемы функционалов все матричные элементы от q_{k_3} исчезают. В этом легко убедиться, написав (32a) для $-k$ и перейдя в обеих частях к комплексно сопряженным величинам. Такая возможность основана на том, что вещественность продольной части напряженностей полей не представляет собой нового условия, а вытекает непосредственно из $\text{div } \mathbf{E} = \rho$. Для величин B_{k_3} справедливы перестановочные соотношения, аналогичные (30), поэтому мы можем положить

$$B_{k_3} = -i \sqrt{\hbar} e^{-iQk_3/\hbar} N_{k_3}^{1/2}. \quad (33)$$

Кроме того, в члене в гамильтониане, содержащем $B_{k_3} B_{-k_3}$, целесообразно выразить один из сомножителей с помощью (32a). Окончательно мы приходим к уравнению, заменяющему соответствующее ему выражение (69) в [2],

$$\begin{aligned} & [(-E + \sum N_{k\lambda} \hbar \omega_{k\lambda}) \delta_{\rho\sigma} - ikc (\alpha_{\rho\sigma} \text{grad}) + mc^2 \alpha_{\rho\sigma}] \varphi_{\sigma} \{N_{k\lambda}, Q\} - \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{\pi c k^3}} \omega_k (N_{k_3} + 1)^{1/2} e^{2\pi i k Q/L} \varphi_{\rho} (\dots, N_{k_3} + 1, \dots) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda=1,2} e \alpha_{\rho\sigma} \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \frac{1}{L} \mathbf{e}_{k\lambda} \times \\ & \times [N_{k\lambda}^{1/2} e^{-2\pi i k Q/L} \varphi_{\sigma} (\dots, N_{k\lambda} - 1, \dots, Q) + \\ & + (N_{k\lambda} + 1)^{1/2} e^{2\pi i k Q/L} \varphi_{\sigma} (\dots, N_{k\lambda} + 1, \dots, Q)] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k e \alpha_{\rho\sigma} \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \frac{1}{L} \mathbf{e}_{k_3} \times \\ & \times e^{-2\pi i k Q/L} N_{k_3}^{1/2} \varphi_{\sigma} (\dots, N_{k_3} - 1, \dots, Q) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

с дополнительным условием

$$\sqrt{\hbar}(N_{k\lambda} + 1)^{1/2} \Phi(N_{k\lambda} + 1, \dots, Q) = e^{\frac{e^{-2\pi i k Q/L}}{\sqrt{3\pi^2 c \hbar^3}}} \Phi(N_{k\lambda}, \dots, Q). \quad (34a)$$

Образую теперь по известному способу (ср. [3]) функции

$$F_p^0 = \Phi_p(0, 0, \dots, 0, Q),$$

$$F_p^1(q, Q) = \sqrt{4\pi} i c L^{-3/2} \sum_{k\lambda} e_{k\lambda} \sqrt{\frac{k\hbar}{Lc}} e^{2\pi i k q/L} \Phi_p(0, \dots, 1_{k\lambda}, \dots, Q),$$

$$F_p^2(q, q', Q) = -4\pi c^2 L^{-3} \sum_{\substack{k k' \\ \lambda \lambda'}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k k'} \frac{\hbar}{Lc} \times \\ \times e_{k\lambda} e_{k'\lambda'} e^{2\pi i (kq + k'q')/L} \Phi_p(0, \dots, 1_{k\lambda}, \dots, 1_{k'\lambda'}, \dots) + \\ + \sum_{k\lambda} k \frac{\hbar}{Lc} e_{k\lambda} e_{k\lambda} e^{2\pi i k(q+q')/L} \Phi_p(0, \dots, 2_{k\lambda}, \dots)$$

и т. д.

Рассмотрим (34) для случая, когда все $N = 0$; встречающиеся в этом уравнении функции $\Phi_p(0, \dots, 1, 0, \dots, Q)$ выразим через F^1 . Таким способом мы получим (25) для $N = 0$. Точно так же придем мы и к (25) для $N = 1$, положив в (34) все $N = 0$, кроме одного определенного $k\lambda$, для которого $N_{k\lambda} = 1$, затем умножив (34) на

$$i \sqrt{4\pi} c L^{-3/2} \sqrt{\frac{k\hbar}{Lc}} e_{k\lambda} e^{2\pi i k q/L}$$

и просуммировав по всем k и λ .

Далее подобным же образом можно убедиться, что (34a) идентично (25a) и что условие нормировки

$$\sum_{N_1} \sum_{N_2} \dots \sum_{N_{k\lambda}} \int \Phi_p\{N_{k\lambda}, Q\} \Phi_p^*\{N_{k\lambda}, Q\} dW = 1$$

сводится к (16).

Этим доказана тождественность обеих систем уравнений.

§ 5. Операторы импульса и полей

Естественно ожидать, что в нашей теории оператор суммарного импульса системы дается выражением

$$-i\hbar \sum_n \text{grad}_n, \quad (35)$$

где суммирование следует распространить на все частицы (материю и световые кванты). Уже сразу видно, что (35) действительно является интегралом движения, поскольку (25) в явном виде содержит только разности координат. Можно также убедиться, что (35) представляет собой единственную величину, которую имеет смысл рассматривать для этой цели.

Интересно также построить оператор напряженности электрического и магнитного полей в некоторой точке \mathbf{r} . Для этого заметим, что для таких операторов уравнения Максвелла должны выполняться как соотношения между q -числами. В частности, это справедливо для уравнения $\text{div } \mathbf{E} = \rho$, откуда видно, что продольная часть напряженности электрического поля представляется оператором

$$E_{\text{long}}(\mathbf{r}) F^N(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}) = F_{\text{long}}^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{r}, \mathbf{Q}).$$

Можно было бы думать, что и в общем случае оператор поля переводит

$$F^N \rightarrow F^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{r}, \mathbf{Q}). \quad (36)$$

Последнее, однако, неверно потому, что, хотя продольная часть (36) в силу дополнительного условия (25а) и является эрмитовой, его поперечная часть отнюдь не такова. Поэтому поперечную часть (36) необходимо сначала эрмитизировать, что приводит к оператору ⁴

$$E_l(\mathbf{r}) F_{m\rho}^N(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \left\{ F_{m_1 \dots m_N l \rho}^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{r}, \mathbf{Q}) + \right. \\ \left. + \frac{\text{grad}_{N+1} \text{div}_{N+1}}{\Delta_{N+1}} F_{m_1 \dots m_N l \rho}^{N+1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{r}, \mathbf{Q}) + \right.$$

⁴ Вследствие обсуждавшихся в § 4 причин продольная часть операторов поля определена неоднозначно. Можно было бы ввести операторы, которые были бы тождественно эрмитовыми; однако в этом случае уравнения Максвелла удовлетворялись бы только в силу дополнительных условий.

$$+ i\hbar \sum_{\nu} \left[\sqrt{\Delta_{\nu}} \delta_{m_{\nu} l} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_{\nu}}} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial q_{m_{\nu}}} \right] + \\ + \delta(\mathbf{q}_{\nu} - \mathbf{r}) F_{m_1 \dots m_{\nu-1} m_{\nu+1} \dots m_N}^{N-1}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{\nu-1}, \mathbf{q}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{Q}). \quad (37)$$

Можно проверить, что (37) действительно удовлетворяет уравнениям Максвелла и что при помощи определенных преобразований операторы Гейзенберга и Паули сводятся к (37).

Аналогичным способом можно определить и оператор напряженности магнитного поля, если заметить, что наша функция F в силу (5) является одновременно представителем электрического и магнитного полей, и провести эрмитизацию. Разумеется, для этих операторов справедливы те же перестановочные соотношения, что и у Гейзенберга и Паули.

Авторы глубоко благодарны проф. Паули за многочисленные критические замечания.

*Физический институт
Федеральной высшей технической школы,
Цюрих*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Heisenberg, W. Pauli. Zs. Phys., 56, 1, 1929.
- [2] W. Heisenberg, W. Pauli. Zs. Phys. 59, 168, 1930.
- [3] P. A. M. Dirac. Proc., Roy. Soc., A114, 243, 1927.
- [4] P. Jordan. Zs. Phys., 45, 766, 1927.
- [5] O. Klein, P. Jordan. Zs. Phys., 45, 751, 1927.
- [6] P. Jordan, E. Wigner. Zs. Phys., 47, 631, 1928.
- [7] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., A113, 621, 1927.

Показано, что в квантовой теории уже свободные электроны обладают (помимо спинового парамагнетизма) отличным от нуля орбитальным диамагнетизмом, связанным с частичной финитностью траекторий электронов в магнитном поле. Обсуждаются некоторые дальнейшие возможные следствия этой финитности.

§ 1. До сих пор более или менее молчаливо предполагалось, что магнитные свойства электронов, если отвлечься от их спина, являются исключительно результатом связи электронов в атомах. Для свободных электронов сохранялось в силе классическое утверждение, что эффект орбитального движения равен нулю. В качестве обоснования этого ссылались на то, что фермиевский интеграл, как и больцмановский, не зависит от магнитного поля. При этом, однако, не принимались во внимание квантовые эффекты. При наличии магнитного поля движение электронов в плоскости, перпендикулярной полю, будет финитным. Это с необходимостью приводит к частичной (соответствующей движению в упомянутой плоскости) дискретности собственных значений системы, что, в свою очередь, как будет показано в дальнейшем, является источником отличного от нуля орбитального магнетизма.

Гамильтонова функция свободного электрона в магнитном поле, как известно, записывается в виде

$$E = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}, \quad (1)$$

где

$$v_1 = \frac{1}{m} \left(p_1 - \frac{eH}{2c} y \right), \quad v_2 = \frac{1}{m} \left(p_2 + \frac{eH}{2c} x \right), \quad v_3 = \frac{1}{m} p_3 \quad (2)$$

представляют собой скорости системы (H — абсолютная величина магнитного поля, которое направлено по оси z). Движение в направлении поля не зависит ни от поля, ни от движения по другим направлениям. Его можно исключить, просто положив p_3 равным константе, что соответствует предингероуской функции

$$\psi(x, y, z) = f(x, y) e^{\frac{i}{\hbar} p_3 z}. \quad (3)$$

Тогда уровни энергии системы представляются в виде суммы двух независимых членов. Вместо того, чтобы решать уравнение Шредингера для движения в плоскости xy , для нахождения уровней энергии можно применить искусственный прием. Установив перестановочные соотношения между компонентами скорости v_1 и v_2 . Из (2) непосредственно получается

$$[v_1 v_2] = v_1 v_2 - v_2 v_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{eH}{cm^2}, \quad (4)$$

поскольку, как известно,

$$[xy] = [p_1 p_2] = 0, \quad [p_1 x] = [p_2 y] = \hbar/i.$$

Постоянство правой части (4) напоминает обычные перестановочные соотношения между p и q . Чтобы перейти к последним, введем на время координаты P и Q посредством равенств

$$v_1 = \frac{P}{\sqrt{m}}, \quad v_2 = \frac{eH}{cm\sqrt{m}} Q. \quad (5)$$

Перестановочное соотношение (4) перейдет тогда в обычное $[PQ] = \hbar/i$. Что же касается энергии, то она запишется в виде

$$E = \frac{P^2 + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2 Q^2}{2}. \quad (6)$$

Но (6) есть не что иное, как гамильтонова функция линейного осциллятора с массой $m = 1$ и частотой $\omega = eH/mc$. Собственные значения энергии такой системы, как известно, равны

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{e\hbar}{mc} H, \quad (7)$$

где n может принимать все положительные целочисленные значения. Вместе с движением по оси z это дает для собственных зна-

чений энергии поступательного движения электрона

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar e}{mc} H + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (8)$$

Так же просто можно определить и собственные функции. Для этой цели исключим из операторов скорости (а тем самым и из оператора энергии) одну из координат, например x , положив

$$\psi = e^{-\frac{ieH}{2\hbar c}xy} \chi. \quad (9)$$

Это дает

$$\begin{aligned} m v_1 \psi &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{eH}{2c} y \psi = e^{-\frac{ieH}{2\hbar c}xy} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{eH}{c} y \chi \right), \\ m v_2 \psi &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{eH}{2c} x \psi = e^{-\frac{ieH}{2\hbar c}xy} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с этим уравнение Шредингера запишется в виде

$$\left\{ \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{eH}{c} y \right)^2 - 2mE \right\} \chi = 0. \quad (11)$$

Это уравнение не содержит x явно; поэтому его решения могут быть записаны в экспоненциальной форме

$$\chi = e^{\frac{i}{\hbar} \sigma x} \varphi(y), \quad (12)$$

где σ — постоянная, а φ не зависит больше от x . Подстановка (12) в (11) дает непосредственно уравнение осциллятора

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{m}{2} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 \left(y - \frac{c}{eH} \sigma \right)^2 \right] \varphi = 0, \quad (13)$$

чего, конечно, и следовало ожидать из предыдущего. «Точка покоя» этого осциллятора находится при $y = \eta = c\sigma/eH$. Отсюда мы, наконец, получаем полную собственную функцию системы

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} (p_z x + \sigma x - \frac{eH}{2c} xy)} \varphi_n \left[\sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \left(y - \frac{c}{eH} \sigma \right) \right], \quad (14)$$

где через φ_n обозначена собственная функция уравнения

$$\frac{d^2 \varphi_n}{du^2} + (2n + 1 - u^2) \varphi_n = 0. \quad (15)$$

Величина σ не входит в выражение для энергии. И так как значения, которые она может принимать, произвольны, то наша задача бесконечно-кратно вырождена. Чтобы определить плотность собственных значений, мы, как обычно, заменим бесконечное пространство конечным объемом с линейными размерами A , B и C в направлениях x , y и z . Для направления z число возможных значений p_z в интервале Δp , как известно, равно

$$R_{\Delta p} = \frac{C}{2\pi\hbar} \Delta p. \quad (16)$$

Аналогично получим для направления x

$$R_{\Delta\alpha} = \frac{A}{2\pi\hbar} \Delta\sigma. \quad (17)$$

Для направления y мы должны потребовать, чтобы траектория всегда проходила на достаточном удалении от стенок ящика. При этом благодаря быстрому спадающему φ_n с расстоянием нет необходимости в учете влияния « y »-стенок. Поскольку число сталкивающихся со стенкой траекторий при достаточных размерах объема можно очевидным образом считать малым, то нашему требованию удовлетворяют практически все существующие траектории. Из-за больших размеров ящика можно пренебречь также и радиусом траектории и писать просто

$$0 < \frac{c}{eH} \sigma < B$$

или

$$0 < \sigma < \frac{eB}{c} H. \quad (18)$$

Если мы хотим теперь получить полное число собственных состояний, соответствующих данному невырожденному квантовому числу n , то нужно подставить $\Delta\sigma = \frac{eB}{c} H$ в (17). Это дает

$$R_n = \frac{eH}{2\pi\hbar c} AB = \frac{eH}{2\pi\hbar c} S,$$

где S — поверхность грани ящика. Собирая $R_{\Delta p}$ и R_n вместе, находим

$$R_{\Delta p, n} = R_{\Delta p} R_n = \frac{eH}{4\pi^2\hbar^2 c} V \Delta p; \quad (19)$$

эта величина, как и следовало ожидать, пропорциональна объему. Легко проверить, что в пределе $H \rightarrow 0$ (19) переходит в обычное распределение собственных значений для свободного движения.

Если учесть спин, то для энергии будем иметь

$$E' = E \pm \frac{e\hbar}{2mc} H, \quad (20)$$

или

$$E = \frac{e\hbar H}{mc} n + \frac{p_3^2}{2m}, \quad (21)$$

причем каждому $n > 0$ отвечает двойное вырождение

$$R_{n, \Delta p} = \frac{eH}{2\pi^2\hbar^2c} V \Delta p, \quad (22a)$$

а при $n = 0$

$$R_{0, \Delta p} = \frac{eH}{4\pi^2\hbar^2c} V \Delta p. \quad (22b)$$

§ 2. Чтобы получить магнитные свойства тела, достаточно, как обычно, вычислить сумму

$$\Omega = -kT \sum \ln \left(1 + e^{\frac{\omega - E}{kT}} \right), \quad (23)$$

взятую по всем значениям энергии. Здесь ω обозначает так называемый химический потенциал. Число частиц N связано с Ω соотношением

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}, \quad (24)$$

а магнитный момент

$$M = -\frac{\partial \Omega}{\partial H}. \quad (25)$$

В нашем случае имеются один непрерывный и один дискретный параметры, так что сумму (23) можно представить как сумму интегралов. Для более ясного разделения различных эффектов мы начнем с выражения (8) для энергии орбитального движения и будем учитывать спин только при подсчете числа состояний. Положим

$$\frac{e\hbar}{mc} = \mu, \quad (26)$$

тогда

$$\Omega = -kT \sum_{n=0}^{\infty} \int \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\omega - \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu H}{kT} - \frac{p_3^2}{2mkT} \right) \right] \times \\ \times \frac{eH}{2\pi^2\hbar^2c} V dp_3. \quad (27)$$

Обозначим далее для краткости

$$-kT \int \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\omega}{kT} - \frac{p_3^2}{2mkT} \right) \right] \frac{m}{2\pi^2\hbar} dp_3 = f(\omega), \quad (28)$$

тогда Ω примет вид

$$\Omega = \mu H \sum_{n=0}^{\infty} f \left[\omega - \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu H \right]. \quad (29)$$

Эту сумму можно вычислить, воспользовавшись известной формулой суммирования

$$\sum_a^b f \left(x + \frac{1}{2} \right) = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{24} f'(x) \Big|_a^b + \dots \quad (30)$$

Для ее применимости в общем случае необходимо, чтобы было

$$\frac{f_{x+1} - f_x}{f_x} \ll 1. \quad (31)$$

В нашем случае этому, как легко видеть, соответствует

$$\mu H \ll kT. \quad (32)$$

Условие (32) перестает выполняться при очень низких температурах и в сильных полях. В этом последнем случае могла бы возникнуть сложная нелинейная зависимость магнитного момента от поля, которая к тому же имела бы сильную периодичность по полю. Однако именно благодаря периодичности наблюдение нелинейных явлений вряд ли возможно экспериментально, поскольку из-за неоднородности реальных полей всегда будет происходить усреднение. Если усреднить ряд (29) по некоторому интервалу ΔH , то неравенство (31) опять начнет выполняться при условии, что изменение аргумента в «опасной» области вблизи $\omega - \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu H$ будет существенно больше, чем разность двух следующих друг за другом аргументов, т. е.

$$n\mu\Delta H \gg \mu H, \quad \omega \frac{\Delta H}{H} \gg \mu H,$$

откуда

$$\frac{\Delta H}{H} \gg \frac{\mu H}{\omega}. \quad (33)$$

Даже при наиболее сильных, достижимых в настоящее время

полях ($H = 3 \cdot 10^5$ гс) правая часть при $\omega = 3$ эв составляет только 0,1%.

Применяя теперь формулу суммирования (30) к конкретному ряду (29), получим

$$\begin{aligned} \Omega &= \mu H \int_0^{\infty} f(\omega - n\mu H) dn + \frac{1}{24} \mu^2 H^2 \frac{\partial f(\omega - n\mu H)}{\partial \omega} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{\mu^2 H^2}{24} \frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega) \end{aligned} \quad (34)$$

[$f(\infty) = 0$]. Первый член в (34) не зависит от магнитного поля. Он представляет собой значение суммы в отсутствие поля, так что мы можем написать вместо (34)

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{\mu^2 H^2}{24} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \omega^2}.$$

Отсюда следует

$$M = - \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{\mu^2}{12} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \omega^2} H. \quad (35)$$

Если теперь положить

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = -N, \quad \omega = \frac{\partial F}{\partial N},$$

где $F = \Omega - \omega \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}$ — свободная энергия системы, то (35) перейдет в

$$M = - \frac{\mu^2 H}{12} \frac{\partial \omega}{\partial N} = - \frac{\mu^2 H}{12} \frac{\partial^2 F}{\partial N^2}. \quad (36)$$

Таким образом, мы действительно получили диамагнетизм, равный в точности одной трети паулиевского спинового парамагнетизма [1], для которого, как известно,

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_0 \left(\omega + \frac{\mu H}{2} \right) + \frac{1}{2} \Omega_0 \left(\omega - \frac{\mu H}{2} \right) = \Omega_0 + \frac{\mu^2 H^2}{8} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \omega^2} + \dots \quad (37)$$

В результате свободные электроны все же парамагнитны.

Когда электроны находятся в периодическом поле решетки, их движение, как известно [2], можно в определенном смысле рассматривать как свободное. Поэтому характер действия магнитного поля останется в принципе неизменным, хотя, разумеется, проведенные выше вычисления уже не будут применимы количественно. В частности, изменится соотношение между пара-

диамагнетизмом; вполне возможно, что в некоторых случаях последний может превзойти первый по величине, и мы получим в результате диамагнитное вещество, подобное висмуту. Последнее, однако, возможно лишь благодаря довольно сильному влиянию решетки, так что количественная теория явления вряд ли может быть построена. Другое проявление взаимодействия состоит в том, что диамагнетизм потеряет свою симметрию и станет различным для различных направлений. Это свойство отличает рассмотренный тип диамагнетизма как от обычного диамагнетизма атомов, так и от по необходимости симметричного спинового парамагнетизма.

Аналогичное явление может иметь место также и в непроводящих веществах, а именно в парамагнетиках, которые тоже имеют непрерывный спектр собственных значений. И здесь мы получим дискретные собственные значения в магнитном поле, а следовательно, диамагнетизм. Этот диамагнетизм всегда мал по сравнению с существующим в веществе парамагнетизмом; однако он отличается от последнего своей асимметрией, и поэтому вполне возможно, что он является основной причиной наблюдаемой асимметрии в парамагнитных кристаллах (другая причина лежит в магнитном или релятивистском взаимодействии спинов). Поэтому было бы интересно оценить порядок величины эффекта. Для этого проще всего воспользоваться соображениями размерности. Прежде всего, восприимчивость пропорциональна $(e/c)^2$, поскольку магнитное поле входит всегда в комбинации eH/c . Масса электрона в этом случае явно в расчете не появляется. Она исполняет свою роль лишь в выражении для обменного интеграла, который характеризует явления обмена в решетке. Кроме перечисленных величин, могут войти лишь только \hbar и плотность N/V . Это однозначно приводит к выражению

$$\chi \sim \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{1/2} J. \quad (38)$$

Обменный интеграл J , как известно, определяет температуру Кюри, причем $k\Theta$ имеет порядок величины J , поэтому мы можем написать вместо (38)

$$\chi \sim \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{1/2} k\Theta. \quad (39)$$

Явления разыгрываются совсем по-другому, если внешние воздействия не периодичны. Такие воздействия, если их нельзя считать малыми, снимают у движения вырождение по направлениям и тем самым лишают поле возможности влиять рассмотренным выше образом. Для этого достаточно, чтобы «длина свободного пробега», соответствующего этим влияниям, была мала по

сравнению с размерами электронных орбит в магнитном поле. Так как размеры орбит в обычных полях составляют по порядку величины десятки доли миллиметра, то эффективными будут уже очень небольшие загрязнения или просто измельчение вещества. Подобные изменения восприимчивости были обнаружены у висмута и еще у целого ряда веществ. В этих случаях было бы очень интересно иметь возможность наблюдать изменение восприимчивости с полем, которое согласно развиваемой теории должно иметь место при переходе от $r_H \gg \lambda$ к $r_H \ll \lambda$ (r_H — радиус круговой орбиты в магнитном поле, λ — длина свободного пробега или размер кристалла).

В заключение я хотел бы высказать предположение, что изученное явление может прояснить причины открытого П. Л. Капицей эффекта линейного изменения сопротивления в магнитном поле. При этом для применимости использованного выше приближения свободных электронов в магнитном поле нет никакой необходимости в том, чтобы r_H было меньше, чем длина свободного пробега, соответствующего решетке (что было бы невозможным при обычных температурах), поскольку взаимодействие с колебаниями решетки сопровождается не только потерей импульса, но также и потерей энергии. Однако в силу предыдущего замечания необходимо, чтобы r_H было существенно меньше, чем длина свободного пробега, соответствующего нарушениям решетки. После кратких вычислений это приводит к соотношению

$$H \gg e c \frac{N}{V} R, \quad (40)$$

где R обозначает удельное остаточное сопротивление рассматриваемого кристалла (в электростатических единицах). Если соотношение (40) не выполнено, рассмотренный метод неприменим и можно убедиться, что любой эффект, связанный с полем, должен быть обязательно квадратичным. Поле (40) находится в хорошем согласии с критическим полем в опытах П. Л. Капицы, что можно рассматривать как подтверждение теории. Построить количественную теорию мне пока не удалось.

Я хочу здесь сердечно поблагодарить П. Л. Капицу за обсуждение результатов опытов и сообщение некоторых еще не опубликованных данных.

*Кавендишская лаборатория,
Кембридж*

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] W. P a u l i. Zs. Phys., 41, 81, 1927.
[2] F. B l o c h. Zs. Phys., 52, 555, 1928.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИНЦИПА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА РЕЛЯТИВИСТСКУЮ КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ

Совместно с Р. ПАЙЕРЛСОМ

Zs. Phys., 69, 56, 1931

Путем рассмотрения различных способов измерения показано, что все фигурирующие в волновой механике физические величины в релятивистской области оказываются уже неопределимыми. С этим связана известная несостоятельность квантовомеханических методов в этой области.

1. Введение

Применение методов волновой механики к задачам, в которых скорость света уже нельзя считать бесконечной, как известно, приводит к бессмысленным результатам. Во-первых, в релятивистском уравнении Дирака наряду с обычными появляются состояния с отрицательной массой [1]. Эта трудность связана с тем, что связь между энергией и импульсом в релятивистской теории является квадратичной, и поэтому при заданном импульсе энергия может принимать два значения. В противоположность классической ($\hbar = 0$) релятивистской теории, в которой непрерывное изменение всех величин не может повести к переходам между обоими типами состояний, запретить эти переходы в квантовой теории разумным образом невозможно. Во-вторых, обратное действие заряженной частицы самой на себя становится безнадежно бесконечным [2, 3].

Хотя бесконечная энергия нулевых колебаний поля излучения [4], появляющаяся при квантовании, может быть исключена путем введения подходящих переменных [5], однако ее наличие проявляется еще и в том, что матричные элементы плотности энергии обращаются в бесконечность. Это обстоятельство теснейшим образом связано с упомянутой выше трудностью с собственной энергией (см. также [6]).

Полная несостоятельность теории позволяет думать, что физические предпосылки для применения методов волновой механики в этой области больше не выполняются. Исследование этого вопроса и представляет собой цель предлагаемой работы¹.

2. Понятие измерения в волновой механике²

Смысл каждой физической теории состоит в том, чтобы на основании результатов одного эксперимента делать заключения о результатах будущих экспериментов. При этом между измерениями и физическими состояниями существует два рода соотношений: во-первых, измерение определяет состояние, в котором система находится *после* его проведения, а во-вторых, при его помощи исследуется состояние, существовавшее *до* измерения. В области классической механики ($\hbar = 0$) это различие теряет смысл, так как состояния системы до и после измерения можно считать идентичными.

В волновой механике дело обстоит существенно по-другому, так как там измерение всегда несет за собой принципиально неопределимые изменения в состоянии системы. Однако описание при помощи волновой механики не было бы вообще возможным и не имело бы смысла, если бы мы не могли высказать об измерении никаких иных предположений. Для этого нужно воспользоваться еще одним физическим свойством измерений, которое обычно формулируется как повторимость. Это означает, что при непосредственном повторении одного и того же измерения с достоверностью получится тот же самый результат. Однако, как будет строго показано позже, в таком виде это предположение в большинстве случаев физически неправильно; более того, для волновой механики столь решительное предположение вообще не обязательно. По существу важно лишь, чтобы для любой системы существовали *предсказуемые* измерения. Под последним мы понимаем такие измерения, при которых для каждого возможного результата измерения существует состояние системы, в котором измерение дает этот результат с *достоверностью*. Более того, если бы не выполнялось именно это предположение, то состояние, в которое система попадает после измерения, никогда

¹ Соотношения неопределенностей, на которых основаны наши выводы, возникли в основном из дискуссий в Копенгагене. Точка зрения на них проф. Бора будет изложена в его работе, которая в дальнейшем появится в «Nature».

² Этот раздел представляет собой в основном развитие идей, высказанных Н. Бором в его докладе в Кюмо [7].

не могло бы быть описано ψ -функцией. В сказанном можно убедиться следующим образом: состояние системы и прибора вместе можно описать волновой функцией, которая до измерения распадается на произведение $\psi \cdot \varphi_0$. Здесь ψ — пока произвольная волновая функция системы, φ_0 — известная волновая функция прибора. После взаимодействия волновая функция, вообще говоря, произведением больше не будет. Если ее разложить в ряд $\sum \psi_n \varphi_n$ по собственным функциям прибора, то ψ_n будет описывать состояние, в которое система попадает в результате измерения. Вид ψ_n , вообще говоря, зависит от вида ψ . Однако если мы хотим иметь возможность судить о волновой функции системы только на основании наблюдения за прибором, то с точностью до постоянного множителя ψ_n не должна зависеть от ψ , т. е. $\psi_n = a_n u_n$, где u_n нормировано на единицу. Из линейности волнового уравнения следует, что a_n линейно зависит от ψ , а следовательно, может быть записано в виде $\int \psi v_n^* dt$, где v_n — некоторая функция, зависящая от процесса измерения. Тогда $|a_n|^2$ представляет собой вероятность того, что измерение даст n -й результат. Сумма всех таких вероятностей независимо от ψ должна быть равна единице, т. е. $\sum |a_n|^2 = 1$ (если, конечно, ψ нормировано). Тогда выражение

$$\sum a_n a_n^* = \int \sum a_n \cdot v_n \cdot \psi^* dt$$

также обязано всегда равняться единице, если $\int \psi \psi^* dt = 1$, т. е. должно быть

$$\sum a_n v_n = \psi$$

(v_n образуют полную ортогональную систему). Но отсюда следует, что измерение будет предсказуемым, если в качестве ψ специально выбрать одно из v_n ; при этом только одно из u_n отлично от нуля. Повторимость измерения означала бы, что v_n совпадает с u_n ; однако это в общем случае не выполняется³.

³ Легко доказать, что при измерении, происходящем за короткий промежуток времени, u_n может совпадать с v_n только тогда, когда соответствующий оператор коммутирует с энергией взаимодействия системы и прибора. В волновой механике (т. е. в пренебрежении релятивизмом) эта энергия взаимодействия всегда есть функция координат. Таким образом, координата является единственной величиной, для которой возможны повторимые измерения. Измерения координаты фактически всегда обладают этим свойством. Можно видеть также, что в общем случае u_n не обязаны быть даже ортогональными, т. е. в общем случае измерение не «приводит оператор к диагональному виду». Это физическое обстоятельство при изложении теории преобразований обычно оставалось незамеченным.

Если бы волновая функция не могла быть определена при помощи какого-нибудь измерения, то она не имела бы никакого физического смысла. Употребление волновой функции было бы тогда ничуть не более оправдано, чем употребление понятия траектории в квантовомеханической области. Поэтому существование предсказуемых измерений является абсолютно необходимой предпосылкой при построении квантовой механики.

Тот факт, что предположение о повторимости не выполняется в общем случае, виден особенно ясно, если принять во внимание время, необходимое для измерения. Это время ограничено соотношением $\Delta E \Delta t > \hbar$; последнее хотя и неоднократно выводилось, однако его правильная интерпретация была дана только Бором [7]. Это соотношение очевидным образом *не означает*, что энергия не может быть точно известна в какой-нибудь определенный момент времени (в противном случае понятие энергии вообще не имело бы смысла), оно не означает также, что энергия не может быть измерена с произвольной точностью в течение какого-либо короткого промежутка времени. Более того, следует еще принять во внимание изменения, которые несет за собой сам измерительный процесс в случае предсказуемого измерения, т. е. различие между результатом измерения (v_n) и состоянием после измерения (u_n). Тогда рассматриваемое соотношение означает, что это различие несет за собой неопределенность в энергии порядка $\hbar/\Delta t$, поэтому за время Δt может быть проведено только такое измерение, при котором неопределенность энергии в этих *обоих* состояниях будет не меньше, чем $\hbar/\Delta t$.

Последнее утверждение следует из рассмотрения развития процесса взаимодействия во времени. Метод вариации постоянных показывает, что за короткий промежуток времени переходы совершаются отнюдь не только между состояниями, для которых выполняется условие $E + \varepsilon = E' + \varepsilon'$ (E, E' — энергии системы до и после перехода; $\varepsilon, \varepsilon'$ — соответствующие значения для прибора). Эти состояния начинают преобладать только по прошествии длительного времени, когда благодаря резонансу соответствующие вероятности переходов сильно вырастут со временем. Фактически по истечении времени Δt играют роль лишь те переходы, для которых $|E + \varepsilon - E' - \varepsilon'| \sim \hbar/\Delta t$. Это обстоятельство, разумеется, никоим образом не противоречит строгой применимости закона сохранения энергии в волновой механике; неопределенной (на упомянутую величину) оказывается только энергия взаимодействия между системой и прибором. В наиболее благоприятном случае, когда ε и ε' известны точно, должна сохраниться неопределенность $\Delta(E - E') > \hbar/\Delta t$.

Из этого соотношения вытекают важные следствия для измерения импульса. Любое измерение импульса заключается в

том, что тело приводят в столкновение с каким-либо другим телом. При измерении какой-нибудь компоненты импульса (что проще всего осуществить при помощи столкновения с плоским зеркалом) строго выполняется закон сохранения импульса; напротив, закон сохранения энергии благодаря неизвестной энергии взаимодействия справедлив лишь с точностью до $\hbar/\Delta t$. Таким образом, для определения импульса частицы P мы имеем уравнения

$$p + P - p' - P' = 0,$$

$$|\varepsilon + E - \varepsilon' - E'| \sim \frac{\hbar}{\Delta t};$$

$p, p', \varepsilon, \varepsilon'$, т. е. движение прибора до и после столкновения, можно считать известными. Отсюда следует $\Delta P = \Delta P'$ и с учетом $\Delta E = v\Delta P$

$$(v - v') \Delta P > \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (1)$$

Таким образом, с каждым измерением импульса неизбежно связано *определенное* изменение его величины (помимо неопределенного изменения, ограничиваемого точностью измерений)⁴. Это обстоятельство было впервые выяснено Бором [7]. Неповторимость измерения импульса, проведенного за короткий промежуток времени, выступает здесь особенно ясно. Измерения же импульса, требующие длительного времени, вообще имеют смысл только для свободных частиц.

3. Измерение импульса в релятивистском случае

Воспользуемся теперь релятивизмом, т. е. конечностью скорости распространения сигналов. Хотя в настоящее время и не существует релятивистской квантовой теории, свободной от противоречий, ясно, однако, что пределы точности измерений, налагаемые общими принципами волновой механики, наверняка не могут быть превзойдены и в релятивистской области.

⁴ Здесь играет существенную роль то, что в природе не могут реализовать произвольные функции Гамильтона; реализуются лишь только такие, у которых, как уже упоминалось выше, функция взаимодействия является функцией координат и поэтому не коммутирует с импульсом. Если можно было бы выбрать гамильтонову функцию произвольным образом, то стало бы возможным точное измерение импульса за сколь угодно короткое время без изменения скорости. Это тривиальным образом видно из того, что в этом случае координата и импульс входят совершенно равноправно.

Релятивизм существенно повышает важность выведенного выше соотношения для измерения импульса. В нерелятивистской теории определенное изменение скорости можно было сделать сколь угодно большим, а тем самым измерить импульс за короткое время с любой степенью точности. Однако если принять во внимание, что скорость не может превышать c , то максимальное значение $v' - v$ по порядку величины равно c , и из (1) следует

$$\Delta P \Delta t > \frac{\hbar}{c}. \quad (2)$$

Неравенство (2) особенно легко выводится для состояния *после* измерения. А именно, если предположить, что перед измерением положение частицы было определенным, то по прошествии времени Δt мы все еще будем благодаря конечности скорости знать положение с точностью $c \Delta t$. Если бы по истечении этого времени импульс был определен точнее, чем это следует из (2), то мы пришли бы к противоречию с $\Delta P \Delta q > \hbar$.

Вследствие (2) понятие импульса имеет точный смысл только для больших промежутков времени. Тем самым введение понятия импульса становится полностью бессмысленным в тех случаях, когда импульс заметно меняется уже за такие времена.

При измерении импульса заряженного тела к рассмотренной выше неопределенности добавляется еще один мешающий фактор, связанный с тем, что тело при по необходимости конечном изменении скорости будет излучать. Мы ограничимся случаем, когда скорость тела перед измерением достаточно мала по сравнению с c . В этом случае оказывается выгодным провести измерение таким образом, чтобы и после измерения скорость была еще существенно меньше, чем c . Если бы скорость приближалась к самой величине c , то, выиграв лишь очень мало в соотношении (1), мы потеряли бы очень много в точности из-за излучения. В сделанных предположениях можно воспользоваться для расчета нерелятивистской формулой для радиационного затухания. Тогда излученная энергия равна

$$\frac{e^2}{c^3} \int \dot{v}^2 dt$$

(e — заряд тела). Излучение будет, очевидно, иметь наименьшее значение при равномерном ускорении, т. е. при $\dot{v} = (v' - v)/\Delta t$, так что излученная энергия по меньшей мере равна

$$\frac{e^2}{c^3} \frac{(v' - v)^2}{\Delta t}.$$

Это неопределенное изменение энергии следует учесть в энергетическом балансе, откуда возникает новая неточность для импульса:

$$(v' - v) \Delta P > \frac{e^2 (v' - v)^2}{c^3 \Delta t}$$

или

$$\Delta P \Delta t > \frac{e^2}{c^3} (v' - v). \quad (3)$$

Для электронов это неравенство не дает ничего нового, так как даже в наименее благоприятном случае, когда $v - v' \sim c$, из него следует только, что $\Delta P \Delta t > e^2/c^2$; из-за $e^2 < \hbar c$ последнее неравенство слабее, чем (2). Однако это соотношение играет роль для макроскопических тел. Умножая его на (1), получим

$$\Delta P \Delta t > \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}. \quad (4)$$

В таком виде это соотношение будет использовано в дальнейшем. Неравенство, конечно, справедливо вне зависимости от метода, который используется для измерения и, в частности, также тогда, когда измерение производится как раз при помощи заряда тела, как при комптон-эффекте. И в этом случае, кроме комптоновского излучения, которое используется для измерения, существует еще дополнительное, неконтролируемое излучение, соответствующее обсуждавшемуся выше излучению, которое возникает при учете высших приближений в вычислении взаимодействия между излучением и частицей по теории возмущений [8] (при обычном комптон-эффекте на электронах этот эффект из-за малости $e^2/\hbar c$ не играет никакой роли).

4. Измерение поля

Простейший метод измерения электрического поля \mathcal{E} состоит в наблюдении за ускорением заряженного пробного тела. Чтобы избежать возмущающего действия магнитного поля, будем использовать тело с очень большой массой и с очень маленькой скоростью. Пусть импульс тела до измерения известен, а импульс после него будет снова измерен с точностью Δp . Тогда суждение о напряженности поля на основании измерения может быть сделано с точностью

$$e \Delta \mathcal{E} \Delta t > \Delta p. \quad (5)$$

Кроме того, при измерении импульса должно быть выполнено условие (4). Из перемножения (4) и (5) следует

$$\Delta \mathcal{E} > \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \quad (6)$$

Для напряженности магнитного поля легко получить тот же результат

$$\Delta \mathcal{H} > \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}, \quad (6a)$$

если рассмотреть движение магнитной стрелки. При одновременном измерении напряженностей электрического и магнитного полей нужно принять во внимание, кроме обсуждавшихся до сих пор факторов, еще и влияние создаваемого заряженным телом магнитного поля на стрелку и обратное влияние стрелки на тело. Это магнитное поле имеет порядок величины

$$\Delta \mathcal{H} > \frac{e}{(\Delta l)^2} \frac{v'}{c} \quad (7)$$

(Δl — расстояние между пробным телом и стрелкой). Умножая последнее неравенство на (5) и (1), получим ($v = 0$)

$$\Delta \mathcal{E} \Delta \mathcal{H} > \frac{\hbar c}{(c\Delta t)^2} \frac{1}{(\Delta l)^2}. \quad (6б)$$

Это условие отличается от произведения (6) и (6a) тем, что в знаменателе $c\Delta t$ частично заменено на Δl .

Из (6), (6a) и (6б) следует, что при $\Delta t = \infty$ измерение, в частности одновременное измерение \mathcal{E} и \mathcal{H} , может быть сделано сколь угодно точным. Тем самым статические поля могут быть полностью определены в классическом смысле⁵.

Для случая волновых полей (т. е. для полей, удаленных от создающих их тел более чем на $c/v = \lambda$) достаточно использовать (6) и (6a), поскольку из-за связи между пространственным и временным изменениями о поле нельзя узнать ничего нового, если даже при закреплённом Δt сделать протяженность области измерения меньшей, чем $c\Delta t$. Поэтому возмущения при измерениях \mathcal{E} и \mathcal{H} не будут здесь действовать друг на друга, так что если напряженности полей вообще измеримы в рамках (6) и (6a), то они измеримы одновременно. В той степени, в которой напряженности полей могут быть вообще определены, они подчиняются

⁵ Указанием на такое положение вещей и на существенную роль времени вообще мы обязаны проф. Н. Бору.

классической теории. Напротив, в квантовомеханической области напряженности полей вообще не являются измеримыми величинами⁶.

5. Измерения со световыми квантами

Мы покажем теперь, что в случае поля излучения достоверные измерения, т. е. такие измерения, для которых из любого результата опыта можно сделать заключение о состоянии системы, за короткое время вообще невозможны. (При этом мы отвлекаемся от измерений типа измерения координаты с помощью столкновения, когда за время наблюдения вероятность самого измерения не равна единице; в этом случае из того, что измерительное тело отклонилось, можно заключить, что тело, положение которого измеряется, находилось в соответствующем месте; однако из того, что измерительное тело не отклонилось, вообще нельзя сделать никаких выводов.) Время, необходимое для измерения, зависит от состояния системы. Если энергия поля излучения приблизительно известна и равна E , то, как мы покажем, это время превосходит \hbar/E . Так как поле состоит из световых квантов, то наибольшая частота, появляющаяся в разложении поля в ряд Фурье, не может быть больше, чем E/\hbar . Если мы теперь хотим проводить измерения за времена, меньшие \hbar/E , то мы попадаем внутрь одного периода колебаний; тем самым напряженности полей за время измерения можно считать постоянными. Поэтому все кратковременные измерения являются измерениями силы поля и как таковые имеют неопределенность (6). Далее, для того чтобы эффект был вообще наблюдаем, напряженности полей должны существенно превосходить $\frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}$. С другой стороны, наименьшая длина волны, входящая в рассмотрение, равна $\hbar c/E$; поэтому напряженности поля, будучи отличны от нуля в какой-нибудь точке, должны отличаться от нуля в целой области по меньшей мере с той же протяженностью. Следовательно, полная энергия поля имеет по меньшей мере порядок

$$E > \mathcal{E}^2 \left(\frac{\hbar c}{E} \right)^3 > \frac{(\hbar c)^4}{E^3 (c\Delta t)^4},$$

т. е.

$$\Delta t > \frac{\hbar}{E} \quad (8)$$

⁶ Найденная Иорданом и Фоком [9] неточность при измерении поля с помощью электрона превосходит (6). Это доказывает лишь, что электрон не является подходящим средством для измерения поля.

в противоречии со сделанным предположением. Итак, измерения, противоречащие соотношению (8), невозможны.

Этот результат становится особенно естественным в случае, когда поле излучения состоит из одного единственного кванта. Наблюдение светового кванта никоим образом невозможно за времени, лежащие внутри интервала (8); в частности, нельзя хоть с какой-либо точностью определить его положение. При измерении координаты неопределенность момента времени, с которым связана измеряемая координата, превосходит \hbar/E . Если же измерение положения используется для определения состояния (как это обсуждалось в разделе 2), то в таком опыте интересным является положение в момент времени, вплоть до которого существовало изучаемое состояние (т. е. состояние, имевшее энергию порядка E). Поэтому о такого рода величине по результатам измерения положения можно судить в лучшем случае с неопределенностью $\Delta q > \hbar c/E$.

Можно было бы еще надеяться повысить точность, предприняв одновременно с измерением положения также и измерение импульса (разумеется, в пределах, даваемых соотношением $\Delta p \Delta q > \hbar$) и затем определив по данным опыта, как далеко и в каком направлении продвинулся световой квант за время измерения. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что и на этом пути нельзя достичь точности большей, чем $\hbar c/E$. Таким образом, в любом состоянии может иметь смысл лишь указание вероятности того, что световой квант окажется в области с размерами, большими по сравнению с длиной волны. Итак, о координатах светового кванта имеет смысл говорить лишь в рамках геометрической оптики.

Если число световых квантов меняется заметно уже на протяжении одного периода колебаний, то само понятие светового кванта вообще теряет смысл.

6. Измерения с материальными частицами

Перейдем теперь к выводу соответствующих соотношений для материальных частиц (при этом мы будем все время говорить об электронах, хотя рассуждения, разумеется, справедливы для материальных частиц любого сорта). Такие частицы можно лучше всего обнаружить с помощью процесса столкновения, скажем комптон-зффекта. При этом для обнаружения электрона достаточно провести два измерения импульса светового кванта и по изменению импульса убедиться, что между измерениями действительно имело место столкновение. Однако течение такого процесса существенно зависит от того, насколько велик интервал времени между обоими измерениями. За большое время мы полу-

чим эффект Комптона, т. е. импульс светового кванта или не изменится вовсе, или изменится на величину, определяемую начальным импульсом; путем применения очень жесткого света она может быть сделана сколь угодно большой. С другой стороны, за очень короткое время может иметь место произвольное изменение импульса, причем, в то время как закон сохранения импульса должен остаться справедливым, сумма энергий электрона и светового кванта обязана сохраняться лишь с точностью до $\hbar/\Delta t$, как было показано в разделе 2. При этом по тем же причинам, что и при измерениях со световыми квантами, подавляющую вероятность имеют малые изменения импульса. Элементарные вычисления показывают, что изменение характера процесса начинается, когда интервал времени перестает быть большим по сравнению с \hbar/E , где E — приближенное значение энергии электрона до измерения.

Итак, если продолжительность опыта сделать меньше, чем \hbar/E , то импульс светового кванта (а тем самым также и электрона) изменится на произвольную величину. Следовательно, из отсутствия измеримого изменения импульса нельзя еще заключить, что столкновение вообще не имело места. Физически это означает, что измерение импульса светового кванта разрушает начальное состояние электрона. При этом нет возможности добиться того, чтобы электрон был обнаружен с вероятностью 1 уже при первом измерении, ибо если до измерения он находился в объеме с размерами δq , то необходимо время $\delta q/c$, прежде чем можно быть уверенным, что свет достигнет электрона. Поскольку

$$\frac{\delta q}{c} > \frac{\hbar}{c\delta p} > \frac{\hbar}{cp} > \frac{\hbar}{E},$$

то до того, как мы могли бы обнаружить электрон, нам пришлось бы провести много измерений и уже полностью разрушить его состояние, прежде чем мы его найдем. Таким образом, измерения за времена, не большие, чем \hbar/E , бесполезны.

Поставим теперь снова вопрос, насколько точно при помощи этого измерения можно судить о положении электрона в момент времени, вплоть до которого он еще находился в старом состоянии. Для обратного заключения подобного рода можно воспользоваться, разумеется, лишь теми сведениями о скорости, которые совместимы с измерением координаты (а отнюдь не скоростью электрона до измерения). Если измерить положение точно, то мы не получили бы отсюда никаких сведений о скорости, которая, таким образом, осталась бы неопределенной с точностью до c . Обратное суждение о координате поэтому сможет быть сделано лишь с ошибкой $\Delta q > \hbar c/E$. Элементарное рассмотрение показы-

вает, что нельзя достигнуть более высокой точности, если измерять одновременно импульс и координату с какой-либо (совместимой с $\Delta p \Delta q > \hbar$). точностью. Таким образом, величина

$$\Delta q > \frac{\hbar c}{E} \quad (9)$$

представляет собой границу, до которой возможно осмысленное введение понятия координаты электрона. В частности, если скорость электрона не очень близка к c , то эта граница

$$\Delta q > \frac{\hbar}{mc} . \quad (10)$$

Как следует из вывода (10), это соотношение справедливо только для электронов,двигающихся не слишком быстро. Часто встречающееся в литературе утверждение о том, что \hbar/mc является универсальной границей точности для измерения координаты, основано на ошибочных рассуждениях.

При поверхностном рассмотрении можно было бы усомниться в релятивистской инвариантности всех выведенных выше соотношений неопределенности. Разумеется, в действительности не могло возникнуть никакого противоречия с релятивизмом, поскольку последний все время принимался во внимание при выводах. Объяснение заключается в том, что сами эти неравенства ни в коем случае не обязаны преобразовываться релятивистски инвариантным образом, поскольку наимыгоднейшие из возможных измерений какой-либо величины отнюдь не обязаны больше оставаться наимыгоднейшими из возможных, если их рассматривать с движущейся системы отсчета. Поэтому нужно только потребовать, чтобы не была превзойдена граница точности, когда такое измерение рассматривается из движущейся системы. Это требование, разумеется, также выполнено.

В этом отношении следует быть особенно осторожными при измерениях положения. Здесь релятивистски неинвариантной является сама постановка вопроса, выделяющая временную ось, поскольку измеряется координата в момент времени, вплоть до которого существовало невозмущенное состояние.

7. Математическая несостоятельность методов волновой механики

Установленная выше неизмеримость всех величин волновой механики находит свое выражение также и в формализме, который возникает при попытке применить методы волновой механики к релятивистскому случаю.

При этом самой фундаментальной величиной теории как для электронов, так и для световых квантов всегда является импульс. Это связано с тем, что импульс, когда он остается постоянным во времени, может быть определен сколь угодно точно, хотя, впрочем, для его измерения требуется очень долгое время. Это последнее обстоятельство не отражено естественным образом в формализме волновой механики, вследствие чего предсказания теории, касающиеся коротких интервалов времени, становятся бессмысленными.

Напротив, неизмеримость координаты отражена в формализме непосредственно. Для электрона она проявляется в том, что уравнения Дирака допускают физически бессмысленные решения с отрицательной энергией. В действительности в результате измерения может, разумеется, возникнуть только волновая функция, построенная исключительно из состояний с положительной энергией. Однако из этих состояний нельзя построить любой произвольный волновой пакет. Легко убедиться, что в общем случае размеры волнового пакета ограничены снизу величиной \hbar/mc . Существуют, правда, особые волновые пакеты с меньшими размерами (такowymi являются пакеты, центр тяжести которых движется почти со скоростью света⁷), однако соответствующие волновые функции не образуют полной системы и состояние системы до измерения в общем случае не может быть по ним разложено. Это соответствует установленному уже ранее обстоятельству, что хотя иногда может случайно оказаться возможным определение положения в короткий промежуток времени, но нельзя произвести, однако, за то же время достоверного измерения. В случае световых квантов ситуация еще более обостряется, поскольку здесь уже чисто математически нельзя построить выражения для плотности вероятности. Это видно из того, что благодаря поляризационным свойствам волновая функция светового кванта должна быть тензором второго ранга [5]. Напротив, плотность и поток вероятности должны составлять четырехмерный вектор, что невозможно, поскольку они квадратичны по волновой функции. В геометрической оптике существует, конечно, возможность построения волнового пакета, для которого все действия исчезают вне определенной области. Однако эти волновые функции также и здесь не образуют полной системы.

Неизмеримость напряженностей полей выражается в том, что значение оператора напряженностей поля [2, 3, 5] в пустом пространстве (в отсутствие световых квантов) не только никоим образом не равно нулю, но, более того, среднее значение квадрата на-

⁷ Указанием на это обстоятельство мы обязаны проф. О. Клейну.

пряженностей поля будет в этом случае бесконечным. Это связано с тем, что соотношение (6) дает при $\Delta t = 0$ бесконечную неопределенность в напряженностях поля.

8. Заключительные замечания

Как мы видели, для фундаментальных величин волновой механики не существует более предсказуемых измерений (если только эти величины не являются постоянными во времени; при этом, однако, точно предсказуемое измерение требует бесконечно большого времени). Разумеется, нельзя формально доказать, что в природе не существует специальных сложных величин, для которых предсказуемые измерения возможны, однако обсуждение таких предположений представляется излишним. Необходимые предпосылки волновой механики, которые были указаны в разделе 2, в релятивистской области не выполняются, и применение в этой области методов волновой механики находится вне пределов применимости теории. Не следует поэтому удивляться, когда формализм приводит к всевозможным бесконечностям. Напротив, было бы даже еще более удивительно, если бы он имел какое-нибудь сходство с действительностью.

Применимость волновой механики ограничена такими процессами, при которых состояние системы изменяется достаточно медленно. Это, разумеется, всегда выполнено в случаях, когда применимо обычное уравнение Шредингера. Волновое уравнение никогда не имеет смысла только для излучения, поскольку здесь бессмысленно предельное значение $c = \infty$.

В правильной релятивистской квантовой теории, которая пока не существует, не будет, таким образом, ни физических величин, ни измерений в смысле волновой механики. Разумеется, можно привести систему во взаимодействие с каким-либо прибором и спросить, что покажет прибор. Теория будет давать вероятность для результата этого эксперимента. Однако она не может быть истолкована как вероятность какого-либо параметра исследуемой системы, ибо никаким образом нельзя достичь того, чтобы вероятность некоторого определенного результата равнялась единице, а для всех прочих обращалась в нуль. Кроме того, будет принципиально невозможным сделать сколь угодно малой продолжительность любого такого эксперимента.

Эти мысли находят свое подкрепление в том известном факте, что β -спектры радиоактивных ядер непрерывны, хотя равенство времени жизни позволяет верить, что ядра не находятся в различных состояниях. Этот процесс можно было бы рассматривать как предсказуемое измерение, если бы все без исключения β -частицы имели одинаковую энергию.

Этот факт представляет собой непреодолимую трудность для волновой механики потому, что он, как подчеркнул Бор, делает вероятным, что для электронов ядра не выполняется закон сохранения энергии. С другой стороны, закон сохранения энергии неразрывно связан с основными положениями волновой механики. Но в релятивистской квантовой теории понятие энергии не нуждается, как следует из предыдущего, в определении, связанном с механикой. Разумеется, оно в известном смысле может быть определено через полную массу ядра, поскольку ядро в своем движении как целое подчиняется волновой механике. Это, однако, не означает еще никакого предсказуемого измерения величин, связанных с внутренним состоянием ядра.

Если закон сохранения энергии не выполняется, то масса всей системы будет изменяться при радиоактивных процессах. Однако это изменение не может быть полностью прослежено во времени, так как массу нельзя измерить за произвольно короткое время. А именно, если рассмотреть процесс измерения массы тем же способом, что в разделе 3, то для времени, необходимого для измерения, получится

$$\Delta m \Delta t > \frac{\hbar}{c^2}.$$

Сказанное не противоречит дискретности спектров протонов и α -частиц. Эти частицы благодаря своим большим массам (малым скоростям) даже в ядре подчиняются волновой механике подобно тому, как атомные ядра в молекуле в широких пределах могут еще описываться классически, хотя они и находятся в сильном взаимодействии с электронами, для которых классическая механика полностью отказывает.

Один из авторов (Ландау) хотел бы выразить свою благодарность Рокфеллеровскому фонду за возможность работать в Цюрихе и Копенгагене.

*Физический институт
Федеральной высшей технической школы,
Цюрих*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., A117, 610, 1927.
- [2] W. Heisenberg, W. Pauli. Zs. Phys., 56, 1, 1929.
- [3] W. Heisenberg, W. Pauli. Zs. Phys., 59, 168, 1930.
- [4] P. Jordan, W. Pauli. Zs. Phys., 47, 51, 1928.
- [5] L. Landau, R. Peierls. Zs. Phys., 62, 188, 1930 (Собр. трудов, № 3).
- [6] L. Rosenfeld. Zs. Phys., 65, 589, 1930.
- [7] N. Bohr. Naturwiss., 16, 245, 1928.
- [8] W. Pauli. Zs. Phys., 18, 272, 1923.
- [9] P. Jordan, V. Fock. Zs. Phys., 66, 206, 1930.

К ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ
ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ. I

Phys. Zs. Sowjet., 1, 88, 1932

Развита теория «адиабатических» неупругих столкновений. В результате применения этой теории к атомным столкновениям второго рода оказывается, что азимутальное квантовое число всей системы при столкновении изменяется всегда на ± 1 , чем исключаются переходы двух S -состояний в два другие S -состояния. Соответствующее эффективное сечение рассеяния пропорционально $(E - U)^{3/2}/E$, где U — значение энергии в точке пересечения двух термов, в которой всегда происходит переход. Обсуждаются общие свойства рассеяния многоатомных молекул. Далее теоретически исследован процесс возбуждения и расщепления ядра без захвата α -частиц.

§ 1. Столкновения электронов с атомами были подробно исследованы Бете в теоретически наиболее важном случае быстрых электронов. Напротив, удивительным образом задача о столкновениях второго рода до сих пор остается поводом для одних только ошибок. Так, в работе Кальмана и Лондона [1] движение электронов в процессе столкновения рассматривается при заданном движении ядер, что противоречит известным принципам волновой механики и приводит странным образом к исчезновению энергии. Правда, в работе Морзе и Штукельберга удалось избежать в явном виде этой ошибки, но зато авторы рассматривают взаимодействие атомов как возмущение, что имеет еще меньшее отношение к действительности. И только в последнее время несколько раз указывалось [2] на фундаментальную роль точек пересечения энергетических кривых, однако при этом не было построено количественной теории. Причина этих трудностей лежит, по-видимому, в том, что мы здесь имеем дело со специфическим типом «квазиклассических» процессов, при которых сильная периодичность волновой функции делает невозможным непосредственную оценку интеграла возмущений. По-

пытку Г. Бека [3] произвести такую оценку в случае кулонового поля также приходится считать ошибочной, так как он заменяет непрерывное поле бесконечно высоким потенциальным барьером, что не оставляет и следа от правильного порядка величины эффекта. Сделать такую оценку возможной и составляет задачу предлагаемой статьи.

§ 2. Рассмотрим систему, которая кроме «чисто квантовой» части содержит еще «квазиклассическую» часть, т. е. часть, длина волны которой мала по сравнению с размерами системы. Тогда, как известно, собственные функции системы в первом приближении представляют собой произведение собственной функции чисто квантовой части при покоящейся квазиклассической и собственной функции квазиклассической части, находящейся во внешнем поле, определяемом состоянием чисто квантовой системы. В этом первом приближении всякая передача энергии между обеими частями отсутствует, так что квазиклассическая часть движется «адиабатически». Если мы хотим рассчитать вероятность передачи, то нужно перейти к следующему приближению и вычислить интеграл возмущения, который, как известно, дается выражением $\int \psi'^* D \psi dt$, где через D обозначен шредингеровский оператор всей системы (для точного решения было бы, разумеется, $D\psi = 0$). Интегрирование по чисто квантовым переменным производится обычным образом, однако для квазиклассических переменных это теперь невозможно. Соответствующие части ψ являются быстро осциллирующими функциями, что не позволяет даже оценить интеграл обычными способами.

Чтобы тем не менее вычислить этот интеграл, можно использовать эти же самые классические свойства, проведя каноническое преобразование, а именно, введя в качестве переменных интегралы движения квазиклассической части в одном из двух состояний. Такое преобразование, как известно, производится, если из дифференциала функции действия вычесть еще полный дифференциал функции действия, рассматриваемой как функция координат и интеграла движения:

$$dS = \sum p dq - dS_1(I_1, q). \quad (1)$$

Определим теперь зависимость этой функции действия при движении во втором состоянии, т. е. при постоянном I_2 , от интеграла движения в первом состоянии. Интегрируя, получим

$$S = S_2(I_2, q) - S_1(I_1, q). \quad (2)$$

Здесь следует рассматривать I_1 как независимую переменную, I_2 считать постоянной, а q — функцией I_2 и I_1 . Соответствующая ψ -функция, рассматриваемая в зависимости от I_1 , имеет вид

$\psi_2(I_1) = a \exp(iS/\hbar)$. Так как ψ_1 представляет собой δ -функцию от I_1 , то интеграл $\int \psi_2 \eta \psi_1 d\tau$ (η — энергия возмущения) равен $\psi_2(I_1) \eta(I_1)$, где I_1 уже не является переменной, а равно ее значению в первом состоянии. Таким образом, существенную часть этого интеграла образует выражение типа

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} [S_2(I_2, q) - S_1(I_1, q)]\right\}. \quad (3)$$

Как и следовало ожидать, мы получили выражение, симметричное по отношению к обеим системам. Для нахождения зависимости q от I_1 и I_2 нужно исключить импульс из выражений $I_1(q, p)$ и $I_2(q, p)$, или, что то же самое, из уравнений

$$p = f_1(I_1, q) = f_2(I_2, q). \quad (4)$$

Физически это означает: для переходов существенны точки, в которых как q , так и p остаются неизменными. Это утверждение представляет собой здесь нечто большее, чем вывод так называемого правила Франка — Кондона, так как оно справедливо не только для вещественной, но и для комплексной области значений переменных. Именно, если условие (4) не выполняется в вещественной области, то для получения из (3) значения вероятности следует взять то комплексное решение, для которого выражение $i(S_2 - S_1)/\hbar$ имеет наименьшую по абсолютной величине вещественную часть (последнюю, разумеется, всегда следует выбирать отрицательной). Если оба состояния полностью определяются их энергиями, то, очевидно, необходимо выполнение только одного условия

$$E_1 - U_1(q) = E_2 - U_2(q). \quad (5)$$

Поскольку мы имеем здесь дело с безызлучательным переходом, следует положить $E_1 = E_2$, и мы получаем

$$U_1(q) = U_2(q). \quad (6)$$

Существенны только точки пересечения кривых (или в общем случае многомерных поверхностей) потенциальной энергии.

Тем самым о порядке величины интеграла возмущений можно сказать, что он сравнительно велик в случае, когда кривые U_1 и U_2 пересекаются в вещественной области и в точке пересечения кинетические энергии вещественны; напротив, интеграл возмущений экспоненциально мал, если это условие не выполняется. Легко также понять смысл того, что непересекающиеся кривые «проходят близко»; это значит, что кривые пересекаются в близкой комплексной области. Может случиться, что при некоторых обстоятельствах точка пересечения расположена столь

близко от вещественной оси, что вещественная часть S окажется очень малой и мы не получим уже экспоненциально исчезающего выражения.

§ 3. Рассмотрим теперь более подробно столкновение двух атомов. Функция Гамильтона всей системы записывается, как известно, в виде

$$H = H_e + \frac{1}{2m} p^2, \quad (7)$$

где H_e — гамильтонова функция электронов, m — эффективная масса ядер ($1/m = 1/m_1 + 1/m_2$) и p — их импульс. Разложим кинетическую энергию ядра на радиальную и трансверсальную части; тогда H можно записать в виде

$$H = H_{e,r} + \frac{1}{2mr^2} m^2, \quad (8)$$

где $H_{e,r}$ содержит кроме H_e еще и кинетическую энергию радиального движения, а m обозначает момент вращения ядра. Введем наконец вместо момента вращения ядра полный момент вращения системы M и электронный момент вращения D :

$$H = H_{e,r} + \frac{1}{2mr^2} (M - D)^2. \quad (9)$$

Поскольку оператор $H_{e,r}$ содержит только радиальные операторы, ему, очевидно, соответствуют матричные элементы, которые дают переходы лишь между термами с одинаковыми электронными моментами вращения. Но тогда, согласно известному правилу [4], пересечение таких термов невозможно, если термы не относятся к состояниям с разными полными спинами. Эти последние, однако, для нас несущественны благодаря малой вероятности переходов, и, таким образом, соответствующие возмущающие члены можно не принимать во внимание. Оператор M , разумеется, — диагональная матрица. D имеет переходы, при которых квантовое число вращательного момента электронов k может меняться на $0, \pm 1$; при этом D^2 снова диагонален по отношению к k . Тем самым в качестве энергии возмущения остается только

$$\eta = -\frac{1}{mr^2} DM, \quad (10)$$

и можно высказать утверждение, что при атомных столкновениях наиболее вероятны переходы с $\Delta k = \pm 1$ (т. е. из Σ в Π , из Π в Σ и Δ и т. д.). Однако это правило отбора по существу мало что выражает, поскольку, например, из S - и P -термов могут возникнуть как Σ -, так и Π -термы. Правило запрещает лишь

переход из состояния, составленного из двух S -термов, в другое составленное из них же состояние, так как из двух S -термов всегда однозначно возникает Σ -терм. Следует подчеркнуть, что это требование, будучи необходимым, никоим образом не является достаточным. Оно указывает лишь, какие термы могут пересекаться, но не какие из них должны пересекаться, так что отнюдь не всем $\Delta k = \pm 1$ соответствуют переходы при столкновениях.

Вычислим сначала матричный элемент от η по отношению ко всем координатам, кроме r (при этом в согласии с нашим квазиклассическим приближением момент вращения M можно считать обычным вектором). Это дает

$$\eta(r) = -\frac{M}{mr^2} D(r), \quad (11)$$

где M — абсолютная величина момента вращения всей системы и D — матричный элемент момента вращения электронов, соответствующий переходу $\Delta k = \pm 1$. Естественно, что D является функцией координаты r .

Общая формула теории возмущений для вероятности перехода при столкновении гласит

$$w = \left(\frac{|\eta|}{\hbar} \right)^2, \quad (12)$$

где $|\eta|$ — матричный элемент η , в котором ψ -функции нормированы на поток в 4π атомов в единицу времени. В квазиклассическом приближении

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi v(r)}} \frac{\cos \frac{S(r)}{\hbar}}{r}, \quad (13)$$

где v — скорость, понимаемая как функция положения. Подстановка этого выражения дает

$$\begin{aligned} \sqrt{w} &= \int \frac{\eta}{\hbar} \psi_1 \psi_2^* 4\pi r^2 dr = \\ &= - \int \frac{MD(r)}{mr^2 \hbar} \cos \frac{S_1(r)}{\hbar} \cos \frac{S_2(r)}{\hbar} \frac{4\pi dr}{\sqrt{\pi v_1(r)} \sqrt{\pi v_2(r)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

В этом интеграле мы рассмотрим, как уже говорилось, член с разностью функций действия, так что

$$\sqrt{w} = - \int \frac{2MD(r)}{\hbar mr^2 \sqrt{v_1(r)} v_2(r)} \cos \frac{S_1(r) - S_2(r)}{\hbar} dr. \quad (15)$$

Этот интеграл следует брать только вблизи точки пересечения обеих кривых. При этом мы будем считать постоянными все величины, кроме быстро меняющегося косинуса. Разложим далее функцию действия по степеням расстояния до точки пересечения. Учтем при этом, что $dS/dr = p$, и определим $d^2S/dr^2 = dp/dr$ из условия $p^2/2m + V = E$ (V , разумеется, содержит также и центробежную энергию); отсюда следует, что

$$v \frac{dp}{dr} = F, \quad (16)$$

где $F = -dV/dr$ — сила (включая и центробежную), действующая в точке r . Так как в точке пересечения $p_1 = p_2$, $v_1 = v_2$ из (16) следует

$$S_1 - S_2 = A + \frac{F_1 - F_2}{2v} (r - r_0)^2, \quad (17)$$

где A — значение $S_1 - S_2$ в точке пересечения. Интеграл принимает теперь вид

$$\sqrt{w} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2MD}{\hbar m r^2 v} \cos \left[\frac{A}{\hbar} + \frac{F_1 - F_2}{2\hbar v} \xi^2 \right] d\xi, \quad (18)$$

где $\xi = r - r_0$ — новая переменная интегрирования и все величины относятся к точке пересечения. В качестве границ области интегрирования выбраны $\pm \infty$, поскольку существенная для интегрирования область лежит все равно вблизи точки пересечения. Как известно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha + \beta \xi^2) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \quad (19)$$

откуда

$$\sqrt{w} = - \frac{2MD}{\hbar m v r^2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar v}{F_1 - F_2}} \cos\left(\frac{A}{\hbar} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (20)$$

и

$$w = \frac{8\pi M^2 D^2}{\hbar m^2 r^4 v (F_1 - F_2)} \cos^2\left(\frac{A}{\hbar} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (20')$$

В соответствии с квазиклассическим характером системы фаза A/\hbar как функция M меняется очень быстро. Поэтому уже для мелкого интервала можно заменить выражение $\cos^2\left(\frac{A}{\hbar} + \frac{\pi}{4}\right)$ его

средним значением $1/2$. Окончательно получается

$$w = \frac{4\pi M^2 D^2}{\hbar v (F_1 - F_2) m^2 r^4}. \quad (21)$$

Подставим еще выражение для скорости v . Имеем

$$\frac{mv^2}{2} + V = E \quad (22)$$

или, записав явное выражение для центробежной энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + U + \frac{M^2}{2mr^2} = E. \quad (23)$$

Сила F равна

$$F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(U + \frac{M^2}{2mr^2} \right)$$

или

$$F_1 - F_2 = \frac{d}{dr} (U_2 - U_1),$$

так как оба состояния отличаются только видом U . Тем самым w переходит в

$$w = \frac{4\pi D^2 M^2}{\hbar m r^4 (F_1 - F_2) \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (24)$$

Для получения полного эффективного сечения достаточно только учесть, что $M = mv_0 \rho$, где v_0 — скорость на бесконечности, а ρ связано с максимально возможным сечением λ соотношением $d\lambda = 2\pi \rho d\rho$. Отсюда следует

$$d\lambda = \frac{2\pi M dM}{m^2 v_0^2} = \frac{\pi M dM}{mE}. \quad (25)$$

Полное эффективное сечение, очевидно, равно

$$\sigma = \int w d\lambda = \int \frac{4\pi^2 D^2 M^3 dM}{\hbar m^2 E r^4 (F_1 - F_2) \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (26)$$

Область интегрирования здесь простирается от $M = 0$ до такого значения M , при котором скорость в точке пересечения еще остается вещественной, т. е. до $M^2 = r^2 2m(E - U)$. Выбирая

$M/r \sqrt{2m(E-U)}$ в качестве переменной интегрирования, получим

$$\sigma = \frac{4\pi D^2 [2m(E-U)]^{3/2}}{\hbar m^2 E (F_1 - F_2)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4\pi D^2 [2m(E-U)]^{3/2}}{\hbar m^2 E (F_1 - F_2)} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{2^{7/2} \pi D^2}{3 \hbar m^{1/2} \frac{d}{dr} (U_2 - U_1)} \frac{(E-U)^{3/2}}{E}. \quad (27)$$

Эта окончательная формула описывает поведение эффективного сечения в зависимости от скорости столкновения. Его порядок величины определяется тем, что в знаменателе стоит \sqrt{m} . Поэтому следует ожидать, что это сечение для E , равного нескольким вольтам, примерно в 100 раз меньше, чем так называемое газокинетическое сечение, или, другими словами, из нескольких сот столкновений оказывается эффективным только одно. Если U отрицательно, то эффективные столкновения будут происходить со сравнительно большей вероятностью при малых скоростях, тогда при малых E сечение σ обратно пропорционально E . Поэтому при малых E сечение может принимать заметные значения. При $E = -2U$ сечение достигает минимума и затем при больших E возрастает как \sqrt{E} , т. е. пропорционально скорости. При положительных U заметный эффект начинается с $E = U$ и затем монотонно нарастает с увеличением E .

Для вычисления распределения по направлениям нужно знать не только значение U в точке пересечения, но и вид этой функции. Если $U(r)$ известно, то отклонение θ как функция M получается из классических уравнений движения; при этом следует считать, что переход происходит всегда на поверхности «сферы пересечения» и координаты и импульсы остаются при переходе неизменными.

§ 4. В случае многоатомных молекул ситуация гораздо сложнее. Прежде всего, у многоатомных молекул вообще не бывает пересечения термов, за исключением случая, когда переходы соответствуют разные значения спина. Этот случай может тогда также играть заметную роль, хотя при этом получается сравнительно малая вероятность (уменьшенная на порядок величины релятивистской поправки). В сложных молекулах может иметь место приближенное пересечение, однако имеющийся экспериментальный материал слишком незначителен, чтобы стало возможным детальное исследование различных мыслимых случаев. При столкновениях двухатомных молекул с атомами всегда еще возможно пересечение термов с различной зеркальной симметрией относительно плоскости, в которой лежат ядра, так что

мы получаем здесь соотношения, аналогичные таковым при столкновении атомов. Напротив, в случае столкновения двух двухатомных молекул точки пересечения при расположении атомов общего вида отсутствуют. Пересечение состоится возможным лишь при специальных симметричных расположениях. Поэтому, вообще говоря, две двухатомные молекулы при своем движении не проходят через пересечения. Существуют, однако, определенные траектории (в многомерном координатном пространстве), которые обладают этим свойством. В этом случае вероятность перехода представляет собой произведение обсуждавшегося выше выражения на вероятность того, что столкновение происходит вблизи определенной линии, и таким образом будет существенно уменьшена.

§ 5. Совсем другой пример приложения развитой теории мы встречаем при возбуждении или расщеплении ядра пролетающей α -частицей. В этом случае как на влетающую, так и на вылетающую α -частицу на больших расстояниях от ядра действует всегда кулоново поле. Иными словами, это означает, что на больших расстояниях $U_2 - U_1$ всегда постоянно и равно энергии, потерянной α -частицей. Пересечение энергетических кривых на больших расстояниях исключено. Оно должно произойти где-то в области радиуса ядра (нам здесь незачем заботиться о том, будет ли точка пересечения вещественной или комплексной). Поэтому существенная часть вероятности будет определяться значением экспоненциальной функции $\exp\left[\frac{2i}{\hbar}(S_2 - S_1)\right]$ в области ядра. Однако для малых r_0 с точностью до малых величин

$$\frac{2i}{\hbar}S = -2 \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr = -\frac{4\pi Ze^2}{\hbar v} + \frac{8e \sqrt{mZr_0}}{\hbar}, \quad (28)$$

и, таким образом, разность

$$2i(S_2 - S_1) = -\frac{4\pi Ze^2}{\hbar} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \quad (29)$$

не зависит от r_0 . Поэтому для эффективного радиуса ядра мы получим выражение типа

$$\sigma = A \exp \left[-\frac{4\pi Ze^2}{\hbar} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right], \quad (30)$$

действительно не зависящее от вида кривой потенциальной энергии внутри ядра; здесь A — величина, медленно меняющаяся со скоростью. Вполне аналогичное выражение получается в случае

расщепления ядра с вылетом одного протона. Единственное различие состоит здесь в том, что протон в случае отсутствия резонанса должен еще преодолеть потенциальный барьер. Это приводит к выражению

$$\sigma = B \exp \left\{ - \left[\frac{4\pi Z e^2}{\hbar} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) - \frac{2\pi (Z-1) e^2}{\hbar v_p} \right] \right\} \quad (31)$$

(v_p — скорость протона). В случае резонансного расщепления (по отношению к протону) остается справедливой предыдущая формула. Резонанс по отношению к α -частице следует обычным образом рассматривать как захват α -частицы.

По моему предложению Г. Гамов произвел сравнение формулы (30) с экспериментальными данными по расщеплению. При этом, однако, оказалось, что все известные до сих пор случаи всегда относятся к захвату α -частицы. То же самое, по-видимому, имеет место и во всех наблюдаемых до сих пор случаях искусственного γ -излучения.

*Физико-технический институт,
Ленинград*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K a l l m a n n, L o n d o n. Zs. Phys. Chem., 28, 207, 1929.
- [2] O. K. R i c e. Phys. Rev., 37, 1187, 1551, 1931.
- [3] G. B e c k. Zs. Phys., 67, 227, 1931.
- [4] J. N e u m a n n, E. W i g n e r. Zs. Phys., 30, 467, 1929.

К ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ. II

Phys. Zs. Sowjet., 2, 46, 1932

Полученные в I результаты применены к: 1) преддиссоциации, 2) возбуждению колебаний при оптическом переходе, 3) случаю почти пересекающихся потенциальных кривых.

Полученные в I [1] результаты можно применить к целому ряду явлений. Следует еще добавить, что для столкновения одинаковых атомов полученные в I правила отбора следует дополнить требованием изменения четности. Это видно из того, что компоненты вращательного момента электронов, перпендикулярные к линии, соединяющей ядра, меняют свой знак при отражении.

§ 1. Наиболее непосредственным обобщением является преддиссоциация. Для вероятности распада за время одного колебания здесь можно применить непосредственно формулу I (21), которую можно записать также в виде

$$w = \frac{4\pi\hbar D^2}{(F_1 - F_2) m^2 r^4} \frac{j^2}{v}. \quad (1)$$

Пропорциональность j^2 / v содержится уже в работе Кронига [2], в которой, однако, под v понималась скорость на бесконечности вместо фактически входящей сюда радиальной скорости в точке пересечения. Последнее обстоятельство имеет своей причиной способ оценки, примененный Кронигом.

Способ рассмотрения из I можно перенести также на случай пересечения, возможного благодаря разнице в полных спинах. Уже элементарное рассмотрение дает правила отбора: изменение суммарного спина на ± 1 наряду с оптическими правилами отбора

для азимутального квантового числа l , возможно, четности. Поскольку матричный элемент теперь больше не зависит от скорости ядер, вместо (1) получается результат, просто пропорциональный $1/v$, что, как легко понять, связано со временем пребывания в точке пересечения.

§ 2. Совсем особый случай применения теории представляет собой возбуждение колебаний при оптическом переходе, когда температура соответствует неколеблущейся молекуле. В этом случае энергия наиболее интенсивно возбуждаемого состояния определяется правилом Франка — Кондона и координатой того положения ядер, при котором нормальное состояние имеет наименьшую энергию. Чтобы вычислить уменьшение интенсивности при удалении от состояния, возбуждаемого наиболее сильно, нужно согласно развитой теории определить точку пересечения кривых

$$E_1 - U_1 = E_2 - U_2. \quad (2)$$

Если через ξ обозначить расстояние точки пересечения от нормального состояния и вспомнить, что параболу нижнего состояния можно для нашей цели заменить постоянной, равной U , а верхнюю кривую заменить прямой линией, то получится приближенно

$$\varepsilon = F\xi, \quad \xi = \frac{\varepsilon}{F}, \quad (3)$$

где F обозначает силу, действующую на верхней кривой, а ε — энергию, отсчитанную от наиболее сильно возбуждаемого состояния. Теперь нам нужно определить интеграл действия вплоть до точки ξ . При этом, очевидно, основную роль будет играть интеграл вдоль параболы. Отсюда для показателя экспоненты получается

$$2 \int \frac{m\omega\xi d\xi}{\hbar} = \frac{m\omega}{\hbar} \xi^2 = \frac{m\omega}{\hbar} \left(\frac{\varepsilon}{F}\right)^2 \quad (4)$$

(здесь $\omega = 2\pi \times$ частота нормального колебания). Видно, что распределение интенсивности дается гауссовой кривой. Ширина распределения интенсивности равна

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} F. \quad (5)$$

Таким образом, она обычно охватывает много колебательных уровней.

§ 3. Представляет интерес выяснить, как выглядит вероятность в случае, когда кривые энергии проходят близко одна от другой. Последнее всегда имеет место, если два иона имеют на бес-

конечности энергию, не очень сильно отличающуюся от энергии двух атомов. Тогда кулоновское притяжение влияет на точку пересечения уже в той области, где все другие взаимодействия, которые могли уничтожить пересечение, еще очень малы. Если кривые пересекаются в близкой комплексной области, то наш интеграл действия следует брать по области, где обе потенциальные энергии проходят близко одна от другой. В соответствии с этим можно записать

$$p_1 - p_2 = \frac{\partial p}{\partial U}(U_1 - U_2) = -\frac{\partial p}{\partial E}(U_1 - U_2) = -\frac{U_1 - U_2}{v}, \quad (6)$$

где v означает скорость в упомянутой области. Отсюда значения вероятности представляется величиной

$$\exp \left\{ -\frac{2i}{\hbar v} \int (U_1 - U_2) dx \right\}. \quad (7)$$

Но согласно известной формуле

$$U_1 - U_2 = \sqrt{(U_{10} - U_{20})^2 + 4a^2},$$

где U_{10} и U_{20} означают собственные значения в нулевом приближении, а a — энергию «обмена» обоих термов. Очевидно, величина наименьшего удаления равна $2a$.

Вблизи точки пересечения с точностью до несущественной постоянной можно записать

$$U_{10} = F_1 x, \quad U_{20} = F_2 x. \quad (8)$$

В следующем приближении положение точки пересечения дает уравнением

$$(F_1 - F_2)^2 x^2 + 4a^2 = 0,$$

откуда следует

$$x = \frac{2ia}{F_1 - F_2}. \quad (9)$$

Отсюда показатель экспоненты в (7) равен

$$\begin{aligned} -\frac{2i}{\hbar v} \int_0^{\frac{2ia}{F_1 - F_2}} \sqrt{(F_1 - F_2)^2 x^2 + 4a^2} dx &= \\ &= -\frac{2}{\hbar v} \int_0^{\frac{2a}{F_1 - F_2}} \sqrt{4a^2 - (F_1 - F_2)^2 \xi^2} d\xi. \quad (10) \end{aligned}$$

Вероятность, таким образом, пропорциональна

$$\exp \left[- \frac{2\pi a^2}{\hbar v} \frac{1}{F_1 - F_2} \right]. \quad (11)$$

Для оценки показателя экспоненты в упомянутом выше кулоновском случае положим

$$F = \frac{e^2}{r^2} = \frac{\Delta^2}{e^2}, \quad (12)$$

где через Δ обозначена разность энергий на бесконечности. В случае столкновения ионов скорости v простым образом определяется через Δ . Если Δ равно 1 эв , то условие

$$\frac{4\pi a^2}{\hbar v} \frac{1}{F_1 - F_2} = 1$$

выполняется при $2a = 0,06 \text{ эв}$.

§ 4. Если показатель экспоненты в (11) мал, то расщеплением кривых следует в первом приближении пренебречь. Поэтому вероятность электронного перехода будет выражаться через вероятность перехода для двух пересекающихся кривых. В этом случае применим способ рассмотрения из I, с той только разницей, что вместо матричного элемента $DM / m r^2$ следует поставить величину a . Отсюда для вероятности получается

$$\frac{4\pi a^2}{\hbar v (F_1 - F_2)}. \quad (13)$$

В промежуточном случае вероятность будет по порядку величины равна единице. Для пересчета вероятности в эффективное сечение воспользуемся следующими соотношениями. Эффективное сечение при $w = 1$ равно $2\pi r dr$, где через r обозначено минимальное расстояние прохождения в отсутствие взаимодействия. Поскольку из-за сохранения момента вращения $r v_0 = r' v_0'$ (r — координата точки пересечения, v_0 — трансверсальная скорость в точке пересечения), мы получаем

$$d\sigma = \frac{2\pi r^2}{v_0^2} v_0' dv_0' \quad (14)$$

или, так как при заданной энергии $v_r^2 + v_0^2 = v_0'^2$ имеет определенное значение,

$$d\sigma = \frac{2\pi r^2}{v_0^2} v_r' dv_r'. \quad (15)$$

Умножая теперь на w и интегрируя по всем v_r от 0 до v_0' (v в

(13), разумеется, означает v_r), получим

$$\sigma = \frac{8\pi^2 a^2 r^2 v_0'}{\hbar v_0^2 (F_1 - F_2)} \quad (16)$$

или

$$\sigma = \frac{4\pi^2 a^2 r^2 \sqrt{2m(E-U)}}{\hbar E (F_1 - F_2)}. \quad (17)$$

§ 5. Проведенное в I рассмотрении нуждается в существенном изменении в случае, когда энергетические состояния (на бесконечности) лежат близко друг от друга (резонансный случай). Это может быть обусловлено как переходами между уровнями тонкой структуры, так и случайной близостью термов обоих атомов. Для оценки области применимости сделанных выше выводов вычислим разность действий для кривых, которые не пересекаются в вещественной области. Если обозначить через R порядок комплексной величины r в точке пересечения, то можно записать

$$S_1 - S_2 = \frac{R\Delta}{v}, \quad (18)$$

где Δ означает разность энергий обоих термов на бесконечности (R по порядку величины совпадает с r , для которого энергия взаимодействия будет порядка разности энергий).

Для показателя экспоненты имеем

$$\frac{R\Delta}{\hbar v}. \quad (19)$$

Здесь можно различать два случая в зависимости от того, мал или велик показатель экспоненты в сравнении с единицей. В первом случае разницей в энергии обоих состояний следует пренебречь, и можно поэтому воспользоваться методом вычислений Кальмана и Лондона [3]. Для оценки показателя экспоненты лучше всего положить $R = 10^{-7}$ см, так как при больших расстояниях взаимодействие быстро спадает. Если принять для v значение тепловой скорости, равное $3 \cdot 10^4$ см / сек, то получится Δ порядка величины 0,1 мэв. Напротив, когда показатель экспоненты велик, пересечение кривых снова играет важную роль и нужно пользоваться формулой I (27).

В заключение я хочу выразить сердечную благодарность Л. Розенкевичу за ценные дискуссии.

Физико-технический институт, Ленинград

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Landau Phys. Zs. Sowjet., 1, 89, 1932 (Собр. трудов, № 6).
 [2] R. Kronig. Zs. Phys., 50, 347, 1928.
 [3] Kallman, London. Zs. Phys. Chem., 28, 207, 1929.

С теоретической точки зрения рассмотрена природа равновесия звезды.

Для астрофизических методов, применяемых обычно при исследовании вопросов структуры звезд, характерно использование физических предположений, выбор которых диктуется исключительно удобством вычислений. Сказанное относится, например, к принадлежащему г-ну Милну доказательству невозможности существования звезд, состоящих во всем своем объеме из классического идеального газа. Его доказательство основано на утверждении, что при произвольных L и M фундаментальное уравнение равновесия звезды, состоящей из классического идеального газа, вообще говоря, не имеет регулярных решений. Г-н Милн, по-видимому, проглядел тот факт, что это его утверждение покоится исключительно на предположении о постоянстве коэффициента непрозрачности по всему объему звезды, предположении, делаемом исключительно в математических целях и не имеющем ничего общего с реальностью. Только в случае справедливости этого предположения радиус R выпадает из соотношения между L , M и R , которое необходимо для регулярности решения. Любое разумное предположение относительно непрозрачности привело бы к соотношению между L , M и R , которое к тому же было бы свободным от физических возражений, выдвигаемых против эддингтоновского соотношения масса — светимость.

Представляется разумной попытка подойти к проблеме структуры звезд при помощи методов теоретической физики, т. е. исследовать физическую природу равновесия звезды. На этом пути мы должны начать с исследования статистического равновесия

некоторой заданной массы в отсутствие источников энергии. Условием равновесия является минимальность свободной энергии F (при заданной температуре). Часть свободной энергии, связанная с гравитацией, отрицательна и обратно пропорциональна некоторому среднему линейному размеру рассматриваемой системы, или, другими словами, пропорциональна $-\rho^{1/2}$ (ρ — некоторая средняя плотность).

Оставшаяся внутренняя часть свободной энергии зависит от уравнения состояния; для классического идеального газа она пропорциональна $\ln \rho$. Ввиду того, что $\ln \rho$ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$ медленнее, чем $\rho^{1/2}$, мы всегда будем иметь минимум свободной энергии при $\rho = \infty$. Это означает, что в случае классического идеального газа равновесия вообще не существует*. Любая часть системы будет стремиться сжаться в точку. Положение вещей полностью меняется, если учесть квантовые эффекты. Для нерелятивистского ферми-газа внутренняя свободная энергия меняется с ρ , как $\rho^{3/2}$, а значит, быстрее, чем гравитационная. Это приводит к существованию устойчивого равновесия. Наличие источников создало бы только дополнительное расширение, связанное радиационному давлению. Г-н Милн пытается избежать этих выводов, вводя некую конденсированную внутреннюю часть системы; однако он не приводит никаких соображений, почему бы такая конденсация могла вообще появиться. Связь конденсированного состояния с нормальным остается весьма таинственной. Легко видеть, что любое уравнение состояния, не приводящее к скачкообразным переходам (как предполагается в вычислениях Милна), сделало бы такую конденсацию невозможной.

Для достаточно больших плотностей следует пользоваться релятивистской теорией, поскольку скорости электронов в распределении Ферми растут вместе с плотностью. В крайне релятивистском случае внутренняя часть свободной энергии единицы объема меняется, как $\rho^{1/2}$, т. е. с той же степенью плотности, что и гравитационная энергия. Поэтому свободная энергия F имеет вид $F = a\rho^{1/2}$. При положительных a система, стремясь к минимуму F , будет расширяться до тех пор, пока плотность не станет слишком малой для того, чтобы релятивистское уравнение $F = a\rho^{1/2}$ было справедливым. Если же a отрицательно, система будет стремиться коллапсировать в точку. Для того чтобы найти кри-

* В этом пункте допущена ошибка: условие максимальной энтропии для изолированной гравитирующей сферы классического газа допускает в принципе равновесие. Основной результат данной статьи — установление критической массы для равновесия сферы холодного вырожденного ферми-газа. Последующие же заключения в настоящее время, разумеется, полностью устарели. — *Прим. ред.*

терий, разделяющий эти два случая, необходимо исследовать решение общего уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mu}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (1)$$

Химический потенциал μ в крайне релятивистском случае равен $\hbar c (3\pi^2 \rho / m^4)^{1/3}$, где m — масса, приходящаяся на один электрон; для большинства элементов она равна двум массам протона. Уравнение (1) представляет собой политропическое уравнение Эмдена для $n = 3$. При помощи известных подстановок его можно привести к виду

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dx}{dr} \right) = -x^3$$

с краевым условием

$$-r^2 \frac{dx}{dr} = M \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{3/2} m^2 \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{1/2}$$

на внешней границе. Как показал Эмден, это уравнение имеет регулярное решение только в случае $-r^2 \frac{dx}{dr} = 2,015$, когда оно допускает произвольные радиусы. Это означает, что будет существовать безразличное равновесие, соответствующее $a = 0$ в приведенном выше грубом рассмотрении. Таким образом, равновесные состояния получаются только для масс, меньших, чем критическая масса

$$M_0 = \frac{3,1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} = 2,8 \cdot 10^{33} \text{ г},$$

или приблизительно $1,5 \odot$ (при $m=2$ массам протона). При $M > M_0$ во всей квантовой теории не существует причины, которая предотвратила бы коллапс системы в точку (электростатические силы при больших плотностях относительно малы). Поскольку в действительности такие массы мирно существуют в виде звезд и отнюдь не проявляют таких абсурдных тенденций, приходится заключить, что все звезды тяжелее, чем $1,5 \odot$, содержат область, в которой нарушаются законы квантовой механики (и тем самым квантовой статистики). Так как у нас нет оснований верить, что можно разделить звезды на два физически различных класса в соответствии с критерием $M >$ или $< M_0$, можно с большой вероятностью предположить, что такую патологическую область имеют все звезды. Это не противоречит изложенным выше аргументам, которые доказывают, что условие $M > M_0$ лишь достаточно (но не необходимо) для существования таких областей. Естественно думать, что именно наличие таких областей и делает звезды звездами. Но если так, то нам нет никакой нужды предпо-

лагать, что излучение звезд обязано некоему таинственному процессу взаимной аннигиляции протонов и электронов, который никогда не наблюдался, и для проявления которого именно в звездах нет никаких специальных причин. В самом деле, протоны и электроны в атомных ядрах всегда находятся очень близко друг к другу и тем не менее не аннигилируют. Было бы очень странно, если бы высокие температуры могли помочь делу уже только потому, что помогают кое-чему в химии (цепные реакции!). Следуя красивой идее проф. Нильса Бора, можно думать, что излучение звезд обязано просто нарушению закона сохранения энергии, который, как впервые указал Бор, не справедлив в релятивистской квантовой теории, когда отказывают законы обычной квантовой механики (что доказывается экспериментами по непрерывному спектру электронов β -распада и стало вероятным благодаря теоретическому рассмотрению [1]). Мы ожидаем, что все это должно проявляться, когда плотность материи станет столь большой, что атомные ядра придут в тесный контакт, образовав одно гигантское ядро.

Можно попытаться построить, следуя этой общей линии, теорию структуры звезд. Центральная область звезды должна представлять собой ядро из высоко конденсированной материи, окруженное материей в обычном состоянии. Если бы переход между этими двумя состояниями был непрерывным, никакая масса $M < M_0$ не могла бы образовать звезду, так как нормальное равновесное состояние (т. е. без патологических областей) было бы вполне стабильным. Поскольку, как мы знаем, это не так, приходится заключить, что конденсированное и неконденсированное состояния разделены неким нестабильным состоянием, подобно тому как разделены жидкость и ее пар. (Такое свойство можно было бы легко объяснить при помощи какого-нибудь типа ядерного притяжения.) Все это привело бы к существованию почти разрывной границы между двумя состояниями.

Теория структуры звезд, основанная на приведенных выше соображениях, пока еще не построена. И только она одна могла бы показать, насколько эти соображения справедливы.

Цюрих

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Landau, R. Peierls. Zs. Phys., 69, 56, 1931 (Собр. трудов. № 5).

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Phys. Zs. Sowjet., 3, 664, 1933

Известно, что электрон в кристаллической решетке может двигаться без сопротивления. Если слегка нарушить решетку в каком-нибудь месте, то это повлечет за собой лишь рассеяние электронов в соответствующей точке. Однако при этом еще никоим образом не появляется возможность захвата электрона в этом месте. Последнее согласно известному закону волновой механики стало бы возможным только, если возмущенная решетка имела бы помимо непрерывных еще и дискретное собственное значение энергии. Но это не имеет места при небольших нарушениях.

Рассмотрим сначала свободный электрон, на который в определенной области действует слабое поле. Тогда в согласии с Пайерлсом [1] можно показать, что в случае слабых полей не будет иметь узлов уже решение уравнения Шредингера с $E = 0$, и, следовательно, оно соответствует наименьшему из возможных собственных значений. А именно, будем искать решение уравнения Шредингера

$$\Delta\psi = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi \quad (1)$$

при малых U в виде

$$\psi = 1 + \chi, \quad (2)$$

где χ мало. Тогда получится

$$\Delta\chi = \frac{2mU}{\hbar^2}. \quad (3)$$

Если U спадает на бесконечности быстрее, чем $1/r^2$, то это уравнение имеет конечное всюду решение, величина которого пропорциональна U . Таким образом, при достаточно малых U бу-

дет $|\chi| < 1$, и, следовательно, $1 + \chi$ нигде не обращается в нуль. (Если обозначить через a размеры области, где U отлично от нуля, то можно увидеть, что дискретное собственное значение возникает только тогда, когда mUa^2 / \hbar^2 порядка единицы.)

Доказательство для периодической решетки можно получить совершенно аналогично предыдущему, приняв в качестве исходного пункта решение, соответствующее наименьшему собственному значению и поэтому не имеющему узлов при строго периодическом поле, и записав «возмущенное» решение ψ в виде $\psi = \psi_0 + \chi$.

Таким образом, малое нарушение еще не дает возможности захвата электрона. Таковой возникает только при больших нарушениях. Здесь следует различать два существенно различных случая. Энергетически наиболее выгодное состояние всей системы может соответствовать либо невозмущенной решетке и «свободно» движущемуся электрону, либо электрону, захваченному в сильно возмущенной области. В первом случае электрон вообще не может быть захвачен решеткой. Такое положение вещей, по-видимому, осуществляется в алмазе. Во втором случае захват электрона становится возможным только путем преодоления потенциального барьера. При малых нарушениях собственные значения электрона, как уже было показано, не меняются. Поэтому изменение энергии всей системы в точности равно энергии нарушения и, следовательно, существенно положительно. Таким образом, следует ожидать, что захват электрона будет носить активационный характер. Этому соответствует положение вещей у NaCl, который при низких температурах не окрашивается рентгеновским излучением. Было бы интересно доказать наличие в этом явлении закона $e^{-A/kT}$ и определить величину энергии активации A .

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Peierls. Zs. Phys., 58, 59, 1929.

ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ И ВСЕЛЕННАЯ

Совместно с М. БРОНШТЕЙНОМ

Phys. Zs. Sowjet., 4, 114, 1933

Обсуждается необратимость термодинамических явлений. Оказывается, что эта необратимость, равно как и вообще физическое различие между обоими направлениями времени (прошедшим и будущим), может быть объяснена только в том случае, если во Вселенной существуют области, в которых не выполняются теории, ведущие к термодинамике (классическая и волновая механики).

Со времен Больцмана, по-видимому, является общепризнанным что необратимость второго закона термодинамики никоим образом не противоречит симметрии классической механики по отношению к изменению знака времени. Основание для такого утверждения принято видеть в том факте, что поведение любой макроскопической системы, остающейся замкнутой в течение времени, очень большого по сравнению с временем релаксации, полностью симметрично. Однако рассмотрим, например, систему, находящуюся в кинетическом равновесии с окружающими телами, и затем изолируем ее на время, не столь большое, чтобы нельзя было пренебречь значительными флуктуациями. Кривая ее энтропии будет вести себя, как показано на рисунке (начало 1 и конец 2 изолированного состояния обозначены штриховыми прямыми): в момент 1, как только система изолирована, ее энтропия начинает расти, затем достигает максимума и остается на этом уровне вплоть до момента 2, после которого вновь начинает устанавливаться кинетическое равновесие. Если изменить направление временной оси, то полностью изменится и картина. Обратный процесс означает, что в момент 3 энтропия начнет возрастать, как если бы система заранее знала, что через определенный момент времени она будет изолирована. Мы склонны объявить такое

поведение невозможным, «ибо будущее не может иметь никакого влияния на поведение физических тел». Однако это утверждение — чистая филология, поскольку вообще не ясно, каким образом из классической механики можно сделать вывод, что одно направление времени обладает свойствами, отличными от свойств другого направления. Проблема как раз и состоит в определении источника этой асимметрии.

Для этого следует изучить точное содержание второго закона термодинамики несколько подробнее. Рассмотрим тело, которое

очень долго (в сравнении с временем релаксации) оставалось изолированным. Если мысленно разделить объем тела на большое число сравнительно малых, но все же содержащих очень много атомов частей 1, 2, ..., то каждая часть будет находиться в статистическом равновесии даже тогда, когда тело как целое от статистического равновесия далеко.

Макроскопическое описание состояния вводится тем, что каждой i -й части всей системы приписывается статистическая функция распределения ρ_i . Функции ρ_i зависят от числа атомов и от точек в фазовом пространстве системы, состоящей из этого числа атомов. Поэтому $\int \rho_i d\tau_i = 1$, где под знаком \int понимается не только интегрирование по всем физически различным точкам фазового пространства, но также и последующее суммирование по всем возможным числам атомов.

Все части 1, 2, 3... квазинезависимы друг от друга, т. е. изменение начального состояния одной такой сравнительно малой части всей системы не имеет почти никакого влияния на историю тела. Математически квазинезависимость частей выражается в том, что если в момент t задать функцию $\rho = \prod \rho_i$ и эта функция изменяется согласно законам механики вплоть до времени t' , так что ρ переходит в ρ' , то статистическая функция распределения i -й части в момент t' получится при помощи интегрирования

$$\rho'_i = \int \dots \int \rho' d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{i-1} d\tau_{i+1} \dots$$

Тем самым определено изменение макроскопического состояния при переходе от t к t' . Для энтропии получаем

$$\sigma = \sum_i \overline{\ln \frac{1}{\rho_i}} = \overline{\ln \frac{1}{\rho}}$$

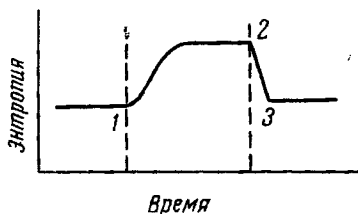


Рис. 1

и

$$\sigma' = \sum_i \overline{\ln \frac{1}{\rho_i}} = \overline{\ln \frac{1}{\prod_i \rho_i}} = \overline{\ln \frac{1}{\rho'}} - \overline{\ln \frac{\prod \rho_i}{\rho'}}.$$

С помощью неравенства $\ln x \leq x - 1$, справедливого при всех x , находим

$$\overline{\ln \frac{1}{\rho'}} \leq \overline{\ln \frac{\prod \rho_i}{\rho'}} - 1 = 0.$$

Это дает

$$\sigma' \geq \overline{\ln \frac{1}{\rho'}}.$$

Но согласно теореме Лиувилля имеем

$$\overline{\ln \frac{1}{\rho'}} = \overline{\ln \frac{1}{\rho}},$$

откуда следует, что $\sigma' \geq \sigma$.

Это неравенство имеет двойкий смысл: 1) если мы рассмотрим очень большой (в сравнении с временем релаксации) период истории некоторого изолированного тела и выберем все достигнутые за этот период микросостояния, которые удовлетворяют одному и тому же макроскопическому описанию, то в следующие моменты из подавляющего большинства этих микросостояний возникнет состояние с большей или по крайней мере равной энтропией; 2) подавляющее большинство этих микросостояний, в свою очередь, возникло из непосредственно более ранних состояний с большей энтропией.

Необходимость обоих этих утверждений можно понять из того, что в проведенном выше доказательстве никак не использовалось неравенство $t' > t$. Это связано, разумеется, с симметрией механики по отношению к изменению знака времени. Оба утверждения независимы одно от другого, т. е. если мы не знаем о каком-нибудь микросостоянии ничего, кроме того, что оно не оправдало ожиданий, связанных с первым утверждением, то можно с большой вероятностью считать, что оно оправдает [ожидания, связанные со вторым утверждением, и обратно. (Разумеется, подавляющее большинство рассматриваемых микросостояний, удовлетворяющих одному и тому же макроскопическому описанию, оправдывает и то и другое ожидание, что, как известно, приводит к характерному полностью симметричному виду кривой флуктуаций, многократно обсуждавшемуся в литературе.) Нас интересует здесь следующее. Выберем на кривой флуктуаций (т. е. на кривой изме-

нения энтропии за интервалы времени, очень большие по сравнению с временем релаксации) какой-нибудь отрезок времени, сравнимый с временем релаксации, о котором не известно ничего, кроме того, что его конец t_0 (какой именно конец, безразлично) соответствует энтропии $\sigma_0 \leq \sigma$. Тогда для монотонной последовательности следующих непосредственно один за другим моментов времени t_0, t_1, t_2, \dots , принадлежащих рассматриваемому отрезку времени, мы получим ряд неравенств $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$. Этот закон, который можно назвать *законом монотонного изменения энтропии*, формулируется также и следующим образом: если тело изолировано на протяжении отрезка времени, не столь большого, чтобы можно было пренебречь флуктуациями, и если далее об этом отрезке времени не известно ничего, кроме, возможно, макросостояния на одном из его концов, то можно утверждать, что на протяжении всего этого отрезка энтропия меняется монотонно.

Эти «термодинамические» следствия классической статистики являются более общими, чем классическая статистика сама по себе, ибо они могут быть известным образом выведены из основанной на волновой механике квантовой статистики. И лишь в релятивистской области термодинамическое рассмотрение больше непригодно. (Так, например, расходящаяся интегральная плотность энергии излучения в законе Релея — Джинса прямо указывает на то, что статистического равновесия в этом случае не существует.) Нет оснований надеяться на справедливость термодинамики также и в области релятивистской квантовой теории. В дальнейшем ради краткости мы будем называть макроскопические системы, подчиняющиеся классической или волновой механике, телами, подчиняющимися статистике. Если подчиняющееся статистике тело изолировано от окружающего мира на время, не слишком большое по сравнению с временем релаксации, то его энтропия будет меняться монотонно. Если изолированы два таких тела, то монотонное изменение их энтропий не может происходить в противоположных направлениях. Последнее немедленно видно из того, что эти две системы при помощи сколь угодно слабого возмущения могут быть объединены в одну единую систему, по крайней мере, если периоды их изоляции одновременны или частично перекрываются. Если применить изложенное выше доказательство монотонного изменения энтропии к нашему случаю связанных слабым возмущением частей системы, то легко увидеть, что направления изменения энтропии частей не могут быть противоположными. Если различные системы были изолированы от окружающего мира не одновременно, то можно считать, что нужная для доказательства связь осуществляется через некоторое число промежуточных систем. Таким образом, мы видим, что либо

энтропия любой подчиняющейся статистике макросистемы, которая изолирована от окружающего мира на не слишком большой срок, остается постоянной, либо возрастание энтропии происходит в определенном универсальном направлении времени.

Какая же из этих двух возможностей реализуется в природе? Если представлять себе Вселенную как единую замкнутую систему, подчиняющуюся классической или волновой механике, то мы были бы вынуждены заключить вместе с Больцманом, что мир как целое находится в состоянии статистического равновесия. Больцман пытался совместить это следствие с явным отсутствием статистического равновесия в наблюдаемой части Вселенной при помощи своей известной флуктуационной гипотезы. То обстоятельство, что нам удалось стать свидетелями столь чудовищной флуктуации, Больцман стремился объяснить тем, что как раз осуществление такой флуктуации и является необходимым условием существования наблюдателя (т. е. подходящих условий для биологического развития организмов и т. д.). Однако его довод полностью ошибочен, ибо в такой флуктуационной Вселенной существование одного-единственного наблюдателя без приготовленной для него сцены, наполненной мириадами мириад звезд, отвечало бы несравнимо большей энтропии, и, следовательно, в чудовищной степени большей вероятности. Отсюда мы заключаем: подчиняющаяся статистике Вселенная не могла бы содержать заметных флуктуаций; в подобном мире все неравенства в законе монотонного изменения энтропии пришлось бы заменить равенствами, и оба направления временной оси были бы полностью эквивалентными.

Однако повседневный опыт показывает, что подобная ситуация не имеет места. Этого обстоятельства вполне достаточно (даже без боровской гипотезы относительно свойств внутренних частей звезд, описываемых только релятивистской квантовой теорией) для заключения о том, что во Вселенной имеется часть, которая не подчиняется статистике. Это делает оба направления временной оси неэквивалентными; направление времени, которое совпадает с возрастанием энтропии каждой системы, изолированной от окружающего мира на не слишком долгое время, мы называем будущим по определению; классической механике понятия прошедшего и будущего полностью чужды. Только тогда второй закон термодинамики станет *законом возрастания энтропии*. Этот закон, равно как и известное всем из повседневного опыта самое существование прошедшего и будущего, возможен только потому, что мир как целое не подчиняется законам термодинамики.

ВОЗМОЖНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ОТ ПОЛЯ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Phys. Zs. Sowjet., 4, 675, 1933

Хлориды хрома, двухвалентного железа, кобальта и никеля обладают тем свойством, что при обычных температурах их магнитная восприимчивость возрастает с падением температуры сильнее, чем этого требует закон Кюри. Согласно обычным представлениям это должно было бы указывать на ферромагнетизм.

Однако при низких температурах эти вещества ферромагнетизмом не обладают, их восприимчивость показывает зависимость от поля.

Я хотел бы указать на объяснение этой аномалии, которое является непосредственным результатом теоретического анализа и находится в согласии с известными фактами. Поскольку упомянутые элементы образуют как ферро-, так и парамагнитные соединения, то отсюда можно заключить, что силы, ориентирующие спины друг относительно друга, могут быть и положительными и отрицательными в зависимости, по всей вероятности, главным образом от расстояния между атомами.

Все названные вещества имеют кристаллическую решетку, в которой парамагнитные атомы расположены слоями, причем расстояния между слоями существенно больше межатомных расстояний внутри слоя. Если теперь предположить, что ориентирующие силы внутри одного слоя положительны, а силы, действующие между различными слоями, отрицательны и существенно меньше по величине, то возникает следующая картина. При низких температурах мы имеем спонтанно намагниченные слои, чьи магнитные моменты, однако, ориентированы в противоположных направлениях, так что спонтанное намагничение макроскопических областей, а следовательно, и ферромагнетизм отсутствует. Так как противоположное ориентирующее взаимодействие между

различными слоями сравнительно мало, то достаточно присутствия уже сравнительно слабого поля, чтобы сильно изменить противоположную ориентацию моментов. Это приводит также к отклонению от линейной зависимости суммарного момента от поля и в конце концов даже к явлениям насыщения, состоящим в том, что магнитное поле ориентирует магнитные моменты слоев параллельно своему направлению.

При построении количественной теории явления следует принять во внимание три различных эффекта: 1) намагниченность насыщения каждого отдельного слоя, температурная зависимость которой приблизительно описывается кривой Вейсса; 2) эффект обмена между различными слоями, который в первом приближении вполне можно принять пропорциональным скалярному произведению магнитных моментов этих слоев; 3) вызванное релятивистскими эффектами взаимодействие магнитных моментов каждого отдельного слоя с решеткой, которое из соображений симметрии в первом приближении пропорционально квадрату компоненты магнитного момента, параллельной оси симметрии.

Согласно развитым представлениям, названные тела должны обладать, как и ферромагнетики, точкой Кюри, в которой спонтанная намагниченность каждого слоя обращается в нуль. Аналогично в этой точке Кюри следует ожидать скачка теплоемкости, величина которого должна вычисляться точно так же, как и у ферромагнетиков.

Для вычисления восприимчивости в районе точки Кюри рассмотрим свободную энергию, которая складывается из трех частей, обсуждавшихся выше. В отсутствие поля можно принять, что магнитные моменты слоев ориентированы попарно в противоположных направлениях, так что все слои распадаются на две различные группы. Это разделение сохраняется также и под действием магнитного поля. Отсюда получаются следующие свободные энергии.

1. Свободная энергия на один атом для эффекта обмена внутри каждого слоя, которую мы разложим по степеням среднего момента слоя, отнесенного на один атом, удержав при этом только первые члены:

$$F_1 = \frac{a}{2} m_1^2 + \frac{b}{4} m_1^4 \quad (1)$$

(нечетные степени, разумеется, выпадают по соображениям симметрии), и аналогичное выражение для слоев второго типа:

$$F_2 = \frac{a}{2} m_2^2 + \frac{b}{4} m_2^4. \quad (2)$$

2. Энергия обмена между слоями двух типов, рассчитанная на пару атомов

$$F_3 = Am_1m_2. \quad (3)$$

3. Свободная энергия взаимодействия момента с решеткой:

$$F_4 = \frac{\alpha}{2}(m_{1x}^2 + m_{1y}^2), \quad F_5 = \frac{\alpha}{2}(m_{2x}^2 + m_{2y}^2) \quad (4)$$

и, наконец, энергия во внешнем поле:

$$F_6 = -Hm_1, \quad F_7 = -Hm_2. \quad (5)$$

Таким образом, полная свободная энергия на один атом равна

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7). \quad (6)$$

Положим теперь

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = m, \quad \frac{m_1 - m_2}{2} = l. \quad (7)$$

Тогда, как легко вычислить,

$$F = \frac{a-A}{2}l^2 + \frac{bl^4}{4} + \frac{\alpha}{2}(l_x^2 + l_y^2) + \frac{a+A}{2}m^2 + \frac{\alpha}{2}(m_x^2 + m_y^2) + \\ + \frac{b}{2}m^2l^2 + b(ml)^2 + \frac{b}{4}m^4 - Hm.$$

Если внешнее поле равно нулю, то в нуль обращается также и суммарный момент на один атом. Величину l следует тогда определять из условия минимума для трех первых членов. При этом мы примем, что величина α положительна, т. е. ось z является направлением легчайшего намагничения. Состояние с $l \neq 0$ дает минимум или максимум свободной энергии в зависимости от того, отрицательна или положительна величина $a - A$.

Следовательно, в точке Кюри $a - A = 0$. Вблизи от точки Кюри можно записать

$$a = A + \beta(T - \Theta),$$

где через Θ обозначена температура Кюри и β положительна. Все остальные величины считаются приблизительно не зависящими от температуры. Выше точки Кюри $l = 0$ и [зависящая от m часть свободной энергии приобретает вид

$$\frac{1}{2}[2A + \beta(T - \Theta)]m_x^2 + \frac{1}{2}[2A + \alpha + \beta(T - \Theta)](m_x^2 + m_y^2) - \\ - H_x m_x - H_y m_y - H_z m_z;$$

здесь мы пренебрегли членом с m^4 . Из условия минимума получается

$$m_z = \frac{H_z}{\beta(T - \Theta) + 2A},$$

$$m_x = \frac{H_x}{\beta(T - \Theta) + \alpha + 2A},$$

$$m_y = \frac{H_y}{\beta(T - \Theta) + \alpha + 2A}.$$

Таким образом, для восприимчивости, рассчитанной на один атом, получаем

$$\chi_z = \frac{\frac{1}{\beta}}{T - \Theta + \frac{2A}{\beta}}, \quad \chi_x = \chi_y = \frac{\frac{1}{\beta}}{T - \Theta + \frac{\alpha + 2A}{\beta}}.$$

Ниже точки Кюри требование минимума по l дает

$$\beta(T - \Theta) + bl^2 = 0,$$

$$l^2 = \frac{\beta(\Theta - T)}{b}. \quad (8)$$

Если теперь подставить это выражение в часть, зависящую от m ,

$$\left[A + \frac{\beta(T - \Theta) + bl^2}{2} \right] m^2 + \frac{\alpha}{2} (m_x^2 + m_y^2) + bl^2 m_z^2 - \text{Hm},$$

то получится

$$[A + \beta(\Theta - T)] m_z^2 + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) (m_x^2 + m_y^2) - H_x m_x - H_y m_y - H_z m_z.$$

Отсюда аналогичным образом находим

$$\chi_z = \frac{\frac{1}{\beta}}{2(\Theta - T) + \frac{2A}{\beta}}, \quad \chi_x = \chi_y = \frac{1}{2A + \alpha}. \quad (9)$$

Таким образом, при высоких температурах из нашего рассмотрения действительно получается закон Вейсса. Однако температура Кюри лежит выше, чем постоянная Вейсса Θ_w , так что в точке Кюри χ достигает конечного значения. Выведенные формулы показывают, что при дальнейшем понижении температуры χ должно продолжать падать (что, впрочем, в действительности имеет место только у части перечисленных выше веществ; вопрос о причинах этого противоречия мы оставляем открытым).

При низких температурах появляется исключительно сильная анизотропия, когда согласно формулам (9) χ_x и χ_y становятся большими по сравнению с χ_z . Отношение $A/\beta\Theta$ выражает отношение эффекта обмена между двумя слоями к обмену внутри одного слоя и в силу этого должно быть всегда малым. То же самое справедливо и для $\alpha/\beta\Theta$, представляющего [собой отношение релятивистского эффекта к обменному.

Это утверждение, разумеется, связано с предположением о том, что $\alpha > 0$. Его сравнение с экспериментом в настоящее время невозможно ввиду отсутствия измерений на монокристаллах.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

Совместно с Г. ГАМОВЫМ

Nature, 132, 567, 1933

Интересно отметить, что изучение процессов тепловой трансформации легких элементов в звездах [1] дает возможность оценить верхний предел для температуры во внутренних областях. В самом деле, если на поверхности звезды имеется, например, литий, то естественно предположить, что он находится в равновесии с тем количеством лития, которое содержится во внутренних областях, близких к звездному ядру, где происходит образование разных элементов. На своем пути от звездного ядра сквозь горячие области звезды часть атомов лития будет разрушена в результате тепловых столкновений с атомами водорода ($\text{Li}^7 + \text{H}^1 \rightarrow 2 \text{He}^4$) и вовсе не достигнет поверхности, если температура внутренних областей слишком высока.

Для скорости реакции рассматриваемого типа имеем

$$\omega \sim \int \pi \left(\frac{\hbar}{mv} \right)^2 e^{-2\pi Ze^2/\hbar v} \cdot v \cdot N \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} dv, \quad (1)$$

где Z — атомный номер элемента, v и N — скорость и плотность протонов, а T — абсолютная температура.

Вычисляя интеграл, получаем

$$\omega \sim N \hbar^{3/2} \frac{(4\pi Ze^2)^{1/2}}{m^{1/2} (kT)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{3}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \right)^{1/2} \right\}. \quad (2)$$

С другой стороны, за время $1/\omega$ атом лития пройдет расстояние

$$l \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}}, \quad (3)$$

где коэффициент диффузии D дается выражением

$$D \sim \sqrt{\frac{kT}{mM}} \frac{1}{N_1 \sigma}, \quad (4)$$

где N_1 — полное число атомов в 1 см^3 , σ — эффективное сечение столкновений, M — атомный вес рассматриваемого элемента.

Используя (2) и (4), получаем из (3):

$$l \sim \frac{m^{3/12} (kT)^{7/12}}{(NN_1\sigma)^{1/2} \hbar^{3/4} M^{1/4} (4\pi Ze^2)^{1/4}} \cdot \exp \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{m}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \right)^{3/2} \right\}. \quad (5)$$

Полагая $N \sim N_1 \sim 10^{24}$ и $\sigma \sim 10^{-18} \text{ см}^2$, для лития ($Z = 3$) находим следующие цифры:

T°	10^6	$5 \cdot 10^6$	10^7	$5 \cdot 10^7$	10^8
$l, \text{ см}$	10^{13}	10^6	10^4	10	1

Отсюда можно прийти к заключению, что либо литий попадает на поверхность лишь изредка, либо внутри звезды не может существовать областей с температурами, превышающими несколько миллионов градусов.

Хибинь

ЛИТЕРАТУРА

[1] Atkinson, Houtermans. Zs. Phys., 54, 656, 1929.

СТРУКТУРА НЕСМЕЩЕННОЙ ЛИНИИ РАССЕЯНИЯ

Совместно с Г. ПЛАЧЕКОВ

Phys. Zs. Sowjet., 5, 172, 1934

Тонкая структура несмещенной линии, возникающей при рассеянии света, многократно исследовалась за последние годы¹, однако, как нам кажется, проблема ни теоретически, ни экспериментально до сих пор полностью не выяснена. Ниже сообщаются некоторые результаты теоретического исследования относящихся сюда вопросов, поскольку появление подробной работы задерживается по внешним причинам.

Если ограничиться для начала рассеянным излучением, связанным с колебаниями плотности, то с помощью теории флуктуаций можно показать, что для жидкостей и не слишком разреженных газов (условия применимости см. ниже) несмещенная линия распадается на триплет. Обе внешние компоненты триплета представляют собой известный мандельштам-бриллюеновский дублет с расщеплением, зависящим от угла:

$$\Delta\nu = \pm v \frac{v}{c} 2 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

(v — скорость звука). Однако наряду с дублетом существует еще и несмещенная компонента, причем доля обеих внешних компонент в суммарной интенсивности триплета с хорошей точностью дается отношением теплоемкостей c_v/c_p . Поэтому, например, для одноатомного идеального газа относительные интенсивности всех трех компонент равны 3:4:3; для большинства жидкостей ($c_p/c_v \sim 1,4$)

¹ См. в особенности работы Гросса [1]. Дальнейшая экспериментальная литература, — например, в работе Мейера и Рамма [2], а теоретическая — в работе М. А. Леонтовича [3].

интенсивность средней компоненты по порядку величины также совпадает с интенсивностью обеих крайних. При приближении к критической точке интенсивность внешних компонент остается постоянной, в то время как средняя компонента сильно возрастает.

Для ширины всех трех компонент можно получить количественные формулы; они определяются вязкостью и теплопроводностью.

Описанные результаты в случае газов пригодны лишь пока $l \ll \lambda / 2 \sin \frac{\theta}{2}$ (l — длина пробега). Для больших пробегов три компоненты постепенно сливаются в одну, и, наконец, при $l \gg \lambda / 2 \sin \frac{\theta}{2}$ линия становится гауссовой с зависящей от угла шириной, какой она определяется эффектом Доплера.

Более сложная ситуация имеет место для той части релеевской линии, которая не связана с колебаниями плотности. В случае жидкостей для структуры этой части определяющую роль играет дебаевское время релаксации. Более детальное обсуждение этих вопросов, равно как ситуации в кристаллах, и сравнение с экспериментом мы откладываем до подробной работы*.

*Институт теоретической физики
Копенгаген,*

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gross. Nature, 126, 400, 603, 1930; 129, 722, 1932.
- [2] Meyer, Ramm. Phys. Zs., 33, 270, 1932.
- [3] M. A. Leontowitsch. Zs. Phys., 72, 247, 1931.

* Подробная статья не была опубликована. — Прим. ред.

К ТЕОРИИ ТОРМОЖЕНИЯ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗЛУЧЕНИЕМ

ЖЭТФ, 5, 255, 1935

Phys. Zs. Sowjet., 5, 761, 1934

Указывается простой метод вычисления излучения торможённых электронов, устанавливающий предел применения формулы Гайтлера.

В работе Гайтлера [1] было вычислено эффективное сечение для излучения торможённых быстрых электронов. При этом было установлено, что оно не зависит от энергии, так что пробег быстрых электронов, казалось бы, стремится при больших энергиях к некоторой границе, что представляется маловероятным. Я хотел бы указать здесь на простой метод для вычисления излучения, который устанавливает предел применимости формулы Гайтлера и в то же время даёт более общие результаты.

Вместо того чтобы рассматривать систему координат, в которой покоится ядро, а электрон пролетает со скоростью света, мы рассмотрим систему координат, в которой электрон приближённо покоится, так что неопределённость его скорости, во всяком случае, мала по сравнению с c . Наименьшее расстояние между ядром и электроном обозначим через r (как следует из преобразования Лоренца, эта величина в обеих системах координат одинакова). Эта величина в таком случае также известна неточно, причем неопределённость ее связана с неопределённостью скорости известным соотношением

$$\Delta r \Delta v \sim \frac{\hbar}{m}.$$

Так как $\Delta v \ll c$ и Δr мало по сравнению с r , то

$$r \gg \frac{\hbar}{mc}. \quad (1)$$

Можно показать, что так как $Ze^2 / \hbar c$ всегда меньше единицы, то в этом случае движение электрона также можно приближенно рассматривать как свободное.

Продолжительность столкновения τ в покоящейся системе координат порядка величины

$$\tau \sim \frac{r}{c}.$$

В подвижной системе координат она уменьшается вследствие лоренцова сокращения. Если ввести обозначение

$$\varepsilon = \frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

то продолжительность столкновения τ'

$$\tau' = \frac{r}{c\varepsilon}. \quad (3)$$

Ей соответствует частота

$$\omega = \frac{c\varepsilon}{r}. \quad (4)$$

Сила в подвижной системе координат, как известно, в основном параллельна направлению r и по сравнению с покоящейся системой координат в ε раз увеличена. Таким образом,

$$E' = \frac{Ze}{r^2} \varepsilon. \quad (5)$$

Электрон в подвижной системе координат находится под влиянием плоской волны, частота которой дается уравнением (4), продолжительность действия — (3) и сила — (5).

Излучение может быть истолковано как рассеяние этой волны. Это рассеяние происходит, как известно, существенно различно в зависимости от величины $\hbar\omega/mc^2$.

Рассмотрим сначала случай, где $\hbar\omega \ll mc^2$, т. е. $r \gg \frac{\hbar}{mc} \varepsilon$.

В этом случае рассеяние происходит вполне классически. Полная излученная энергия представляется в этом случае известной формулой

$$\Delta E' \approx \frac{e^2}{c^3} w'^2 \tau', \quad (6)$$

где w' — ускорение.

Если положить

$$w' = \frac{eE'}{m} \quad (7)$$

и подставить уравнения (5) и (3), то мы получаем

$$\Delta E' \approx \frac{Z^2 e^6 \varepsilon}{m^2 c^4 r^3}. \quad (8)$$

Излученный импульс согласно классической теории у покоящегося электрона, как известно,

$$\Delta p' = 0. \quad (9)$$

В покоящейся системе координат поэтому

$$\Delta E = \frac{\Delta E' + v \Delta p'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim \Delta E' \varepsilon \sim \frac{Z^2 e^6 \varepsilon^2}{m^2 c^4 r^3}. \quad (10)$$

В подвижной системе координат рассеяние распределяется по различным направлениям примерно одинаково. В покоящейся системе координат мы, следовательно, получаем рассеяние вперед в интервале углов порядка величин

$$\theta \sim \frac{1}{\varepsilon}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь второй предельный случай, где

$$\hbar \omega \gg mc^2, \quad (12)$$

$$r \ll \frac{\hbar}{mc} \varepsilon. \quad (13)$$

В этом случае мы уже не можем вычислять классически, а должны применять к рассеянию теорию комптон-эффекта. Число рассеянных световых квантов согласно формуле Клейна — Нишины определяется эффективным поперечником

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\ln \frac{\hbar \omega}{mc^2}}{\frac{\hbar \omega}{mc^2}}. \quad (14)$$

Полное число рассеянных квантов есть

$$\Delta N \sim \frac{cE'^2}{\hbar \omega} \sigma \sim \frac{Z^2 e^6}{\hbar^2 m^2 c^4 \varepsilon r} \ln \frac{\hbar \varepsilon}{mcr}. \quad (15)$$

В подвижной системе координат направление рассеянных квантов произвольно, а их энергия, напротив, порядка величины mc^2 . В покоящейся системе координат, следовательно, энергия квантов порядка величины $mc^2 \varepsilon$, т. е. порядка величины кинетиче-

ской энергии. Средняя излученная энергия

$$\Delta E \sim \Delta N mc^2 \varepsilon \sim \frac{Z^2 e^6}{\hbar^2 c^2 r} \ln \frac{\hbar \varepsilon}{mcr}. \quad (16)$$

Если положить $\hbar \omega \approx mc^2$, $r_0 \approx \hbar \varepsilon / mc$, то формулы (16) и (10), конечно, совпадают и дают

$$\Delta E \sim \frac{mZ^2 e^6}{\hbar^3 c \varepsilon}. \quad (17)$$

Область применения формулы (16), кроме (13) и (1), определяется еще и пределами применимости формулы Клейна — Нишины. Мы могли бы ожидать, что эти последние даются условием, что длина волны должна быть велика по сравнению с «электронным радиусом». В нашем случае это дает

$$\frac{r}{\varepsilon} \gg \frac{e^2}{mc^2}, \quad (18)$$

$$r \gg \frac{e^2}{mc^2} \varepsilon. \quad (19)$$

Эта граница может иметь значение только при

$$\varepsilon \sim \frac{\hbar c}{e^2}.$$

Эффективное сечение для излучения торможения дается формулой

$$\Phi = \frac{S \cdot \Delta E \cdot 2\pi r dr}{E}. \quad (20)$$

Если подставить в (20) выражение (10), то мы видим, что интеграл сходится при больших r . Если подставить (16), то мы видим, что то же самое имеет место и для малых r . Существенную роль, следовательно, играет переходный случай

$$\hbar \omega \sim mc^2, \quad r \sim \frac{\hbar}{mc} \varepsilon, \quad \Delta E \sim \frac{mZ^2 e^6}{\hbar^3 c \varepsilon}.$$

Эффективный поперечник получается, таким образом, в виде

$$\Phi \sim \frac{\Delta E r^2}{E} \sim \frac{Z^2 e^6}{\hbar m^2 c^5}. \quad (21)$$

Это есть не что иное, как формула Гайтлера.

*Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР*

ЛИТЕРАТУРА

[1] W Heitler. Zs. Phys., 84, 145, 1933.

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ
ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ ЧАСТИЦ

Совместно с Е. М. ЛИОШИЦЕМ

Phys. Zs. Sowjet, 6, 244, 1934

Рассмотрено образование электрона и позитрона при столкновении двух частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Получено эффективное сечение процесса; оно возрастает, как куб логарифма энергии сталкивающихся ядер.

§ 1. Дираковская теория электронов и позитронов дает возможность изучить эффекты образования электронных пар при различного рода столкновениях. В рамках этой теории эффект в целом можно описать, считая, что под влиянием сталкивающихся частиц электрон с отрицательной энергией переходит в состояние с положительной энергией, в результате чего образуются электрон и «дырка», т. е. позитрон.

В первом порядке теории возмущений (что означает невозмущенные волновые функции для электрона и учет взаимодействия двух частиц) эффект обязан взаимодействию обеих частиц. При этом можно без труда показать, что для скоростей сталкивающихся частиц, близких к скорости света, вероятность образования электронной пары зависит от относительного ускорения сталкивающихся частиц, т. е. обратно пропорциональна квадрату их массы. Тем самым в этом случае (мы рассмотрим здесь лишь случай $1 - \frac{v}{c} \sim 0$, когда энергия велика в сравнении с массой, умноженной на c^2) эффект первого порядка гораздо меньше, чем эффект второго порядка. В следующем приближении ядра можно считать невзаимодействующими (т. е. движущимися прямолинейно), поскольку при больших скоростях пренебрежение их взаимодействием законно. Эффект обязан тогда исключительно

суперпозиции полей обоих ядер. Первое приближение теории возмущений в таких условиях дало бы нулевой результат.

Применяемый ниже метод состоит в следующем: вычисляется волновая функция электрона в состоянии с отрицательной энергией (до столкновения), возмущенная полем частиц. С помощью этой функции и волновой функции электрона с положительной энергией (после столкновения) конструируется матричный элемент возмущения, квадрат которого и дает вероятность перехода, т. е. образования электрона и позитрона. Взаимодействием обоих ядер пренебрегаем.

Метод, разумеется, симметричен по отношению к электрону и позитрону и, кроме того, относительно обоих ядер. Поэтому совершенно безразлично, какое из двух считать покоящимся; результат должен быть инвариантен относительно преобразования Лоренца (v — относительная скорость ядер, E_2 — энергия электрона с положительной энергией, $E_1 = -|E_1|$ — для состояния с отрицательной энергией, т. е. для позитрона; ось x лежит в направлении v):

$$E_1 = \frac{E_1' - v p_{1x}'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad E_2 = \frac{E_2' - v p_{2x}'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

(в дальнейшем мы полагаем $c = 1$, т. е. размерность скорости равна единице; степени c , необходимые для обеспечения правильной размерности, могут быть вставлены в конечный результат). Если энергия велика и импульс составляет малый угол с осью x (что, как будет показано ниже, в действительности имеет место), то

$$p_x = E - \frac{m^2 + p^2}{2E} - \frac{(m^2 + p^2)^2}{8E^3} - \dots \quad (1)$$

($p^2 = p_x^2 + p_y^2$) и преобразование Лоренца с точностью до членов высшего порядка имеет вид

$$E_1 = \frac{m^2 + p_1^2}{2E_1' \sqrt{1 - v^2}}, \quad E_2 = \frac{m^2 + p_2^2}{2E_2' \sqrt{1 - v^2}}. \quad (2)$$

Если частицы теряют лишь малую часть своей энергии, что позволяет пренебречь их взаимодействием, результат не зависит от природы частиц и имеет одинаковый вид как для двух сталкивающихся ядер (в дальнейшем мы будем говорить только об этом случае), так и для ядра и электрона. Последний случай исследовался Карлсоном и Фарри [1], однако, как мы увидим, полученный здесь результат отличается от полученного Карлсоном и

Фарри. Следует отметить, что их результат не инвариантен относительно преобразования (2), хотя в их случае — E_1 и E_2 достаточно велики.

§ 2. Перейдем теперь к вычислению сечения образования пары. До столкновения электрон занимает состояние с отрицательной энергией. Его 4-импульс p_1 имеет компоненты p_{1k} ($p_{11}, p_{12}, p_{13} = p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}; p_{14} = iE_1, E_1 = -|E_1|$). Первое ядро (с зарядом Z_1e) покоится, а второе (Z_2e) движется со скоростью v вдоль оси x ; их 4-скорости равны соответственно:

$$u^{(1)} = u_0^{(1)} = (0, 0, 0, i),$$

$$u^{(2)} = \frac{u_0^{(2)}}{\sqrt{1-v^2}} = \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0, \frac{i}{\sqrt{1-v^2}} \right). \quad (3)$$

Удобства ради мы предположим, что поле состоит из сильной дискретной плоской волны

$$\varphi_k^{(1)} e^{i\omega_k^{(1)} x_k}, \quad \hbar\omega_k^{(1)} = p'_k - p_{1k} \quad (k = 1, 2, 3, 4; x_{1,2,3,4} = x, y, z, it)$$

и составляющей с непрерывным спектром $\varphi_k^{(2)}$. Величины $\varphi_{1,2,3}$ представляют собой компоненты векторного потенциала \mathbf{A} , а $\varphi_4 = i\varphi$ — скалярный потенциал, умноженный на i . После столкновения электрон находится в состоянии с положительной энергией, его 4-импульс есть p_2 . Мы введем также двухмерный вектор p с компонентами p_x, p_y .

Начальные состояния (с отрицательной энергией) образуют непрерывный ряд, который до столкновения (когда пространство пусто) полностью заполнен. Поэтому вероятность перехода следует относить к дифференциалу импульса.

Невозмущенные волновые функции электрона до и после столкновения должны быть, следовательно, нормированы на δ -функцию в импульсном пространстве, т. е.

$$\Psi_1^{(0)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi_1^{(0)} e^{\frac{i}{\hbar} p_{1k} x_k}, \quad \Psi_2^{(0)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi_2^{(0)} e^{\frac{i}{\hbar} p_{2k} x_k},$$

$$|\Psi_1^{(0)}|^2 = |\Psi_2^{(0)}|^2 = 1, \quad (4)$$

и удовлетворять уравнению Дирака

$$(m + \gamma_k p_k) \Psi^{(0)} = 0, \quad (5)$$

где

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = -2\delta_{ik} \quad (6)$$

и

$$p_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Подставляя (4) в (5), мы получим систему алгебраических уравнений для определения $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$:

$$(m + \gamma_l p_{1l}) \psi_1^{(0)} = 0, \quad (m + \gamma_l p_{2k}) \psi_2^{(0)} = 0.$$

Тогда волновая функция электрона в состоянии с отрицательной энергией, возмущенная полем первого ядра, должна удовлетворять уравнению

$$[m + \gamma_k (p_k + e\varphi_k^{(1)} e^{i\omega^{(1)} x_i})] \Psi_1 = 0$$

(здесь мы пренебрегли $\varphi_k^{(2)}$ по сравнению с $\varphi_k^{(1)}$). Будем искать Ψ_1 в виде

$$\Psi_1 = \Psi_1^{(0)} + \Psi', \quad \Psi' = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi' e^{\frac{i}{\hbar} p'_k x_k}.$$

Тогда, пренебрегая членом $e\gamma_k \varphi_k^{(1)} \exp(i\omega^{(1)} x_i) \psi'$ и умножая на $m - \gamma_k p'_k$, получим

$$\psi' = \frac{(-m + \gamma_l p'_k) e \gamma_l \varphi_l^{(1)}}{m^2 + p_i'^2} \psi_1^{(0)}. \quad (7)$$

Как это часто делается во втором приближении теории возмущений, p'_k можно назвать 4-импульсом «промежуточного состояния». Матричный элемент возмущения, относящийся к переходу из «промежуточного» состояния (Ψ') в состояние с положительной энергией ($\Psi_2^{(0)}$), равен

$$\begin{aligned} \frac{e}{2\pi\hbar^3} \int \psi_2^{(0)*} \gamma_4 \gamma_k \varphi_k^{(2)} \psi' d\tau &= \\ &= \frac{e^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\psi_2^{(0)*} \gamma_4 (\gamma_k^{(2)}) [-m + (\gamma p')]}{m^2 + p'^2} (\gamma \varphi^{(1)}) \psi_1^{(0)}, \quad (8) \\ d\tau &= dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned}$$

где γ — 4-вектор с компонентами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, а

$$\chi_k^{(2)} = \int \varphi_k^{(2)} e^{-i\omega_k^{(2)} x_k} d\tau, \quad \hbar\omega_k^{(2)} = p_{2k} - p'_k \quad (9)$$

представляет собой фурье-компоненту с частотой $\omega_k^{(2)}$, лежащей в непрерывном спектре (при выводе (8) мы брали возмущение в

виде $e\gamma_4\gamma_k\varphi_k^{(2)}$ и пренебрегли членом $\varphi_k^{(1)}\exp(i\omega_k^{(1)}x_i)$, поскольку две дискретные плоские волны дают переход, только если сумма их частот равна $(p_{2k} - p_{1k})/\hbar$, что в нашем случае дает пренебрежимый вклад; при выводе использовалось также (7).

Перейдем теперь от дискретной плоской волны $\varphi_k^{(1)}$ к фурье-компоненте $\chi_k^{(1)}$ с частотой $\omega_k^{(1)}$, лежащей в интервале $dp_1dp_2dp_3dp_4$ непрерывного спектра. Для этого, как легко убедиться из теории интеграла Фурье, следует подставить вместо $\varphi_k^{(1)}$ величину

$$\frac{\chi_k^{(1)} dp_1' dp_2' dp_3' dp_4'}{(2\pi\hbar)^4} = \frac{\chi_k^{(1)} d\pi'}{(2\pi\hbar)^4}, \quad d\pi' = dp_1' dp_2' dp_3' dp_4'.$$

Интегрируя по всему спектру, чтобы получить полный эффект, и деля на \hbar , находим амплитуду вероятности

$$P = \frac{e^2}{(2\pi\hbar)^7 \hbar} \int \frac{\psi_2^{(0)*} \gamma_4(\gamma\chi^{(2)}) [-m + (\gamma P')](\gamma\chi^{(1)}) \psi_1^{(0)}}{(m^2 + p'^2)} d\pi'. \quad (10)$$

Теперь мы должны определить потенциалы $\chi_k^{(1)}$ и $\chi_k^{(2)}$ поля ядер, движущихся прямолинейно без взаимодействия. Это лучше всего сделать в трехмерной форме. Для скалярного и векторного потенциалов первого и второго ядер имеем

$$\begin{aligned} \square \varphi &= -4\pi e Z \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0), \\ \square \mathbf{A} &= -4\pi e Z \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{v} — трехмерные радиус-вектор и скорость ядер; \mathbf{r}_0 — радиус-вектор одного из двух ядер в тот момент, когда ядра наименее всего удалены одно от другого. Предположим, что первое ядро покоится в начале координат, а второе движется параллельно оси x ; тогда $\mathbf{r}_0^{(1)} = 0$, а $\mathbf{r}_0^{(2)}$ имеет только y - и z -компоненты.

Беря от обеих частей (11) фурье-компоненту с частотой ω_k , получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}^2 - \omega^2) \iint \varphi e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dV dt &= 4\pi Ze \iint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dV dt = \\ &= 4\pi Ze \int e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v}t + \mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \omega t)} dt, \\ (\mathbf{k}^2 - \omega^2) \iint \mathbf{A} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dV dt &= 4\pi Ze \mathbf{v} \int e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v}t + \mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \omega t)} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

$$i\omega = \omega_4, \quad k_{x, y, z} = \omega_{1, 2, 3}, \quad dV = dx dy dz.$$

С помощью хорошо известной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} dt = 2\pi \delta(\alpha) \quad (13)$$

(12) дает

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{k}^2 - \omega^2) \iint \varphi e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dV dt &= 8Z\pi^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), & (14) \\
 (\mathbf{k}^2 - \omega^2) \iint A e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dV dt &= 8Z\pi^2 v e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).
 \end{aligned}$$

Используя обозначения (9), последние соотношения можно переписать в четырехмерной форме. Таким образом, мы получаем для поля, созданного обоими ядрами:

$$\begin{aligned}
 \omega_i^{(1)2} \chi_k^{(1)} &= 8\pi^2 Z_1 e u_k^{(1)} e^{-i\omega_i^{(1)} x_{0i}^{(1)}} \delta(\omega_i^{(1)} u_i^{(1)}) + \\
 &\quad + 8\pi^2 Z_2 e u_k^{(2)} e^{-i\omega_i^{(1)} x_{0i}^{(2)}} \delta(\omega_i^{(1)} u_i^{(2)}), & (15) \\
 \omega_i^{(2)2} \chi_k^{(2)} &= 8\pi^2 Z_1 e u_k^{(1)} e^{-i\omega_i^{(2)} x_{0i}^{(1)}} \delta(\omega_i^{(2)} u_i^{(1)}) + \\
 &\quad + 8\pi^2 Z_2 e u_k^{(2)} e^{-i\omega_i^{(2)} x_{0i}^{(2)}} \delta(\omega_i^{(2)} u_i^{(2)}).
 \end{aligned}$$

Эти выражения следует подставить в амплитуду вероятности (10). Квадрат ее модуля, просуммированный по двум состояниям с противоположными направлениями спинов, дает вероятность столкновения с образованием позитрона с энергией и импульсом, лежащими в интервале $d|p_{1y}| d|p_{1z}| d|E_1| = d\pi_1$, и электрона — в интервале $dp_{2y} dp_{2z} dE_2 = d\pi_2$:

$$dW_{p_1 E_1 p_2 E_2} = \sum |P|^2 d\pi_1 d\pi_2$$

(p_x определяется по известным E и p). Эффективное сечение $d\Phi_{p_1 E_1 p_2 E_2}$ получается путем интегрирования по dy и dz .

Прежде чем записать выражение для амплитуды вероятности, заметим, что эффект могут дать только два ядра и что поэтому при подстановке (15) в (10) нужно оставить лишь члены, содержащие $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ вместе, т. е. обязанные обоим ядрам.

С учетом сказанного получим

$$P = \frac{e^4 Z_1 Z_2}{2\hbar^2 \pi^3} \psi_2^{(0)*} Q \psi_1^{(0)},$$

$$Q = \gamma_4 (\gamma u_0^{(2)}) [-I_0 + (\gamma I)] (\gamma u_0^{(1)}) + \gamma_4 (\gamma u_0^{(1)}) [-I_0' + (\gamma I')] (\gamma u_0^{(2)}); \quad (16a)$$

$$I_i = \int \frac{p_i' e^{-i\omega_k^{(2)} x_{0k}^{(2)}} \delta\{([p' - p_1] u_0^{(1)})\} \delta\{([p_2 - p'] u_0^{(2)})\} d\pi'}{(m^2 + p'^2) (p_1 - p')^2 (p_2 - p')^2}; \quad (16б)$$

$$I_i' = \int \frac{p_i' e^{-i\omega_k^{(1)} x_{0k}^{(1)}} \delta\{([p' - p_1] u_0^{(2)})\} \delta\{([p_2 - p'] u_0^{(1)})\} d\pi'}{(m^2 + p'^2) (p_1 - p')^2 (p_2 - p')^2} \quad (16в)$$

(как уже упоминалось, $x_{0k}^{(1)}$ положено равным нулю и вместо $\delta(\omega_k^{(1)} u_k^{(1)})$ и $\delta(\omega_k^{(2)} u_k^{(2)})$ мы написали

$$\delta(\omega_k^{(1)} u_k^{(1)}) = \hbar \delta\{([p' - p_1] u_0^{(1)})\},$$

$$\delta(\omega_k^{(2)} u_k^{(2)}) = \hbar \sqrt{1 - v^2} \{([p_2 - p'] u_0^{(2)})\};$$

I — 4-вектор с компонентами I_1, I_2, I_3, I_4 .

Благодаря наличию δ -функций интегрирование по dp'_1 и dp'_4 (т. е. dp_x и dE') может быть проведено сразу. Оно дает

$$\begin{aligned} (p'_k - p_{1k}) u_{0k}^{(1)} &= 0, & (p_{2k} - p'_k) u_{0k}^{(2)} &= 0, \\ -ip'_4 = E' = E_1, & & p'_1 = p'_x = \frac{1}{v} (E_1 + vp_{2x} - E_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_i &= \iint \frac{p'_i e^{-i\omega_k^{(2)} x_{0k}^{(2)}} dp'_y dp'_z}{m^2 + E_1^2 (1 - v^2) - 2E_1 (E_2 - vp_{2x}) + (E_2 - vp_{2x})^2 + p'^2} \times \\ &\times \frac{1}{[(E_2 - vp_{2x} - E_1 + vp_{1x})^2 + (p' - p_1)^2] [(E_2 - E_1)^2 (1 - v^2) + (p' - p_2)^2]} \quad (17a) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} (p'_k - p_{1k}) u_{0k}^{(2)} &= 0, & (p_{2k} - p'_k) u_{0k}^{(1)} &= 0, \\ -ip'_4 = E' = E_2, & & p'_1 = p'_x = \frac{1}{v} (E_2 + vp_{1x} - E_1), \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} I'_i &= \iint \frac{p'_i e^{-i\omega_k^{(1)} x_{0k}^{(1)}} dp'_y dp'_z}{m^2 + E_2^2 (1 - v^2) - 2E_2 (E_1 - vp_{1x}) + (E_1 - vp_{1x})^2 + p'^2} \times \\ &\times \frac{1}{[(E_2 - vp_{2x} - E_1 + vp_{1x})^2 + (p' - p_2)^2] [(E_2 - E_1)^2 (1 - v^2) + (p' - p_1)^2]}. \end{aligned}$$

Теперь мы должны вычислить квадрат модуля (16a), что даст вероятность перехода

$$dW_{p_1 E_1 p_2 E_2} = \frac{e^8 Z_1^2 Z_2^2}{4\hbar^4 \pi^6} \sum |\psi_2^{(0)*} Q \psi_1^{(0)}|^2 d\pi_1 d\pi_2. \quad (18)$$

Используя греческие буквы для индексов, обозначающих матричные элементы, можно записать

$$\begin{aligned} \sum |\psi_2^{(0)*} Q \psi_1^{(0)}|^2 &= Q_{\alpha\beta} (\sum \psi_{1\beta}^{(0)} \psi_{1\delta}^{(0)*}) \tilde{Q}_{\delta\gamma}^* (\sum \psi_{2\gamma}^{(0)} \psi_{2\alpha}^{(0)*}) = \\ &= Q_{\alpha\beta} \lambda_{1\beta\delta} \tilde{Q}_{\delta\gamma}^* \lambda_{2\gamma\alpha}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\lambda_{1\alpha\beta} = \sum \psi_{1\alpha}^{(0)} \psi_{1\beta}^{(0)*}, \quad \lambda_{2\alpha\beta} = \sum \psi_{2\alpha}^{(0)} \psi_{2\beta}^{(0)*}$$

(\sim означает транспонированную матрицу, а Σ — суммирование по двум состояниям с противоположными спинами).

Суммирование производится по всем индексам, в том числе по первому и последнему, так что мы имеем здесь след от произведения матриц и сомножители можно подвергнуть круговой перестановке. Поэтому отличными от нуля будут лишь такие члены в (19), которые содержат четное число каждой из γ_k .

Для нахождения \tilde{Q}^* заметим, что γ_k являются антиэрмитовыми матрицами, т. е.

$$\tilde{\gamma}_k^* = -\gamma_k. \quad (20)$$

Поэтому можно написать

$$\widetilde{(\gamma u_0^{(1)})^*} = -\gamma_4 (\gamma u_0^{(1)}) \gamma_4 \quad (21)$$

и то же самое для $(\gamma u_0^{(2)})$ и (γI) . Следовательно,

$$\tilde{Q}^* = \gamma_4 Q' \gamma_4,$$

$$Q' = (\gamma u_0^{(1)}) [-I_0 + (\gamma I)] (\gamma u_0^{(2)}) \gamma_4 + (\gamma u_0^{(2)}) [-I_0' + (\gamma I')] (\gamma u_0^{(1)}) \gamma_4. \quad (22)$$

Далее, вычисляя функции ψ , можно легко проверить, что

$$\lambda_1 = \frac{2}{p_{14}} (\gamma_k p_{1k} - m) \gamma_4, \quad \lambda_2 = \frac{2}{p_{21}} (\gamma_k p_{2k} - m) \gamma_4; \quad (23)$$

тогда (18), (16в) (19) и (22) дают (вспомним, что $\gamma_4^2 = -1$)

$$\begin{aligned} dW_{p_1 E_1 p_2 E_2} &= \frac{e^8}{4\hbar^4 \pi^6} \text{Sp} \{ Q \lambda_1 \gamma_4 Q' \gamma_4 \lambda_2 \} d\pi_1 d\pi_2 = \\ &= \frac{e^8}{\hbar^4 \pi^6 E_1 E_2} \text{Sp} \{ [(\gamma u_0^{(2)}) [I_0 - (\gamma I)] (\gamma u_0^{(1)}) + \\ &+ (\gamma u_0^{(1)}) [I_0' - (\gamma I')] (\gamma u_0^{(2)})] [(\gamma p_1) - m] \times \\ &\times [(\gamma u_0^{(1)}) [I_0 - (\gamma I)] (\gamma u_0^{(2)}) + \\ &+ (\gamma u_0^{(2)}) [I_0' - (\gamma I')] (\gamma u_0^{(1)})] [(\gamma p_2) - m] \} d\pi_1 d\pi_2. \quad (24) \end{aligned}$$

В дальнейшем мы предположим, что

$$m \ll |E_1| \sim E_2 \ll \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \quad p_{1y}, p_{1z}, p_{2y}, p_{2z} \sim m, \quad (25)$$

т. е. что энергия электрона и позитрона, образованных при столкновении, велика по сравнению с их энергией покоя и мала в сравнении с энергией сталкивающихся частиц, и, кроме

того, треки образовавшихся электрона и позитрона расположены в пределах малого угла вокруг направления движения ядер. Конечный результат подтверждает, что это и есть наиболее существенная область, т. е. что большинство пар имеют такие энергии и импульсы.

При вычислении следа в (24) мы пренебрежем всеми членами порядка $E_{1,2}^2 (1 - v^2) I_i^2$ или $\frac{m^4}{E_{1,2}^2} I_i^2$ ($i = 0, 2, 3$) или выше. Довольно длинные вычисления с использованием (1) дают тогда

$$dW_{p, E_1, p_2, E_2} = \frac{4e^8 Z_1^2 Z_2^2 d\pi_1 d\pi_2}{\hbar^4 v^6 E_1 E_2} \left\{ m^2 I_0 I_0' - m^2 \Pi' - (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) (\Pi') - \right. \\ \left. - (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) I_0 I_0' + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) m (I_0' \mathbf{I} + I_0 \mathbf{I}') + \right. \\ \left. + (\mathbf{p}_2 \mathbf{I}') (\mathbf{p}_1 \mathbf{I}) + (\mathbf{p}_2 \mathbf{I}) (\mathbf{p}_1 \mathbf{I}') + \right. \\ \left. + \frac{m^2 + \mathbf{p}_2^2}{2} \frac{E_1}{E_2} (I_0^2 + \mathbf{I}^2) + \frac{m^2 + \mathbf{p}_1^2}{2} \frac{E_2}{E_1} (I_0'^2 + \mathbf{I}'^2) \right\}, \\ \mathbf{I} = (I_2, I_3), \quad \mathbf{I}' = (I_2', I_3'). \quad (26)$$

Подставляя (1) в (17а), (17б) и оставляя в знаменателе только большие члены (можно показать, что отброшенные члены дают эффект высшего порядка в конечном результате), получим для $I_0, I_0', \mathbf{I}, \mathbf{I}'$:

$$I_0 = \iint \frac{E_2 m e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{2y}' - p_y') y} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{2z}' - p_z') z} dp_y' dp_z'}{[(m^2 + \mathbf{p}'^2) E_2 - (m^2 + \mathbf{p}_2^2) E_1] [A + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1)^2] [B + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}_2)^2]}, \\ I_0' = \iint \frac{E_1 m e^{-\frac{i}{\hbar} (p_y' - p_{1y}') y} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_z' - p_{1z}') z} dp_y' dp_z'}{[(m^2 + \mathbf{p}'^2) E_1 - (m^2 + \mathbf{p}_1^2) E_2] [A + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}_2)^2] [B + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1)^2]}; \quad (27)$$

$$A = \left[\frac{m^2 + \mathbf{p}_1^2}{2E_1} - \frac{m^2 + \mathbf{p}_2^2}{2E_2} \right]^2, \quad B = (E_1 - E_2)^2 (1 - v^2). \quad (27a)$$

В выражениях для \mathbf{I} и \mathbf{I}' в числителе вместо m стоит \mathbf{p}' . Второй и третий сомножители в знаменателях в I_0, \dots гораздо меньше, чем первый, поэтому очевидно, что именно они играют главную роль при интегрировании.

Для перехода от вероятности dW_{p, E_1, p_2, E_2} к эффективному сечению $d\Phi_{p, E_1, p_2, E_2}$ нужно проинтегрировать (26) по dy и dz . Однако более удобно интегрировать по dy и dz еще до взятия интегралов

по $dp'_y dp'_z$. Для этой цели запишем произведения двух интегралов, таких, как $I_0 I'_0$ и т. д., в виде двойного интеграла от произведения обоих подынтегральных выражений, заменив в одном из них p' на другую переменную, скажем p'' . Тем самым интегрирование распространится по $dp'_y dp'_z dp''_y dp''_z$ и интеграл по dy и dz может быть вычислен в первую очередь. При этом интегрировании экспоненциальные множители дадут согласно (13) δ -функции двух типов:

$$\delta(p_{1y} + p_{2y} - p'_y - p''_y) \delta(p_{1z} + p_{2z} - p'_z - p''_z)$$

и

$$\delta(p'_y - p''_y) \delta(p'_z - p''_z)$$

в выражениях соответственно для $I_0 I'_0$, Π' и I'^2_0 , I^2_0 , I^2 , I'^2 . Интегрирование по $dp'_y dp'_z$ или по $dp''_y dp''_z$ тогда тривиально, и мы получаем из (26) и (27)

$$\begin{aligned} d\Phi_{p_1, E_1, p_2, E_2} = & \frac{16 e^8 Z_1^2 Z_2^2}{\hbar^2 \pi^4} \left\{ \iint dp'_y dp'_z \{ m^4 + m^2 p' (p_1 + p_2 - p') + \right. \\ & + (p_1 p_2) [p' (p_1 + p_2 - p')] + m^2 (p_1 p_2) - m^2 (p_1 + p_2)^2 - \\ & - [p_1 (p_1 + p_2 - p')] (p_2 p') - [p_2 (p_1 + p_2 - p')] (p_1 p') \} / [(m^2 + \\ & + p'^2) E_2 - (m^2 + p_2^2) E_1] [(m^2 + p_1^2) E_2 - \\ & - (m^2 + (p_1 + p_2 - p')^2) E_1] [A + (p' - p_1)^2] [B + (p' - p_2)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \iint \frac{(m^2 + p_2^2) (m^2 + p'^2) dp'_y dp'_z}{[(m^2 + p'^2) E_2 - (m^2 + p_2^2) E_1]^2} \times \\ & \times \frac{1}{[A + (p' - p_1)^2] [B + (p' - p_2)^2]} + \\ & + \frac{1}{2} \iint \frac{(m^2 + p_1^2) [m^2 + (p_1 + p_2 - p')^2] dp'_y dp'_z}{[(m^2 + (p_1 + p_2 - p')^2) E_1 - (m^2 + p_1^2) E_2]^2} \times \\ & \times \left. \frac{1}{[A + (p' - p_1)^2] [B + (p' - p_2)^2]} \right\} d\pi_1 d\pi_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Можно ввести новые переменные

$$p_1 + p_2 = 2p, \quad p' - p_1 = 2a, \quad p' - p_2 = 2b \quad (29)$$

и проинтегрировать по $da_y da_z db_y db_z$. Преобразование (29) тогда дает (якобиан этого преобразования равен (16))

$$\begin{aligned}
d\Phi_{pE_1E_2} = & \frac{2^8 e^8 Z_1^2 Z_2^2 d |E_1| dE_2 dp_y dp_z}{\hbar^2 \pi^4} \times \\
& \times \left\{ \iiint \int da_y da_z db_y db_z [-(m^2 + p^2)^2 - 2(m^2 + p^2)(a^2 + b^2) - \right. \\
& - (a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 - 4(ab)^2 + 4(ap)^2 + 4(bp)^2] / [(m^2 + \\
& + (p + a + b)^2) E_2 - ((p + a - b)^2 + m^2) E_1] [(m^2 + (p + b - \\
& - a)^2) E_2 - (m^2 + (p - a - b)^2) E_1] (A + 4a^2)^2 (B + 4b^2)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \iiint \int \frac{[m^2 + (p + a - b)^2] [m^2 + (p + a + b)^2]}{[(m^2 + (p + a + b)^2) E_2 - (m^2 + (p + a - b)^2) E_1]^2} \times \\
& \times \frac{da_y da_z db_y db_z}{(A + 4a^2)^2 (B + 4b^2)^2} + \\
& + \frac{1}{2} \iiint \int \frac{[m^2 + (p + b - a)^2] [m^2 + (p - a - b)^2]}{[(m^2 + (p - a - b)^2) E_2 - (m^2 + (p + b - a)^2) E_1]^2} \times \\
& \left. \times \frac{da_y da_z db_y db_z}{(A + 4a^2)^2 (B + 4b^2)^2} \right\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю в числителе остаются лишь члены четвертого порядка по a и b или выше. Тогда в знаменателе мы можем положить $a = b = 0$ всюду, кроме $(A + 4a^2)^2 (B + 4b^2)^2$ (эти множители играют при интегрировании наиболее важную роль). Имеем (оставляя лишь члены четвертого порядка по a и b)

$$\begin{aligned}
d\Phi_{pE_1E_2} = & \frac{2^{11} Z_1^2 Z_2^2 e^8 d |E_1| dE_2 dp_y dp_z}{\hbar^2 \pi^4 (E_1 - E_2)^4 (m^2 + p^2)^2} \times \\
& \times \left[E_1^2 + E_2^2 - \frac{4E_1 E_2 m^2 p^2}{(m^2 + p^2)^2} \right] \iiint \int \frac{a^2 b^2 da_y da_z db_y db_z}{(A + 4a^2)^2 (B + 4b^2)^2}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Этот интеграл логарифмически расходится, и можно убедиться, что при интегрировании важна область, где

$$A + B < a^2 < m^2, \quad A + B < b^2 < m^2, \quad (32a)$$

а также

$$A + B < (p_1 - p_2)^2 < m^2. \quad (32б)$$

Неравенства (32б) показывают, что треки электрона и позитрона лежат по разные стороны от оси x . Малость a и b оправдывает тот факт, что мы сохранили лишь члены наиминшей степени по a и b .

Интегрируя в (31) по области от нуля до m , получим

$$d\Phi_{pE_1E_2} = \frac{8e^3 Z_1^2 Z_2^2 d|E_1| dE_2 dp_y dp_z}{\pi^2 \hbar^2 (m^2 + p^2)^2 (E_2 - E_1)^4} \left\{ E_1^2 + E_2^2 - \frac{4E_1 E_2 p^2 m^2}{(m^2 + p^2)^2} \right\} \times \\ \times \ln \frac{m}{(E_2 - E_1) \sqrt{1 - v^2}} \ln \frac{1}{m \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)} \quad (33)$$

(здесь оставлены только логарифмические члены; принятое нами приближение не позволяет написать константу под логарифмом; по той же причине там можно заменить p^2 на m^2 в согласии с (25)).

Наконец, интегрируя по $dp_y dp_z$, получим эффективное сечение, отнесенное к $d|E_1| dE_2$:

$$d\Phi_{E_1E_2} = \frac{8}{3\pi} \frac{e^3 Z_1^2 Z_2^2 (3E_1^2 + 3E_2^2 - 2E_1 E_2)}{\hbar^2 m^2 (E_2 - E_1)^4} \times \\ \times \ln \frac{m}{(E_2 - E_1) \sqrt{1 - v^2}} \ln \frac{1}{m \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)} d|E_1| dE_2. \quad (34)$$

Пользуясь этим выражением, можно легко проверить справедливость выбора области (25). Следует также отметить, что выражение (34) инвариантно относительно преобразования (2).

Вводя обозначение E_1' для абсолютной величины энергии позитрона ($E_1' = -E_1$) и переходя к обычным единицам для скорости, получим

$$d\Phi_{E_1'E_2} = \frac{8}{3\pi} (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{3E_1'^2 + 3E_2^2 + 2E_1' E_2}{(E_1' + E_2)^4} \times \\ \times \ln \frac{mc^2 \gamma}{E_1' + E_2} \ln \frac{1}{mc^2 \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2} \right)} dE_1' dE_2, \quad (35)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а α — постоянная тонкой структуры.

Полное сечение образования пар получается путем интегрирования по $dE_1' dE_2$. Для проведения первого интегрирования заметим, что в интеграле существенна область $E_1' \sim E_2$, поскольку в предположении $E_2 \gg E_1'$ он принимает вид $\iint \frac{dE_1' dE_2}{E_2^2}$,

откуда следует, что существенны большие значения $E_1'(E_1' \sim \sim E_2)$. Поэтому всюду под логарифмами можно написать E_2 вместо E_1' и проинтегрировать остаток. Вспомнив, что коэффициенты под логарифмом писать не следует, получаем

$$d\Phi_{E_2} = \frac{56}{9\pi} (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{mc^2 \gamma}{E_2} \ln \frac{E_2}{mc^2} \frac{dE_2}{E_2}. \quad (36)$$

Интеграл по dE_2 логарифмически расходится, и согласно (25) его надо брать в пределах между mc^2 и $mc^2 \gamma$. Введя $x = \ln \frac{E_2}{mc^2}$ в качестве новой переменной, имеем

$$\int_{mc^2}^{mc^2 \gamma} \ln \frac{mc^2 \gamma}{E_2} \ln \frac{E_2}{mc^2} \frac{dE_2}{E_2} = \int_0^{\ln \gamma} x (\ln \gamma - x) dx = \frac{1}{6} \ln^3 \gamma.$$

Подставляя это в (32), получим, наконец,

$$\Phi = \frac{28}{27\pi} (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln^3 \gamma. \quad (37)$$

Следовательно, поперечное сечение возрастает как куб логарифма энергии сталкивающихся частиц.

Численно (37) дает

$$\Phi = 1,4 \cdot 10^{-33} Z_1^2 Z_2^2 \ln^3 \gamma \text{ (см}^2\text{)}. \quad (38)$$

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Carlson, Furry. Phys. Rev., 44, 237, 1933.

Phys. Zs. Sowjet., 8, 113, 1935

Предлагается количественная теория критической точки, возникающей вследствие явлений упорядочения. Для теплоемкости ниже точки перехода получается закон $1/\sqrt{\Theta - T}$. Для определенного случая произведена оценка коэффициентов.

У многих твердых тел наблюдались аномалии, заключающиеся в возрастании теплоемкости, за которым следует ее быстрое падение. При этом теплоемкость часто принимает очень высокие значения (вплоть до 100 ккал/град·моль). Эти аномалии часто называются λ -точками. Делались попытки объяснить их при помощи вращения молекул. Однако такое утверждение не дает еще, разумеется, никакого объяснения аномального поведения теплоемкости независимо от того, играет ли вращение в λ -точках фактически какую-нибудь роль. Напротив, в действительности, как указал в недавно появившейся работе Делингер, в определенных случаях к аномально высоким значениям теплоемкости могут приводить явления упорядочения. Цель предлагаемой работы состоит в количественной разработке этой идеи.

Введем вместе с Делингером два типа точек перехода: обычную точку перехода и точку Кюри (названную Делингером точкой перехода второго рода). В первой частично упорядоченное состояние возникает непосредственно из полного беспорядка, который при более высоких температурах является состоянием, наиболее выгодным термодинамически. Напротив, в точке Кюри скачок порядка отсутствует, а порядок в ней только начинает появляться. Если рассмотреть теперь поведение температуры, в которой происходит скачок, в зависимости от давления, то может

случиться, что при определенных давлениях имеет место точка перехода, при других же, напротив, — точка Кюри. Переход между обоими этими явлениями происходит в некоторой критической точке.

Будем описывать степень упорядочения некоторым параметром ξ , равным нулю в состоянии полного беспорядка и могущим принимать только положительные значения. Разложим термодинамический потенциал по степеням ξ . Тогда условием равновесия явится либо $\partial\Phi / \partial\xi = 0$, либо также $\xi = 0$, поскольку ξ не может быть отрицательным. В критической точке одновременно с $\xi = 0$ должно быть также $\partial\Phi / \partial\xi = \partial^2\Phi / \partial\xi^2 = 0$. При этом $\partial^3\Phi / \partial\xi^3$ обязано быть положительной (в противном случае критическая точка не соответствовала бы состоянию равновесия). Таким образом, если записать Φ в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha\xi + \beta\xi^2 + \frac{1}{3}\gamma\xi^3, \quad (1)$$

где α , β и γ — функции температуры и давления (членами высшего порядка можно пренебречь), то в критической точке $\alpha = \beta = 0$.

При давлениях же, отличных от критического, для температуры, когда $\alpha = 0$, β отлична от нуля.

Если мы находимся вблизи этой температуры, то $\alpha = at$, где t означает температуру, отсчитанную от упомянутой точки. Температурной зависимостью β , напротив, можно пренебречь (соответствующий член умножается на более высокую степень ξ). Величину a следует считать положительной, так как при высоких температурах устойчивому равновесию заведомо соответствует состояние $\xi = 0$. Далее, вблизи критической точки $\beta = b$ ($p - p_{кр}$), где b может иметь оба знака; γ можно вообще рассматривать как постоянную.

Таким образом, термодинамический потенциал принимает вид

$$\Phi = \Phi_0 + at\xi + \beta\xi^2 + \frac{1}{3}\gamma\xi^3. \quad (2)$$

В упорядоченном состоянии

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = at + 2\beta\xi + \gamma\xi^2 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = 2(\beta + \gamma\xi) > 0$$

и, следовательно,

$$\xi = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - a\gamma t}}{\gamma}. \quad (4)$$

Добавочная энтропия

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial T}$$

равна

$$S = - a \xi. \quad (5)$$

Дополнительная теплоемкость

$$C = T \frac{dS}{dT} = T_{кр} \frac{a^2}{2 \sqrt{\beta^2 - a\gamma t}}, \quad (6)$$

причем температуру T можно с достаточной степенью точности заменить ее критическим значением. Если положить

$$\frac{\beta^2}{a\gamma} - t = \tau, \quad (7)$$

что соответствует сдвигу температурной шкалы, то C приобретает простой вид:

$$C = \frac{A}{\sqrt{\tau}}, \quad (8)$$

где

$$A = \frac{1}{2} T_{кр} a \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \quad (9)$$

в критической области остается приблизительно постоянной. В тех же обозначениях

$$\xi = - \frac{\beta}{\gamma} + \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \sqrt{\tau}. \quad (10)$$

Если β положительна, то при положительных же t термодинамический потенциал Φ вообще не имеет минимума при $\xi > 0$; при отрицательных t равновесию соответствуют значения ξ , нарастающие от нуля. Тем самым при $t = 0$ имеет место точка Кюри.

Соответствующее значение теплоемкости

$$C_c = \frac{T_{кр} a^2}{2\beta}, \quad (11)$$

таким образом, обратно пропорционально разности между давлением и его критическим значением.

Когда β отрицательно, кривая Φ (ξ) имеет минимум также и при положительных t , и, кроме того, этот минимум в зависимости от t либо выше, либо ниже $\Phi(0)$, чем определяется устойчивость соответствующего равновесного состояния. В точке перехода

$$\Phi(\xi) = \Phi(0),$$

откуда

$$3at + 3\beta\xi + \gamma\xi^2 = 0 \quad (12)$$

или, исключая t из (12) и (3),

$$3\beta\xi + 2\gamma\xi^2 = 0.$$

Отсюда находим, что в точке перехода

$$\xi_u = \frac{3|\beta|}{2\gamma}, \quad (13)$$

$$t_u = \frac{3\beta^2}{4a\gamma}. \quad (14)$$

Следовательно,

$$C_u = T_{кр} \frac{a^2}{|\beta|}. \quad (15)$$

Теплоемкость на ветви переходов вдвое превышает ее значение на «ветви Кюри».

Теплота перехода равна

$$\rho = TS_u = aT_{кр}\xi_u = \frac{3a|\beta|}{2\gamma} T_{кр}. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\rho C_u = \frac{3}{2} T_{кр}^2 \frac{a^3}{\gamma} = \frac{3}{2} A^2 \quad (17)$$

приблизительно не зависит от давления. Из сравнения (14) с $t = 0$ в точке Кюри видно, что зависимость температуры перехода от давления не имеет излома в критической точке, скачок имеет лишь ее вторая производная d^2T / dp^2 .

Значения постоянных a , β и γ , разумеется, не могут быть определены в общем случае, поскольку они зависят от специфических свойств системы. Более того, проведение количественных расчетов невозможно даже в случае какой-нибудь конкретной модели. Можно, однако, определить α и γ по крайней мере качественно, рассмотрев термодинамический потенциал при высоких температурах, когда энтропийный член будет наибольшим, что позволяет представить Φ в виде

$$\Phi = -kT \ln Z \quad (18)$$

(Z — число комбинаций, возможных при определенной степени порядка). Разберем пример бинарной смеси 1:1, т. е. случай, когда для каждого узла решетки существуют два возможных способа заполнения, независимо от того, имеются ли два различных сорта молекул или только две различные ориентации молекулы одного сорта. При этом упорядочение означает регулярное распределение молекул обоих сортов в решетке. Если обозначить через N_1 число молекул, находящихся в «упорядоченном» положении, а через N_2 — число оставшихся молекул, то степень по-

рядка будет определяться величиной

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}.$$

Легко, однако, видеть, что N_1 и N_2 играют совершенно симметричные роли, так как определения «упорядоченного» и «неупорядоченного» положений можно просто переставить между собой. В соответствии с этим все физические величины являются четными функциями $N_1 - N_2$ и ξ можно выбрать в виде

$$\xi = \left(\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right)^2. \quad (19)$$

Обозначив полное число молекул через $N = N_1 + N_2$, получим

$$N_1 = N \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2}, \quad N_2 = N \frac{1 - \sqrt{\xi}}{2}. \quad (20)$$

Число возможных способов, которыми может быть достигнуто определенное значение ξ , очевидно, равно

$$Z = \frac{N!}{N_1! N_2!}, \quad (21)$$

откуда

$$\Phi = NkT \left\{ \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2} + \frac{1 - \sqrt{\xi}}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{\xi}}{2} \right\}. \quad (22)$$

Разложение по степеням ξ дает

$$\Phi = NkT \left\{ \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{12} \xi^2 + \frac{1}{30} \xi^3 \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, при высоких температурах α в (1) равно $NkT/2$, а $\gamma = NkT/10$. Для качественной оценки можно подставить вместо a величину $d\alpha/dT$ при высоких температурах, а для γ его значение из (23) при $T = T_{кр}$. Это дает

$$a = \frac{1}{2} Nk, \quad \gamma = \frac{1}{10} NkT_{кр},$$

$$A = \frac{1}{4} Nk \sqrt{5T_{кр}}$$

или в расчете на один моль

$$A = \frac{1}{4} R \sqrt{5T_{кр}}.$$

Эта величина, равно как и закон $1/\sqrt{\tau}$, находится в очень хорошем согласии с измерениями Рузманна на NH_4Cl .

К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ

Совместно с Е. М. ЛИФИЦЕМ

Phys. Zs. Sowjet., 8, 153, 1935

Исследовано распределение магнитных моментов в ферромагнитном кристалле. Найдено, что такой кристалл состоит из элементарных слоев, намагниченных до насыщения. Во внешнем магнитном поле границы между слоями передвигаются; определена скорость этого передвижения. Найдена магнитная проницаемость в периодическом поле, параллельном или перпендикулярном оси легкого намагничивания.

§ 1. Как было указано Блохом [1] и Гейзенбергом [2], ферромагнитный кристалл в магнитном смысле состоит из элементарных областей, намагниченных почти до насыщения. Они предположили, что эти области имеют нитевидную форму; мы покажем здесь, что их скорее следует считать элементарными слоями. Последнее, по-видимому, можно согласовать с экспериментальными данными, полученными рядом авторов [3] путем фотографирования распределения коллоидных частиц Fe_2O_3 на поверхности ферромагнитного кристалла. В ненамагниченном кристалле эти элементарные слои намагничены поочередно в противоположных направлениях, так что кристалл в целом не имеет магнитного момента. При намагничивании кристалла границы между противоположно намагниченными слоями сдвигаются таким образом, что слои с одним направлением магнитного момента растут за счет слоев с моментом в противоположном направлении.

Некоторые авторы (среди них также Ф. Блох [1]) пытались определить число и размеры элементарных областей в ферромагнитном теле из статистических соображений. Однако это абсолютно невозможно, поскольку если бы не существовало размагничивающего влияния поверхности тела, как, например, в бесконечном

теле, то не существовало бы вообще никаких элементарных областей и тело было бы намагничено до насыщения.

Здесь имеется полная аналогия с невозможностью определения при помощи статистических методов числа капелек жидкости в конденсирующемся паре, так как в действительности жидкость образуется сразу как непрерывное тело. Существование отдельных элементарных областей, намагниченных в противоположных направлениях, обязано исключительно размагничивающему эффекту поверхности, а число и размеры этих областей полностью определяются размерами тела.

Между двумя такими элементарными слоями с противоположно направленными магнитными моментами не существует резкой границы. Напротив, имеется некоторая промежуточная область, в которой направление магнитного момента постепенно меняется на противоположное. Мы определим здесь распределение моментов в такой промежуточной области, а также ширину элементарных слоев.

Ниже будет обсуждаться случай ферромагнитного кристалла с одной выделенной осью, совпадающей с осью легчайшего намагничивания, как, например, монокристалл кобальта с его гексагональной осью. К этому типу относится также любое ферромагнитное тело, деформированное в одном направлении (например, растянутая или сжатая проволока), если знак деформации совпадает со знаком магнитоstriction. В дальнейшем мы всегда будем говорить о ферромагнитном кристалле, однако следует помнить, что при этом имеется в виду не обязательно монокристалл, но любое тело с единственным направлением легчайшего намагничивания.

Такой кристалл состоит из слоев, параллельных выделенной оси и намагниченных до насыщения в направлениях по или против нее. Тот факт, что элементарные области в кристалле не имеют нитевидной формы, а в действительности являются слоями, мы докажем позже.

Мы будем искать распределение магнитных моментов внутри кристалла по направлениям следующим образом. Магнитная энергия кристалла состоит из двух частей:

1) энергии, обязанной неоднородности в распределении магнитных моментов по направлениям. Эту энергию, отнесенную к единице объема, можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \alpha [(Vs_x)^2 + (Vs_y)^2 + (Vs_z)^2],$$

где s_x , s_y , s_z представляют собой компоненты магнитного момента единицы объема s (его абсолютная величина остается постоянной вдоль всего кристалла и практически равна моменту насыщения);

2) энергии магнитной анизотропии, связанной с наличием оси легчайшего намагничивания. Если выбрать систему координат с осью Z вдоль этой оси, энергия анизотропии, отнесенная к единице объема, может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \beta (s_x^2 + s_y^2),$$

учитывающем, что минимум энергии получается, когда s направлено вдоль легчайшей оси.

Распределение s по направлениям можно тогда найти, потребовав, чтобы энергия кристалла была минимальна, т. е.

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \alpha [(\nabla s_x)^2 + (\nabla s_y)^2 + (\nabla s_z)^2] + \frac{1}{2} \beta (s_x^2 + s_y^2) \right\} dV = \min, \quad (1)$$

где интеграл берется по всему объему кристалла.

При нахождении распределения моментов между двумя противоположно намагниченными слоями можно пренебречь эффектами, связанными с поверхностью кристалла. Эти эффекты являются определяющими для нахождения толщины слоев, но ими можно пренебречь, если интересоваться только распределением магнитных моментов в промежуточной области между двумя слоями внутри кристалла. Это означает, что если мы направим ось нашей координатной системы перпендикулярно слоям, то распределение магнитных моментов не будет зависеть от координат y и z . Направление s меняется только с изменением x , переходя в промежуточной области от некоторого определенного направления вдоль оси Z в одном слое к противоположному направлению в соседнем. Уравнение (1) теперь можно записать как

$$\int \left[\frac{1}{2} \alpha s'^2 + \frac{1}{2} \beta (s_x^2 + s_y^2) \right] dV = \min, \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Теория выглядит так, как если бы мы считали кристалл бесконечным. Однако необходимо помнить, что в действительности в бесконечном кристалле все моменты имели бы одно и то же направление; кристалл оказался бы спонтанно намагниченным и, таким образом, слои бы отсутствовали. Существование слоев обязано конечности размеров кристалла; мы считаем кристалл бесконечным, только чтобы найти распределение моментов в промежуточных областях, далеких от поверхности кристалла; поверхностные эффекты будут обсуждаться в § 2.

В такой модели все магнитные моменты лежат в плоскости YZ . Обозначим через θ угол между s и осью Z . Тогда компоненты s

будут равны

$$s_x = 0, \quad s_y = s \sin \theta, \quad s_z = s \cos \theta \quad (3)$$

и (1) приобретет вид (θ — функция только от x)¹

$$\int \left(\frac{1}{2} \alpha s^2 \theta'^2 + \frac{1}{2} \beta s^2 \sin^2 \theta \right) dx = \min. \quad (4)$$

Для нахождения θ , дающего этому интегралу минимальное значение, напишем уравнение Эйлера

$$\alpha \theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (5)$$

откуда

$$\theta'^2 - \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \theta = \text{const.} \quad (6)$$

Толщина слоев велика по сравнению с шириной промежуточной области. Поэтому в качестве граничных условий для уравнения, определяющего θ , можно взять следующие:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ при } x = -\infty, \quad \theta = \pi \text{ при } x = +\infty, \\ \theta' = 0 \text{ при } x = \pm \infty \text{ или при } \theta = 0, \pi, \end{aligned} \quad (7)$$

которые показывают, что в двух примыкающих слоях направления s противоположны. Тогда видно, что постоянная в (6) равна нулю, и мы получаем

$$\theta'^2 = \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \theta. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, находим решение, удовлетворяющее (7), в виде

$$\cos \theta = -\text{th} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x. \quad (9)$$

Оно дает распределение направлений s между двумя слоями.

Приблизительное численное значение постоянной α можно получить следующим образом. Энергия $\frac{1}{2} \alpha s'^2$ имеет максимально возможное значение, когда s меняет свое направление каждый раз при смещении на расстояние, равное постоянной решетки кристалла a , т. е. когда $s'^2 \approx s^2/a^2$. Этот максимум должен иметь порядок величины kT_C , где T_C — температура Кюри (k — посто-

¹ До некоторой степени похожие вычисления, хотя и с другой точки зрения, были произведены Блохом [1].

с граничным условием на поверхности

$$s_n = 0, \quad (12)$$

где s_n — компонента, перпендикулярная поверхности. Можно ожидать, что при малом β эти уравнения заметно не изменятся; поэтому мы воспользуемся (11) и (12) в качестве уравнений, определяющих распределение s вблизи поверхности.

Пусть кристалл (того же типа симметрии, что и в § 1) имеет форму параллелепипеда. Рассмотрим прежде всего случай, когда его поверхность перпендикулярна оси легчайшего намагничивания. Введем, как и в § 1, систему координат с осью Z , параллельной выделенной оси, и плоскостью YZ , параллельной магнитным слоям в кристалле. Распределение s однородно в направлении оси Y , оно меняется с x и в направлении к поверхности — с z . Промежуточные области между слоями, как уже отмечалось, не влияют на распределение s вблизи поверхности. Поэтому можно считать, что s повсюду лежит в плоскости ZX . Обозначим через φ угол между s и Z . Тогда

$$s_x = s \sin \varphi, \quad s_y = 0, \quad s_z = s \cos \varphi. \quad (13)$$

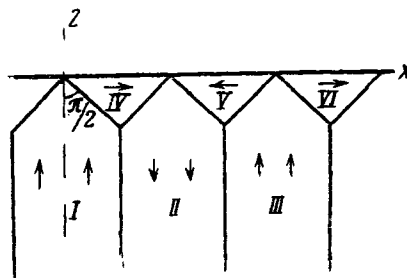


Рис. 1

На больших расстояниях от поверхности имеются регулярные слои, скажем, толщины d и с противоположно направленными s , т. е. φ равно попеременно нулю или π , переходя от одного из этих значений к другому периодически вдоль оси X с периодом d . Тогда распределение s дается уравнением (11) с краевым условием $\varphi = \pm \pi/2$ при $z = 0$ (плоскость XU совпадает с поверхностью кристалла); краевым условием при $z = -\infty$ является то, что φ как функция x должна изменяться от 0 к π через каждый интервал d .

Решение (14), удовлетворяющее этим условиям, можно построить, как показано на рис. 1. Этот рисунок дает распределение магнитных моментов в кристалле в плоскости XZ или любой другой параллельной ей плоскости (стрелки указывают направления s). В областях I и III моменты лежат вдоль оси Z ($\varphi = 0$), в области II — вдоль той же оси, но в противоположном направлении ($\varphi = \pi$); в областях IV, V, VI моменты параллельны поверхности,

т. е. $\varphi = \pm \pi/2$. Такое решение очевидным образом удовлетворяет крайевым условиям. Оно удовлетворяет также и уравнению (11), поскольку в каждой из областей I , II и т. д. постоянно, а на границах между этими областями поверхностная дивергенция s равна нулю, так как нормальные границам компоненты s во всех случаях равны по обе стороны от этих границ.

Разумеется, можно было бы построить еще и другие решения (11), например введя где-либо внутри кристалла такое же распределение, что и на рис. 1 вблизи поверхности. Однако наше решение является единственным, которое при фиксированном d дает наименьшее значение для энергии кристалла, и в силу этого только оно допустимо из физических соображений.

Теперь мы можем вычислить энергию кристалла. Энергия, связанная с распределением магнитных моментов около поверхности кристалла, равна (на единицу объема) энергии анизотропии $\beta s_x^2/2$ (при $s_y = 0$). В областях, таких, как IV , V , VI на рис. 1, s_x равно $\pm s$, т. е. энергия единицы объема имеет вид $\beta s^2/2$. Пусть l_1 , l_2 , l представляют собой размеры кристалла в направлениях соответственно X , Y , Z . Тогда объем любой области типа IV , V , VI на рис. 1 равен $d^2 l_2/4$. Всего имеется l_1/d таких областей на каждой из противоположных поверхностей кристалла, и поэтому энергия, обязанная поверхности кристалла, равна

$$E_s = \frac{1}{4} \beta d l_1 l_2 s^2. \quad (14)$$

Во внутренних частях кристалла энергия возникает из-за наличия промежуточных областей между слоями. Ее можно вычислить с помощью результатов, полученных в § 1. Для этого рассмотрим одну из таких областей. Ее энергия согласно § 1 равна

$$\frac{1}{2} l_2 s^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta) dx = l_2 s^2 \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\text{ch}^2 \sqrt{\beta/\alpha} x} = 2s^2 l_2 \sqrt{\alpha\beta}.$$

В кристалле имеется l_1/d таких областей, так что полная внутренняя энергия кристалла имеет вид

$$E_i = 2s^2 \frac{l_1 l_2}{d} \sqrt{\alpha\beta}. \quad (15)$$

Толщину слоев d мы найдем теперь из условия, чтобы полная энергия $E = E_i + E_s$ имела минимум. Отсюда

$$d = 2\sqrt{2l} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/4}, \quad (16)$$

а соответствующая энергия равна

$$E = s^2 l_1 l_2 \sqrt{2l\beta} (\alpha\beta)^{1/4}. \quad (17)$$

Если поверхность кристалла не ортогональна оси легчайшего намагничивания, то решение (11) с s , параллельным поверхности на границе кристалла, удовлетворяющее тем же самым условиям на больших расстояниях от нее, может быть построено точно таким же способом. При этом распределение s в плоскости, параллельной XU , получается таким, как показано на рис. 2.

Пусть угол между осью Z и линией пересечения поверхности кристалла с плоскостью XZ равен ϑ_1 , а такой же угол на противоположной границе равен ϑ_2 . Угол наклона поверхности к плоскости XZ для определения толщины слоев несуществен. Таким же способом, каким было получено (16), теперь найдем

$$d = 2 \sqrt{l \left(\frac{1}{\sin \vartheta_1} + \frac{1}{\sin \vartheta_2} \right)} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/4}. \quad (18)$$

Толщина кристалла l и углы ϑ_1, ϑ_2 могут, вообще говоря, меняться вдоль кристалла; с ними вместе будет меняться также и толщина слоев.

Теперь легко показать, что кристалл действительно состоит из магнитных слоев, а не нитевидных областей. Если кристалл разбивается на элементарные области спонтанного намагничивания, имеющие вид прямых призм с основанием d^2 , распределение магнитных моментов около поверхности, удовлетворяющее (11) и (12), может быть описано рис. 3, на котором показаны две элементарные области в разрезе и в плане. Энергия E_i теперь превосходит (15) вдвое, так как площадь поверхности границ между элементарными областями стала вдвое больше, чем раньше. Поверхностная энергия, как легко вычислить, теперь равна

$$E_s = \frac{1}{6} \beta s^2 l_1 l_2 d.$$

Определив d из условия, чтобы энергия $E_i + E_s$ была минимальной, мы найдем, что эта минимальная энергия равна

$$\sqrt{\frac{8}{3}} s^2 l_1 l_2 \sqrt{l\beta} (\alpha\beta)^{1/4},$$

т. е. в $\sqrt[4]{3}$ раз больше, чем (17). Мы убеждаемся, таким образом, что эта модель энергетически менее выгодна по сравнению с моделью слоев.

Для деформированного никеля с теми же характеристиками, что и в § 1, формула (16) дает числовое значение толщины слоев

$d \approx 5 \cdot 10^{-3}$, или приблизительно 10^5 постоянных решетки (при $l = 1 \text{ см}$).

§ 3. Если кристалл помещен во внешнее магнитное поле, направленное параллельно оси легчайшего намагничивания, границы между слоями придут в движение, так что слои с магнитным моментом, параллельным полю, начнут расширяться. Здесь мы определим скорость этого движения.

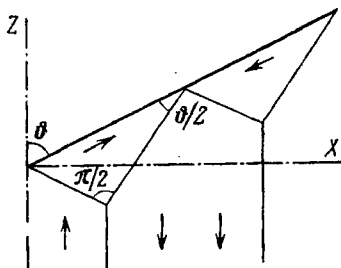


Рис. 2

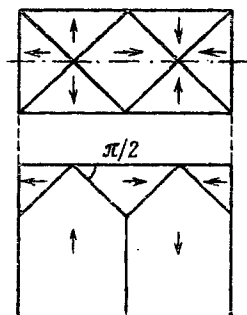


Рис. 3

Как и в § 1, будем рассматривать только одну промежуточную область между двумя слоями и, кроме того, пренебрежем поверхностными эффектами. Распределение s дается (3) и (9) и остается неизменным, покуда поле отсутствует. При включении поля оно придет в движение вдоль оси X со скоростью v .

Если бы магнитные моменты в кристалле были свободными, т. е. не испытывали влияния других моментов, изменение s со временем определялось бы внешним полем. Влияние взаимодействия между магнитными моментами можно описать, введя некоторое «эффективное поле» следующим способом.

Если внутри кристалла имеется макроскопическое поле с напряженностью H , энергию кристалла можно записать в виде

$$\int \left(\frac{1}{2} \alpha s'^2 - \frac{1}{2} \beta s_z^2 - Hs \right) dV \quad (19)$$

(здесь удобнее писать энергию анизотропии вместо $\frac{1}{2}\beta(s_x^2 + s_y^2)$ в виде $-\frac{1}{2}\beta s_z^2$; оба эти выражения очевидным образом эквивалентны). Мы не писали члена Hs в формулах § 1, поскольку напряженность макроскопического поля внутри кристалла была равна нулю, когда внешнее поле отсутствовало и все моменты располагались в плоскости ZY .

В равновесии эта энергия должна иметь минимум, а, значит, вариация (19) по s равняться нулю. Это дает

$$\int (\alpha s'' + \beta s_z n + \mathbf{H}) \delta s dV = 0$$

(n — единичный вектор в направлении оси Z). Но δs всегда перпендикулярно s (так как абсолютная величина s постоянна); отсюда видно, что

$$\mathbf{f} = \alpha s'' + \beta s_z n + \mathbf{H} \quad (20)$$

должно быть параллельно s . Таким образом, величина \mathbf{f} играет теперь роль «эффективного поля».

Существуют два типа взаимодействия между магнитными моментами в кристалле: обменное и релятивистское. Последнее, как правило, гораздо слабее первого. Обменное взаимодействие не может менять магнитного момента. Поэтому в присутствии поля магнитный момент вел бы себя подобно свободному моменту, т. е. вращался бы вокруг \mathbf{f} , и мы имели бы для \dot{s} (точка означает дифференцирование по времени) уравнение

$$\frac{\dot{s}}{\mu_0} = [\mathbf{f}s]$$

с $\mu_0 = e/mc$ (а не $e/2mc$, поскольку моменты s в ферромагнитном теле являются спиновыми моментами). Приближение s к \mathbf{f} связано исключительно с релятивистскими взаимодействиями. Так как эти взаимодействия слабее обменного, мы можем считать, что коэффициент перед членом $[\mathbf{f}s]$ не меняется и можно просто добавить некоторый член, обуславливающий приближение s к \mathbf{f} . Таким образом, мы приходим к уравнению вида

$$\frac{\dot{s}}{\mu_0} = [\mathbf{f}s] + \lambda \left(\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{f}s)s}{s^2} \right). \quad (21)$$

Второй член в этом уравнении представляет собой вектор, направленный от s к \mathbf{f} . Константа λ удовлетворяет неравенству $\lambda \ll s$ в соответствии с тем фактом, что релятивистское взаимодействие мало. Здесь мы вообще пренебрегли изменением абсолютной величины s .

Для применения этого уравнения к исследованию движения границы между слоями надо предварительно найти макроскопическое поле \mathbf{H} внутри кристалла. Поскольку все распределение s не зависит от координат y и z , уравнения, определяющие поле, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } (\mathbf{H} + 4\pi s) = 0,$$

переходят в

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (H_x + 4\pi s_x)}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

Если имеется внешнее магнитное поле h , приложенное по оси Z (h , конечно, может зависеть от времени), то, вспомнив, что внутри кристалла далеко от промежуточной области, т. е. там, где $s_x = 0$, поле \mathbf{H} должно равняться внешнему полю h , мы можем положить

$$H_x = -4\pi s_x, \quad H_y = 0, \quad H_z = h. \quad (23)$$

Если бы s_x всюду равнялось нулю, а внешнее поле отсутствовало, то \mathbf{H} также равнялось бы нулю, как в § 1.

Предположим, что поле h мало (по сравнению с $s\beta$). Когда поле отсутствует, s определяется формулами (3) и (9). В присутствии поля s_x более не равно нулю; однако если h мало, то мало также и s_x , будучи пропорционально h . Подставляя теперь (20) и (23) в (21) и пренебрегая всюду членами второго порядка по s_x и h , мы получим уравнения для компонент s :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu_0} &= \alpha (s_z \ddot{s}_y - s_y \ddot{s}_z) - \beta s_y s_z - s_y h + \lambda (\alpha \ddot{s}_x - 4\pi s_x) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha (s_y \ddot{s}_y + s_z \ddot{s}_z) s_x + \beta s_x s_z^2], \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu_0} &= \alpha (s_x \ddot{s}_z - s_z \ddot{s}_x) + (4\pi + \beta) s_x s_z + \lambda \alpha \ddot{s}_y - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha (s_y \ddot{s}_y + s_z \ddot{s}_z) s_y^2 + \beta s_y s_z^2 + h s_y s_z], \\ \frac{\dot{s}_z}{\mu_0} &= \alpha (s_x \ddot{s}_y - s_x \ddot{s}_y) - 4\pi s_x s_y + \lambda (\alpha \ddot{s}_z + \beta s_z + h) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{s^2} [\alpha (s_y \ddot{s}_y + s_z \ddot{s}_z) s_z + \beta s_z^3 + h s_z^2]. \quad (24) \end{aligned}$$

В отсутствие поля $\dot{s}_x = \dot{s}_y = \dot{s}_z = 0$, $h = 0$, $s_x = 0$, так что если подставить (3) в (24), то получится в точности уравнение (5). s_x , s_y , s_z являются функциями x и времени t . Предположим, что обе переменные входят только в комбинации $x - vt$, где v представляет собой скорость перемещения всего распределения вдоль оси X . Тогда $\dot{s}_x = -v s_x$, и то же самое для \dot{s}_y , \dot{s}_z , если теперь штрихом обозначить дифференцирование по $x - vt$. Для решения (24) положим

$$s_x = s_x, \quad s_y = s \sin(\theta + \psi), \quad s_z = s \cos(\theta + \psi), \quad (25)$$

где θ определяется формулой (9) (и удовлетворяет (5) или (6)), где теперь вместо x должно стоять $x - vt$. ψ мало по сравнению с θ ; s_x и $s\psi$ оба пропорциональны h (и равны нулю, когда $h = 0$),

так что можно пренебречь членами второго порядка по s_x и ψ . Мы предположим, как это подтверждается результатом, что скорость v тоже пропорциональна h ; в силу этого также пренебрежем такими членами, как vs_x или $v\psi$.

Уравнения (24) теперь примут вид

$$s(\alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta) + \lambda [\alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos 2\theta) s_x] = 0,$$

$$\lambda (\alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta) - s [\alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos^2 \theta) s_x] = \frac{sv\theta'}{\mu_0}.$$

Третье уравнение совпадает со вторым. Отсюда находим

$$\alpha s\psi'' - \beta s\psi \cos 2\theta - h \sin \theta =$$

$$= -\frac{sv\lambda\theta'}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} = -\frac{v\lambda s}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta,$$

$$\alpha s_x'' - (4\pi + \beta \cos 2\theta) s_x =$$

$$= -\frac{v\theta' s^2}{(s^2 + \lambda^2)\mu_0} = \frac{vs^2}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta, \quad (26)$$

поскольку согласно (9)

$$\theta' = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \theta.$$

Введя θ в качестве независимой переменной вместо $x - vt$, получим из (26)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \psi =$$

$$= \frac{1}{s\beta \sin \theta} \left(h - \frac{v\lambda s}{\mu_0(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right),$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{ds_x}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{1 + 4\pi/\beta}{\sin^2 \theta} \right) s_x = \frac{vs^2}{\mu_0\beta(s^2 + \lambda^2)} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sin \theta}.$$

(27)

Оба эти уравнения относятся к типу

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + \left(2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) y = f(\theta).$$

Такое уравнение имеет решение только в двух случаях: 1) либо $m = 1, 2, \dots$ и $f(\theta)$ равно нулю (тогда решением являются $P_1^m(\cos \theta)$) или ортогонально решению однородного уравнения; 2) либо m не является целым числом и $f(\theta)$ отлично от нуля. Следо-

вательно, мы видим, что уравнения (27) могут иметь решения только, если правая часть первого из них обращается в нуль, т. е. если

$$v = \frac{\mu_0 (s^2 + \lambda^2)}{\lambda s} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h. \quad (28)$$

Но $\lambda \ll s$, поэтому можно написать

$$v = \frac{\mu_0 s}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h. \quad (29)$$

Этой формулой определяется скорость движения границ между слоями во внешнем поле, направленном вдоль оси легчайшего намагничивания.

Если внешнее поле h является периодическим:

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad (30)$$

намагничивание кристалла в среднем равно нулю. Магнитная восприимчивость в этом случае определяется как отношение намагничивания как функции времени к $h(t)$. За время t граница между двумя слоями проходит расстояние (мы подставили (30) в (29) и проинтегрировали)

$$\frac{\mu_0 s}{i\lambda\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} h.$$

В кристалле имеется l_1/d слоев (обозначения те же, что в § 2). Поэтому полное намагничивание кристалла равно

$$\frac{\mu_0 s^2}{i\omega\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{l_1 l_2}{d} h.$$

Отсюда магнитная восприимчивость χ_l единицы объема в продольном поле равна

$$\chi_l = \frac{\mu_0 s^2}{i\omega\lambda d} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (31)$$

Магнитная проницаемость имеет вид

$$\mu_l = 1 - \frac{4\pi i \mu_0 s^2}{\omega\lambda d} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (32)$$

Для d можно воспользоваться выражениями (16) или (18). Тем самым появляется возможность проверить зависимость d от размеров кристалла, измерив экспериментально зависимость μ_l от упомянутых размеров.

Таким образом, χ_1 или μ_1 как функции ω не имеют собственных частот, а только затухание. Они при $\omega = 0$ обращаются в бесконечность в соответствии с тем, что мы не принимали во внимание гистерезисных эффектов. При больших ω определяющим может стать изменение абсолютной величины s (которым мы здесь пренебрегли), и выведенная формула для μ_1 может оказаться непригодной.

§ 4. Определим теперь магнитную проницаемость в поперечном поле, т. е. в поле h , направленном вдоль оси X . В этом случае влияние промежуточных областей несущественно, и мы можем считать, что в отсутствие поля все моменты расположены параллельно или антипараллельно (в различных слоях) оси Z , т. е. $s_z = \pm s$, $s_x = s_y = 0$. По той же причине оказывается несущественным член $\alpha s''$ в (20), так что для эффективного поля следует положить

$$\mathbf{f} = \mathbf{H} + \beta s_z \mathbf{n}. \quad (33)$$

Компоненты \mathbf{H} теперь равны

$$H_x = h, \quad H_y = H_z = 0, \quad (34)$$

и уравнение (21) дает для компонент \dot{s}

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu_0} &= -\beta s_y s_z + \lambda h - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_x, \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu_0} &= \beta s_x s_z - h s_z - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_y, \\ \frac{\dot{s}_z}{\mu_0} &= h s_y + \lambda \beta s_z - \frac{\lambda}{s^2} (h s_x + \beta s_z^2) s_z; \end{aligned} \quad (35)$$

s_y и s_x пропорциональны h , и если предположить, как в § 3, что h мало, то можно пренебречь членами второго порядка по s_x , s_y , h . Вместо s_z можно подставить также $\pm s$, после чего из (35) получается

$$\begin{aligned} \frac{\dot{s}_x}{\mu} &= \mp \beta s s_y + \lambda h - \lambda \beta s_x, \\ \frac{\dot{s}_y}{\mu_0} &= \pm \beta s s_x \mp h s - \lambda \beta s_y. \end{aligned} \quad (36)$$

Третье уравнение превращается в тождество.

Если h является периодическим полем (30), уравнения (36) решаются подстановкой

$$s_x = s_{0x} e^{i\omega t}, \quad s_y = s_{0y} e^{i\omega t}.$$

При этом получаем

$$s_x = \frac{\mu_0^2 \beta (s^2 + \lambda^2) + i\omega \lambda \mu_0}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2} h, \quad (37)$$

$$s_y = \pm \frac{\mu_0^2 \beta s \lambda - \mu_0 s (i\omega + \mu_0 \beta \lambda)}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2} h; \quad (38)$$

s_y в различных слоях направлено в противоположные стороны и поэтому ничего не дает для намагниченности кристалла как целого. Из (37) мы получаем магнитную восприимчивость (единицы объема) при намагничении в направлении оси X в поперечном поле

$$\chi_t = \frac{\mu_0^2 \beta (s^2 + \lambda^2) + i\omega \lambda \mu_0}{(i\omega + \beta \lambda \mu_0)^2 + \beta^2 s^2 \mu_0^2}.$$

Но $\lambda \ll s$, и мы можем написать

$$\chi_t = \frac{\mu_0^2 \beta s^2 + i\omega \lambda \mu_0}{\beta^2 s^2 \mu_0^2 - \omega^2 + 2i\omega \beta \lambda \mu_0}. \quad (39)$$

Магнитная проницаемость равна

$$\mu_t = 1 + 4\pi \frac{\mu_0^2 \beta s^2 + i\omega \lambda \mu_0}{\beta^2 s^2 \mu_0^2 - \omega^2 + 2i\omega \beta \lambda \mu_0}. \quad (40)$$

Таким образом, χ_t или μ_t как функции ω имеют собственную частоту

$$\omega_0 = \mu_0 \beta s \quad (41)$$

и затухание с декрементом

$$\gamma = \mu_0 \beta \lambda. \quad (42)$$

Поскольку $\lambda \ll s$, очевидно, что $\gamma \ll \omega_0$. Для тех же числовых величин, что и § 1, находим собственную частоту деформированного никеля равной $1,5 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$, что соответствует длине волны в 12,6 см.

В формуле (40), которая записывается также в виде

$$\mu_t = 1 + 4\pi \frac{\omega_0^2 + i\omega\gamma}{\beta (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma)}, \quad (43)$$

МОЖНО ВЫДЕЛИТЬ НЕСКОЛЬКО ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ЧАСТОТЫ:

$$\text{а) } \omega \ll \frac{\omega_0^2}{\gamma}$$

$$\mu_t = 1 + \frac{4\pi\omega_0^2}{\beta(\omega_0^2 - \omega^2)}; \quad (44)$$

$$\text{б) } \omega - \omega_0 \sim \gamma$$

$$\mu_t = 1 + \frac{2\pi\omega_0}{\beta(\omega_0 - \omega + i\gamma)}; \quad (45)$$

$$\text{в) } \omega \gg \omega_0$$

$$\mu_t = 1 - 4\pi \frac{\omega_0^2 + i\omega\gamma}{\beta\omega^2}. \quad (46)$$

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Bloch. *Zs. Phys.*, 74, 295, 1932.
- [2] W. Heisenberg. *Zs. Phys.*, 69, 287, 1931.
- [3] Mc Keehan, Elm ore. *Phys. Rev.*, 46, 226, 1934; N. Miller, D. Steinberg. *Technical Phys.*, USSR, 1, 205, 1934.
- [4] R. Becker, M. Kersten. *Zs. Phys.*, 64, 660, 1930.

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОПРАВКАХ К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

Phys. Zs. Sowjet., 8, 487, 1935

Первый вывод члена, описывающего взаимодействие с точностью до величин порядка v^2/c^2 , был произведен Брейтом [1]. Затем Бете и Ферми [2] вывели ту же формулу более строго с помощью квантовой электродинамики. Однако формула Брейта, как уже подчеркнул сам Брейт, содержит член, пропорциональный e^4/r^2 , в котором отсутствует \hbar , в силу чего она в классическом пределе находится в противоречии с классической электродинамикой. Кроме того, наличие такого члена противоречит эксперименту. Впрочем, позднее [3] Брейт показал, что этот лишний член можно исключить, применяя определенный способ вывода. Из всего этого приходится, однако, заключить, что применение квантовой электродинамики по меньшей мере нельзя считать бесспорным. Мне хотелось бы указать, что вывод формулы Брейта может быть произведен гораздо более естественным образом, если уже с самого начала записывать все уравнения с точностью до членов порядка v^2/c^2 . При этом уравнение Дирака принимает известный вид:

$$E\psi_1 = \left\{ \frac{p^2}{2m} + e\varphi - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{ie\hbar}{4mc^2} \mathbf{E}\mathbf{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c} [\mathbf{v}\mathbf{E}] \boldsymbol{\mu} - \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{v}}{2} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{H} \right\} \psi_1 \quad (1)$$

($\boldsymbol{\mu}$ — матричный вектор спинового магнитного момента). Теперь φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} можно выразить через ток и плотность второго электрона. Как известно, в выбранном нами приближении

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} + (\mathbf{j}\mathbf{n})\mathbf{n}}{r} dV \quad (2)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{r}).

Вместо ρ и \mathbf{j} сюда нужно поставить

$$\begin{aligned}\rho &= e \left\{ |\psi_2|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} |\nabla\psi_2|^2 \right\} + \frac{i\hbar}{2mc} \nabla\psi_2^* [\mu\nabla\psi_2], \\ \mathbf{j} &= \frac{e\hbar^2}{2im} (\psi_2^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_2^*) + c \operatorname{rot}(\psi_2^*\boldsymbol{\mu}\psi_2)\end{aligned}\quad (3)$$

из дираковских выражений для плотности и тока второго электрона. Брейтовская формула ([1], формула (48)) без лишнего члена получается непосредственно после подстановки (3) в (2) и далее в 1) и простых преобразований.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Breit. Phys. Rev., 34, 553, 1929.
[2] H. Bethe, E. Fermi. Zs. Phys., 77, 236, 1932.
[3] G. Breit. Phys. Rev., 39, 616, 1932.

Показано, что коэффициент аккомодации в существенных случаях должен вычисляться чисто классическим образом. При не слишком высоких температурах он оказывается пропорциональным $T^{3/2}$. Для водорода и гелия при достаточно низких температурах может иметь место также и квантовый случай, приводящий к закону T^3 .

Теоретическим определением коэффициента аккомодации занимался ряд авторов [1]. При этом, однако, с одной стороны, делались чрезмерные упрощения (например, рассматривалась одномерная модель), а с другой стороны, не принимались во внимание порядки входящих в теорию величин, что не позволяло записать ни одной окончательной формулы. При рассмотрении столкновения атома с поверхностью конденсированного тела существенную роль играет порядок величины частоты столкновения, т. е. обратного времени взаимодействия атома с поверхностью. А именно, при столкновении могут возбудиться только колебания, частоты которых не превосходят по порядку величины частоты столкновения. Поэтому важную роль играет соотношение между частотой столкновения и максимальными частотами колебаний конденсированного тела. Теоретическое рассмотрение приобретает полный смысл лишь в случае, когда частота столкновения существенно меньше, чем предельная частота, так что могут возбуждаться только медленные, т. е. длинноволновые, колебания. Такие колебания можно тогда законно трактовать как акустические.

Поскольку взаимодействие между атомом и поверхностью приходится так или иначе идеализировать, мы будем рассматривать лишь случай жидкой поверхности, хотя с той же качественной точностью результаты могут быть вполне перенесены на слу-

чай твердого тела, в частности кристалл. Будем рассматривать собственные колебания в виде плоской волны, отраженной от поверхности. Так как давление на поверхности должно равняться нулю, его можно представить в виде

$$p = A \{ \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) - \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}) \}, \quad (1)$$

где A — амплитуда, ω — частота, \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — волновые векторы падающей и отраженной волн, а начало выбрано на поверхности.

Гидродинамические уравнения гласят

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{\text{grad } p}{\rho} \quad (2)$$

(\mathbf{v} — скорость, ρ — плотность), откуда

$$\mathbf{v} = - \frac{A}{\rho \omega} \{ \mathbf{k}_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}) - \mathbf{k}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) \}. \quad (3)$$

Для определения движения поверхности рассмотрим нормальную компоненту скорости в какой-нибудь точке поверхности, например в начале координат. Тогда

$$v_z = \frac{2Ak_z \cos \omega t}{\rho \omega}, \quad (4)$$

где

$$k_z = k_{1z} = -k_{2z}.$$

Полагая теперь

$$v_z = \frac{d\zeta}{dt},$$

получим для движения точки поверхности

$$\zeta = \frac{2Ak_z}{\rho \omega^2} \sin \omega t. \quad (5)$$

Величину ζ можно понимать как координату собственного колебания. Чтобы связать ее с нормальной координатой, следует вычислить полную энергию колебания.

Полная звуковая энергия равна удвоенной средней кинетической энергии жидкости, т. е.

$$\overline{\int \rho v^2 dV}. \quad (6)$$

Так как в нашем случае имеются две плоские волны, энергия может быть представлена в виде суммы двух энергий обеих волн. Это дает после подстановки выражения (3) вместо \mathbf{v}

$$\overline{\int \rho v^2 dV} = \frac{A^2 k^2}{\rho \omega^2} V, \quad (7)$$

где V обозначает полный объем (k — абсолютное значение k_1 и k_2).

Эта величина по определению равна среднему квадрату производной по времени от нормальной координаты, \dot{q}^2 . Из (5) следует, что

$$\overline{\dot{\zeta}^2} = \frac{2A^2 k_z^2}{\rho^2 \omega^2} \quad (8)$$

или с учетом (7)

$$\overline{\dot{\zeta}^2} = \frac{2k_z^2}{k^2 \rho V} \overline{q^2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что можно положить

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{k_z}{k} q, \quad (10)$$

где M — полная масса жидкости.

Рассмотрим теперь атом, падающий на поверхность вблизи начала координат. Его расстояние от поверхности равно $z - \zeta$, а соответствующая потенциальная энергия $U(z - \zeta)$ или при малых ζ

$$U(z - \zeta) = U - \zeta \frac{dU}{dz}. \quad (11)$$

При этом, разумеется, можно рассматривать взаимодействие с каждым собственным колебанием в отдельности.

Таким образом, энергия возмущения равна

$$- \sqrt{\frac{2}{M}} \cos\theta \cdot q \frac{dU}{dz} \quad (12)$$

(θ — угол между направлением волнового вектора и нормалью к поверхности). Для вычисления соответствующей вероятности возбуждения нужно было бы определить матричный элемент от dU/dz , чего нельзя сделать даже при определенных предположениях о виде U . Мы рассмотрим, однако, два случая, когда вычисления существенно упрощаются.

Первый случай. Произведение \hbar на частоту столкновения мало в сравнении с kT^1 , т. е. переданная энергия мала по сравнению с энергией атома. Позднее мы обсудим условия, при которых этот случай осуществляется. Теперь же заметим только, что

¹ Здесь и далее k означает постоянную Больцмана; ее не следует путать с волновым вектором k .

условия выполняются для всех газов, кроме водорода и гелия, во всей области температур, в которой эти вещества существуют в виде газа. Если переданная энергия мала по сравнению с энергией атома, то задача может решаться классически. Вычислим сначала среднюю энергию, которая передается при столкновении невозбужденному колебанию.

Она, как известно, равна

$$\frac{1}{2} \left| \int F e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (13)$$

где $F = -\sqrt{2/M} \cos \theta dU/dz$ представляет собой действующую силу. Для получения конкретных формул надо сделать определенное предположение о виде потенциальной энергии. Мы примем, что

$$U = A e^{-z/a}. \quad (14)$$

Постоянная A в этой формуле зависит от выбора начала координат, и вместо нее можно подставить любую произвольную величину. Поскольку благодаря трансляционной симметрии в направлениях x и y (длинные волны!) движение в направлении оси z можно рассматривать независимо, то справедливо равенство

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{mv_z^2}{2} - A e^{-z/a}, \quad (15)$$

где v_z означает z -компоненту скорости на бесконечности. Выберем теперь $A = mv_z^2/2$. Тогда получится

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = v_z \sqrt{1 - e^{-z/a}}, \\ t &= \frac{1}{v_z} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - e^{-z/a}}} = \frac{2a}{v_z} \text{Arch } e^{z/2a}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда

$$e^{z/2a} = \text{ch } \frac{v_z t}{2a}. \quad (17)$$

Сила равна

$$F = -\sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \frac{dU}{dz} = \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \frac{mv_z^2}{2a} e^{-z/a} \quad (18)$$

или

$$F = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{mv_z^2}{2a \text{ch}^2 \frac{v_z t}{2a}} \cos \theta. \quad (18')$$

Фурье-компонента силы равна

$$V \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \cdot \frac{mv_z^2}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{v_z t}{2a}}. \quad (19)$$

После подстановки

$$\operatorname{th} \frac{v_z t}{2a} = u$$

(19) приобретает вид

$$V \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \cdot mv_z \int_{-1}^1 du \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{-i\omega a/v_z}. \quad (20)$$

Можно легко показать, что

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^n du = \frac{2\pi n}{\sin \pi n}, \quad (21)$$

так что мы имеем

$$\int F e^{-i\omega t} = V \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \cdot \frac{2\pi m \omega a}{\operatorname{sh} \frac{\pi \omega a}{v_z}}. \quad (22)$$

Таким образом, энергия, переданная собственному колебанию, равна

$$\frac{1}{M} \cos^2 \theta \frac{4\pi^2 m^2 \omega^2 a^2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \omega a}{v_z}}. \quad (23)$$

Усреднив это выражение по всем направлениям собственного колебания, получим для собственного колебания с частотой ω

$$\frac{4\pi^2 m^2 \omega^2 a^2}{3M \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \omega a}{v_z}}. \quad (24)$$

Для вычисления полной энергии ε , переданной всем собственным колебаниям, нужно проинтегрировать это выражение по всем собственным колебаниям. Число собственных колебаний жидкости дается известной формулой

$$V \frac{4\pi \omega^3 d\omega}{(2\pi)^3 c^3} \quad (25)$$

(c — скорость звука), поэтому

$$\varepsilon = \int \frac{2m^2 a^2}{3\rho c^3} \frac{\omega^4 d\omega}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \omega a}{v_z}}. \quad (26)$$

Так как мы с самого начала предположили, что частоты возбуждаемых колебаний малы по сравнению с kT/\hbar , интегрирование можно распространить от 0 до ∞ . Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\text{sh}^2 x}$$

путем интегрирования по частям переходит в

$$4 \int_0^{\infty} (\text{ch} x - 1) x^3 dx = 8 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1}.$$

Последний интеграл вычислялся в теории теплового излучения и, как известно, равен $\pi^4/15$. Тем самым окончательно получаем

$$\varepsilon = \frac{m^2 v_z^5}{45 \pi c^3 a^3}. \quad (27)$$

Число атомов со скоростью v_z , падающих в единицу времени на единицу площади поверхности, как известно, пропорционально

$$v_z e^{-mv_z^2/2kT} dv_z.$$

Поэтому средняя энергия, передаваемая атомом газа невозбужденной решетке, равна

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon v_z e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \Big/ \int_0^{\infty} v_z e^{-mv_z^2/2kT} dv_z, \quad (28)$$

что после простых вычислений дает

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(kT)^{5/2}}{3(2\pi)^{1/2} \rho c^3 a^3 m^{1/2}}. \quad (29)$$

Если решетка имеет температуру T' , то она сама отдает энергию газу. При этом энергия, отданная каким-либо собственным колебанием, пропорциональна энергии этого собственного колебания или, поскольку было предположено, что $\hbar \omega \ll kT'$, пропорциональна T' . Поэтому полная энергия, забираемая у решетки, также пропорциональна T' . Коэффициент пропорциональности можно вычислить, приняв во внимание, что в тепловом равновесии обе энергии должны быть одинаковы. Следовательно, забираемая у

решетки энергия равна $\bar{\varepsilon} T'/T$, а разность

$$\bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{T'}{T}\right) = \frac{(kT)^{3/2}}{3(2\pi)^{1/2} \rho c^3 a^3 m^{1/2}} k(T - T'). \quad (30)$$

Коэффициентом аккомодации обычно называют отношение этой энергии к наибольшей возможной передаче энергии. Так как средняя энергия налетающих атомов равна $2kT$, то эта последняя равна $2k(T - T')$. Коэффициент аккомодации равен

$$\alpha = \frac{1}{6(2\pi)^{1/2} \rho m^{1/2}} \left(\frac{kT}{a^2 c^2}\right)^{3/2}. \quad (31)$$

Таким образом, получается закон $T^{3/2}$. Вместо скорости звука можно также ввести дебаевскую температуру Θ , которая связана со скоростью звука известным соотношением

$$\frac{4\pi}{3} V \frac{k^3 \Theta^3}{(2\pi\hbar)^3 c^3} = N \quad (32)$$

(N — число атомов решетки). Тогда α приобретает вид

$$\alpha = \frac{N}{4V \rho m^{1/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2 T}{a^2 k \Theta^2}\right)^{3/2} \quad (33)$$

или

$$\alpha = \frac{1}{4\mu m^{1/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2 T}{a^2 k \Theta^2}\right)^{3/2}, \quad (33')$$

где μ — масса атома решетки.

Как уже упоминалось, для применимости этой формулы необходимо, чтобы была мала частота столкновения. Для установления границ ее пригодности рассмотрим противоположный случай больших частот столкновений. Если масса атомов газа не мала по сравнению с массой атомов решетки, то в этом случае нет никаких оснований для уменьшения коэффициента аккомодации, так что он будет по порядку величины равняться единице. Таким образом, граница применимости (33) по температуре дается неравенством

$$\frac{1}{4\mu m^{1/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2 T}{a^2 k \Theta^2}\right)^{3/2} \ll 1. \quad (34)$$

Если $m \ll \mu$, то коэффициент аккомодации остается малым по сравнению с единицей также и при высоких температурах. Легко видеть, что при этом $\alpha \sim m/\mu$. Это дает

$$\frac{1}{4\mu m^{1/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2 T}{a^2 k \Theta^2}\right)^{3/2} \ll \frac{m}{\mu}. \quad (35)$$

Полагая, как обычно, $a \sim 3 \cdot 10^{-9}$, получим из (35)

$$T \ll \frac{m\theta^2}{1500} \quad (36)$$

(в этой формуле через m обозначен атомный вес газа). В случае (34) вместо m должно стоять $(m\mu^2)^{1/2}$. Сравнение показывает, что эти условия не выполняются во всех проведенных до сих пор измерениях. Таким образом, эти измерения не только не могут быть применены для сравнения с теорией, но и вообще лежат в области, в которой аккомодация существенным образом зависит от «формы» атома.

В т о р о й с л у ч а й. Произведение \hbar на частоту столкновения велико по сравнению с kT . В этом случае передаваемая энергия по порядку величины совпадает с энергией налетающего атома. При этом для описания взаимодействия атома с поверхностью тела можно рассматривать последнюю как твердую стенку. Согласно теории возмущений в непрерывном спектре вероятность изменения состояния за время столкновения равна

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\eta|^2, \quad (37)$$

где η — матричный элемент возмущающей энергии, в котором волновая функция начального состояния нормирована на равный единице поток частиц, а волновая функция конечного состояния — на энергию. Вычисление матричного элемента от $-dU/dz$, т. е. силы, действующей на атом газа, лучше всего провести, рассматривая его как производную от матричного элемента импульса. Согласно нашим предположениям и краевому условию $\psi = 0$ при $z = 0$ выбираем волновую функцию начального состояния в виде

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{v}} \sin \frac{mv}{\hbar} z. \quad (38)$$

Здесь v , разумеется, означает z -компоненту скорости. Аналогично для волновой функции конечного состояния имеем

$$\psi' = \frac{2}{\sqrt{\pi\hbar v'}} \sin \frac{mv'}{\hbar} z. \quad (39)$$

Матричный элемент импульса, как известно, равен

$$\begin{aligned} -i\hbar \int \psi'^* \frac{d\psi}{dz} dz &= -\frac{4imv}{\sqrt{\pi\hbar vv'}} \int \cos \frac{mv}{\hbar} z \cdot \sin \frac{mv'}{\hbar} z dz = \\ &= -\frac{2imv}{\sqrt{\pi\hbar vv'}} \int \left[\sin \frac{m}{\hbar} (v' - v) z + \sin \frac{m}{\hbar} (v + v') z \right] dz = \\ &= \frac{2imv}{\sqrt{\pi\hbar vv'}} \left\{ \frac{\hbar}{m(v' - v)} \cos \frac{m}{\hbar} (v' - v) z \Big| + \frac{\hbar}{m(v' + v)} \cos \frac{m}{\hbar} (v' + v) z \Big| \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

В этом интеграле значения косинусов на верхнем пределе, как обычно, обращаются в нуль из-за усреднения. Поэтому подстановка $z = 0$ дает

$$\frac{4i}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\hbar v v'}}{(v^2 - v'^2)}. \quad (41)$$

Матричный элемент силы получается отсюда путем умножения на

$$i \frac{E' - E}{\hbar} = i \frac{m}{2\hbar} (v'^2 - v^2) \quad (42)$$

и равен, следовательно,

$$2m \sqrt{\frac{v v'}{\pi \hbar}}. \quad (43)$$

Матричный элемент нормальной координаты собственного колебания дается, как известно, выражением $\sqrt{n\hbar/2\omega}$, если число возбужденных колебательных квантов меняется с n на $n - 1$ или наоборот.

Таким образом, матричный элемент энергии возмущения (12) равен

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta \sqrt{\frac{n\hbar}{2\omega}} 2m \sqrt{\frac{v v'}{\pi \hbar}}. \quad (44)$$

Тогда для вероятности перехода получаем из (7) и (30)

$$8 \cos^2 \theta n m^2 \frac{v v'}{M \hbar \omega}. \quad (45)$$

Интегрируя по всем направлениям звукового кванта, получим для вероятности перехода в случае $v' > v$

$$\frac{8m^2 v v' V 4\pi \omega^2 d\omega}{3(2\pi)^3 M \hbar \omega^3 (e^{\hbar\omega/T} - 1)}. \quad (46)$$

Подставляя

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} m (v'^2 - v^2),$$

получим

$$\frac{1}{\hbar\omega} \cdot \frac{V m^2 v v' (v'^2 - v^2) v' dv'}{3\pi^2 M \hbar^3 c^3 (e^{m(v'^2 - v^2)/2T} - 1)}. \quad (47)$$

Умножив эту формулу на распределение скоростей падающего атома

$$\frac{n}{kT} e^{-mv^2/2kT} v dv$$

и на $\hbar\omega$, находим энергию, переданную от решетки к газу:

$$d\varepsilon_1 = \frac{m^6 (v'^2 - v^2)^2 e^{-mv'^2/2kT} v^2 dv v'^2 dv'}{3\pi^2 \rho \hbar^3 c^3 k T (e^{m(v'^2 - v^2)/2kT} - 1)}. \quad (48)$$

Для рассмотрения обратного перехода от скорости v' к скорости v следует вместо n подставить $n + 1$. Тогда энергия, переданная от газа решетке, будет равняться

$$d\varepsilon_2 = \frac{m^6 (v^2 - v'^2)^2 e^{-mv'^2/2kT} v^2 dv v'^2 dv'}{3\pi^2 \rho \hbar^3 c^3 k T (1 - e^{m(v^2 - v'^2)/2kT})}. \quad (48')$$

Для суммарной передачи энергии справедлива формула

$$d\varepsilon = d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 = \frac{m^6 (v^2 - v'^2)^2 v^2 dv v'^2 dv'}{3\pi^2 \rho \hbar^3 c^3 k T [e^{mv'^2/2kT} - e^{mv^2/2kT}]} \left[e^{\frac{mv^2}{2kT}} \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \right) - e^{\frac{mv'^2}{2kT}} \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \right) \right]. \quad (49)$$

При $T' = T$, как и следовало ожидать, $d\varepsilon = 0$. При малых $T - T'$ находим

$$d\varepsilon = \frac{m^7 (v'^2 - v^2)^3 v^2 dv v'^2 dv' (T - T')}{6\pi^2 \rho \hbar^3 c^3 k^2 T^3 [e^{mv'^2/2kT} - e^{mv^2/2kT}]}. \quad (49')$$

Чтобы получить коэффициент аккомодации, делим на $2k(T - T')$ и интегрируем:

$$\alpha = \iint \frac{m^7 (v'^2 - v^2)^3 v^2 dv v'^2 dv'}{3(2\pi)^2 \rho \hbar^3 c^3 k^2 T^3 [e^{mv'^2/2kT} - e^{mv^2/2kT}]}. \quad (50)$$

Вводя теперь обозначения

$$\frac{mv^2}{2kT} = x, \quad \frac{mv'^2}{2kT} = y,$$

находим

$$\alpha = \frac{4m(kT)^3}{3\pi^2 \rho \hbar^3 c^3} \int_0^\infty dx \int_x^\infty dy \frac{(y-x)^3 \sqrt{xy} dy}{e^y - e^x}. \quad (51)$$

Стоящий здесь интеграл может быть вычислен приближенно. При этом получается

$$\alpha \approx 1,7 \frac{m(kT)^3}{\rho \hbar^3 c^3}. \quad (51')$$

Таким образом, при достаточно низких температурах α ведет себя, как T^3 .

Сравнение (51) с (31) приводит в качестве условия применимости (51) к

$$kT \ll 4 \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (52)$$

или после подстановки численных значений к

$$T \ll \frac{2000}{m} \text{ .} \quad (53)$$

Это соотношение показывает, что, за исключением водорода и гелия, нам всегда приходится иметь дело с «классической» аккомодацией.

Если ввести с помощью (32) температуру Дебая, то (51) приобретает простой вид:

$$\alpha \approx \frac{100 m}{\mu} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \text{ .} \quad (54)$$

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. M. Jackson, N. F. Mott. Proc. Roy. Soc., A137, 703, 1932; J. M. Jackson, A. Howarth. Proc. Roy. Soc., A142, 447, 1933; C. Zener. Phys. Rev., 40, 335, 1932.

К ТЕОРИИ ФОТОЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

Phys. Zs. Sowjet., 9, 477, 1936,

Вычислена электродвижущая сила, появляющаяся в цепи, содержащей полупроводник, освещаемой с одной стороны. Рассмотрены два случая: полупроводник с электронами проводимости и полупроводник, содержащий как электроны, так и «дырки».

§ 1. Введение

Если имеется цепь, содержащая полупроводник, который с обеих сторон находится в контакте с металлом и один из контактов освещен, то в цепи возникает электродвижущая сила (э.д.с.). Этот эффект известен под названием эффекта Дембера.

Полупроводник поглощает падающий на него свет. При поглощении светового кванта непроводящие электроны перебрасываются вверх на энергетические уровни зоны проводимости, в результате чего в полупроводнике появляются новые электроны проводимости.

Как правило, свет проникает в полупроводник на расстояние порядка нескольких длин волн, которое значительно превосходит длину среднего свободного пробега электронов. Поэтому можно предположить, что в каждом элементе объема полупроводника интенсивность света однородна и что число электронов проводимости, создаваемых светом в единицу времени в каком-либо элементе объема, пропорционально этой интенсивности (равно числу поглощенных квантов). Обозначим через J число электронов проводимости, создаваемых в единицу времени в единице объема. Следовательно, вдоль полупроводника существует градиент ∇J (практически J обращается в нуль на расстоянии, равном нескольким длинам волн).

Под влиянием освещения плотность электронов (проводимости) делается неоднородной. Если функция распределения электронов по скоростям остается, как и в случае отсутствия освещения, бoльцмановской, то это непостоянство электронной плотности вдоль полупроводника не сможет повести к появлению э.д.с. в цепи. В самом деле, разности потенциалов, которые появляются из-за неоднородности распределения заряда, должны скомпенсировать друг друга, будучи взяты по всей замкнутой цепи. В противном случае в цепи протекал бы ток, что было бы эквивалентно вечному двигателю, поскольку отсутствуют внешние источники энергии. В частности, в нашем случае разность потенциалов, которая является в полупроводнике благодаря неоднородности распределения электронов вдоль него, компенсируется контактной разностью потенциалов в обоих местах соединения полупроводника с металлом. Э.д.с. в цепи возникает лишь как следствие отклонения функции распределения от закона Больцмана.

Все сказанное относится только к случаю, когда в проводимости участвуют одни электроны. В некоторых случаях непроводящие электроны, переходя на уровни зоны проводимости, оставляют на своих старых местах «дырки», которые тоже могут вносить вклад в проводимость в качестве «положительных» электронов. При таких обстоятельствах э.д.с. возникает как результат неоднородности в распределении электронов и «дырок» вдоль полупроводника. Это полностью аналогично концентрационной ячейке Нернста. Вначале мы рассмотрим э. д. с. в полупроводнике, имеющем только электроны проводимости, полупроводник с электронами и «дырками» будет изучен в § 5.

Под влиянием градиента интенсивности освещения, приводящего к неоднородности в распределении электронов вдоль полупроводника, в последнем появляется электрическое поле. Чтобы определить э.д.с., возникающую в цепи, нужно вычислить разность потенциалов между концами разомкнутого контура, т. е. в отсутствие тока. Поэтому упомянутое выше электрическое поле следует находить из условия, что ток равен нулю. Для этого мы должны найти функцию распределения электронов по скоростям в присутствии электрического поля и градиента ∇J , вычислить с ее помощью ток и положить его равным нулю. Интегрируя поле по всей длине полупроводника, мы найдем разность потенциалов между двумя концами последнего, а прибавив контактные разности потенциалов, — и полную э.д.с.

Если полупроводник помещен в магнитное поле, появляется дополнительная э.д.с., направленная перпендикулярно градиенту интенсивности света (эффект Кикоина — Носкова). Этот эффект будет рассмотрен в другой статье.

Теории фото-э.д.с., опубликованные до сих пор, нельзя счи-

тать удовлетворительными. Фрелих [1] вычислил функцию распределения, однако сделал при этом несколько ошибочных допущений. В частности, он предположил, что вероятность электронного перехода при столкновении с решеткой не зависит от энергий электрона и фонона. Что же касается статьи Френкеля [2], то едва ли можно согласиться с такой, например, фразой: «оставляя в стороне более детальное обсуждение этого вопроса, мы в дальнейшем будем считать (3а) справедливым не только в случае малых дополнительных концентраций, но также и при большой их величине» ([2], стр. 188). Это означает не что иное, как предположение о том, что $(\bar{n} + q)^2 = \bar{n}^2 + 2 \bar{n}q$ справедливо при больших q .

§ 2. Функция распределения

В отсутствие электрического поля и освещения электроны проводимости распределены по Больцману. Чтобы найти функцию распределения при наличии электрического поля E и градиента ∇J (имеющих одинаковые направления), запишем кинетическое уравнение в виде (ср. [3] ¹)

$$\begin{aligned} eE\nabla_{\rho} f(\theta, \varepsilon) + \frac{p}{m} \nabla f(\theta, \varepsilon) = \\ = - \int W_1 \sqrt{\frac{\varepsilon - h\nu_1}{\varepsilon}} \{f(\theta, \varepsilon)(N_1 + 1) - f(\theta', \varepsilon - h\nu_1)N_1\} d\Omega' - \\ - \int W_2 \sqrt{\frac{\varepsilon + h\nu_2}{\varepsilon}} \{f(\theta, \varepsilon)N_2 - f(\theta', \varepsilon + h\nu_2)(N_2 + 1)\} d\Omega' - \\ - \lambda(f(\theta, \varepsilon) - f_0(\varepsilon)). \quad (1) \end{aligned}$$

Функция распределения теперь зависит не только от энергии, но также и от угла между импульсом электрона p и направлением ∇J (или E). Поскольку J не постоянна вдоль полупроводника, f является также неявной (посредством J) функцией координаты z в этом направлении.

Правая часть (1) представляет собой уравнение баланса между переходами электронов в результате столкновений с решеткой. Первый интеграл содержит два члена: первый связан с переходами из данного состояния с энергией ε и углом θ между p и E

¹ В уравнении (6) этой работы под интегралами ошибочно опущены множители $\sqrt{\frac{\varepsilon - h\nu_1}{\varepsilon}}$ и $\sqrt{\frac{\varepsilon + h\nu_2}{\varepsilon}}$, которые связаны со статистическими весами начального и конечного состояний. Авторы обязаны Б. Давыдову, указавшему на это обстоятельство (см. также [4]).

в другое состояние с энергией $\varepsilon - h\nu_1$, одновременно с которыми решетка поглощает квант $h\nu_1$ упругих колебаний (фонон). Второй член в первом интеграле обязан обратным переходам, при которых квант $h\nu_1$ поглощается электроном. Интегрирование происходит по всем возможным направлениям электрона с энергией $\varepsilon - h\nu_1$ ($d\Omega'$ представляет собой элемент телесного угла в этом направлении). Второй интеграл учитывает переходы из состояния с энергией ε и углом θ в состояния с энергией $\varepsilon + h\nu_2$, при которых электрон поглощает квант $h\nu_2$, и наоборот.

N является функцией распределения фононов, N_1 и N_2 — числами фононов с энергиями $h\nu_1$ и $h\nu_2$. $W_1(N_1 + 1)$ и $W_1 N_1$ представляют собой вероятности переходов электрона, сопровождаемых испусканием или поглощением фонона $h\nu_1$; соответственно $W_2(N_2 + 1)$ и $W_2 N_2$ есть вероятности таких переходов с участием фонона $h\nu_2$. N дается функцией распределения Бозе, т. е.

$$N = \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1}. \quad (2)$$

В отсутствие поля и освещения левая сторона (1) равна нулю и уравнение удовлетворяется больцмановской функцией

$$f_0(\varepsilon) = a_0 e^{-\varepsilon/T}. \quad (3)$$

Постоянная a_0 определяется числом электронов n , находящихся в единице объема без освещения, по формуле $a_0 = n(2\pi m k T)^{-3/2}$.

Вероятности W_1 и W_2 , как известно, пропорциональны квадратному корню из энергии электрона, а также соответственно ν_1 и ν_2 . Что касается энергии электрона, то она в обоих случаях (W_1 и W_2) равна либо наименьшей энергии перехода (т. е. $\varepsilon - h\nu$ и ε соответственно в W_1 и W_2), либо — в обоих случаях — наибольшей энергии (ε и $\varepsilon + h\nu_2$ в W_1 и W_2). Оказывается удобным и в том и в другом случае взять среднее арифметическое этих двух энергий: $\varepsilon - h\nu_1/2$ в W_1 и $\varepsilon + h\nu_2/2$ в W_2 . Тогда вероятности переходов W_1 и W_2 приобретут вид

$$W_1 = A\nu_1 \sqrt{\varepsilon - \frac{h\nu_1}{2}}, \quad W_2 = A\nu_2 \sqrt{\varepsilon + \frac{h\nu_2}{2}}, \quad (4)$$

где A — постоянная.

Третий член в правой части $\lambda(f - f_0)$ определяет уменьшение числа электронов благодаря их захвату, т. е., например, рекомбинации со свободными уровнями в почти заполненной нижней энергетической зоне. Следует отметить, что электроны проводимости могут захватываться не только таким способом, но также и непосредственно либо самой решеткой, либо имеющимися в ней приме-

сями. Число электронов данной энергии, захваченных в единицу времени в единице объема, пропорционально их числу в этом объеме, т. е. функции распределения f , и равно λf , где λ представляет собой вероятность захвата. λ , вообще говоря, является функцией энергии электрона. С другой стороны, электроны в то же самое время рождаются под действием теплового движения; таким образом, уменьшение их числа равно $\lambda f - \text{const}$. Для определения константы заметим, что без освещения числа электронов, захваченных и рожденных под влиянием теплового движения, равны. Без освещения $f = f_0$, отсюда $\text{const} = \lambda f_0$, и мы приходим к выражению $\lambda (f - f_0)$.

Первый член в левой части (1) дает изменение числа электронов в состоянии ε , θ под действием поля E (∇_p представляет собой градиент в p -пространстве). Второй член определяет изменение этого числа, связанное с непостоянством f вдоль полупроводника, т. е. под влиянием ∇J .

Средняя скорость электрона, поделенная на λ , очевидно, представляет собой «длину захвата» (Schublänge) электрона, т. е. среднее расстояние, проходимое им до захвата.

В дальнейшем мы будем считать, что температура достаточно высока, так что энергия фононов $h\nu$, которые могут обмениваться импульсом с электронами и поэтому входят в рассмотрение, гораздо меньше, чем kT :

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1.$$

При электронном переходе, сопровождающемся испусканием или поглощением фонона, импульс должен сохраняться. До перехода импульс равнялся p , импульс же после того, как фонон $h\nu_1$ (или $h\nu_2$) был поглощен электроном или был отдан решетке, пусть будет равен p_1 (или p_2). Импульс фонона равен $h\nu_1/w$ (или $h\nu_2/w$), где w — скорость звука. Закон сохранения дает тогда

$$(p_1 - p)^2 = \left(\frac{h\nu_1}{w}\right)^2, \quad (p_2 - p)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{w}\right)^2.$$

Используя $h\nu_1/\varepsilon$, $h\nu_2/\varepsilon \ll 1$, находим

$$p = \sqrt{2m\varepsilon}, \quad p_1 = \sqrt{2m(\varepsilon - h\nu_1)} = \sqrt{2m\varepsilon} \left(1 - \frac{h\nu_1}{2\varepsilon}\right), \\ p_2 = \sqrt{2m(\varepsilon + h\nu_2)} = \sqrt{2m\varepsilon} \left(1 + \frac{h\nu_2}{2\varepsilon}\right);$$

и закон сохранения приобретает вид

$$2m\varepsilon + 2m(\varepsilon - h\nu_1) - 4m\varepsilon \left(1 - \frac{h\nu_1}{2\varepsilon}\right) \cos \vartheta_1 = \left(\frac{h\nu_1}{w}\right)^2,$$

$$2m\varepsilon + 2m(\varepsilon + h\nu_2) - 4m\varepsilon \left(1 + \frac{h\nu_2}{2\varepsilon}\right) \cos \vartheta_2 = \left(\frac{h\nu_2}{w}\right)^2$$

(ϑ_1 и ϑ_2 — углы между p и соответственно p_1 или p_2).

Введя $\nu_1 + \nu_2 = 2\nu$ и $\nu_1 - \nu_2 = \Delta\nu$, найдем приближенно

$$\begin{aligned} (h\nu)^2 &= 8m\varepsilon w^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ h\Delta\nu &= -4mw^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ϑ — угол между p и импульсом после перехода (безразлично, p_1 или p_2). Из (5) очевидно, что $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{h\nu}{\varepsilon} \ll 1$.

Так как $h\nu_1 \ll \varepsilon$ и $h\nu_2 \ll \varepsilon$, (2) можно приближенно записать в виде

$$N_1 = \frac{kT}{h\nu_1} - \frac{1}{2}, \quad N_2 = \frac{kT}{h\nu_2} - \frac{1}{2}, \quad (6)$$

а (4) в виде

$$W_1 = A\nu_1 V\bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{h\nu_1}{4\varepsilon}\right), \quad W_2 = A\nu_2 V\bar{\varepsilon} \left(1 + \frac{h\nu_2}{4\varepsilon}\right). \quad (7)$$

Подставим теперь (6) и (7) в правую часть (1) и разложим $f(\theta', \varepsilon - h\nu_1)$ и $f(\theta', \varepsilon + h\nu_2)$ по степеням ν_1 и ν_2 вплоть до членов порядка $(h\nu)^2/kT$ или $h\Delta\nu$, имеющих одинаковый порядок величины. Тогда правая часть (1) перейдет в

$$\begin{aligned} A V\bar{\varepsilon} \left\{ f(\varepsilon, \theta) \left[-\frac{2kT}{h} + \Delta\nu \left(\frac{3kT}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right) + \frac{h\nu^3}{4\varepsilon} \left(3 - \frac{kT}{\varepsilon} \right) \right] d\Omega' + \right. \\ \left. + \int f(\varepsilon, \theta') \left[\frac{2kT}{h} + \Delta\nu \left(-\frac{3kT}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right) + \frac{h\nu^2}{4\varepsilon} \left(3 + \frac{kT}{\varepsilon} \right) \right] d\Omega' + \right. \\ \left. + \int f'(\varepsilon, \theta') \left[-kT\Delta\nu + h\nu^2 \left(\frac{3kT}{2\varepsilon} + 1 \right) \right] d\Omega' + \right. \\ \left. + \int f''(\varepsilon, \theta') kTh\nu^2 d\Omega' \right\} - \lambda [f(\varepsilon, \theta) - f_0(\varepsilon)]. \quad (8) \end{aligned}$$

Запишем, как это всегда делается, функцию $f(\varepsilon, \theta)$ в виде

$$f(\theta, \varepsilon) = f(\varepsilon) + \cos \theta \cdot g(\varepsilon), \quad (9)$$

где $g(\varepsilon)$ мало по сравнению с $f(\varepsilon)$. Подставляя (5) и (9) в (8) и интегрируя по $d\Omega'$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{A V\bar{\varepsilon}}{h} 16\pi m w^2 kT \left[\frac{2f(\varepsilon)}{kT} + f'(\varepsilon) \left(2 + \frac{\varepsilon}{kT} \right) + \varepsilon f''(\varepsilon) \right] - \\ - \frac{A V\bar{\varepsilon}}{h} 8\pi kT g(\varepsilon) \cos \theta - \lambda (f - f_0) - \lambda g \cos \theta. \quad (10) \end{aligned}$$

$g(\varepsilon)$ является малой поправкой к $f(\varepsilon)$, пропорциональной ∇J . Градиент ∇J должен, разумеется, считаться малым, поскольку на расстояниях порядка среднего свободного пробега электрона свет почти не поглощается. Поэтому вместо $f(\theta, \varepsilon)$ в первых двух членах в левой части (1) следует подставить $f(\varepsilon)$ (электрическое поле E , вызванное ∇J , также пропорционально ∇J).

Для первого члена имеем

$$eE \nabla_p f(\varepsilon) = eE \frac{p}{p} \frac{\partial f}{\partial p} = eE \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} = eE \cos \theta \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}.$$

Для второго члена можно написать

$$p \nabla f = p \nabla J \frac{\partial f}{\partial J} = p \cos \theta J' \frac{\partial f}{\partial J}.$$

(здесь штрих означает дифференцирование по координате z вдоль направления ∇J). Окончательно для левой части (1) получаем

$$\cos \theta \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} eE \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \frac{\partial f}{\partial J} J' \cos \theta. \quad (11)$$

Приравнявая (10) и (11), найдем из членов, не содержащих $\cos \theta$, уравнение для определения $f(\varepsilon)$:

$$\frac{A \sqrt{\varepsilon}}{h} 16\pi m v^2 kT \left[\frac{2f}{kT} + f' \left(2 + \frac{\varepsilon}{kT} \right) + \varepsilon f''(\varepsilon) \right] = \lambda (f - f_0).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{\frac{2}{m\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} (\varepsilon s) = \lambda (f - f_0), \quad (12)$$

где

$$s = \frac{2^{1/2} A \pi m^{3/2} v^2 \varepsilon}{h} (f + kT f'). \quad (13)$$

В таком виде уравнение (12) представляет собой уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}_p s = \nabla_p s = \lambda (f - f_0),$$

а s является потоком электронов в p -пространстве. В дальнейшем мы будем использовать (12), (13) в виде

$$\frac{d}{dx} [x^2 (f + f')] = \mu (f - f_0), \quad (14)$$

где $x = \varepsilon/kT$, а

$$\mu = \frac{h}{16\pi m v^2 A \sqrt{kT}} \lambda \sqrt{x} \quad (15)$$

и штрих обозначает дифференцирование по x .

Члены в (10) и (11), содержащие $\cos \theta$, дают уравнение для $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{\sqrt{2} h}{8 \sqrt{\pi} k T A} \left(\frac{eE}{kT} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial J} J' \right). \quad (16)$$

Мы опустили член λg , сохранив $\frac{A \sqrt{e}}{h} 8kT \lambda g$, поскольку их отношение, как будет показано, имеет порядок отношения среднего свободного пробега электрона к длине захвата, которое гораздо меньше единицы.

Плотность тока i теперь может быть вычислена по формуле

$$i = e \int \frac{pz}{m} \cos \theta g(e) d\tau_p = \frac{8\pi e m k^3 T^3}{3} \int g(x) x dx$$

или после подстановки (16)

$$i = -\frac{\sqrt{2} \pi e h k T}{3A} \int_0^{\infty} \left(\frac{eE}{kT} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial J} \nabla J \right) x dx. \quad (17)$$

Определяя E из условия, что ток i равен нулю, получим из (17)

$$\frac{eE}{kT} = -\nabla J \frac{\int_0^{\infty} x f dx}{\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} x dx}. \quad (18)$$

В отсутствие освещения функция распределения равна $f_0 = a_0 e^{-x}$ (3) с $a_0 = n(2\pi m k T)^{-3/2}$. Беря первый член в (17), мы найдем проводимость σ полупроводника в отсутствие освещения

$$\sigma = \frac{e^2 n h}{6 (\pi k T)^{3/2} m A}.$$

Согласно хорошо известной формуле та же самая σ равна также

$$\sigma = \frac{4e^2 l n}{3 \sqrt{2\pi} m k T}$$

(l — средняя длина свободного пробега электрона). Сравнивая оба выражения для σ , находим

$$A = \frac{h}{4\pi \sqrt{2\pi} k T l}. \quad (19)$$

С помощью этого выражения легко убедиться, что отношение λg к $\frac{A \sqrt{e}}{h} 8 \pi g k T$ по порядку величины совпадает с отношением l к $\sqrt{\frac{e}{m}} \frac{1}{\lambda} = l_s$, т. е. l к длине захвата.

Перейдем теперь к решению уравнения (14). Длина захвата электрона в общем случае значительно превосходит его среднюю длину свободного пробега. Мы будем считать, что их отношение, равное по порядку величины $\sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{1}{\lambda l}$, столь велико, что

$$\sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{1}{\lambda l} \gg \frac{kT}{m v^2}.$$

В таком случае $\mu \ll 1$, и поэтому можно решить (14) методом последовательных приближений.

Чтобы найти нулевое приближение, решим (14) без правой части. Сначала находим первый интеграл

$$f + f' = \frac{\text{const.}}{x^2}.$$

Это — простое линейное уравнение первого порядка; его общее решение имеет вид

$$f = a e^{-x} + b e^{-x} \int \frac{e^x}{x^2} dx,$$

где a и b — две постоянные. Это выражение следует подставить в правую часть (14) и снова решить получившееся уравнение. Последнее легко сделать, и мы находим функцию распределения в первом приближении в виде

$$f(x) = a e^{-x} + b e^{-x} \int \frac{e^x}{x^2} dx + (a - a_0) e^{-x} \int dx \frac{e^{-x}}{x^2} \int \mu e^{-x} dx + b e^{-x} \int dx \frac{e^x}{x^2} \int dx \mu e^{-x} \int \frac{e^x}{x^2} dx. \quad (20)$$

Постоянная $a - a_0$, как будет вскоре показано, имеет по μ порядок -1 . Поскольку мы намереваемся ограничиться первым приближением, в выражении для $f(x)$ следует оставить только члены нулевого и -1 -го порядка по μ , т. е. нужно опустить четвертый член в правой части. Следует отметить, что выбор постоянных пределов в (20) остается произвольным, пока не найдены константы a и b . Мы обсудим теперь условия, из которых они определяются.

Следует упомянуть, что все электроны проводимости, образованные при монохроматическом освещении, имеют (непосредственно после рождения) приблизительно одинаковые энергии. Мы будем считать, что они в точности равны. Эта энергия, назовем ее ε_0 , практически совпадает с энергией поглощенного светового кванта. Так как энергия светового кванта в видимой области спектра приблизительно равна $100kT$, величина $x_0 = \varepsilon_0/kT$ является очень большим числом.

Функция распределения имеет различный вид при $x > x_0$ и $x < x_0$. Попробуем определить ее как

$$f(x) = a_1 e^{-x} + b_1 e^{-x} \int_1^x \frac{e^y}{y^2} dy + (a_1 - a_0) e^{-x} \int_0^x \int_0^y \frac{e^{y-z}}{y^2} \mu(z) dz dy \quad (21)$$

при $x < x_0$ и

$$f(x) = a_2 e^{-x} + b_2 e^{-x} \int_1^x \frac{e^y}{y^2} dy + (a_2 - a_0) e^{-x} \int_0^x \int_0^y \frac{e^{y-z}}{y^2} \mu(z) dz dy \quad (22)$$

при $x > x_0$. После того как мы выбрали пределы интегрирования, константы a_1 , b_1 , a_2 , b_2 должны определяться из следующих условий.

Поток электронов в p -пространстве дается выражением (13). Поток электронов сквозь сферу (в p -пространстве), соответствующую заданной энергии ε , равен, очевидно, произведению s на $4\pi r^2 = 8\pi l e = 8\pi l k T x$:

$$8\pi l k T x s = \frac{2^{3/2} A \pi^2 m^{3/2} \omega^2 (kT)^2 x^2}{h} (f + f') = \frac{1}{B} (f + f') x^2, \quad (23)$$

где

$$B = \frac{h}{2^{3/2} A \pi^2 m^{3/2} \omega^2 (kT)^2} = \frac{l}{4\pi m^2 \omega^2 kT} \quad (24)$$

(A должно быть взято из (19)). Этот поток направлен в сторону уменьшения энергии. Очевидно, что при $x=0$ он должен равняться нулю. Последнее эквивалентно условию, чтобы $f(x)$ не имело при $x=0$ особой точки. Подставив (21) в (23), находим поток в виде

$$\frac{1}{B} \left[b_1 + (a_1 - a_0) \int_0^x \mu e^{-x} dx \right].$$

Приравнявая его нулю, получаем

$$b_1 = 0.$$

Далее, при $x = x_0$ значения обеих функций (21) и (22) должны быть равны. Это дает

$$a_1 + (a_1 - a_0) \Lambda_1 = a_2 + b_2 \frac{e^{x_0}}{x_0^2} + (a_2 - a_0) \Lambda_1, \quad (25)$$

где

$$\Lambda_1 = \int_0^{x_0} \int_0^y \frac{e^{y-z}}{y^2} \mu(z) dz dy,$$

и мы написали для $\int_1^{x_0} \frac{e^y}{y^2} dy$ его асимптотическое значение e^{x_0}/x_0^2 .

Асимптотическое значение Λ_1 равно

$$\Lambda_1 \approx \frac{e^{x_0}}{x_0^2} \Lambda,$$

где

$$\Lambda = \int_0^{\infty} \mu e^{-x} dx. \quad (26)$$

При очень больших энергиях функция распределения должна иметь больцмановский вид. Чтобы использовать это условие, выпишем асимптотическое выражение для $f(x)$ (22) при больших x . Асимптотически

$$\int_1^x \frac{e^y}{y^2} dy \approx \frac{e^x}{x^2}, \quad \int_0^x \int_0^y \frac{e^{y-z}}{y^2} \mu(z) dz dy \approx \Lambda \int_1^x \frac{e^y}{y^2} dy \approx \Lambda \frac{e^x}{x^2};$$

и поэтому

$$f(x) = a_2 e^{-x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{(a_2 - a_0) \Lambda}{x^2}.$$

Отсюда находим, что должно быть

$$b_2 = -(a_2 - a_0) \Lambda.$$

Тогда $f(x)$ при больших x является функцией Больцмана. Подставляя это выражение для b_2 в (25) и замечая, что

$$\Lambda_1 \approx \Lambda e^{x_0}/x_0^2,$$

находим

$$a_2 = a_1 + (a_1 - a_0) \Lambda_1.$$

Следовательно, при $x > x_0$ функция распределения асимптотически равна

$$f(x) = a_2 e^{-x} = [a_1 + (a_1 - a_0) \Lambda_1] e^{-x}. \quad (27)$$

Под влиянием освещения в единицу времени появляется J электронов с энергией ϵ_0 в единице объема. В соответствии с этим в точке p -пространства $x = x_0$ сумма потоков вниз (в сторону уменьшения энергии) и вверх (в сторону возрастания энергии) должна равняться J . Подставляя (21) в (23), находим поток вниз при $x = x_0$:

$$\frac{1}{B} (a_1 - a_0) \int_0^{x_0} \mu e^{-x} dx$$

(для $b_1 = 0$). Но

$$\int_0^{x_0} \mu e^{-x} dx \approx \int_0^{\infty} \mu e^{-x} dx = \Lambda,$$

и поток равен $\frac{1}{B} (a_1 - a_0) \Lambda$. Поток вверх равен нулю, поскольку функция распределения при $x > x_0$ является бoльцмановской (27), и, следовательно, $f + f'$ обращается в нуль. Разумеется, это справедливо лишь приближенно, так как (27) представляет собой только асимптотическое выражение. Однако следующий член асимптотического разложения дает выражение, которым можно вполне пренебречь.

Окончательно из рассматриваемого условия получается

$$a_1 - a_0 = \frac{BJ}{\Lambda};$$

и функция распределения (21) при $x < x_0$ приобретает вид

$$f(x) = \left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right) e^{-x} + \frac{BJ}{\Lambda} e^{-x} \int_0^x \int_0^y \frac{e^{v-z}}{y^2} \mu(z) dz dy. \quad (28)$$

При $x > x_0$ функция распределения (27) становится равной

$$f(x) = \left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right) e^{-x} + \frac{BJ}{\Lambda} \Lambda_1 e^{-x}.$$

Из этого выражения видно, что $f(x)$ при $x > x_0$ совершенно не существенна. В самом деле, оно пригодно лишь начиная с $x = x_0$, поэтому первый член во всяком случае содержит e^{-x} и в силу этого очень мал. Второй член равен $\frac{BJ e^{x_0}}{x_0^2} e^{-x}$ (так как $\Lambda_1 \approx \frac{e^{x_0}}{x_0^2} \Lambda$). При $x = x_0$ он не содержит e^{-x} , но зато имеет лиш-

ний по сравнению с членом $\frac{BJ}{\Lambda} e^{-x}$ в (28) множитель Λ/x_0^2 и поэтому также несуществен.

В дальнейшем нам понадобится асимптотическое выражение для (28) при больших x . Оно имеет вид

$$f(x) = \left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda} \right) e^{-x} + \frac{BJ}{x^2}. \quad (29)$$

§ 3. Контактная разность потенциалов

Теперь мы перейдем к вычислению разностей потенциалов в местах контакта полупроводника с металлом. Их следует находить из условия, что числа электронов, проходящих в единицу времени из полупроводника в металл и обратно, должны быть равны при отсутствии тока через контакт.

Электроны в металле имеют распределение Ферми. Зона проводимости начинается от граничной энергии этого распределения; ниже этой энергии все состояния заняты, а выше нее распределение описывается функцией Больцмана (рис. 1). В полупроводнике зона проводимости начинается настолько высоко, что распределение, разумеется, является больцмановским.

Число электронов, переходящих в единицу времени из полупроводника в металл, равно интегралу по всем скоростям, направленным из полупроводника в металл, от произведения функции распределения на скорость и коэффициент прозрачности для перехода из полупроводника в металл. Коэффициент прозрачности определяет отношение числа электронов, проходящих в металл, к полному числу электронов, приближающихся к границе полупроводника. Этот коэффициент является, вообще говоря, функцией от энергии ϵ электрона, а также от направления его скорости. После усреднения по всем направлениям мы получаем некоторый «средний» коэффициент прозрачности $D(\epsilon)$, который представляет собой функцию только энергии. Таким образом, число электронов, проходящих в металл, пропорционально

$$\int_0^{\infty} x f(x) D(x) dx$$

($f(x)$ — функция распределения в полупроводнике).

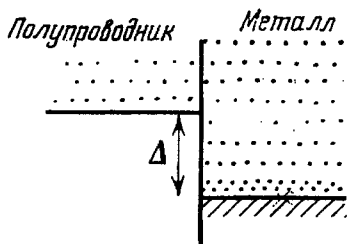


Рис. 1

В отсутствие освещения $f = f_0$ и число электронов, проходящих в металл, равно (отвлекаясь от постоянного множителя)

$$\int_0^{\infty} x f_0 D(x) dx.$$

То же самое справедливо для числа электронов, проходящих из металла в полупроводник.

Вычислим теперь сумму контактных разностей потенциалов на обоих концах (освещенном и неосвещенном) полупроводника. В отсутствие освещения обе эти разности были бы равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому достаточно определить изменение разности потенциалов на освещенном контакте, возникшее благодаря освещению.

Под влиянием освещения Δ меняется. Величина Δ (рис. 1) представляет собой (с точностью до аддитивной постоянной) контактную разность потенциалов, а ее изменение равно изменению этой разности, возникшей от освещения, т. е. равно сумме V_k контактных разностей потенциалов на обоих концах полупроводника (умноженной на e).

Электроны в металле, которые могут пройти в полупроводник (т. е. имеют энергии, большие, чем Δ), подчиняются распределению Больцмана. Поэтому число электронов, проходящих в полупроводник, меняется благодаря освещению в $e^{-eV_k/kT}$ раз (мы пренебрегаем изменениями коэффициента прозрачности и скоростей электронов в металле, происходящими под влиянием смещения границ зоны проводимости благодаря освещению). В отсутствие освещения это число было пропорционально

$$\int_0^{\infty} f_0 x D dx;$$

теперь оно пропорционально

$$e^{-eV_k/kT} \int_0^{\infty} f_0 x D dx.$$

Число электронов, проходящих из полупроводника в металл, теперь пропорционально

$$\int_0^{\infty} f x D dx,$$

где f — функция распределения в освещенном полупроводнике. Таким образом, мы получаем условие

$$\int_0^{\infty} f x D dx = e^{-eV_k/kT} \int_0^{\infty} f_0 x D dx,$$

и, следовательно,

$$\frac{eV_k}{kT} = - \ln \frac{\int_0^{\infty} f x D dx}{\int_0^{\infty} f_0 x D dx}.$$

Удобно ввести некоторое условное «поле» E_k , продифференцировав V_k по координате вдоль направления ∇J . Тогда V_k будет равно интегралу от E_k по всей длине полупроводника от освещенного конца к неосвещенному:

$$\frac{eE_k}{kT} = - \nabla J \frac{\frac{d}{dJ} \int_0^{\infty} D x f dx}{\int_0^{\infty} D x f dx}. \quad (30)$$

Определим теперь D как функцию энергии ϵ электрона в полупроводнике, считая контакт хорошим, т. е. что потенциальный барьер между полупроводником и металлом отсутствует. Нас интересует только качественный результат, и поэтому мы рассмотрим одномерный случай. Задача тогда эквивалентна следующей. Поток электронов, движущихся в некотором направлении, приходит из области с большей в область с меньшей потенциальной энергией (соответственно кинетическая энергия становится большей; рис. 2). Надо определить коэффициент прозрачности, т. е. отношение плотности электронов, проходящих во вторую область, к полной плотности электронов, приближающихся к границе между двумя областями. Будем считать, что кинетическая энергия ϵ электронов в первой области мала. Функция $U(z)$ в области, промежуточной между I и II , неизвестна. Нельзя считать $U(z)$ прямоугольным барьером, так как это могло бы дать результат, неверный даже качественно.

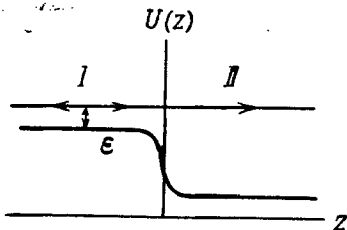


Рис. 2

Волновая функция электрона в первой области имеет вид

$$\psi = c_1 e^{ikz} + c_2 e^{-ikz}; \quad (31)$$

$c_1 e^{ikz}$ представляет собой волну, приближающуюся к границе между обеими областями, а $c_2 e^{-ikz}$ — отраженную волну, распространяющуюся в противоположном направлении (волновой вектор k не следует путать с постоянной Больцмана).

Исследуем теперь свойства этой волновой функции в районе перехода во вторую область, т. е. при малых z , точнее при z , малых по сравнению с длиной волны, но все-таки достаточно больших, чтобы энергия электрона была бы еще малой. Эту функцию следует определить таким образом, чтобы она переходила во второй области в волну, распространяющуюся вдоль оси z в положительном направлении. Так как энергия электрона мала, для изучения свойств волновой функции в первой области (для малых z) можно использовать уравнение Шредингера при $\epsilon = 0$. Это уравнение имеет вид $d^2\psi/dz^2 = 0$, и, следовательно,

$$\psi = d_1 + id_2 z$$

(d_1 и d_2 в общем случае комплексны). Отношение $d_1/d_2 = d$ определяется видом функции $U(z)$ в промежуточной области.

При малом ϵ (т. е. малом k) (31) можно записать следующим образом:

$$\psi = c_1 + c_2 + ikz(c_1 - c_2).$$

Для того чтобы это решение могло перейти во второй области в распространяющуюся волну, нужно потребовать, чтобы отношение $\frac{c_1 + c_2}{ik(c_1 - c_2)}$ равнялось d_1/id_2 , которое уже определено правильным образом:

$$\frac{c_1 + c_2}{ik(c_1 - c_2)} = \frac{d_1}{d_2} = d \quad \text{или} \quad c_2 = c_1 \frac{kd - 1}{kd + 1}.$$

$|c_1|^2 = c_1^* c_1$ определяет плотность электронов, приближающихся к границе между обеими областями, а $c_2 c_2^* = |c_2|^2$ — плотность электронов, отраженных обратно в первую область. Следовательно, коэффициент прозрачности пропорционален

$$\frac{|c_1|^2 - |c_2|^2}{|c_1|^2} = \frac{2(d + d^*)k}{(1 + kd)(1 + kd^*)}.$$

Поскольку k считалось малым, мы получаем

$$\frac{|c_1|^2 - |c_2|^2}{|c_1|^2} \approx 2k(d + d^*).$$

Волновой вектор k пропорционален скорости электрона (в первой области), т. е. квадратному корню из ее кинетической энергии ε . Следовательно,

$$D(\varepsilon) = \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon}. \quad (32)$$

§ 4. Фотоэлектродвижущая сила

Чтобы найти полную электродвижущую силу, мы должны проинтегрировать сумму (18) и (30) по всей длине полупроводника. Прибавляя (30) к (18), получаем

$$\frac{e(E + E_k)}{kT} = -\nabla J \frac{\int_0^\infty Dx f dx \cdot \frac{d}{dJ} \int_0^\infty x f dx + \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x} x dx \cdot \frac{d}{dJ} \int_0^\infty Dx f dx}{\int_0^\infty Dx f dx \cdot \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x} x dx}. \quad (33)$$

Вместо $f(x)$ сюда надо подставить функцию (28), но интегрировать всюду не до ∞ , а до x_0 , поскольку это выражение для $f(x)$ справедливо лишь при $x < x_0$. Разумеется, при интегрировании первого члена в (28) можно считать верхний предел равным бесконечности, так как, например,

$$\int_0^{x_0} x e^{-x} dx \approx \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1.$$

Мы введем также обозначение

$$\int_0^{x_0} x D(x) e^{-x} dx \approx \int_0^\infty x D e^{-x} dx = D_0. \quad (34)$$

Как мы увидим, при интегрировании второго члена в (28) окажутся существенными большие x . Поэтому вместо (28) можно пользоваться асимптотическим выражением (29).

Мы предположим, что $\lambda(x)$, а стало быть, и μ не зависят от освещения, т. е. не зависят от J .

Подставим теперь (29) в числитель (33). Тогда члены, которые происходят только от бальцмановского слагаемого $\left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right) e^{-x}$, в (29) дадут нуль (это показывает, что распределение Больцмана не может дать никакой э. д. с., что уже указывалось в § 1). Члены, происходящие только от слагаемого BJ/x^2 в (29), малы по сравнению с членами, происходящими от обоих слагаемых в (29) (поскольку Λ мало). Поэтому мы оставим лишь последние.

Следует также отметить, что в

$$\int_0^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x} x dx$$

следует подставлять только первый член из (28). Второй дал бы $2BJ/x^2$ для $\partial f/\partial x$, т. е. следующую степень x в знаменателе. Так как ранее мы использовали только наибольшие члены в асимптотическом разложении, таким членом следует пренебречь как членом следующего порядка в разложении.

Наконец, после подстановки члена BJ/x^2 в интегралы в (33) последние начинают расходиться при больших x ; этим подтверждается наше предположение о том, что существенны большие x . Интегралы становятся расходящимися также и при малых x ; это, однако, связано лишь с тем фактом, что использованное нами асимптотическое выражение для $f(x)$ справедливо только для больших x . Поэтому следует брать значения интегралов лишь на верхнем пределе. Вместо нижнего мы условно пишем 1; впрочем, значением интегралов на нижнем пределе все равно нужно пренебречь.

Имея это в виду, получаем для числителя в (33)

$$-a_0 B \int_1^{x_0} \frac{D - D_0}{x} dx + \frac{B^2 J}{\Lambda} D_0 \ln x_0.$$

При подстановке (28) в знаменатель (33) можно оставить только наибольшие члены (т. е. первый член в (28)), поскольку они не дают нуля, как в числителе.

Таким образом, мы находим

$$\frac{e(E + E_k)}{kT} = \frac{-a_0 B \int_1^{x_0} \frac{D - D_0}{x} dx + \frac{B^2 J}{\Lambda} D_0 \ln x_0}{\left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right)^2 D_0} \nabla J.$$

Согласно (32) $D(x) = \text{const} \sqrt{x}$. Строго говоря, это справедливо только для малых x , но в нашем приближении этим выражением можно пользоваться всегда.

Поэтому

$$D_0 = \int_0^{\infty} D x e^{-x} dx = \text{const} \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = \text{const} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{x_0} \frac{D}{x} dx = \text{const} \cdot 2 \sqrt{x_0}, \quad \int_1^{x_0} \frac{D_0}{x} dx = \text{const} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \ln x_0.$$

Следовательно,

$$\frac{e(E + E_k)}{kT} = \frac{-2a_0B\sqrt{x_0} + \left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right)B \ln x_0 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi} \left(a_0 + \frac{BJ}{\Lambda}\right)^2}. \quad (35)$$

Интегрируя это выражение по всей длине полупроводника, т. е. по dJ от $J = J_0$ (на освещенной стороне) до нуля на противоположной стороне, находим э. д. с. V :

$$V = -\frac{8B\sqrt{x_0kT}}{3\sqrt{\pi e} \left(a_0 + \frac{BJ_0}{\Lambda}\right)} J_0 + \frac{kT}{e} \Lambda \ln x_0 \ln \left(1 + \frac{BJ_0}{a_0\Lambda}\right). \quad (36)$$

При слабом освещении, т. е. малых J_0 , в V можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, а в первом члене — величиной $\frac{BJ_0}{\Lambda}$ по сравнению с a_0 . Тогда мы получим э. д. с.

$$V = -\frac{8B\sqrt{x_0kT}}{3\sqrt{\pi e} a_0} J_0 = -\frac{2^{5/2}}{3} \sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{l}{nw^2} \sqrt{x_0} J_0, \quad (37)$$

линейно возрастающую с J_0 .

При сильном освещении, т. е. при больших J_0 , можно, напротив, пренебречь первым членом и a_0 по сравнению с BJ/Λ — во втором. $\Lambda a_0/B$ можно интерпретировать как такое значение J_l величины J_0 , после которого V больше не является линейной функцией J_0 . При этом мы получаем э. д. с. в виде

$$V = \frac{kT}{e} \Lambda \ln x_0 \ln \frac{J_0}{J_l}, \quad (38)$$

т. е. V пропорционально $\ln(J_0/J_l)$. Отметим также, что при некотором определенном значении J_0 э. д. с. меняет знак, т. е. направление. Что касается Λ , то из (15) и (26) находим, что оно имеет порядок $\frac{kT}{mw^2} \frac{l}{l_s}$, где l_s — длина захвата электронов.

По-видимому, ни один из проведенных до настоящего времени экспериментов не относится к только что рассмотренному случаю. Во всех них «дырки» принимали участие в проводимости наравне с электронами. Этот последний случай обсуждается в следующем разделе.

§ 5. Фотоэлектродвижущая сила в полупроводнике с «дырочной» проводимостью

Рассмотрим теперь полупроводник, в котором «дырки» принимают участие в проводимости наравне с электронами. В этом случае зависимость V от J_0 отличается от предыдущего случая. Необходимо также отметить, что если в проводимости участвуют только дырки, то результаты предыдущего раздела остаются справедливыми после изменения знака e .

Граница зоны заполненных состояний в металле лежит между верхней границей заполненной зоны и нижней границей зоны

проводимости в полупроводнике (рис. 3). Отдельные свободные уровни в заполненных зонах являются «дырками», которые участвуют в проводимости как электроны с положительным зарядом. Энергия электронов проводимости в металле отсчитывается от верхней границы заполненной зоны, а в полупроводнике (ε_1) — от начала зоны проводимости. Энергия «дырки» ε_2 в полупроводнике определяется как энергия соответствующего свободного уровня, отсчитанная вниз от верхней границы заполненной

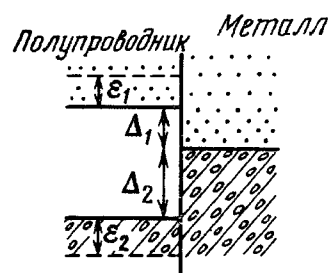


Рис. 3

зоны. Энергия «дырки» в металле определяется аналогично.

Функция распределения «дырок» в полупроводнике имеет тот же вид, что и для электронов, однако постоянные коэффициенты в этих функциях принимают разные значения. В частности, появляется различие в постоянных a_0 , которые пропорциональны плотности электронов или «дырок» в отсутствие освещения. Постоянные B также различны, поскольку средняя длина свободного пробега для электронов и «дырок» не одинакова. Наконец, благодаря разнице в длинах захвата будут разными и Λ .

Больцмановская часть функции распределения давала в (33) нуль, показывая, что функция такого вида не может дать эффекта сама по себе. В рассматриваемом случае, как мы сейчас увидим, это не имеет места. Поэтому можно ограничиться только наибольшими членами в функции распределения, т. е. только функциями Больцмана. Поэтому функции распределения для электронов (1) и «дырок» (2) имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \left(a_{01} + \frac{B_1 J}{\Lambda_1} \right) e^{-x_1} = a_1 e^{-x_1}, \\ f_2'(x_2) &= \left(a_{02} + \frac{B_2 J}{\Lambda_2} \right) e^{-x_2} = a_2 e^{-x_2}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1}{kT}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon_2}{kT}$$

и

$$a_1 = a_{01} + \frac{B_1 J}{\Lambda_1} = a_{01} + \beta_1 J, \quad a_2 = a_{02} + \frac{B_2 J}{\Lambda_2} = a_{02} + \beta_2 J. \quad (40)$$

Полный ток i равен сумме тока электронов i_1 и «дырок» i_2 . Вспомнив, что «заряд дырки» противоположен заряду электрона, находим из (17) и (39)

$$i_1 = -c_1 \left(-\frac{eE}{kT} a_1 + a_1' \nabla J \right), \quad i_2 = c_2 \left(\frac{eE}{kT} a_2 + a_2' \nabla J \right)$$

$$\left(a_1' = \frac{da_1}{dJ}, \quad a_2' = \frac{da_2}{dJ} \right);$$

c_1 и c_2 означают абсолютные величины коэффициентов в (17) соответственно для электронов и дырок.

Е теперь нужно определить так, чтобы полный ток $i_1 + i_2 = 0$. Это дает

$$\frac{eE}{kT} = \frac{c_1 a_1' - c_2 a_2'}{c_1 a_1 + c_2 a_2} \nabla J.$$

Разность потенциалов V_J между освещенной и неосвещенной сторонами равна интегралу от E , взятому от $J = J_0$ (на освещенной стороне) до $J = 0$ (на противоположной стороне). Используя (40), находим

$$\frac{eV_J}{kT} = \frac{c_1 \beta_1 - c_2 \beta_2}{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2} \ln \frac{c_1 a_{10} + c_2 a_{20} + (c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2) J_0}{c_1 a_{10} + c_2 a_{20}}. \quad (41)$$

Числа электронов и дырок в отсутствие освещения имеют, вообще говоря, совершенно разные порядки величины. Поэтому можно всегда пренебречь одним из a_{01} и a_{02} по сравнению с другим. Если, например, $a_{10} \gg a_{20}$, т. е. в отсутствие освещения число электронов много больше числа дырок (дырки появляются под влиянием освещения), то вместо (41) можно написать

$$\frac{eV_J}{kT} = \frac{c_1 \beta_1 - c_2 \beta_2}{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2} \ln \left(1 + \frac{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2}{c_1 a_{01}} J_0 \right). \quad (42)$$

Теперь мы должны вычислить контактную разность потенциалов. Ток из полупроводника в металл состоит из тока электронов и тока дырок. Так как заряд дырок противоположен заряду электрона, мы получаем (как в § 3), что полный ток про-

порционален

$$\int_0^{\infty} x_1 f_1(x_1) D_1(x_1) dx_1 - \int_0^{\infty} x_2 f_2(x_2) D_2(x_2) dx_2$$

(D_1 и D_2 представляют собой коэффициенты прозрачности соответственно для электронов и дырок). Подставив (39), получаем

$$a_1 D_{01} - a_2 D_{02}, \quad (43)$$

где

$$D_{01} = \int_0^{\infty} D_1 e^{-x} x dx, \quad D_{02} = \int_0^{\infty} D_2 e^{-x} x dx.$$

Как уже указывалось, в отсутствие освещения можно всегда считать, что, например, число электронов гораздо больше, чем число дырок: $a_{01} \gg a_{02}$. Тогда расстояние Δ_2 (рис. 3) от верхнего края заполненной зоны в металле до верхней границы заполненной зоны в полупроводнике значительно превосходит расстояние Δ_1 до нижней границы зоны проводимости в полупроводнике. Δ_1 по порядку величины равно энергии активации электрона в полупроводнике, которая должна быть малой по сравнению с полным расстоянием $\Delta_1 + \Delta_2$; в противном случае мы имели бы изолятор вместо полупроводника. Поэтому практически из металла в полупроводник могут переходить только электроны, а не дырки.

В § 3 было указано, что достаточно вычислить только изменение контактной разности потенциалов под влиянием освещения. Это изменение равно сумме V_k контактной разности потенциалов на обоих контактах. В отсутствие освещения ток из полупроводника в металл пропорционален $a_{01} D_{01}$ (при $a_{01} \gg a_{02}$). То же самое справедливо для тока из металла в полупроводник. Как и в § 3, мы приходим к выводу, что в присутствии освещения ток из металла в полупроводник становится пропорциональным

$$e^{-eV_k/kT} a_{01} D_{01} \quad (44)$$

(в согласии с нашим предположением о том, что дырки не проходят из металла в полупроводник).

Сравнивая (43) и (44), находим условие, при котором ток через контакт отсутствует, в виде

$$a_1 D_{01} - a_2 D_{02} = a_{01} D_{01} e^{-eV_k/kT}.$$

Отсюда (используя (40)) получаем

$$\frac{eV_k}{kT} = -\ln \left(1 + \frac{\beta_1 D_{01} - \beta_2 D_{02}}{D_{01} a_{01}} J_0 \right).$$

Наконец, прибавляя V_k к V_J (41), находим э. д. с.

$$V = \frac{kT}{e} \frac{c_1 \beta_1 - c_2 \beta_2}{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2} \ln \left(1 + \frac{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2}{c_1 a_{01}} J_0 \right) - \frac{kT}{e} \ln \left(1 + \frac{\beta_1 D_{01} - \beta_2 D_{02}}{D_{01} a_{01}} J_0 \right). \quad (45)$$

При очень сильном освещении, т. е. при очень больших J , разность

$$a_1 D_{01} - a_2 D_{02} = a_{01} D_{01} + (\beta_1 D_{01} - \beta_2 D_{02}) J_0$$

может стать отрицательной (если $\beta_1 D_{01} - \beta_2 D_{02} < 0$) и (45) перестанет быть справедливой. В этом случае границы зон (рис. 3) сдвигаются таким образом, что Δ_1 делается по порядку величины равным полному расстоянию $\Delta_1 + \Delta_2$. При этом оказываются существенными переходы дырок из металла в полупроводник. Контактная разность потенциалов V_k (а с ней и э. д. с.) становится очень большой, а именно порядка $(\Delta_1 + \Delta_2)/e$. Мы, однако, не будем обсуждать этого случая детально, поскольку он, по видимому, не наблюдается экспериментально.

Все постоянные c_1 , c_2 , β_1 , β_2 , входящие в (45), могут быть выражены через универсальные константы, средний свободный пробег электронов (или дырок) и т. д., что, однако, не представляет интереса. Важно только заметить следующее. Если ввести обозначения

$$\frac{c_2 \beta_2}{c_1 \beta_1} = \kappa, \quad \frac{c_1 a_{01}}{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2} = C_1, \quad \frac{a_{01} D_{01}}{\beta_1 D_{01} - \beta_2 D_{02}} = C_2, \quad (46)$$

то (45) можно записать в виде

$$V = \frac{kT}{e} \left[\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \ln \left(1 + \frac{J_0}{C_1} \right) - \ln \left(1 + \frac{J}{C_2} \right) \right]. \quad (47)$$

Видно, что коэффициент перед первым логарифмом может принимать значения, лежащие между ± 1 . Обе постоянные C_1 и C_2 пропорциональны числу электронов в единице объема в отсутствие освещения, так как они пропорциональны a_{01} . Плотность электронов зависит от температуры главным образом посредством множителя вида $e^{-q/T}$. Поэтому C_1 и C_2 также пропорциональны $e^{-q/T}$.

Все результаты будут полностью аналогичными в случае, когда без освещения число «дырок» значительно превосходит

число электронов, т. е. когда $a_{02} \gg a_{01}$. Вместо (45) мы имеем бы теперь

$$V = \frac{kT}{e} \frac{c_1\beta_1 - c_2\beta_2}{c_1\beta_1 + c_2\beta_2} \ln \left[1 + \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2}{c_2 a_{02}} J_0 \right] + \frac{kT}{e} \ln \left[1 + \frac{\beta_2 D_{02} - \beta_1 D_{01}}{a_{02} D_{02}} J_0 \right], \quad (48)$$

а постоянные C_1 и C_2 в (47) были бы пропорциональны плотности дырок в отсутствие освещения.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Frohlich. Phys. Zs. Sowjet., 8, 501, 1935.
 [2] J. Frenkel. Phys. Zs. Sowjet., 8, 185, 1935.
 [3] Л. Ландау, А. Компанец. ЖЭТФ, 5, 276, 1935.
 [4] Б. Давыдов. ЖЭТФ, 6, 463, 471, 1936.

Совместно с Е. ТЕЛЛЕРОМ

Phys. Zs. Sowjet., 10, 34, 1936

Показано, что дисперсия звука при температурах, достаточных для возбуждения нескольких колебательных квантов, определяется той же формулой, что и при температурах, при которых возбуждено не более одного колебательного кванта. Исследован процесс передачи колебательной энергии в его зависимости от молекулярных скоростей. При этом установлено, что играют роль лишь большие скорости, при которых явление протекает классическим образом. Определена температурная зависимость эффекта.

§ 1. Ряд проведенных за последние годы исследований показал, что во многих газах скорость звука зависит от частоты. Этот эффект появлялся только в тех случаях, когда возбуждены колебания молекул. Его можно было бы понять, предположив, что вероятность передачи энергии между поступательным или вращательным движениями, с одной стороны, и колебаниями, — с другой, крайне мала. В самом деле, при распространении звука происходят адиабатические колебания плотности, которые вызывают изменения температуры. Когда частоты последних достигают очень больших значений, воздействие этих изменений на колебания молекул становится невозможным. Это означает, что теплоемкость, а с ней также и скорость звука будут зависеть от частоты.

Дисперсия и связанное с ней поглощение звука рассматривались многими авторами, но особенно подробно Рутгерсом [1]. При выводе дисперсионной формулы Рутгерс ограничился случаем низких температур, при которых один колебательный квант возбужден лишь у небольшого числа молекул. Число молекул с более чем одним колебательным квантом он полагал равным

нулю. Далее, он считал, что для рассматриваемого явления существенно возбуждение одного определенного нормального колебания. Если обозначить через n_0 и n_1 числа молекул в 1 см^3 , у которых возбуждены соответственно 0 и 1 колебательных квантов, то изменение со временем будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{dn_1}{dt} = K(k_{01}n_0N - k_{10}n_1N). \quad (1)$$

При этом K дает число столкновений, испытываемых одной молекулой в единицу времени, в случае, когда плотность газа равна одной молекуле в 1 см^3 . k_{01} и k_{10} представляют собой вероятности того, что при столкновении молекула с нулевым числом квантов перейдет в молекулу с одним квантом и соответственно молекула с одним квантом — в молекулу с нулевым числом квантов. Справедливо соотношение

$$\frac{k_{01}}{k_{10}} = e^{-h\nu/kT}, \quad (2)$$

где $\nu/2\pi$ — частота интересующего нас колебания молекулы. В случае $h\nu \gg kT$, рассмотренном Рутгерсом,

$$n_0 \gg n_1, \quad k_{10} \gg k_{01}.$$

Приняв еще во внимание, что $N = n_0 + n_1$, (1) можно приближенно заменить на

$$\frac{dn_1}{dt} = K(k_{01}N^2 - k_{10}n_1N). \quad (1a)$$

Будем теперь считать, что температура T является периодической функцией времени. Тогда входящие в (1a) величины, в частности также n_1 , будут меняться со временем периодически. Умножив изменение n_1 на энергию колебательного кванта, т. е. на $h\nu$, и поделив его на изменение температуры, можно вычислить теплоемкость, а с нею, наконец, и скорость звука.

Посмотрим теперь, как устроена дисперсионная кривая, если отбросить условие Рутгерса $h\nu \gg kT$. Однако на первом этапе мы сохраним предположение о том, что в дисперсию звука дает вклад только одно нормальное колебание. В этом случае в процессе участвуют молекулы со многими, например с l , квантами, число которых мы обозначим через n_l . Чтобы описать изменение всех чисел n_l одновременно, придется, казалось бы, решить более сложную систему уравнений. Кроме того, вообще говоря, можно было бы ожидать, что дисперсионная кривая теперь будет простирается на большую область частот, поскольку одни квантовые переходы совершаются за более короткие времена и,

следовательно, при больших частотах, другие же происходят лишь при более медленных колебаниях.

В дальнейшем, однако, будет показано, что при определенных разумных допущениях удастся получить простое решение задачи, которое противоречит обоим только что высказанным прогнозам. Для вычисления дисперсии звука достаточно решить только *одно* дифференциальное уравнение, а дисперсионная формула в своих существенных чертах остается такой же, как при низких температурах.

Чтобы прийти к этому результату наиболее простым путем, сделаем следующие допущения.

1. Существует только одно колебание молекулы, дающее вклад в дисперсию звука. Это колебание невырожденно¹.

2. Возбуждение колебаний молекул может быть рассчитано в первом приближении теории возмущений. Это допущение оправдывается тем, что в тех случаях, когда возможно наблюдение дисперсии звука, вероятность возбуждения колебаний всегда мала. Сказанное, в свою очередь, позволяет в качестве нулевого приближения взять такой вид движения, при котором не происходит возбуждения колебательных квантов и который слабо отклоняется от истинного движения.

3. Энергия взаимодействия, ответственного за возбуждение колебаний, линейно зависит от нормальной координаты интересующего нас колебания. Это допущение справедливо, если амплитуда колебаний мала по сравнению с расстояниями, на которых существенно меняется энергия взаимодействия.

4. Колебания молекул являются гармоническими.

Для получения вероятности возбуждения колебательных квантов необходимо прежде всего рассмотреть матричный элемент энергии возмущения. Так как согласно допущению «3» энергия возмущения зависит от нормальной координаты колебания линейно, а согласно допущению «4» колебание молекулы гармонично, матричный элемент возмущающей энергии пропорционален матричному элементу координаты гармонического осциллятора. Поэтому все матричные элементы, для которых начальное и конечное состояния не различаются на один колебательный квант, исчезают. Матричный элемент, соответствующий переходу от l -го к $l + 1$ -му или от $l + 1$ -го к l -му квантовым состояниям, напротив, отличен от нуля и пропорционален $\sqrt{l + 1}$. Вероятность перехода между двумя квантовыми состояниями l и i одной молекулы определяется с точностью до множителя квадра-

¹ Это допущение сделано здесь лишь ради упрощения вывода. Полученные результаты можно затем легко обобщить.

том матричного элемента. Отсюда получаем

$$k_{01} : k_{12} : k_{23} : \dots = k_{10} : k_{21} : k_{32} : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots, \quad (3)$$

$$k_{li} = 0, \quad \text{если } l - i \neq \pm 1.$$

Для отношения k_{01}/k_{10} снова справедливо равенство (2).

Теперь, чтобы получить одно единое уравнение вместо системы дифференциальных уравнений для величин n_l , оказывается целесообразным ввести число колебательных квантов Z , содержащихся в 1 см^3 . Эта величина имеет непосредственное отношение к вычислению теплоемкости. Имеем

$$\sum_l l n_l = Z, \quad \sum_l n_l = N. \quad (4)$$

Производная от Z по времени дается уравнением

$$\frac{dZ}{dt} = KN \left[\sum_l k_{l, l+1} n_l - \sum_l k_{l, l-1} n_l \right]. \quad (5)$$

Преобразовав (5) с помощью (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= K \left[N k_{01} \sum_l (l+1) n_l - N k_{10} \sum_l l n_l \right] = \\ &= K [k_{01} N^2 - (k_{10} - k_{01}) Z N]. \quad (6) \end{aligned}$$

Как видно, (6) совпадает по форме с (1а). Тот факт, что в уравнении (6) вместо величины n_l в (1а) появилось Z , не составляет существенной разницы, ибо для вычисления теплоемкости нужно умножить изменение величины Z — точно так же, как в случае низких температур изменение величины n_{10} , — на $\hbar\nu$ и поделить на изменение температуры. Следуя пути, избранному Рутгерсом, можно получить дисперсионную формулу, которая отличается от конечного результата Рутгерса лишь тем, что величину k_{10} , входящую в дисперсионную формулу Рутгерса (она входит в производную в качестве множителя перед $n_1 N$ в (1а)), нужно заменить на $k_{10} - k_{01}$ (т. е. на множитель перед ZN в (6))². Если $\hbar\nu \gg kT$ и, стало быть, $k_{10} \gg k_{01}$, то можно опустить k_{01} по уравнению с k_{10} , и мы снова возвращаемся к формуле Рутгерса³.

² Ср. также выведенное ниже равенство (7), в котором k_{10} появляется лишь через $k_{10} - k_{01}$.

³ Отметим, что рассуждения Кнезера [2], напротив, приводят к непоследовательным упрощениям. Хотя и не пренебрегая k_{01} по сравнению с k_{10} , Кнезер заменил, однако, k_{10} на $k_{10} + k_{01}$, а не на $k_{10} - k_{01}$. Ошибка в его выводе состоит в том, что он пренебрег переходами между состояниями с одним и двумя квантами. Такое пренебрежение не является последовательным, когда желают сделать выбор между двумя упомянутыми выше возможностями, процентное отличие которых имеет порядок величины $e^{-\hbar\nu/kT}$.

Для того чтобы облегчить обобщение на случай, когда вклад в дисперсию звука дает большее число нормальных колебаний, мы воспроизведем еще несколько более подробно ход рассуждений в расчетах Рутгерса.

Положим

$$T = T_0 + T_1 e^{i\omega t}, \quad Z = Z_0 + Z_1 e^{i\omega t}.$$

Здесь $\omega/2\pi$ — частота звука. Периодические изменения остальных величин нет необходимости выписывать явно. Если положить $T_1 \ll T_0$, то из (6) после пренебрежения величинами второго порядка следует

$$Z_1 [i\omega + KN(k_{10} - k_{01})] = PT_1.$$

При этом P зависит от входящих в (6) величин и их производных по температуре, но не содержит ни ω , ни Z_1 . Вклад колебаний в теплоемкость тогда равен

$$c_{\text{кол}} = \frac{P\hbar\nu}{i\omega + KN(k_{10} - k_{01})}. \quad (7)$$

Можно избежать прямых вычислений P , устремив ω к нулю. В этом случае $c_{\text{кол}}$ должно принять значение, вытекающее из формулы Эйнштейна при температуре T_0 . Обозначим его через $c_{\text{осц}}^0$. Тогда

$$c_{\text{осц}} = c_{\text{осц}}^0 \frac{KN(k_{10} - k_{01})}{i\omega + KN(k_{10} - k_{01})} = c_{\text{осц}}^0 \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}},$$

где положено

$$KN(k_{10} - k_{01}) = \omega_0. \quad (8)$$

Тот факт, что для этого вклада в теплоемкость получена комплексная величина, означает, что изменение энергии колебаний и изменение температуры происходят с разными фазами. Используя (7), можно вычислить c_p , c_v и, наконец, также комплексную скорость звука $\sqrt{\alpha c_p / c_v}$ (α — производная давления по плотности при изотермическом сжатии). Ее вещественная часть дает фазовую скорость звуковой волны, в то время как из мнимой части получается коэффициент поглощения.

Если вклад в дисперсию звука вносят несколько нормальных колебаний и при этом предполагается, что энергия взаимодействия является линейной функцией всех нормальных координат, то каждое колебание добавляет к теплоемкости аддитивный член типа (7), поскольку при линейной энергии возмущения вероятности возбуждения нормальных координат не зависят одна от

другой. Формула для дисперсии звука вычисляется тогда по таким образом построенным теплоемкостям c_p и c_v .

Следует еще отметить, что формула Рутгерса справедлива и в классическом предельном случае, поскольку она остается пригодной при сколь угодно высоких температурах. Ее можно вывести также и с помощью классической теории возмущений. При этом, разумеется, существенны сделанные выше допущения, в особенности гармонический характер колебаний и линейность энергии возмущения.

§ 2. Теперь вычислим характеристическую частоту в формуле Рутгерса $\omega_0 = KN(k_{01} - k_{10})$, в частности определим ее температурную зависимость. Здесь KN представляет собой число столкновений, претерпеваемых одной молекулой в единицу времени, которое можно проще всего извлечь из теплопроводности. В самом деле, из известных формул кинетической теории газов вытекает справедливая по порядку величины формула

$$KN = \frac{pc}{\vartheta}, \quad (9)$$

где p — давление, c — теплоемкость и ϑ — теплопроводность газа.

Теперь еще осталось определить $k_{10} - k_{01}$, т. е. по существу вероятность возбуждения колебаний. В соответствии с допущением «2» мы предположим, что возбуждение колебаний происходит значительно медленнее, чем обмен энергиями поступательного движения. В противном случае мы не могли бы отделить поглощение звуковой волны, связанное с колебаниями, от поглощения, которое связано с внутренним трением и теплопроводностью, в результате чего исчезли бы аномалии в поведении звуковой волны.

Малая вероятность возбуждения колебаний возникает лишь благодаря тому, что период колебаний мал по сравнению со временем столкновения и столкновение происходит по отношению к колебаниям адиабатически. Условием этого является малость амплитуды колебаний по сравнению с расстоянием, на котором существенно меняются силы взаимодействия, что уже требовалось нами в допущении «3». В адиабатическом случае для вероятности перехода получается экспоненциально малое выражение [3].

Мы ограничимся лишь вычислением экспоненты. При этом будем рассматривать только такие столкновения, в которых энергия сталкивающихся частиц велика по сравнению с квантом колебаний. Как мы далее увидим, при всех относящихся к делу температурах только такие столкновения могут играть существенную роль. При этих столкновениях возбуждение колебаний можно рассматривать чисто классически, т. е. считать, что вероят-

ность возбуждения пропорциональна квадрату v -компоненты Фурье от силы. Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{ivt} dt \quad (10)$$

в комплексной плоскости и сдвинем путь интегрирования в положительную мнимую полуплоскость настолько далеко, насколько позволяют особые точки функции $F(t)$. Тогда легко увидеть, что порядок величины интеграла (10) определяется экспоненциальным множителем $e^{-ivt'}$, где t' означает мнимую часть особой точки $F(t)$, ближайшей к вещественной оси. Поскольку взаимодействие молекул все равно не может быть определено количественно, мы ограничимся случаем одномерного движения, чтобы получить по крайней мере качественный результат. Тогда формула

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M}(E - U)}$$

показывает, что особые точки $x(t)$ совпадают с особыми точками $U(x)$, а следовательно, и $F(x)$. (Легко показать, что точка $U(x) = E$ хотя и будет особой точкой функции $t(x)$, но не является таковой для функции $x(t)$). Таким образом, t' представляет собой мнимую часть времени, необходимого для достижения особой точки функции $x(t)$. Запишем далее U в виде $Ae^{-x/a}$, что, конечно, не имеет никакого количественного смысла, но качественно вполне передает характер атомного взаимодействия. Поскольку существенную роль для нас играет только мнимая часть времени, то при интегрировании в выражении

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}(E - U)}}$$

можно ограничиться областью $U > E$. Постоянная A зависит от выбора начальной точки и поэтому может быть взята произвольно. Мы положим ради удобства $A = E$, что после подстановки обозначения v для скорости на бесконечности дает для t' выражение

$$t' = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^{-x/a} - 1}}$$

или

$$t' = \frac{\pi a}{v}.$$

Вероятность k_{01} пропорциональна ⁴

$$e^{-\frac{2\pi a v}{v}}.$$

Это выражение очень сильно убывает с уменьшением скорости. Поэтому для возбуждения колебаний будут играть роль не обычные столкновения, а только столкновения тех частиц, чьи скорости лежат на «хвосте» распределения Максвелла. С учетом этого получаем экспоненциальный множитель

$$\exp\left\{-\frac{2\pi a v}{v} - \frac{Mv^2}{2kT}\right\}.$$

Наиболее выгодная скорость делает экспоненту максимальной. Поэтому

$$\frac{2\pi a v}{v} = \frac{Mv^2}{kT} \quad \text{или} \quad v^3 = \frac{2\pi a v k T}{M}.$$

Эта величина при всех температурах, при которых колебательные степени свободы вообще могут дать вклад в теплоемкость, удовлетворяет условию

$$\frac{Mv^2}{2} \gg \hbar \nu, \quad (11)$$

которое мы ввели ранее в качестве критерия для классического характера вычислений. Окончательно экспоненциальный множитель приобретает вид

$$k_{01} \sim \exp\left\{-\left(\frac{27\pi^2 a^2 v^2 M}{2kT}\right)^{1/3}\right\}. \quad (12)$$

Под M здесь следует понимать эффективную массу сталкивающихся частиц, т. е. в однородном газе половину массы молекулы. В силу (11)

$$k_{10} = e^{\frac{\hbar \nu}{kT}} k_{01} \sim k_{01}.$$

k_{01} , k_{10} , равно как и их разность, имеют, таким образом, один и тот же порядок величины, и мы получаем из (8), (9) и (12)

$$\omega_0 \sim \frac{pc}{\Phi} \exp\left\{-3\left(\frac{\pi^2 a^2 v^2 M}{2k}\right)^{1/3} \frac{1}{T^{1/3}}\right\}. \quad (13)$$

Украинский физико-технический институт,
Харьков

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Rutgers. Ann. der Phys., 16, 350, 1933.
 [2] Kneser. Ann. der Phys., 16, 360, 1933.
 [3] L. Landau. Phys. Zs. Sowjet, 1, 88, 1932 (Собр. трудов, № 6).
 [4] C. Zener. Phys. Rev., 38, 277, 1931.

⁴ Эта формула неоднократно выводилась из различных предположений (см., например, [4]).

Phys. Zs. Sowjet., 10, 67, 1936

Исследована вероятность распада больших молекул. При высоких давлениях эти реакции протекают мономолекулярно, а при низких — бимолекулярно. Показано, что между этими двумя предельными случаями лежит широкая промежуточная область, в которой порядок реакции постепенно переходит от первого ко второму; получены формулы, связывающие скорость реакции в различных условиях с термодинамическими функциями газа.

При мономолекулярных реакциях происходит спонтанный распад молекул. При этом распадаются те из них, которые имеют достаточную для этого энергию, т. е. активированные молекулы. В действительности, однако, реакция протекает как мономолекулярная только в том случае, если уменьшение числа активированных молекул вследствие распада происходит медленно. Тепловое равновесие устанавливается в результате столкновения молекул между собой. Число активированных молекул, т. е. молекул, имеющих достаточную большую энергию, определяется этими столкновениями. Если активированные молекулы распадаются за столь короткое время, что тепловое равновесие не успевает установиться, то их число быстро уменьшается. Последующие распады могут происходить лишь постольку, поскольку в результате столкновений образуются активированные молекулы. Поэтому распад будет связан со столкновениями двух молекул, т. е. реакция будет протекать как бимолекулярная.

Для того чтобы течение реакции было мономолекулярным, во всяком случае требуется, чтобы распад происходил медленно. Именно, время, в течение которого активированная молекула распадается, должно быть велико по сравнению с промежутком ме-

жду двумя столкновениями, чтобы сделать возможным установление теплового равновесия. Для небольших молекул это условие выполняется лишь в случае, когда распад затруднен каким-нибудь правилом отбора, в особенности сохранением полного спина. Если хоть какой-нибудь запрет отсутствует, такая молекула распадается за время порядка периода колебаний, который много меньше промежутка между двумя столкновениями.

Но даже в случае несохранения полного спина условие мономолекулярности все еще может быть выполнено при распадах больших молекул, поскольку для их осуществления требуется, чтобы энергия активации сконцентрировалась в одном определенном участке молекулы. Ввиду сравнительно малой вероятности такого процесса время распада молекулы сильно возрастает и может превысить время между двумя столкновениями. Цель предлагаемой работы состоит как раз в изучении распада больших молекул.

Распад больших молекул происходит мономолекулярно только при достаточно высоких давлениях. При слишком малых давлениях время между двумя столкновениями велико. Обычно принимают, что переход мономолекулярной реакции в бимолекулярную происходит в узком интервале давлений. Будем называть скоростью реакции отношение числа молекул, распадающихся в единицу времени, к числу имеющихся в данный момент молекул. В случае мономолекулярной реакции ее скорость не зависит от давления, с другой стороны, при бимолекулярной реакции она ему пропорциональна. Зависимость скорости от p обычно записывают в виде $\alpha p / (b + p)$, так что она постоянна для больших p , а при малых — пропорциональна давлению. В этой работе будет показано, что в действительности переход от мономолекулярной реакции к бимолекулярной происходит другим способом.

Пусть молекула обладает энергией E , причем эта энергия столь велика, что молекула активирована, т. е. E должно превосходить энергию активации ε (в дальнейшем мы вообще будем рассматривать только активированные молекулы). Для того чтобы молекула распалась, во всяком случае необходимо, чтобы на определенном ее участке сконцентрировалась энергия, по крайней мере не меньшая, чем ε . Ввиду заметных размеров молекулы ее можно рассматривать как макроскопическую систему и использовать статистические соотношения. В нормальном состоянии суммарная энергия молекулы распределена по всем степеням свободы равномерно. Концентрация энергии E в одном месте (т. е. распределение энергии ε по малой части степеней свободы) представляет собой маловероятную флуктуацию. Пусть энтропия молекулы при равномерном распределении энер-

гии равна $S(E)$. Когда энергия ε сконцентрирована на нескольких степенях свободы, энтропия оставшейся части молекулы равна $S(E - \varepsilon)$. Она практически совпадает с энтропией всей молекулы, поскольку энтропией той части, в которой сконцентрирована энергия, можно пренебречь ввиду ее малых размеров. Молекула является замкнутой системой. Поэтому вероятность рассматриваемой флуктуации, т. е. вероятность ее распада,

$$W = A \exp \left\{ \frac{S(E - \varepsilon) - S(E)}{k} \right\} \quad (1)$$

(k — постоянная Больцмана). Коэффициент A имеет размерность $1/\text{сек}$; он совпадает по порядку величины с частотой колебаний молекулы, т. е. равен $10^{12} - 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. В действительности A зависит, само собой разумеется, от E . Однако этой зависимостью по сравнению с экспоненциальным множителем можно пренебречь и считать A постоянным.

Обозначим через $n(E)$ отношение числа молекул, чьи энергии лежат в очень малом интервале вокруг величины E , к полному их числу. Исследуем теперь поведение $n(E)$ во времени, т. е. определим производную dn/dt . Для этого вспомним, что мы рассматриваем только такие энергии E , при которых молекула активированна. $n(E)$ изменяется, во-первых, под влиянием столкновений молекул друг с другом и, во-вторых, в результате распада. Прежде всего рассмотрим только первый фактор. При столкновении с неактивированными молекулами наша молекула с энергией E теряет часть своей энергии и перестает быть активированной. Изменение числа молекул с энергией E под влиянием таких столкновений, очевидно, пропорционально $n(E)$. С другой стороны, неактивированные молекулы могут стать активированными в результате столкновений друг с другом. На этом пути в единицу времени образуется определенное количество активированных молекул, которое, очевидно, не зависит от их полного числа в данный момент. Число образующихся активированных молекул, поделенное на число всех молекул, мы обозначим через l . Тогда в результате столкновений

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{столк}} = -\omega n(E) + l,$$

где ω означает число соударений в единицу времени; оно пропорционально давлению.

При тепловом равновесии $\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{столк}} = 0$. Пусть равновесное значение $n(E) = n_0(E)$. Тогда ясно, что $l = \omega n_0(E)$ и далее

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{столк}} = \omega [n_0(E) - n(E)].$$

Кроме того, число молекул $n(E)$ уменьшается в результате их распада. Пусть $W(E)$ представляет собой вероятность распада (в единицу времени) молекулы с энергией E . Тогда получается окончательно

$$\frac{dn}{dt} = \omega [n_0(E) - n(E)] - n(E)W(E). \quad (2)$$

Величина dn/dt никогда в точности не равна нулю, поскольку полное число молекул по мере их распада обязательно уменьшается. Однако практически в случае медленного распада устанавливается стационарное состояние, для которого $dn/dt = 0$.

Из (2) тогда находим

$$n(E) = \frac{n_0\omega}{\omega + W}.$$

Число молекул с энергией E , распадающихся в единицу времени (деленное на полное число молекул), равно $n(E)W(E)$; мы обозначим его через $\lambda(E)$:

$$\lambda = \frac{n_0}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{W}}. \quad (3)$$

Распределение $n_0(E)$ получается из формулы распределения Гиббса, т. е.

$$n_0(E) = e^{\frac{F_0 - E}{kT_0}} \delta\Gamma.$$

Здесь F_0 и T_0 — равновесные свободная энергия и температура; в отличие от них $\delta\Gamma$ представляет собой объем области фазового пространства молекулы, соответствующей состояниям с энергиями, близкими к E . Логарифм $\delta\Gamma$ есть энтропия молекулы в таком состоянии:

$$S(E) = k \ln \delta\Gamma.$$

Таким образом,

$$n_0(E) = \exp \left\{ \frac{F_0 - E}{kT_0} + \frac{S(E)}{k} \right\}. \quad (4)$$

Подставляя (1) и (4) в (3), получим

$$\lambda(E) = \frac{\exp \left\{ \frac{F_0 - E}{kT_0} + \frac{S(E)}{k} \right\}}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{S(E) - S(E - \varepsilon)}{k} \right\}}. \quad (5)$$

Это выражение имеет, вообще говоря, крайне узкий максимум, поскольку оно составлено из экспоненциальных функций. Благодаря этому главную роль при распаде будут играть молекулы со значениями энергии, соответствующими максимуму λ . Максимум λ определяет также скорость распада. В дальнейшем под λ мы будем понимать именно эту максимальную величину, а под энергией — ту, для которой λ имеет максимум.

Возможны три случая, отвечающих максимуму λ . А именно, либо первый член в знаменателе равенства (2) может быть значительно меньше второго, либо второй значительно меньше первого, и, наконец, оба могут иметь один и тот же порядок величины. Рассмотрим все три случая по очереди.

1. Пусть

$$\frac{1}{\omega} \ll \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{S(E) - S(E - \varepsilon)}{k} \right\}, \quad (6)$$

тогда из (5) следует

$$\lambda = A \exp \left\{ \frac{F_0 - E}{kT_0} + \frac{S(E - \varepsilon)}{k} \right\}. \quad (7)$$

Так как согласно предположению это выражение должно иметь максимум, производная $d\lambda/dE$ равна нулю. Как уже указывалось, A можно считать постоянной. С другой стороны, dS/dE — обратная температура. Дифференцируя уравнение (7) с учетом сказанного и полагая $d\lambda/dE$ равным нулю, получим

$$-\frac{1}{kT_0} + \frac{1}{kT(E - \varepsilon)} = 0.$$

$T(E - \varepsilon)$ представляет собой температуру молекулы с энергией $E - \varepsilon$. Из полученного уравнения вытекает, что $T(E - \varepsilon) = T_0$ и, следовательно,

$$E - \varepsilon = E_0, \quad (8)$$

где E_0 означает среднюю тепловую энергию молекулы. Таким образом, главную роль при распаде играют не молекулы с энергией, равной энергии активации, а те, чья энергия превосходит ε на величину E_0 .

Подставим теперь (8) в (7). При этом следует учесть, что $F_0 = E_0 - T_0 S_0$, где $E_0 = E(T_0)$, а $S_0 = S(T_0)$, т. е. где E_0 и S_0 представляют собой энергию и энтропию, соответствующие равновесию при температуре T_0 . Кроме того, согласно уравнению (8) $E = E_0 + \varepsilon$, и поэтому $S(E - \varepsilon) = S_0$. Учитывая сказанное, находим

$$\lambda = A e^{-\varepsilon/kT_0}, \quad (9)$$

т. е. обычную формулу для зависимости скорости реакции от температуры. Скорость реакции в этом случае не зависит от давления, т. е. реакция протекает как мономолекулярная. Условие (6) принимает теперь вид

$$\omega \gg A \exp \left\{ \frac{S_0 - S(E_0 + \varepsilon)}{k} \right\}. \quad (10)$$

Поскольку ω пропорционально давлению, рассмотренный случай соответствует высоким давлениям.

II. Пусть теперь в максимуме λ

$$\frac{1}{\omega} \gg \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{S(E) - S(E - \varepsilon)}{k} \right\}. \quad (11)$$

Тогда (5) принимает следующий вид:

$$\lambda = \omega \exp \left\{ \frac{F_0 - E}{kT_0} + \frac{S(E)}{k} \right\}, \quad (12)$$

и так как λ максимально, то $d\lambda/dE$ равна нулю, т. е.

$$-\frac{1}{kT_0} + \frac{1}{kT(E)} = 0$$

(изменением ω с энергией можно пренебречь по сравнению с экспоненциальным множителем). Отсюда далее следует

$$T(E) = T_0$$

или, если выразить энергию через температуру,

$$E = E_0. \quad (13)$$

С другой стороны, $E > \varepsilon$, так как мы рассматриваем только активированные молекулы. Поэтому (13) может иметь место, лишь если $E_0 > \varepsilon$, т. е. когда средняя тепловая энергия превосходит энергию активации. Этот случай мы исследуем позднее, а теперь займемся случаем $E_0 < \varepsilon$. Тогда $d\lambda/dE$ не обращается в нуль, оставаясь все время меньшей нуля (поскольку всегда $E > E_0$, то также и $T(E) > T_0$). Поэтому λ имеет наибольшее возможное значение при наименьшем из возможных значений E , т. е. при

$$E = \varepsilon. \quad (14)$$

(Мы произвольно положили минимальную энергию молекулы равной нулю; если окажется, что этого почему-либо нельзя сделать, то вместо (14) следует поставить $E = \varepsilon + E_{\min}$). Таким образом, в этом случае распадаются молекулы с наименьшей допустимой энергией, при которой вообще возможен распад, т. е. с энергией, равной энергии активации.

Подстановка (14) в (12) дает

$$\lambda = \omega \exp \left\{ \frac{F_0 - \varepsilon}{kT_0} + \frac{S(\varepsilon)}{k} \right\}. \quad (15)$$

Следовательно, λ пропорционально давлению, т. е. реакция является бимолекулярной. Зависимость λ от температуры T_0 теперь оказывается иной, чем в случае мономолекулярного распада (формула (9)).

Величину
$$q = - \frac{d \ln \lambda}{d(1/kT_0)}$$

обычно называют теплотой активации. Если λ определяется формулой (9), то теплота активации совпадает с энергией активации ε . В рассматриваемом сейчас случае вычисление с помощью (15) дает после пренебрежения зависимостью $\ln \omega$ от T следующее:

$$q = - \frac{d(F_0/T_0)}{d(1/T_0)} + \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\frac{d(F_0/T_0)}{d(1/T_0)} = F_0 - T_0 \frac{dF_0}{dT_0} = E_0.$$

Отсюда получаем окончательно

$$q = \varepsilon - E_0. \quad (16)$$

Таким образом, теплота активации меньше, чем активационная энергия. Формулу (15) теперь можно записать в следующем виде:

$$\lambda = \omega \exp \left(\frac{S(\varepsilon) - S_0}{k} \right) \exp \left(- \frac{q}{kT_0} \right). \quad (17)$$

Так как $S(\varepsilon) > S_0$ (поскольку $\varepsilon > E_0$), множитель перед $\exp(-q/kT_0)$ оказывается существенно большим, чем ω . Условие (11) после подстановки (14) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\omega} \gg \frac{1}{A} \exp \left(\frac{S(\varepsilon) - S(0)}{k} \right).$$

Но на основании теоремы Нерста $S(0) = 0$, поэтому

$$\omega \ll A \exp \left(- \frac{S(\varepsilon)}{k} \right). \quad (18)$$

Таким образом, рассматриваемый случай соответствует малым давлениям.

Между случаями I и II лежит большой интервал. А именно, легко показать, что верхняя граница (18) оказывается существ-

венно меньшей, чем нижняя граница (10):

$$A \exp\left(-\frac{S(\varepsilon)}{k}\right) \ll A \exp\left\{\frac{S_0 - S(\varepsilon + E_0)}{k}\right\}.$$

В самом деле, производная $S(E) - S(\varepsilon + E)$ по энергии, равная $\frac{1}{T(E)} - \frac{1}{T(E + \varepsilon)}$, очевидно, всегда положительна (T всегда растет с увеличением энергии), а, следовательно, величина этого выражения при $E = 0$, равная $-S(\varepsilon)$, меньше, чем его значение при $E = E_0$. Интервал между случаями I и II занимает случай III.

III. В заключение рассмотрим промежуточный случай, когда в знаменателе в (5)

$$\frac{1}{\omega} \sim \frac{1}{A} \exp\left(\frac{S(E) - S(E - \varepsilon)}{k}\right) \quad (19)$$

(для максимального λ).

Тогда в знаменателе можно оставить только одно из двух слагаемых, например второе:

$$\lambda = A \exp\left(\frac{F_0 - E}{kT_0} + \frac{S(E - \varepsilon)}{k}\right). \quad (20)$$

Это выражение совпадает по форме с (7), однако теперь E является сложной функцией ω , определяемой при помощи (19).

Реакция бимолекулярна, если $\lambda \sim p$, и мономолекулярна, когда λ не зависит от p . В общем случае можно определить порядок реакции как степень a , в которой p входит в выражение $\lambda = \text{const} \cdot p^a$. Очевидно,

$$a = \frac{d \ln \lambda}{d \ln p}$$

или, поскольку единственной зависящей от p величиной является ω (она прямо пропорциональна p), отсюда следует, что

$$a = \frac{d \ln \lambda}{d \ln \omega}.$$

Подставляя сюда (20), получим (нужно помнить о том, что величина E , стоящая в (20), не является постоянной, а связана с ω соотношением (19))

$$a = \left[-\frac{1}{kT_0} + \frac{1}{kT(E - \varepsilon)} \right] \frac{dE}{d \ln \omega} \quad (21)$$

(так как производная энтропии по энергии равна обратной температуре). С другой стороны, дифференцируя соотношение (19) (подставив вместо \sim знак равенства), находим

$$1 = \left[\frac{1}{kT(E-\varepsilon)} - \frac{1}{kT(E)} \right] \frac{dE}{d \ln \omega}.$$

Вычисляя отсюда $dE/d \ln \omega$ и подставляя результат в (21), получаем

$$a = \frac{\frac{1}{T(E-\varepsilon)} - \frac{1}{T_0}}{\frac{1}{T(E-\varepsilon)} - \frac{1}{T(E)}}. \quad (22)$$

При изменении E от $E_0 + \varepsilon$ (случай I) до ε (случай II) a возрастает от 0 до 1, принимая при этом все промежуточные значения.

Теплота активации принимает в этом случае вид

$$q = - \frac{d \ln \lambda}{d(1/kT_0)} = E - E_0 \quad (23)$$

(зависимостью E от T_0 , появляющейся благодаря (19), можно пренебречь, поскольку она выражается через $\ln \omega$). При изменении E от $E_0 + \varepsilon$ до ε q пробегает значения от ε до $\varepsilon + E_0$. Если $E_0 > \varepsilon$, то, как уже указывалось, рассуждения, проведенные для случая II, неприменимы. В этом случае при малых давлениях $E = E_0$, т. е. при распаде, существенную роль играют молекулы, составляющие основную массу молекул газа. В соответствии с этим в выражении $\lambda = n(E) W(E)$ вместо $n(E)$ следует поставить 1. Отсюда следует

$$\lambda = W(E_0)$$

или согласно (1)

$$\lambda = A \exp \left\{ \frac{S(E_0 - \varepsilon) - S(E_0)}{kT} \right\}. \quad (24)$$

В это выражение ω не входит, поэтому реакция остается мономолекулярной также и при малых давлениях. При этом, однако, изменяется смысл скорости распада. Для энергии активации при малых давлениях получаем из (24)

$$q = - \frac{d \ln \lambda}{d(1/T_0)} = T_0^2 \left[\frac{1}{T(E-\varepsilon)} - \frac{1}{T_0} \right] \frac{dE_0}{dT_0} = T_0^2 c_0 \left[\frac{1}{T(E_0 - \varepsilon)} - \frac{1}{T_0} \right], \quad (25)$$

где c_0 — теплоемкость молекулы.

Граница между случаями II и III теперь определяется не условием (18), а условием, которое получается из (19) при подстановке E_0 вместо E . Отсюда получается

$$\frac{1}{\omega} \sim A \exp \left\{ \frac{S(E_0 - \varepsilon) - S(E_0)}{k} \right\}. \quad (26)$$

Таким образом, в случае $E_0 > \varepsilon$ величина a (22), определяющая порядок реакции, с понижением давления медленно возрастает от 0 до 1 (для E , близких к E_0), а затем сравнительно быстро падает до нуля при значении ω , определяемом из (26).

Практическое применение полученных формул весьма затруднено тем, что неизвестна функция $S(E)$, в особенности при больших E . Однако можно использовать эти формулы для того, чтобы, наоборот, определять термодинамические функции газа по известному характеру протекания мономолекулярных реакций.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ЖЭТФ, 7, 203, 1937;

Phys. Zs. Sowjet., 10, 154, 1936

Выведено кинетическое уравнение для системы, состоящей из заряженных частиц с учетом их взаимодействия. Определен порядок величины свободного пробега частиц в такой системе. Определена скорость выравнивания температур ионов и электронов в плазме.

В случае кулоновского взаимодействия в формулах кинетической теории газов появляются расходящиеся интегралы, причем эти интегралы расходятся при больших расстояниях между частицами. Это значит, что существенную роль играют именно столкновения с большими расстояниями между сталкивающимися частицами. Но при больших расстояниях происходит отклонение частиц лишь на малые углы и с малым изменением скорости. Таким образом, существенны столкновения с малым изменением вектора скорости.

Пусть $n(p_i)$ — функция распределения в импульсном пространстве; она есть функция от трех компонент импульса частицы ($i = x, y, z$). Изменение импульса при столкновениях мы будем обозначать посредством Δ_i , причем при всех столкновениях $\Delta_i \ll p_i$. Пусть, далее, dW — вероятность (в единицу времени) столкновения частиц с импульсом p_i с частицей с импульсом p'_i , причем p_i переходит в $p_i + \Delta_i$, а p'_i — в $p'_i + \Delta'_i$. В силу сохранения импульса $\Delta_i = -\Delta'_i$ (мы, однако, пока не будем пользоваться этим обстоятельством). Число таких столкновений будет

$$dW \cdot n(p) n'(p')$$

(для простоты мы будем опускать индексы у p_i и Δ_i в $n(p_i)$ и т. д.).

Число же столкновений, переводящих частицы с импульсами $p_i + \Delta_i$ и $p'_i + \Delta'_i$ в частицы с импульсами p_i и p'_i , будет

$$dW \cdot n(p + \Delta) n(p' + \Delta'),$$

так как согласно теореме Лиувилля вероятности прямого и обратного переходов равны.

Выразим вероятность dW как функцию от полусуммы импульсов в начальном и конечном состояниях и их разности. Тогда вероятность прямого перехода будет

$$dW\left(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta'\right),$$

а вероятность обратного

$$dW\left(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, -\Delta, -\Delta'\right).$$

Поскольку обе эти вероятности равны, то $dW(p, p', \Delta, \Delta')$ — четная функция от Δ_i и Δ'_i .

Число частиц с импульсом p_i меняется благодаря столкновениям в единицу времени, следовательно, на

$$\int dW\left(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta'\right) \{n(p)n'(p') - n(p + \Delta)n'(p' + \Delta')\}.$$

Вероятность dW мы напишем в виде

$$dW = w\left(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta'\right) d\tau' d\tau_{\Delta},$$

где $d\tau' = dp'_x dp'_y dp'_z$, а $d\tau_{\Delta}$ — произведение дифференциалов параметров, определяющих столкновение. Таким образом, изменение числа частиц с импульсом p_i :

$$\int d\tau' d\tau_{\Delta} w\left(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta'\right) \{n(p)n'(p') - n(p + \Delta)n'(p' + \Delta')\}. \quad (1)$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд по степеням Δ_i и Δ'_i (w надо, конечно, раскладывать только по Δ_i , входящим в $p_i + \Delta_i/2$ и $p'_i + \Delta'_i/2$). Члены нулевого порядка сокращаются, а члены первого порядка:

$$- \int d\tau' d\tau_{\Delta} \left(w n' \frac{\partial n}{\partial p_i} \Delta_i + w n \frac{\partial n'}{\partial p'_i} \Delta'_i \right),$$

где $w = w(p, p', \Delta, \Delta')$ (по дважды повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование). Но w — четная функция от Δ_i и Δ'_i . Поэтому написанный интеграл равен нулю.

Члены второго порядка следующие:

$$-\int d\tau' d\tau_{\Delta} w \left\{ \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} n' \frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_k} + \Delta_i \Delta'_k \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \frac{\partial n}{\partial p_i} + \frac{\Delta_i \Delta'_k}{2} n \frac{\partial^2 n'}{\partial p'_i \partial p'_k} \right\} - \\ - \int d\tau' d\tau_{\Delta} \frac{1}{2} \left(\Delta_i \frac{\partial w}{\partial p_i} + \Delta'_i \frac{\partial w}{\partial p'_i} \right) \left(\Delta_k n' \frac{\partial n}{\partial p_k} + n \Delta'_k \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \right).$$

Проинтегрируем два из этих членов по $d\tau'$ по частям, а именно:

$$-\frac{1}{2} \int d\tau' d\tau_{\Delta} \Delta_i \Delta_k \frac{\partial w}{\partial p'_i} \frac{\partial n}{\partial p_k} n' = \frac{1}{2} \int d\tau' d\tau_{\Delta} \Delta_i \Delta'_k w \frac{\partial n'}{\partial p'_i} \frac{\partial n}{\partial p_k}, \\ -\frac{1}{2} \int d\tau' d\tau_{\Delta} \Delta'_i \Delta'_k \frac{\partial w}{\partial p'_i} \frac{\partial n'}{\partial p'_k} n = \frac{1}{2} \int d\tau' d\tau_{\Delta} \Delta'_i \Delta'_k w \frac{\partial n'}{\partial p'_i \partial p'_k} n.$$

Поскольку интегрирование производится по всему p' -пространству, то поверхностный интеграл равен нулю, так как на бесконечности $n' = 0$.

В результате члены второго порядка дают

$$-\int d\tau' d\tau_{\Delta} w \left\{ \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} n' \frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_k} + \frac{\Delta_i \Delta'_k}{2} \frac{\partial n}{\partial p_i} \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \right\} - \\ - \int d\tau' d\tau_{\Delta} \left\{ \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} \frac{\partial w}{\partial p_i} \frac{\partial n}{\partial p_k} n' + \frac{\Delta_i \Delta'_k}{2} n \frac{\partial w}{\partial p_i} \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \right\}.$$

Это можно переписать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial p_i} \int d\tau' d\tau_{\Delta} w \left\{ \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} n' \frac{\partial n}{\partial p_k} + \frac{\Delta_i \Delta'_k}{2} n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \right\}.$$

Таким образом, интеграл (1), определяющий изменение числа частиц с данными импульсами благодаря столкновениям, как и должно было быть, выражается как дивергенция $\partial j_i / \partial p_i$ в импульсном пространстве от вектора j_i потока в импульсном пространстве. Компоненты этого потока равны

$$j_i = - \int d\tau' d\tau_{\Delta} w \left\{ \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} n' \frac{\partial n}{\partial p_k} + \frac{\Delta_i \Delta'_k}{2} n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} \right\}. \quad (2)$$

Как было уже отмечено в начале, $\Delta_i = -\Delta'_i$. Поэтому в нашем случае поток

$$j_i = \int d\tau' \left\{ \left(n \frac{\partial n'}{\partial p'_i} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right) \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} w d\tau_{\Delta} \right\}.$$

Если система состоит из частиц нескольких родов, то поток j_i для данного рода частиц равен

$$j_i = \sum \int d\tau' \left\{ \left(n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right) \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} w d\tau_{\Delta} \right\}, \quad (3)$$

где суммирование производится по всем родам частиц в системе, причем нештрихованные величины относятся к данному роду частиц, а штрихованные — поочередно ко всем родам (в том числе, конечно, и к данному).

Применим полученные формулы к рассматриваемому нами случаю системы частиц с кулоновским взаимодействием. Для этого определим изменение импульса двух частиц с зарядами e и e' и импульсами p_i и p'_i , пролетающих на некотором расстоянии друг от друга. Пусть ρ есть прицельное расстояние (на котором обе частицы прошли бы друг мимо друга, если бы между ними не было взаимодействия), а u_i — их относительная скорость. Рассмотрим столкновение в той системе координат, в которой частица e' покоится; ось x направим по направлению движения частицы e , движущейся со скоростью u . Угол отклонения мы считаем малым. В этом же приближении импульс вдоль оси x не меняется, а меняется только импульс в направлении, перпендикулярном оси x (по оси y). Это изменение равно

$$\Delta_y = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial y} dt,$$

где $U = ee'/r$ — энергия взаимодействия обеих частиц.

Поскольку отклонение считается малым, то в интеграле можно считать движение невозмущенным, т. е. прямолинейным вдоль оси x . Тогда

$$\Delta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ee' \rho dt}{(\rho^2 + u^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2ee'}{\rho u}.$$

Переходя обратно к произвольной системе координат и замечая, что вектор изменения импульса направлен по вектору ρ , находим

$$\Delta_i = \frac{2ee'}{u} \frac{\rho_i}{\rho^2}. \quad (4)$$

Вычислим теперь интегралы

$$\alpha_{ik} = \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} w d\tau_{\Delta} = \int \frac{2e^2 e'^2}{u^2} \frac{\rho_i \rho_k}{\rho^4} w d\tau_{\Delta},$$

входящие в (3). $n' dW = wn' d\tau' d\tau_{\Delta}$ — число столкновений с частицами e' в единицу времени, испытываемое частицей e с импульсом p_i , при которых ее импульс меняется на данное значение Δ_i . Иначе, это есть число столкновений, при которых частицы e и e' проходят на определенном расстоянии ρ друг от друга, причем частицы e' имеют определенный импульс p'_i (Δ_i вполне определено при данных p'_i и ρ_i). Обозначим посредством v_i и v'_i скорости частиц e и e' ; их относительная скорость $u_i = v_i - v'_i$ и имеет абсолютное значение u . Число столкновений частицы e , происходящих на данном расстоянии ρ_i с данной относительной скоростью u_i , очевидно,

$$u \rho d\rho d\varphi n' d\tau',$$

где φ — угол, определяющий направление ρ (при данной скорости u все возможные ρ лежат в одной плоскости, перпендикулярной u ; φ — угол в этой плоскости).

В интегралах α_{ik} мы можем, следовательно, заменить $wd\tau_{\Delta}$ на $u\rho d\rho d\varphi$:

$$\alpha_{ik} = \frac{2e^2e'^2}{u} \int \frac{\rho_i \rho_k}{\rho^3} d\rho d\varphi.$$

Для выполнения интегрирования введем временно оси координат с осью x , направленной по u . Тогда $\rho_x = 0$, так как $\rho \perp u$. Поэтому $\alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{xz} = 0$. Также и $\alpha_{yz} = 0$, так как интеграл от $\rho_y \rho_z = \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$ по всем углам φ равен нулю.

Таким образом, для неравных нулю α_{yy} и α_{zz} мы находим (подставляя $\rho_y = \rho \sin \varphi$, $\rho_z = \rho \cos \varphi$ и интегрируя по $d\varphi$)

$$\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \frac{2\pi e^2 e'^2}{u} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (5)$$

Стоящий здесь интеграл расходится логарифмически. Расходимость при малых ρ обусловлена тем, что при малых ρ угол отклонения частиц при столкновении велик, и потому все предыдущие формулы теряют силу. Если пользоваться точными формулами, то никакой расходимости (при малых ρ), конечно, не получилось бы.

Поскольку логарифм малочувствителен к небольшому изменению аргумента, то мы можем в (5) взять в качестве нижнего предела ρ_1 то значение ρ , при котором угол отклонения делается порядка единицы, т. е. энергия взаимодействия ee'/ρ делается порядка средней кинетической энергии $\bar{\epsilon}$ частиц:

$$\rho_1 = \frac{ee'}{\bar{\epsilon}}.$$

Что касается верхнего предела ρ_2 в (5), то следует различать два случая. Если полный заряд всех частиц в системе не равен нулю, то в качестве верхнего предела надо взять линейные размеры R той области, в которой находятся эти частицы. В наиболее интересном же случае, когда общий заряд системы равен нулю, происходит экранирование зарядов, и в качестве ρ_2 надо взять дебай-гюккелевский радиус экранирования. Этот радиус есть $1/\kappa$, где κ — коэффициент в экранированном законе Кулона $e^{-\kappa r}/r$, определяющийся известным уравнением

$$\kappa^2 = \sum \frac{N_i e_i^2}{kT}$$

(суммирование производится по всем родам частиц в системе, а N_i — число частиц i -го рода в 1 см^3). По порядку величины $\kappa \approx \sqrt{\bar{N}e^2/kT}$, где \bar{N} — число частиц в 1 см^3 . Но $kT \approx \bar{\epsilon}$, так что $\kappa \approx \sqrt{\bar{N}e^2/\bar{\epsilon}}$. Таким образом, для ρ_2 мы можем взять

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{N}e^2}}.$$

Подставляя ρ_1 и ρ_2 в (5), находим

$$\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \frac{\pi e^2 e'^2}{u} L,$$

где

$$L = \ln \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{\bar{\epsilon}}{e^2} \right)^3. \quad (6)$$

Переходя теперь обратно к произвольной системе координат, мы можем написать в тензорной форме

$$\alpha_{ik} = \pi e^2 e'^2 L \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (3), находим поток частиц e в импульсном пространстве в виде

$$j_i = \pi e^2 L \sum e'^2 \int \left\{ n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right\} \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau'. \quad (7)$$

Кинетическое уравнение при наличии градиента температуры и внешнего электрического поля E_i имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial T} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + e E_i \frac{\partial n}{\partial p_i} + \frac{\partial j_i}{\partial p_i} = 0. \quad (8)$$

Как и должно было быть, максвелловское распределение обращает j_i в нуль.

Из этого уравнения можно было бы принципиально определить электро- и теплопроводность газа, состоящего из заряженных частиц. Это, однако, наталкивается на значительные математические трудности. Мы ограничимся качественным определением их, а именно: определим по порядку величины длину свободного пробега l частиц, из которой по известным формулам можно найти электро- и теплопроводность.

Пусть \bar{N} — по порядку величины число частиц в 1 см^3 , e — заряд частиц и T — температура газа. Как видно из (7), при подстановке в (8) \bar{N} и e входят в формулы только в комбинации $\bar{N} L e^4$. Поэтому и свободный пробег должен определяться лишь величинами $e^4 L \bar{N}$, kT и массой частиц. Из этих величин можно составить только одну, которая обладает размерностью длины, а именно $(kT)^2 / (e^4 L \bar{N})$. Этому и будет по порядку величины равен свободный пробег

$$l \approx \frac{k^2 T^2}{e^4 L \bar{N}}. \quad (9)$$

Рассмотрим газ, состоящий из электронов и ионов. Вследствие большой разницы в массах тех и других обмен энергии между электронами друг с другом и между ионами друг с другом будет происходить гораздо быстрее, чем обмен энергии между ионами и электронами (при столкновении очень тяжелой частицы с очень легкой энергия каждой из них почти не меняется). Поэтому гораздо раньше установится равновесие между энергиями электронов самих по себе и ионов самих по себе, чем между теми и другими. Будем считать, что уже установилось такое равновесие, т. е. электроны и ионы имеют по отдельности максвелловское распределение, но температура этих распределений T' и T различна. Найдем скорость установления равновесия между электронами и ионами, т. е. скорость выравнивания температур T' и T .

Определим энергию, передаваемую электронами ионам в единицу времени (в 1 см^3) при их столкновениях друг с другом. Пусть e , m и e' , m' — заряды и масса ионов и электронов, n и

n' — их распределения:

$$n = N \left(\frac{1}{2\pi k T m} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/kT}, \quad n' = N' \left(\frac{1}{2\pi k T' m'} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon'/kT'}, \quad (10)$$

N и N' — число ионов и электронов в 1 см^3 , а ε и ε' — энергия тех и других. Поток ионов в импульсном пространстве есть согласно (7)

$$j_i = \pi e^2 e'^2 L \int \left(n \frac{\partial n'}{\partial p_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right) \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau' \quad (11)$$

(все штрихованные величины относятся к электронам, а нештрихованные — к ионам). В сумме в (7) остается только один член, так как член, соответствующий столкновениям ионов друг с другом, обращается в нуль, поскольку ионы имеют максвелловское распределение.

Изменение числа ионов с данными импульсами в единицу времени благодаря столкновениям с электронами есть $-\partial j_i / \partial p_i$; изменение их энергии есть, следовательно,

$$- \int \varepsilon \frac{\partial j_i}{\partial p_i} d\tau$$

или, интегрируя по частям,

$$- \int \varepsilon \frac{\partial j_i}{\partial p_i} d\tau = \int j_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} d\tau = \int j_i v_i d\tau$$

($\partial \varepsilon / \partial p_i = v_i$), так как интегрирование производится по всему импульсному пространству и потому поверхностный интеграл пропадает.

Подставим в (11) распределения (10). При этом

$$\frac{\partial n}{\partial p_k} = - \frac{n}{kT} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} = - \frac{nv_k}{kT}, \quad \frac{\partial n'}{\partial p_k} = - \frac{n'v'_k}{kT'}. \quad (11)$$

Тогда находим

$$\begin{aligned} j_i &= \pi e^2 e'^2 L \int n n' \left(\frac{v_k}{kT} - \frac{v'_k}{kT'} \right) \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau' = \\ &= \pi e^2 e'^2 L \int n n' \left[v_k \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT'} \right) + \frac{u_k}{kT'} \right] \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau'. \end{aligned}$$

Но

$$u_k \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} = 0,$$

и потому

$$j_i = \pi e^2 e'^2 L \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT'} \right) \int nn' \frac{u^2 v_i - (u_k v_k) u_i}{u^3} d\tau d\tau'.$$

Искомое изменение энергии равно поэтому

$$\int j_i v_i d\tau = \pi e^2 e'^2 L \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT'} \right) \iint nn' \frac{u^2 v^2 - (v_i u_i)^2}{u^3} d\tau d\tau'.$$

Поскольку масса электронов гораздо меньше массы ядер, то их скорость v'_k гораздо больше скорости ионов v_k . Поэтому можно считать, что $u_i \approx -v'_i$. Тогда

$$\int j_i v_i d\tau = \pi e^2 e'^2 L \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT'} \right) \iint nn' \frac{v^2 v'^2 - (v_i v'_i)^2}{v^3} d\tau d\tau'.$$

Усредняя по углам между v_i и v'_i , находим

$$\int j_i v_i d\tau = \frac{2}{3} \pi e^2 e'^2 L \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT'} \right) \int n v^2 d\tau \int \frac{n'}{v'} d\tau'.$$

Подставляя (10), имеем

$$\int n v^2 d\tau = N \frac{3kT}{m},$$

$$\int \frac{n'}{v'} d\tau' = 4\pi N' \left(\frac{m'}{2\pi kT'} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-m' v'^2 / 2kT'} v' dv' = 2N' \sqrt{\frac{m'}{2\pi kT'}}.$$

В результате мы находим

$$\int v_i j_i d\tau = \frac{2NN' e^2 e'^2 (2\pi m')^{1/2} L}{mk^{1/2} T'^{3/2}} (T' - T).$$

Если в газе имеются ионы нескольких родов, то полная энергия, отдаваемая электронами ионам в единицу времени, есть

$$\frac{2N' e'^2 (2\pi m')^{1/2} L}{k^{1/2} T'^{3/2}} (T' - T) \sum \frac{Ne^2}{m} \quad (12)$$

(Σ по всем родам ионов).

Энергия электронов в 1 см^3 равна $3N'kT'/2$. Разделив энергию (12), отдаваемую электронами в единицу времени, на $3N'k/2$, мы получим, следовательно, скорость изменения температуры T' электронов:

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e'^2 (2\pi m')^{1/2} (T' - T)}{(kT')^{3/2}} L \sum \frac{Ne^2}{m}. \quad (13)$$

О СВОЙСТВАХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ОЧЕНЬ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Совместно с И. ПОМЕРАНЧУКОМ

ЖЭТФ, 7, 379, 1937

Phys. Zs. Sowjet., 10, 649, 1936

В первой части разбирается влияние взаимодействия электронов, рассматриваемого как малое возмущение, на сопротивление металлов. Сопротивление, вызванное взаимодействием электронов, пропорционально T^2 .

Во второй части выводится выражение для термо-электродвижущей силы, находящееся в согласии с соотношением Онсагера — Томсона.

§ 1. Существующая теория металлов не учитывает взаимодействия электронов металла друг с другом, хотя последнее должно быть весьма большим и пренебрегать им ни в какой степени нельзя. Так как, однако, строгое рассмотрение вопроса невозможно при существующем положении теории, то необходимо хотя бы рассмотреть взаимодействие электронов как малое возмущение. Такое рассмотрение дает возможность по крайней мере выяснить пределы применимости существующей теории. При этом оказывается, что при низких температурах, порядка нескольких градусов абсолютных, электрическое сопротивление, вызванное взаимодействием электронов, нельзя считать малым, так как эффекты, им обусловленные, сравнимы по величине или больше эффектов, обусловленных взаимодействием электронов с тепловыми колебаниями решетки. Увеличение сопротивления, вызванное взаимодействием электронов, пропорционально T^2 и при низких температурах больше обычного сопротивления, пропорционального T^5 . Имеющиеся здесь соотношения аналогичны соотношениям, существующим в области теплоемкости металлов, где при низких температурах (несколько градусов абсолютных) теплоемкость электронов играет существенную роль (так как она пропорциональна T , а дебаевская — T^3), несмотря на то, что при обы-

чных температурах электронной теплоемкостью можно пренебречь по сравнению с теплоемкостью решетки.

Как известно, состояние электрона в периодической решетке описывается волновой функцией

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}),$$

где компоненты вектора \mathbf{k} определены только с точностью до периодов обратной решетки, а функция $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ является периодической функцией с периодами, равными периодам решетки:

$$\varphi(\mathbf{k}, x + d_1, y, z) = \varphi(\mathbf{k}, x, y + d_2, z) = \varphi(\mathbf{k}, x, y, z + d_3) = \\ = \varphi(\mathbf{k}, x, y, z),$$

d_1, d_2 и d_3 — периоды решетки.

Вектор $\hbar\mathbf{k}$ (квазиимпульс) играет роль импульса свободной частицы; $\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}}$ — скорость электрона, ε — его энергия, $\hbar\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{F}$, где \mathbf{F} — сила, действующая на электрон. Благодаря неоднозначности определения вектора \mathbf{k} сумма векторов \mathbf{k} у взаимодействующих электронов сохраняется только с точностью до периодов обратной решетки, т. е. возможны только такие переходы, для которых

$$\sum \mathbf{k}_i - \sum \mathbf{k}^i = 0, \frac{2\pi}{d}, \frac{4\pi}{d}, \dots;$$

\mathbf{k}_i — векторы в начальном состоянии, \mathbf{k}^i — векторы в конечном состоянии.

Таким образом, увеличение импульса, вызванное электрическим полем, может разрушаться и вследствие взаимодействия электронов друг с другом, а не только с тепловыми колебаниями решетки.

Напишем теперь условия стационарности для функции распределения электронов при наличии электрического поля, рассматривая пока только их взаимодействие между собой. Мы получаем

$$- \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 e F = \\ = \int W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} [n_1 n_2 (1 - n') (1 - n'') - n' n'' (1 - n_1) (1 - n_2)] d\tau_2 d\tau''. \quad (1)$$

Здесь F — напряженность электрического поля, n_1 и n_2 — плотности электронов в начальном состоянии, n' и n'' — в конечном.

Благодаря законам сохранения (энергия и квазиимпульс) интегрируем только по квазиимпульсам электронов в состояниях

n_2 и n'' , так как состояние n' будет задано, если известны состояния n_1 , n_2 и n'' :

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'', \quad k' = k_1 + k_2 - k'' - \frac{2\pi m}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Вероятность перехода $W_{k, k', k''}$ определяется обычным образом через матричный элемент перехода возмущающей энергии $V_{k, k', k''}$. Предполагая энергию взаимодействия кулоновской, можно ожидать, что область малых углов «отклонения» (т. е. переходов, при которых электрон от состояния с некоторым вектором k переходит в состояние, характеризующееся вектором k' , мало отличающимся от k) будет играть особую роль (как известно, при кулоновском взаимодействии вероятность рассеяния обратно пропорциональна $\sin^4(\vartheta/2)$, где ϑ — угол рассеяния). В металле, однако, эта область ничем не замечательна, так как малые углы отклонения означают, что взаимодействующие электроны в среднем находятся на больших расстояниях друг от друга, вследствие чего всегда имеется экранирование посторонними зарядами и энергия взаимодействия уже не будет кулоновской.

Подставим теперь в (1) $n + \delta n$ вместо n , где n — фермиевская равновесная функция распределения, равная

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1},$$

δn — отклонение функции распределения от равновесного значения, предполагаемое малым. δn положим равным $\frac{\delta n}{\delta \varepsilon} \varphi(k)$, где

φ — некоторая функция. Так как фермиевская функция обращает в нуль правую часть уравнения (1), то справа берем члены первого порядка малости, т. е. линейные относительно φ . Слева же производной от δn пренебрегаем. При этом (1) переходит в

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 e F = \int W_{k_1, k_2, k''} \left\{ \varphi_1 \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} [(1 - n')(1 - n'') n_2 + n' n'' (1 - n_2)] + \right. \\ \left. + \varphi_2 \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon} [(1 - n')(1 - n'') n_1 + n' n'' (1 - n_1)] - \right. \quad (2)$$

— члены, где нижние и верхние индексы переставлены $\left. \right\} d\tau_2 d\tau''$.

Так как n и $dn/d\varepsilon$ — функции только от $(\varepsilon - \mu)/kT$, то δn можно положить функцией от $x = (\varepsilon - \mu)/kT$ и углов в импульсном пространстве. От переменных k_x, k_y, k_z переходим к этим переменным. Тогда вместо (2) будет

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 e F = \int W_{k_1, k_2, k''} \left\{ \Delta_2 \Delta'' dx_2 dx'' d\Omega_2 d\Omega'' (kT), \quad (2a) \right.$$

где $\Delta = \frac{\partial (k_x k_y k_z)}{\partial (\varepsilon \vartheta \Phi)}$ — якобиан перехода к переменным $\varepsilon, \vartheta, \Phi$; $d\Omega$ — элементы телесного угла; $\{ \}$ означает выражение, заключенное в фигурных скобках в (2). Подынтегральное выражение в (2а) есть функция от x_1, x_2, x'' и $\Omega_1, \Omega_2, \Omega''$; весь интеграл является функцией от x_1 и Ω_1 (буква k , стоящая перед T , означает постоянную Больцмана и не должна быть смешиваема с квазиимпульсом. Последний, в отличие от первой, всегда снабжен индексом). Если теперь в (2а) подставить

$$n_1 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_1 - \mu)/kT} + 1}$$

и соответственно вместо n_2 и n'' их фермиевские выражения, то получаем

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 eF = kT \int W_{k_1 k_2 k' k''} \left\{ \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{(e^{-x_1} + 1)(e^{-x_2} + 1)(e^{x'} + 1)(e^{x''} + 1)} - \frac{\Phi' + \Phi''}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(e^{-x'} + 1)(e^{-x''} + 1)} \right\} \Delta_2 \Delta'' dx_2 dx'' d\Omega_2 d\Omega'' \quad (3)$$

В члене с Φ_1 можно произвести оба интегрирования по x_2 и x'' , в членах с Φ_2, Φ' и Φ'' — только одно (в члене с Φ' интегрирование по x'' заменяется интегрированием по x'). При этом якобиан преобразования Δ и вероятность $W_{k_1 k_2 k' k''}$ в нашем приближении можно рассматривать не зависящими от энергии, т. е. от x (так как на самом деле они являются медленно меняющимися функциями по сравнению с Φ , которая меняет порядок своей величины при изменении ε от μ до $\mu \pm kT$). В результате простого, но длинного интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} V eF &= - \frac{e^{x_1} v_1 eF}{(1 + e^{x_1})^2 kT} = \\ &= (kT) \int W_{k_1 k_2 k' k''} \left\{ \left[2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} + 2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} + \frac{x_1^2}{2} \right] \frac{\Phi_1}{(e^{x_1} + 1)(e^{-x_1} + 1)} + \right. \\ &+ \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi_2 (x_1 - x_2) dx_2}{(e^{-x_1} + 1)(e^{-x_2} + 1)(e^{x_1} - e^{x_2})} - \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi' (x_1 - x') dx'}{(e^{-x_1} + 1)(e^{-x'} + 1)(e^{x_1} - e^{x'})} - \\ &\left. - \int \frac{\Phi'' (x_1 - x'') dx''}{(e^{-x_1} + 1)(e^{-x''} + 1)(e^{x_1} - e^{x''})} \right\} \Delta_2 \Delta'' d\Omega_2 d\Omega'' \quad (4) \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует, во-первых, что $\Phi(x) = \Phi(-x)$, так как $\Phi(-x)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\Phi(x)$, только с Φ_2 от $-x_2, \Phi'$ от $-x'$ и Φ'' от $-x''$. Во-вторых, если

уравнение (4) переписать в виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 e^F = A \varphi_1 + \int L(x_1, x') \varphi(x') dx',$$

то оператор L имеет симметричное ядро

$$L(x_1, x') = \frac{x_1 - x'}{(e^{-x_1} - 1)(e^{-x'} + 1)(e^{x_1} - e^{x'})} = L(x', x_1).$$

В-третьих, из уравнения (4) следует, что $\varphi = \frac{Fg(x, \Omega)}{T^2}$, где $g(x, \Omega)$ — некоторая четная функция x . Находим ток

$$i = -2e \int v \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \varphi d\tau = -\frac{2eF}{T^2} \int \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} u g(x, \Omega) \Delta dx d\Omega (kT) = \frac{aF}{T^2},$$

$$a = 2e \int \frac{ve^{xg}(x, \Omega)}{(1 + e^x)^2} \Delta dx d\Omega.$$

Так как $\partial n / \partial \varepsilon$ имеет при низких температурах вид δ -функции от $\varepsilon - \mu$, т. е. отлично от нуля только при ε , близких к μ , можно при интегрировании по dx рассматривать $v\Delta$ равным своему значению при $\varepsilon = \mu$.

Таким образом, сопротивление, вызванное взаимодействием электронов друг с другом, пропорционально T^2 .

При температурах, меньших дебаевской, но больших, чем те, при которых существенно взаимодействие электронов, сопротивление пропорционально T^5 (определяется тепловыми колебаниями решетки). При очень низких температурах, порядка нескольких градусов абсолютных, сопротивление пропорционально T^2 . В промежуточной области температур должно получиться качественное согласие с опытом, если соединить эти два закона формулой вида

$$R = \alpha T^2 + \beta T^5.$$

В эту формулу хорошо укладываются данные о сопротивлении платины до температур порядка 20° с коэффициентами α и β , равными $16 \cdot 10^{-7}$ и $3 \cdot 10^{-7}$.

§ 2. Существующие теории термоэлектрических явлений при низких температурах не являются удовлетворительными. Так, Бете [1] выводит выражение для термоэлектродвижущей силы, не учитывая установления равновесия по направлениям (идущее при низких температурах медленнее, чем по энергиям), и получает поэтому результат, стоящий в противоречии с соотношениями Томсона — Онсагера [2] между теплом Пельтье Π , теплом

Томсона M и производной от термоэлектродвижущей силы E по температуре:

$$E = \Pi \frac{1}{T}, \quad M = T \frac{dE}{dT}. \quad (5)$$

Выполнение этих соотношений обеспечивается симметричностью столкновительных операторов, приводящей к тому, что если написать электрический (i) и тепловой (s) ток в виде

$$i = \alpha_{11} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \frac{\alpha_{12}}{T} \frac{dT}{dz},$$

$$s = \left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right) i + \alpha_{21} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \alpha_{22} \frac{dT}{dz}$$

(z — координата, φ — потенциал), то

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Это равенство и дает соотношения (5); у Бете это равенство не соблюдается. Бете пользуется при низких температурах функцией распределения (вернее, ее отклонением от равновесного фермиевского значения) такого вида:

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left[\frac{u(x, \Omega)}{T^3} + \frac{g(x, \Omega)}{T^2} \right] \frac{dT}{dz},$$

где $\alpha(\Omega)$ — функция только углов в импульсном пространстве, g и u — функции углов и энергии, причем $u(x, \Omega)$ — нечетная функция x , $g(x, \Omega)$ — четная функция x . Найдем α_{12} и α_{21} ; α_{12}/T — ток от членов в δn , пропорциональных dT/dz , т. е.

$$\frac{1}{T} \alpha_{12} = -2e \int v_z \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left[\frac{u(x, \Omega)}{T^3} + \frac{g(x, \Omega)}{T^2} \right] \Delta d\varepsilon d\Omega.$$

Ввиду того что $\partial n/\partial \varepsilon$ имеет при низких температурах вид δ -функций от x , можно в интеграле с g положить $v_z \Delta = [v_z \Delta]_{\varepsilon=\mu} = \text{const}$. В интеграле с $u(x, \Omega)$ такое приближение дает нуль ввиду нечетности этой функции по x , поэтому разлагаем здесь $v_z \Delta$ в ряд:

$$v_z \Delta = (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} + (\varepsilon - \mu) \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} = (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} + xkT \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu}.$$

Благодаря этому будет $\alpha_{12}/T = a/T^2$, причем константа a равна

$$a = 2e \int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} g(x, \Omega) dx d\Omega (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} + \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} 2ek \int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} xu(x, \Omega) d\Omega dx$$

(здесь k — постоянная Больцмана). α_{21} — тепловой поток от члена в δn , пропорционального электрическому полю:

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= 2 \int v_z (\varepsilon - \mu) \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \Delta d\Omega d\varepsilon = \\ &= -2 \int v_z \frac{e^x (e - \mu)}{(1 + e^x)^2} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \Delta d\Omega k T dx = \\ &= 2 \int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} k T x \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \left[(v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} x k T \right] d\Omega k T dx = \\ &= -\frac{2k^2}{T^3} \int x^2 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \alpha(\Omega) d\Omega dx \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} v_z \Delta \right]_{\varepsilon=\mu} = \frac{\text{const}}{T^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha_{21} \sim 1/T^3$, $\alpha_{12} \sim 1/T$.

Кролль [3] при рассмотрении членов кинетического уравнения, соответствующих установлению равновесия по направлениям, пренебрегает величинами того же порядка, что и оставляемые им. Благодаря этому у него оказывается невозможным перенос тепла в металле, по которому не течет электрический ток. Это следует из того, что при равенстве нулю электрического тока (условие, из которого, как известно, определяется термоэлектродвижущая сила) у Кролля исчезает отклонение функции распределения от равновесного фермиевского значения, т. е. функция распределения при наличии градиента температуры остается фермиевской, не могущей, как известно, дать какой-либо тепловой поток.

Для выяснения вопроса рассмотрим сперва в общем виде уравнение стационарности при наличии градиента температуры. Как известно, изменение числа электронов в единице фазового пространства под влиянием взаимодействия с тепловыми колебаниями решетки равняется

$$\begin{aligned} &\int A_{k,k'} [n_1 (1 - n') (N + 1) - n' N (1 - n_1)] df_x df_y df_z + \\ &+ \int B_{k,k'} [n_2 (1 - n'') N - n'' (N + 1) (1 - n_1)] df_x df_y df_z. \quad (6) \end{aligned}$$

$A_{k,k'}$ и $B_{k,k'}$ — вероятности переходов, отличающиеся только знаками в δ -функциях; именно в $A_{k,k'}$ входит $\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)$, в $B_{k,k'}$ — $\delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega)$. N — функция распределения фононов, \mathbf{f} — волновой вектор фонона. Интеграл с $A_{k,k'}$ учитывает переходы из состояния n_1 в состояния n' , лежащие энергетически ниже, чем n_1 ; интеграл с $B_{k,k'}$ — переходы в состояния n'' , лежащие энергетически выше, чем n_1 . Фононы, принимающие уча-

стие в переходах электрона с данным k , должны удовлетворять условию

$$\varepsilon(k + f) = \varepsilon(k) \pm \hbar\omega(f),$$

т. е. лежать на поверхности в импульсном пространстве фононов.

Поэтому число фононов, принимающих участие в данном переходе, пропорционально элементу этой поверхности, т. е. величине $|f|df$. При низких температурах возбуждены колебания малых частот, при которых

$$|f| \sim \omega = \left| \frac{\varepsilon' - \varepsilon_1}{\hbar} \right| = \frac{kT|x' - x_1|}{\hbar}.$$

Окончательно

$$df_x df_y df_z \sim |f| df d\Omega \sim (kT)^2 |x' - x_1|^2 dx' d\Omega.$$

Вероятности перехода $A_{k_1 k'}$ и $B_{k_1 k''}$ при малых частотах фононов пропорциональны, как известно, частоте, т. е.

$$A_{k_1 k'} = \omega A_{k_1 k'}^0 = \frac{kT}{\hbar} |x' - x_1| A_{k_1 k'}^0, \quad B_{k_1 k''} = \frac{kT}{\hbar} |x'' - x_1| B_{k_1 k''}^0.$$

В (6) вместо N подставляем планковскую функцию распределения

$$N = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{1}{e^{|x' - x_1|/kT} + 1}.$$

Вместо n подставляем $n + \delta n$, где n — фермиевская функция распределения $n = [e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1]^{-1}$, δn — малая функция, которую положим равной $\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \varphi(x, \Omega)$, где $\varphi(x, \Omega)$ — некоторая функция.

Ввиду малости δn оставляем только члены, содержащие δn линейно. Учтя все это, выражение (6) переписываем в виде [4]

$$q(kT)^2 \int A_{k_1 k'}^0 \Delta' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x', \Omega')}{(e^{x'} + 1)(e^{-x_1} + 1)(e^{|x' - x_1|} - 1)} (x' - x)^2 dx' d\Omega' + \\ + (kT)^2 q \int B_{k_1 k''}^0 \Delta'' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x'', \Omega'')}{(e^{-x''} + 1)(e^{x_1} + 1)(e^{|x'' - x_1|} - 1)} (x'' - x)^2 dx'' d\Omega'', \quad (7)$$

где q — численный множитель (в него входит коэффициент пропорциональности между частотой и волновым вектором и т. п.). В первом интеграле $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$, во втором $\varepsilon'' = \varepsilon + \hbar\omega$. Так как волновые векторы фононов при низких температурах значительно меньше квазиимпульсов электронов, т. е. $|f| \ll |k|$, то углы Ω' (Ω'') и Ω_1 отличаются друг от друга на очень малую величину. Поэтому $\varphi(x', \Omega')$ можно разложить в ряд по степеням $\Omega' - \Omega_1$:

$$\varphi(x', \Omega') = \varphi(x', \Omega_1) + \frac{\partial \varphi(x', \Omega_1)}{\partial \Omega} (\Omega' - \Omega_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x', \Omega_1)}{\partial \Omega^2} (\Omega' - \Omega_1)^2.$$

Разлагать в ряд по энергиям, как известно, нельзя, так как хотя $\hbar \omega \ll \varepsilon$, однако $\varphi(x, \Omega)$ — быстро меняющаяся функция энергии. $\Omega' - \Omega_1$ пропорционально волновому вектору фонона

$$\Omega' - \Omega_1 \sim |f| \sim \omega = kT \frac{|x' - x_1|}{\hbar}.$$

При интегрировании по углам (азимуту) член, содержащий $\Omega' - \Omega_1 \sim f$, выпадет (в предположении шаровой симметрии) и остается член, содержащий квадрат волнового вектора. Теперь (7) переходит в

$$\begin{aligned} q_1 (kT)^2 \left\{ \int A_{k_1, k}^0 \Delta' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x', \Omega_1)}{(e^{x'} + 1)(e^{-x_1} + 1)(e^{|x' - x_1|} - 1)} (x' - x_1)^2 dx' d\Omega' + \right. \\ \left. + \int B_{k_1, l}^0 \Delta'' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x'', \Omega_1)}{(e^{-x''} + 1)(e^{x_1} + 1)(e^{|x'' - x_1|} - 1)} (x'' - x_1)^2 dx'' d\Omega'' \right\} + \\ + q_2 (kT)^4 \left\{ \int A_{k_1, k}^0 \Delta' \frac{\frac{\partial^2 \varphi(x', \Omega_1)}{\partial \Omega^2} (x' - x_1)^4}{(e^{x'} + 1)(e^{-x_1} + 1)(e^{|x' - x_1|} - 1)} dx' d\Omega' + \right. \\ \left. + \int B_{k_1, l}^0 \Delta'' \frac{\frac{\partial^2 \varphi(x'', \Omega_1)}{\partial \Omega^2} (x'' - x_1)^4 dx'' d\Omega''}{(e^{-x''} + 1)(e^{x_1} + 1)(e^{|x'' - x_1|} - 1)} \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где q_1, q_2 — численные множители.

Это выражение можно записать так:

$$(kT)^2 L_1(\varphi) + (kT)^4 L_2(\varphi). \quad (9)$$

Здесь L_1 — столкновительный оператор, заключенный в первых фигурных скобках (8), L_2 — во вторых. Выражение (8) нужно приравнять теперь изменению функции распределения под влиянием градиента температуры, т. е.

$$- \frac{\partial n_1}{\partial z} v_z k \frac{dT}{dz} x_1.$$

Для функции φ получаем уравнение

$$- \frac{\partial n_1}{\partial z} v_z k \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\varphi) + (kT)^4 L_2(\varphi). \quad (10)$$

В L_1 учитываются только те переходы, при которых направ.

ление квазипульса не меняется (т. е. переходы внутри конуса в фазовом пространстве электронов). В L_2 входят переходы, при которых квазипульс меняет направление. Переходов первого рода недостаточно для того, чтобы установить равновесие при наличии градиента температуры. Чтобы показать это, проинтегрируем обе части уравнения (10) по энергии (т. е. по конусу в фазовом пространстве электронов). Помня, что

$$d\varepsilon = dxkT, \quad \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \frac{1}{kT},$$

имеем

$$k \frac{dT}{dz} \int v_z \frac{e^{x_1}}{(1+e^{x_1})^2} \Delta_1 dx_1 = (kT)^3 \int L_1(\varphi) \Delta_1 dx_1 + (kT)^5 \int L_2(\varphi) \Delta_1 dx_1.$$

Но $\int L_1(\varphi) \Delta_1 dx_1 = 0$, так как число электронов в конусе не может измениться вследствие переходов, при которых электрон остается в том же конусе¹.

Член же с dT/dz не равен нулю:

$$\begin{aligned} \int x_1 v_z \Delta_1 \frac{e^{x_1}}{(1+e^{x_1})^2} dx_1 &= \\ &= \int \frac{x_1 v_z e^{x_1}}{(1+e^{x_1})^2} \left\{ (v_z \Delta)_{z=\mu} + xkT \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} \right\} dx_1 = \\ &= kT \int \frac{x_1^2 e^{x_1}}{(1+e^{x_1})^2} dx_1 \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, градиент температуры меняет число электронов с данным направлением квазипульса, в то время как столкновения с фононами, входящие в L_1 , не меняют его. Поэтому необходимо рассмотреть также и переходы с изменением направления квазипульса, хотя они происходят гораздо медленнее, чем переходы, при которых это направление сохраняется.

¹ В самом деле,

$$\begin{aligned} I &= \int \Delta_1 L_1(\varphi) dx_1 = \\ &= \int \Delta_1 \Delta' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x', \Omega_1)}{(e^{-x_1} + 1)(e^{x'} + 1)(e^{|x' - x_1|} + 1)} A_{k,k}^0 dx' dx_1 (x' - x_1)^2 + \\ &\quad + \int \Delta_1 \Delta'' \frac{\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x'', \Omega_1)}{(e^{x_1} + 1)(e^{-x''} + 1)(e^{|x'' - x_1|} - 1)} (x'' - x_1)^2 dx'' dx_1. \end{aligned}$$

При перемене местами x_1 и x' (x'' и x_1) I меняет знак, оставаясь равным самому себе, т. е. равен нулю (при такой замене $A_{k,k}^0$ переходит в $B_{k,k}^0$).

Для решения уравнения (10) ищем функцию $\varphi(x, \Omega)$ в виде суммы функции только от углов в импульсном пространстве и функции от углов и энергии (т. е. от x и Ω):

$$\varphi = \beta(\Omega) + \gamma(x, \Omega).$$

При этом предположим, что $\gamma \ll \beta$, так что будем зачеркивать γ рядом с β . В L_1 β не войдет, ибо там содержится разность

$$\varphi(x_1, \Omega_1) - \varphi(x', \Omega_1) = \gamma(x_1, \Omega_1) - \gamma(x', \Omega_1).$$

В L_2 войдет $\gamma + \beta$, но так как мы полагаем $\gamma \ll \beta$, то оставляем только β . Уравнение (10) переписется так:

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} k x_1 v_z \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\gamma) + (kT)^4 L_2(\beta). \quad (11)$$

Для решения этого уравнения проинтегрируем его по ε (т. е. по конусу импульсного пространства). Интеграл с L_1 при таком интегрировании, как мы видели, исчезает и остается:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} v_z \Delta \right]_{\varepsilon=\mu} \frac{dT}{dz} k^2 T \int x_1^2 \frac{e^{x_1}}{(1 + e^{x_1})^2} dx_1 = (kT)^5 \int L_2(\beta) \Delta_1 dx_1.$$

Из этого уравнения следует, что $\beta(\Omega)$ обратно пропорциональна температуре в четвертой степени, т. е.

$$\beta(\Omega) = \frac{\beta_1(\Omega)}{T^4} \frac{dT}{dz}.$$

Для определения $\gamma(x, \Omega)$ имеем теперь уравнение

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_z x_1 k \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\gamma) + k^4 L_2(\beta_1) \frac{dT}{dz} \quad (12)$$

или

$$\frac{e^{x_1}}{(1 + e^{x_1})^2} \frac{k x_1}{kT} \frac{dT}{dz} v_z = (kT^2) L_1(\gamma_1) + k^4 L_2(\beta_1) \frac{dT}{dz}. \quad (12a)$$

Отсюда можно заключить, что $\gamma(x, \Omega)$ состоит из двух функций, из которых одна пропорциональна $1/T^3$, другая $1/T^2$. Так как $\beta \sim 1/T^4$, то при низких температурах β действительно больше γ . В дальнейшем нам потребуется еще только выражение для электрического тока. Он получается из β в отличие от теплового потока уже в первом приближении (т. е. заменяя $v_z \Delta$ на $(v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu}$). Поэтому γ нам не потребуется.

Итак, при наличии градиента температуры мы получаем δn в виде

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\beta_1(\Omega)}{T^4} \frac{dT}{dz}.$$

Полное отклонение функции распределения от равновесного значения при наличии градиента температуры и электрического поля будет²

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\beta_1(\Omega)}{T^4} \frac{dT}{dz}.$$

α — функция углов, отличная от β_1 . Найдем ток:

$$\begin{aligned} i &= -2e \int v_z \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\beta_1(\Omega)}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} \right] \Delta d\varepsilon d\Omega = \\ &= \frac{dT}{dz} 2e \int v_z \frac{e^x \Delta}{(1+e^x)^2} \frac{\beta_1(\Omega)}{T^4} dx d\Omega + \\ &+ \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} 2 \int e v_z \frac{e^x \Delta}{(1+e^x)^2} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} dx \Delta d\Omega = \\ &= \frac{1}{T^4} 2e (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \beta_1(\Omega) dx d\Omega + \\ &+ \frac{1}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} 2e (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \alpha(\Omega) dx d\Omega = \\ &= \frac{c_1}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{c_2}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz}, \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Отсюда следует, что $\alpha_{12} \sim 1/T^3$. Тепловой поток от члена $d(\varphi - \mu/e)/dT$ равен

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= \int (\varepsilon - \mu) v_z \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} d\varepsilon d\Omega \Delta = \\ &= -(kT) \int x \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \frac{dx d\Omega \alpha(\Omega)}{T^5} (v_z \Delta) = \\ &= -kT \int x \frac{e^x \alpha(\Omega)}{(1+e^x)^2 T^5} \left\{ (v_z \Delta)_{\varepsilon=\mu} + x kT \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon=\mu} \right\} dx d\Omega = \\ &= -\frac{(kT)^2}{T^5} \int x^2 \frac{e^x \alpha(\Omega)}{(1+e^x)^2} dx d\Omega = -\frac{\text{const}!}{T^3}, \end{aligned}$$

т. е. $\alpha_{21} \sim 1/T^3$, как и α_{12} . При наличии электрического поля функция распределения состоит из двух членов [5]:

$$\left[\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\alpha(\Omega)}{T^5} + \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{g(x\Omega)}{T^3} \right] \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz},$$

² Второй член найден Блохом.

где $g(x, \Omega)$ — функция энергии и углов, четная по x . При вычислении потока тепла следует в обоих членах брать второе приближение, ввиду чего тепловые потоки от α и g будут относиться друг к другу, как $1/T^2$. При низких температурах поэтому можно член с g не рассматривать (так же как это делается при вычислении электропроводности).

Положив теперь ток i равным нулю, находим производную от термоэлектродвижущей силы по температуре

$$\frac{c_1}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{c_2}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} = 0.$$

Таким образом, при низких температурах производная от термоэлектродвижущей силы по температуре пропорциональна T , как и при высоких температурах. В силу соотношений (5) коэффициент Томсона $M \sim T$, а тепло Пельтье должно быть пропорционально T^2 . Если обозначить $d(\varphi - \mu/e)/dT$ через E , то при низких температурах отношение E/T должно быть постоянным. Имеющиеся экспериментальные данные относительно термоэлектродвижущих сил чистых металлов (наличие примесей вносит сильные осложнения) при низких температурах [6] подтверждают этот вывод при температурах больше 5°K (для Sn, Ag, Pt).

До сих пор при рассмотрении термоэлектрических явлений мы учитывали только влияние тепловых колебаний решетки. Однако как электрическое сопротивление, так и термоэлектрические эффекты обуславливаются еще примесями (остаточное сопротивление) и взаимодействием электронов. Действием этих двух факторов пренебрегать при низких температурах нельзя, так как величина остаточного сопротивления или сопротивления, вызванного взаимодействием электронов, при очень низких температурах больше сопротивления, вызванного колебаниями решетки. При рассмотрении влияния на термоэлектродвижущие силы примесей (остаточного сопротивления) оказывается, что коэффициент пропорциональности в соотношении $E \sim T$ дважды претерпевает изменения: первый раз, когда сравниваются электрические сопротивления (от примесей и от колебания решетки), и второй раз — при более низких температурах, когда сравниваются тепловые сопротивления от примесей и от колебаний решетки. (В то время как отношение электрических сопротивлений пропорционально T^5 , отношение тепловых сопротивлений пропорционально T^3 , откуда видно, что тепловые сопротивления сравниваются при более низких температурах, чем электрические.)

Те же результаты получаются и при рассмотрении взаимодействия электронов, т. е. соотношение $E \sim T$ справедливо только в тех областях температур, где одно из сопротивлений (электронное или обычное) больше другого. Если остаточное сопротивление сравнимо с величиной электронного сопротивления, соотношение $E \sim T$ перестает выполняться.

При измерениях термоэлектродвижущей силы пользуются цепью из двух металлов с несовпадающими температурами, при которых происходит изменение коэффициента пропорциональности в соотношении $E \sim T$. Благодаря этому наблюдаемая картина термоэлектродвижущей силы отличается большой сложностью при температурах, когда сказывается влияние примесей и взаимодействия электронов.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. А. Bethe. Handbuch der Physik, Bd. 34, Teil 2, S. 579.
- [2] L. Onsager. Phys. Rev., 38, 2265, 1931; L. Nordheim. Ann. der Phys., 9, 626, 1931.
- [3] W. Kroll. Zs. Phys., 80, 50, 1933.
- [4] R. Peierls. Elektronentheorie der Metalle. Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften, 2, 264, 1932.
- [5] L. Nordheim. Ann. der Phys., 9, 648, 1932.
- [6] Borelius. Leiden Comm., N 217.

Совместно с А. АХИЕЗЕРОМ и И. ПОМЕРАНЧУКОМ

Nature, 138, 206, 1936

В недавней статье Эйлер и Кокель [1] вычислили эффективное сечение для рассеяния света на свете. Вычисления были проведены для случая, когда малы частоты ($\hbar\omega \ll mc^2$), взятые в системе отсчета, где суммарный импульс сталкивающихся квантов равен нулю.

Мы рассчитали эффективное сечение в противоположном случае больших частот ($\hbar\omega \gg mc^2$). Для полного сечения было получено выражение вида

$$\sigma = \alpha \alpha^4 \left(\frac{c}{\omega} \right)^2,$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$, с постоянной a , вычисление которой затруднительно. Согласно Эйлеру и Кокелю, σ при малых частотах пропорционально ω^6 . Поэтому σ принимает максимальное значение в области $\omega \sim mc^2$.

Вычислить зависимость дифференциального эффективного сечения от угла рассеяния также затруднительно. Мы нашли, что при малых углах поляризация световых квантов не меняется. Дифференциальное сечение для малых углов равно

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \ln^4 \theta d\theta,$$

где θ — угол рассеяния, а $d\theta$ — элемент телесного угла. Эта формула несправедлива для углов, существенно меньших, чем $mc^2/\hbar\omega$. В последнем случае вместо θ под знаком логарифма следует подставить $mc^2/\hbar\omega$.

Относительная точность формулы составляет $1/\ln\theta$. Эффективное сечение возрастает с уменьшением угла, однако не очень быстро. Поэтому нельзя утверждать, что эта область играет главную роль в интегральном сечении.

Детали вычислений будут опубликованы в другом месте¹.

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Euler, Kockel. Naturwiss., 23, 246, 1935.

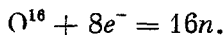
ДАН СССР, 17, 301, 1937;

Nature, 141, 333, 1938

В обычных условиях всякое вещество состоит, как известно, из ядер и электронов. Можно, однако, показать, что у тел достаточно большой массы это «обычное» состояние оказывается неустойчивым. Дело в том, что это состояние не допускает больших сжатий, поскольку при таком сжатии электроны образуют газ Ферми, обладающий огромным давлением, противодействующим сжатию. Между тем легко видеть, что вещество может находиться и в другом состоянии, способном к гораздо большему сжатию. Это состояние, в котором все ядра и электроны превратились в нейтроны. Даже если мы предположим, что нейтроны отталкиваются друг от друга, их отталкивание может сказаться лишь при плотностях порядка ядерных плотностей (10^{14} г/см³), а давление газа Ферми, составленного из нейтронов, ввиду их гораздо большей массы во много раз меньше давления электронного газа.

Поэтому, несмотря на то, что нейтронное состояние материи при обычных условиях энергетически невыгодно, поскольку реакция образования нейтронов из ядер и электронов сильно эндотермична, оно должно стать устойчивым, если масса тела настолько велика, что выгадываемая при переходе в нейтронное состояние гравитационная энергия исчерпывает потерю энергии при образовании нейтронов.

Легко подсчитать величину той критической массы тела, при которой нейтронное состояние вещества будет устойчивым. Для этого прежде всего вычислим энергию, необходимую для образования одного нейтрона; рассмотрим, например, реакцию



Из дефектов масс легко получаем, что на образование одного нейтрона расходуется около 0,008 массовых единиц энергии, или $1,2 \cdot 10^{-5}$ эрг (7,5 Мэв). На грамм вещества расходуется $7 \cdot 10^{18}$ эрг/г.

Определим теперь выигрыш гравитационной энергии при переходе в нейтронную фазу. При этом гравитационной энергией обычного состояния вещества можно пренебречь по сравнению с гравитационной энергией нейтронной фазы, поскольку последняя во много раз более плотна. Произведем подсчет исходя из постоянной плотности 10^{14} г/см³. Для гравитационной энергии однородного шара массы M легко получаем

$$3 \cdot 10^{-3} M^{3/2} \text{ эрг.}$$

Для того чтобы нейтронная фаза была устойчивой, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{-3} M^{3/2} &> 7 \cdot 10^{18} M, \\ M &> 10^{32} \text{ г} = 0,05 \odot. \end{aligned}$$

Вычисление с помощью теории газа Ферми для нейтронов дает для гравитационной энергии

$$4 \cdot 10^{-22} M^{7/2},$$

откуда получаем

$$M > 1,5 \cdot 10^{30} \text{ г} = 10^{-3} \odot.$$

При переходе в нейтронную фазу тела, масса которого больше критической, выделяется дополнительная энергия.

Изложенное представление о нейтронной фазе дает непосредственную возможность разрешить вопрос об источниках звездной энергии.

В самом деле, для того чтобы поддерживать солнечное излучение на постоянном уровне в течение двух миллиардов лет (предположительного времени существования Солнца согласно общей теории относительности), требовалось всего около $2,5 \cdot 10^{50}$ эрг, т. е. достаточно было конденсации всего около $3 \cdot 10^{-3} \odot$, т. е. порядка процента солнечной массы. Даже для очень яркой звезды β Ориона масса нейтронного ядра оказывается равной всего $0,1 \odot$.

Изложенное представление показывает, что всякая звезда в своей центральной части содержит нейтронное ядро, при непосредственном увеличении которого и выделяется энергия, поддерживающая звезду в накаленном состоянии.

Граничные условия на границах обеих фаз, как условия фазового равновесия, состоят из равенства химических потенциалов

обеих фаз. Можно рассчитывать, что исследование свойств такой системы сделает возможным построение полной теории звезд.

Что касается вопроса об образовании первоначального ядра, то, как было показано автором [1], такое образование для тел с массой больше $1,5 \odot$ неизбежно; что же касается звезд меньшей массы, то здесь еще надлежит выяснить условия, способствующие образованию такого ядра.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. D. L a n d a u. Phys. Zs. Sowjet., 1, 285, 1932 (Собр. трудов, № 8).

Совместно с Ю. Б. РУМЕРОМ

Phys. Zs. Sowjet., 11, 18, 1937

Рассмотрено поглощение коротких звуковых волн. Процесс рассматривается как результат столкновений между звуковыми и тепловыми квантами. Получается линейная зависимость коэффициента поглощения от частоты.

Будем представлять себе процесс поглощения звука в твердых телах как результат столкновений квантов звука с дебаевскими тепловыми квантами. Такой подход оправдан так или иначе только в том случае, когда энергия и импульс дебаевского кванта могут быть определены достаточно точно, т. е. когда при изменении на величину энергии и импульса поглощенного звукового кванта они попадают в область вне квантово-механической неопределенности. Другими словами: длина свободного пробега дебаевских квантов должна быть велика по сравнению с длиной волны звука. Таким образом, наша теория справедлива до тех пор, пока рассматриваются не слишком длинные звуковые волны.

При комнатных температурах граница лежит все еще очень высоко, при длинах волн порядка 10^{-6} см, т. е. далеко за пределами экспериментальных возможностей для звуковых волн. При низких температурах обстоятельства могут стать более благоприятными.

Опишем здесь кратко ход вычислений. Плоская звуковая волна с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω сталкивается с дебаевской тепловой волной (волновой вектор \mathbf{k}_1 и частота ω_1). До тех пор пока используется приближение классической теории упругости, справедлив принцип суперпозиции и не происходит

никакого обмена энергией и импульсом между обеими волнами. Однако, если принять во внимание следующие кубические члены в выражении для плотности энергии, понимаемые в дальнейшем как возмущение, становятся возможными переходы, при которых звуковые волны передают энергию и импульс дебаевским волнам, т. е. появляется конечное поглощение.

Для того чтобы в первом приближении, т. е. при учете процессов, в которых участвуют только три волны, звуковая волна могла передать энергию и импульс тепловой волне, должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} k_1 + k &= k_2, \\ \omega_1 + \omega &= \omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексами отмечены поглощающаяся и появившаяся в результате поглощения звуковые волны. Легко убедиться, что этим условиям нельзя удовлетворить в случае, если тепловая и звуковая волны распространяются с равными скоростями. В самом деле, из

$$k \geq k_2 - k_1, \quad \omega = \omega_2 - \omega_1$$

получается с учетом того, что $\omega/k = C$ (скорость звука),

$$\frac{\omega}{C'} \geq \frac{\omega_2}{C} - \frac{\omega_1}{C},$$

откуда следует $C' \leq C$. Поскольку в твердых телах скорость поперечного звука C_t меньше скорости продольного, мы приходим к выводу, что в первом приближении могут поглощаться только поперечные волны (продольными). Для того чтобы поглощение продольных волн также стало возможным, в процессе должно участвовать большее (чем три) число волн. Это значит, что следует привлечь еще и биквадратные члены в энергии и проводить вычисления вплоть до второго приближения теории возмущений включительно. Мы, однако, отвлечемся здесь от этого обстоятельства и ограничимся лишь вычислениями в первом приближении.

Энергия возмущения

Обозначим через $w_{\alpha\beta}$ компоненты тензора деформации. Тогда плотность упругой энергии с точностью до членов третьего порядка включительно может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= Aw_{\alpha\alpha}^2 + Bw_{\alpha\beta}^2 + P'w_{\alpha\alpha}^3 + Q'w_{\alpha\alpha}w_{\alpha\beta}^2 + R'w_{\alpha\beta}^3, \\ w_{\alpha\alpha} &= \text{Sp } w_{\alpha\beta}, \quad w_{\alpha\beta}^2 = \text{Sp } w_{\alpha\gamma}w_{\gamma\beta}, \quad w_{\alpha\beta}^3 = \text{Sp } w_{\alpha\gamma}w_{\gamma\delta}w_{\delta\beta}. \end{aligned}$$

Если зачеркнуть кубические члены, мы получим обычное выражение для упругой энергии, из которого легко усмотреть смысл коэффициентов A и B . Для скорости звука получается

$$C_t = \sqrt{B/\rho}, \quad C_l = \sqrt{2(A+B)/\rho}$$

(ρ — плотность).

Что касается коэффициентов P' , Q' , R' , то они характеризуют отклонения упругой среды от закона Гука. Так как мы учитываем в наших вычислениях кубические члены, тензор деформации следует определять более точно, чем это делается в обычной теории упругости.

При смещении u_i точка P переходит в точку P' . При этом

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$$

и соответственно квадрат элемента длины

$$ds'^2 = ds^2 + 2w_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

где $w_{\alpha\beta}$ по определению представляют собой тензор деформации. Вычисление дает

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \delta_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_n}{\partial x_\beta} \right\}.$$

Этот тензор отличается от классического тензора деформации третьим членом в фигурных скобках. Учитывая это обстоятельство и ограничиваясь в выражении для упругой энергии членами третьего порядка по производным от смещений, получим следующее выражение для плотности энергии:

$$W = \{Au_{\alpha\alpha}^2 + Bu_{\alpha\beta}^2\} + \{Pu_{\alpha\alpha}^3 + Qu_{\alpha\alpha}u_{\alpha\beta}^2 + Ru_{\alpha\beta}^3 + Au_{\alpha\alpha} \cdot v_{\alpha\beta}^2 + \\ + Bu_{\alpha\beta}v_{\beta\gamma}v_{\gamma\alpha}\},$$

где

$$v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right).$$

Члены во вторых фигурных скобках мы будем рассматривать как возмущение, которое приводит к обмену энергией и импульсом между распространяющимися в упругой среде волнами.

Вероятность перехода

Разложим тепловое движение на дебаевские гармонические волны

$$u(\mathbf{r}) = \sum u(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r});$$

$$u(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) = e_\alpha (a_\alpha e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} + a_\alpha^* e^{-i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}}),$$

где вектор e_α обозначает направление поляризации, a_α — амплитуду, \mathbf{k}_α — волновой вектор соответствующей волны. Обозначим через N_α число собственных колебаний и рассмотрим некоторое начальное состояние A , в котором тепловые волны представлены числами N_1, N_2 , а звуковая волна — числом N , и конечное состояние F с числами $N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1$, соответствующее поглощению звуковой волны. Задача состоит в вычислении вероятности такого перехода.

Для этой цели положим¹

$$u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^{(1)} + u_{\alpha\beta}^{(2)} + u_{\alpha\beta},$$

$$v_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}^{(1)} + v_{\alpha\beta}^{(2)} + v_{\alpha\beta},$$

где оба индекса относятся к тепловым волнам. Тогда для энергии возмущения получается выражение

$$\begin{aligned} W = & 6R u_{\alpha\alpha}^{(1)} u_{\alpha\alpha}^{(2)} u_{\alpha\alpha} + 2Q (u_{\alpha\alpha}^{(1)} u_{\alpha\beta}^{(2)} u_{\alpha\beta} + u_{\alpha\alpha} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha\beta}^{(2)} + \\ & + u_{\alpha\alpha}^{(2)} u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha\beta}) + 6R u_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\beta\gamma}^{(2)} u_{\gamma\alpha} + 2A (u_{\alpha\alpha}^{(1)} v_{\alpha\beta}^{(2)} v_{\alpha\beta} + u_{\alpha\alpha} v_{\alpha\beta}^{(1)} v_{\alpha\beta}^{(2)} + \\ & + u_{\alpha\alpha}^{(2)} v_{\alpha\beta}^{(1)} v_{\alpha\beta}) + 2B (u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma}^{(1)} v_{\gamma\alpha}^{(2)} + u_{\alpha\beta}^{(1)} v_{\beta\gamma}^{(2)} v_{\gamma\alpha} + u_{\alpha\beta}^{(2)} v_{\beta\gamma}^{(1)} v_{\gamma\alpha}). \end{aligned}$$

Для вычисления вероятности интересующего нас перехода мы проквантуем всю систему волн и определим соответствующий матричный элемент энергии возмущения.

Матричные элементы амплитуд смещений известны из теории гармонического осциллятора:

$$(N | a_\alpha^* | N - 1) = \sqrt{\frac{\hbar N}{2m\omega_\alpha}} e^{i\omega_\alpha t},$$

$$(N - 1 | a_\alpha | N) = \sqrt{\frac{\hbar N}{2m\omega_\alpha}} e^{-i\omega_\alpha t},$$

где m означает массу объема V .

¹ Собственно говоря, мы должны были бы написать $u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^{(1)} + u_{\alpha\beta}^{(2)} + u_{\alpha\beta}^{(3)}$, однако в дальнейшем мы сэкономим на индексе (3) для звуковой волны.

Для матричных элементов компонент деформации и вращения путем дифференцирования получаем соответственно

$$(N-1|u_{\alpha\beta}|N) = \frac{i}{2} (e^{\alpha}k^{\beta} + e^{\beta}k^{\alpha})(N-1|a|N),$$

$$(N-1|v_{\alpha\beta}|N) = \frac{i}{2} (e^{\alpha}k^{\beta} - e^{\beta}k^{\alpha})(N-1|a|N),$$

где через e^{α} , k^{α} обозначены компоненты векторов \mathbf{e} и \mathbf{k} , соответствующие осям x , y и z .

Для продольных волн $\mathbf{e} \parallel \mathbf{k}$ и $(N|v_{\alpha\beta}|N-1) = 0$. Для поперечных волн из-за $\mathbf{e}\mathbf{k} = 0$ исчезает матричный элемент $(N|u_{\alpha\alpha}|N-1)$. Таким образом, при вычислении интересующего нас матричного элемента достаточно рассмотреть только следующие члены в плотности энергии возмущения:

$$W = 2Q \{u_{\alpha\alpha}^{(1)}u_{\alpha\beta}^{(2)}u_{\alpha\beta} + u_{\alpha\alpha}^{(2)}u_{\alpha\beta}^{(1)}u_{\alpha\beta}\} + 6Ru_{\alpha\beta}^{(1)}u_{\beta\gamma}^{(2)}u_{\gamma\alpha}.$$

Вычислим теперь три выражения:

$$q_1 = \frac{1}{8} (e_1^{\alpha}k_1^{\alpha} + e_1^{\alpha}k_1^{\alpha})(e_2^{\alpha}k_2^{\beta} + e_2^{\beta}k_2^{\alpha})(e^{\alpha}k^{\beta} + e^{\beta}k^{\alpha}),$$

$$q_2 = \frac{1}{8} (e_2^{\alpha}k_2^{\alpha} + e_2^{\alpha}k_2^{\alpha})(e_1^{\beta}k_1^{\beta} + e_1^{\beta}k_1^{\alpha})(e^{\alpha}k^{\beta} + e^{\beta}k^{\alpha}),$$

$$r = \frac{1}{8} (e_1^{\alpha}k_1^{\beta} + e_1^{\beta}k_1^{\alpha})(e_2^{\beta}k_2^{\gamma} + e_2^{\gamma}k_2^{\beta})(e^{\gamma}k^{\alpha} + e^{\alpha}k^{\gamma}),$$

где

$$\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{e} \perp \mathbf{k}.$$

Находим

$$q_1 = \frac{k_1}{k_2} (\mathbf{k}_2\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{e}), \quad q_2 = \frac{k_2}{k_1} (\mathbf{k}_1\mathbf{k})(\mathbf{k}_1\mathbf{e}),$$

$$r = \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2k_1k_2} \{(\mathbf{k}_1\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{e}) + (\mathbf{k}_2\mathbf{k})(\mathbf{k}_1\mathbf{e})\}.$$

Поскольку мы считаем волновое число k звуковой волны очень малым по сравнению с волновыми числами тепловых волн, можно приближенно положить

$$\mathbf{k}_1 \approx \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{e}_1 \approx \mathbf{e}_2,$$

откуда получается

$$q_1 \approx q_2 \approx r \approx (\mathbf{k}_1\mathbf{k})(\mathbf{k}_1\mathbf{e}).$$

Энергия возмущения приобретает вид

$$W = i [2Q (q_1 + q_2) + 6R\Gamma] u^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{r}) u^{(2)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{r}) u(\mathbf{k}, \mathbf{r}),$$

и искомый матричный элемент получается в форме

$$(N_1 N_2 N | W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) | N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1) = \\ = -i(4Q + 6R)(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}) (\mathbf{k}_1 \mathbf{e}) \sqrt{\frac{\hbar N_1}{2m\omega_1}} \sqrt{\frac{\hbar(N_2 + 1)}{2m\omega_2}} \sqrt{\frac{\hbar N}{2m\omega}} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k} - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}}.$$

Матричный элемент энергии H находится при помощи интегрирования по всему координатному пространству. Он отличен от нуля, только если

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k} - \mathbf{k}_2 = 0,$$

т. е. если выполняется закон сохранения импульса. Интегрирование дает

$$(N_1 N_2 N | H | N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1) = \\ = -i(4Q + 6R)(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}) (\mathbf{k}_1 \mathbf{e}) \sqrt{\frac{\hbar N_1}{2m\omega_1}} \sqrt{\frac{\hbar(N_2 + 1)}{2m\omega_2}} \sqrt{\frac{\hbar N}{2m\omega}} V.$$

Обозначим через $a(N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1)$ амплитуду вероятности для конечного состояния. Теория возмущения дает для нее общую формулу

$$|a(N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1)|^2 = \\ = \frac{2\pi}{\hbar^2} |(N_1 N_2 N | H | N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1)|^2 \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2).$$

Если обозначить через ρ_1 число состояний, в которых \mathbf{k} лежит в элементе телесного угла $d\Omega$, а его величина заключена в пределах между k_1 и $k_1 + dk_1$, то, как известно,

$$\rho_1 dk_1 d\Omega = V \frac{k_1^2 dk_1 d\Omega}{(2\pi)^3}.$$

Искомая полная вероятность составляет, таким образом,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int |a(N_1 - 1, N_2 + 1, N - 1)|^2 \rho_1 V k_1^2 dk_1 d\Omega.$$

Для обратного процесса получаем соответственно

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int |a(N_1 + 1, N_2 - 1, N + 1)|^2 \rho_1 V k_1^2 dk_1 d\Omega.$$

Поглощение звука определяется разностью этих вероятностей, которая пропорциональна величине

$$N_1(N_2 + 1) - N_2(N_1 + 1) = N_1 - N_2 = \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1} \omega.$$

Вычисление полной вероятности поглощения приводит к выражению

$$\frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{V^3}{(2\pi)^3} \frac{2\hbar^3}{8m^3} (4Q + 6R)^2 \int \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k})^2 (\mathbf{k}_1\mathbf{e})^2}{\omega_1^2} \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1} \delta(\omega_1 + \omega - \omega_2) k_1^2 dk_1 d\Omega.$$

Обозначим стоящий здесь интеграл через J . Его можно вычислить следующим образом. Введем полярную систему координат и направим ось z по \mathbf{k} . Тогда

$$(\mathbf{k}_1\mathbf{k})^2 = k_1^2 k^2 \cos^2 \theta, \quad (\mathbf{k}_1\mathbf{e})^2 = k_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \\ \omega_1 + \omega - \omega_2 = \omega - (\omega_2 - \omega_1) = \omega - \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} k = \omega - k C_l \cos \theta,$$

и мы получаем

$$J = \pi \int \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta k^2 k_1^4}{\omega_1^2} \delta(\omega - k C_l \cos \theta) \frac{dN}{d\omega_1} k_1^2 dk_1 d \cos \theta = \\ = \pi k^2 \frac{\omega^3}{k^2 C_l^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 C_l^2}\right) \frac{1}{k C_l} \frac{1}{C_l^2} \int \omega_1^4 \frac{dN_1}{d\omega_1} d\omega_1.$$

Подставляя вместо N_1 его значение, даваемое формулой Планка

$$N_1 = \frac{1}{e^{\hbar\omega_1/\Theta} - 1} \quad (\Theta = kT),$$

получим для поглощения в единицу времени выражение

$$\frac{\pi}{80} \frac{(2Q + 6R)^2}{\rho^3} \left(\frac{C_t}{C_l}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{C_t}{C_l}\right)^2\right] \frac{\hbar k}{C_l^8} \frac{\Theta^7}{\hbar^4}.$$

Это выражение показывает, что в рассмотренном здесь случае поглощение пропорционально первой степени частоты в противоположность длинным волнам, где, как известно, должен выполняться закон ω^2 .

В наших рассуждениях все время предполагалось, что температура лежит ниже температуры Дебая, т. е. что дисперсионные эффекты не играют существенной роли. При более высоких температурах этого предполагать уже нельзя и количественные расчеты делаются невозможными. Легко, однако, убедиться, что в этом случае поглощение пропорционально первой степени температуры.

ЖЭТФ, 7, 19, 1937;

Phys. Zs. Sowjet., 11, 26, 1937

Исследуется с общей термодинамической точки зрения вопрос о непрерывных (без скрытой теплоты) фазовых переходах. При этом выясняется, что такие переходы могут иметь место при изменении симметрии решетки, а именно, переходы двух типов: 1) точки Кюри со скачком теплоемкости, лежащие на кривой на диаграмме p, T , 2) изолированные точки на p, T -диаграмме, которые определенным образом лежат на пересечении кривых обычных фазовых переходов.

Из всех переходов: фазовых, точек Кюри и т. п. — до настоящего времени в полной мере исследован только переход между жидкостью и газом; известно, что кривая равновесия жидкость — газ в переменных p, T имеет конец, обходя который можно осуществить непрерывный переход между жидкостью и газом. Что касается переходов между жидкостью и кристаллом или между различными кристаллическими модификациями, то вопрос о них еще не приведен к полной ясности. В ряде случаев говорят о переходах, связанных с вращением молекул; между тем совершенно неясно, каким образом вращение может привести к фазовому переходу и, в частности, к скачку теплоемкости.

Приходится встречаться даже со странным утверждением о том, что между жидкостями и кристаллами вообще нет принципиальной разницы и что между ними возможны непрерывные переходы. Между тем жидкости принципиально отличаются от кристаллов тем, что они изотропны в отличие от анизотропных кристаллов. Всякий переход кристалла в жидкость или в кристаллы другой симметрии связан с исчезновением или появлением некоторых элементов симметрии. Но элементы симметрии всегда либо присутствуют, либо отсутствуют; никакого промежуточного случая

не может быть. Поэтому и абсолютно невозможны непрерывные (в том смысле, как непрерывны переходы между жидкостью и газом) переходы, связанные с изменением симметрии тела.

До последнего времени отсутствовала точная формулировка для самого понятия кристаллической решетки. Лишь совсем недавно Бете и Пайерлс подчеркнули роль корреляции на бесконечности в кристаллической решетке.

Заметим, что основной интерес для исследования представляют, конечно, не обычные фазовые переходы между жидкостью и кристаллами или между различными модификациями, т. е. переходы, при которых скачком меняется состояние, в частности энергия тела, а такие переходы, при которых хотя симметрия и изменяется скачком, но состояние (в частности, энергия) тела изменяется непрерывно (подробнее см. ниже). Эти переходы мы будем называть непрерывными; подчеркиваем еще раз, что они не непрерывны в том смысле, как переход между жидкостью и газом. В каждый момент мы можем сказать, имеем ли мы тело той или иной симметрии.

Обычно подход к этому вопросу затрудняется использованием идеализированным представлением о решетке, в которой все атомы расположены на своих местах, и не учитывается тепловое движение.

Этих трудностей можно избежать, если пользоваться распределением вероятностей $\rho(x, y, z)$, причем $\rho(x, y, z) dx dy dz$ определяет вероятность того, чтобы в данном объеме тела находился атом. Если тело состоит из атомов различных родов, то можно было бы ввести несколько функций ρ_1, ρ_2, \dots , которые определяли бы вероятности для каждого из родов атомов. Вместо этого можно и в этом случае пользоваться только одной функцией распределения, определяя ее, например, как функцию, определяющую среднюю плотность заряда в каждой точке тела. В дальнейшем мы будем говорить просто о «плотности» $\rho(x, y, z)$, подразумевая под ней некоторым образом выбранную функцию, определяющую распределение атомов в рассматриваемом теле. Заметим, что такой метод, основанный на функции ρ , хорош еще тем, что он возможен и в квантовой механике.

Важным свойством функции ρ является ее симметрия, т. е. та группа преобразований координат, по отношению к которым ρ инвариантно. Эта же группа и определяет симметрию тела. Как известно, возможно всего 230 различных групп преобразований, т. е. типов симметрии. У изотропных тел (жидкостей), очевидно, $\rho = \text{const}$.

Как уже упоминалось, мы будем рассматривать здесь те переходы, при которых, несмотря на скачок симметрии, состояние тела меняется непрерывно. Другими словами, непрерывно меня-

ется плотность ρ . Легко сообразить, что такие переходы возможны, так как уже весьма малого изменения распределения атомов в решетке достаточно для того, чтобы изменить ее симметрию. Если, например, ρ изображается кривой вроде рис. 1, *a* (схематически в одном измерении) и некоторые из максимумов понижаются (рис. 1, *b*, *в*), то симметрия меняется как только начинается понижение (трансляционный период решетки увеличивается).

Пусть имеется кристалл с некоторой плотностью ρ_0 , обладающей определенной симметрией (о совокупности преобразований симметрии ρ_0 мы будем говорить как о группе ρ_0).

В точке перехода плотность начинает меняться и переходит в $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, где $\delta\rho$ мало по сравнению с ρ_0 . $\delta\rho$ обладает также некоторой симметрией (группа $\delta\rho$), но более низкой, чем ρ_0 (т. е. не все элементы симметрии $\delta\rho$ являются элементами симметрии ρ_0 ; группа $\delta\rho$ есть подгруппа группы ρ_0). Ту же симметрию имеет тогда $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, так как сумма двух функций имеет симметрию менее

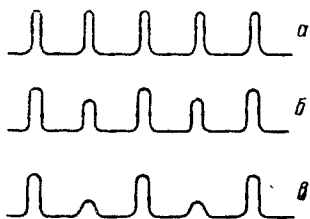


Рис. 1

симметричного слагаемого. Поэтому если бы $\delta\rho$ имело более высокую симметрию, чем ρ_0 , то $\rho_0 + \delta\rho$ имело бы ту же симметрию что и ρ_0 , так что никакого изменения симметрии тела не произошло бы.

Элементы симметрии из группы ρ_0 , которые не входят в группу $\delta\rho$, преобразуют $\delta\rho$ в некоторую другую функцию. Как известно из теории групп, функцию $\delta\rho$ можно разбить на сумму функций в числе, равном числу элементов группы ρ_0 , таким образом, что при всяком преобразовании этой группы все эти функции преобразуются друг через друга, т. е. переходят в линейные комбинации других функций.

Матрицы этих линейных преобразований осуществляют, как говорят, «представление» группы ρ_0 . Далее все эти функции, на которые разбивается $\delta\rho$, можно разделить на группы, или «расы»; функции, входящие в эти группы, преобразуются опять-таки друг через друга. Таким образом, можно написать

$$\delta\rho = \sum_n \sum_i c_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}, \quad (1)$$

где n — номер расы, а i — номер функции в расе.

Каждая из рас функций может служить основанием для представления группы, которое осуществляется матрицами преобразова-

ний функций этой расы. Как известно, существует такое разбиение $\delta\rho$ на $\varphi_i^{(n)}$, при котором каждая раса содержит наименьшее возможное число функций (осуществляя, таким образом, «неприводимое представление»).

В (1) будет подразумеваться именно такое разбиение. Мы могли бы, конечно, просто написать $\delta\rho = \sum_n \sum_i \varphi_i^{(n)}$, поскольку

функции $\varphi_i^{(n)}$ заранее не определены, но для дальнейшего удобно представлять себе эти функции каким-нибудь образом нормированными.

Среди всех $\varphi_i^{(n)}$ всегда имеется одна функция (составляющая сама по себе «расу»), которая инвариантна по отношению ко всем преобразованиям группы ρ_0 . Эту функцию мы будем считать включенной в сумму $\rho_0 + \delta\rho$ в функцию ρ_0 , так что $\delta\rho$ такой функции не содержит.

Термодинамический потенциал Φ тела определяется плотностью ρ , т. е. зависит от вида функции ρ . Другими словами, Φ есть функционал от ρ :

$$\Phi = \Phi\{\rho_0 + \delta\rho\}.$$

Кроме того, Φ зависит, как от параметров, от температуры T и давления p тела. При данных T и p вид функции ρ определяется из условия, что Φ должно иметь минимум.

Разложим термодинамический потенциал $\Phi\{\rho_0 + \delta\rho\}$ в состоянии с плотностью $\rho_0 + \delta\rho$ в ряд по степеням $\delta\rho$ (разложение это, конечно, не обычный степенной ряд; отдельные члены разложения являются интегральными операторами от $\delta\rho$). Иначе говоря, у нас получится разложение по степеням $\varphi_i^{(n)}$ и $c_i^{(n)}$.

Можно убедиться в том, что члены первого порядка в этом разложении равны нулю. Потенциал Φ , как величина, характеризующая физические свойства тела, не должен меняться, очевидно, ни при каких движениях тела, т. е. должен быть инвариантен по отношению ко всем вообще возможным преобразованиям координат. Если какое-либо преобразование переводит ρ_0 в ρ'_0 и $\delta\rho$ в $\delta\rho'$, то

$$\Phi\{\rho_0 + \delta\rho\} = \Phi\{\rho'_0 + \delta\rho'\}.$$

Отсюда видно, что если рассматривать Φ как функционал только от $\delta\rho$, то Φ инвариантно только по отношению к тем преобразованиям, которые не меняют ρ_0 , т. е. к преобразованиям группы ρ_0 . Поскольку функции $\varphi_i^{(n)}$ при преобразованиях этой группы преобразуются друг через друга, можно считать, что под

влиянием этих преобразований преобразуются только коэффициенты $c_i^{(n)}$, так что выражение для Φ должно быть инвариантом по отношению к преобразованию этих коэффициентов. В частности, такими инвариантами соответствующих степеней являются коэффициенты разложения Φ по степеням $c_i^{(n)}$.

Как известно, из величин, преобразующихся согласно неприводимым представлениям, нельзя составить линейных инвариантов. Поэтому разложение начинается с членов второго порядка. Единственным инвариантом второго порядка, который можно составить из указанных величин, является положительно определенная квадратичная форма. При надлежащей нормировке она всегда может быть сведена к сумме квадратов.

Таким образом, начало разложения Φ можно записать в следующем виде:

$$\Phi\{\rho_0 + \delta\rho\} = \Phi\{\rho_0\} + \sum_n A^{(n)} \sum_i c_i^{(n)2}, \quad (2)$$

где коэффициенты $A^{(n)}$ зависят от функций $\varphi_i^{(n)}$, а также от параметров T и p .

Исследуем поведение этого выражения в плоскости p , T вблизи точки перехода. Эта точка характеризуется следующим образом. С одной стороны точки перехода (мы будем говорить о ней как о «верхней» стороне) тело описывается плотностью ρ_0 , т. е. устойчивому состоянию равновесия отвечает $\delta\rho = 0$. С другой же («нижней») стороны от точки перехода в состоянии равновесия появляется малая добавка $\delta\rho$. Это положение вещей можно, очевидно, описать так: выше точки перехода все величины $A^{(n)}$ в (2) принимают только положительные значения, и поэтому минимум второго члена в (2) достигается при всех $c_i^{(n)} = 0$, т. е. при $\delta\rho = 0$. Минимум при отличном от нуля $\delta\rho$ может возникнуть, лишь если по крайней мере одно из $A^{(n)}$ становится отрицательным. Обе области разделены точками, в которых данное $A^{(n)}$ положительно при всех φ , и лишь для одного определенного вида функций φ обращается в нуль. Физически возникает тогда именно та добавка

$$\delta\rho = \sum_i c_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

к ρ_0 , которая обращает $A^{(n)}$ в нуль и которая, в частности, преобразуется по представлению данного номера n . В дальнейшем мы рассматриваем именно это $\delta\rho$ с определенными функциями $\varphi_i^{(n)}$. В (2) все члены суммы, за исключением n -го, тождественно рав-

ны нулю, и мы напишем, опуская индекс n ,

$$\Phi = \Phi_0 + A \sum c_i^2 + \dots$$

Необходимое условие для существования точки непрерывного перехода имеет теперь вид

$$A(p, T) = 0. \quad (3)$$

Но для того чтобы действительно иметь здесь физически возможное устойчивое состояние, Φ как функция от c_i должна иметь в этой точке минимум при $c_i = 0$, т. е. члены третьего порядка должны тоже исчезать.

Возможны два случая.

I. Члены третьего порядка тождественно равны нулю (нет вообще инвариантов третьего порядка). Тогда для существования точки перехода необходимо и достаточно выполнение условия (3) и положительность членов четвертого порядка. Таким образом, в этом случае точки перехода лежат на кривой в плоскости p, T , определяющейся уравнением (3). Это есть случай точек Кюри.

Что такой случай действительно может иметь место, т. е. что инварианты третьего порядка могут тождественно отсутствовать, видно уже из следующего примера. Если исследуемая раса содержит всего одну функцию, то коэффициент c при определенных преобразованиях может менять свой знак. В этом случае, очевидно, отсутствуют все инварианты нечетных порядков.

Введем обозначение

$$\sum c_i^2 = \eta^2 \quad (4)$$

и

$$\frac{c_i}{\eta} = \gamma_i.$$

Тогда разложение Φ напишется в виде

$$\Phi = \Phi_0 + A\eta^2 + B(\gamma_i)\eta^4 + \dots,$$

где все коэффициенты — еще функции от p и T .

Поскольку член второго порядка не зависит от γ_i , значения γ_i могут быть получены путем нахождения минимума $B(\gamma_i)$. Находя эти значения и подставляя их в $B(\gamma_i)$, получим

$$\Phi = \Phi_0 + A\eta^2 + B\eta^4, \quad (5)$$

где $B = B(p, T)$ есть минимальное значение $B(\gamma_i)$.

Согласно сказанному выше,

$$B(p, T) > 0. \quad (6)$$

Выше точки Кюри $A > 0$; минимуму Φ соответствует $\eta = 0$, т. е. тело имеет симметрию ρ_0 . В точке Кюри $A = 0$, а ниже нее $A < 0$. Из минимальности Φ , т. е. из $\partial\Phi/\partial\eta = 0$, находим

$$A + 2B\eta^2 = 0,$$

или

$$\eta^2 = -\frac{A}{2B}. \quad (7)$$

При этом

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{A^2}{4B}.$$

Теплоемкость тела

$$c = -T \frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} = c_0 + \frac{T}{2B} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)^2. \quad (8)$$

Опущены члены, обращающиеся в точке Кюри в нуль. c_0 — теплоемкость тела с симметрией ρ_0 , т. е. выше точки Кюри. В силу

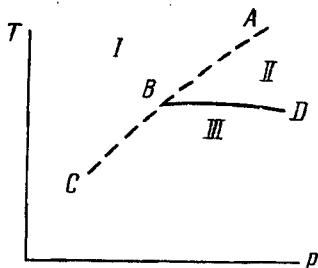


Рис. 2

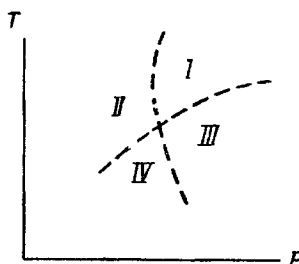


Рис. 3

(8) мы видим, что в точке Кюри $c > c_0$. Таким образом, в точке Кюри теплоемкость имеет скачок, причем теплоемкость увеличивается при переходе от более к менее симметричному телу (напомним, что тело менее симметрично, чем другое, если его группа преобразований симметрии есть подгруппа группы симметрии другого тела).

Как указывалось уже в начале рассмотрения этого случая, коэффициенты γ_i определяются из $B(\gamma_i)$, т. е. зависят от вида членов четвертого порядка. Но эти члены зависят еще и от p , T ; поэтому и γ_i зависят от p и T . Но величины γ_i определяют симметрию ρ_r , т. е. и симметрию кристалла. Поэтому может оказаться, что в разных участках линии точек Кюри происходит переход

от более симметричного кристалла (где $\delta\rho = 0$) в менее симметричные кристаллы различных симметрий (т. е. у которых $\delta\rho$ имеют различную симметрию).

В этом случае на диаграмме состояний имеется пересечение линии точек Кюри (кривая AC) с линией фазовых переходов (кривая BD , рис. 2); I есть наиболее симметричная фаза ($\delta\rho = 0$); вдоль кривых AB и BC она в точках Кюри переходит в менее симметричные фазы II и III , в которых $\delta\rho_{II} \neq 0$, $\delta\rho_{III} \neq 0$. Группы симметрии $\delta\rho_{II}$ и $\delta\rho_{III}$ являются подгруппами групп симметрии фазы I . Они, однако, не являются, вообще говоря, подгруппами друг друга. Поэтому разность $\delta\rho_{II} - \delta\rho_{III}$ не может обратиться в нуль; следовательно, между фазами II и III должна быть не линия Кюри, а линия фазовых переходов. В точке B все три фазы тождественны, вдоль линии AB тождественны фазы I и II ($\delta\rho_{II} = 0$), вдоль BC $\delta\rho_{III} = 0$.

Можно далее показать, что пересечение линий Кюри друг с другом может осуществиться только в точке типа, изображенного на рис. 3. Если I есть наиболее симметричная фаза, то фазы II и III обладают более низкими симметриями; их группы симметрии являются подгруппами группы симметрии фазы I . Фаза IV имеет симметрию еще более низкую, чем II и III . Ее группа симметрии является подгруппой одновременно группы симметрии фаз II и III .

Рассмотрим, наконец, те случаи, в которых члены четвертого порядка в разложении Φ тоже обращаются в нуль в точке перехода. Для этого необходимо, чтобы члены четвертого порядка содержали только один коэффициент, зависящий от p и T . В противном случае равенство нулю членов четвертого порядка вместе с условием $A(p, T) = 0$ дало бы больше чем два уравнения с двумя неизвестными (p и T), которые, вообще говоря, не имели бы решения. Необходимо, следовательно, чтобы был только один инвариант четвертого порядка (составленный из c_i), т. е. чтобы члены четвертого порядка были тождественно равны $B(p, T)\eta^4$ при любых c_i .

Если члены четвертого порядка равны нулю, то для устойчивости состояния (т. е. для того, чтобы Φ было минимально) необходимо, чтобы член пятого порядка был тождественно равен нулю, а член шестого порядка был положителен. Два условия $A = B = 0$ определяют тогда изолированную точку. Эта точка является λ -точкой, свойства которой были уже исследованы автором [1]. Там же указывалось, что в λ -точке ($B = 0$) линия точек Кюри ($B > 0$) переходит в линию фазовых переходов ($B < 0$).

Здесь мы рассмотрим дополнительно только пересечение линии точек Кюри с линией фазовых переходов в телах, являющихся смесью двух веществ. В этом случае оказывается, что теплоем-

кость не обращается в бесконечность, как у чистых веществ, а испытывает лишь конечный скачок.

Тот факт, что тело является смесью, не вносит ничего принципиально нового в наши рассуждения. Симметрия кристалла по-прежнему определяется плотностью ρ , и разложение Φ вблизи точки непрерывного перехода есть

$$\Phi = \Phi_0 + A\eta^2 + B\eta^4 + \dots,$$

однако Φ_0 , A , B зависят не только от p и T , но и от концентрации x смеси.

Докажем, что в точке перехода линии Кюри в линию фазовых переходов (мы будем называть такую точку и в этом случае λ -точкой) у смесей коэффициент B в разложении Φ не должен обращаться в нуль. Отсюда и будет следовать, что теплоемкость не обращается в этой точке в бесконечность (см. (8)).

Исследуем окрестность λ -точки. Выпишем сперва условия равновесия двух фаз на кривой переходов (безразлично, фазовых или непрерывных). Как известно, термодинамический потенциал Φ является величиной аддитивной и потому для смеси должен быть однородной функцией первого порядка от чисел частиц каждого рода. В частности, для смеси двух веществ $\Phi = Nf(n/N)$, где n и N — числа частиц обоого рода. Химические потенциалы каждого рода частиц

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = f - x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

(где $x = n/N$). Условиями равновесия является равенство химических потенциалов обеих фаз. В нашем случае с одной стороны точки перехода (там, где $\eta = 0$, т. е. в более симметричной фазе) $\Phi = \Phi_0$; с другой же стороны $\Phi = \Phi_0 + A\eta^2 + B\eta^4$. Если x_0 и x — концентрации обеих фаз, то условия равновесия

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

и

$$\Phi_0(x_0) - x_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} = \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Подставляя $\Phi = \Phi_0 + A\eta^2 + B\eta^4$, находим из первого условия

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \eta^2$$

($\partial A/\partial x$, вообще говоря, не равно нулю в точке перехода, и потому можно ограничиться членом с η^2) или

$$- \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0^2} (x - x_0) = \frac{\partial A}{\partial x} \eta^2, \quad (9)$$

где мы разложили $\partial\Phi_0/\partial x$ в ряд:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0} + (x - x_0) \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2} + \dots$$

Во втором условии с той же точностью полагаем

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \approx \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0}$$

и получаем

$$\Phi = \Phi_0(x_0) + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0}(x - x_0).$$

Подставляя сюда выражение для Φ , находим

$$A\eta^2 + B\eta^4 = \Phi_0(x_0) - \Phi_0(x) + (x - x_0) \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0}$$

и, разлагая $\Phi_0(x_0) - \Phi_0(x)$ в ряд,

$$A\eta^2 + B\eta^4 = -\frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}.$$

Если еще подставить $(x - x_0)$ из (9), то

$$A\eta^2 + B\eta^4 = \frac{(x - x_0)}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \eta^2$$

или

$$A + B\eta^2 = \frac{(x - x_0)}{2} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (10)$$

Взяв значение η^2 из (7), находим

$$A - (x - x_0) \frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

Подставляя же отсюда $(x - x_0) = A / (\partial A / \partial x)$ и $\eta^2 = -A/2B$ в (9), находим

$$\frac{\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}}{\frac{\partial A}{\partial x}} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{1}{2B}$$

или

$$B = \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2}{2 \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что в λ -точке B вовсе не обращается в нуль, а всегда $B > 0$. Последнее следует из (11) в силу того, что $\partial^2 \Phi_0 / \partial x_0^2 > 0$ согласно известным термодинамическим неравенствам для растворов. Далее, уравнение

$$A(x) + (x_0 - x) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

можно в принятом нами приближении написать в виде $A_\lambda(x_0) = 0$, т. е. точки фазовых переходов более симметричной фазы удовлетворяют тому же уравнению, что линия точек Кюри.

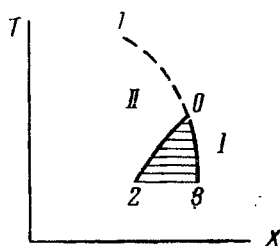


Рис. 4

Таким образом, окрестность точки перехода линии Кюри в линию фазовых переходов у растворов имеет вид, изображенный на рис. 4 (на осях координат концентрация и температура). Штриховая линия есть линия непрерывных переходов, т. е. линия Кюри. I есть более, а II — менее симметричная фаза. Линия 10 непрерывно переходит в линию 03; линия 02 от нее ответвляется. Линия 302 есть линия фазовых переходов; заштрихованная область 302 есть область расслоения на две фазы — I и II, концентрации которых определяются линиями 03 и 02.

II. Пусть теперь член третьего порядка в разложении Φ не равен тождественно нулю. Непрерывный переход возможен в этом случае только там, где члены второго и третьего порядков равны нулю. Первое из этих условий дает опять $A(p, T) = 0$.

Для того чтобы и второе могло быть выполнено, необходимо, чтобы был только один инвариант третьего порядка, т. е. чтобы члены третьего порядка содержали лишь один коэффициент, зависящий от p и T . В противном случае было бы слишком много уравнений, которые не могли бы быть одновременно выполнены.

Введем снова величины $\gamma_i = c_i/\eta$. Член третьего порядка должен тогда иметь вид

$$B(p, T) b(\gamma_i) \eta^3$$

(предполагается, что есть только один инвариант третьего порядка) и разложение

$$\Phi = \Phi_0 + A(p, T) \eta^2 + B(p, T) b(\gamma_i) \eta^3 + C(p, T, \gamma_i) \eta^4 + \dots \quad (12)$$

В точке непрерывного перехода

$$A = B = 0.$$

Точки непрерывного перехода, следовательно, в этом случае изолированные, т. е. нет линии точек Кюри. Поэтому подобные точки должны каким-то образом лежать на линиях фазовых переходов. Соответственно этому необходимо исследовать характер этих линий вблизи таких точек.

Вблизи точки непрерывного перехода исследуемого рода A и B близки к нулю (а $C > 0$). На кривых равновесия более симметричной и менее симметричной фаз их термодинамические потенциалы одинаковы, т. е. $\Phi = \Phi_0$ или

$$A\eta^2 + Bb\eta^3 + C\eta^4 = 0. \quad (13)$$

Кроме того, как и для всех возможных состояний, должно быть $\partial\Phi/\partial\eta = 0$, т. е.

$$\eta(2A + 3Bb\eta + 4C\eta^3) = 0. \quad (14)$$

Эти два уравнения должны иметь отличное от нуля общее решение (отличное от нуля, так как решение $\eta = 0$ означало бы, что в точках перехода $\delta\rho = 0$, т. е. была бы линия точек Кюри, что, как уже указывалось, невозможно). Легко видеть, что для этого необходимо, чтобы

$$B^2b^2 = 4AC, \quad (15)$$

$$\eta = -\frac{Bb}{2C}. \quad (16)$$

Можно было бы думать, что исследуемые точки непрерывного перехода просто лежат на кривой фазовых переходов вроде точки O на рис. 5. Это, однако, не так; мы сейчас покажем, что точка O должна лежать на пересечении нескольких кривых фазовых переходов.

Исследуем точки в окрестности точки O , но не лежащие на кривых фазовых переходов. В них (как во всяком устойчивом состоянии) $\partial\Phi/\partial\eta = 0$. Это уравнение (14) имеет решение $\eta = 0$ и, кроме того, решения остающегося квадратного уравнения.

Решение $\eta = 0$ соответствует точкам, изображающим состояние более симметричной фазы ($\delta\rho = 0$). В другой фазе η определяется из квадратного уравнения. Но квадратные уравнения имеют, вообще говоря, два решения. В точке O $A(p, T) = B(p, T) = 0$; в окрестности же точки O $B(p, T) = 0$ определяет

некоторую линию. На этой линии (14) имеет два решения противоположных знаков:

$$\eta = \pm \sqrt{-\frac{A}{2C}}. \quad (17)$$

Значит, и в окрестности точки O вблизи линии $B = 0$ (14) имеет решения разных знаков, почти равные друг другу по абсолютной величине (так как вблизи линии $B = 0$ B мало). Но с одной стороны линии B положительно; там устойчивому состоянию

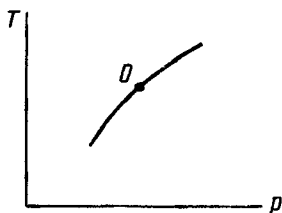


Рис. 5

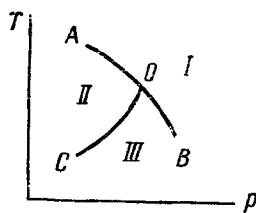


Рис. 6

соответствует отрицательное решение уравнения (14), иначе изменением знака η можно было бы уменьшить Φ , т. е. Φ не имело бы минимума. По тем же соображениям с другой стороны линии $B = 0$ (где $B < 0$) осуществляется другое решение уравнения (14). Следовательно, линия $B(p, T) = 0$ является тоже линией фазовых переходов, где η скачкообразно меняет знак.

Таким образом, окрестность точки O имеет вид, изображенный на рис. 6, т. е. в точке O оканчивается вторая линия фазовых переходов. Фаза I есть более симметричная фаза (в ней $\eta = 0$, $A > 0$). На линии фазовых переходов AB $A = 0$. Менее симметричные фазы II и III (где $A < 0$) имеют одинаковую симметрию (у них η отличаются только по знаку, что не влияет на симметрию ρ). На фазовой линии CO $B(p, T) = 0$. В точке O все три фазы делаются тождественными.

Определим теплоту перехода на кривых CO и AB . Для энтропии имеем

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{p, \eta} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_{p, T} \frac{d\eta}{dT}.$$

Но во всех устойчивых состояниях $\partial\Phi/\partial\eta = 0$. Поэтому

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{p, \eta}.$$

Подставляя (12), находим в окрестности точки O (т. е. для малых η)

$$S = S_0 - \frac{\partial A}{\partial T} \eta^2. \quad (18)$$

$S_0 = -\partial\Phi_0/\partial T$ есть энтропия фазы I. Членами высших порядков можно пренебречь, поскольку $\partial A/\partial T$ в отличие от A не обращается в нуль.

Найдем теплоту перехода на кривой AB . На ней $\eta = -Bb/2C$ (см. (16)), и теплота перехода из менее в более симметричную фазу есть

$$Q = T(S_0 - S) = \frac{\partial A}{\partial T} T \eta^2 = \frac{\partial A}{\partial T} \frac{Tb^2}{4C^2} B^2. \quad (19)$$

Вблизи точки O величина B есть линейная функция от расстояния от точки O по кривой (так как в самой точке $OB = 0$). Таким образом, на кривой AB вблизи точки O теплота перехода пропорциональна квадрату расстояния до точки O .

Для того чтобы найти Q на кривой OC вблизи O , учтем также и следующий член в энтропии S :

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{p, n} = S_0 - \frac{\partial A}{\partial T} \eta^2 - \frac{\partial B}{\partial T} b \eta^3. \quad (20)$$

Поскольку на кривой CO величина η одинакова по абсолютной величине в обеих фазах, то разность энтропий фаз II и III есть $2 b \eta^3 \partial B/\partial T$, где η определяется из (17). Теплота перехода

$$Q = 2 T \frac{\partial B}{\partial T} b \eta^3. \quad (21)$$

Из (21) и (17) видно, что Q пропорционально $(-A)^{3/2}$, т. е. пропорционально длине расстояния от точки O в степени $3/2$.

Наконец, можно показать, что при сложной структуре членов четвертого порядка могут появиться новые кривые фазовых переходов. Окрестность точки O выглядит тогда не как на рис. 6, а как на рис. 7. Фаза I имеет наиболее высокую симметрию. Фазы II и III имеют одинаковую симметрию; то же относится и к фазам IV и V. В точке O все фазы делаются тождественными — это и есть точка непрерывного перехода. В точке O две кривые фазовых переходов имеют общую касательную, а третья оканчивается. Здесь предположено, что в точке O касаются лишь две кривые фазовых переходов. В общем случае их может быть несколько.

В следующей работе будет показано, что в случае переходов между жидкостями (т. е. изотропными телами) и кристаллами члены третьего порядка не равны тождественно нулю. Поэтому

непрерывные переходы между жидкостями и кристаллами возможны только в изолированных точках типа рис. 6 и 7. В частности, невозможны линии точек Кюри.

Во всем предыдущем мы предполагали, что свойства симметрии кристаллов определяются симметрией функций средней плотности ρ . Но движущиеся в теле заряды (электроны) могут создать в кристалле также и среднюю плотность тока \mathbf{j} . Тогда свойства кристалла будут зависеть уже не только от симметрии плотности ρ , но и от симметрии \mathbf{j} . Заметим, что $\int \mathbf{j} dV$ по всему объему кристалла должен быть равен нулю.

В противном случае этот ток создавал бы магнитное поле и кристалл обладал бы некоторой магнитной энергией. Эта энергия росла бы при увеличении размеров кристалла весьма быстро, что было бы энергетически невыгодно.

В большинстве тел $\mathbf{j} = 0$; $\mathbf{j} \neq 0$, в частности, у ферромагнитных тел. У последних к тому же в каждом участке есть не равный нулю магнитный момент, т. е. интеграл $\int [\mathbf{r}\mathbf{j}] dV$ по элементарной ячейке отличен от нуля. Однако не всякое тело с $\mathbf{j} \neq 0$ ферромагнитно,

так как при $\mathbf{j} \neq 0$ интеграл $\int [\mathbf{r}\mathbf{j}] dV$ все же может быть равен нулю.

Если $\mathbf{j} = 0$, то свойства симметрии кристалла определяются плотностью ρ . Как известно, есть ограниченное число (230) возможных типов симметрии, т. е. пространственных групп. Если к тому же $\mathbf{j} \neq 0$, то классификация типов симметрии происходит по свойствам ρ и \mathbf{j} ; пространственных групп тогда возможно гораздо больше, чем 230.

Наличие $\mathbf{j} \neq 0$ (такие кристаллы можно назвать магнитными) не вносит ничего принципиально нового в предыдущие рассуждения о точках перехода. В точках перехода изменение симметрии определяется тогда $\delta\rho$ и $\delta\mathbf{j}$. По-прежнему возможны только рассмотренные выше типы точек перехода.

Остановимся несколько на переходах, связанных с возникновением (или исчезновением) \mathbf{j} , т. е. на переходах между магнитными и немагнитными кристаллами. Поскольку с одной стороны этих точек $\mathbf{j} = 0$, то $\delta\mathbf{j} = \mathbf{j}$. Как и ранее, мы рассмотрим только точки непрерывных переходов этого типа, т. е. точки, в которых $\delta\mathbf{j} = \mathbf{j} = 0$, а вблизи которых (с одной из сторон) \mathbf{j} мало. Вместо разложения термодинамического потенциала Φ по степеням $\delta\rho$ мы будем теперь иметь аналогичное разложение по степеням \mathbf{j} . Ввиду симметрии всех свойств тела по отношению к замене бу-

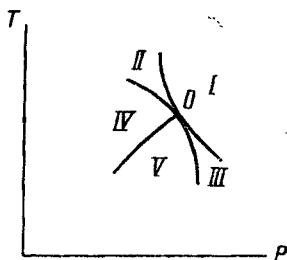


Рис. 7

дущего прошедшим, потенциал Φ , в частности, не может измениться при замене знака времени на обратный. Но при такой замене плотность ρ не изменяется, а ток \mathbf{j} меняет знак. Отсюда следует, что в разложении Φ по степеням \mathbf{j} все члены с нечетными степенями \mathbf{j} должны быть тождественно равны нулю. Это значит, что переходы, связанные с возникновением \mathbf{j} , всегда относятся к случаю I, т. е. возможны точки Кюри, образующие линию, а при соответствующих условиях возможны и λ -точки. Таковы точки Кюри у ферромагнитных тел. По-видимому, такой природы скачки теплоемкости у хлоридов Fe, Cr, Ni при низких температурах, а также λ -точка у MnO. Все эти вещества снизу от точки перехода обладают $\mathbf{j} \neq 0$, а в точке перехода \mathbf{j} обращается в нуль (и выше этой точки остается равным нулю).

Мы говорили до сих пор о переходах с изменением симметрии кристалла, но не говорили о том, какова может быть физическая природа тех изменений, которые при этом происходят. Атомы в кристалле обычно совершают малые колебания около положений равновесия, т. е. узлов решетки. Ввиду своей малости эти колебания не могут повлечь за собой изменения симметрии решетки. Это не относится, конечно, к скачкообразным переходам, когда атомы начинают колебаться вокруг новых положений равновесия.

Непрерывные переходы с изменением симметрии всегда связаны с изменением упорядоченности кристаллов, которое может происходить тогда, когда в решетке число мест, на которых могут находиться атомы данного рода, больше, чем число этих атомов. Существует одно определенное расположение атомов в решетке, которое является наиболее выгодным в энергетическом смысле. Оно и осуществляется при достаточно низких температурах. При более высоких температурах расположение атомов отличается от этого определенного расположения.

В качестве примера рассмотрим кристалл из двух родов атомов (бинарная смесь). Идеальным расположением является распределение атомов различного рода в узлах решетки в определенном порядке друг относительно друга (схематически это изображено на рис. 8). О таком кристалле говорят, что он вполне упорядочен. Но каждый атом может принципиально находиться в любом узле решетки, т. е. имеется больше возможных мест нахождения атомов данного рода, чем всего атомов этого рода. Поэтому кристалл может быть и не вполне упорядоченным, если некоторые атомы находятся на «чужих» местах, т. е. на местах, где во вполне упорядоченном кристалле должны были бы находиться атомы другого рода. Вероятность (функция плотности ρ) нахождения атомов одного из родов в узлах решетки во вполне упорядоченном кристалле можно изобразить схематически (в

одном измерении) кривой на рис. 9, а, где вероятность имеет резкие максимумы в каждом втором узле решетки. В не вполне упорядоченном кристалле появляется некоторая вероятность нахождения атомов данного рода и в остальных узлах («чужих») решетки (рис. 9, б).

Наконец, число атомов данного рода в решетке, находящихся на «чужих» местах, может сделаться равным числу атомов, находящихся на «своих» местах. Это значит, что вероятность нахождения атомов данного рода делается одинаковой во всех узлах

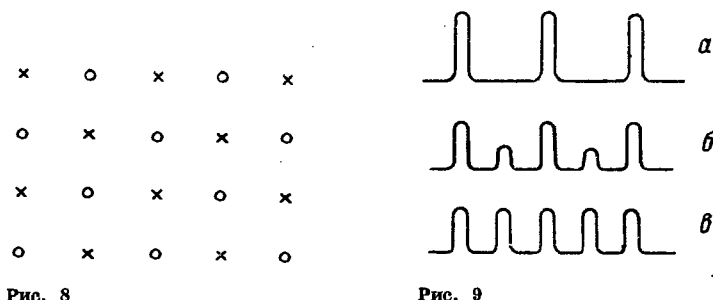


Рис. 8

Рис. 9

(рис. 9, в). Кристалл называется тогда неупорядоченным. Легко видеть, что в момент наступления неупорядоченности меняется симметрия кристалла (а именно, симметрия повышается). Это видно, например, на рис. 9, в — кривая в имеет по сравнению с кривыми а и б лишний трансляционный период, равный расстоянию между двумя соседними узлами решетки (кривые а и б имеют только период, равный удвоенному расстоянию между узлами).

Другим примером является кристалл NH_4Cl . Этот кристалл имеет решетку типа CsCl , причем в узлах находятся Cl и NH_4 . Группы NH_4 имеют форму тетраэдра и в кристалле NH_4Cl могут быть ориентированы в двух направлениях. Если все группы NH_4 направлены в одну сторону, кристалл вполне упорядочен; если некоторые из групп NH_4 направлены в другую сторону, кристалл не вполне упорядочен. Наконец, если числа групп NH_4 , направленных в обе стороны, одинаковы, то кристалл не упорядочен. При этом меняется его симметрия: упорядоченный кристалл имеет симметрию тетраэдра, а неупорядоченный — симметрию куба.

Можно ввести величину, «степень упорядоченности», которая характеризовала бы отклонение кристалла от упорядоченности; она имеет значение, равное 1 во вполне упорядоченном кристалле, уменьшается по мере отклонения кристалла от упорядоченности и делается равной нулю в неупорядоченном кристалле. В наших предыдущих рассуждениях мы характеризо-

вали отклонение от симметрического, т. е. от неупорядоченного, состояния функций δ_r . Но мы видели, что δ_r определяется величинами c_i , в свою очередь пропорциональными η . Очевидно, η можно выбрать в качестве степени упорядоченности. В упомянутой выше работе [1] мы пользовались в качестве степени упорядоченности всегда положительной величиной $\xi = \eta^2$.

При непрерывном переходе ξ как функция от T имеет вид типа рис. 10, а. При фазовом переходе она обращается в нуль скачком (рис. 10, б).

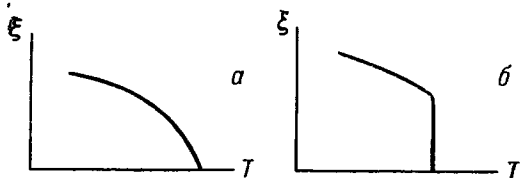


Рис. 10

В равобранном выше примере бинарной смеси степень упорядоченности можно выбрать следующим образом. Пусть N_1 есть число атомов данного рода, находящихся на своих местах, а N_2 — на чужих. В неупорядоченном кристалле $N_1 = N_2$. Вероятность нахождения атома на своем месте пропорциональна $N_1/(N_1 + N_2)$, а на чужом: $N_2/(N_1 + N_2)$. В неупорядоченном кристалле каждая из этих дробей равна $1/2$. Потому отклонение вероятностей от их значений в неупорядоченном кристалле пропорционально

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} - \frac{1}{2} = \frac{N_1 - N_2}{2(N_1 + N_2)}, \quad \frac{N_2}{N_1 + N_2} - \frac{1}{2} = \frac{N_2 - N_1}{2(N_1 + N_2)}.$$

Таким образом, δ_r пропорционально отношению $(N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$,

которое и может быть выбрано в качестве η .

В случае переходов между магнитными и немагнитными кристаллами роль атомов различных родов играют атомы с различно направленным магнитным моментом. Неупорядоченному кристаллу соответствует случай, когда вероятности атому иметь различно направленные моменты одинаковы для каждого атома. В случае ферромагнитного состояния эти вероятности перестают быть равными, так что у кристалла в целом возникает магнитный момент. Наконец, в случае магнитных, но не ферромагнитных тел вероятности различных направлений момента у одного и того же атома тоже не равны, но у различных атомов решетки более вероятными являются противоположные направления момента.

Таким образом, в этом случае средние магнитные моменты у различных атомов имеют противоположные направления и кристалл в целом не имеет магнитного момента.

Выводы

1. Переходы между телами различной симметрии (в частности, между жидкостью и кристаллом) не могут происходить непрерывно в том смысле, как переход между жидкостью и газом над критической точкой; в каждый момент тело имеет или ту, или иную симметрию.

2. Кроме фазовых переходов возможны еще только переходы, непрерывные в том смысле, что в точке перехода не происходит скачка состояния тела (в частности, нет теплоты перехода), но симметрия меняется сразу. Такие переходы обязательно сопровождаются скачком теплоемкости. Эти переходы связаны с переходом кристалла в неупорядоченное состояние.

3. Возможны следующие типы непрерывных переходов с изменением симметрии: а) точки Кюри, лежащие на кривой на диаграмме p, T . Эти линии могут пересекаться друг с другом или с линией фазовых переходов в точках типов, изображенных на рис. 2 и 3. Линия точек Кюри может перейти непрерывно в линию фазовых переходов. Точка, где этот переход совершается, является λ -точкой. В λ -точке чистого вещества теплоемкость обращается в бесконечность; если же тело является смесью, то теплоемкость испытывает лишь конечный скачок; б) изолированные точки непрерывных переходов. Эти точки лежат на пересечении нескольких линий фазовых переходов (рис. 6 и 7).

4. Возможны непрерывные переходы, связанные с возникновением или исчезновением средних магнитных моментов у каждого из атомов кристалла (в частности, таковыми являются точки Кюри ферромагнитных тел). Для таких переходов имеет место случай «а».

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. L a n d a u. Phys. Zs. Sowjet., 8, 113, 1935 (Собр. трудов, № 16).

ЖЭТФ, 7, 627, 1937

Phys. Zs. Sowjet., 11, 545, 1937

Доказывается невозможность существования кристаллов с функцией плотности, зависящей только от одной или двух координат. Рассматривается вопрос о переходах между жидкостью и кристаллом и показывается, что между ними невозможны точки Кюри, лежащие на кривой на диаграмме p, T . Рассматривается вопрос о природе жидких кристаллов.

В предыдущей работе [1] был рассмотрен с общей точки зрения вопрос о переходах, связанных с изменением симметрии тела. В этой работе мы рассмотрим с этой точки зрения вопрос о соотношении между различными состояниями вещества.

§ 1. Невозможность существования кристаллов с плотностью ρ , зависящей от одной или двух координат

Функция плотности ρ кристалла [1] есть функция всех трех координат: x, y, z . Возникает вопрос, возможны ли случаи, в которых ρ есть функция всего двух или даже одной переменной. Кристалл с $\rho = \rho(x)$ можно было бы рассматривать как состоящий из атомов, расположенных в виде параллельных прямых нитей, причем эти нити, будучи все одинаково ориентированы по оси x , расположены совершенно беспорядочно друг относительно друга. Кристалл с $\rho = \rho(x, y)$ должен был бы состоять как бы из параллельных плоскостей, на каждой из которых атомы расположены в определенном порядке; однако положения самих этих плоскостей беспорядочны.

Покажем, что состояния вещества с плотностью ρ , зависящей только от одной или двух координат, невозможны. Воспользуемся методом, примененным Пайерлсом к двумерным телам [2]. Именно, определим флуктуации в таком теле.

Рассмотрим некоторую деформацию, характеризующуюся вектором смещения $u(x, y, z)$ с компонентами $u_i(x, y, z)$ для каждой точки x, y, z тела. Энергия (вернее, свободная энергия) деформированного тела определяется, как известно, тензором деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Изменение ΔF свободной энергии единицы объема тела есть, как известно, квадратичная функция от, вообще говоря, всех компонент тензора u_{ik} . Изменение свободной энергии всего тела есть $\Delta F \cdot V$, где V — объем тела.

Вектор смещения u можно разложить по плоским волнам

$$u_i = \sum_{\mathbf{f}} u_i^{(\mathbf{f})}, \quad u_i^{(\mathbf{f})} = a_i^{(\mathbf{f})} e^{i\mathbf{f}r}. \quad (1)$$

Очевидно, что флуктуация

$$\overline{u_i^2} = \sum_{\mathbf{f}} \overline{u_i^{(\mathbf{f})^2}}. \quad (2)$$

Тензор u_{ik} , с соответствующий определенной плоской волне $u_i^{(\mathbf{f})}$, пропорционален, очевидно, произведениям компонент $u_i^{(\mathbf{f})}$ на компоненты волнового вектора \mathbf{f} :

$$u_{ik}^{(\mathbf{f})} = \frac{i}{2} (f_i u_k + u_i f_k),$$

Квадратичная функция ΔF распадается на сумму членов, зависящих каждый только от $u_{ik}^{(\mathbf{f})}$ одного \mathbf{f} .

Рассмотрим тело с плотностью $\rho = \rho(x)$. Легко видеть, что свободная энергия деформации в таком теле не зависит от u_{xy} и u_{xz} . В самом деле, эти деформации представляют собой не что иное, как сдвиг по направлению y и z . Но в этих направлениях $\rho = \text{const}$, и потому такой сдвиг не связан с изменением ρ , а следовательно, и с изменением F . Определим среднее значение $\overline{u_x^{(\mathbf{f})^2}}$. Для этого определим часть свободной энергии, зависящую от $u_x^{(\mathbf{f})}$. Так как $u_{xy}^{(\mathbf{f})}$ и $u_{xz}^{(\mathbf{f})}$ в ΔF не входят, то искомая часть ΔF зависит только от $u_{xx}^{(\mathbf{f})} = i f_x u_x^{(\mathbf{f})}$. Следовательно,

$$\Delta F = A u_x^{(\mathbf{f})^2} f_x^2.$$

Так как вероятность флуктуации пропорциональна $e^{-V\Delta F/kT}$, то легко видеть, что

$$\overline{u_x^{(r)2}} \sim \frac{kT}{AVf_x^2}. \quad (3)$$

Чтобы найти флуктуацию полного смещения $\overline{u_x^2}$, надо просуммировать (3) по всем собственным частотам. Это суммирование, как известно, может быть заменено интегрированием. Для этого надо умножить (3) на дебаевское распределение собственных колебаний, т. е. на $Vdf_xdf_ydf_z$, и проинтегрировать по области от нуля до значений f , соответствующих дебаевской граничной частоте. Таким образом,

$$\overline{u_x^2} \sim \frac{kT}{A} \int \frac{df_xdf_ydf_z}{f_x^2}. \quad (4)$$

Но этот интеграл расходится, как $1/f_x$ при $f_x = 0$. Таким образом, флуктуация в этом случае бесконечна.

Но бесконечная флуктуация приводит к тому, что место, к которому относится данное значение функции $\rho(x)$, может смещаться на сколь угодно большое расстояние; другими словами, плотность $\rho(x)$ «размазывается» по всему телу. Иначе говоря, никакое $\rho(x)$, кроме $\rho = \text{const}$, невозможно.

Если в кристалле $\rho = \rho(x, y)$, то аналогично предыдущему можно показать, что

$$\overline{u_x^2} \sim kT \int \frac{dx_xdf_ydf_z}{\Phi_{II}(f_x, f_y)}, \quad (5)$$

где Φ_{II} есть квадратичная функция от f_x и f_y , и аналогично для $\overline{u_y^2}$.

Этот интеграл расходится логарифмически при $f_x = 0$, $f_y = 0$. Таким образом, и в этом случае флуктуация бесконечна, а потому не могут существовать и такие кристаллы.

В случае $\rho = \rho(x, y, z)$ легко убедиться, что

$$\overline{u_x^2} \sim kT \int \frac{df_xdf_ydf_z}{\Phi_{II}(f_x, f_y, f_z)} \quad (6)$$

и аналогично для $\overline{u_y^2}$ и $\overline{u_z^2}$. Этот интеграл, очевидно, конечен.

§ 2. Переход между жидкостью и кристаллами

Рассмотрим вопрос о возможности перехода жидкости, т. е. изотропного тела, в кристалл — перехода непрерывного в смысле, о котором шла речь в I (без скрытой теплоты).

Пусть ρ_0 — функция плотности жидкости. Поскольку жидкость изотропна, то $\rho_0 = \text{const}$. В точке непрерывного перехода ρ_0 переходит в $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, где $\delta\rho$ (и потому и ρ) имеет симметрию кристалла. Разложим $\delta\rho$ на плоские волны

$$\delta\rho = \sum_{\mathbf{f}} a_{\mathbf{f}} e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{f} — периоды обратной решетки кристалла. Поскольку $\delta\rho$ действительно, то должно быть

$$a_{\mathbf{f}} = a_{-\mathbf{f}}^*, \quad (8)$$

где значок * означает комплексно сопряженное.

Термодинамический потенциал Φ кристалла есть функционал от ρ , или, что все равно, функционал от $\delta\rho$ [1]. Если для $\delta\rho$ подставить выражение (7), то Φ будет функцией от коэффициентов $a_{\mathbf{f}}$. Вблизи точки перехода Φ можно разложить в ряд по степеням $a_{\mathbf{f}}$. Различные члены этого разложения имеют вид

$$a_{\mathbf{f}_1} a_{\mathbf{f}_2} a_{\mathbf{f}_3} \dots$$

Легко видеть, что в разложении Φ могут содержаться только те члены, у которых $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \dots = 0$. Действительно, Φ не должно меняться при перенесении начала координат, т. е. при замене \mathbf{r} на $\mathbf{r} + \mathbf{R}$, где \mathbf{R} — произвольный постоянный вектор. Но при такой замене $a_{\mathbf{f}}$ умножается на $e^{i\mathbf{f}\mathbf{R}}$, а выражение $a_{\mathbf{f}_1} a_{\mathbf{f}_2} a_{\mathbf{f}_3} \dots$ — на $e^{i(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \dots)\mathbf{R}}$. Этот множитель равен единице при всех значениях \mathbf{R} , только если $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \dots = 0$.

Для членов первого порядка имеем отсюда $\mathbf{f} = 0$, т. е. членов первого порядка в разложении Φ вообще нет [1]. Члены второго порядка должны содержать только произведения $a_{\mathbf{f}} a_{-\mathbf{f}}$ или согласно (8) $|a_{\mathbf{f}}|^2$. Разложение Φ имеет, следовательно, вид

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{\mathbf{f}} A_{\mathbf{f}} |a_{\mathbf{f}}|^2$$

(Φ_0 — термодинамический потенциал жидкости, $A_{\mathbf{f}}$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, кроме \mathbf{f} , от давления p и температуры T). В силу изотропии жидкости мы можем заключить, что величины $A_{\mathbf{f}}$ зависят только от величины, но не от направления вектора \mathbf{f} .

Выше точки перехода Φ имеет минимум при всех $a_{\mathbf{f}} = 0$, т. е. все $A_{\mathbf{f}}$ положительны. В самой точке перехода (непрерывного) член второго порядка должен обратиться в нуль при отличном от нуля $\delta\rho$ (см. I). Отсюда следует, что в точке перехода ка-

кое-то одно A_f должно обратиться в нуль, т. е. кривая $A(f)$ в точке перехода касается оси абсцисс (рис. 1).

Касание сразу в двух точках совершенно невероятно, поэтому в точке перехода лишь один из коэффициентов A_f обращается в нуль. Отсюда следует, что в точке перехода возникает $\delta\rho$, соответствующее плоским волнам с одной определенной длиной волны, определяющейся теми значениями f , которые соответствуют обращающемуся в нуль коэффициенту A_f .⁹ Все a_f , соответствующие другим f , равны нулю. Обозначая указанный один коэффициент A_f просто через A , мы имеем



Рис. 1

$$\Phi = \Phi_0 + A \sum |a_f|^2, \quad (9)$$

где суммирование производится по f , отличающимся только своим направлением.

Члены третьего порядка имеют вид

$$\sum_{f_1, f_2, f_3} B_{f_1, f_2, f_3} a_{f_1} a_{f_2} a_{f_3},$$

причем в каждом члене $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Но, как было только что показано, в точке перехода возникают лишь периоды f , имеющие все одинаковую абсолютную величину. Поэтому и в членах третьего порядка участвуют только f_1, f_2, f_3 , отличающиеся лишь направлениями. Условие $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ означает поэтому, что векторы f_1, f_2, f_3 должны образовать равносторонний треугольник. Во всех членах третьего порядка эти треугольники имеют одинаковую величину (определяющуюся из члена второго порядка) и отличаются только своей ориентацией в пространстве. В силу изотропии жидкости коэффициенты B_{f_1, f_2, f_3} могут зависеть лишь от величины, но не от ориентации этих треугольников. Поэтому все B_{f_1, f_2, f_3} в членах третьего порядка одинаковы; их общую величину обозначим посредством B . Таким образом, член третьего порядка имеет вид

$$B \sum a_{f_1} a_{f_2} a_{f_3},$$

причем суммирование производится по f_1, f_2, f_3 , образующим одинаковые, но разно ориентированные равносторонние треугольники. Присоединяя это к (9), имеем

$$\Phi = \Phi_0 + A(p, T) \sum |a_f|^2 + B(p, T) \sum a_{f_1} a_{f_2} a_{f_3}. \quad (10)$$

Мы видим, что член третьего порядка содержит только один коэффициент $B(p, T)$. Другими словами, мы имеем дело со случаем, разобранным в I под названием случая II. Это значит, что между жидкостями и твердыми кристаллами не может быть точек Кюри, образующих на диаграмме p, T линию, но возможны непрерывные переходы в изолированных точках, лежащих на пересечениях линий обычных фазовых переходов, как изображено на рис. 2, или в более сложном случае на рис. 3. На этих рисунках точка

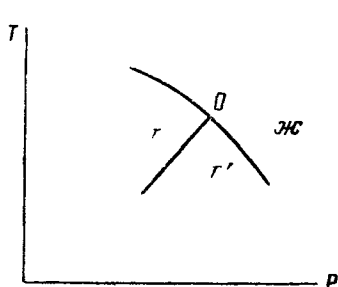


Рис. 2

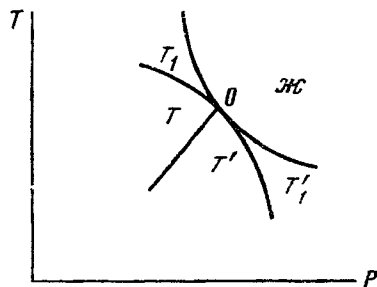


Рис. 3

O есть точка непрерывного перехода; $ж$ — жидкая фаза, t, t', t_1, t'_1 — различные твердые фазы. При этом фазы t, t' (а на рис. 2 фазы t, t' с одной стороны и t_1, t'_1 — с другой) вблизи точки O имеют одинаковую симметрию и отличаются только знаком $\delta\rho$, т. е. имеют ρ , равные $\rho = \rho_0 \pm \delta\rho$ (см. I). Другими словами, их решетки таковы, что в тех местах, где у t вероятность нахождения атома имеет максимум, у решетки t' она имеет минимум и наоборот. В настоящее время трудно сказать, осуществляются ли в природе такие непрерывные переходы.

§ 3. Жидкие кристаллы

Часто встречается мнение, что жидкие кристаллы представляют собой тела, в которых молекулы расположены «цепочками», ориентированными в одну сторону, т. е. тела, в которых ρ есть функция одной переменной. Однако, как было показано в § 1, такие тела существовать не могут.

Вместо этого мы можем представить себе жидкие кристаллы как тела, в которых молекулы — точнее, их центры инерции расположены совершенно беспорядочно, как и в обычной жидкости. Анизотропность же жидкого кристалла обусловлена тем, что

все молекулы его одинаково ориентированы; например, если молекулы имеют удлиненную форму, то все они могут быть расположены своей осью в одном направлении.

Эти представления о природе жидких кристаллов можно сформулировать более точно с помощью функции плотности.

Если тело изотропно, то $\rho = \text{const}$; однако из $\rho = \text{const}$ еще не следует, что тело непременно должно быть изотропным. Если $\rho = \text{const}$, то это значит, что все положения атомов — точнее, их центров инерции — в теле равновероятны. Тем не менее различные направления в теле могут при этом быть не эквивалентны, а именно: при данном положении какого-нибудь атома № 1 вероятность различных положений соседнего атома № 2 является функцией от расположения атома № 2 относительно № 1 (т. е. вектора r_{12} расстояния между атомами № 1 и 2). Эта вероятность ρ_{12} может зависеть от направления r_{12} . Тогда тело будет анизотропным, несмотря на то, что для каждого атома $\rho = \text{const}$. С другой стороны, тело будет при этом жидким, так как в нем не может быть деформации сдвига. Если $\rho = \text{const}$, то при деформации без изменения объема ρ не меняется, т. е. никакой деформации, собственно говоря, нет.

Такие тела ($\rho = \text{const}$, ρ_{12} зависит от направления) мы можем считать жидкими кристаллами. Поэтому можно говорить о симметрии жидких кристаллов как о симметрии функции ρ_{12} . Но ρ_{12} является функцией от вектора r_{12} ; при изменении длины r_{12} без изменения направления ρ_{12} не обнаруживает никакой периодичности (при $r_{12} \rightarrow \infty$ ρ_{12} стремится, очевидно, к ρ^2). Иначе говоря, ρ_{12} не имеет никакой трансляционной симметрии. Поэтому возможными группами симметрии ρ_{12} , т. е. жидких кристаллов, являются не 230 пространственных групп, а точечные группы. При этом, конечно, число этих групп не ограничивается 32, как у твердых кристаллов; симметрия жидких кристаллов должна классифицироваться так же, как симметрия молекул. В частности, возможны оси симметрии любого порядка (а не только 2, 3, 4, 6-го). В частности, возможны жидкие кристаллы с полной аксиальной симметрией. Экспериментально установлено, что известные жидкие кристаллы являются одноосными. Было бы весьма интересно выяснить, обладают ли они полной аксиальной симметрией или просто имеется ось выше второго порядка.

Принципиально возможны жидкие кристаллы с кубической симметрией. Такие кристаллы по оптическим свойствам нельзя отличить от обычных жидкостей. Возможно, что таким кристаллом является жидкий He II (He II не обнаруживает двойного лучепреломления [3]).

Если все рассматриваемые частицы одинаковы, то ρ_{12} имеет, очевидно, центр симметрии. Действительно, если слева от атома № 1

находится атом № 2, то, став в точку, где находится атом № 2, мы будем иметь атом № 1 справа; ввиду одинаковости этих атомов мы и заключаем, что $\rho_{12}(r_{12}) = \rho_{12}(-r_{12})$. Если же кристалл состоит из разных атомов, то ρ_{12} может не иметь центра симметрии.

Рассмотрим вопрос о возможности непрерывных переходов между жидкими кристаллами и жидкостями (непрерывных в смысле отсутствия скачка состояния).

При непрерывном переходе $\rho_{12}^{(0)}$ переходит в $\rho_{12}^{(0)} + \delta\rho_{12}$, аналогично тому, как раньше ρ_0 переходило в $\rho_0 + \delta\rho$. Плотность $\rho_{12}^{(0)}$ относится к жидкости и потому изотропна; $\delta\rho_{12}$ имеет симметрию жидкого кристалла.

Как было показано в I, в точке непрерывного перехода возникают функции $\delta\rho$, в данном случае $\delta\rho_{12}$, обладающие определенными свойствами симметрии, характеризующимися неприводимыми представлениями группы симметрии $\rho_{12}^{(0)}$, т. е. в данном случае группы симметрии вращений вокруг начала координат. Известно, что функции, характеризующие неприводимые представления группы вращений при инверсии (отражение в начале координат), либо не меняются, либо меняют свой знак. В первом случае образующийся кристалл имеет центр симметрии, во втором нет. Термодинамический потенциал Φ тела должен быть инвариантен по отношению ко всем вообще преобразованиям, в частности по отношению к инверсии. Поэтому если кристалл, т. е. $\delta\rho_{12}$, не имеет центра симметрии, то все члены нечетной степени в разложении Φ , в частности члены третьего порядка, равны тождественно нулю. Другими словами, мы имеем случай, разобранный в I в качестве случая I; а именно: возможны точки Кюри, лежащие на линии на диаграмме p, T .

Если же ρ_{12} имеет центр симметрии, то члены третьего порядка, вообще говоря, не равны тождественно нулю. В этом случае мы имеем случай II предыдущей работы, т. е. возможны лишь изолированные точки непрерывного перехода аналогично непрерывным переходам между жидкостью и твердыми кристаллами (§ 2).

Экспериментально известно, что He II переходит в обычный жидкий He в точках Кюри, т. е. имеется случай I. Это значит, согласно сказанному выше, что если He II есть жидкий кристалл, то он не должен иметь центра симметрии. Так как, с другой стороны, He состоит из одинаковых атомов, то надо предположить, что отсутствие центра инверсии обусловлено тем, что атомы в He сами по себе имеют асимметрическую электронную оболочку. Ввиду некоторой странности такого предположения самое предположение о том, что He II есть жидкий кристалл, делается сомнительным.

§ 4. Поверхностные фазы

Поверхность раздела двух изотропных, т. е. жидких, фаз может, вообще говоря, быть анизотропной. По-видимому, в некоторых случаях это и наблюдается.

Но, как было показано в § 1, кристаллы, в которых ρ было бы функцией только от двух координат, невозможны. В частности, невозможно существование и двухмерных «твердых» кристаллов, т. е. кристаллов с анизотропным $\rho(x, y)$. Поэтому анизотропные поверхности должны являться двухмерными «жидкими» кристаллами, т. е. на них молекулы — точнее, их центры инерции — расположены беспорядочно, но все они одинаково ориентированы ($\rho = \text{const}$, ρ_{12} — анизотропно).

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау, ЖЭТФ, 7, 19, 1937 (Собр. трудов, № 28).
- [2] R. Peierls. Helv. Phys. Acta, VII, Suppl. II. стр. 81, 1936.
- [3] L. Schubnikow, A. Kikoin. Phys. Zs. Sowjet., 10, 119, 1936.

ЖЭТФ, 7, 371, 1937;

Phys. Zs. Sowjet., 11, 129, 1937

В работе показывается, что при отличных от нуля средних значениях магнитного поля сверхпроводник должен распадаться не на две области: сверхпроводящую и несверхпроводящую, а на громадное количество слоев, попеременно сверхпроводящих и несверхпроводящих. Это обстоятельство дает объяснение существованию пайерлсовского промежуточного состояния.

§ 1. Промежуточное состояние

Рутгерс и Гортер [1] показали, что ряд свойств сверхпроводников можно объяснить, предполагая, что сверхпроводящее и несверхпроводящее состояния представляют две фазы, причем сверхпроводящая фаза характеризуется тем, что в нее не проникает магнитное поле, т. е. ее магнитная проницаемость $\mu = 0$. Если сверхпроводник помещен в магнитное поле, то при увеличении этого поля зависимость между индукцией B и магнитным полем H в металле изображается кривой $Oabc$ рис. 1. Пока металл сверхпроводящий, $B = 0$; при достижении магнитным полем критического значения, которое мы обозначим буквой h , тело переходит в несверхпроводящую фазу. Дальше B растет с H по формуле $B = H$ (μ практически равно 1). Опыт показывает, что участок ab приведенной кривой тоже соответствует некоторому реально осуществимому состоянию тела. Так, сверхпроводящий шар, помещенный в магнитное поле, не делится на две части — сверхпроводящую и несверхпроводящую, а в нем появляется однородное магнитное поле, не равное, однако, внешнему полю. С увеличением этого последнего растет и поле внутри шара, приближаясь к внешнему. Состояние, соответствующее указанному участку

кривой $B - H$, было разобрано Пайерлсом [2] и названо им промежуточным.

Задача настоящей работы заключается в установлении природы этого состояния, именно: можно показать, что при не равном нулю среднем (по всему телу) значении магнитной индукции термодинамически устойчивым является не разделение на две части (сверх- и несверхпроводящую), а разделение тела на большое количество слоев, попеременно сверх- и несверхпроводящих. Иначе говоря, промежуточное состояние не есть некоторое особое состояние; тело в этом состоянии состоит из большого числа сверх- и несверхпроводящих слоев. По мере приближения тела к обычному несверхпроводящему состоянию несверхпроводящие слои утолщаются за счет сверхпроводящих, пока совсем не исчезнут.

Это в некотором смысле аналогично ферромагнитным телам, которые, будучи немагнитными, состоят из ряда слоев, намагниченных до насыщения, но поочередно в противоположные стороны [3]. Аналогичный расчет мы произведем теперь для рассматриваемого промежуточного состояния.

Рассмотрим плоскопараллельную сверхпроводящую пластинку, помещенную в магнитное поле H_0 , перпендикулярное ее поверхности. При этом поле H_0 меньше критического поля h . Из граничных условий следует, что среднее (по всему телу) значение индукции B в пластинке равно внешнему полю H_0 . Таким образом, внутри пластинки существует индукция, в то время как внешнее поле меньше критического; иначе говоря, мы находимся как раз в промежуточной области состояний. Мы будем исходить из предположения, что такая пластинка состоит из последовательных слоев — сверхпроводящих (I, III, V на рис. 2) и несверхпроводящих (II, IV). Отношение количества вещества, перешедшего в несверхпроводящее состояние, к общему коли-

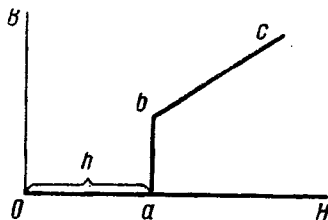


Рис. 1

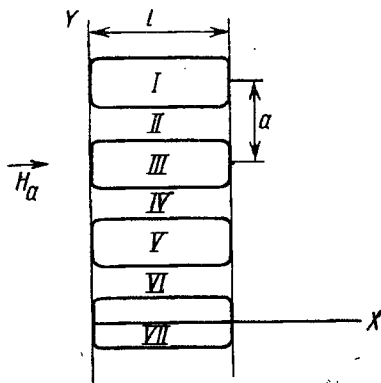


Рис. 2

честву легко определится из теоремы о потоке магнитной индукции. На далеком расстоянии от пластинки $B = H = H_0$; в сверхпроводящих слоях $B = 0$, в несверхпроводящих далеко от краев $B = H = h$. Отсюда непосредственно видно, что несверхпроводящие слои занимают долю H_0/h общего объема. Рис. 2 изображает разрез пластинки. Из требования, чтобы термодинамический потенциал пластинки был минимален, мы определим расстояние между ближайшими одинаковыми слоями (a), т. е. определим число таких слоев. Мы увидим, что устойчивое состояние действительно соответствует разделению на большое число слоев.

§ 2. Форма сверхпроводящих слоев

Мы начинаем с определения формы слоев, т. е. формы их поперечного сечения. Очевидно, что вдали от краев пластинки слои будут плоскопараллельными, а вблизи поверхности их поперечное сечение будет каким-то более сложным. Удивительным образом оказывается возможным точное определение формы слоев.

Введем оси координат, как указано на рис. 2. Мы будем при этом рассматривать только одну поверхность пластинки, считая другую бесконечно далекой. Это, конечно, можно делать, поскольку ширина пластинки

очень велика по сравнению с шириной области, в которой форма слоев отличается от плоскопараллельной. Один такой слой изображен на рис. 3.

На большом расстоянии от пластинки поле равно H_0 , т. е. при $x = -\infty$

$$H_x = H_0, \quad H_y = 0. \quad (1)$$

Поскольку нормальная компонента магнитной индукции должна быть непрерывна, а в сверхпроводнике $B = 0$, то на границе bc сверхпроводящего слоя должно быть

$$\text{на } bc: \quad H_x = 0. \quad (2)$$

В область между сверхпроводящими слоями магнитное поле свободно проникает, на границе cd (или ab) между сверх- и не-

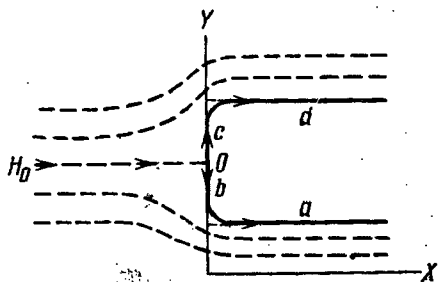


Рис. 3

сверхпроводящими областями магнитное поле должно быть параллельно границе и по величине равно критическому полю h : на cd :

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2 = h^2. \quad (3)$$

Из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ следует, что $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ или $\mathbf{H} = \operatorname{grad} \varphi$, где \mathbf{A} и φ — векторный и скалярный магнитные потенциалы. Векторный потенциал \mathbf{A} можно всегда выбрать так, чтобы он везде был направлен по оси z . Тогда

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (4)$$

Поскольку на всей границе $abcd$ сверхпроводника нормальная компонента магнитного поля равна нулю, то, следовательно, эта граница является силовой линией поля. Из соображений симметрии видно, что одна из силовых линий поля в точке O разветвляется на две, идущие по границе слоя; все остальные линии входят в несверхпроводящие области между сверхпроводящими слоями (на рис. 3 силовые линии изображены штриховыми). Определение формы слоя сводится, таким образом, к определению формы указанной силовой линии поля.

На силовой линии

$$\frac{H_y}{H_x} = \frac{dy}{dx}.$$

Подставляя сюда (4), находим, что $dA = 0$, т. е. на силовой линии, в частности на границе слоя, $A = \text{const}$. На границе одного из слоев положим $A = 0$. Легко убедиться, что на границах всех других слоев A будет целым кратным от $H_0 a$ (a — расстояние между слоями). Действительно, на бесконечном расстоянии из

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y} = H_0, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

следует $A = H_0 y + \text{const}$, а вдоль силовой линии $A = \text{const}$. Поэтому разность между значениями A на двух силовых линиях, окаймляющих два ближайших сверхпроводящих слоя, равна $H_0 a$.

Введем переменную:

$$x + iy = u \quad (5)$$

и величины

$$\psi = \varphi - iA, \quad (6)$$

$$\eta = H_x - iH_y. \quad (7)$$

(4) можно тогда рассматривать как условия Коши — Римана для

ψ и η , и мы видим, что ψ и η являются функциями комплексной переменной u . Из (4) видно, что

$$d\psi = -\eta du. \quad (8)$$

Граничное условие (3) можно написать в виде

$$\text{на } cd: \quad |\eta| = h, \quad (9)$$

а условие (2), замечая, что H_x есть действительная часть η ,

$$\text{на } bc: \quad \text{Re}(\eta) = 0. \quad (10)$$

Далее, введем величину

$$\zeta = e^{-2\pi\psi/H_0 a} - 1 \quad (11)$$

и будем рассматривать η как функцию от ζ . С помощью этой величины можно написать граничные условия, одинаковые для всех слоев. Поскольку, как было указано, на границе слоев A есть целое кратное от $H_0 a$, то на всех этих границах

$$\zeta = e^{-2\pi\varphi/H_0 a} - 1, \quad (12)$$

т. е. действительно.

Поскольку φ определено с точностью до постоянной, то мы можем произвольно выбрать значение φ в одной точке. Пусть в точке O на рис. 3 $\varphi = 0$. Тогда в этой точке также и $\zeta = 0$. На рассматриваемой силовой линии на бесконечном расстоянии от пластинки ($x = -\infty$) $\zeta = -1$ (так как на бесконечности $\varphi = \infty$ при нашем выборе φ). Значение ζ в точке c (или b), где силовая линия входит внутрь пластинки, обозначим через ζ_0 . Предельные условия (1), (2), (3) или (1), (9), (10) имеют теперь вид

$$\text{при } \zeta = -1: \quad \eta = H_0, \quad (13)$$

$$\text{при } 0 < \zeta < \zeta_0: \quad \text{Re}(\eta) = 0, \quad (14)$$

$$\text{при } \zeta_0 < \zeta: \quad |\eta| = h. \quad (15)$$

Кроме того, η должно быть конечным при всех ζ .

Последним двум условиям можно удовлетворить функцией

$$\eta = h \frac{\sqrt{-\zeta\zeta_0} - \sqrt{\zeta(\zeta - \zeta_0)}}{\zeta}. \quad (16)$$

Это решение конечно (равно нулю) при $\zeta = 0$; при $\zeta < \zeta_0$ оба члена мнимы, и потому $\text{Re}(\eta) = 0$; при $\zeta > \zeta_0$ η комплексно, а его модуль равен h . Это выражение, будучи справедливо на одной линии, по свойствам функций комплексного переменного дает решение везде (т. е. и там, где ζ не действительно). Знак у

корней взят здесь для области $\zeta < 0$. При $0 < \zeta < \zeta_0$ оба корня мнимы, причем из теории функций следует, что знаки их по-прежнему противоположны. При $\zeta > \zeta_0$ второй корень меняет свой знак.

Что касается ζ_0 , то оно определяется из условия (13). При $\zeta = -1$

$$\sqrt{1 + \zeta_0} - \sqrt{\zeta_0} = \frac{H_0}{h},$$

и отсюда

$$\zeta_0 = \left(\frac{h^2 - H_0^2}{2hH_0} \right)^2. \quad (17)$$

Подставляя (16) и (11) в $du = -d\psi / \eta$ (8) и интегрируя по действительным ζ , мы можем найти форму слоя. Это дает

$$u = - \int \frac{d\psi}{\eta} = \frac{H_0 a}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta + 1)} = - \frac{H_0 a}{2\pi h} \int \frac{d\zeta [\sqrt{-\zeta\zeta_0} + \sqrt{\zeta(\zeta - \zeta_0)}]}{\zeta(\zeta + 1)}. \quad (18)$$

Мы не будем приводить здесь результаты этого интегрирования.

§ 3. Число слоев

Термодинамический потенциал Φ тела в рассматриваемом состоянии (вернее, та часть его, которая происходит от наличия слоев) состоит из двух частей. Одна часть, Φ_1 , обусловлена поверхностным натяжением на границе между сверх- и несверхпроводящими областями. Пусть α — коэффициент поверхностного натяжения. Если l_1 и l_2 — длины пластинок по осям y и z , то всего в пластинке есть l_1/a сверхпроводящих слоев. Их общая поверхность соприкосновения с несверхпроводящими слоями равна $2l_1 l_2 / a$ (отклонение формы слоев от прямой вблизи поверхности пластины здесь несущественно). На единицу поверхности пластины приходится, следовательно, $2l/a$ поверхности слоев. Термодинамический потенциал Φ_1 , отнесенный к единице поверхности, равен, следовательно,

$$\Phi_1 = \frac{2l}{a} \alpha. \quad (19)$$

Другая часть, Φ_2 , термодинамического потенциала обусловлена явлениями, происходящими вблизи поверхности пластины¹.

¹ Ср. совершенно аналогично в [3].

Для нахождения ее мы должны найти энергию сверхпроводящего слоя и вычесть из нее энергию того же слоя, которую он имел бы, если бы его сечение было прямолинейным до самой поверхности.

Энергия единицы объема сверхпроводника отличается от энергии единицы объема того же вещества в несверхпроводящем состоянии на величину $-\hbar^2 / 8\pi$. У каждого из четырех углов сечения слоя (как около точек c и b на рис. 3) относительно прямоугольного сечения (штриховые линии на рис. 3) не хватает площади

$$\int_0^{\infty} (Y - y) dx,$$

где x и y — координаты линии сечения слоя, а Y — координата y этого сечения на большом расстоянии от поверхности, т. е. там, где сечение ограничено прямыми линиями. Мы можем интегрировать до ∞ , так как вдали от поверхности все равно $y - Y = 0$. «Недостаток» объема слоев, приходящийся на единицу поверхности пластинки, равен, следовательно,

$$\frac{4}{a} \int_0^{\infty} (Y - y) dx, \quad (20)$$

а избыточная энергия углов

$$\frac{\hbar^2}{2\pi a} \int_0^{\infty} (Y - y) dx. \quad (21)$$

Это, однако, еще не вся энергия. На границе сверхпроводящего слоя тангенциальная компонента поля имеет скачок. Другими словами, на этой границе есть поверхностные токи, значит, и магнитный момент. Легко убедиться в том, что на единицу оси z на каждую граничную поверхность приходится магнитный момент

$$- \int \frac{|\eta|}{8\pi} y ds,$$

где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и интегрирование производится по линии, ограничивающей сечение слоя. Если бы не было возмущающего влияния поверхности, то слой был бы плоскопараллельным и $|\eta|$ везде равнялось бы \hbar . Избыток момента для каждого угла равен, следовательно,

$$- \int \frac{|\eta|}{8\pi} y ds + \int \frac{\hbar}{8\pi} Y dx.$$

Всего на единицу поверхности пластинки приходится дополнительный момент, равный

$$\frac{4}{a} \left\{ \int \frac{h}{8\pi} Y dx - \int \frac{|\eta|}{8\pi} y ds \right\}.$$

Соответствующая энергия равна

$$- \frac{4}{a} \left\{ \int \frac{h}{8\pi} Y dx - \int \frac{|\eta|}{8\pi} y ds \right\} H_0. \quad (22)$$

Вспомним, что точке O (рис. 3) соответствуют $\zeta = 0$, точке c $\zeta = \zeta_0$ и на бесконечности $\zeta = \infty$. Поэтому энергия (21) может быть написана в виде

$$\frac{h^2}{2\pi a} \int_{\zeta=\zeta_0}^{\infty} (Y - y) dx, \quad (21a)$$

а энергия — (22) в виде

$$\frac{H_0}{2\pi a} \int_{\zeta=0}^{\zeta_0} H_y y dy + \frac{H_0 h}{2\pi a} \int_{\zeta=\zeta_0}^{\infty} (y ds - Y dx). \quad (22a)$$

При этом учтено, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ $H_x = 0$, а при $\zeta > \zeta_0$ $|\eta| = h$ (см. (14) и (15)).

Φ_2 равно сумме этих двух энергий. Перегруппировывая и заменяя в интеграле (22a) $H_y dy$ на $-d\varphi$, получим

$$\Phi_2 = \frac{h(h-H_0)}{2\pi a} \int_{\zeta=\zeta_0}^{\infty} (Y - y) dx + \frac{hH_0}{2\pi a} \int_{\zeta=\zeta_0}^{\infty} y (ds - dx) - \frac{H_0}{2\pi a} \int_{\zeta=0}^{\zeta_0} y d\varphi. \quad (23)$$

Сюда должно быть подставлено уравнение кривой, ограничивающей сечение слоя, согласно формуле (18). В общем случае это приводит к довольно сложным выражениям. Однако легко установить существенные свойства Φ_2 и не производя подстановки. Все три члена в Φ_2 , очевидно, положительные (всегда $Y > y$, $ds > dx$ и $d\varphi$ вдоль положительного направления силовой линии меньше нуля), так что всегда $\Phi_2 > 0$. Далее из (18) видно, что всегда x и y , выраженные через ζ , пропорциональны a , так что все интегралы в Φ_2 пропорциональны a^2 и Φ_2 пропорционально a . Этот результат и сам по себе довольно очевиден, поскольку глубина, на которую оказывает искажающее влияние поверхность пластинки, должна быть порядка толщины слоя. Так как, согласно (19), Φ_1 обратно пропорционально a , то сумма Φ_1 и Φ_2 имеет минимум при некотором a . Поскольку Φ_1 про-

порционально толщине пластинки l , а Φ_2 от l не зависит, легко видеть, что расстояние a между слоями пропорционально $\sqrt{l^2}$.

Определим a для случая, когда внешнее поле H_0 мало ($H_0 \ll h$). Исследование показывает, что в выражении (23) для Φ_2 тогда существен только третий член, причем в этом интеграле существенна только область вблизи точки b рис. 3, т. е. область вблизи $\zeta = \zeta_0$. При малых полях тело почти сплошь сверхпроводящее, т. е. промежутки между сверхпроводящими слоями весьма малы. Поэтому приближенно $y = a/2$.

Из (23) мы имеем тогда

$$\Phi_2 = -\frac{H_0}{4\pi} \varphi_0,$$

где φ_0 — значение φ при $\zeta = \zeta_0$. Из (12) имеем

$$-\varphi_0 = \frac{H_0 a}{2\pi} \ln(1 + \zeta_0),$$

а из (17) при $h \gg H_0$

$$\zeta_0 = \left(\frac{h}{2H_0}\right)^2.$$

Поскольку $\zeta_0 \gg 1$, то

$$-\varphi_0 = \frac{aH_0}{\pi} \ln \frac{h}{2H_0}$$

и потому

$$\Phi_2 = \frac{H_0^2 a}{4\pi^2} \ln \frac{h}{2H_0}.$$

Из условия минимальности суммы $\Phi_1 + \Phi_2$ находим

$$a = \frac{2\pi}{H_0} \sqrt{2\alpha l \left| \ln \frac{h}{2H_0} \right|}. \quad (24)$$

Толщина b несверхпроводящего слоя определится из теоремы о потоке магнитного поля

$$bh = aH_0,$$

откуда в данном случае

$$b = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2\alpha l \left| \ln \frac{h}{2H_0} \right|}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что толщина несверхпроводящих слоев медленно обращается в нуль при $H_0 \rightarrow 0$.

² Аналогично толщине слоев в ферромагнетиках, см. [3].

Можно показать, что при увеличении H_0 расстояние a сначала падает, достигает минимума, после чего начинает увеличиваться. При H_0 , близком к h , т. е. когда тело почти сплошь не сверхпроводящее, оказывается

$$a = \frac{2\pi}{h - H_0} \sqrt{\alpha l}, \quad (26)$$

и толщина сверхпроводящих слоев

$$a - b = a \left(1 - \frac{H_0}{h} \right) = \frac{2\pi}{h} \sqrt{\alpha l}.$$

*Украинский физико-технический институт,
Харьков*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. J. Gorter, H. Casimir. *Physica*, 1, 306, 1934.
- [2] R. Peirls. *Proc. Roy. Soc.*, A155, 613, 1936.
- [3] L. Landau, E. Lifschitz. *Phys. Zs. Sowjet.*, 8, 153, 1935. (Собр. трудов, № 17).

ЖЭТФ, 7, 819, 1937

Phys. Zs. Sowjet., 11, 556, 1937

В работе показывается, что формулы для распределения ядерных уровней, полученные Бете, исходя из представления об ядре как об идеальном газе, могут быть получены из общих соображений. Находится формула для определения порядка величины ширины ядерных уровней (вернее, для ее части, связанной с рассеянием). Рассматривается вопрос о неупругом рассеянии нейтронов и об излучении γ -лучей.

§ 1. Распределение ядерных уровней

Н. Бор в своей фундаментальной работе показал, что ядра элементов с достаточно большими атомными весами можно рассматривать с помощью методов статистики.

Исходя из этих идей, Бете [1] исследовал распределение ядерных уровней по энергиям. При этом он сделал предположения, сводящиеся к тому, что ядро рассматривалось как идеальный газ. В действительности, конечно, взаимодействие частиц в ядре весьма велико, и ядро нельзя рассматривать как газ. Оказывается, однако, что результаты, полученные Бете, не зависят от сделанных им предположений.

Если учитывать взаимодействие частиц в ядре, то, конечно, нет никаких оснований рассматривать ядро как «твердое тело», т. е. как «кристалл», а следует рассматривать его как «жидкую каплю» из протонов и нейтронов. В отличие от обычных жидкостей в этой жидкости существенную роль играют квантовые эффекты, так как квантовая неопределенность координат частиц внутри ядра значительно больше, чем их взаимные расстояния. Несмотря на то что мы еще не имеем метода для теоретического

исследования «квантовых жидкостей», можно все же вывести некоторые свойства ядер, применяя к ним статистические соображения.

Положим энергию ядра в нормальном состоянии равной нулю. В этом состоянии «температура» ядра T равна нулю (T мы будем измерять ниже в энергетических единицах). Поскольку энергия «возбуждения» ядра в интересующих нас случаях мала по сравнению с энергией связи ядерных частиц, то и температуру T возбужденного ядра можно считать малой. Поэтому свободную энергию F возбужденного ядра можно разложить в ряд по степеням T . Это даст, если ограничиться первым членом,

$$F = -\frac{\alpha T^2}{2}, \quad (1)$$

где α — постоянная. Член с первой степенью T выпадает согласно теореме Нернста. То обстоятельство, что разложение в ряд должно начинаться у жидкостей с члена T^2 , можно заключить как из аналогичного соотношения для газов, так и непосредственно из опытов Кеезома, согласно которым теплоемкость электронной жидкости¹ в металлах пропорциональна T .

Из (1) находим для энергии E и энтропии S ядра:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \alpha T, \quad E = F + TS = \frac{\alpha T^2}{2}. \quad (2)$$

Энтропия S через E выражается посредством

$$S = \sqrt{2\alpha E}. \quad (3)$$

Как известно из статистики, число N состояний, с энергией, меньшей, чем E , можно написать в виде

$$N = e^{S(E)} = e^{\sqrt{2\alpha E}}. \quad (4)$$

Число уровней в единичном интервале энергии есть

$$\frac{dN}{dE} = e^S \frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} e^S = \frac{1}{T} e^{\sqrt{2\alpha E}}. \quad (5)$$

Эта формула определяет распределение уровней по энергиям, причем всех уровней, т. е. со всеми возможными моментами вращения.

¹ Название «электронный газ» при большой величине электронных взаимодействий, конечно, чисто условно.

Рассмотрим теперь состояния с определенным полным моментом j . Поскольку ядро можно рассматривать как сферическую каплю, энергия «вращающегося» ядра с моментом j увеличивается на

$$\frac{\hbar^2}{2J} j(j+1),$$

где J — момент инерции ядра. При этом число состояний с этой энергией, как известно из теории шарового волчка, равно

$$(2j+1)^2$$

$(2j+1)$ -кратное вырождение обусловлено $2j+1$ возможными ориентациями вектора \mathbf{j} в пространстве, а еще приближенное $(2j+1)$ -кратное — различными возможными ориентациями \mathbf{j} относительно самого волчка.

Таким образом, для числа состояний с данным j мы можем написать

$$\frac{dN_j}{dE} = A (2j+1)^2 \exp \left\{ -\frac{\hbar^2}{2JT} j(j+1) \right\},$$

где A — некоторая величина, не зависящая от j . Для определения A имеем

$$\sum_j \frac{dN_j}{dE} = A \sum_j (2j+1)^2 \exp \left\{ -\frac{\hbar^2}{2JT} j(j+1) \right\} = \frac{dN}{dE}.$$

Экспоненциальное выражение начинает быстро спадать при $j = 7-8$. Поэтому можно считать j большим по сравнению с 1 и, заменяя суммирование интегрированием, написать

$$\frac{dN}{dE} = A \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\hbar^2}{2JT} j^2 \right\} 4j^2 dj = A \left(\frac{2JT}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{\pi}.$$

Сравнивая с (5), находим A и отсюда

$$\frac{dN_j}{dE} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\hbar^2}{2J} \right)^{1/2} \frac{1}{T^{1/2}} (2j+1)^2 \exp \left\{ -\frac{\hbar^2}{2JT} j(j+1) \right\} e^S \quad (6)$$

или для числа уровней энергии с моментом j :

$$\frac{1}{2j+1} \frac{dN_j}{dE} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\hbar^2}{2J} \right)^{1/2} \frac{1}{T^{1/2}} (2j+1) \exp \left\{ S - \frac{\hbar^2}{2JT} j(j+1) \right\}. \quad (7)$$

Если ядро с моментом j_0 сталкивается с нейтроном, то резонансные уровни соответствуют состояниям составного ядра, (т. е. системы ядро + нейтрон) с моментом $j_0 \pm 1/2$. Беря сумму

выражений (7) для $j = j_0 \pm 1/2$, находим

$$\frac{1}{2j_0 + 1} \frac{dN_0}{dE} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\hbar^2}{J} \right)^{1/2} \frac{1}{T^{1/2}} (2j_0 + 1) e^S \quad (8)$$

(вследствие незначительности j_0 соответствующим членом в показателе можно пренебречь). Поскольку все равно точность этих выражений невелика, мы положим в дальнейшем $j_0 = 0$. Величина, обратная dN/dE , есть расстояние D между уровнями. Из (8) имеем для расстояния между резонансными уравнениями

$$D = \sqrt{2\pi} \left(\frac{J}{\hbar^2} \right)^{1/2} T^{1/2} e^{-S}. \quad (9)$$

Из (2) и (3) имеем $T = 2E/S$. Подставляя это в (9), находим

$$S^{1/2} e^S = \frac{\sqrt{2\pi} (J/\hbar^2)^{1/2} (2E)^{1/2}}{D}. \quad (10)$$

По этой формуле можно, зная из эксперимента E и D , определить S . Для тяжелых ядер $E \approx 8 \cdot 10^6$ эв. Расстояние между уровнями положим $D \approx 5$ эв. Момент инерции J шара с массой m и радиусом r равен $J = 2mr^2/5$. Беря для радиуса значение $r = 7 \cdot 10^{-13}$ см и атомный вес 100, находим $J = 3 \cdot 10^{-47}$. Подставляя это в (10), находим

$$S = 18.$$

Отсюда температура $T = 2E/S$:

$$T \approx 10^6 \text{ эв.}$$

Определим порядок величины энергии первых ядерных уровней. Он определяется тем, что для соответствующих энергий число уровней N (4) порядка единицы. Из (4) мы находим, что при $N \sim 1$ также и $S \sim 1$. Поскольку согласно (3) энергия пропорциональна квадрату энтропии, мы можем написать

$$E_{\min} \sim E/[S(E)]^2. \quad (11)$$

Подставляя сюда $S \sim 20$, находим для E_{\min} величину порядка $2 \cdot 10^4$ эв.

Заметим, что в то время как (5) можно применять, начиная с энергий E порядка нескольких десятков тысяч эв, формула (9) применима лишь начиная с энергий порядка $2 \cdot 10^6$ эв. При меньших энергиях не выполняется условие $E \gg D$.

Для различных элементов из формулы $S = \sqrt{2\alpha E}$ можно заключить, что поскольку E примерно одинаково, то S пропорционально $\sqrt{\alpha}$. Из аддитивности свободной энергии мы можем заключить, что α растет пропорционально количеству частиц в

ядре, т. е. α пропорционально \sqrt{A} (A — атомный вес). Так как обычно количество частиц в ядре все же не очень велико, вряд ли можно рассчитывать на хорошую применимость этой формулы.

§ 2. Ширина резонансных уровней для нейтронов

При столкновении нейтрона с ядром нейтрон может захватиться, и образуется составное ядро — система ядро + нейтрон. После этого нейтрон может снова вылететь из ядра без или с потерей энергии (упругое или неупругое рассеяние) или окончательно поглотиться ядром, причем составное ядро переходит в невозбужденное состояние с испусканием кванта (захват нейтрона).

Мы рассмотрим упругое столкновение. Пусть $2\Gamma_e/\hbar$ — вероятность вылета нейтрона после его захвата на некоторый уровень E_n составного ядра (индекс n у Γ_e для краткости опускаем), Γ_e — соответствующая часть ширины уровня. Для того чтобы определить порядок величины Γ_e , произведем следующие рассуждения. Рассмотрим ядро, находящееся в тепловом равновесии с нейтронным газом. Вероятность того, что ядро будет составным (в состоянии с энергией E_n), есть $e^{(\mu-E_n)/T}$ (μ — химический потенциал).

Ядро сталкивается и захватывает нейтроны с моментом $l = 0$ (при $l = 1, 2, \dots$ нейтроны проходят далеко от ядра). Количество таких нейтронов с импульсом в интервале dp и расстоянием до ядра в интервале dr есть (E — энергия нейтрона)²

$$e^{(\mu-E)/T} \frac{dpdr}{2\pi\hbar}.$$

Вместо dp можно написать $dp = dE/v$, где v — скорость нейтронов. Число нейтронов, падающих в 1 сек на ядро, есть, следовательно,

$$e^{(\mu-E)/T} \frac{dE}{2\pi\hbar}.$$

Рассмотрим некоторый интервал ΔE значений энергии, малый, но все же настолько большой, что в нем находится много уровней энергии составного ядра. Обозначим посредством w среднюю вероятность (в интервале ΔE) образования составного ядра при столкновении ядра с нейтроном. Тогда в 1 сек образуется

$$e^{(\mu-E)/T} \frac{\Delta E w}{2\pi\hbar} \quad (12)$$

² Спин нейтрона, как и моменты самих ядер, мы не учитываем, так как результаты все равно имеют качественный характер.

составных ядер в состояниях в интервале ΔE . Это число должно быть равно числу нейтронов, уходящих за это время из составных ядер при их распаде. Поскольку число составных ядер с энергией E есть $e^{(\mu-E)/T}$, средняя вероятность распада есть $2\bar{\Gamma}_e/\hbar$ и число уровней в интервале ΔE есть $\Delta E/D$ (D — среднее расстояние между уровнями), то искомое число распадающихся в 1 сек ядер есть

$$e^{(\mu-E)/T} \frac{\Delta E}{D} \frac{2\bar{\Gamma}_e}{\hbar}. \quad (13)$$

Приравнявая (12) и (13), находим

$$\bar{\Gamma}_e = \frac{D\bar{w}}{4\pi}. \quad (14)$$

Поскольку нормированная волновая функция нейтрона вблизи ядра пропорциональна корню из скорости, то, как известно, $\bar{\Gamma}_e$ и \bar{w} пропорциональны скорости, т. е. корню из энергии:

$$\bar{w} = a\sqrt{E}.$$

С другой стороны, рассматривая ядро как жидкую каплю, мы можем пренебречь структурой его уровней подобно тому, как мы это сделали бы для обычной капли. Тогда мы можем утверждать, что если бы энергия нейтрона была порядка энергии связи E_0 ядра, то он попадал бы в ядро с вероятностью порядка единицы. Поэтому мы можем написать

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{E}{E_0}}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), находим

$$\frac{\bar{\Gamma}_e}{D} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{E_0}}. \quad (16)$$

Полагая, например, $E \approx 1$ эв, $E_0 \approx 8 \cdot 10^6$ эв, $D \approx 5$ эв, находим

$$\bar{\Gamma}_e \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ эв},$$

что, по-видимому, согласуется с экспериментальными данными.

Если при распаде составного ядра вылетает не нейтрон, а протон или α -частица, то для такого распада, очевидно, имеет место такая же формула (14). Вместо же (15) мы имеем теперь

$$\bar{w} = e^{-\gamma},$$

где γ — гамовская проницаемость барьера для протона или α -ча-

стицы. Мы имеем тогда для постоянной распада

$$\lambda = \frac{2\bar{\Gamma}_e}{\hbar} = \frac{D}{2\pi\hbar} e^{-\gamma}. \quad (17)$$

В качестве D здесь надо подставить расстояние между первыми возбужденными уровнями ядра, т. е. как мы видели, $D \approx 2 \cdot 10^4$ эв. Между тем Бете [2] взял для Γ_e значение 1 эв $\cdot e^{-\gamma}$. Поэтому Бете получил для радиусов тяжелых ядер слишком большое значение: $13 \cdot 10^{-13}$ см. Пользуясь (17), получаем для ThA радиус ядра $10,5 \cdot 10^{-13}$ см.

§ 3. Неупругие столкновения

При неупругом рассеянии нейтрон вылетает из составного ядра с уменьшенной энергией, а ядро остается в возбужденном состоянии. Вероятность такого распада составного ядра обозначим как $2\Gamma_u / \hbar$; Γ_u — соответствующая часть ширины уровня. Поскольку между нормальным и возбужденными уровнями никакой принципиальной разницы нет, то, очевидно, для Γ_u имеет место формула, аналогичная формуле (16) для упругого рассеяния:

$$\bar{\Gamma}_u = \frac{D}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_0}}, \quad (18)$$

где ε — энергия вылетающего нейтрона. Поскольку ε меньше первоначальной энергии E нейтрона, падающего на ядро, то из сравнения (16) и (18) мы видим, что $\bar{\Gamma}_u < \bar{\Gamma}_e$.

Число возбужденных уровней ядра очень быстро растет с увеличением их энергии. С другой стороны, при неупругом рассеянии ядро может остаться в любом из нижележащих возбужденных уровней. Поэтому при высоком возбуждении ядра ширина ядерных уровней определяется главным образом неупругим рассеянием. Отсюда, однако, нельзя заключить, что в этом случае рассеяние будет главным образом неупругим, поскольку, как показали Бете и Плачек [3]³, эффективный поперечник упругого рассеяния содержит еще дополнительный член $4\pi r^2$ (r — радиус ядра). Однако резонансная часть при высоких возбуждениях будет обязана почти исключительно неупругому рассеянию. Благодаря быстрому увеличению ширины уровней из-за неупругого рассеяния резонансные явления должны при достаточном увеличении

³ Автор приносит благодарность Г. Плачку за сообщение результатов этой работы до ее появления в печати.

энергии быстро ослабевать. Можно рассчитывать, что они сойдут на нет уже при энергиях порядка миллиона эв.

Если энергия падающего нейтрона достаточно велика, так что имеет смысл говорить о температуре остающегося возбужденного ядра, то средняя энергия уходящего нейтрона должна, очевидно, иметь порядок величины

$$\varepsilon \sim T, \quad (19)$$

где T — температура остающегося ядра. Более точный расчет показывает, что среднее значение ε лежит где-то около $2T$. Из (19) и (2) видно, что энергия вылетающего нейтрона растет пропорционально корню из энергии падающего нейтрона и при больших значениях этой последней значительно меньше ее. Если, например, на ядро падает нейтрон с энергией $10 \cdot 10^6$, то можно рассчитывать, что около $8 \cdot 10^6$ из этой энергии останется у возбужденного ядра.

§ 4. Ядерное излучение

Излучение высоковозбужденного ядра можно, исходя из статистических соображений, рассматривать как тепловое. В частности, можно применить к нему закон Кирхгоффа. К сожалению, однако, весьма трудно вычислить коэффициент поглощения ядра. Но можно рассчитывать, что так или иначе уже вид зависимости черного излучения от частоты приведет к тому, что в основном будут излучаться кванты с энергией

$$\hbar\omega \sim T, \quad (20)$$

где T — температура ядра. Таким образом, мы можем ожидать, что возбужденное ядро будет излучать свою энергию не сразу, а несколькими ступенями. В частности, при захвате нейтронов, вероятно, излучаются γ -лучи с частотой, соответствующей всего $1-3 \cdot 10^6$ эв.

В заключение я хочу поблагодарить Г. Плачека за интересные дискуссии по поводу этой работы.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. B e t h e. Phys. Rev., 50, 332, 1936.
 [2] H. B e t h e. Phys., Rev., 50, 977, 1936.*
 [3] H. B e t h e, G. P l a c z e k. Phys. Rev., 51, 450, 1937.

РАССЕЯНИЕ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ КРИСТАЛЛАМИ ВБЛИЗИ ТОЧКИ КЮРИ

ЖЭТФ, 7, 1232, 1937

Phys. Zs. Sowjet., 12, 123, 1937

Выведены формулы для интенсивности когерентного и некогерентного рассеяния рентгеновых лучей кристаллами вблизи точки Кюри. Определена зависимость интенсивности рассеяния от температуры. С помощью этих формул определено распределение интенсивности в пятнах на диаграмме Лауэ и кольцах на диаграмме Дебая — Шеррера.

При рассеянии рентгеновых лучей упорядоченными кристаллами кроме линий, наблюдаемых у неупорядоченных кристаллов, наблюдаются еще линии, обусловленные именно наличием упорядоченности, — сверхструктурные линии. При переходе кристалла в неупорядоченное состояние эти линии исчезают. Ниже исследуются свойства этого рассеяния вблизи точки перехода кристалла из упорядоченного в неупорядоченное состояние (точки Кюри).

Упорядоченность кристалла мы будем характеризовать «степенью упорядоченности» η , как и в [1] (ниже цитируется как I). В точке Кюри η обращается в нуль. Вблизи точки Кюри термодинамический потенциал Φ тела (единицы объема) имеет вид (см. I, мы пишем здесь $A/2$ и $B/4$ вместо A и B в I)

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\eta^2 A}{2} + \frac{\eta^4 B}{4} + \dots \quad (1)$$

(Φ_0 , A , B — функции от давления p и температуры T ; Φ_0 — термодинамический потенциал неупорядоченного кристалла). В упорядоченном кристалле вблизи точки Кюри из условия устойчивости состояния $\partial\Phi/\partial\eta = 0$ (см. I) имеем

$$\eta = \sqrt{-\frac{A}{B}}. \quad (2)$$

Коэффициент B положителен. Коэффициент A ниже точки Кюри (в упорядоченном состоянии) отрицателен, а выше (в неупорядоченном состоянии) положителен. В самой точке Кюри

$$A_c = 0. \quad (3)$$

Вблизи точки Кюри A можно разложить по степеням $\Theta - T$ (Θ — температура точки Кюри):

$$A = A_c + \frac{\partial A}{\partial T}(T - \Theta) + \dots \approx \frac{\partial A}{\partial T}(T - \Theta),$$

и потому из (2)

$$\eta = \sqrt{\frac{\beta(\Theta - T)}{B}}, \quad (4)$$

где мы обозначили $\partial A / \partial T = \beta$.

Рассмотрим сначала когерентное рассеяние. Амплитуды когерентного рассеяния атомом, находящимся в нормальном и ненормальном положениях, очевидно, равны и противоположны (мы называем нормальным положением атома то, которое атом данного рода занимал бы во вполне упорядоченном кристалле, и ненормальным положением — «чужое» место). В неупорядоченном кристалле ($\eta = 0$) число атомов в нормальном и ненормальном положениях одинаково, и поэтому амплитуда рассеяния равна нулю. Очевидно, что вблизи точки Кюри амплитуда рассеяния пропорциональна η , а интенсивность J_1 когерентного рассеяния пропорциональна η^2 . Из (4) мы видим, что

$$J_1 \sim \Theta - T, \quad (5)$$

т. е. интенсивность когерентного рассеяния пропорциональна расстоянию до точки Кюри.

Вблизи точки Кюри становится очень большим некогерентное рассеяние, происходящее от флуктуации упорядочения (подобно рассеянию света вблизи критической точки). Это связано с тем, что в точке Кюри, как мы сейчас покажем, флуктуация упорядочения делается бесконечной.

Найдем среднюю квадратичную флуктуацию $(\overline{\Delta\eta})^2$. Подчеркиваем, что эта флуктуация, а значит, и некогерентное рассеяние существуют, конечно, с обеих сторон точки Кюри — как в упорядоченном, так и в неупорядоченном состояниях. Как известно, вероятность флуктуации (при постоянных p и T) пропорциональна $\exp(-V\Delta\Phi/kT)^1$, где $\Delta\Phi$ — изменение термодинамического потенциала единицы объема при флуктуации, а V — объем тела.

¹ k обозначает постоянную Больцмана.

Выше точки Кюри, где при равновесии $\eta = 0$, отклонение $\Delta\eta = \eta$. Из (1) мы находим с точностью до η^2

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \frac{A\eta^2}{2} = \frac{A}{2} (\Delta\eta)^2.$$

Вероятность флуктуации, следовательно, пропорциональна

$$\exp \left\{ -\frac{A (\Delta\eta)^2 V}{2\kappa T} \right\}.$$

Среднее значение $\overline{(\Delta\eta)^2}$ отсюда

$$\overline{(\Delta\eta)^2} = \frac{\kappa T}{AV}. \quad (6)$$

Но в точке Кюри $A = 0$ (3), и потому $\overline{(\Delta\eta)^2} = \infty$.

Предыдущий вывод относится, конечно, к флуктуациям в каждой небольшой части тела. Вдоль всего тела флуктуация упорядочения, вообще говоря, не однородна. Это приводит к появлению размытой сверхструктурной линии рассеяния.

Пусть луч с волновым вектором \mathbf{k}_1 после рассеяния имеет волновой вектор \mathbf{k}_2 ; \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 отличаются, вообще говоря, только направлением. Амплитуда a рассеянного луча пропорциональна, как известно, интегралу

$$\int \rho e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} dV,$$

где ρ — плотность заряда в кристалле, а интеграл берется по всему объему кристалла. Вблизи точки Кюри ρ имеет вид

$$\rho = \rho_0 + \eta\rho_1,$$

где ρ_0 — функция плотности в неупорядоченном кристалле (она имеет симметрию неупорядоченного кристалла), а ρ_1 имеет симметрию упорядоченного кристалла (более низкую). Подробнее об этом см. I (в I мы писали $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, где $\delta\rho$ обращается в нуль в точке Кюри). Сверхструктурные линии происходят, конечно, именно от ρ_1 , так что искомая амплитуда a соответствующего рассеяния пропорциональна

$$a \sim \int \eta\rho_1 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} dV; \quad (7)$$

ρ_1 может быть представлено в виде

$$\rho_1 = \sum \lambda_i e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}},$$

где \mathbf{K}_i — периоды обратной решетки кристалла той симметрии, которую имеет ρ_1 . Среди \mathbf{K}_i есть такие периоды, которых нет в разложении ρ_0 . Только эти периоды нас сейчас и интересуют.

Рассмотрим рассеяние от одной из граней сверхструктурной решетки, т. е. от одного из K_i . Согласно (7) мы имеем для амплитуды этого рассеяния

$$a \sim \int \eta e^{i(k_1 - k_2 + K)r} dV = \int \eta e^{iqr} dV, \quad (8)$$

где $q = k_1 - k_2 + K$; интенсивность рассеянного луча определяется $|a|^2$. Степень упорядоченности η можно написать в виде $\eta = \bar{\eta} + \Delta\eta$, где $\bar{\eta}$ — среднее (постоянное) значение η , а $\Delta\eta$ — ее флуктуация. Интенсивность J пропорциональна

$$J \sim \left| \int \eta e^{iqr} dV \right|^2.$$

Если подставить сюда $\eta = \bar{\eta} + \Delta\eta$, то мы находим (помня, что $\overline{\Delta\eta} = 0$)

$$J \sim \left| \int \bar{\eta} e^{iqr} dV \right|^2 + \left| \int \Delta\eta e^{iqr} dV \right|^2. \quad (9)$$

Заметим, что в средней амплитуде

$$\bar{a} \sim \int \bar{\eta} e^{iqr} dV$$

нет члена с $\Delta\eta$. Таким образом, первый член в (9) (обозначим его как J_1) определяет когерентное рассеяние, второй же (J_2), которого нет в амплитуде, — некогерентное рассеяние. $\Delta\eta$ может меняться вдоль кристалла. Рассеяние с данным q определяется согласно (8) той частью $\Delta\eta$, которая имеет вид $\text{const} \cdot e^{-iqr}$. Ввиду того что $\Delta\eta$, конечно, есть величина действительная, интересующую нас часть можно написать в виде

$$\Delta\eta = ce^{-iqr} + c^* e^{iqr} \quad (10)$$

(* обозначает комплексно сопряженное).

Поскольку член $A\eta^2/2$ в разложении (1) вблизи точки Кюри мал, то, рассматривая флуктуации, являющиеся функциями координат, мы должны учитывать не только зависимость Φ от η , но и от градиента $\nabla\eta$. При этом, разумеется, мы должны разложить Φ по степеням $\nabla\eta$. Поскольку Φ есть скаляр, то первый член в этом разложении будет содержать $(\nabla\eta)^2$. Мы имеем, следовательно, теперь для Φ выражение

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{A}{2} \eta^2 + \frac{B}{4} \eta^4 + \frac{\alpha}{2} (\nabla\eta)^2. \quad (11)$$

Мы ограничимся рассмотрением только кубических кристаллов. Все результаты легко обобщить на кристаллы других си-

стем; вместо $1/2 \alpha (\nabla\eta)^2$ надо тогда писать

$$\sum_{i, k=1}^3 \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_k},$$

где α_{ik} — некоторый тензор.

Рассмотрим сначала рассеяние выше точки Кюри (в неупорядоченном состоянии). Здесь $\Delta\eta = \eta$, так как $\bar{\eta} = 0$. Термодинамический потенциал всего кристалла есть $\int \Phi dV$. Подставляя (11), имеем с точностью до членов порядка $(\Delta\eta)^2 = \eta^2$

$$\int (\Phi - \Phi_0) dV = \int \left(\frac{A}{2} \eta^2 + \frac{\alpha}{2} (\Delta\eta)^2 \right) dV,$$

или, подставляя (10),

$$\int (\Phi - \Phi_0) dV = (A + \alpha q^2) c c^* V$$

(замечаем, что интеграл $\int e^{i\mathbf{r}} dV = 0$, если $\mathbf{f} \neq 0$, и равен V , если $\mathbf{f} = 0$).

Как уже упоминалось выше, вероятность флуктуации пропорциональна $\exp\left(-\frac{1}{kT} \int (\Phi - \Phi_0) dV\right)$, где $\int (\Phi - \Phi_0) dV$ — изменение термодинамического потенциала тела при флуктуации. В рассматриваемом случае эта вероятность пропорциональна

$$\exp\left(-\frac{1}{kT} V (A + \alpha q^2) (c_1^2 + c_2^2)\right)$$

(комплексную постоянную c мы написали в виде $c = c_1 + ic_2$). Отсюда находим, что

$$\overline{c_1^2} = \overline{c_2^2} = \frac{kT}{2V(A + \alpha q^2)},$$

или

$$\overline{c c^*} = \frac{kT}{V(A + \alpha q^2)}. \quad (12)$$

В (9) выше точки Кюри первый член обращается в нуль (ввиду $\bar{\eta} = 0$), т. е. когерентное рассеяние отсутствует. Подставляя во второй член $\Delta\eta = \eta$ из (10) и $\overline{c c^*}$ из (12), находим для интенсивности $J = J_2$ рассеяния (некогерентного)

$$J \sim \overline{c c^*} V^2 = \frac{V k T}{A + \alpha q^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь рассеяние ниже точки Кюри. Здесь $\eta = \bar{\eta} + \Delta\eta$, причем

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{\beta}{B} (\Theta - T)}.$$

Подставляя в (11) $\eta = \bar{\eta} + \Delta\eta$, имеем с точностью до членов порядка $(\Delta\eta)^2$

$$\int (\Phi - \Phi(\bar{\eta})) dV = \int \left\{ \beta (\Theta - T) (\Delta\eta)^2 + \frac{\alpha (\nabla\eta)^2}{2} \right\} dV.$$

($\Phi(\bar{\eta})$ обозначает Φ при $\Delta\eta = 0$). Подставляя (10), имеем

$$\int (\Phi - \Phi(\bar{\eta})) dV = (2\beta (\Theta - T) + \alpha q^2) V c\bar{c}^*.$$

Аналогично (12) находим отсюда

$$\overline{c\bar{c}^*} = \frac{\kappa T}{(2\beta (\Theta - T) + \alpha q^2) V}. \quad (14)$$

Первый член в (9) — когерентное рассеяние — есть теперь

$$J_1 \sim \bar{\eta}^2 \left| \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \right|^2 = \frac{\beta}{B} (\Theta - T) \left| \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \right|^2. \quad (15)$$

Стоящий здесь квадрат интеграла преобразуем следующим образом. Квадрат модуля интеграла можно написать в виде двойного интеграла

$$\left| \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \right|^2 = \iint e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} dV_1 dV_2$$

или, переходя к переменным $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$,

$$\iint e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV dV'.$$

Интеграл по dV' дает просто объем V кристалла. Интеграл же

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV = 8\pi^3 \delta(\mathbf{q}),$$

где $\delta(\mathbf{q})$ обозначает произведение $\delta(q_x)\delta(q_y)\delta(q_z)$, а δ есть δ -функция. Написанное выражение следует из известной формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi \delta(\alpha).$$

Подставляя все это в (15), находим

$$J_1 \sim 8\pi^3 \frac{\beta}{B} (\Theta - T) \delta(\mathbf{q}) V. \quad (16)$$

Для J_2 имеем с помощью (14)

$$J_2 \sim \overline{c\bar{c}^*} V^2 = \frac{\kappa T V}{2\beta (\Theta - T) + \alpha q^2}. \quad (17)$$

Таким образом, для интенсивности рассеяния $J = J_1 + J_2$ мы получаем следующее выражение:

при $T < \Theta$

$$J \sim \frac{\Theta - T}{\Theta} \delta(\mathbf{q}) + \frac{\kappa}{16\pi^3 \Delta C_p} \frac{1}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + a q^2}. \quad (18)$$

При этом мы разделили сумму выражений (16) и (17) на постоянную $8\pi^3 \frac{\beta}{B} \Theta V$ (все равно (18) определяет J только с точностью до постоянного множителя). В (18) введены обозначения

$$a = \frac{\alpha}{\beta \Theta}, \quad \Delta C_p = \frac{\beta^2}{2B} \Theta$$

ΔC_p — скачок теплоемкости C_p при переходе через точку Кюри (см. (8) I); где возможно, в (18) написано Θ вместо T вследствие малости разности $\Theta - T$ (мы рассматриваем рассеяние вблизи точки Кюри).

Аналогично (18) напишем формулу (13) для рассеяния выше точки Кюри в виде

при $T > \Theta$

$$J \approx \frac{\kappa}{16\pi^3 \Delta C_p} \frac{1}{\frac{T - \Theta}{\Theta} + a q^2}. \quad (19)$$

Таким образом, при $T < \Theta$ сверхструктурная линия состоит из двух частей: 1) резкой линии когерентного рассеяния (первый член в (18)) для $\mathbf{q} = 0$, т. е. соответствующей брэгговскому условию отражения; 2) размытой линии некогерентного рассеяния (второй член в (18)); максимум интенсивности этой линии находится, конечно, при $\mathbf{q} = 0$. Первая линия исчезает в точке Кюри. Вторая же, наоборот, в точке Кюри имеет максимум; выше точки Кюри она описывается формулой (19).

Определим форму сверхструктурной линии (т. е. пятна) на рентгенограмме Лауэ. При получении лауэвской рентгенограммы первичный пучок лучей берется параллельный, но не монохроматический; другими словами, волновой вектор \mathbf{k}_i падающих лучей имеет для всех лучей одинаковое направление, но все возможные абсолютные величины. Кристалл имеет при этом определенную ориентацию, т. е. вектор периода обратной решетки \mathbf{K} постоянен. Таким образом, для нахождения распределения интенсивности в лауэвском пятне надо проинтегрировать (18) и (19) по всем частотам падающих лучей.

Центр пятна соответствует рассеянию под брэгговским углом, т. е. при выполнении условия $q = 0$, или

$$k_1 + K = k_2.$$

K — заданный вектор, k_1 имеет определенное направление, k_1 и k_2 имеют одинаковую абсолютную величину $k_1 = k_2 = k$; поэтому условие $k_1 + K = k_2$ может выполняться только для определенной частоты падающего света. Значение k , при котором выполняется это условие, обозначим, как k_0 , а соответствующие векторы k_1 и k_2 , как k_{10} и k_{20} . Векторы K , k_{10} и k_{20} образуют, очевидно, равнобедренный треугольник (см. рисунок). Введем также единичный вектор n_2 вдоль направления рассеяния, т. е. направления k_2 ; его значение при $k_2 = k_{20}$ пусть будет n_{20} . Напишем k и n_2 в виде

$$k = k_0(1 + \varepsilon), \quad n_2 = n_{20} + \nu. \quad (20)$$

Поскольку пятно, вообще говоря, невелико, то ε и ν малы.

Подставляя (20) в $q = k_1 - k_2 + K$, находим с точностью до членов первого порядка по ε и ν

$$q = -k_0\nu - K\varepsilon. \quad (21)$$

С другой стороны, возводя в квадрат равенство $k_{20} - K = k_{10}$, находим

$$k_0 = \frac{K^2}{2Kn_{20}}.$$

Выберем оси координат с осью z по n_{20} и осью x в плоскости, в которой лежат векторы k_{10} , k_{20} , K (см. рисунок). Тогда полученное выражение для k_0 можно написать в виде

$$k_0 = \frac{K^2}{2K_z},$$

и (21) приобретает вид

$$q = -\frac{K^2}{2K_z}\nu - K\varepsilon. \quad (22)$$

Легко убедиться в том, что q^2 можно написать в виде

$$q^2 = K^2 \left(\varepsilon + \frac{K\nu}{2K_z} \right)^2 + \frac{K^2 [K\nu]^2}{4K_z^2}. \quad (23)$$

Ввиду того что \mathbf{K} лежит в плоскости xz , а \mathbf{v} как малое изменение вектора \mathbf{p}_{20} перпендикулярно \mathbf{p}_{20} , т. е. не имеет составляющей по оси x , для векторного произведения $[\mathbf{K}\mathbf{v}]$ имеем

$$[\mathbf{K}\mathbf{v}]^2 = K_z^2 v_x^2 + K^2 v_y^2.$$

v_x и v_y являются, очевидно, синусами углов рассеяния, отсчитываемых от направления рассеяния к центру пятна; ввиду малости этих углов их можно считать равными просто v_x и v_y .

Перейдем теперь к интегрированию (18) по всем частотам падающих лучей, т. е. по всем k ; это интегрирование можно заметить интегрированием по ε . Ввиду (22) можно написать

$$\int \delta(\mathbf{q}) d\varepsilon = \int \delta(-\varepsilon K_z) \delta\left(-\varepsilon K_x - \frac{K^2 v_x}{2K_z}\right) \delta\left(-\varepsilon K_y - \frac{K^2 v_y}{2K_z}\right) d\varepsilon.$$

Ввиду того, что $\delta(x) = \delta(-x)$ и $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$,

$$\delta(-\varepsilon K_z) = \frac{1}{K_z} \delta(\varepsilon).$$

Благодаря наличию в написанном интеграле $\delta(\varepsilon)$ при интегрировании по $d\varepsilon$ в двух остальных δ -функциях надо положить $\varepsilon = 0$, т. е.

$$\int \delta(\mathbf{q}) d\varepsilon = \frac{1}{K_z} \delta\left(\frac{K^2 v_x}{2K_z}\right) \delta\left(\frac{K^2 v_y}{2K_z}\right) = \frac{4K_z}{K^2} \delta(\mathbf{v}), \quad (24)$$

где $\delta(\mathbf{v}) = \delta(v_x) \delta(v_y)$.

Для интеграла во втором члене v_x^2 (18) имеем, подставляя (23)

$$\int \frac{d\varepsilon}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + aq^2} = \int \frac{d\varepsilon}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + aK^2 \left(\varepsilon + \frac{Kv}{2K_z}\right)^2 + a \frac{K^2 [\mathbf{K}\mathbf{v}]^2}{4K_z^2}}.$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла пределы интегрирования можно взять $\pm \infty$, и мы находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + aq^2} = \frac{\pi}{K \sqrt{a \left(2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + a \frac{K^2}{4K_z^2} [\mathbf{K}\mathbf{v}]^2\right)}}. \quad (25)$$

С помощью (24) и (25) находим из (18) распределение интенсивности в лауэвском пятне в виде

при $T < \Theta$

$$J \sim \frac{\Theta - T}{\Theta} \delta(\mathbf{v}) + \frac{\kappa K^2}{32 \pi^2 \Delta C_p a \sqrt{K_z^2 v_x^2 + K^2 v_y^2 + \frac{8K_z^2}{aK^2} \frac{\Theta - T}{\Theta}}}. \quad (26)$$

Мы опять разделили на постоянную так, чтобы коэффициент при $\delta(\nu)$ был просто $(\Theta - T)/\Theta$.

Совершенно аналогично выше точки Кюри находим:
при $T > \Theta$

$$J \sim \frac{\kappa K^2}{32 \pi^2 \Delta C_p a \sqrt{K_z^2 \nu_x^2 + K^2 \nu_y^2 + \frac{4K_z^2}{aK^2} \frac{T - \Theta}{\Theta}}} \quad (27)$$

Таким образом, ниже точки Кюри, вокруг очень резкого максимума в центре пятна (первый член в (26), при $T > \Theta$ его нет), имеется размытое пятно (второй член), происходящее от некогерентного рассеяния. Это размытое пятно тоже имеет максимум интенсивности в центре (при $\nu = 0$), но само оно все же имеет диффузный характер. Последнее видно из того, что интеграл от второго члена (26) или от (27) во всем ν_x и ν_y расходится.

Для оценки порядка величины интенсивности некогерентного рассеяния заметим, что $a = \alpha/\beta\Theta$ имеет порядок величины $a \approx \approx 1/K^2$. Это видно из того, что если η меняется на протяжении одной постоянной решетки, то при температурах, не очень близких к точке Кюри, второй и четвертый члены разложения Φ (11) одного порядка (т. е. если $\nabla\eta \approx \eta K$, должно быть $\beta\Theta\eta^2 \sim \sim \alpha(\nabla\eta)^2$). Далее, скачок теплоемкости, отнесенный на одну элементарную ячейку, порядка κ , и поэтому ΔC_p , отнесенное к единице объема,

$$\Delta C_p \approx \frac{\kappa}{(2\pi/K)^3} = \frac{\kappa K^3}{8\pi^3}.$$

Коэффициент в (26) примерно компенсируется, и мы находим, что второй член в (26) порядка

$$\sqrt{\frac{\Theta}{\Theta - T}}. \quad (28)$$

Для сравнения укажем, что интегральная интенсивность, соответствующая первому члену в (26), равна

$$\frac{\Theta - T}{\Theta}. \quad (29)$$

Наконец, сравнивая оба члена под корнем в (26) или (27), находим, что средняя «ширина» $\bar{\nu}$ размытого пятна порядка

$$\bar{\nu} \sim \sqrt{\frac{|\Theta - T|}{\Theta}}. \quad (30)$$

Определим распределение интенсивности в сверхструктурной линии (т. е. кольце) на рентгенограмме Дебая — Шеррера. Теперь падающие лучи имеют определенное направление и определенную частоту, т. е. k_1 имеет определенное значение. Кристаллы же (в порошке) имеют всевозможные ориентации, т. е. K , будучи определенным по абсолютной величине, может иметь всевозможные направления. Для нахождения распределения интенсивности в дебай-шерреровском кольце надо, следовательно, усреднить (18) и (19) по всем направлениям вектора K .

Усредним по направлениям вектора K первый член в (18). Для этого мы должны помножить его на

$$\frac{\delta(|K| - K) dK_x dK_y dK_z}{4\pi K^2}$$

и проинтегрировать по $dK_x dK_y dK_z$. При этом

$$\int \delta(k_1 + K - k_2) \delta(|K| - K) dK_x dK_y dK_z = \delta(|k_2 - k_1| - K).$$

Вводя абсолютную величину $k = k_1 = k_2$ векторов k_1 и k_2 и угол φ между ними (т. е. угол рассеяния), имеем

$$\delta(|k_2 - k_1| - K) = \delta\left(2k \sin \frac{\varphi}{2} - K\right).$$

Отражению под брэгговским углом соответствует угол рассеяния $\varphi = \varphi_0$, определяющийся из

$$K = 2k \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Ввиду того что угол $\varphi - \varphi_0$ в δ -функции всегда мал, можно написать:

$$\begin{aligned} \delta\left(2k \sin \frac{\varphi}{2} - K\right) &= \delta\left(K \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - K\right) = \delta\left[\frac{K}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} (\varphi - \varphi_0)\right] = \\ &= \delta[K(\chi - \chi_0)] = \frac{1}{K} \delta(\chi - \chi_0), \end{aligned}$$

где

$$\chi = \ln \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (31)$$

С помощью всех этих формул получаем в результате усреднения первого члена в (18)

$$J_1 \sim \frac{1}{4\pi K^2} \frac{\Theta - T}{\Theta} \delta(\chi - \chi_0). \quad (32)$$

Для усреднения второго члена в (18) обозначим посредством ϑ угол между K и вектором $k_2 - k_1 = f$, умножим усредняемое

выражение на $2\pi \sin \vartheta d\vartheta / 4\pi$ и проинтегрируем по $d\vartheta$ от 0 до π . Мы имеем тогда для J_2

$$J_2 \sim \frac{\kappa}{16\pi^3 \Delta C_p} \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + a f^2 + a K^2 - 2a f K \cos \vartheta} =$$

$$= - \frac{\kappa}{64\pi^3 \Delta C_p a K} \ln \frac{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + a (f - K)^2}{2 \frac{\Theta - T}{\Theta} + a (f + K)^2}.$$

Но

$$f = |k_2 - k_1| = 2k \sin \frac{\varphi}{2} = K \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Поэтому ввиду малости $\varphi - \varphi_0$

$$f - K \approx \frac{K}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} (\varphi - \varphi_0) = K (\chi - \chi_0), \quad f + K \approx 2K.$$

Ввиду малости разности $\Theta - T$ в знаменателе выражения, стоящего под знаком \ln в J_2 , можно пренебречь $(\Theta - T) / \Theta$. Мы находим тогда

$$J_2 \sim - \frac{\kappa}{64\pi^3 \Delta C_p a K^2} \ln \left[\frac{(\chi - \chi_0)^2}{4} + \frac{\Theta - T}{2aK^2\Theta} \right]. \quad (33)$$

Складывая (32) и (33) и деля сумму на постоянную $(4\pi K^3)^{-1}$, находим окончательно:

при $\Theta > T$

$$J \sim \frac{\Theta - T}{\Theta} \delta(\chi - \chi_0) - \frac{\kappa K}{16\pi^3 \Delta C_p a} \ln \left[\frac{(\chi - \chi_0)^2}{4} + \frac{\Theta - T}{2aK^2\Theta} \right]. \quad (34)$$

Совершенно аналогично выше точки Кюри находим:

при $T > \Theta$

$$J \sim - \frac{\kappa K}{16\pi^3 \Delta C_p a} \ln \left[\frac{(\chi - \chi_0)^2}{4} + \frac{T - \Theta}{4aK^2\Theta} \right]. \quad (35)$$

Мы видим, следовательно, что интенсивность некогерентного рассеяния очень медленно возрастает с уменьшением $\Theta - T$. По порядку величины вблизи максимума второй член в (34) равен

$$\ln \frac{\Theta}{\Theta - T}. \quad (36)$$

Украинский физико-технический институт,
Харьков

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау. ЖЭТФ, 7, 19, 1937 (Собр. трудов, № 28).

РАССЕЯНИЕ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ КРИСТАЛЛАМИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

ЖЭТФ, 7, 1227, 1937

Phys. Zs. Sowjet., 12, 579, 1937

Выведена формула для распределения интенсивности в рентгеновских линиях при рассеянии от кристаллов с переменной слоистой структурой. Разобрана форма пятен на рентгенограмме Лауэ и линий на рентгенограмме вращения.

Известен ряд кристаллов, обладающих «переменной структурой», т. е. состоящих из отдельных участков правильной структуры, решетки которых сдвинуты друг относительно друга [1—4]. В частности, в некоторых случаях этими областями являются, по видимому, плоскопараллельные пластинки, так что весь кристалл как бы состоит из ряда слоев с правильной структурой, сдвинутых друг относительно друга. В этой работе мы рассматриваем именно этот случай.

Интенсивность J рассеяния луча с волновым вектором k_1 , при котором рассеянный луч имеет волновой вектор k_2 , пропорциональна, как известно, следующему выражению:

$$J \sim \left| \int \rho e^{i(k_1 - k_2)r} dV \right|^2, \quad (1)$$

где интеграл берется по всему объему кристалла, а ρ — плотность заряда в кристалле. Как известно, ρ может быть представлено в виде

$$\rho = \sum a_i e^{iK_i r},$$

где K_i — периоды обратной решетки. Рассеяние от одной из граней решетки определяется соответствующим членом этого разложения.

Рассмотрим рассеяние от одной грани решетки, т. е. рассеяние вблизи какой-нибудь брэгговской линии. Пусть \mathbf{K} — соответствующий период обратной решетки; в ρ мы должны рассматривать тогда только член, пропорциональный $e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}$. Для идеального монокристалла, подставив в (1) $\rho = \text{const} \cdot e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}$ и вводя обозначение

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{K}, \quad (2)$$

находим, что

$$J \sim 8\pi^3 \delta(\mathbf{q}) V, \quad (3)$$

где V — объем кристалла, а $\delta(\mathbf{q})$ — произведение трех δ -функций:

$$\delta(\mathbf{q}) = \delta(q_x) \delta(q_y) \delta(q_z).$$

Пусть теперь кристалл имеет переменную структуру, разделяясь параллельными плоскостями (параллельными плоскости XY) на ряд слоев, из которых каждый обладает правильной решеткой (одинаковой у всех слоев). Решетка каждого слоя смещена относительно решетки предшествующего слоя на некоторый постоянный вектор \mathbf{r} . Мы предположим, что для всех пар слоев вектор \mathbf{r} одинаков (аналогичный дальнейшему вывод может быть произведен и в случае, когда \mathbf{r} может иметь несколько различных значений). Если рассматриваемая часть плотности ρ в одном из слоев равна $Ce^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}$, то в следующем слое ρ будет, очевидно, равно $Ce^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}+\mathbf{r})}$.

Интеграл в (1) разбивается на сумму интегралов по каждому из слоев:

$$\int \rho e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}} dV = \sum_{n=0}^{N-1} \int \rho_n e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}} dV_n,$$

где слои пронумерованы от 0 до $N - 1$. Подставляя для n -го слоя $\rho_n \approx \exp\{i\mathbf{K}(n\mathbf{r} + \mathbf{r})\}$ и вводя обозначение

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \chi,$$

находим

$$J \sim \left| \int \rho e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}} dV \right|^2 \sim \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\chi} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV_n \right|^2.$$

Интегрирование по координатам x и y производится по всей площади S сечения кристалла и дает совершенно аналогично тому как получалось (3), $4\pi^2 S \delta(q_x) \delta(q_y)$. Интегрирование же по z в n -ом слое производится в пределах между z_n и z_{n+1} , где z_n —

координата n -й плоскости раздела между слоями. В результате мы находим

$$J \sim \frac{4\pi^2 S \delta(q_x) \delta(q_y)}{q_z^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\chi} (e^{iq_z z_{n+1}} - e^{iq_z z_n}) \right|^2.$$

Ввиду того что N очень велико, это можно написать в виде

$$\begin{aligned} J &\sim \frac{4\pi^2 S \delta(q_x) \delta(q_y)}{q_z^2} |e^{i\chi} - 1|^2 \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\chi} e^{iq_z z_n} \right|^2 = \\ &= \frac{16\pi^2 \delta(q_x) \delta(q_y) \sin^2(\chi/2)}{q_z^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\chi} e^{iq_z z_n} \right|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Квадрат модуля суммы можно написать в виде двойной суммы

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\chi} e^{iq_z z_n} \right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=n}^{N-1-n} e^{i(l-n)\chi} e^{iq_z(z_n - z_{n-l})}. \quad (5)$$

Ввиду больших значений N можно написать вместо этого

$$N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{e^{i(l-n)\chi} e^{iq_z(z_n - z_{n-l})}},$$

где черта обозначает усреднение по различным n .

Введем толщины d_n слоев

$$d_n = z_{n+1} - z_n. \quad (6)$$

Тогда при $l > 0$

$$z_n - z_{n-l} = d_{n-l} + d_{n-l+1} + \dots + d_{n-1}$$

и при $l < 0$

$$z_n - z_{n-l} = -d_n - d_{n+1} - \dots - d_{n-l-1}.$$

Будем считать, что между толщинами различных слоев нет никакой корреляции, т. е. что вероятность иметь ту или иную толщину для одного слоя не зависит от вероятностей для других слоев. Обозначим посредством ξ среднее значение:

$$\xi = \overline{e^{iq_z d}}, \quad (7)$$

где d — толщина какого-нибудь слоя.

Ввиду отсутствия корреляции между толщинами слоев можно, очевидно, написать при $l > 0$

$$\overline{e^{iq_z(z_n - z_{n-l})}} = (\overline{e^{iq_z d}})^l = \xi^l$$

и при $l < 0$

$$\overline{e^{iq_z(z_n - z_{n-l})}} = (\overline{e^{-iq_z d}})^l = \xi^{*l},$$

где ξ^* — комплексно сопряженная от ξ .

Тогда мы находим приближенно

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^{N-1} e^{inx} e^{iq_z z_n} \right|^2 &\approx N \left(1 + \sum_1^{\infty} \xi^l e^{ilx} + \sum_1^{\infty} \xi^{*l} e^{-ilx} \right) = \\ &= N \left(1 + \frac{\xi e^{ix}}{1 - \xi e^{ix}} + \frac{\xi^* e^{-ix}}{1 - \xi^* e^{-ix}} \right) = N \frac{1 - \xi \xi^*}{(1 - \xi e^{ix})(1 - \xi^* e^{-ix})} \end{aligned}$$

(очевидно, что $|\xi| < 1$ и потому прогрессии сходятся). Подставляя это в (4), имеем

$$J \sim \frac{16\pi^2 SN}{q_z^2} \delta(q_x) \delta(q_y) \frac{\sin^2(\chi/2)(1 - |\xi|^2)}{|1 - \xi e^{ix}|^2}. \quad (8)$$

При сделанном уже предположении об отсутствии корреляции при отыскании распределения вероятностей $w(d)$ толщин слоев естественно исходить из предположения, что вероятность увеличения толщины слоя на данную величину при его образовании не зависит от толщины, которую он уже имеет. Как известно, это приводит к распределению вероятностей вида $w(d) \sim e^{-\text{const} \cdot d}$. Нормировка дает

$$w(d) = \frac{e^{-d/\bar{d}}}{\bar{d}}, \quad (9)$$

где \bar{d} — средняя толщина. С помощью (9) находим, что

$$\xi = \frac{1}{1 - iq_z \bar{d}}$$

и (8) превращается в

$$J \sim \frac{16\pi^2 S}{q_z^2} \delta(q_x) \delta(q_y) N \frac{q_z^2 \bar{d}^2 \sin^2(\chi/2)}{[4 \sin^2(\chi/2) + 2 \sin \chi \cdot q_z \bar{d} + q_z^2 \bar{d}^2]}. \quad (10)$$

Выберем коэффициент в этом выражении так, чтобы при той же нормировке интенсивность J для монокристалла с правильной структурой имела бы вид просто

$$J \sim \delta(q).$$

Как видно из (3), для этого надо разделить (10) на $8\pi^3 V = 8\pi^3 N \bar{d} S$. Окончательно получаем

$$J \sim \frac{2\bar{d} \sin^2(\chi/2)}{\pi} \frac{\delta(q_x) \delta(q_y)}{(q_z \bar{d} + \sin \chi)^2 + (1 - \cos \chi)^2}. \quad (11)$$

Это выражение имеет относительно q_z так называемую дисперсионную форму, максимум которой смещен относительно брэгговской линии $q_z = 0$ на

$$\Delta q_z = - \frac{\sin \chi}{\bar{d}}. \quad (12)$$

Ширина δq_z линии равна

$$\delta q_z = \frac{1 - \cos \chi}{\bar{d}}. \quad (13)$$

q имеет составляющую только по оси z , как видно из наличия $\delta(q_x) \delta(q_y)$ в (11). Поэтому можно написать

$$k_1 - k_2 + K = q_z z, \quad (14)$$

где z — единичный вектор по оси z ; k_2 и k_1 имеют одинаковую абсолютную величину (частота при рассеянии не меняется) $k_1 = k_2 = k$. Единичные векторы в направлениях k_2 и k_1 обозначим посредством n_2 и n_1 .

Применим (11) для определения формы пятна на рентгенограмме Лауэ. При этом кристалл неподвижен, т. е. $K = \text{const}$; падающий пучок имеет постоянное направление ($n_1 = \text{const}$), но всевозможные частоты, т. е. k . Пусть k_{10} и $k_{20} = k_0 n_{20}$ — волновые векторы падающего и рассеянного лучей, при которых выполняется брэгговское условие, т. е.

$$k_{20} - k_{10} = k_0 (n_{20} - n_1) = K, \quad (15)$$

а δk_1 и δk_2 — отклонения k_1 и k_2 от этих значений. Подставляя $k_1 = k_{10} + \delta k_1$, $k_2 = k_{20} + \delta k_2$ в (14), имеем

$$\delta k_1 - \delta k_2 = - \delta k (n_{20} - n_1) - k \delta n_2 = q_z z$$

или, подставляя (15),

$$\frac{K}{k_0} \delta k + k_0 \delta n_2 = - q_z z. \quad (16)$$

δn_2 как малое изменение единичного вектора n_2 перпендикулярно n_{20} и, кроме того, как видно из (16), лежит в плоскости векторов z и K . Поэтому можно написать

$$\delta n_2 = \alpha [n_{20} [zK]],$$

где α — некоторая постоянная. Подставляя это в (16) и умножая обе стороны векторно на K , находим

$$q_z = - \alpha k_0 (Kn_{20}).$$

Следовательно,

$$\delta n_2 = \frac{q_z [[zK] n_{20}]}{k_0 (Kn_{20})}. \quad (17)$$

Таким образом, пятно расширяется в направлении, определяемом вектором $[[zK] n_{20}]$. Абсолютная величина δn_2 есть, очевидно, не что иное, как угол φ между направлением n_2 рассеянного луча и его направлением n_{20} при выполнении брэгговского условия.

Из (12), (13) и (17) находим, что линия имеет дисперсионную форму; смещение $\Delta\varphi$ центра пятна относительно брэгговского

$$\Delta\varphi = -\frac{\sin \chi}{\bar{d}} \frac{|[[zK] n_{20}]|}{k_0 (Kn_{20})},$$

и ширина пятна

$$\delta\varphi = \frac{1 - \cos \chi}{\bar{d}} \frac{|[[zK] n_{20}]|}{k_0 (Kn_{20})}. \quad (18)$$

Применим теперь (12) и (13) для определения формы линии на рентгенограмме вращения. При этом падающий пучок имеет определенное направление и частоту ($k_1 = \text{const}$, т. е. $n_1 = \text{const}$, $k = \text{const}$), а кристалл вращается, т. е. K имеет переменное направление. При выполнении брэгговского условия пусть опять $K = K_0$, $k_2 = k_{20}$:

$$k_{20} - k_1 = K_0.$$

Подстановка $k_2 = k_{20} + \delta k_2$, $K = K_0 + \delta K$ дает теперь

$$\delta K - \delta k_2 = \delta K - k \delta n_2 = q_z z_0 \quad (19)$$

для z тоже надо теперь писать $z = z_0 + \delta z$; поскольку q_z само мало, то членом $q_z \delta z$ пренебрегаем). Помня, что δK , будучи малым изменением вектора K без изменения его абсолютной величины, перпендикулярно K_0 , находим аналогично предыдущему

$$\delta n_2 = \alpha [n_{20} [z_0 \delta K]],$$

$$q_z = -\alpha k (n_{20} \delta K),$$

откуда

$$\delta n_2 = \frac{q_z [[z_0 \delta K] n_{20}]}{k (n_{20} \delta K)}. \quad (20)$$

Для δK сюда надо подставить известное выражение для изменения вектора при повороте

$$\delta K = [\delta \Omega \cdot K],$$

где $\delta \Omega$ — вектор, по величине равный углу поворота и направ-

ленный по оси, вокруг которой производится поворот. Абсолютная величина $\delta\Omega$ в (20), конечно, сокращается. Аналогично формуле (18) имеем теперь

$$\Delta\varphi = -\frac{\sin\chi}{\bar{d}} \frac{|[[z_0\delta K] n_{20}]|}{k(n_{20}\delta K)},$$

$$\delta\varphi = \frac{1 - \cos\chi}{\bar{d}} \frac{|[[z_0\delta K] n_{20}]|}{k(n_{20}\delta K)}. \quad (21)$$

Обычно χ близко либо к нулю, либо к π . Существенное расширение получается, конечно, только во втором случае.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Dehlinger, I. Graf. Zs. Phys., 64, 359, 1930.
- [2] C. H. Johanson, J. O. Linde. Ann. der Phys., 25, 1, 1936.
- [3] J. M. Bijvoet, W. Nieuwenkamp. Zs. Krist., 86, 466, 1933.
- [4] В. Горский. ЖЭТФ, 5, 770, 1935.

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИВНЕЙ ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Совместно с Ю. Б. РУМЕРОМ

Nature, 140, 682, 1937

Карлсон и Оппенгеймер [1] и Баба и Гайтлер [2] предложили весьма остроумное объяснение образования ливней при помощи мультипликативного рождения фотонов, электронов и позитронов. Следуя ему, можно считать, что большая часть наблюдаемых ливней генерируется электронами, позитронами или фотонами, проникающими из атмосферы. Такие ливни поглощаются слоем свинца достаточной толщины. Известно, однако, что частота ливней на уровне моря и в особенности под землей с возрастанием толщины слоя свинца не уменьшается, а, напротив, стремится к некоторому пределу. Мы хотели бы указать, что это явление не требует для своего объяснения новой концепции ливней; оно может быть отнесено за счет облучения тяжелыми частицами, которые легко проникают сквозь такие слои свинца.

Более строгое рассмотрение ливней [3] показывает, что ливень имеет определенную длину, даваемую формулой

$$L = 0,25 \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{mc^2}{e^2} \right)^2 \frac{1}{\bar{Z}N} \ln \frac{E}{\varepsilon},$$

где \hbar , c , e имеют обычный смысл, m — масса электрона, N — число электронов в 1 см^3 , $\bar{Z} = \sum N_z Z (Z + 1) / \sum N_z Z$ (N_z — число атомов с зарядом Ze), E — энергия падающей частицы и ε — некоторая критическая энергия, равная по порядку величины $750 / \bar{Z} \text{ Мэв}$.

Комбинируя эту формулу с хорошо известной формулой для вероятности излучения тяжелой частицей, получаем вероятность того, что ливень, образованный фотоном, испущенным

тяжелой частицей, выходит из слоя достаточной толщины:

$$W = 0,8 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(\ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^2 \ln \frac{E}{(Mc^2)^{1/2} \varepsilon^{1/2}};$$

здесь M — масса тяжелой частицы, а ее энергия E по предположению $\gg Mc^2$. Если, как предположили Андерсон и Ниддермайер [4], для M взять значение, равное нескольким десяткам электронных масс, то получается хорошее согласие с наблюдаемым порядком величины.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Carlson, Oppenheimer. Phys. Rev., 51, 220, 1937.
 [2] Bhabha, Heitler. Proc. Roy. Soc., A 159, 432, 1937.
 [3] L. Landau, G. Rumer. Proc. Roy. Soc., A166, 213, 1938 (Собр. трудов, № 36).
 [4] Anderson, Neddermeyer. Phys. Rev., 51, 887, 1937.

**СТАБИЛЬНОСТЬ НЕОНА И УГЛЕРОДА
ПО ОТНОШЕНИЮ К α -РАСПАДУ**

Phys. Rev., 52, 1251, 1937

В недавней статье Калькар, Оппенгеймер и Сербер [1] предложили слабую $l-s$ -связь в качестве объяснения наблюдавшейся экспериментально стабильности составных ядер Ne^{20} , C^{12} по отношению к α -распаду. Под слабостью связи следовало бы понимать, что энергия связи мала по сравнению с расстоянием между энергетическими уровнями. Однако хорошо известно, что расстояния между уровнями энергии в тяжелых ядрах очень мало и в упомянутых элементах, несомненно, много меньше энергии $l-s$ -связи. Поэтому такое объяснение аномальной стабильности представляется несостоятельным.

Я хотел бы указать, что нет никакой нужды искать специальных объяснений, поскольку наблюдавшееся явление может быть понято на основании фундаментальных законов сохранения, в число которых, как хорошо известно из волновой механики, входит также сохранение четности. Может оказаться, как уже было показано Ферми для случая атомов, что распад, который допустим энергетически, не сможет произойти в силу этого закона сохранения. Предположим, например, что интересующее нас состояние является нечетным с нулевым угловым моментом, а состояния частиц, образовавшихся после распада, — четными с моментами, также равными нулю. Тогда легко видеть, что ни одно состояние относительного движения не может удовлетворить одновременно законам сохранения углового момента и четности.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kalckar, Oppenheimer, Serber. Phys. Rev., 52, 279, 1937.

Совместно с Ю. Б. РУМЕРОМ

Proc. Roy. Soc., A166, 213, 1938

§ 1. Недавно Баба и Гайтлер [1], а также Карлсон и Оппенгеймер [2] предложили весьма остроумную теорию ливней, которая объясняет почти все наблюдаемые явления, однако в обеих трактовках содержатся приближения, справедливость которых не всегда можно обосновать. В вычислениях первых авторов используется метод последовательных приближений, чью точность трудно оценить, в то время как вторые заменяют одно из основных уравнений на отличное от него уравнение, причем не видно, в какой степени эта замена искажает окончательный результат. Поэтому мы думаем, что было бы полезно произвести вычисления более строгим образом; однако основные физические идеи остаются теми же самыми, что и у упомянутых выше авторов.

§ 2. Рассмотрим быстрый электрон, влетающий в слой вещества; пока его энергия по порядку величины лежит ниже определенного значения, потери энергии электроном будут определяться главным образом ионизацией, однако для более высоких энергий становятся более существенными потери энергии на излучение (тормозное излучение). Эта критическая энергия лежит в области около $\varepsilon = 750 / \bar{Z} \text{ Мэв}$, где \bar{Z} означает определенным образом усредненный заряд ядер (если присутствуют ядра нескольких атомов разных типов). Поскольку тормозное излучение, которое определяется взаимодействием между электроном и полем ядра, возрастает, как Z^2 , в то время как ионизация приблизительно пропорциональна числу электронов вещества, наиболее подходящим определением \bar{Z} является

$$\bar{Z} = \sum_i n_i Z_i (Z_i + 1) / N, \quad (1)$$

где n_i — число ядер в 1 см^3 , имеющих заряд Z_i , а N — полное число электронов в 1 см^3 . Мы поставили в числителе $Z_i (Z_i + 1)$ вместо Z_i^2 , так как в случае излучения при столкновении следует

учитывать не только взаимодействие с ядром, но также и с электронами; об этом очень нужно помнить в случае водорода. То же самое ϵ является критической энергией, при которой поглощение фотонов за счет образования пар начинает становиться более важным, чем поглощение за счет эффекта Комптона.

§ 3. Рассмотрим частицу (электрон, позитрон) или фотон, движущуюся перпендикулярно границе достаточно толстого слоя вещества. Если энергия частицы внутри слоя достаточно высока, то будут возникать фотоны (образованные при тормозном излучении) и новые «материальные частицы» (путем образования пар), другими словами, будет генерироваться ливень. Рассмотрим, как будут меняться числа частиц $\Pi(E)dE$ и фотонов $\Gamma(E)dE$ с энергиями в интервале dE на расстоянии x от поверхности слоя за счет образования пар и тормозного излучения (мы считаем, что энергия настолько велика, что можно пренебречь эффектом Комптона и ионизацией).

Пусть $\gamma(E, E')dE'$ представляет собой вероятность, отнесенную к единице длины пути, образования электрона с энергией между E' и $E' + dE'$ фотоном с энергией E , а $\pi(E, E')dE'$ — вероятность излучения фотона с энергией между E' и $E' + dE'$ электроном с энергией E . Тогда быстрота изменения $\Pi(E)$ за счет образования пар будет равна

$$\left(\frac{d\Pi(E)}{dx}\right)_P = 2 \int_E^{\infty} \Gamma(u) \gamma(u, E) du. \quad (2)$$

Множитель 2 появляется потому, что всегда с равной вероятностью рождаются две частицы (электрон и позитрон). Точно так же быстрота изменения $\Pi(E)$, вызванная излучением, будет

$$\left(\frac{d\Pi(E)}{dx}\right)_R = \int_E^{\infty} \Pi(u) \pi(u, u-E) du - \int_0^E \Pi(E) \pi(E, E-u) du. \quad (3)$$

Первый член дает число частиц с энергией, большей, чем E , которые теряют энергию, излучая фотон и переходя за счет этого в интервал энергии между E и $E + dE$; второй член — число частиц, которые покидают этот интервал, испустив фотон. Подобным же образом для быстроты изменения числа фотонов $\Gamma(E)$ имеем

$$\left(\frac{d\Gamma(E)}{dx}\right)_P = - \int_0^E \Gamma(E) \gamma(E, u) du, \quad (4)$$

$$\left(\frac{d\Gamma(E)}{dx}\right)_R = \int_E^{\infty} \Pi(u) \pi(u, E) du. \quad (5)$$

Таким образом, для полной величины изменения числа материальных частиц и фотонов получаем

$$\frac{d\Pi(E)}{dx} = 2 \int_E^{\infty} \Gamma(u) \gamma(u, E) du + \int_E^{\infty} \Pi(u) \pi(u, u-E) du - \int_0^E \Pi(E) \pi(E, E-u) du, \quad (6)$$

$$\frac{d\Gamma(E)}{dx} = \int_E^{\infty} \Pi(u) \pi(u, E) du - \int_0^E \Gamma(E) \gamma(E, u) du. \quad (7)$$

Эти уравнения представляют собой основу каскадной теории ливней.

§ 4. Выражения для $\gamma(E, E')$ и $\pi(E, E')$ были даны Бете и Гайтлером [3]. Для интересующей нас здесь области энергий экранирование можно считать полным, и мы имеем

$$\gamma(E, E') = A \frac{E'^2 + (E - E')^2 + \frac{2}{3} E' (E - E')}{E^3}, \quad (8)$$

$$\pi(E, E') = A \frac{E^2 + (E - E')^2 - \frac{2}{3} E (E - E')}{E^2 E'}, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{4}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 N \bar{Z} \ln 183 \bar{Z}^{-1/3} \text{ см}^{-1}. \quad (10)$$

Подставляя числовые значения, находим

$$A = 1,19 \cdot 10^{-26} N \bar{Z} (1 - 0,067 \ln \bar{Z}). \quad (10a)$$

Удобно, следуя Карлсону и Оппенгеймеру [2], измерять длины x в безразмерных единицах так, что длина x определяется как

$$x = \frac{t}{A}. \quad (11)$$

Получаемые отсюда длины в сантиметрах, соответствующие единичному значению t для различных материалов, вместе со значениями \bar{Z} и e приведены в табл. 1. Высота атмосферы отвечает $t = 26$.

Когда это сделано, все постоянные, характеризующие вещество, исчезают из основных уравнений, которые теперь

Т а б л и ц а 1

	\bar{Z}	$\epsilon, M\epsilon\epsilon$	Эквивалентная толщина, соответствующая $t = 1, \text{ см}$
Al	14	50	9,2
Pb	83	9	0,52
H ₂ O	7,6	100	38,0
Воздух	8,3	90	39,0

принимают вид

$$\frac{d\Pi(E)}{dt} = \int_E^{\infty} \Pi(u) \frac{u^2 + E^2 - \frac{2}{3} uE}{u^2(u-E)} du - \int_0^E \Pi(E) \frac{E^2 + u^2 - \frac{2}{3} uE}{E^2(E-u)} du +$$

$$+ \int_E^{\infty} \Gamma(u) \frac{2u^2 - \frac{8}{3} uE + \frac{8}{3} E^2}{u^3} du, \quad (6a)$$

$$\frac{d\Gamma(E)}{dt} = \int_E^{\infty} \Pi(u) \frac{\frac{4}{3} u^2 - \frac{4}{3} uE + E^2}{u^2 E} du - \int_{\infty}^E \Gamma(E) \frac{\frac{4}{3} u^2 - \frac{4}{3} uE + E^2}{E^3} du. \quad (7a)$$

Для исследования этих уравнений введем вместо E новую независимую переменную s следующим образом: пусть $f(E)$ — произвольная функция E и f_s определяется выражением

$$f_s = \int_0^{\infty} f(E) E^s dE \quad (0 \leq s < \infty), \quad (12)$$

тогда f_s однозначно определяется через $f(E)$, причем можно также доказать и обратное. Таким образом, любому уравнению, справедливому во всей области изменения E , соответствует некоторое уравнение по s , и наоборот. Преобразуем каждый член уравнений (6a) и (7a) к новым переменным s и введем также $\xi = E/u$:

$$\int_0^{\infty} E^s dE \int_E^{\infty} \Pi(u) \frac{u^2 + E^2 - \frac{2}{3} uE}{u^2(u-E)} du -$$

$$- \int_0^{\infty} \Pi(E) E^s dE \int_0^E \frac{E^2 + u^2 - \frac{2}{3} uE}{E^2(E-u)} du =$$

$$= - \int_0^{\infty} \Pi(u) u^s du \int_0^1 \frac{(1-\xi^2)}{1-\xi} \left(1 - \frac{2}{3} \xi + \xi^2\right) d\xi,$$

$$\int_0^{\infty} E^s dE \int_E^{\infty} \Gamma(u) \frac{2u^2 - \frac{8}{3} uE + \frac{8}{3} E^2}{u^3} du =$$

$$= \int_0^{\infty} \Gamma(u) u^s \int_0^1 \xi^{s-1} \left(\frac{8}{3} \xi^2 - \frac{8}{3} \xi + 2 \right) d\xi,$$

$$\int_0^{\infty} E^s dE \int_E^{\infty} \Pi(u) \frac{\frac{4}{3} u^2 - \frac{4}{3} uE + E^2}{u^2 E} du =$$

$$= \int_0^{\infty} \Pi(u) u^s du \int_0^1 \xi^{s-1} \left(\xi^2 - \frac{4}{3} \xi + \frac{4}{3} \right) d\xi,$$

$$\int_0^{\infty} \Gamma(E) E^s dE \int_0^E \frac{\frac{4}{3} u^2 - \frac{4}{3} uE + E^2}{E^3} du =$$

$$= \int_0^{\infty} \Gamma(E) E^s dE \int_0^1 \left(\frac{4}{3\xi^2} - \frac{4}{3\xi} + 1 \right) d\frac{1}{\xi}.$$

Появляющиеся в этих выражениях определенные интегралы по ξ мы обозначим через $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ и D :

$$A(s) = \int_0^1 (1 - \xi^s)(1 - \xi)^{-1} \left(1 - \frac{2}{3} \xi + \xi^2 \right) d\xi = \frac{4}{3} \{ \psi(s) + \gamma \} -$$

$$- \frac{s(5s+7)}{6(s+1)(s+2)}, \quad (13)$$

$$B(s) = \int_0^1 \xi^s \left(2 - \frac{8}{3} \xi + \frac{8}{3} \xi^2 \right) d\xi = \frac{2}{1+s} - \frac{8}{3(2+s)} + \frac{8}{3(3+s)}, \quad (14)$$

$$C(s) = \int_0^1 \xi^{s-1} \left(\xi^2 - \frac{4}{3} \xi + \frac{4}{3} \right) d\xi = \frac{4}{3s} - \frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}, \quad (15)$$

$$D = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} \xi^2 - \frac{4}{3} \xi + 1 \right) d\frac{1}{\xi} = \frac{7}{9}, \quad (16)$$

где $\psi(s) = \frac{d}{ds} \ln s!$, а γ — постоянная Эйлера.

Таким образом, система основных уравнений, будучи записана в новой переменной s , принимает простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_s}{dt} &= -A(s)\Pi_s + B(s)\Gamma_s, \\ \frac{d\Gamma_s}{dt} &= C(s)\Pi_s - D\Gamma_s. \end{aligned} \quad (17)$$

§ 5. Как хорошо известно, решение (17) дается формулами

$$\begin{aligned} \Pi_s(t) &= a_s e^{-\lambda_s t} + b_s e^{-\mu_s t}, \\ \Gamma_s(t) &= c_s e^{-\lambda_s t} + d_s e^{-\mu_s t}, \end{aligned} \quad (18)$$

где λ_s и μ_s представляют собой корни секулярного уравнения

$$\begin{vmatrix} -A(s) + x & B(s) \\ C(s) & -D + x \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

откуда

$$\lambda(s) = \lambda_s = \frac{1}{2} \{A(s) + D\} - \frac{1}{2} \sqrt{\{A(s) - D\}^2 + 4B(s)C(s)},$$

$$\mu(s) = \mu_s = \frac{1}{2} \{A(s) + D\} + \frac{1}{2} \sqrt{\{A(s) - D\}^2 + 4B(s)C(s)},$$

и a_s, b_s, c_s, d_s — постоянные, определяемые начальными условиями ($t = 0$). Нас интересует случай, когда быстрота изменения числа частиц велика, т. е. когда велики показатели экспонент. Поэтому мы будем считать, что все величины, которые не меняются экспоненциально, равны по порядку величины единице¹. В этом приближении можно пренебречь μ_s и удовлетворить начальным условиям приближенно, используя только решение с λ_s .

Исследование секулярного уравнения показывает, что при изменении s в интервале $0 \leq s \leq \infty$ функция $\lambda(s)$ возрастает от $-\infty$ до предельной величины^{2/3}.

§ 6. Если через слой проходит только один фотон с энергией E_0 , то начальные условия имеют вид

$$\Pi(E) = 0, \quad \Gamma(E) = \delta(E - E_0).$$

¹ Предположение о том, что экспоненты соответственно велики или малы, подразумевает большую величину полного числа вторичных частиц. Это предположение, абсолютно необходимое, если излучение и образование пар рассматриваются независимо от ионизации и эффекта Комптона, было сделано, разумеется, Баба и Гайтлером, а также Карлсоном и Опенгеймером (вместе с другими предположениями, которых мы избежали).

Поэтому в нашем приближении

$$\int_0^{\infty} \{\Pi(E) + \Gamma(E)\} E^s dE = E_0^s e^{-\lambda_s t}. \quad (20)$$

Следуя Баба и Гайтлеру [1], мы будем измерять энергию при помощи безразмерной величины y , такой, что

$$y = \ln \frac{E_0}{E} \quad \text{и} \quad \eta = \ln \frac{E_0}{E}, \quad (21)$$

при этом величина η будет соответствовать критической энергии. Пусть $P(y, t) = e^{\Phi(y, t)}$ представляет собой функцию распределения по отношению к y , так что ²

$$\{\Gamma(E) + \Pi(E)\} dE = -P dy. \quad (22)$$

Выражение (20) тогда принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(y, t) - sy} dy = e^{-\lambda_s t}. \quad (23)$$

Подынтегральное выражение имеет острый максимум при некотором значении y , скажем \bar{y} ; \bar{y} является корнем уравнения

$$\frac{\partial \Phi(y, t)}{\partial y} = s. \quad (24)$$

Пренебрегая неэкспоненциальными членами, получим из (23)

$$\Phi(\bar{y}, t) - s\bar{y} = -\lambda(s)t. \quad (25)$$

Зная функцию $\Phi(y, t)$, можно было бы определить функцию $\lambda(s)$ из уравнений (24) и (25); поскольку, однако, в действительности задана $\lambda(s)$ и мы хотим найти функцию $\Phi(y, t) = \ln P(y, t)$, продифференцируем уравнение (25) по s , что дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{d\bar{y}}{ds} - \bar{y} - s \frac{d\bar{y}}{ds} = -\lambda'(s)t.$$

Это выражение упрощается за счет (24):

$$\bar{y} = \lambda'(s)t. \quad (2)$$

Подставим это значение \bar{y} в уравнение (25) и будем в дальнейшем писать просто y вместо \bar{y} .

² В дальнейшем, говоря о числе частиц, мы будем подразумевать заряженные частицы и световые кванты вместе.

Уравнения

$$\begin{aligned} y &= t\lambda'(s), \\ \varphi &= t \{s\lambda'(s) - \lambda(s)\} \end{aligned} \quad (27)$$

дают параметрическое представление φ как функции y и t . На рис. 1 показана зависимость φ от y для частных значений $t = 10$ и $E_0 / \varepsilon = 100$ (для других значений нужно соответствующим образом изменить шкалу на рис. 1). Поскольку из (24) следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = s > 0,$$

видно, что функция монотонно возрастает, или, иными словами, число образовавшихся частиц, наблюдаемых на данной глубине t слоя, возрастает с y , т. е. с уменьшением энергии этих частиц.

Полученное выражение для φ перестает быть справедливым, как только энергия образовавшихся частиц упадет до величины, равной по порядку критической энергии, поскольку ионизация и эффект Комптона, которыми мы могли пренебречь при больших энергиях, теперь становятся все более и более существенными. Из уравнений (8) и (9) можно увидеть, что фотоны малых энергий образуются при тормозном излучении в гораздо больших количествах, чем материальные частицы с малыми энергиями при образовании пар. Число рожденных фотонов с энергиями в интервале $E', E' + dE'$ пропорционально $1/E'$. Если $E' \ll \varepsilon$, то поглощение этих фотонов определяется главным образом эффектом Комптона, а не образованием пар: следовательно, в этой области энергий коэффициент поглощения почти пропорционален $1/E'$ (как это следует из теории эффекта Комптона), т. е. число фотонов $\Gamma(E)$ при $E < \varepsilon$ не зависит от энергии.

Как показывает более детальный анализ, то же самое справедливо и для числа частиц $\Pi(E)$ при $E < \varepsilon$. Переходя от E к логарифмической переменной y , мы найдем, что вследствие (21) функция распределения $P(y, t)$ при $y > \eta$ имеет вид

$$P(y, t) = \exp \{ \text{const} - y \}.$$

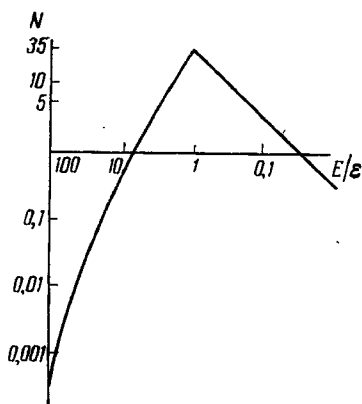


Рис. 1

Таблица 2

t/y	φ/y	λ	s	t/y	φ/y	λ	s
0,04	0,25	-3,76	0,1	2,07	0,78	0,35	1,5
0,11	0,44	-2,26	0,2	2,36	0,67	0,39	1,6
0,19	0,59	-1,56	0,3	2,69	0,53	0,44	1,7
0,28	0,71	-1,12	0,4	3,07	0,36	0,47	1,8
0,37	0,80	-1,80	0,5	3,49	0,16	0,50	1,9
1,48	0,88	-0,57	0,6	3,96	-0,08	0,53	2,0
0,60	0,93	-0,38	0,7	4,49	-0,37	0,55	2,1
1,72	0,97	-0,23	0,8	5,08	-0,70	0,57	2,2
0,86	0,99	-0,11	0,9	5,73	-1,08	0,59	2,3
1,01	1,00	0,00	1,0	6,46	-1,52	0,61	2,4
1,18	0,99	0,09	1,1	7,29	-2,03	0,62	2,5
1,37	0,97	0,17	1,2	8,17	-2,67	0,63	2,6
1,58	0,92	0,24	1,3
1,81	0,86	0,30	1,4	∞	$-\infty$	0,78	∞

Таким образом, мы видим, что число частиц на данной глубине проникновения t возрастает с уменьшением энергии λ , пока не достигнута критическая область, после чего уменьшение энергии сопровождается уменьшением числа частиц. Это значит, что на данной глубине проникновения большинство частиц в ливне имеет энергию s .

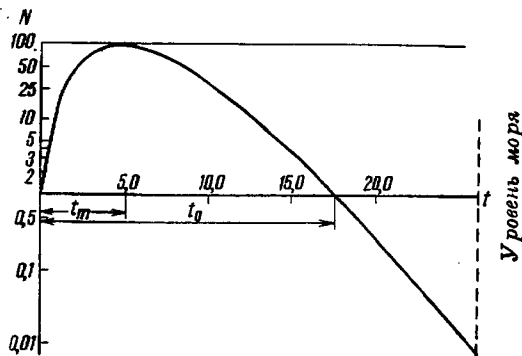


Рис. 2

Распределение частиц по глубине проникновения в слой вещества дается функцией, которая показана графически на рис. 2 для $\eta = \ln 100$. Для других значений η шкала должна быть соответствующим образом изменена. В табл. 2 приведены соответствующие значения s , t/y , φ/y и λ . Кривая имеет максимум в точке $t = t_m$, в которой исчезает производная $\partial\varphi/\partial t$. Из (25) имеем

$$d\varphi - \eta ds - s d\eta = -\lambda dt - t d\lambda.$$

Так как $d\eta = 0$ и, вследствие (26), $\eta ds = t d\lambda$, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\lambda(s). \quad (28)$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{d}{dt} \{\Gamma_1 + \Pi_1\} = 0$$

и, следовательно, $\lambda(1) = 0$; это, конечно, может быть проверено и прямыми вычислениями.

§ 7. Уравнение (26) дает для положения максимума

$$t_m = \frac{\eta}{\lambda'(1)}, \quad \varphi_{\max} = \eta,$$

т. е. максимум числа частиц будет наблюдаться на глубине

$$t_m = 1,01 \ln \frac{E}{\varepsilon}$$

и равен E_0 / ε частиц. Длина ливня, выраженная в t -единицах, равна

$$t_0 = 3,8 \ln \frac{E}{\varepsilon},$$

что для воздуха дает $1,48 \ln \frac{E_0}{100}$ м водяного столба.

Вычислим долю частиц, которые, проникнув в атмосферу с начальной энергией в 10^{10} эв, могут наблюдаться на уровне моря. Имеем $\eta = \ln 100 = 4,6$ и $t/\eta = 26/4,6 = 5,65$, после чего из табл. 2 находим соответствующее значение $\varphi/\eta = -1,03$, т. е. $\varphi = -4,74$. Следовательно, искомая доля равна $\exp(-4,74)$, или несколько меньше 1%. Что же касается частиц, проникающих в атмосферу с энергией $3 \cdot 10^9$ эв, то только 1 из 1000 сможет достичь уровня моря.

В третьей колонке табл. 2 мы выписали значения λ . Уравнение (28) показывает, что λ представляет собой коэффициент поглощения. Видно, что предельное значение λ (для больших t) равно $7/9$, что в случае воздуха дает 2 на метр водяного столба. Если оценить энергию частиц, входящих в атмосферу, по порядку величины как $3 \cdot 10^9 - 10^{10}$ эв, то для порядка величины λ получим 0,6 и, следовательно, коэффициент поглощения, равный 1,5 на метр водяного столба. Такова величина коэффициента поглощения для легких частиц, которую мы ожидаем на уровне моря.

Полная энергия ливня дается выражением

$$E(t) = \int_0^{\infty} \{\Gamma(E) + \Pi(E)\} E dE = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varphi(\eta, t) - \eta dy}. \quad (29)$$

Подынтегральное выражение имеет острый максимум в точке $y = \bar{y}$, где исчезает производная от показателя, т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 = s \left(\frac{t}{y} \right). \quad (30)$$

Как можно увидеть из табл. 2, $\bar{y} \neq t$. Если $\bar{y} < \eta$, то $\Phi(\bar{y}, t) = \bar{y}$ и интеграл становится порядка единицы; мы находим, таким образом, что полная энергия ливня по порядку величины равна E_0 . При $\bar{y} > \eta$ максимум подынтегрального выражения соответствует точке $y = \eta$, и мы имеем

$$E(t) = E_0, \quad t < \eta,$$

$$E(t) = E_0 e^{\varphi(\eta, t) - \eta}, \quad t > \eta.$$

График этой функции показан на рис. 3.

§ 8. В принципе существует возможность вывести спектральное распределение частиц, входящих в атмосферу

и образующих на своем пути ливни, из экспериментально наблюдаемого числа частиц $N(t)$ на единицу длины пути. Пусть $e^{\xi(\eta)}$ означает число частиц, входящих в атмосферу с энергией E_0 . Каждая из них образует ливень, так что полное число частиц $N(t)$ на единицу длины, наблюдаемое на глубине t , равно

$$N(t) = \int \exp \{ \xi(\eta) + \Phi(\eta, t) \} d\eta. \quad (31)$$

Подынтегральное выражение имеет максимум в точке $\eta = \bar{\eta}$ в которой исчезает производная $\xi'(\eta) + \partial \Phi(\eta, t) / \partial \eta$; $\bar{\eta}$, разумеется, зависит от t . Большинство частиц, наблюдаемых на различных высотах, образовано частицами разных энергий. В нашем приближении можно написать

$$N(t) = \exp \{ \xi(\bar{\eta}) + \Phi(\bar{\eta}, t) \},$$

откуда

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left\{ \xi'(\bar{\eta}) + \frac{\partial \Phi(\bar{\eta}, t)}{\partial \bar{\eta}} \right\} \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\lambda \left(\frac{t}{\bar{\eta}} \right). \quad (32)$$

Левая сторона этого уравнения может быть получена из эксперимента; отсюда, зная $\lambda(t/\bar{\eta})$ для данной глубины t , можно определить соответствующее значение энергии частиц, образовав-

ших ливень. В той же самой колонке табл. 2 находим соответствующую величину $\varphi(t/\bar{\eta})$ и, наконец, получаем искомую функцию в виде

$$e^{\xi(\eta)} = N(t) e^{-\varphi(\bar{\eta}, t)}, \quad t = t(\bar{\eta}). \quad (33)$$

§ 9. Рассмотрим теперь поведение космических частиц, проходящих из воздуха в среду с другим атомным номером, но прежде всего определим распределение частиц на заданной высоте t по энергиям. Пусть $\eta = \ln(E/\epsilon)$ представляет собой энергию частицы на высоте t , а $\eta_0 = \ln(E_0/\epsilon)$ — ее энергию на границе атмосферы.

Тогда число частиц с заданным значением η дается выражением

$$N(t, \eta) = \int \exp\{\xi(\eta_0) + \varphi(\eta_0 - \eta, t)\} d\eta_0, \quad (34)$$

или в нашем приближении

$$N(t, \eta) = \exp\{\xi(\bar{\eta}_0) + \varphi(\bar{\eta}_0 - \eta, t)\}, \quad (34a)$$

где $\bar{\eta}_0$ — корень уравнения

$$\xi'(\bar{\eta}_0) + \frac{\partial \varphi(\bar{\eta}_0 - \eta, t)}{\partial \eta_0} = 0. \quad (35)$$

Если не интересоваться частицами с очень большими энергиями, то можно считать, что η мало по сравнению с η_0 , и удержать только линейный член в разложении выражения в показателе экспоненты в ряд по степеням η . Тогда имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln N(t, \eta) \right\}_{\eta=0} = \{\xi'(\bar{\eta}_0) + \varphi(\bar{\eta}_0 - \eta, t)\} \frac{\partial \bar{\eta}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi(\bar{\eta}_0, t)}{\partial \eta_0}$$

или

$$\ln N(t, \eta) = \text{const} - s \left(\frac{t}{\eta_0} \right) \eta, \quad (36)$$

где постоянная, разумеется, зависит от t , но не от η . Величина s в этом выражении связана непосредственно с коэффициентом поглощения λ на данной высоте и может быть вычислена из последнего с помощью таблицы. Окончательно получаем

$$N(t, \eta) = N_0 e^{-s\eta} \quad (37)$$

и, переходя к обычной шкале энергий, имеем, очевидно,

$$dN = \text{const} \frac{dE}{E^{s+1}} \quad (38)$$

(эта формула, разумеется, применима только при $E \gg \epsilon$). Например, при $t = 10$ и $E_0 = 10^{10}$ эв находим из таблицы $s \sim 1,5$, а при $t = 20$ и $E_0 = 10^{10}$ эв находим $s \sim 2,0$.

Определим теперь число ливней, образованных частицей, проходящей из воздуха через не слишком тонкий слой какого-нибудь вещества. Пусть

$$\ln \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{\bar{Z}'}{\bar{Z}} \right) = \zeta,$$

где ε и \bar{Z} относятся к воздуху, а ε' и \bar{Z}' — к слою; тогда можно написать $\eta' = \eta + \zeta$. Как было показано в § 7, ливни будут выходить из слоя только, если $\eta' > t/3,8$ или $\eta > t/3,8 - \zeta$.

Поскольку число частиц уменьшается с энергией, для отрицательных значений ζ (т. е. $\bar{Z}' < \bar{Z}$) можно написать просто

$$\eta = \frac{t}{3,8} + |\zeta| \text{ и } N = N_0 \exp \left\{ -s \left(\frac{t}{3,8} + |\zeta| \right) \right\}. \quad (39)$$

Отсюда видно, что с возрастанием толщины слоя число ливней спадает с коэффициентом поглощения $s/3,8$. Для положительных ζ следует различать два случая: 1) $t < 3,8\zeta$ и 2) $t > 3,8\zeta$. В первом случае нижний предел, даваемый формулой для η , отрицателен, откуда $N = N_0$; во втором случае получаем, как и раньше,

$$N = N_0 \exp \left\{ -s \left(\frac{t}{3,8} - \zeta \right) \right\}. \quad (40)$$

Число частиц, выходящих из данного слоя, вычисляется из выражения

$$N = N_0 \int \exp \{ -s\eta + \varphi(\eta + \zeta, t) \} d\eta. \quad (41)$$

При отрицательных ζ подынтегральное выражение всегда имеет максимум при значениях η , отличных от нуля, поэтому в нашем приближении можно написать

$$N_0 = N_0 \exp \{ -s\bar{\eta} + \varphi(\bar{\eta} + \zeta, t) \}, \quad (42)$$

где $\bar{\eta}$ является корнем уравнения

$$s = \frac{\partial \varphi(\eta + \zeta, t)}{\partial \eta} = s \left(\frac{t}{\eta + \zeta} \right). \quad (43)$$

Отсюда (см. уравнение (25))

$$\varphi(\bar{\eta} + \zeta, t) - (\bar{\eta} + \zeta)s = -t\lambda(s)$$

и, следовательно,

$$N = N_0 e^{s\zeta - t\lambda(s)}. \quad (44)$$

Другими словами, число частиц в веществе продолжает уменьшаться с тем же самым коэффициентом поглощения, что и в воздухе. При $t = 0$

$$N = N_0 e^{s\zeta}, \quad (45)$$

т. е., поскольку ξ отрицательно в случае перехода из воздуха в среду с меньшим атомным номером, число частиц уменьшается скачком (фактически в тонком слое $t \ll 1$) в $e^{s|\xi|}$ раз. В случае перехода из воздуха в литий имеем $Z' = 4$, $\xi \approx -0,76$, что для $s \sim 1,5$ дает уменьшение числа частиц в 3 раза.

Переходя к среде с большими Z , надо различать два случая в зависимости от того, имеет или нет уравнение (43) положительное решение для $\bar{\eta}$. В первом случае, мы, очевидно, получим тот же самый результат, что и для отрицательных ξ , однако в последнем, который осуществляется, когда $s(t/\xi) < s$, мы должны написать

$$N = N_0 e^{s(\zeta, t)}. \quad (46)$$

Это выражение имеет максимум при $t \approx \zeta$, и, как было показано, этот максимум равен

$$N = N_0 e^{\zeta} = N_0 \left(\frac{Z'}{Z} \right). \quad (47)$$

Отсюда видно, что при прохождении сквозь среду с Z , большим, чем в воздухе, число частиц сначала возрастает (например, в 10 раз в случае свинца), а затем падает, достигая после определенной точки значения, отвечающего коэффициенту поглощения в воздухе.

§ 10. Ливни, наблюдаемые на больших высотах, очевидно, следует приписать к так называемой мягкой компоненте проникающего излучения, т. е. к частицам, образуемым при прохождении фотонов или электронов. Соответственно число ливней, покидающих свинцовую пластинку, как известно, имеет максимум при определенной толщине свинца, спадая при дальнейшем возрастании толщины в соответствии с конечностью длины пути ливня. Число ливней на поверхности Земли и под нею стремится к определенному пределу с возрастанием толщины свинцовой пластины. Как уже указывалось, такие ливни можно связать с вторичными частицами, образованными во время прохождения жесткой компоненты через вещество; такими частицами могут явиться, очевидно, либо электроны, либо фотоны. Из формулы для релятивистского рассеяния можно получить следующее выражение для числа быстрых электронов, образованных «полутяжелой» частицей на единице пути

$$dI = \frac{2\pi}{m} N \frac{e^4 dE}{c^2 E^3}. \quad (48)$$

Поскольку число частиц быстро возрастает с уменьшением их энергии, число наблюдаемых ливней должно быть очень чувствительно к минимальной энергии ливня, которая может детектироваться аппаратурой. Для того чтобы получить очень грубую

оценку порядка величины, мы произвольно примем, что этот нижний предел равен $E \approx e$ и что длина пути ливня равна $t = 1$. Расчеты показывают, что атомный номер среды выпадает из окончательного выражения. Таким образом, число ливней не зависит от природы среды, и мы получаем 3 или 4 в качестве порядка величины числа ливней на 100 полутяжелых частиц. Поэтому если частицей, образующей ливень, является электрон, то следовало бы ожидать, что число ливней не будет зависеть от массы и энергии проникающей частицы и от свойств среды, в которой образуется ливень; однако оно должно было бы сильно зависеть от деталей экспериментальной установки, используемой для детектирования ливней.

С другой стороны, если частицей, образующей ливень, является протон, то расчеты показывают, что число ливней должно было бы зависеть главным образом от массы проникающей частицы и, кроме того, в какой-то мере от ее энергии и атомного номера среды, и гораздо меньше от деталей экспериментальной установки.

Сравнительная важность этих двух возможностей очень сильно зависит от того, что мы предположим относительно массы начальной частицы. Поскольку экспериментально установлено, что число ливней не зависит от среды, мы можем заключить, что правильной является первая возможность.

Выводы

1. Отправляясь от физической идеи о каскадном происхождении ливней, предложенной Баба и Гейтлером и Карлсоном и Оппенгеймером, нами дана более строгая трактовка проблемы.

2. Численная таблица позволяет определить число ливневых частиц в функции от глубины проникновения для любой заданной начальной энергии первичной частицы, а также энергетическое распределение ливневых частиц на заданной глубине (§ 6).

3. Ливни обладают определенным пробегом (§ 7).

4. Изучено поведение ливня, переходящего из воздуха в среду с другим атомным номером (§ 9).

5. Обсуждены следствия, вытекающие из гипотезы о новых «полутяжелых» частицах.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bhabha, Heitler. Proc. Roy. Soc., A159, 432, 1937.
 [2] Carlson, Oppenheimer. Phys. Rev., 51, 220, 1937.
 [3] Bethe, Heitler. Proc. Roy. Soc., A146, 83, 1934.

Приложение к статье Д. ШЕНБЕРГА

Proc. Roy. Soc., A170, 363, 1939

Для получения формулы для магнитной восприимчивости при низких температурах (в изотропном случае) мы начнем с уравнений (17) и (18) работы Блекмана [1], которые можно представить в виде

$$\frac{F}{V} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(E, H) e^{-(E-E_0)/kT} dE}{(1 + e^{-(E-E_0)/kT})} + \frac{NE_0}{V}, \quad (1)$$

$$Z(E, H) = \frac{\beta H \sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \sum_l \left(E - \left(l + \frac{1}{2} \right) \beta H \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{e\hbar}{mc}. \quad (2)$$

В согласии с методом Блекмана будем считать E_0 постоянным (для случая эксперимента в слабых полях условие $N = \text{const}$ дает практически тот же самый результат, что и $E_0 = \text{const}$). Обозначив для краткости

$$\frac{E}{\beta H} = \varepsilon, \quad \frac{kT}{\beta H} = \theta, \quad \frac{(2m)^{1/2}}{3\pi^2 \hbar^3} = \alpha \quad (3)$$

и интегрируя по частям, получим

$$\frac{F - NE_0}{V} = \alpha (\beta H)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon} g \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\theta} \right) d\varepsilon. \quad (4)$$

Здесь

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_l \left(\varepsilon - l - \frac{1}{2} \right)^{3/2}, \quad (5)$$

где суммирование происходит по всем целым положительным l , оставляющим подкоренное выражение положительным, а

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^x}. \quad (6)$$

Используя формулу суммирования Пуассона, имеем

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - x)^{3/2} e^{2\pi i p x} dx. \quad (7)$$

Член с $p = 0$ вычисляется непосредственно; для $p \neq 0$ интеграл после повторного интегрирования по частям может быть выражен через интегралы Френеля от аргумента $2\pi p \varepsilon$. Из (4) можно видеть, однако, что величину φ нам нужно знать только в окрестности $\varepsilon = \varepsilon_0$, так как при условии $E_0 \gg kT$ производная от g $((\varepsilon - \varepsilon_0)/\theta)$ лишь в этом месте заметно отличается от нуля. Поскольку ε_0 при $E_0 \gg \beta H$ является большим числом, интегралы Френеля можно заменить их значениями для бесконечного аргумента. В результате (7) преобразуется в

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \frac{2}{5} \varepsilon_0^{5/2} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{3}{4\pi^2 p^2} \varepsilon^{3/2} - \\ &- \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{3}{8\pi^2 2^{1/2} p^{3/2}} \cos\left(2\pi p \varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{2}{5} \varepsilon_0^{5/2} - \frac{1}{16} \varepsilon_0^{3/2} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos\left(2\pi p \varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)}{8\pi^2 2^{1/2} p^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что первые два члена в (8) меняются очень медленно, поэтому при подстановке в (4) можно воспользоваться их значением при ε_0 . Напротив, последний член меняется очень быстро. Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{F - NE_0}{V} &= -\alpha (\beta H)^{3/2} \left\{ \frac{2}{5} \varepsilon_0^{5/2} - \frac{1}{16} \varepsilon_0^{3/2} + \right. \\ &+ \left. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p 3}{8\pi^2 2^{1/2} p^{3/2}} \operatorname{Re} \left[e^{\left(2\pi p \varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i p (\varepsilon - \varepsilon_0)} \frac{d}{d\varepsilon} g\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\theta}\right) d\varepsilon \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Интеграл в (9) можно вычислить, что дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i p \varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} g\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) d\varepsilon = -\frac{2\pi^2 p \theta}{\text{sh } 2\pi^2 p \theta}. \quad (10)$$

Теперь, подставляя α , ε_0 и θ из (3) и опуская член, не зависящий от H , получаем

$$\frac{F}{V} = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ \frac{1}{16} \beta^2 H^2 E_0^{1/2} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{3kT (pH)^{3/2}}{4 \sqrt{2} p^{3/2}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi p \varepsilon_0}{\theta} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{sh } 2\pi^2 p \theta} \right\},$$

и, следовательно, восприимчивость $\frac{I}{H} = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{F}{V}\right)$ дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{I}{H} &= \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \beta^2 E_0^{1/2}}{12\pi^2 \hbar^3} + \\ &+ \frac{m^{3/2} kT E_0 (\beta H)^{1/2}}{\pi \hbar^3 H^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin\left(\frac{2\pi p E_0}{\beta H} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{p} \text{sh}(2\pi^2 p kT / \beta H)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переход к неизотропному случаю производится аналогично тому, как это сделано в статье Блекмана, в результате чего получается формула, цитированная Шенбергом ([2], уравнения (3) — (9)).

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Blackman. Proc. Roy. Soc., A166, 1, 1938.
[2] Shoenberg. Proc. Roy. Soc., A170, 341, 1939.

ДАН СССР, 26, 436, 1940

Phys. Rev., 57, 548, 1940

Хорошо известно, что на опыте не удастся наблюдать поляризацию электронного пучка при его рассеянии [1]. Это обстоятельство иногда рассматривают как противоречие между теорией и экспериментом. Бете и Розе [2] показали, что оно не может быть объяснено деполяризационными эффектами. Я хочу указать здесь на то, что отрицательный результат опытов представляется вытекающим из значительно более простых соображений, именно из того, что наблюдаемые рассеянные электроны получают свое отклонение не в одном акте рассеяния, а в результате множественного рассеяния.

Угловая ширина множественно рассеянного пучка электронов может легко быть вычислена. Средний квадрат угла отклонения при множественном рассеянии есть (см. например [3])

$$\bar{\theta}^2 = 2\pi N \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 l \log \frac{\sqrt{\bar{\theta}^2}}{\theta_0},$$

где N — число атомов в единице объема, Z — атомный номер, E — энергия электронов (более точно $E = \frac{mv^2}{2\sqrt{1-v^2/c^2}}$), θ_0 — угол, при котором делается существенным экранирование поля ядра, l — путь, проходимый электронами. Подставляя значения для золота, находим

$$\bar{\theta}^2 = 2,5 \cdot 10^3 l \log(10^7 l).$$

Даже при $l = 7 \cdot 10^{-8}$ см (наименьшая толщина пленки, использованной Даймондом) находим

$$\sqrt{\bar{\theta}^2} = 0,23.$$

Но это значит, что большинство наблюдаемых на опыте отклоненных электронов было рассеяно много раз на небольшие углы. Поскольку формула для поляризации, данная Моттом [4], показывает, что поляризация быстро падает при уменьшении угла рассеяния, это, по-видимому, объясняет экспериментальные результаты.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. G. D y m o n d. Proc. Roy. Soc., 136, 638, 1932; 145, 657, 1934.
- [2] M. E. R o s e, H. A. B e t h e. Phys. Rev. 55, 277, 1939.
- [3] E. J. W i l l i a m s. Proc. Roy. Soc., 169, 531, 1939.
- [4] N. E. M o t t. Proc. Roy. Soc., 135, 429, 1932.

ЖЭТФ, 10, 718, 1940

J. Phys. USSR, 2, 485, 1940

Развит метод для нахождения предела применимости электродинамических представлений в квантовой механике. Метод применяется к электронам и частицам со спином 1.

Предел применимости классической электродинамики определяется, как известно, величиной e^2/mc^2 . Этот предел может быть получен независимо от соображений, связанных с собственной массой электрона, из условия малости обратного действия электрона на себя. Именно, в уравнении движения электрона во внешнем электромагнитном поле с учетом силы лоренцова трения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (1)$$

второй член должен быть мал по сравнению с первым, что и приводит к условию $\lambda \gg e^2 / mc^2$ для длины падающих волн.

Действительный предел применимости классической электродинамики есть, как известно, $\lambda \gg \hbar / mc$, т. е. лежит гораздо выше, чем e^2 / mc^2 ; что же касается предела применимости электродинамических представлений в квантовой теории, то, конечно, нет оснований предполагать, что им является e^2 / mc^2 . В связи с этим возникает вопрос о нахождении критерия, определяющего истинный «радиус» элементарных частиц. Этот вопрос неоднократно дискутировался¹, однако при этом точкой отправления служила не малость обратного действия, а соображения, связанные с

¹ См., например, дискуссию у Гейзенберга [1]. Кроме того, в последнее время Вейскопф [2] рассматривал вопрос с точки зрения расходимости выражения для собственной энергии электрона.

какими-либо дополнительными физическими допущениями. Цель настоящей работы — показать, что в квантовой теории может быть развит простой метод для отыскания предела, за которым теория приходит в противоречие сама с собой вследствие пренебрежения обратным действием поля.

Пренебрежение обратным действием означает, что мы считаем частицу движущейся под влиянием внешнего поля без учета изменения этого внешнего поля самой частицей. Формально это означает, что при рассмотрении взаимодействия частицы с фотоном матричные элементы вычисляются для «свободных» фотона и частицы. Таким образом, малость обратного действия соответствует в квантовой механике применимости теории возмущений к столкновению заряженной частицы с фотоном.

Эффективное сечение σ_l для рассеяния частиц с моментом l есть, как известно, в системе отсчета, движущейся с центром инерции²

$$\sigma_l = 4(2l + 1)\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_l, \quad (2)$$

где λ — длина волны частицы (деленная на 2π), а δ_l — фаза ее волновой функции на бесконечности. Как известно, применимость теории возмущений связана с условием $\delta_l \ll 1$. Отсюда следует, что должно иметь место условие

$$\sigma_l \ll 4(2l + 1)\pi\lambda^2. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что для применимости теории возмущений число рассеянных частиц с моментом l должно быть мало по сравнению с числом таких частиц в первоначальном пучке. Обратим внимание на то обстоятельство, что независимо от применимости теории возмущений вообще всегда должно быть

$$\sigma_l < 4(2l + 1)\pi\lambda^2.$$

Невыполнение этого соотношения означало бы, что рассеивается больше частиц с моментом l , чем падает, что, очевидно, нелепо.

Поскольку рассеяние падает с увеличением l , то достаточно потребовать выполнения условия (3) для $l \sim 1$; соответствующее σ_l обозначим как σ_0 . Таким образом, мы приходим к условию

$$\sigma_0 \ll \lambda^2. \quad (4)$$

Легко видеть, что в классической теории это условие действительно приводит к верному критерию. Поскольку при классическом рассеянии электромагнитных волн все рассеяние явля-

² Поскольку рассуждения имеют качественный характер, то мы не рассматриваем спина частиц.

ется дипольным, то для σ_0 мы можем подставить непосредственно томпсоновский эффективный поперечник, и (4) приводит к

$$\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ll \lambda^2.$$

Применим (4) к квантовой механике электрона. Поскольку (4) относится к системе отсчета, в которой центр инерции покоится, то мы должны предварительно преобразовать формулу Клейна — Нишины к этой системе и затем выделить из нее часть, соответствующую рассеянию с моментом $l \sim 1$. Это приводит к

$$\sigma_0 \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{mc^2}{E},$$

где E — энергия фотона в системе отсчета, где электрон покоится (σ_0 отличается от полного эффективного сечения отсутствием множителя $\ln(E/mc^2)$, который получается при суммировании по большим моментам). Энергия e фотона в системе отсчета, где центр инерции покоится, связана с E (при $E \gg mc^2$) посредством $2e^2 = mc^2 E$, так что $\lambda \sim \frac{\hbar c}{e} \sim \frac{\hbar c}{\sqrt{mc^2 E}}$. Условие (4) дает соответственно

$$\sigma_0 \sim \frac{e^4}{mc^2 E} \ll \lambda^2 \sim \frac{\hbar^2}{mE}. \quad (5)$$

Энергия E отсюда выпадает и остается $e^2 \ll \hbar c$, что всегда выполнено. Таким образом, для квантовой механики электрона не существует каких-либо вытекающих из нее самой пределов, ограничивающих ее применимость для малых длин волн. «Радиус» электрона в квантовой электродинамике оказывается в некотором смысле равным нулю.

То же самое оказывается имеющим место и для частиц со спином 0, если воспользоваться для них эффективным сечением комптон-эффекта, вычисленным Гордоном [3] с помощью скалярного уравнения Шредингера второго порядка.

Комптон-эффект для частиц со спином 1 (масса μ) был недавно вычислен Я. Смородинским [4]. Его результат:

$$\sigma_0 \sim \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \frac{E}{\mu c^2}.$$

Условие (4) дает, следовательно, в этом случае

$$E \ll \mu c^2 \frac{\hbar c}{e^2}. \quad (6)$$

«Радиус» частицы равен соответствующей длине волны в системе отсчета, в которой частица покоится, т. е.

$$r \sim \frac{\hbar c}{E} \sim \frac{e^2}{\mu c^2}. \quad (7)$$

Таким образом, радиус частиц со спином 1 равен своему классическому значению.

Если мы рассматриваем рассеяние частиц со спином 1 («мезотронов») от другой заряженной частицы, то возникает вопрос о том, до каких энергий можно пренебрегать радиационными эффектами.

Для этого напишем условие (6) в системе отсчета, движущейся вместе с центром инерции

$$\varepsilon \ll \mu c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}}. \quad (8)$$

С другой стороны, конечный «радиус» частицы означает невозможность применения теории к процессам, связанным с очень большими изменениями импульса. Но изменение импульса в результате рассеяния на данный угол (при заданном значении ε) одинаково независимо от того, с какой частицей происходит столкновение. Отсюда следует, что (8) является критерием применимости теории к столкновениям с любыми частицами.

Энергия E падающего мезотрона связана с его энергией ε в системе отсчета, движущейся с центром инерции, соотношением $E \sim \varepsilon^2 / mc^2$, где m — масса частицы, с которой мезотрон сталкивается. Из (8) находим для E условие

$$E \ll \mu c^2 \frac{\mu}{m} \frac{\hbar c}{e^2}. \quad (9)$$

Если воспользоваться формулами, выведенными Мэсси и Корбенем [5] для рассеяния мезотронов, и применить условие (4), рассматриваемое теперь просто как условие применимости теории возмущений, то мы получим в результате

$$E \ll \mu c^2 \frac{\mu}{m} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^2. \quad (10)$$

Мы видим, что (9) нарушается раньше, чем (10). Это значит, что формулы теряют свою применимость еще до того, как делается неприменимой теория возмущений.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Heisenberg. Zs. Phys., 110, 251, 1938.
- [2] V. Weisskopf. Phys. Rev., 56, 2, 1939.
- [3] Gordon. Zs. Phys., 40, 117, 1927.
- [4] Я. Смородинский. J. Phys. USSR, 3, 143, 1940.
- [5] Н. Мазеу, Н. Корбен. Proc. Camb. Phil. Soc., 35, 463, 1939.

О РАССЕЯНИИ МЕЗОТРОНОВ «ЯДЕРНЫМИ СИЛАМИ»

ЖЭТФ, 10, 721, 1940

J. Phys. USSR, 2, 483, 1940

Показано, что из расходящихся выражений, получающихся с помощью теории возмущений, можно получить верные формулы для эффективных сечений рассеяния мезотронов «ядерными силами».

Вычисляемые для частиц со спином 1 («мезотронов») [1] эффективные сечения рассеяния так называемыми ядерными силами быстро растут с увеличением энергии. Легко, однако, видеть, что уже при энергиях, лишь немного превышающих μc^2 (μ — масса мезотрона), получающиеся выражения не могут быть правильными. Действительно, это рассеяние обладает шаровой симметрией, т. е. в нем участвуют только частицы с моментом, равным нулю, и потому соответствующее эффективное сечение не может превышать $4\pi\lambda^2$, где λ — деленная на 2π длина волны рассеиваемой частицы в системе, движущейся с центром инерции (см., например, [2]).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы показать, что правильный результат может быть получен и в том случае, когда применение теории возмущений оказывается невозможным.

Делаемые для взаимодействия мезотрона с тяжелой частицей предположения формально совершенно совпадают с теми, которые делаются при выводе формулы Брейта и Вигнера для рассеяния нейтронов ядрами, причем в данном случае имеется всего одно «составное состояние» мезотрона и тяжелой частицы. Формула Брейта и Вигнера для упругого рассеяния имеет вид [3]

$$\sigma_e = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_e^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \pi\lambda^2 \frac{\gamma_e^2}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (1)$$

где

$$\gamma_e = \frac{\Gamma_e}{E - E_0}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{E - E_0}, \quad (2)$$

а для какого-либо неупругого рассеяния аналогичная формула гласит

$$\sigma_u = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_u \Gamma_e}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \pi\lambda^2 \frac{\gamma_u \gamma_e}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (3)$$

причем полная «ширина» $\Gamma = \Gamma_e + \Sigma \Gamma_u$ и $\gamma = \gamma_e + \Sigma \gamma_u$ (суммирование производится по всем видам неупругих столкновений).

Обычная теория возмущений соответствует пренебрежению γ^2 в знаменателе (1) и (3), т. е. вычисленные таким образом эффективные сечения соответствуют

$$\sigma'_e = \pi\lambda^2 \gamma_e^2, \quad \sigma'_u = \pi\lambda^2 \gamma_u \gamma_e. \quad (4)$$

Из приведенных формул видно, что, зная σ'_e и σ'_u , вычисленные с помощью теории возмущений, можно всегда найти правильные выражения для σ_e и σ_u , которые, конечно, всегда удовлетворяют условию $\sigma < 4\pi\lambda^2$.

При рассеянии мезотронов тяжелыми частицами неупругое рассеяние соответствует образованию нескольких мезотронов (процессы, связанные с излучением, сравнительно маловероятны). При достаточно больших энергиях, когда γ_e становится большим по сравнению с единицей, одновременно неупругое рассеяние делается большим по сравнению с упругим. При этом, по-видимому, по порядку величины для рассеяния с образованием n частиц имеет место формула Пуассона

$$(\gamma_u)_n \sim \frac{\gamma_e^n}{n!}, \quad (5)$$

и соответственно $\gamma \sim e^{\gamma_e}$, т. е. экспоненциально растет с γ_e , а потому и с энергией. В силу (1) — (3) это приводит к тому, что рассеяние при больших энергиях не только не возрастает, но, напротив, быстро падает.

Представляется интересным выяснить, насколько расходимость ряда выражений, получающихся из ядерных сил (собственная энергия, магнитный момент тяжелых частиц и т. д.), связано с применением теории возмущений и не приводит ли точная теория к сходящимся выражениям.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Heitler. Proc. Roy. Soc., A 166, 529, 1938.
- [2] Л. Ландау. ЖЭТФ, 10, 718, 1940 (Собр. трудов, № 39).
- [3] H. Vethé. Rev. Mod. Phys., 9, 115, 1937.

ЖЭТФ, 10, 1007, 1940

J. Phys. USSR, 3, 237, 1940

Получено точное выражение, определяющее число заряженных частиц в ливне в точке его максимума (3). Определены средние углы расхождения частиц в ливне для заряженных частиц и фотонов (16)—(19). Вычислены средние горизонтальные размеры ливня (24).

§ 1. Число заряженных частиц в ливне в точке максимума

В работе автора и Румера [1]¹ было вычислено на основании каскадной теории ливней Баба и Гайтлера [2] и Карлсона и Уппенгеймера [3] число частиц в ливне, как функция от их энергии и глубины пройденного слоя вещества. Было показано, что оно имеет вид

$$N = ae^{\varphi(\eta, t)}, \quad (1)$$

где $\eta = \ln \frac{E_0}{\varepsilon}$ (E_0 — начальная энергия первичной частицы, ε — критическое значение энергии, определяющее ионизационные потери).

Ниже мы будем подразумевать под N число заряженных частиц в ливне; полное число электронов и фотонов в ливне равно тому же экспоненциальному множителю с другим неэкспоненциальным коэффициентом. Экспоненциальный множитель e^φ был вычислен в I. Неэкспоненциальный же множитель, как менее существенный, опускался. Число N имеет максимум на некоторой

¹ Эту работу мы цитируем ниже как I; все обозначения в настоящей статье те же, как и в I.

глубине $t = t_m$. Покажем, что это максимальное значение можно вычислить более точно, т. е. определить значение неэкспоненциального множителя в нем.

Для этого предположим, что во всей длине генерируются однородным образом первичные частицы — электроны или фотоны; именно, предположим, что на каждой единице пути генерируется одна частица с энергией E_0 (это предположение имеет, конечно, чисто формальный характер). Из сохранения энергии следует, что возникающая на единице пути энергия должна быть равна (в стационарном состоянии) энергии, теряемой на этом же пути ливневыми частицами, находящимися в равновесии с возникающими первичными. Эта потеря энергии определяется одной только ионизацией, так как комптон-эффект только переводит энергию от фотонов к заряженным ливневым частицам. Если число частиц, находящихся в равновесии с одной первичной, есть n , то мы имеем. Таким образом, $ne = E_0$, т. е.

$$n = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

С другой стороны, n можно вычислить как полное количество дошедших на данный уровень ливневых частиц, образовавшихся на всех вышележащих уровнях. Поскольку число частиц на глубине t , образованных одной первичной частицей, есть $ae^{\varphi(t, \eta)}$, то мы имеем

$$n = \int_0^{\infty} ae^{\varphi(t, \eta)} dt.$$

Приравнявая оба полученных для n выражения, находим

$$\int_0^{\infty} ae^{\varphi(t, \eta)} dt = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Поскольку $\varphi(t, \eta)$ имеет максимум при $t = t_m$, то при вычислении стоящего здесь интеграла мы можем разложить $\varphi(t, \eta)$ в ряд

$$\varphi = \varphi_m + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{t=t_m} (t - t_m)^2,$$

а неэкспоненциальный множитель a взять просто в точке $t = t_m$. Это дает

$$a_m e^{\varphi_m} \left(-\frac{2\pi}{\partial^2 \varphi} \right)^{1/2} = N_m \left(-\frac{2\pi}{\partial^2 \varphi} \right)^{1/2} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Согласно формулам, выведенным в I, в точке максимума

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=t_m} = -\lambda(s).$$

Поэтому

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{E_0}{\varepsilon}}.$$

Производная $\partial \lambda / \partial t$ должна быть взята при постоянной энергии, т. е. при постоянном y или согласно (27) I постоянном произведении $t\lambda'(s)$ (штрих означает дифференцирование по параметру s). Написав производную в виде якобиана, имеем

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)_{t\lambda'=\text{const}} = \frac{\partial(\lambda, t\lambda')}{\partial(t, t\lambda')} = \frac{\frac{\partial(\lambda, t\lambda')}{\partial(t, s)}}{\frac{\partial(t, t\lambda')}{\partial(t, s)}} = -\frac{\lambda'^3}{t\lambda''}.$$

Точке максимума соответствует значение $s = 1$, $t = t_m = \eta/\lambda'$ (1) (см. I). Таким образом,

$$N_m = \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda'^3(1)}{\lambda''(1) \ln \frac{E_0}{\varepsilon}} \right]^{1/2} \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Вычисление $\lambda'(1)$ и $\lambda''(1)$ приводит окончательно к следующему выражению, определяющему число заряженных частиц в ливне в точке максимума

$$N_m = 0,3 \frac{E_0}{\varepsilon \sqrt{\ln \frac{E_0}{\varepsilon}}} \quad (3)$$

(без учета неэкспоненциального множителя мы получили бы просто $N_m = E_0/\varepsilon$). Для энергий $E_0 = 100\varepsilon$ и $E_0 = 1000\varepsilon$ эта формула дает соответственно $N_m = 15$ и $N_m = 120$. Для подстановки в формулу (3) имеет смысл пользоваться точными значениями ε . С учетом поправки Ферми [4] получается для

Pb	8 Mэв
Al	40 Mэв
H ₂ O	75 Mэв
Воздуха	100 Mэв

§ 2. Распределение частиц в ливне по направлениям

Отклонение частиц в ливне от их первоначального направления обуславливается главным образом резерфордовским рассеянием на тяжелых ядрах. Как известно, это рассеяние отличается тем свойством, что оно происходит преимущественно на малые углы.

Этим обстоятельством можно воспользоваться для того, чтобы определить члены, которые должны быть добавлены к кинетическим уравнениям (6), (7) I для учета рассеяния частиц по направлениям.

Кинетическое уравнение, определяющее распределение частиц, рассеиваемых на малые углы, неоднократно рассматривалось (см., например, [5]). Мы произведем здесь для удобства заново вывод этого уравнения применительно к рассматриваемому нами случаю. Пусть $\Pi(E, x, \theta)$ есть функция распределения заряженных частиц по энергиям E , координате x и углам θ (в I Π была функцией только от E и x). Угол (малый) отклонения частиц удобно рассматривать как вектор θ с двумя компонентами: $\theta_x = \theta \cos \varphi$, $\theta_y = \theta \sin \varphi$; θ и φ есть полярный угол и азимут в сферической системе координат с полярной осью вдоль первоначального направления ливня. Вычислим изменение $(\partial\Pi/\partial x)_{\text{расс}}$ функции Π на единице пути благодаря рассеянию. Имеем

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)_{\text{расс}} = \int \{\Pi(\theta + \chi) - \Pi(\theta)\} d\sigma, \quad (4)$$

где $d\sigma$ — эффективное сечение рассеяния на угол χ ; первый член под интегралом представляет собой, как обычно, число частиц, приобретающих в результате рассеяния угол θ , а второй — число частиц, уходящих из данного элемента телесного угла. Разлагая $\Pi(\theta + \chi)$ в ряд по степеням χ , имеем

$$\Pi(\theta + \chi) - \Pi(\theta) = \chi_i \frac{\partial\Pi}{\partial\theta_i} + \frac{1}{2} \chi_i \chi_k \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_i \partial\theta_k}$$

(где по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование по двум значениям: x и y). Интеграл от первого члена исчезает (при интегрировании по углу φ), а во втором члене при усреднении по φ получаем

$$\int \chi_i \chi_k d\sigma = \frac{1}{2} \delta_{ik} \int \chi^2 d\sigma,$$

где δ_{ik} — единичный двумерный тензор. В результате (4) переходит в

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)_{\text{расс}} = \frac{1}{4} \int \chi^2 d\sigma \cdot \Delta_0 \Pi. \quad (5)$$

Согласно релятивистской формуле Резерфорда для рассеяния частиц с энергией E имеем

$$d\sigma = 8\pi \left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2 \frac{N}{Z} \frac{d\chi}{\chi^3}$$

(N — число электронов в 1 см³ вещества, N/Z — число ядер).

При вычислении логарифмически расходящегося интеграла $\int \chi^2 d\sigma$ надо взять в качестве верхнего предела средний угол раствора пучка частиц, который окажется в нашем случае порядка единицы. В качестве же нижнего предела надо взять угол, соответствующий изменению импульса на \hbar/a , где a — расстояние, на котором экранируется кулоновское поле ядра. Другими словами

$$\chi_{\min} \sim \frac{\hbar c^2}{aE} \sim \frac{mc^2}{E} \frac{1}{a} \frac{\hbar}{mc}$$

Отношение $a/(\hbar/mc)$ входит под логарифмом в выражения для лучистого торможения и образования пар фотонами и неоднократно вычислялось [6]. В результате находим

$$\int \chi^2 d\sigma = 8\pi \left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2 \frac{N}{Z} \ln \frac{183Z^{-1/2}E}{mc^2}$$

Подставляя это в (5) и вводя вместо x величину $t = x/A$ (10)I, получаем окончательно

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right)_{\text{расо}} = \delta \Delta_0 \Pi, \quad (6)$$

где

$$\delta = \frac{\pi \hbar c}{2e^2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left[1 + \frac{\ln \frac{E}{mc^2}}{\ln 183Z^{-1/2}}\right]. \quad (7)$$

Полученное выражение должно быть добавлено к правой стороне уравнения (6a)I, в котором теперь Π и Γ являются функциями не только от E и t , но и от θ . Обозначая интегральные операторы, стоящие в уравнениях (6a), (7a) I посредством A , B , C , D (после умножения на E_s и интегрирования они дают величины $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ и D — см. (13)–(17)I), имеем теперь в качестве исходных уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -A\Pi + B\Gamma + \delta \Delta_0 \Pi, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = C\Pi - D\Gamma. \quad (9)$$

Умножим уравнение с обеих сторон на θ^2 и проинтегрируем по всем углам (do — элемент телесного угла); это приводит к

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Pi \theta^2 d\omega = -A \int \Pi \theta^2 d\omega + B \int \Gamma \theta^2 d\omega + 4\delta \int \Pi d\omega, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Gamma \theta^2 d\omega = C \int \Pi \theta^2 d\omega - D \int \Gamma \theta^2 d\omega. \quad (11)$$

Введем, как и в I, вместо переменной E величину

$$y = \ln \frac{E_0}{E}. \quad (12)$$

Полное количество частиц данного интервала энергии $\int \Pi d\omega$ имеет вид $ae^{\varphi(y,t)}$. Величина δ обратно пропорциональна квадрату энергии, т. е. имеет вид $\text{const} \cdot e^{2y}$. Другими словами, свободный член уравнения (10) содержит экспоненциальное выражение $e^{\varphi(y,t)+2y}$. Соответственно этому будем искать решение уравнений (10) и (11) в виде, пропорциональном $e^{\varphi(y,t)+2y}$, причем коэффициент пропорциональности — медленно меняющаяся функция y и t . Из результатов I явствует, что операторы A , B , C и D дают при умножении на экспоненциальную функцию

$$Ae^{\psi(y)} = A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) e^{\psi(y)}$$

и т. д., где $A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$ соответствует выражению $A(s)$. В нашем случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2 = s + 2.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\varphi+2y} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{\varphi+2y} = -\lambda(s) e^{\varphi+2y}.$$

Таким образом, уравнения (10) и (11) (мы пишем A_s , B_s и т. д. вместо $A(s)$, $B(s)$...) переходят в

$$\begin{aligned} (A_{s+2} - \lambda_s) \int \Pi \theta^2 d\omega - B_{s+2} \int \Gamma \theta^2 d\omega &= 4\delta \int \Pi d\omega, \\ -C_{s+2} \int \Pi \theta^2 d\omega + (D - \lambda_s) \int \Gamma \theta^2 d\omega &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где A_s , B_s , C_s , D определяются формулами (13) — (16) I.

Нашей целью является вычисление средних углов отклонения ливневых частиц, т. е. для фотонов и электронов, соответственно величин

$$\overline{\theta_{\Gamma}^2} = \frac{\int \Gamma \theta^2 d\omega}{\int \Gamma d\omega}, \quad \overline{\theta_{\Pi}^2} = \frac{\int \Pi \theta^2 d\omega}{\int \Pi d\omega}. \quad (14)$$

Разделив уравнения (13) на $\int \Pi do$, мы видим, что для определения θ_{Γ}^2 необходимо еще вычислить отношение $\int \Gamma do / \int \Pi do$. Для этого интегрируем уравнения (8), (9) по do ; третий член справа в (8) обращается в нуль, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Pi do = -A \int \Pi do + B \int \Gamma do, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \Gamma do = C \int \Pi do - D \int \Gamma do.$$

Ищем решение в виде

$$\int \Pi do \sim \int \Gamma do \sim e^{\nu}$$

и получаем уравнения

$$(A_s - \lambda_s) \int \Pi do = B_s \int \Gamma do,$$

$$(D - \lambda_s) \int \Gamma do = C_s \int \Pi do,$$

совпадающие, конечно, с (17) I. Из первого, например, имеем

$$\frac{\int \Gamma do}{\int \Pi do} = \frac{A_s - \lambda_s}{B_s}. \quad (15)$$

Подставляя это в (13), получаем

$$\begin{aligned} (A_{s+2} - \lambda_s) \overline{\theta_{\Pi}^2} - \frac{B_{s+2}}{B_s} (A_s - \lambda_s) \overline{\theta_{\Gamma}^2} &= 4\delta, \\ -C_{s+2} \overline{\theta_{\Pi}^2} + (D - \lambda_s) \frac{A_s - \lambda_s}{B_s} \overline{\theta_{\Gamma}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений находим окончательные выражения для θ_{Π}^2 и θ_{Γ}^2 :

$$\overline{\theta_{\Pi}^2} = \frac{4\delta (D - \lambda_s)}{(A_{s+2} - \lambda_s) (D - \lambda_s) - B_{s+2} C_{s+2}}, \quad (16)$$

$$\overline{\theta_{\Gamma}^2} = \frac{4\delta C_{s+2} B_s}{(A_s - \lambda_s) [(A_{s+2} - \lambda_s) (D - \lambda_s) - B_{s+2} C_{s+2}]}. \quad (17)$$

Получившиеся выражения при данной энергии оказываются очень слабо зависящими (через s) от места ливня, к которому они относятся. Другими словами, угол рассеяния ливня почти постоянен по всей его длине. Так, формула (16) (с помощью таблицы в I) показывает, что $\overline{\theta_{\Pi}^2}$ от начала ($t = 0,1y$) до конца ливня ($t = 3,8y$) меняется всего в 1,7 раза. Это объясняется тем, что главное рассеяние испытывают частицы, обладающие меньшей энергией, а всякая частица получилась из частиц большей

энергии на расстоянии от данного места порядка одной условной единицы. Далее, по тем же причинам рассеяние частиц не зависит от энергии частицы, вызвавшей ливень.

В точке максимума ливня ($s = 1$) формулы (16) и (17) дают

$$\overline{\theta_{\Pi}^2} = 2,38\delta, \quad \overline{\theta_{\Gamma}^2} = 0,72\delta. \quad (18)$$

Подставляя численные значения, имеем

$$\overline{\theta_{\Pi}^2} = \frac{250}{E^2}, \quad (19)$$

где E измеряется в $Mэв$. Уже при $E = 30 Mэв$ угол $\theta_{\Pi} \sim 1$. Обращаем внимание на то обстоятельство, что благодаря слабой зависимости δ от Z углы раствора частиц данной энергии практически не зависят от вещества, в котором распространяется ливень. Средний же угол раствора большинства частиц, соответствующий $E \sim \varepsilon$, очевидно, растет с атомным номером. Впрочем, из (19) видно, что уже для воздуха он достигает порядка 1, а у свинца большинство частиц уже полностью рассеяны по направлениям. Это обстоятельство должно сильно ограничивать точность формулы (3) для тяжелых элементов.

§ 3. Ширина ливня

Аналогичным методом можно вычислить среднюю горизонтальную ширину области, в которой расходятся ливневые частицы на данной глубине.

Пусть y и z — координаты ливневых частиц в горизонтальной плоскости; плоский вектор с этими компонентами обозначим \mathbf{r} . В кинетических уравнениях (8) и (9) надо теперь писать слева наряду с производными по вертикальной координате также производные по y и z (функции распределения Π и Γ являются теперь функциями также и от \mathbf{r}). Таким образом, исходные уравнения имеют теперь вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = -A\Pi + B\Gamma + \delta\Delta_{\mathbf{r}}\Pi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{r}} = C\Pi - D\Gamma \quad (21)$$

(производная по \mathbf{r} означает градиент в плоскости y, z).

Умножим уравнения (20), (21) на $\theta \mathbf{r}$ и проинтегрируем по углам $d\theta$ и по плоскости $dydz$. Третий член справа в (20) при этом выпадает, а вторые члены справа интегрируем по частям и в ре-

зультате находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \Pi \theta r d\omega dy dz &= -A \int \Pi \theta r d\omega dy dz + B \int \Gamma \theta r d\omega dy dz + \int \Pi \theta^2 d\omega dy dz, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \Gamma \theta r d\omega dy dz &= C \int \Pi \theta r d\omega dy dz - D \int \Gamma \theta r d\omega dy dz + \int \Gamma \theta^2 d\omega dy dz. \end{aligned} \quad (22)$$

Мы не станем производить дальнейшие вычисления подробно и только наметим их ход. Стоящие в (22) справа интегралы от $\Pi \theta^2$ и $\Gamma \theta^2$ были вычислены нами выше. Поэтому из (22) можно вычислить методом, аналогичным примененному выше, интегралы от $\theta r \Pi$ и $\theta r \Gamma$. Далее, умножив (20) и (21) на r^2 , интегрируя по углам $d\omega$ и по плоскости $dy dz$, находим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \Pi r^2 d\omega dy dz &= -A \int \Pi r^2 d\omega dy dz + B \int \Gamma r^2 d\omega dy dz + 2 \int \theta r \Pi d\omega dy dz, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \Gamma r^2 d\omega dy dz &= C \int \Pi r^2 d\omega dy dz - D \int \Gamma r^2 d\omega dy dz + 2 \int \theta r \Gamma d\omega dy dz. \end{aligned} \quad (23)$$

Зная интегралы от $\Pi \theta r$ и $\Gamma \theta r$, можно найти интегралы от Γr^2 и Πr^2 , а отсюда непосредственно среднюю величину поперечного сечения ливней.

Для этих средних размеров $\overline{r_r^2}$ и $\overline{r_\Pi^2}$ получаются довольно громоздкие формулы, которые мы не будем здесь приводить. Подчеркнем, что они также оказываются слабо зависящими от пути пройденного ливня и от рода вызвавшей его частицы. Для размеров в точке максимума ($s = 1$) получается в результате выражение

$$\overline{r^2} = \frac{2500}{E^2} \quad (24)$$

(E в Мэв, длины в условных единицах). Отсюда видно, что разброс частиц обратно пропорционален их энергии. Перевод в обычные единицы для воздуха дает ширину ливня порядка 250 м.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Landau, G. Rumer. Proc. Roy. Soc., A166, 213, 1938 (Собр. трудов, № 36).
- [2] N. Bhabha, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., A150, 432, 1937.
- [3] J. Carlson, J. Oppenheimer. Phys. Rev., 51, 220, 1937.
- [4] E. Fermi. Phys. Rev., 57, 485, 1940.
- [5] H. A. Bethe, M. Rose, L. Smith. Proc. Am. Phil. Soc., 78, 573, 1938.
- [6] W. Heitler. The quantum theory of radiation. Oxford, 1936.

ЖЭТФ, 11, 32, 1941

J. Phys. USSR, 4, 375, 1941

Вычислено число ливней, создаваемых мезотронами. Обсуждается также максимум кривой России.

Как известно, механизм образования ливней мезотронами заключается в том, что мезотрон создает путем ионизации на своем пути δ -электроны, которые, в свою очередь, уже создают ливни. Вычислим вероятность нахождения в некотором месте ливня с числом заряженных частиц, превышающим n ; другими словами, вычислим число N таких ливней, отнесенное на один мезотрон.

Мезотрон образует δ -электроны на протяжении всего своего пути. Каждый из этих δ -электронов вызывает, вообще говоря, ливень. Поэтому в каждом данном месте наблюдаются ливни, происходящие из δ -электронов, образовавшихся на всем вышележащем участке пути мезотрона.

В каждом ливне полное число заряженных частиц имеет максимум при некоторой длине пройденного ливнем пути. Величина этого максимума тем больше, чем больше энергия создавшей ливень первичной частицы, в рассматриваемом случае — δ -электрона. С другой стороны, вероятность создания мезотроном δ -электрона, как известно, падает с увеличением энергии последнего. Поэтому очевидно, что в данном месте будут существенно преимущественно те ливни, которые имеют в этом месте максимум. Действительно, всякий другой ливень, содержащий в данном месте не меньше, чем n частиц, должен иметь максимум больший, чем n , и потому такой ливень менее вероятен.

Как было показано ранее [1], полное число частиц в ливне имеет вид $ae^{\varphi(t, \eta)}$, где φ — медленно меняющаяся функция, t — длина пути, измеренная в условных единицах (см. формулу (11) в [1]), $\eta = \ln(E_0/\varepsilon)$, где E_0 — энергия вызвавшей ливень частицы (δ -электрона), а ε — ионизационная потеря энергии на условную единицу пути. Нас интересуют те ливни, которые в данном месте (при данном t) обладают числом частиц, большим, чем n , т. е.

$$ae^{\varphi(t, \eta)} > n. \quad (1)$$

Обозначим посредством η_0 значение η , при котором максимум ливня равен n . Согласно изложенному выше нас будут интересовать значения η , близкие к η_0 . Воспользовавшись этим, разложим $\varphi(t, \eta)$ в ряд по степеням $\eta - \eta_0$. Согласно (30) в [1] производная $\partial\varphi(t, \eta)/\partial\eta$ в точке максимума (т. е. при $\eta = \eta_0$) равна 1. Поэтому мы получаем (1) в виде

$$ae^{(\eta - \eta_0) + \varphi(t, \eta_0)} > n. \quad (2)$$

Для дальнейшего нам понадобится вероятность образования δ -электрона мезотроном. Воспользовавшись известными (см., например [2]) формулами для вероятности ионизации быстрой частицей и для средней потери энергии на ионизацию, отнесенными к единице пути, легко находим, что вероятность образования δ -электрона с энергией в интервале dE может быть написана в виде

$$\frac{e}{L} \frac{dE}{E^2}, \quad (3)$$

где L обозначает логарифм, стоящий в формуле для ионизационного торможения. С учетом эффекта Ферми [3] для него получается

$$L = 27,5 + \ln \frac{V}{\sum Z_i (1 + Z_i)}, \quad (4)$$

где V — молекулярный объем в 1 см^3 , а Z_i — атомные номера атомов, входящих в молекулу. Отсюда получаем численно:

	L	
Воздух	33	(5)
Вода	26	
Алюминий	25	
Свинец	22	

Энергия ε выражается через L с помощью формулы

$$\varepsilon = \frac{26L \sum Z_i}{\sum Z_i (Z_i + 1)} \quad (6)$$

(ε в $M\varepsilon e$). Вероятность образования δ -электрона с энергией, превышающей E , напишется соответственно (3) в виде

$$\frac{\varepsilon}{LE} = \frac{1}{L} e^{-\eta}. \quad (7)$$

В данном месте наблюдаются ливни, создаваемые всеми δ -электронами, обладающими энергией, достаточной для того, чтобы создать ливень, содержащий в рассматриваемом месте не менее n заряженных частиц. Если δ -электрон находится на расстоянии t от места наблюдения, то он должен обладать по крайней мере энергией η , определяющейся из (2) как

$$e^{-\eta} = \frac{a}{n} e^{-\eta_0 + \varphi(t, \eta_0)}. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в (7), находим, что вероятность образования δ -электронов с энергией, превышающей это значение, есть

$$\frac{a}{nL} e^{-\eta_0 + \varphi(t, \eta_0)}.$$

Полное число N ливней с числом частиц больше n получится отсюда интегрированием по всем расстояниям t , т. е.

$$N = \frac{1}{nL} \int_0^{\infty} a e^{-\eta_0 + \varphi(t, \eta_0)} dt;$$

стоящий здесь интеграл был вычислен в [4]; именно, согласно (2) в [4]

$$\int_0^{\infty} a e^{\varphi(t, \eta_0)} dt = e^{\eta_0}.$$

Таким образом, мы получаем окончательно

$$N = \frac{1}{nL}. \quad (9)$$

Из этого выражения видно, что N очень слабо зависит от рода вещества, поскольку для всех конденсированных тел, в которых только и можно измерять N , L принимает очень близкие значения. Практически можно написать

$$N = \frac{1}{24n}. \quad (10)$$

Наконец, рассмотрим максимум кривой Росси, т. е. количество ливней, создаваемых мезотронами в тонкой пластинке, например, свинца, как функцию толщины этой пластинки.

Наибольшее число наблюдающихся за пластинкой ливней создается в свинце δ -электронами, образовавшимися в воздухе над пластинкой. Действительно, вероятность образования δ -электронов в воздухе на условную единицу пути больше, чем в свинце, так как она пропорциональна ионизационной потере ϵ (6). Создаваемые же δ -электронами ливни содержат в свинце больше частиц, чем в ливне, созданном в воздухе (число частиц в ливне, создаваемом электроном с энергией E , порядка E/ϵ ; см. [1]).

Соответственно этому при вычислении числа ливней N_{\max} надо брать вероятность образования δ -электронов в воздухе, а предельную энергию η (8) — в свинце. В результате находим

$$N_{\max} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 L_1} \frac{1}{n}, \quad (11)$$

где индекс 1 относится к воздуху, а 2 — к свинцу. Равновесное же число ливней в свинце (т. е. в толстом слое свинца) есть согласно (9) $N_2 = 1/nL_2$. Отношение обоих этих чисел равно

$$\frac{N_{\max}}{N_2} = \frac{\epsilon_1 L_2}{\epsilon_2 L_1},$$

или, подставляя выражения для L и ϵ ,

$$\frac{N_{\max}}{N_2} = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}; \quad (12)$$

\bar{Z} , как и в [1], — средний атомный номер, определяемый формулой

$$\frac{\sum Z_i (Z_i + 1)}{\sum Z_i}.$$

Для свинца это отношение равно 10, для алюминия — 1,7. При этом, разумеется, не учитывалось существование наряду с δ -электронами электронов распада мезотрона, которое должно еще несколько увеличивать отношение (12).

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Landau, G. Rumer. Proc. Roy. Soc., A166, 213, 1938 (Собр. трудов, № 36).
 [2] W. Heitler. The Quantum Theory of Radiation. Oxford, 1936.
 [3] E. Fermi. Phys. Rev., 57, 485, 1940.
 [4] Л. Ландау. ЖЭТФ, 10, 1007, 1940 (Собр. трудов, № 41).

Совместно с Я. А. СМОРОДИНСКИМ

ЖЭТФ, 11, 35, 1941

J. Phys. USSR, 4, 455, 1941

В работе с помощью критерия, полученного Ландау, оцениваются эффективные поперечники при больших энергиях для следующих процессов с мезотронами: 1) комптон-эффект, на мезотроне, 2) образование мезотронных пар при столкновении двух фотонов, 3) рассеяние мезотронов кулоновым полем. Полученные при этом поперечники не растут с энергией, как это имеет место в формулах, полученных методом теории возмущений.

§ 1. Введение

При исследовании процессов, в которых участвуют мезотроны, мы наталкиваемся на трудность, не имеющую места в процессах с электронами. Эта трудность заключается в том, что эффективные поперечники рассеяния мезотронов, как известно, растут с увеличением энергии.

Как недавно было выяснено [1], рост поперечника с энергией связан с тем, что, в то время как электрон в квантовой механике может рассматриваться как точечный, мезотрону необходимо приписать конечный радиус, равный для покоящегося мезотрона «классическому электромагнитному радиусу» $e^2/\mu c^2$ (μ — масса мезотрона). Это утверждение надо понимать в том смысле, что взаимодействие электрона, например, с электромагнитным полем имеет характер точечного для всех сколь угодно малых длин волн электромагнитного поля. Взаимодействие же мезотрона носит точечный характер и может быть описано волновым уравнением Прока только для длин волн, больших, чем электромагнитный радиус мезотрона.

Для меньших длин волн существующая теория неприменима. Это видно из того, что эффективные поперечники в этой

области столь велики, что число рассеянных частиц с заданным угловым моментом оказывается больше, чем их имеется в падающем потоке, что конечно бессмысленно.

Хотя точный вывод эффективных поперечников для очень больших энергий не представляется сейчас возможным, однако, пользуясь критерием, полученным в работе Ландау, можно дать оценку величины этих поперечников для сколь угодно больших энергий. При этом, как и следовало ожидать, полученные поперечники уже не растут с энергией. В настоящей работе этот критерий применяется к процессам взаимодействия мезотронов с электромагнитным полем, не связанным с излучением света.

§ 2. Комптон-эффект

Поперечник для комптон-эффекта был вычислен одним из авторов (Я. Смородинский) [2], а также Буссом и Вильсоном [3] и Кобяси и Утиямой [4]. В системе координат, где мезотрон вначале покоился, и для энергии падающего кванта $\mu c^2 \ll E < 137 \mu c^2$ этот поперечник равен

$$\frac{5\pi}{18} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \frac{E}{\mu c^2}. \quad (2.1)$$

Для того чтобы найти границы применимости этой формулы и выяснить поведение поперечника для энергий, больших $137 \mu c^2$, необходимо вычислить поперечники рассеяния фотонов с заданным угловым моментом. Максимальная величина, которую может иметь поперечник, в системе координат, где центр инерции фотона и мезотрона покоится, равна

$$S_l = 4\pi(2l + 1)\lambda^2. \quad (2.2)$$

Выражение для тока перехода в системе координат, где центр инерции фотона и мезотрона покоится, имеет вид (см. [2], формула (3.14))

$$\begin{aligned} j_{IF} = e^2 \left\{ \frac{ik}{\kappa^2 \delta} (\mathbf{H}^+ \bar{\mathbf{G}} - \mathbf{E}^+ \bar{\mathbf{F}}) \left(\left(1 - \frac{\omega}{ck} \right) \mathbf{F} [\mathbf{n} + \mathbf{n}', \mathbf{G}] \right) + \frac{1}{\delta} [(\bar{\mathbf{v}} \mathbf{H}^+) \mathbf{G}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta} \bar{v}_0 [\mathbf{E}^+ \mathbf{G}] + \frac{1}{\delta} (\bar{\mathbf{v}} \mathbf{E}^+) \mathbf{F} + \right. \\ \left. + \frac{2ik}{\delta} (\mathbf{A}^+ \mathbf{n}') ([(\bar{\mathbf{v}} \mathbf{G}] + \bar{v}_0 \mathbf{F}) - \frac{ik}{\delta} \left(1 + \frac{\omega}{ck} \right) \bar{v}_0 ([(\mathbf{v} \mathbf{H}^+) + v_0 \mathbf{E}^+) + \right. \\ \left. + \frac{ik}{\kappa^2 \delta} \left(1 + \frac{\omega}{ck} \right) \bar{\mathbf{F}} (\mathbf{H}^+ \mathbf{G} - \mathbf{E}^+ \mathbf{F}) + \frac{1}{\delta} [(\mathbf{v} \mathbf{H}^+) \bar{\mathbf{G}}] + \frac{1}{\delta} v_0 [\mathbf{E}^+ \bar{\mathbf{G}}] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\delta} (\mathbf{vE}^+) \bar{\mathbf{F}} - \frac{ik}{\delta'} (\mathbf{n} + \mathbf{n}') [\mathbf{v} [\bar{\mathbf{v}}\mathbf{H}^+] + v_0 (\mathbf{E}^+\mathbf{v})] + \frac{ik}{\delta'} (\mathbf{n} + \mathbf{n}') \bar{v}_0 (\mathbf{vE}^+) + \\
& + \frac{ik}{\delta'} \left[(\mathbf{v}, \mathbf{n} + \mathbf{n}') - v_0 \left(1 - \frac{\omega}{ck} \right) \right] ([\bar{\mathbf{v}}\mathbf{H}^+] + \bar{v}_0 \mathbf{E}^+) + \\
& + \frac{2k^2}{\delta'} (\mathbf{A}^+ \mathbf{n}') (\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v} - \bar{v}_0 v_0) \mathbf{n} - \frac{2k^2}{\delta'} (\mathbf{A}^+ \mathbf{n}') \left[(\mathbf{v}, \mathbf{n} + \mathbf{n}') - \right. \\
& \left. - v_0 \left(1 - \frac{\omega}{ck} \right) \right] \bar{\mathbf{v}} - 2(\bar{\mathbf{v}}_0 \mathbf{v} - \bar{v}_0 v_0) \mathbf{A}^+ + (\bar{\mathbf{v}}\mathbf{A}^+) \mathbf{v} + \\
& \qquad \qquad \qquad + (\mathbf{v}\mathbf{A}^+) \bar{\mathbf{v}} + \text{к. с.} \}, \quad (2.3)
\end{aligned}$$

где $k\mathbf{n}$ — волновой вектор падающего фотона, $k\mathbf{n}'$ — волновой вектор рассеянного фотона, \mathbf{v} , v_0 , \mathbf{F} , $\bar{\mathbf{G}}$ — волновые функции свободного мезотрона (один четырехмерный и два трехмерных вектора). Комплексно сопряженные функции относятся к конечному состоянию

$$\delta = -2k^2 \left(1 + \frac{\omega}{ck} \right), \quad \delta' = 2k^2 \left(\cos \vartheta + \frac{\omega}{ck} \right), \quad \vartheta = \mathbf{nn}', \quad \kappa = \frac{\mu c}{\hbar},$$

\mathbf{A} — вектор-потенциал электромагнитного поля,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ e^{i(k\mathbf{r} - ct)} + \mathbf{A}^- e^{-i(k\mathbf{r} - ct)},$$

$$\mathbf{H}^+ = i[k\mathbf{A}^+], \quad \mathbf{E}^+ = ik\mathbf{A}^+.$$

Как мы видим, в этом выражении имеются члены двух типов. В членах, не содержащих δ' , зависимость от угла рассеяния заключена только в числителе, в который входит синус или косинус этого угла. Такие члены соответствуют только малым значениям углового момента l (а именно, l равно 0 и 1), поэтому они для нас неинтересны и могут быть опущены. Оставшиеся члены содержат $1 + (\mathbf{nn}')$ в знаменателе и при разложении на шаровые волны дают члены, соответствующие всем значениям l . Таким образом, если отбросить члены, содержащие только малые l , мы получим при больших энергиях следующие выражения для векторного произведения тока перехода на единичный вектор \mathbf{n}' в направлении излученного кванта:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{A^+} [\mathbf{j}_{IF} \mathbf{n}'].$$

I. Начальная и конечная поляризации мезотрона продольные:

$$\mathbf{B}^{L-L} = \frac{e^2 k}{2\mu c^2 \kappa} \frac{1}{1 + (\mathbf{nn}')} (\mathbf{en}') [\mathbf{nn}']; \quad (2.4)$$

\mathbf{e} — единичный вектор поляризации света.

II. Начальная и конечная поляризации мезотрона поперечные:

$$\mathbf{V}^{\Gamma-T} = \frac{e^2 k}{4\mu c^2 \kappa} \frac{1}{1 + (\mathbf{nn}')^2} (\alpha \mathbf{n}') (\mathbf{e}\mathbf{n}') (\alpha' \mathbf{n}) [\mathbf{nn}']; \quad (2.5)$$

α и α' — единичные векторы начальной и конечной поляризации.

Переходам с изменением поляризации мезотронов отвечает меньшее значение эффективных поперечников, а потому соответствующими членами можно пренебречь.

Эта особенность перехода у мезотронов неоднократно отмечалась и соответствует тому, что матричные элементы первого порядка при больших энергиях мезотронов больше у процессов с изменением поляризации, чем у процессов, при которых поляризация остается неизменной. Так как комптон-эффект есть процесс второго порядка, то для него основную роль будут играть процессы с одной и той же поляризацией в начальном и конечном состояниях. Формула для дифференциального сечения имеет вид (см. [2], формула (2.7))

$$d\sigma = \frac{1}{2} B^2 d\Omega. \quad (2.6)$$

Выражения (2.4) и (2.5) надо разлагать на шаровые волны. Однако такое разложение достаточно громоздко, а потому воспользуемся другим методом, вполне достаточным для нашей цели.

Легко видеть, что рассеяние из-за члена $1 + \cos \vartheta$ в знаменателе происходит в основном в углах, близких к $\vartheta = \pi$. Но при таких углах шаровую функцию можно заменить плоской волной с волновым вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной волновому вектору кванта, рассеянному на угол π .

Действительно, шаровая функция Y_l^m удовлетворяет уравнению

$$\Delta^* Y_l^m = -l(l+1) Y_l^m, \quad (2.7)$$

где Δ^* — оператор Лапласа на сфере

$$\Delta^* = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Если $\vartheta = \pi - \theta$, где θ мало, то этот оператор можно записать в виде

$$\Delta = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Этот оператор тождествен оператору Лапласа на плоскости, причем θ играет роль радиуса-вектора. Таким образом, уравнение (2.7) при больших l и малых θ переходит в волновое уравнение на плоскости, если еще заменить $l(l+1)$ на l^2 .

Решение этого уравнения есть плоские волны с волновым вектором l . Абсолютная величина этого вектора равна индексу шаровой функции l , а различным значениям индекса l отвечают различные ориентации волнового вектора в плоскости.

Итак, разложение по шаровым функциям в нашем случае можно заменить разложением в двухмерный интеграл Фурье.

Пусть, например, некоторый процесс рассеяния описывается волновой функцией $f(\theta, \varphi)$, имеющей максимум в направлении $\varphi = \pi$.

Разложение $f(\theta, \varphi)$ будет

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \iint f_l e^{il\theta} dl_x dl_y;$$

$\theta = \theta_x, \theta_y$ — декартовы¹ координаты, соответствующие полярным координатам θ, φ . Интеграл от квадрата модуля этой функции равен

$$\iint |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \iint |f_l|^2 dl_x dl_y.$$

Вводя на плоскости переменных l_x и l_y полярные координаты и интегрируя по углу, получим

$$\iint |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = \int |f(l)|^2 dl, \quad (2.8)$$

где

$$|f(l)|^2 = l |f_l|^2 \quad (2.9)$$

и будет определять рассеяние, отвечающее угловому моменту l . Случай векторной функции, который имеет место при рассеянии света, несколько отличается от случая скалярной функции. Но для больших значений углового момента можно не обращать внимания на это обстоятельство и разлагать каждую компоненту как скаляр¹.

Для того чтобы разложить в интеграл векторы (2.4), (2.5), выберем систему координат следующим образом: ось z направим в сторону, противоположную вектору n , а ось x — по вектору l .

¹ Например, электрическое мультипольное излучение с моментом l описывается не шаровой функцией с индексом l , а линейной комбинацией шаровых функций с индексами $l+1$ и $l-1$.

Тогда компоненты вектора V^{L-L} будут иметь вид (в дальнейшем численные коэффициенты опускаем)

$$\begin{aligned} B_x^{L-L} &= \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \frac{n'_x n'_y}{n_x'^2 + n_y'^2}, \\ B_y^{L-L} &= \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \frac{n_x'^2}{n_x'^2 + n_y'^2}, \\ B_z^{L-L} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом мы воспользовались соотношением, верным при n'_z , близком к единице:

$$1 - n'_z \approx \frac{1}{2} (n_x'^2 + n_y'^2).$$

Компоненты Фурье составляющих вектора V^{L-L} равны

$$\begin{aligned} B_x^{L-L}(l) &= \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \iint \frac{n'_x n'_y}{n_x'^2 + n_y'^2} e^{i(n'_x l_x + n'_y l_y)} dn'_x dn'_y = \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \frac{4\pi}{l^4} l_x l_y, \\ B_y^{L-L}(l) &= \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \iint \frac{n_x'^2}{n_x'^2 + n_y'^2} e^{i(n'_x l_x + n'_y l_y)} dn'_x dn'_y = \frac{e^2 k}{\mu c^2 \kappa} \frac{2\pi}{l^4} (l_x^2 - l_y^2), \\ B_z^{L-L}(l) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Квадрат вектора $V^{L-L}(l)$, соответствующего угловому моменту l , равен

$$l |V^{L-L}(l)|^2 = \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2 \frac{4\pi^2}{l^3};$$

$\varepsilon = \hbar c k$ — энергия фотона.

Таким образом, эффективный поперечник для рассеяния фотона с угловым моментом l по формуле (2.6) равен

$$\sigma_l \sim \frac{1}{l^3} \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2. \quad (2.12)$$

Как нетрудно показать, разложение вектора V^{T-T} дает $l |V^{T-T}(l)|^2$, пропорциональное $1/l^7$, а, следовательно, этими членами можно пренебречь. Поэтому формула (2.12) определяет полный поперечник рассеяния.

Воспользуемся теперь критерием, полученным в работе Ландау. Согласно ему, формула верна до энергий, определяемых равенством

$$\frac{1}{l^3} \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2}\right)^2 \sim l \lambda^2 \sim \frac{\hbar^2 c^2}{\varepsilon^2} l,$$

т. е. до энергии

$$\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}} l. \quad (2.13)$$

Наоборот, для данной энергии (большей, чем $\sqrt{137} \mu c^2$) формула (2.12) дает правильную величину поперечника для всех l , удовлетворяющих неравенству

$$l \gg l_0 = \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} \frac{\varepsilon}{\mu c^2}. \quad (2.14)$$

Для меньших l нельзя получить значение поперечника. Однако можно утверждать, что оно, во всяком случае, удовлетворяет неравенству (опять с точностью до коэффициентов)

$$\sigma_l \leq l \frac{\hbar^2 c^2}{e^2}. \quad (2.15)$$

Полный поперечник рассеяния складывается из двух частей: первую получаем интегрируя (2.12) по всем $l > l_0$:

$$\sigma \sim \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 = \frac{\hbar}{\mu c} \frac{e^2}{\mu c^2}. \quad (2.16)$$

Вторая часть, во всяком случае, не больше, чем интеграл от (2.2) по всем $l < l_0$, т. е. не больше, чем $\left[\frac{\hbar}{\mu c} \frac{e^2}{\mu c^2} \right]$; это выражение совпадает с (2.16), поэтому мы можем считать, что по порядку величины (2.16) дает правильное выражение для поперечника рассеяния.

Таким образом, для энергий кванта, меньших $\sqrt{137} \mu c^2$, рассеяние пропорционально квадрату энергии, а для больших энергий эффективный поперечник принимает постоянное значение.

Рассеяние, определяемое таким способом в системе центра инерции, происходит только в малом угле около направления $\vartheta = \pi$. Это следует из того, что в рассеянии принимают участие преимущественно волны с большими угловыми моментами. Из обычных соображений следует, что в этом случае амплитуды рассеянной волны (2.11) будут отличны от нуля только в угле, удовлетворяющем соотношению

$$l_0 \theta_0 \sim 1,$$

где l_0 — наименьшая величина углового момента, участвующего в рассеянии.

При углах, близких к π , рассеяние определяется формулой

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{\pi}{6} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \left(\frac{r_e}{\mu c^2} \right)^2 d\theta \quad (\theta = \pi - \vartheta).$$

Интегрируя до угла

$$\theta_0 \sim \frac{1}{l_0} \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2} \frac{\mu c^2}{E}}, \quad (2.17)$$

мы получаем не зависящий от энергии поперечник, что совпадает с нашей оценкой. Отсюда следует, что в угле, в котором рассеяние происходит, оно описывается обычной формулой, полученной методом теории возмущений.

Перейдем в систему, где мезотрон покоится. Энергия, которую фотон передает мезотрону в этой системе координат, равна

$$\Delta E = \gamma p \cos^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол рассеяния в системе центра инерции, p — импульс в этой системе,

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}};$$

u — относительная скорость обеих систем.

При углах $\theta \sim \theta_0$ переданная энергия

$$\Delta E \sim E \left(1 - \frac{2\hbar c}{e^2} \frac{\mu c^2}{E} \right).$$

Таким образом, в этой системе фотон при рассеянии отдает мезотрону почти всю свою энергию. После рассеяния у фотона остается энергия, по порядку величины не большая, чем $137 \mu c^2$.

Поэтому рассеяние происходит всегда так, что у фотона остается энергия меньшая, чем критическая, а так как при этом рассеяние описывается обычной формулой (в системе, где мезотрон вначале покоился)

$$d\sigma = \frac{1}{96} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \left(\frac{E}{\mu c^2} \right)^2 \left\{ 11 - 10 \frac{\cos \theta - \frac{E}{\mu c^2} (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{E}{\mu c^2} (1 - \cos \theta)} + \right. \\ \left. + 7 \left(\frac{\cos \theta - \frac{E}{\mu c^2} (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{E}{\mu c^2} (1 - \cos \theta)} \right)^2 \right\} \frac{d\Omega}{\left[1 + \frac{E}{\mu c^2} (1 - \cos \theta) \right]^2}, \quad (2.18)$$

то можно сформулировать наш критерий следующим образом: формула (2.18) правильно описывает рассеяние фотонов, если энергия хотя бы одного из фотонов (падающего или рассеянного) меньше, чем $137 \mu c^2$.

§ 3. Образование мезотронных пар двумя фотонами

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, могут быть применены к процессу образования мезотронной пары при столкновении двух фотонов. Поперечник для этого процесса в системе координат, где общий импульс фотонов равен нулю, определяется формулой [4]

$$d\sigma = \frac{1}{32} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\mu c^2} \right)^2 (13 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad (3.1)$$

где ε — энергия частиц ($\varepsilon \gg \mu c^2$).

Формула для этого процесса вычисляется как комптон-эффект на мезотроне в состоянии с отрицательной энергией с переходом мезотрона в состояние с положительной энергией. Что это действительно так, видно из сравнения матричных элементов поглощения фотона и образования пары, которые оказываются одинаковыми с точностью до знака (см. [5], стр. 90).

Принимая это во внимание, мы можем применить к этому процессу критерий, полученный для комптон-эффекта.

В системе координат, где мезотрон покоится, образование пар будет происходить только для длин волн одного из фотонов, меньших радиуса мезотрона.

Чтобы написать границы применимости в системе, где общий импульс фотонов равен нулю, воспользуемся тем обстоятельством, что скалярное произведение четырехмерных импульсов мезотрона и фотона есть инвариант. В исходной системе покоящегося мезотрона это четырехмерное произведение при максимальном значении энергии равно $\mu c^2 \hbar c / e^2$.

Приравнявая эту величину к тому же скалярному произведению в новой системе координат, получим условие, связывающее максимальную энергию фотона E_0 и максимальный угол между направлением фотонов и мезотронов θ_0 :

$$\mu c^2 \frac{\hbar c}{e^2} = E_0^2 (\cos \theta_0 - 1). \quad (3.2)$$

Таким образом, при больших энергиях рассеяние происходит только в угле

$$\theta_0 \sim \frac{\mu c^2}{E_0} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{e^2}}.$$

Интегрируя (3.1) по всем углам, меньшим θ_0 , получим поперечник для больших энергий

$$\sigma \sim \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 = \frac{\hbar}{\mu c} \frac{e^2}{\mu c^2}. \quad (3.3)$$

§ 4. Рассеяние мезотронов в кулоновом поле

Рассеяние мезотронов в кулоновом поле не сводится к комптон-эффекту. Однако в этом случае можно привести некоторые соображения по поводу границ применимости формул, полученных Мессси и Корбенем [6].

Рассмотрим процесс рассеяния в системе координат, в которой мезотрон покоится. Поле нелетающего протона или электрона в этой системе можно разложить в интеграл Фурье. Компонента такого разложения отличается от компоненты Фурье поля в вакууме тем, что ее частота не равна ck . Ее иногда называют псевдофотоном. Процесс рассеяния состоит в том, что мезотрон поглощает одну из компонент Фурье и получает импульс, равный импульсу поглощенного псевдофотона.

Таким образом, мы здесь имеем дело с процессом, в котором участвует всего один псевдофотон. По аналогии с комптон-эффектом можно считать, что до тех пор, пока энергия псевдофотона меньше, чем $137 \mu c^2$, формулы, полученные Мессси и Корбенем, справедливы; если же энергия кванта больше, то мезотрон будет с ним взаимодействовать гораздо слабее и рассеяния почти не будет происходить.

В системе координат, где покоится рассеивающая частица, это соответствует тому, что мезотрон не может отдать энергию, большую, чем

$$E_c = \frac{\mu}{M_0} \cdot 137 \mu c^2,$$

где M_0 — масса рассеивателя. В этой системе, если мезотрон имеет энергию меньше, чем E_c , справедлива формула Мессси и Корбена. При больших же энергиях рассеяние будет происходить только в угле

$$\theta \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2} \frac{\mu c^2}{E}}.$$

В случае рассеяния от электронов эта критическая энергия

$$E_c \sim 2,8 \cdot 10^{12} \text{ эв.}$$

При рассеянии от протонов $E_c \sim 1,4 \cdot 10^9 \text{ эв}$. Из-за очень большой величины критической энергии для электронов изменения в формуле Мессси и Корбена незначительны. Эти изменения существенны только при рассеянии от протонов,

При энергии мезотрона большей Mc^2 (M — масса протона) поперечник рассеяния на протоне равен

$$S(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon}{E} + \frac{\varepsilon^2}{2E^2} \right], \quad \varepsilon \gg \frac{\mu}{M} \mu c^2, \quad (4.1)$$

где ε — энергия, переданная при столкновении, и E — энергия мезотрона. При малых ε имеют место обычные потери по формуле Резерфорда. Специфические для мезотронов потери по (4.1) равны

$$\int_0^E \varepsilon S(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi}{9} \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 E \quad \text{при } E < \frac{\mu}{M} \cdot 137 \mu c^2 = E_c \quad (4.2)$$

$$\text{и } \int_0^{E_c} \varepsilon S(\varepsilon) d\varepsilon \sim \left(\frac{e^2}{Mc^2} \right)^2 \cdot 137 Mc^2 \quad \text{при } E > E_c. \quad (4.3)$$

Интересно сравнить потери энергии при столкновении с протоном с ионизационными потерями на электроны $\frac{2\pi e^4}{mc^2} L$ (m — масса электрона, L — ионизационный логарифм, который мы, заведомо преуменьшая результат, можем считать порядка единицы).

Как видно из сравнения формул (4.1), (4.2) и (4.3), потери на протоне меньше, чем на электроны².

Таким образом, рассеянием мезотронов от протонов при всех энергиях мезотронов можно пренебречь по сравнению с рассеянием от электронов³.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау. ЖЭТФ, 10, 718, 1940 (Собр. трудов, № 39).
- [2] Я. Смородинский. ЖЭТФ, 10, 840, 1940.
- [3] F. Booth, A. H. Wilson. Proc. Roy. Soc. (A), 175, 483, 1940.
- [4] M. Kobayasi, R. Utiyama. Sc. Pap. Inst. of Phys. Res., 37, 221, 1940.
- [5] H. Fröhlich, W. Heitler, B. Kahn. Proc. Roy Soc. (A), 174, 85, 1940.
- [6] H. S. Massey, H. C. Corben. Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 463, 1940.

² Если бы формула Мессии и Корбена была справедлива при любых энергиях, то эти потери сравнивались бы при энергиях мезотронов в $(\mu/m)\mu c^2$, принимая значение (4.2).

³ Речь идет только о рассеянии на кулоновом поле.

ЖЭТФ, 11, 592, 1941

J. Phys. USSR, 5, 71, 1941

Производится квантование произвольной системы взаимодействующих частиц (жидкости) с помощью введения операторов плотности и скорости жидкости; выводятся условия коммутации между этими операторами (§ 1). На основании результатов этого квантования определяется общий характер распределения энергетических уровней в спектре квантовой жидкости (§ 2); исследуется характер температурной зависимости теплоемкости гелия II (§ 3). Оказывается, что при температуре абсолютного нуля квантовая жидкость может обладать свойством сверхтекучести (§ 4). При температурах, отличных от абсолютного нуля, в гелии II оказывается возможным одновременное существование двух движений — сверхтекучего и нормального, что может быть описано посредством введения понятий о сверхтекучей и нормальной «части» жидкости; λ -точка гелия II связана с исчезновением «сверхтекучей части» жидкости (§ 5). Дается истолкование опытов по измерению вязкости и теплопроводности гелия II; рассмотрен термомеханический эффект в гелии II (§ 6). Выведена система гидродинамических уравнений, описывающих макроскопическое движение гелия II (§ 7). С помощью этих уравнений исследовано распространение звука и показано, что в гелии II должны существовать две скорости звука (§ 8). В § 9 обсуждается проблема сверхпроводимости.

Как известно, жидкий гелий при температурах ниже его λ -точки (так называемый гелий II) обладает рядом замечательных свойств. Из этих свойств основным является открытая П. Л. Капицей [1] сверхтекучесть гелия — отсутствие вязкости при течении гелия II через тонкие капилляры или щели.

Все эти свойства, как и самый факт существования жидкости вплоть до абсолютного нуля, очевидно, не могут быть объяснены в классической теории и связаны с квантовыми явлениями.

Тисса [2] предложил рассматривать гелий II как вырожденный идеальный бозе-газ. При этом предполагается, что атомы, находящиеся в основном состоянии (состоянии с равной нулю энергией), движутся через жидкость без трения ни о стенки сосуда, ни об остальную часть жидкости. Такое представление не может, однако, быть признано удовлетворительным. Не говоря уже о том, что жидкий гелий не имеет ничего общего с идеальным газом, атомы, находящиеся в основном состоянии, отнюдь не вели бы себя как «сверхтекучие». Напротив, ничто не могло бы мешать атомам, находящимся в нормальном состоянии, сталкиваться с возбужденными атомами, т. е. при движении через жидкость они испытывали бы трение и ни о какой «сверхтекучести» не могло бы быть и речи. Таким образом, объяснение, предложенное Тиссой, является лишь кажущимся, и не только не вытекает из делаемых предположений, но прямо противоречит им.

§ 1. Квантование движения жидкости

Произвольную систему взаимодействующих частиц (жидкость) можно описывать в классической теории посредством плотности ρ и потока массы \mathbf{j} , определяющихся следующим образом. Пусть \mathbf{R} — радиус-вектор произвольной точки в пространстве, а \mathbf{r}_α — радиус-вектор частицы с массой m_α . Тогда ρ определяется как

$$\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}), \quad (1.1)$$

где δ — трехмерная δ -функция, а суммирование производится по всем частицам в системе. Интеграл по объему $\int \rho dV$ дает полную массу системы. Аналогично плотность потока массы определяется как

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R});$$

\mathbf{v}_{α} , \mathbf{p}_{α} — скорость и импульс частицы m_{α} .

Подчеркнем, что при таком описании жидкости не производится никакого усреднения в том смысле, как оно производится в статистике. Описание исходит из микроскопической картины, поскольку все частицы обладают (в данный момент) определенными координатами \mathbf{r}_{α} и скоростями \mathbf{v}_{α} .

При переходе к квантовой теории надо рассматривать ρ и \mathbf{j} как некоторые операторы; определим вид этих операторов. Для простоты предположим, что система состоит всего из одной

частицы. Тогда классическая плотность $\rho = m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Оператор ρ должен быть определен таким образом, чтобы его математическое ожидание $\int \psi^*(\mathbf{r}) \rho \psi(\mathbf{r}) dV$ ($\psi(\mathbf{r})$ — волновая функция частицы) было равно плотности массы в точке \mathbf{R} , т. е. $m |\psi(\mathbf{R})|^2$. Отсюда следует, что оператор ρ должен иметь тот же вид $\rho = m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, а в случае произвольной системы частиц — соответственно вид (1.1).

Классическая плотность потока для одной частицы есть $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Легко видеть, что соответствующий ей квантовый оператор есть

$$\mathbf{j} = 1/2 [\rho \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \rho],$$

где ρ — обычный оператор импульса

$$\rho = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

(∇ обозначает дифференцирование по \mathbf{r}). Действительно, математическое ожидание \mathbf{j} есть

$$\int \psi^*(\mathbf{r}) \mathbf{j} \psi(\mathbf{r}) dV = \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi dV + \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi dV$$

или, интегрируя в первом члене по частям,

$$\begin{aligned} \int \psi^* \mathbf{j} \psi dV &= \frac{\hbar}{2i} \int \{-\psi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi^* + \psi^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi\} dV = \\ &= \frac{\hbar}{2i} \{\psi^*(\mathbf{R}) \nabla \psi(\mathbf{R}) - \psi(\mathbf{R}) \nabla \psi^*(\mathbf{R})\}, \end{aligned}$$

т. е. как раз то, что и должно было быть. Для произвольной системы частиц имеем аналогично

$$\mathbf{j} = 1/2 \sum_{\alpha} \{\rho_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) + \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) \rho_{\alpha}\}, \quad \rho_{\alpha} = \frac{\hbar}{i} \nabla_{\alpha}. \quad (1.2)$$

Определим теперь условия коммутации. Для плотности имеем, очевидно,

$$\rho_1 \rho_2 - \rho_2 \rho_1 = 0 \quad (1.3)$$

($\rho_1 \rho_2$ обозначают соответственно $\rho(\mathbf{R}_1)$, $\rho(\mathbf{R}_2)$).

При определении условий коммутации ρ с \mathbf{j} и \mathbf{j} с ρ можно рассматривать для краткости в суммах (1.1), (1.2) всего по одному члену, поскольку операторы, соответствующие разным частицам, коммутируют друг с другом. Для определения коммутации ρ с \mathbf{j} пишем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 &= \frac{m\hbar}{2i} \{[\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) - \\ &\quad - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) [\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla]\}. \end{aligned}$$

Для упрощения стоящего справа выражения замечаем, что оператор вида

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$$

можно преобразовать следующим образом:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)) + \\ + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla,$$

где в первом члене $(\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2))$ означает просто градиент δ -функции, т. е. ∇ уже не является оператором. Благодаря наличию множителя $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)$ в этом члене можно писать $(\nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2))$ вместо $(\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2))$. Таким образом,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) (\nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)) + \\ + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla.$$

Аналогично

$$\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \\ + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) (\nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)).$$

В результате получаем

$$\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 = \frac{\hbar}{i} m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$$

или для произвольной системы

$$\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 = \frac{\hbar}{i} \rho_1 \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (1.4)$$

(писать справа ρ_1 или ρ_2 безразлично ввиду наличия δ -функции от $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$).

Аналогичным образом можно получить условие коммутации между компонентами вектора \mathbf{j} друг с другом. Вычисления в этом случае более длинны, и мы не приводим их здесь.

Введем оператор \mathbf{v} скорости движения жидкости согласно

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \rho), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} + \mathbf{j} \frac{1}{\rho} \right). \quad (1.6)$$

Для дальнейшего оказывается более удобным пользоваться оператором \mathbf{v} вместо оператора тока \mathbf{j} .

Для условия коммутации ρ с \mathbf{v} имеем

$$\mathbf{v}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \frac{1}{\rho_1} \right) \rho_2 - \rho_2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \frac{1}{\rho_1} \right) = \\ = \frac{1}{2\rho_1} (\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1) + (\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1) \frac{1}{2\rho_1}$$

или, подставляя (1.4),

$$\mathbf{v}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{v}_1 = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (1.7)$$

Аналогичным образом, но более длинно получаем из условий коммутации для компонент v

$$v_{1i} v_{2k} - v_{2k} v_{1i} = \frac{\hbar}{i} \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \frac{1}{\rho_1} (\text{rot } \mathbf{v})_{ik}, \quad (1.8)$$

где $(\text{rot } \mathbf{v})_{ik}$ обозначает разность $(\partial v_k / \partial x_i) - (\partial v_i / \partial x_k)$.

Ниже нам понадобится также условие коммутации между ρ и $\text{rot } \mathbf{v}$. Применяя операцию rot (с дифференцированием по координатам \mathbf{R}_1) к обеим сторонам уравнения (1.7), получим

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 \cdot \rho_2 - \rho_2 \cdot \text{rot } \mathbf{v}_1 = 0. \quad (1.9)$$

Легко убедиться в том, что при применении полученных соотношений к макроскопическому движению жидкости получаются, как и должно было быть, обычные уравнения гидродинамики, написанные в операторном виде. Энергия единицы объема классической жидкости, рассматриваемой макроскопическим образом, есть $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon(\rho)$ — внутренняя энергия единицы массы жидкости. Энергия ε предполагается зависящей только от плотности ρ жидкости, — в этом проявляется макроскопичность рассмотрения, связанная со статистическим усреднением. При микроскопическом рассмотрении такое предположение, конечно, несправедливо.

Соответствующий написанному классическому выражению квантовый оператор есть ¹

$$\frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2} + \rho \varepsilon(\rho).$$

Функция Гамильтона H жидкости есть интеграл по объему

$$H = \int \left\{ \frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2} + \rho \varepsilon(\rho) \right\} dV. \quad (1.10)$$

Определим производную $\dot{\rho}$ от плотности по времени. Имеем

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} (H \rho - \rho H).$$

Обозначим временно координаты точки, в которой берется ρ , индексом 1, а координаты переменной точки в области интегри-

¹ Оператор $\mathbf{v} \rho \mathbf{v} / 2$ можно написать также и в виде $(\rho \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2 \rho) / 4$.

рования в (1.10) — индексом 2. Тогда

$$\dot{\rho}_1 = \frac{i}{\hbar} \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{v}_2 \rho_2 \mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2 \rho_2 \mathbf{v}_2] + [\rho_2 \varepsilon(\rho_2) \rho_1 - \rho_1 \rho_2 \varepsilon(\rho_2)] \right\} dV_2.$$

В силу (1.3) второй член под знаком интеграла исчезает, а первый можно написать в виде

$$\frac{1}{2} [\mathbf{v}_2 \rho_2 (\mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2) \rho_2 \mathbf{v}_2]$$

или, подставляя (1.7),

$$\frac{\hbar}{2i} \nabla \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) (\mathbf{v}_2 \rho_2 + \rho_2 \mathbf{v}_2) = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \mathbf{j}_2.$$

Таким образом,

$$\dot{\rho}_1 = \int \nabla \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \mathbf{j}_2 dV_2 = - \int \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \operatorname{div} \mathbf{j}_2 dV_2 = - \operatorname{div} \mathbf{j}_1,$$

т. е. мы приходим к уравнению непрерывности в операторном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \frac{\rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \rho}{2}. \quad (1.11)$$

Аналогичным образом можно вычислить производную

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{i}{\hbar} (H \mathbf{v} - \mathbf{v} H).$$

Вычисление приводит к уравнению

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{1}{2} \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d\varepsilon}{d\rho}, \quad (1.12)$$

т. е. уравнению Эйлера в операторном виде ($d\varepsilon/d\rho$ есть давление p жидкости).

Подчеркнем еще раз, что уравнения (1.11), (1.12) являются менее общими, чем условия коммутации (1.3) — (1.9), которые применимы и при точном, микроскопическом рассмотрении жидкости.

§ 2. Энергетический спектр квантовой жидкости

В классической гидродинамике идеальной жидкости показывается, что если в некоторый момент времени движение является потенциальным ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$) во всем объеме жидкости, то оно будет потенциальным и во все другие моменты времени (теорема Лагранжа). Оказывается, что в квантовой гидродинамике имеется аналог этой классической теоремы.

Согласно условию коммутации (1.9) $\text{rot } v$ всегда коммутирует с плотностью ρ . Компоненты $\text{rot } v$, однако, не коммутируют, вообще говоря, ни друг с другом, ни с компонентами скорости v (при применении операции rot к уравнению (1.8) правая сторона равенства не исчезает). Поэтому $\text{rot } v$ не коммутирует, вообще говоря, и с функцией Гамильтона, т. е. не сохраняется.

Исключением является случай, когда во всем объеме жидкости $\text{rot } v = 0$. В этом случае в правой стороне (1.8) стоит нуль, и $\text{rot } v$ коммутирует с ρ и v , а потому и с функцией Гамильтона².

Таким образом, равный нулю ротор скорости сохраняется. Другими словами, квантовая жидкость всегда обладает такими стационарными состояниями, в которых $\text{rot } v$ равен нулю во всем объеме. Такие состояния могут быть названы по аналогии с классической гидродинамикой состояниями потенциального движения жидкости.

По поводу полученного результата можно привести аналогию (чисто формальную) с моментом количества движения M в квантовой механике. Коммутация двух компонент M друг с другом приводит к третьей компоненте M ; в результате компоненты M коммутируют все друг с другом, а потому существуют одновременно, только если все они равны нулю. Известно также, что не существует состояний со сколь угодно малыми значениями момента — первые отличные от нуля его собственные значения порядка \hbar . Это является следствием неоднородности условий коммутации — левая сторона их квадратична по M , а правая — линейна.

Аналогичное утверждение можно высказать и о $\text{rot } v$ в квантовой гидродинамике. Именно, не существует таких состояний, в которых $\text{rot } v$ был бы отличен от нуля, но сколь угодно мал во всем объеме жидкости. Другими словами, между состояниями потенциального ($\text{rot } v = 0$) и вихревого ($\text{rot } v \neq 0$) движения квантовой жидкости нет непрерывного перехода.

Отсюда непосредственно вытекают основные особенности энергетического спектра жидкости. Наличие разрыва между состояниями потенциального и вихревого движений означает, что между низшими энергетическими уровнями вихревых и потенциальных движений должен существовать некоторый конечный энергетический интервал. Что касается вопроса о том, который из этих двух уровней лежит ниже, то логически, по-видимому, возможны оба случая.

² Причем не только с функцией Гамильтона (1.10), но и со всякой другой функцией, содержащей ρ , v и их производные любого порядка по координатам.

Ниже будет показано, что явление сверхтекучести получается, если предположить, что нормальный уровень потенциальных движений лежит ниже нормального уровня вихревых движений. Поэтому надо считать, что в жидком гелии осуществляется именно этот случай. Надо, впрочем, отметить, что поскольку существует всего лишь одна квантовая жидкость — жидкий гелий, то вопрос о том, является ли такое расположение уровней, а потому и свойство сверхтекучести свойственным всем квантовым жидкостям, не может быть выяснен экспериментально.

Мы приходим, таким образом, к следующей картине распределения уровней в энергетическом спектре жидкого гелия (подчеркиваем, что речь идет не об уровнях для отдельных атомов гелия, а об уровнях, соответствующих состояниям всей жидкости в целом). Этот спектр складывается из двух налагающихся друг на друга непрерывных спектров. Один из них соответствует потенциальным движениям, а другой — вихревым. При этом наиболее низкий уровень вихревого спектра расположен выше низшего уровня потенциального спектра, являющегося нормальным, невозбужденным состоянием жидкости; энергетический интервал между этими двумя уровнями обозначим посредством Δ .

Что касается величины «энергетической щели» Δ , то она не может быть вычислена точно. По порядку величины она должна быть равна

$$\Delta \sim \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m^{1/3}} \quad (2.1)$$

(m — масса атома гелия, ρ — плотность жидкого гелия). Это единственная величина размерности энергии, которую можно составить из m , ρ и \hbar . Подстановка чисел дает $\Delta/k \sim 1^\circ \text{K}$, т. е. Δ , как и следовало ожидать, порядка kT_λ , где T_λ — температура λ -точки гелия (см. также (3.8)).

Рассмотрим какой-нибудь из возбужденных уровней, причем такой, который расположен не слишком высоко над началом спектра (вихревого или потенциального).

Всякое слабо возбужденное состояние можно рассматривать как совокупность отдельных «элементарных возбуждений». Что касается возбужденных уровней потенциального спектра, то потенциальное внутреннее движение жидкости представляет собой не что иное, как продольные, т. е. звуковые, волны. Поэтому соответствующие «элементарные возбуждения» представляют собой просто звуковые кванты, т. е. фононы. Энергия фононов является, как известно, линейной функцией от их импульса p , т. е.

$$\varepsilon = cp, \quad (2.2)$$

где c — скорость звука. Следовательно, в начале потенциально-го спектра энергия пропорциональна первой степени импульса.

«Элементарные возбуждения» вихревого спектра могут быть названы «ротонами»³. Для них не существует тех специальных причин, которые обуславливают линейную зависимость ε от p и имеют место у фононов. При малых импульсах p энергия ротона может быть просто разложена в ряд по степеням p ; в силу изотропии жидкости разложение скаляра ε по вектору p содержит только члены четных степеней, так что можно написать

$$\varepsilon = \Delta + \frac{p^2}{2\mu}, \quad (2.3)$$

где μ — некоторая «эффективная масса» ротона (в (2.3), как и в (2.2), энергия отсчитывается от нормального состояния⁴).

До тех пор пока количество фононов и ротонных (отнесенное к единице объема жидкости) невелико, можно рассматривать их совокупность как смесь двух идеальных газов — газа фононов и газа ротонных. Фононный газ подчиняется, как известно, статистике Бозе. Что касается ротонных, то они, вероятно, тоже подчиняются статистике Бозе. Надо, впрочем, отметить, что поскольку энергия ротона всегда содержит большую по сравнению с kT величину Δ (при низких температурах, когда только и можно трактовать совокупность ротонных как газ), то различие между распределениями Бозе и Ферми в применении к ним несущественно и можно вообще пользоваться для ротонных распределением Больцмана.

§ 3. Теплоемкость гелия II

Из описанных свойств энергетического спектра непосредственно следуют некоторые выводы о характере температурной зависимости теплоемкости гелия II.

При достаточно низких температурах, когда делается несущественным аномальное поведение теплоемкости вблизи самой λ -точки, теплоемкость можно рассматривать как складывающуюся из двух частей — из фононной и ротонной. Что касается первой (C_{ph}), то она представляет собой не что иное, как дебаевскую

³ Это название предложено И. Е. Таммом.

⁴ Байль [3] в недавней работе произвел исследование общих свойств энергетического спектра жидкости и пришел к выводу о наличии «энергетической щели» между нормальным и всеми возбужденными состояниями. Этот результат неправдоподобен уже потому, что он означал бы, что в жидкости невозможно распространение колебаний (звуковых волн) малых частот.

теплоемкость, пропорциональную кубу температуры. Эта часть теплоемкости может быть вычислена точно⁵, поскольку дебаевская температура может быть вычислена из имеющихся данных о сжимаемости гелия, из которой, в свою очередь, можно вычислить скорость звука в гелии. Взяв для сжимаемости значение из [4], получаем скорость звука, равную 250 м/сек. По известной формуле получаем для теплоемкости 1 г гелия

$$C_{ph} = 4,4 \cdot 10^{-3} T^3 \text{ кал} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}. \quad (3.1)$$

Ротонная часть теплоемкости имеет благодаря наличию энергетической щели Δ между нормальными и вихревыми уровнями экспоненциальную температурную зависимость ($C_r \sim e^{-\Delta/kT}$); коэффициент при экспоненциальном множителе может быть выражен через Δ и эффективную массу ротона μ . При рассматриваемых температурах можно, как уже указывалось, применять к ротонному газу распределение Больцмана. Свободная энергия газа с заданным числом частиц (число частиц ротонного газа само является функцией температуры, определяясь из условия минимальности свободной энергии) есть

$$F_r = -kTV \int e^{-\epsilon/kT} \frac{d\tau_p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (d\tau_p = dp_x dp_y dp_z)$$

(V — объем). Ниже мы будем относить свободную энергию на 1 г гелия, соответственно чему положим $V = 1/\rho$ (ρ — плотность гелия), так что

$$F_r = -\frac{kT}{\rho (2\pi\hbar)^3} \int e^{-\epsilon/kT} d\tau_p. \quad (3.2)$$

Число же ротоннов есть при этом

$$N_r = \frac{1}{\rho (2\pi\hbar)^3} \int e^{-\epsilon/kT} d\tau_p. \quad (3.3)$$

Подставляя сюда $\epsilon = \Delta + p^2/2\mu$, получим

$$F_r = -\frac{kT}{\rho} \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/kT}, \quad (3.4)$$

$$N_r = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/kT}. \quad (3.5)$$

Отсюда энтропия

$$S_r = -\frac{\partial F_r}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu k}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} T^{3/2} \Delta e^{-\Delta/kT} \left(1 + \frac{5kT}{2\Delta} \right) \quad (3.6)$$

⁵ Это вычисление было произведено еще в 1940 г. А. Б. Мигдалом, которому я хотел бы выразить благодарность за сообщение полученных результатов.

и теплоемкость

$$C_r = \Gamma \frac{\partial S_r}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{k^{1/2}\Delta^3}{T^{3/2}} e^{-\Delta/kT} \left[1 + 3 \frac{kT}{\Delta} + \frac{15}{4} \left(\frac{kT}{\Delta} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Если воспользоваться данными Кеезома и мисс Кеезом [5] для теплоемкости в интервале 1,2—1,5° К, то из приведенных формул получаются для μ и Δ значения

$$\Delta/k = 8 - 9^\circ\text{К}, \quad \mu = 7 - 8m_{\text{He}} \quad (3.8)$$

(m_{He} — масса атома гелия).

При достаточно низких температурах C_r должна сделаться меньше C_{ph} , т. е. должна остаться практически лишь фоновая часть теплоемкости. Надо, однако, отметить, что вычисленная по формуле (3.1) фоновая теплоемкость оказывается при 1,2° примерно в 22 раза меньше ее экспериментального значения. Таким образом, еще при температурах в два раза ниже λ -точки ротоновый газ играет преобладающую роль в теплоемкости.

Для более низких температур теплоемкость измеряли до настоящего времени только Б. Блиней и Ф. Симон [6] (в интервале от 0,25 до 0,8°). Полученные ими значения все еще раз в 10 превышают даваемые формулой (3.1) значения фоновой теплоемкости. С другой стороны, Блиней и Симон находят возможным описать найденный ими температурный ход теплоемкости законом $\sim T^3$ во всем интервале от 0,25 до 0,8° К. Отсюда следовало бы, что и избыточная над C_{ph} часть теплоемкости, т. е. теплоемкость C_r , тоже подчиняется этому закону, между тем как по теории следует ожидать для нее экспоненциального хода. Надо, впрочем, отметить, что Блиней и Симон не опубликовали своих измерений полностью, и не исключена возможность внесения в эти результаты поправок. С другой стороны, измерения П. Л. Капицы [7] показывают, что значение энтропии при 1,33° К, вычисленное из формулы (3.6) со значениями μ и Δ из (3.8), согласуется с опытом, что не имеет места, если вычислять энтропию из данных Блиней и Симона.

§ 4. Сверхтекучесть гелия II при абсолютном нуле

Покажем теперь, что сверхтекучесть гелия II следует из описанных выше свойств энергетического спектра. Начнем с рассмотрения жидкого гелия при абсолютном нуле. При этой температуре жидкость находится в своем нормальном невозбужденном состоянии.

Рассмотрим гелий, текущий по капилляру с постоянной скоростью V . Наличие вязкости должно было бы проявиться в том, что благодаря трению о стенки капилляра и трению внутри самой жидкости происходила бы диссипация кинетической энергии движения жидкости и ее постепенное замедление.

Удобнее рассматривать это течение в системе отсчета, движущейся вместе с гелием. В этой системе гелий покоится, а стенки капилляра движутся со скоростью — V . При наличии вязкости покоящийся гелий тоже должен начать двигаться. Физически очевидно, что благодаря взаимодействию с движущимися стенками трубки не может с самого начала возникнуть движение сразу всей жидкости как целого. Появление движения должно начаться с возбуждения внутренних движений в близких к стенке слоях жидкости, т. е. с возбуждения в жидкости фононов или ротоннов.

Предположим, что в жидкости может возбудиться фонон. Тогда энергия E_0 жидкости (в системе отсчета, где она первоначально покоилась) делается равной энергии ε этого фонона (энергию нормального состояния принимаем условно за нуль), а ее импульс P_0 — импульсу p фонона. Поскольку $\varepsilon = cr$, то

$$E_0 = cr, \quad P_0 = p.$$

Перейдем теперь обратно к системе координат, в которой капилляр покоится. Согласно известным формулам преобразования энергии и импульса в классической механике, имеем для энергии E и импульса P в этой системе

$$E = E_0 + P_0 V + \frac{M V^2}{2}, \quad P = P_0 + M V,$$

где M — масса жидкости. Подставляя E_0 и P_0 , находим для энергии

$$E = cr + Vp + \frac{M V^2}{2}. \quad (4.1)$$

Член $\frac{1}{2} M V^2$ представляет собой первоначальную кинетическую энергию текущего гелия; выражение же $cr + Vp$ есть изменение энергии благодаря возбуждению фонона. Это изменение должно быть отрицательно, поскольку энергия движущейся жидкости должна уменьшаться:

$$cr + Vp < 0.$$

Выполнение этого условия требует, во всяком случае, чтобы скорость V была по абсолютной величине больше скорости звука c :

$$V > c. \quad (4.2)$$

При меньших скоростях в движущейся жидкости фононы не могут возбудиться (от взаимодействия со стенками трубки).

Аналогичные рассуждения можно произвести для возбуждения ротона. В этом случае

$$E_0 = \varepsilon = \Delta + p^2/2\mu$$

и вместо (5.1) получаем

$$E = \Delta + \frac{p^2}{2\mu} + Vp + \frac{MV^2}{2}. \quad (4.3)$$

Для того чтобы было $E < MV^2/2$, во всяком случае, необходимо, чтобы

$$\Delta + \frac{p^2}{2\mu} - Vp < 0,$$

т. е.

$$V > \frac{p}{2\mu} + \frac{\Delta}{p}.$$

Стоящее справа выражение имеет минимум при $p^2 = 2\mu\Delta$, так что для того, чтобы мог возбудиться ротон, во всяком случае должно быть

$$V > \sqrt{2\Delta/\mu}. \quad (4.4)$$

Таким образом, при не слишком больших скоростях течения в гелии II не могут возбудиться ни фононы, ни ротонны. Это значит, что течение жидкости не будет замедляться, т. е. гелий обнаружит явление сверхтекучести⁶.

Заметим, что сверхтекучесть должна исчезнуть при достаточно больших скоростях уже хотя бы по указанным выше причинам. Мы оставляем при этом в стороне вопрос о том, прекратится ли сверхтекучесть уже при меньших скоростях по каким-либо иным причинам (предельная скорость, получающаяся из (4.2), очень велика — скорость звука в гелии равна 250 м/сек; (4.4) дает величину, в несколько раз меньшую).

§ 5. Гелий II при температурах выше абсолютного нуля

Рассмотрим теперь гелий при температуре, отличной от 0° К. Тогда гелий не находится в основном состоянии, в нем имеются возбуждения, о которых при достаточно низкой температуре мо-

⁶ Заметим, что для идеального газа $\Delta = 0$, и потому даже при абсолютном нуле он не обнаруживал бы явления сверхтекучести ни при каких скоростях течения в противоположность предложению Тиссы.

жно сказать, что они образуют газ, состоящий из фононов и ротонов. Произведенный в § 4 вывод сам по себе остается в силе и теперь, поскольку в этом выводе не было использовано непосредственно то обстоятельство, что жидкость находилась первоначально в основном состоянии. Поэтому новые фононы и ротонны не могут возбудиться благодаря движению гелия относительно стенок сосуда и при температурах, отличных от 0°K . Необходимо, однако, выяснить, каким образом будет проявляться наличие фононов и ротонов, которые имеются уже в жидкости самой по себе.

Для этого рассмотрим жидкий гелий, находящийся в аксиально-симметрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω . Перейдем к системе отсчета, вращающейся вместе с сосудом. В этой системе сосуд неподвижен, т. е. внешние условия, в которых находится жидкость, стационарны. Поэтому в ней имеет место распределение Гиббса, т. е. вероятность нахождения жидкости в том или ином возбужденном состоянии определяется формулой

$$\text{const } e^{-E'/kT},$$

где E' — энергия возбужденного состояния жидкости во вращающейся системе отсчета. Перейдем теперь обратно к неподвижной системе отсчета. Как известно, энергия E' тела во вращающейся системе отсчета связана с энергией E в неподвижной системе соотношением

$$E' = E - M\Omega,$$

где M — момент количества движения тела в данном возбужденном состоянии (в нормальном состоянии $M = 0$). Таким образом, распределение Гиббса в неподвижной системе отсчета есть

$$\text{const } e^{-\frac{E-M\Omega}{kT}}. \quad (5.1)$$

Для наглядности предположим, что температура достаточно низка, так что можно говорить о возбужденном состоянии, как об идеальном газе фононов и ротонов. Тогда энергию E и момент M возбужденного состояния можно написать в виде

$$E = \sum \varepsilon, \quad M = \sum m, \quad (5.2)$$

где ε , m — энергии и моменты отдельных фононов и ротонов.

Как известно, при подстановке в распределении Гиббса $e^{-E/kT}$ энергии в виде $E = \sum \varepsilon$ можно перейти к распределению для

отдельных «частиц» газа — в данном случае к распределению Бозе

$$\frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

для фононов и, вероятно, для ротонов (впрочем, какое именно распределение, несущественно для дальнейшего).

Аналогично при подстановке (5.2) в (5.1) мы получим тем же способом такое же распределение для фононов и ротонов во вращающемся сосуде с той только разницей, что вместо ϵ будет стоять $\epsilon - \Omega m$; так, распределение Бозе примет вид

$$\frac{1}{e^{(\epsilon - \Omega m)/kT} - 1}. \quad (5.3)$$

Но такое распределение представляет собой не что иное, как распределение во вращающемся как целое (с угловой скоростью Ω) газе. Таким образом, мы приходим к результату, что во вращающемся сосуде с гелием II устанавливается статистическое равновесие, которое отличается от равновесия в покоящемся сосуде только тем, что газ фононов и ротонов вращается вместе с сосудом, как бы увлекаясь его стенками.

Если вычислить из написанного распределения момент количества движения гелия во вращающемся сосуде при данной температуре, т. е. величину

$$\bar{M} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint \frac{m d\tau_p dV}{e^{(\epsilon - \Omega m)/kT} - 1}, \quad (5.3)$$

то при абсолютном нуле, т. е. при полном отсутствии фононов и ротонов, мы получили бы, очевидно, просто нуль. При более высоких температурах момент количества движения будет отличен от нуля, но момент инерции (т. е. коэффициент пропорциональности между \bar{M} и Ω) будет при достаточно низких температурах еще гораздо ниже обычного (соответствующего вращению вместе с сосудом всей массы жидкости).

Мы приходим, таким образом, к фундаментальному результату, что при движении стенок сосуда только часть массы жидкого гелия увлекается ими, а другая часть как бы остается неподвижной. Поэтому можно наглядно рассматривать жидкий гелий так, как если бы он представлял смесь двух жидкостей — одной сверхтекучей, не обладающей вязкостью и не увлекающейся стенками сосуда, и другой — нормальной, «зацепляющейся» при движении о стенки и ведущей себя, как нормальная жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися друг через друга жидкостями «нет трения», т. е. не происхо-

дит передачи импульса от одной из них к другой. Действительно, самое наличие такого взаимного движения мы получили при рассмотрении статистического равновесия в равномерно вращающемся сосуде. Но если какое-либо относительное движение может иметь место в состоянии статистического равновесия, то это значит, что оно не сопровождается трением.

Подчеркнем, что рассмотрение гелия как «смеси» двух жидкостей является не больше чем способом выразаться, способом, удобным для описания явлений, происходящих в гелии II. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не является вполне адекватным. В действительности надо говорить, что в квантовой жидкости, каковой является гелий II, могут существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей «эффективной массой» (так, что сумма обеих этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений «нормально», т. е. обладает теми же свойствами, как и движение обычной жидкости; другое же — «сверхтекучее». Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому. Особенно подчеркиваем, что здесь нет никакого разделения реальных частиц жидкости на «сверхтекучие» и «нормальные». В определенном смысле можно говорить о «сверхтекучей» и «нормальной» массах жидкости, как о массах, связанных с обоими одновременно возможными движениями, но это отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части.

Имея в виду все эти оговорки относительно истинного характера происходящих в гелии II явлений, удобно все же пользоваться терминами «сверхтекучая» и «нормальная» жидкости как удобным способом краткого описания этих явлений. В дальнейшем мы и будем так поступать.

При вращении сосуда с гелием сверхтекучая часть жидкости, как уже указывалось, остается неподвижной. Можно сказать, что сверхтекучая жидкость не способна к вращению. Математически это означает, что rot скорости сверхтекучего движения равен нулю. Таким образом, движение сверхтекучей жидкости всегда является потенциальным⁷. Напротив, нормальная часть жидкости может совершать как потенциальное, так и вихревое движение.

В частности, отсюда вытекает следующее интересное свойство движения гелия II. Как известно из гидродинамики, при потенциальном течении жидкость не оказывает давления на обтекаемые ею тела (так называемый парадокс Эйлера). Поэтому

⁷ Более строгое доказательство этого утверждения будет дано в § 9 при рассмотрении аналогичного вопроса для сверхпроводников.

сверхтекучая часть жидкости не будет оказывать при своем движении никакого давления на погруженное в гелий II тело; оно будет испытывать воздействие только со стороны нормальной части жидкости.

При низких температурах, когда возбуждение не слишком велико, нормальная часть жидкости представляет собой совокупность ротонов и фононов. Поэтому можно вычислить вязкость нормальной жидкости как вязкость смеси фононного и ротонного газов. При этом даже при не очень низких температурах, т. е. таких, при которых количество ротонов еще велико по сравнению с количеством фононов, все же нельзя пренебречь фононами и рассчитывать вязкость как вязкость одного только ротонного газа, поскольку «длина свободного пробега» фононов, как можно показать, значительно превосходит длину пробега ротонов.

Важнейшим параметром, определяющим свойства гелия при каждой данной температуре, является отношение между массой и сверхтекучей и нормальной частей жидкости. Введем плотность ρ_n нормальной жидкости и плотность ρ_s сверхтекучей; сумма $\rho_s + \rho_n = \rho$ есть полная истинная плотность жидкости.

При абсолютном нуле отношение ρ_n/ρ равно нулю. По мере повышения температуры оно растет, пока не сделается равным единице, после чего, конечно, будет оставаться постоянным. Температура, при которой ρ_n/ρ обратится в единицу, и представляет собой точку перехода гелия II в гелий I. Таким образом, фазовый переход в жидком гелии связан с исчезновением сверхтекучей части жидкости. Это исчезновение происходит постепенно, т. е. ρ_n/ρ обращается в единицу непрерывным образом, без скачка. Поэтому переход является фазовым переходом второго рода, т. е. λ -точкой (не сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты). Наличие же скачка теплоемкости является, как известно, непосредственным термодинамическим следствием фазового перехода второго рода (см., например, [8]).

Укажем здесь на следующий возможный способ непосредственного экспериментального определения кривой ρ_n/ρ как функции температуры. Если измерить момент инерции J сосуда, наполненного гелием II и вращающегося вокруг своей оси, то отношение J к моменту инерции J_0 , рассчитанному в предположении вращения всей массы гелия вместе с сосудом, определяет отношение ρ_n/ρ при данной температуре.

При достаточно низких температурах отношение ρ_n/ρ может быть вычислено. ρ_n складывается при этих температурах из двух независимых частей — эффективной массы идеального газа фононов и массы газа ротонов. Вычислим сначала фононную часть ρ_n . Для этого представим себе, что фононный газ движется как целое поступательно с постоянной скоростью V .

Как известно, функция распределения для газа, движущегося как целое, получается из функции распределения неподвижного газа просто путем замены энергии частицы ε величиной $\varepsilon - pV$, где p — импульс частицы. Поэтому функция распределения фононов, подчиняющихся статистике Бозе, будет

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(\varepsilon - pV)/kT} - 1}.$$

Вычислим полный импульс P фононного газа (отнесенный к единице объема). Имеем

$$P = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{p d\tau_p}{e^{(\varepsilon - pV)/kT} - 1}.$$

Предположим, что скорость V мала, и разложим подынтегральное выражение по степеням pV . Член нулевого порядка исчезает при усреднении по направлениям p и остается

$$P = - \int p(pV) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} d\tau_p, \quad n_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}.$$

Поскольку для фононов $\varepsilon = cp$, то

$$c \frac{p}{p} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial n_0}{\partial p},$$

так что можно написать

$$P = - \frac{1}{c} \int p(pV) \frac{\partial n_0}{\partial p} d\tau_p.$$

Интегрируя по частям и производя усреднение по направлениям импульса p , получаем

$$P = \frac{4}{3c} V \int p n_0 d\tau_p = \frac{4}{3c^2} V \int \varepsilon n_0 d\tau_p.$$

Но стоящий здесь интеграл представляет собой не что иное, как энергию ρE_{ph} единицы объема фононного газа, так что

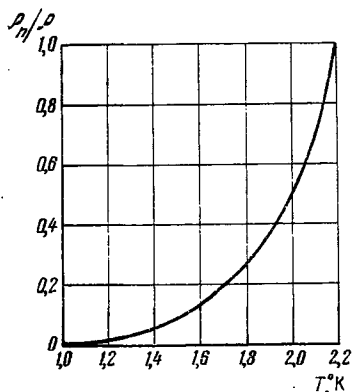
$$P = \frac{4E_{ph}}{3c^2} \rho V.$$

Коэффициент при V представляет собой искомую эффективную массу единицы объема фононного газа, т. е. фононную часть $\rho_n^{(ph)}$ плотности ρ_n ,

$$\rho_n^{(ph)} = \frac{4E_{ph}}{3c^2} \rho. \quad (5.4)$$

Энергия E_{ph} фононного газа, а с нею и $\rho_n^{(ph)}$ пропорциональны T^4 .

Аналогичное вычисление для ротонной части массы нормальной жидкости при низких температурах дает следующее выражение: (для ротонов пользуемся распределением Больцмана с $\varepsilon = \Delta + p^2/2\mu$):



$$\rho_n^{(r)} = N_r \mu \rho \quad (5.5)$$

(N_r из (3.4)). Число ротонов N_r , а с ним и $\rho_n^{(r)}$ зависят от температуры экспоненциально.

Кривая зависимости ρ_n/ρ от температуры изображена на рисунке. Еще при 1°K фононная часть ρ_n в 30 раз меньше ротонной части. На рисунке часть кривой, близкая к λ -точке, не может, разумеется, быть вычислена и получена интерполированием.

Можно, впрочем, ожидать, что благодаря очень быстрому росту ρ_n по формуле (5.5) самое значение температуры λ -точки можно приблизительно получить, полагая $\rho_n/\rho = 1$ и пользуясь при этом формулой (5.5) для ρ_n . Такое вычисление дает для температуры λ -точки $2,3^\circ \text{K}$ в хорошем согласии с известным значением $2,19^\circ \text{K}$.

§ 6. Течение через капилляры и теплопроводность гелия II

Развитые выше представления позволяют удовлетворительно объяснить ряд результатов, наблюдавшихся экспериментально, а также предсказать ряд новых свойств, которые следует ожидать у гелия II.

Как показано П. Л. Капицей [1], при протекании по капилляру или по тонкой щели гелий II не обнаруживает вязкости. С точки зрения излагаемой теории это объясняется тем, что при вытекании гелия II из сосуда по тонкой щели через щель протекает сверхтекучая «часть» жидкости, не обнаруживающая трения; нормальная же «часть» задерживается в сосуде, протекая через щель несравненно медленнее со скоростью, соответствующей ее вязкости и толщине капилляра.

Известно также, что при измерении вязкости по затуханию крутильных колебаний диска, погруженного в гелий II [9], получаются отличные от нуля значения. Этот результат также яв-

ляется вполне естественным. Действительно, при вращении диска в жидкости, содержащей как сверхтекучую, так и нормальные части, он будет останавливаться уже благодаря трению о нормальную жидкость. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру обнаруживается наличие сверхтекучей части жидкости, в опытах же с вращением диска в гелии II обнаруживается нормальная часть.

Энтропия гелия II определяется статистическим распределением фононов и ротонов. Поэтому при всяком движении жидкости, при котором фононный и ротонный газ остается неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии. Мы приходим, таким образом, к весьма важному результату, что при течении сверхтекучей жидкости не происходит никакого переноса энтропии. Другими словами, сверхтекучая жидкость не переносит при своем движении тепла. Отсюда, в свою очередь, следует, что движение гелия II, в котором принимает участие только сверхтекучая часть, является термодинамически обратимым.

Как было указано выше, при протекании гелия II по тонким капиллярам или щелям мы имеем дело именно с таким течением сверхтекучей жидкости. Поэтому такое протекание должно быть обратимым (вернее, тем более близким к полной обратимости, чем тоньше капилляр и чем меньше проникает в него нормальной жидкости). Это обстоятельство было обнаружено в остроумных опытах, недавно произведенных П. Л. Капицей [7].

Далее, поскольку протекающий через тонкий капилляр гелий не переносит с собой тепла, то мы можем сделать еще один важный вывод. Именно, жидкий гелий, вытекающий из сосуда через тонкий капилляр, должен находиться при температуре абсолютного нуля (вернее, при температуре более низкой, чем температура гелия в сосуде, и равной нулю лишь в идеальном случае бесконечно тонкого капилляра).

Известное свойство гелия II образовывать движущиеся по твердой поверхности пленки является эффектом, родственными свойствами его перетекания по тонким капиллярам. Сам по себе факт образования пленки не является особым свойством, присутствующим только гелию II. Пленки образуются всякой жидкостью, смачивающей данную твердую поверхность. В обычных жидкостях образование пленки и ее распространение на большой участок поверхности происходит чрезвычайно медленно благодаря наличию вязкости, образование же и движение пленки у гелия II происходит быстро благодаря его сверхтекучести.

Так называемый термомеханический эффект в гелии II заключается, как известно, в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание;

наоборот, в месте втекания гелия из капилляра в сосуд происходит охлаждение. Само по себе наличие термомеханического эффекта свойственно не одному только гелию⁸, аномальным у гелия II является большая величина эффекта. Термомеханический эффект в обычных жидкостях представляет собой необратимое явление типа термоэлектрического эффекта Пельтье.

Такого рода эффект должен существовать и в гелии II, однако в этом случае он перекрывается значительно превосходящим его другим эффектом, специфическим для гелия II и не имеющим ничего общего с необратимыми явлениями типа эффекта Пельтье. Именно, нагревание при вытекании происходит просто по той причине, что вытекающий через капилляр гелий не уносит с собой тепла, и поэтому имеющееся в сосуде тепло распределяется на меньшее количество гелия II. При втекании гелия в сосуд имеет место обратное явление.

Легко написать, чему равно количество тепла Q , поглощающегося при втекании в сосуд через капилляр 1 г гелия. Поскольку вытекающая жидкость не содержит фононов и ротонов, то ее энтропия равна нулю. Для того чтобы находящийся в сосуде гелий остался при своей температуре T , надо было бы сообщить ему количество тепла TS (S — энтропия 1 г гелия при температуре T) так, чтобы скомпенсировать уменьшение приходящейся на единицу массы энтропии благодаря введению 1 г гелия с энтропией, равной нулю. Это значит, что при втекании 1 г гелия в сосуд с гелием при температуре T поглощается количество тепла

$$Q = TS. \quad (6.1)$$

Наоборот, при вытекании 1 г гелия из сосуда с гелием при температуре T выделяется количество тепла TS .

Измерение тепла Q было недавно произведено П. Л. Капицей [7]. Полученные им результаты оказались в прекрасном согласии с формулой (6.1).

Рассмотрим теперь два сосуда с гелием II при температурах T_1 и T_2 , причем сосуды соединены друг с другом тонким капилляром. Благодаря возможности свободного перетекания сверхтекучей жидкости по капилляру быстро установится механическое равновесие гелия в обоих сосудах. Поскольку, однако, сверхтекучая жидкость не переносит тепла, то тепловое равновесие, при котором температуры гелия в обоих сосудах сравниваются, установится лишь значительно медленнее.

Условие механического равновесия гелия легко написать, воспользовавшись тем, что установление этого равновесия про-

⁸ Термомеханический эффект у воды наблюдался недавно Б. В. Дерягиным.

исходит согласно предыдущему при постоянной энтропии S_1 и S_2 гелия в обоих сосудах. Если E_1 и E_2 — внутренние энергии единиц массы гелия при температурах T_1 и T_2 , то условие механического равновесия (т. е. минимума энергии), осуществляемого переносом сверхтекучей жидкости, будет

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial N}\right)_{S_1} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial N}\right)_{S_2},$$

где N — число атомов в 1 г гелия. Но производная $(\partial E/\partial N)_S$ есть химический потенциал ζ . Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\zeta(p_1, T_1) = \zeta(p_2, T_2)$$

(p_1, T_1 и p_2, T_2 — давление и температура в первом и втором сосудах) или

$$\Phi(p_1, T_1) = \Phi(p_2, T_2), \quad (6.2)$$

где Φ — термодинамический потенциал 1 г гелия II.

Если давления p_2, p_1 малы, то, разлагая по их степеням и помня, что $\partial\Phi/\partial p$ есть удельный объем V , получаем

$$V\Delta p = \Phi(T_1) - \Phi(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} SdT \quad (6.3)$$

($\Delta p = p_2 - p_1$). Если мала также и разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то, разлагая по степеням ΔT и замечая, что $\partial\Phi/\partial T = -S$, получаем

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{S}{V}. \quad (6.4)$$

Поскольку $S > 0, V > 0$, то и $\Delta p/\Delta T > 0$ в согласии с экспериментом.

Формулы (6.1) и (6.4) были указаны еще Лондоном [10], исходя из представлений Тиссы, словесная формулировка которых в этом пункте совпадает с результатами излагаемой здесь теории. Эти формулы полностью подтверждаются опытами П. Л. Капицы.

Можно отметить, что описываемые явления можно при предлагаемой их интерпретации рассматривать как осмотические явления в «растворе» фононов и ротоннов и жидком гелии, причем роль полупроницаемой перегородки играют тонкие капилляры или щели.

Наконец, остановимся на теплопроводности гелия II. Процесс переноса тепла в гелии II надо представлять согласно раз-

виваемой теории в следующем виде. Рассмотрим сначала теплопроводность гелия II в капиллярах, большая величина которой была открыта Кеезомом и мисс Кеезом [11] и которая была подробно изучена П. Л. Капицей [12].

При нагревании гелия в одном из концов капилляра (или в припаянной к нему бульбочке) в гелии возникают два противоположно направленных встречных потока. От нагретого конца к холодному идет поток нормальной жидкости, переносящей тепло; переносимого таким способом тепла с избытком хватает для объяснения экспериментально наблюдающихся больших величин теплопередачи. В обратном направлении идет поток сверхтекучей жидкости; оба потока по количеству переносимой ими массы в точности компенсируют друг друга, так что никакого реального макроскопического течения в гелии в действительности не возникает.

П. Л. Капица наблюдал отклонение листка, подвешенного перед открытым концом капилляра, при нагревании гелия в бульбочке с другой стороны капилляра. П. Л. Капица предложил истолкование этого явления как обусловленного аксиальным потоком гелия от горячего к холодному концу, идущему практически по всему сечению трубочки; неизменность количества гелия в трубочке предполагалась поддерживающейся посредством обратного втекания гелия по тонкому пристеночному слою.

Согласно развитым выше квантовым представлениям это явление выглядит иначе. Втекающий в капилляр поток сверхтекучей жидкости не производит на обтекаемый ею листок никакого давления (благодаря потенциальности движения, см. § 5). Напротив, вытекающий из капилляра поток нормальной жидкости оказывает на листок давление, отклоняющее его в наблюдаемую сторону. Оба эти потока идут по всему сечению капилляра, и необходимость в предположении пристеночного потока жидкости с аномальными свойствами, таким образом, отпадает.

Еще раз подчеркнем, что понятия «сверхтекучей» и «нормальной» жидкости являются лишь удобным способом наглядного описания явления. В действительности надо было бы говорить об одновременно происходящих в одной и той же жидкости двух движениях, из которых одно переносит тепло, а другое — нет.

Заметим еще, что мы приходим к весьма своеобразной картине: на погруженное в гелий II тело может действовать сила, в то время как никакого движения жидкости как целого не происходит.

Рассмотрим еще процесс теплопроводности гелия в больших объемах. Если в гелий II погружено тело с нагретой поверхностью, то в объеме жидкости опять возникают два потока — поток нормальной жидкости, направленный от нагретой поверх-

ности, и встречный поток сверхтекучей жидкости. Переход одного потока в другой, т. е. переход сверхтекучей жидкости в нормальную, происходит в тонком пристеночном слое. Толщина этого слоя должна быть порядка длины свободного пробега образующих «нормальную часть» жидкости фононов и ротонов. В этом же слое и будет, очевидно, иметь место почти все падение температуры; в основной массе жидкости следует ожидать почти полного отсутствия градиента температуры. Подобное распределение температуры вблизи нагретой поверхности, по-видимому, подтверждается опытами Капицы [12].

§ 7. Уравнения макроскопической гидродинамики гелия II

Исходя из развитых выше представлений о микроскопическом механизме явления сверхтекучести, можно построить полную систему гидродинамических уравнений, которые описывали бы гелий II макроскопическим (феноменологическим) образом.

Исходным положением является фундаментальное обстоятельство, что движение гелия II должно описываться не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями. Одна из этих скоростей — «сверхтекучая» скорость (обозначим ее как v_s) — удовлетворяет условию

$$\operatorname{rot} v_s = 0, \quad (7.1)$$

а на границе с твердыми поверхностями должна обращаться в нуль только нормальная ее компонента, но не тангенциальная, соответственно тому, что сверхтекучая жидкость не задерживается трением о стенки сосуда. Для «нормальной» же скорости v_n жидкости на границе с твердой поверхностью должно иметь место (как у обычных жидкостей) условие $v_n = 0$, выражающее тот факт, что нормальная жидкость «прилипает» к стенкам.

Оказывается, что уравнения гидродинамики с двумя скоростями v_s и v_n могут быть получены совершенно однозначным образом из одного только требования, чтобы удовлетворялись все законы сохранения. Эти уравнения для общего случая произвольных скоростей довольно сложны, и мы не станем приводить их здесь, а ограничимся лишь упрощенным выводом уравнений, применимых к движению с не слишком большими скоростями v_s и v_n .

Пусть \mathbf{j} есть макроскопический поток массы жидкости; он является функцией обеих скоростей v_s , v_n . При малых скоростях \mathbf{j} можно разложить по степеням v_s и v_n . В первом приближении

$$\mathbf{j} = \rho_n v_n + \rho_s v_s. \quad (7.2)$$

Коэффициенты ρ_n и ρ_s являются, очевидно, тем, что мы назвали плотностями сверхтекучей и нормальной «частей» жидкости. Их сумма равна плотности ρ гелия II:

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (7.3)$$

ρ_s и ρ_n являются, конечно, функциями температуры. Заметим, что поток массы (7.2) представляет собой в то же время плотность импульса, т. е. импульс единицы объема жидкости. Плотности ρ и \mathbf{j} должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (7.4)$$

Мы будем писать здесь уравнения, применимые к таким движениям, в которых не играет роль вязкость «нормальной жидкости». Тогда уравнения сохранения количества движения напишутся в виде

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = 0 \quad (7.5)$$

(по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование), где тензор Π_{ik} потока импульса равен

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho_n v_i^{(n)} v_k^{(n)} + \rho_s v_i^{(s)} v_k^{(s)} \quad (7.6)$$

(p — давление). Для того чтобы учесть вязкость нормальной жидкости, надо было бы прибавить к Π_{ik} члены, выражающиеся обычным образом через коэффициенты вязкости и производные по координатам от скорости v_n .

Далее, уравнение сохранения энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (S \rho v_n) = 0 \quad (7.7)$$

(S — энтропия единицы массы гелия II). «Поток энтропии» равен $\rho S v_n$, поскольку энтропия переносится только нормальной частью жидкости. При учете вязкости нормальной части надо было бы добавить дополнительные члены в правой стороне (7.7), выражающие возрастание энтропии благодаря необратимости процессов.

Наконец, последнее уравнение полной системы гидродинамических уравнений мы получим, приравняв ускорение dv_s/dt силе, действующей на единицу «сверхтекучей» массы. Для определения этой силы представим себе, что единица массы жидкости переносится из точки 1 в точку 2, причем так, что распределение фононов и ротоннов в жидкости не меняется. Другими словами, можно сказать, что при переносе смещается только «сверхтеку-

чая жидкость», а распределение «нормальной» остается неизменным. Энергия E жидкости меняется при таком переносе на

$$\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_1 - \left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_2$$

(M — масса жидкости). Производные должны браться здесь при постоянной энтропии (поскольку энтропия связана только с «нормальной жидкостью») и при постоянном импульсе движения нормальной массы жидкости относительно сверхтекучей⁹; кроме того, постоянным считается, конечно, и объем жидкости.

Из написанного выражения для изменения энергии видно, что величину $\partial E/\partial M$ можно рассматривать как «потенциальную энергию» сверхтекучей жидкости, так что действующая на нее сила есть

$$- \text{grad} \frac{\partial E}{\partial M}.$$

Для вычисления производной $\partial E/\partial M$ замечаем, что производная от энергии при постоянных энтропии и объеме равна производной от термодинамического потенциала при постоянных температуре и давлении. Термодинамический потенциал $M\Phi$ жидкости (Φ — потенциал единицы массы) можно написать в виде суммы $M\Phi_0$, термодинамического потенциала неподвижной жидкости и кинетической энергии $P^2/2M_n$ относительного движения сверхтекучей и нормальной «частей»:

$$\Phi M = M\Phi_0(p, T) + \frac{P^2}{2M_n}.$$

Здесь P — импульс движения нормальной массы относительно сверхтекучей. Дифференцируя $M\Phi$ по M при постоянных p , T и P и помня при этом, что нормальная масса M_n пропорциональна (при заданных p и T) полной массе M , получаем

$$\Phi_0 = \frac{P^2}{2M_n M}.$$

Подставляя сюда $P = M(v_n - v_s)$ и заменяя отношение масс отношением плотностей, находим окончательно для искомой

⁹ Движение сверхтекучей жидкости можно рассматривать как внешние условия, в которых движутся фононы и ротоны. Поэтому функция Лагранжа для движения нормальной жидкости зависит не просто от ее скорости v_n , а от разностей скоростей $v_n - v_s$. Сохраняющимся импульсом является поэтому производная от функции Лагранжа по $v_n - v_s$, т. е. указанный импульс относительного движения.

производной $(\partial E/\partial M)_{S, V, P}$ выражение

$$\Phi_0 - \frac{\rho_n}{2(\rho_n + \rho_s)} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2.$$

Следовательно, искомое гидродинамическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = - \text{grad} \left\{ \Phi - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2(\rho_n + \rho_s)} \right\}$$

(индекс у Φ_0 опускаем). Его можно написать иначе, заметив, что поскольку всегда $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, то

$$(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \text{grad} \frac{v_s^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = - \text{grad} \left\{ \Phi + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{2(\rho_s + \rho_n)} \right\}. \quad (7.8)$$

Уравнения (7.1) — (7.8) составляют полную систему гидродинамических уравнений гелия II.

При стационарном течении в левой стороне (7.8) стоит нуль, и мы имеем, следовательно,

$$\frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2(\rho_n + \rho_s)} + \Phi = \text{const.} \quad (7.9)$$

Это уравнение вместе со следующим уравнением (7.10) играет в развиваемой здесь гидродинамике роль уравнения Бернулли.

Рассмотрим такие движения, при которых жидкость можно считать несжимаемой. Считая плотности ρ_n и ρ_s и энтропию S постоянными, находим из (7.4) и (7.7), что

$$\text{div } \mathbf{v}_s = 0, \quad \text{div } \mathbf{v}_n = 0.$$

Далее, при стационарном движении имеем в (7.5) $\partial \mathbf{j} / \partial t = 0$; воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial v_k^{(s)}}{\partial x_k} \equiv \text{div } \mathbf{v}_s = 0, \quad \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial x_k} = 0,$$

перепишем (7.5) в виде

$$\nabla p + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = 0.$$

Помня, что всегда имеет место $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, можно написать это уравнение как

$$\nabla \left(\rho + \rho_n \frac{v_n^2}{2} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} \right) = \rho_n [\mathbf{v}_n \text{ rot } \mathbf{v}_n].$$

Спроектируем это уравнение на линию тока нормального движения, т. е. на направление \mathbf{v}_n . Тогда справа мы получим нуль, так что

$$p + \rho_n \frac{v_n^2}{2} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} = \text{const.} \quad (7.10)$$

Подчеркнем, что выражение (7.10) постоянно при стационарном течении только вдоль каждой из линий тока нормального движения, в то время как выражение (7.9) постоянно вдоль всей жидкости.

Если температура и давление мало меняются вдоль объема жидкости, то можно разложить Φ по степеням $\Delta T = T - T_0$ и $\Delta p = p - p_0$, где T_0 , p_0 — температура и давление в какой-нибудь точке жидкости, принятой за исходную. Имеем

$$\Phi = \Phi(p_0, T_0) - S\Delta T + \frac{\Delta p}{\rho}.$$

Подставляя в (7.9), имеем

$$-\frac{v_s^2}{2} + \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2 \rho_n}{2\rho} + S\Delta T - \frac{\Delta p}{\rho} = \text{const.}$$

Комбинируя это уравнение с уравнением (7.10)

$$\Delta p + \frac{\rho_n v_n^2}{2} + \frac{\rho_s v_s^2}{2} = \text{const.},$$

получаем

$$\Delta T + \frac{\rho_n}{\rho S} \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \text{const.} \quad (7.11)$$

Это соотношение, как и (7.10), имеет место вдоль линий тока нормального движения.

§ 8. Распространение звука в гелии II

Полученные уравнения могут быть применены к распространению звука в гелии II. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значе-

ниями. Тогда в (7.6) и (7.8) можно пренебречь квадратичными по скорости членами, а в (7.7) — вынести в члене $\text{div}(S\rho \mathbf{v}_n)$ энтропию $S\rho$ из-под знака div (поскольку этот член уже содержит малую величину \mathbf{v}_n). Таким образом, система гидродинамических уравнений для звуковых волн приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial S\rho}{\partial t} + S\rho \text{div } \mathbf{v}_n = 0, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \Phi = 0. \quad (8.4)$$

Дифференцируя (8.1) по времени и подставляя (8.3), получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (8.5)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S\rho}{\partial t} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -S \text{div } \mathbf{v}_n + \frac{S}{\rho} \text{div } \mathbf{j}$$

или, подставляя $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S\rho_s}{\rho} \text{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \quad (8.6)$$

Далее, для термодинамического потенциала имеет место соотношение

$$d\Phi = -SdT + Vdp = -SdT + \frac{1}{\rho} dp$$

(V — удельный объем). Отсюда имеем

$$\nabla p = S\rho \nabla T + \rho \nabla \Phi$$

или, подставляя ∇p из (8.3) и $\nabla \Phi$ из (8.4),

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho S \nabla T = 0. \quad (8.7)$$

Дифференцируя (8.6) по времени и подставляя (8.7), находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T. \quad (8.8)$$

Два уравнения, (8.5) и (8.8), определяют распространение звука в гелии II. Уже из того факта, что этих уравнений два,

видно, что в гелии II должны существовать две скорости распространения звука. Напишем S, ρ, p, T в виде $S = S_0 + S', \rho = \rho_0 + \rho'$ и т. д., где величины со штрихом представляют собой обусловленные звуковой волной малые изменения соответствующих величин, а величины с индексом 0 — их постоянные равновесные значения. Тогда можно написать

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} T', \quad S' = \frac{\partial S}{\partial p} p' + \frac{\partial S}{\partial T} T',$$

и уравнения (8.5) и (8.8) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой p' и T' пропорциональны множителю в $e^{i\omega(t-x/u)}$ (u — скорость звука), и в качестве условия разрешимости получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} - 1 & u^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ u^2 \frac{\partial S}{\partial p} & u^2 \frac{\partial S}{\partial T} - S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$u^4 \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, T)} - u^2 \left(\frac{\partial S}{\partial T} + S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} = 0$$

(где $\frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, T)}$ обозначает якобиан преобразования от ρ, S к p, T).

Путем простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S + \frac{TS^2}{C_v} \frac{\rho_s}{\rho_n} \right] + \frac{S^2 \rho_s T (\partial p / \partial \rho)_T}{\rho_n C_v} = 0 \quad (8.9)$$

(C_v — теплоемкость единицы массы гелия II). Это квадратное уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии II.

При $\rho_s = 0$, т. е. в λ -точке, один из корней уравнения (8.9) обращается в нуль, и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S}.$$

Практически при всех температурах теплоемкости C_p^F и C_v близки друг к другу. Согласно известной термодинамической формуле при этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости, т. е.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S.$$

Обозначив общее значение C_p и C_v буквой C , а общее значение $(\partial p/\partial \rho)_T$ и $(\partial p/\partial \rho)_S$ просто как $\partial p/\partial \rho$, получаем из уравнения (8.9) две скорости звука u_1 и u_2 в виде

$$u_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad u_2^2 = \frac{TS^2 \rho_s}{C \rho_n}. \quad (8.10)$$

Таким образом, одна из скоростей (u_1) почти постоянна, а другая (u_2) сильно зависит от температуры, обращаясь в нуль в λ -точке. При температуре $1,33^\circ \text{K}$ отсюда получается для u_2 около 25 м/сек .

При крайне низких температурах, когда $\rho_n^{(ph)} \gg \rho_n^{(r)}$, получается

$$u_2^2 = \frac{1}{3} c^2. \quad (8.11)$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорости звука стремятся к постоянным пределам $u_1 = c$, $u_2 = c/\sqrt{3}$.

§ 9. Проблема сверхпроводимости

Явление сверхпроводимости во многих отношениях родственно явлению сверхтекучести. Сверхпроводимость также может быть объяснена предположением о наличии энергетической щели в спектре «электронной жидкости» в металле. Характер этой щели, однако, отличен от того, который имеет место у жидкого гелия. Самая постановка вопроса о разделении движений на потенциальные и вихревые не имеет смысла в применении к электронной жидкости в металле.

Идея о связи сверхпроводимости с наличием щели в энергетическом спектре высказывалась неоднократно (см., например, [13]). При этом, однако, не приводилось ясного доказательства того, что наличие такой щели действительно приводит к явлению сверхпроводимости.

В электронной жидкости в металле можно различать движения чисто внутреннего характера и движения, в которых жидкость движется как целое, макроскопическим образом. Последние соответствуют наличию полного тока в металле. Состояния с таким «макроскопическим» движением начинаются непосредственно от нормального, невозбужденного состояния¹⁰. Для объ-

¹⁰ В этом заключается существенное отличие между сверхпроводником и диэлектриком, в котором тоже имеется энергетическая щель, однако вообще не существует близких к нормальному состояний, соответствующих наличию полного тока.

яснения сверхпроводимости надо предположить, что между основным состоянием электронной жидкости и началом непрерывного спектра состояний с внутренним движением имеется энергетический интервал.

Величина этого интервала должна быть очень мала — в температурной шкале порядка температуры сверхпроводящего перехода. Что приводит к возникновению такой щели, в настоящее время еще неясно.

Пусть Ψ_0 — волновая функция основного состояния электронной жидкости, в котором она находится при абсолютном нуле. Рассмотрим какое-нибудь возбужденное состояние, сколько угодно близкое к основному. Согласно сказанному выше это состояние является состоянием движения электронной жидкости как целого. Соответственно этому волновая функция Ψ этого состояния должна была бы иметь вид

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p \sum_{\alpha} r_{\alpha} \right\},$$

где p — импульс макроскопического движения, отнесенный на один электрон, а суммирование производится по радиус-векторам r_{α} всех электронов.

В действительности, однако, надо иметь в виду, что всякое движение электронной жидкости как целого не обязательно должно иметь одинаковую скорость во всем металле. Поэтому в волновой функции Ψ экспоненциальный множитель имеет в действительности не вид

$$a \quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p \sum_{\alpha} r_{\alpha} \right\},$$

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \right\},$$

где χ — некоторая функция от координат одного электрона, о которой можно только сказать, что она почти линейна; различные члены в сумме $\sum \chi_{\alpha}$ отличаются тем, что в них χ берется как функция координат r_{α} различных электронов:

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \right\}. \quad (9.1)$$

Определим плотность тока электронной жидкости в состоянии Ψ . Для этого нужно проинтегрировать выражение

$$\frac{\hbar e}{2mi} (\Psi^* \nabla_{\alpha} \Psi - \Psi \nabla_{\alpha} \Psi^*) - \frac{e^2}{cm} A \Psi \Psi^*$$

(m — некоторая «эффективная масса» электрона, A — векторный потенциал магнитного поля, e — заряд электрона, c — скорость

света) по координатам всех электронов, кроме α -го, и затем просуммировать по всем α (т. е. по всем электронам), взяв значение каждого члена суммы в одной и той же рассматриваемой точке жидкости. При $\Psi = \Psi_0$ и $A = 0$, т. е. в покоящейся электронной жидкости, ток \mathbf{j} , очевидно, равен нулю. В результате получается

$$\mathbf{j} = N \frac{e}{m} \text{grad } \chi \int |\Psi_0|^2 d\tau' - N \frac{e^2}{cm} A \int |\Psi_0|^2 d\tau'$$

($d\tau'$ — произведение дифференциалов координат всех электронов, за исключением одного, N — полное число электронов). Но интеграл

$$\int |\Psi_0|^2 d\tau' = \int |\Psi|^2 d\tau'$$

представляет собой не что иное, как плотность вероятности нахождения электрона в данном месте пространства. Поэтому произведение $N \int |\Psi_0|^2 d\tau'$ есть число n электронов в единице объема электронной жидкости. Таким образом,

$$\mathbf{j} = \frac{ne}{m} \text{grad } \chi - \frac{e^2}{cm} nA. \quad (9.2)$$

Отсюда находим, исключая χ ,

$$\text{rot } \frac{mc\mathbf{j}}{e^2 n} = -\text{rot } A = -B \quad (9.3)$$

($B = \text{rot } A$ — магнитная индукция). Это уравнение можно рассматривать как дополнительное условие, которому должны удовлетворять возможные состояния макроскопического движения электронной жидкости. Отметим, что это соотношение является обобщением утверждения $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, имевшим место для сверхтекучести, и переходит в него, если можно пренебречь магнитным полем. Если металл однороден, то электронную плотность можно считать одинаковой во всем металле, и уравнение (9.3) можно написать также в виде

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} B. \quad (9.4)$$

Из этого уравнения (введенного впервые Беккером, Заутером, Геллером [14] и впервые написанного в форме (9.4) Лондонами [15]), следуют, как известно, как магнитные (эффект Мейснера), так и электрические (отсутствие сопротивления) свойства сверхпроводников. Уравнение (9.4) находит также, как известно, количественное подтверждение в опытах над сверхпроводимостью тонких слоев [16].

По аналогии с выводами § 5 можно заключить, что при температурах, отличных от абсолютного нуля, уравнение (9.4) по-прежнему имеет место, с той лишь разницей, что en равно теперь не полной плотности заряда электронной жидкости, а только некоторой его доле. Таким образом, можно в известном смысле говорить о разделении полной плотности заряда на «сверхпроводящую» и «нормальную» части со всеми теми оговорками, которые делались по поводу аналогичного разделения плотности массы в жидком гелии. В частности, это утверждение не означает, что в металле есть «сверхпроводящие» и «нормальные» электроны; просто движение электронной жидкости в металле может описываться как совокупность двух движений, каждое из которых связано с некоторым эффективным зарядом. Сверхпроводимость исчезает при той температуре, при которой «сверхпроводящий заряд» обращается в нуль.

Надо, впрочем, отметить, что, в уравнение (9.4) заряд ne входит в комбинации ne/m с массой m . Физическим смыслом поэтому обладает только это отношение, а не каждая из величин n и m в отдельности.

Укажем также, что, как и в гелии II, мы приходим к выводу, что сверхпроводящий ток не должен переносить тепла. Это подтверждается известным фактом отсутствия термоэлектрических явлений в сверхпроводниках [17].

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность П. Л. Капице, любезно сообщившему мне результаты своих экспериментов до их опубликования.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. Л. Капица. ДАН СССР, 18, 28, 1937; Nature, 141, 74, 1937.
- [2] L. Tisza. Nature, 141, 913, 1938.
- [3] A. Bijl. Physica, 7, 869, 1940.
- [4] W. H. Keesom. Leiden Comm. Supl., 80b, 1936.
- [5] W. H. Keesom, miss A. Keesom. Physica, 2, 557, 1935.
- [6] V. Bleaneу, F. Simon. Trans. Farad. Soc., 35, 1205, 1939.
- [7] П. Л. Капица. ЖЭТФ, 11, 581, 1941.
- [8] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Статистическая физика, 1940.
- [9] W. H. Keesom, G. Mc Wood. Physica, 5, 257, 1938.
- [10] H. London. Proc. Roy. Soc., A, 171, 484, 1939.
- [11] W. H. Keesom, miss A. Keesom. Physica, 3, 359, 1936.
- [12] П. Л. Капица. ЖЭТФ, 11, 1, 1941.
- [13] H. Welker. Zs. Phys., 114, 535, 1939.
- [14] R. Becker, G. Heller, F. Sauter. Zs. Phys., 85, 772, 1933.
- [15] F. and H. London. Proc. Roy. Soc., A, 149, 71, 1935.
- [16] E. T. C. Appleyard, J. T. Bristow. Proc. Roy. Soc., A, 172, 530, 1939; А. Шальников. ЖЭТФ, 10, 630, 1940.
- [17] W. H. Keesom, G. J. Matthijs. Physica, 5, 437, 1938.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННЫХ ЛИОФОБНЫХ ЗОЛЕЙ И СЛИПАНИЯ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Совместно с Б. В. ДЕРЯГИНЫМ

ЖЭТФ, 11, 802, 1941; 15, 663, 1945
Acta phys.-chim. USSR, 14, 633, 1941

§ 1. Введение

Всякая количественная теория устойчивости лиофобных золь должна рассматривать в качестве своей основной задачи вывод количественного критерия устойчивости золь, дающего соотношение между величинами, характеризующими свойства и состояния золя, каковое соотношение имеет место на границе между неустойчивыми и устойчивыми состояниями золя.

При этом под устойчивыми состояниями мы будем понимать не состояния, устойчивые термодинамически, а устойчивые в смысле практически нулевой скорости коагуляции системы, и в соответствии с этим расчеты критерия устойчивости должны основываться на выяснении кинетики необратимого процесса перехода неустойчивого состояния золя в более устойчивое состояние коагулянта при отсутствии равновесия между этими двумя состояниями. В этом принципиальное отличие нашей трактовки коагуляции от трактовки А. Марха [1], а также от трактовки коагуляции, данной И. Лэнгмюром [2], рассматривавшим ее как переход между двумя состояниями, могущими находиться между собой в равновесии аналогично двум фазам.

Для того чтобы количественный критерий коагуляции существовал, очевидно, необходимо, чтобы переход от кинетически устойчивых состояний золя к неустойчивым был достаточно резок. Расчеты, составляющие предмет как данной работы, так и предшествовавшей [3], показывают, что этот переход действительно весьма резок, причем резкость его тем больше, чем больше радиус частиц золя (подробнее см. ниже § 7). В связи с последним обстоятельством граница вполне неустойчивых состояний осо-

бенно резка для эмульсий, радиус частиц которых в процессе коагуляции возрастает и условия полной коагуляции которых поэтому совпадают с условиями коагуляции весьма грубодисперсных эмульсий.

Несомненно, что коагуляция золя происходит в результате силового взаимодействия между мицеллами при их сближении и что для подсчета скорости коагуляции и степени устойчивости с целью нахождения критерия устойчивости необходимо иметь в качестве базы количественное выражение для силы взаимодействия двух, в простейшем случае сферических, частиц в функции их расстояния между собой, после чего, как можно показать, вычисление критерия устойчивости не представляет особых трудностей. Таким образом, главной и притом наиболее трудной частью теории устойчивости золей (и не только лиофобных) является вычисление силы или энергии взаимодействия их частиц в функции расстояния между ними. Впервые такая задача была поставлена Х. Кальманом и М. Вильштетером в очень короткой заметке [4]. Эти авторы рассматривают взаимодействие частиц как алгебраическую сумму двух слагаемых притяжения, зависящего от действующих между молекулами мицелл ван-дер-ваальсовых сил, и отталкивания, зависящего от электростатических сил между ионами двойных электрических слоев, окружающих каждую частицу.

С этой точки зрения коагуляцию следует, очевидно, приписывать действию ван-дер-ваальсовых сил, способных обеспечить агрегацию частиц и неминуемо ее вызывающих в отсутствие сил отталкивания. Таким образом, устойчивость лиофобных золей обусловлена силами электростатического отталкивания — точка зрения, высказывавшаяся, впрочем, значительно ранее появления заметки Х. Кальмана и М. Вильштетера, например, Ф. Доннаном [5].

Для того чтобы найти критерий коагуляции, соответствующий моменту, когда силы притяжения берут перевес над силами отталкивания, надо, очевидно, получить выражение для обоого рода сил в функции расстояния частиц. Для энергии ван-дер-ваальсового взаимодействия двух молекул на достаточно больших по сравнению с их радиусами расстояниях получается выражение вида

$$U = CR^{-6}, \quad (1)$$

где константа C зависит от рода молекул. Как указывают Х. Кальман и М. Вильштетер, пользуясь этим выражением, можно путем простого интегрирования по объемам двух мицелл найти энергию их взаимодействия (в вакууме). Таким образом, расчет энергии и сил притяжения мицелл является весьма элементар-

ным. Точные формулы для случая двух шарообразных мицелл, в том числе неодинакового радиуса, были даны позднее Гамакером¹ [6].

Вычисление сил электростатического отталкивания является значительно более сложной и интересной задачей. В то же время именно количественное рассмотрение сил отталкивания является ключом к решению как проблемы устойчивости лиофобных золей, так и ряда других проблем физики коллоидов и поверхностей.

Основная трудность расчета этих сил заключается в необходимости, прежде чем суммировать силы электростатического взаимодействия ионов, определить расположение последних, т. е. концентрацию различных ионов вблизи мицелл, в первую очередь в зоне, расположенной между ними, где ионные атмосферы обеих мицелл, налагаясь друг на друга, взаимно деформируются. Для решения этого вопроса необходимо решить уравнение Дебая — Гюккеля теории сильных электролитов. Всякие расчеты, которые пытаются найти силы электростатического взаимодействия без выяснения вопроса об изменениях в локализации ионов, наступающих в результате сближения двух мицелл, рискуют привести, даже в качественном отношении, к неверным результатам, и формулы, при этом выводимые, в лучшем случае имеют характер эмпирических. Подобными формулами пользовались Фрейдлих [8], Гамакер [9], Гувинк и Бюргерс [10], применив их к получению некоторых выводов качественного характера. Независимо от этих работ² и главным образом в связи с собственными экспериментальными исследованиями по «расклинивающему давлению» тонких пленок жидкостей [12], теоретическая трактовка сил отталкивания, действующих между лиофобными мицеллами, и устойчивости лиофобных золей была предпринята одним из нас; в появившейся в 1937 г. работе [11] впервые были проведены вычисления сил ионно-электростатического отталкивания, основанные на решении уравнения Дебая — Гюккеля для случая как двух шаров, так и двух пластин, разделенных плоскопараллельным слоем электролита. Полученное решение является строгим для случая пластин и шаров, радиус которых велик по

¹ Следует отметить в связи с этим, что сомнения, высказанные А. И. Рабиновичем [7] в обоснованности формулы Гамакера для силы притяжения шаров, лишены основания: поскольку эта формула выводится теоретически, не может считаться дефектом отсутствие ее непосредственной проверки (вряд ли возможной) на шариках размеров частиц коллоидов.

² Противоположное указание А. И. Рабиновича ([7], стр. 18) основано, очевидно, на неучете содержания как печатной работы одного из нас [13] (не цитированной им), так и прочитанного ее автором в Институте им. Карпова в 1935 г. доклада того же содержания.

сравнению с дебаевской толщиной ионных атмосфер. Кроме того, поскольку расчеты были проведены на базе упрощенного (линейного) уравнения Дебая — Гюккеля, полученные формулы применимы только для достаточно слабо заряженных золей. Силы притяжения между мицеллами в этой работе были учтены весьма грубо: по аналогии с теорией быстрой коагуляции Смолюховского им приписывался бесконечно короткий по сравнению с толщиной ионных атмосфер радиус действия. В результате был получен критерий устойчивости, приводящий к критическому значению ζ -потенциала, имеющему порядок величины, близкий к наблюдающемуся на опыте, однако слишком сильно зависящему от радиуса частиц (обратно пропорционально квадратному корню их радиуса).

§ 2. Критерий устойчивости слабо заряженных золей

В более поздней работе Б. Дерягина [3] теория устойчивости была уточнена путем введения выражения для ван-дер-ваальсовых сил на базе уравнения (1). Полученный при этом для слабо заряженных золей или эмульсий критерий устойчивости имеет вид

$$\frac{\kappa A}{D\psi_0^2} = \text{const}, \quad (2)$$

где κ — обратная толщина ионных атмосфер, A — ван-дер-ваальсова константа (см. § 5), D — диэлектрическая постоянная, ψ_0 — потенциал поверхности частиц. Эта формула подводит теоретическую базу под найденное Эйлерсом и Корфом [14] эмпирическое правило, согласно которому коагуляция разными электролитами одних и тех же эмульсий происходит при постоянном значении выражения

$$\frac{\kappa}{\zeta^2} = \text{const}, \quad (2')$$

где ζ — электрокинетический потенциал. Критерий (2') применим только для слабо заряженных и достаточно больших частиц, каковыми как раз и являются капельки обычных эмульсий, так как был выведен на основе упрощенного уравнения Дебая — Гюккеля, применимого, когда электрический потенциал вблизи поверхности частиц удовлетворяет неравенству

$$\psi < \frac{50}{z'} \text{ мВ}, \quad (3)$$

где z' — электровалентность иона с наибольшим зарядом,

Однако условие (3) при пороге коагуляции при $z' > 1$ выполняется, в особенности для частиц золей, по-видимому, весьма редко и даже при $z = 1$ выполняется, вероятно, далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость изменить расчетную базу теории, введя в рассмотрение полное неупрощенное уравнение Дебая — Гюккеля (см. уравнение (5)).

§ 3. Содержание исследования

В § 4 содержится применение уравнения (5) к точному вычислению силы взаимодействия двух заряженных бесконечных параллельных плоскостей, разделенных раствором электролита. При этом оказывается возможным внести в дальнейшие расчеты чрезвычайно существенное упрощение, предположив, что потенциал ψ_0 , до которого заряжены плоскости, достаточно велик, именно, что

$$\psi_0 > \frac{100}{z_1} \text{ мв,} \quad (4)$$

где z_1 — электровалентность противоиона. Несомненно, что условие (4), до известной степени противоположное условию (3), должно выполняться, даже при $z_1 = 1$, в очень большом числе случаев, что делает допущенное приближение вполне естественным.

В § 5 полученные формулы применены к нахождению условий слипания пластинок в растворе электролита под действием вандер-ваальсовых сил, или, что то же, условий устойчивости разделяющей их пленки электролита. Расчеты смогли быть, однако, доведены до конца, т. е. до получения критерия устойчивости в явном виде, только для случая симметричного электролита и электролита, у которого отношение валентности побочного иона к валентности доминирующего (противоиона) равно двум. Полученные при этом результаты могут рассматриваться как подтверждающие незначительность влияния валентности побочного иона на действие электролита на устойчивость пленки.

Полученный критерий по форме близок (хотя отнюдь не тождествен) правилу Во.Оствальда [15], применимость которого к явлениям прилипания кварцевых поверхностей была доказана Бузагом [16].

В § 6 содержатся расчеты взаимодействия и слипания сильно заряженных сферических частиц в растворе симметричного электролита. При этом получается критерий прилипания, совпадающий с точностью до числового множителя с аналогичным критерием для параллельных частиц.

§ 7 содержит расчеты условий устойчивости сильно заряженных зелей, приводящие к критерию того же вида; наконец, в § 8 даны сводка и дискуссия полученных результатов, а также их сопоставление с экспериментом.

§ 4. Взаимодействие плоских поверхностей

Полное уравнение Дебая — Гюккеля для электрического потенциала в применении к бинарному электролиту с ионами двух родов имеет вид

$$\Delta\psi = \frac{a}{2}(e^{z_1 b\psi} - e^{-z_2 b\psi}), \quad (5)$$

где z_1 , z_2 — электровалентности доминирующего и побочного ионов,

$$a = \frac{8\pi}{D} en_1 z_1 \gamma = \frac{8\pi}{D} en_2 z_2 \gamma = \frac{8\pi}{D} ec, \\ c = n_1 z_1 \gamma = n_2 z_2 \gamma, \quad b = \frac{e}{kT}, \quad (5')$$

где D — диэлектрическая постоянная раствора, e — заряд электрона, γ — концентрация в молях на 1 см^3 , c — концентрация в эквивалентах на 1 см^3 , n_1 и n_2 — числа анионов и катионов в молекуле электролита, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Рассматривая взаимодействие двух бесконечных параллельных пластин, разделенных зазором h (рис. 1), находящимся в безграничном объеме раствора электролита, поместим начало координат O посередине между пластинами и направим ось x перпендикулярно к поверхностям пластин. Считая ψ независимым от y и z , мы вместо (5) можем написать

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{a}{2}(e^{z_1 b\psi} - e^{-z_2 b\psi}). \quad (5'')$$

Помножая обе части (5'') почленно на $2 \frac{d\psi}{dx} dx = 2d\psi$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = \frac{a}{b} \left[\frac{e^{z_1 b\psi}}{z_1} + \frac{e^{-z_2 b\psi}}{z_2} - C \right], \quad (6)$$

где C — постоянная интегрирования. Как и раньше [3,13], допустим, что на поверхности пластин имеет место граничное условие

$$\psi = \psi_0 = \text{const.} \quad (7)$$

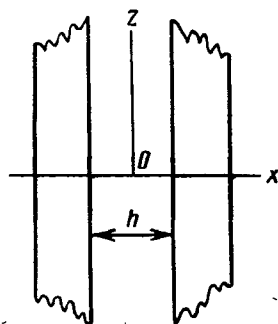


Рис. 1

Для промежуточного между пластинами слоя электролита C имеет значение

$$C = C_1 = \frac{e^{z_1 b \psi_1}}{z_1} + \frac{e^{-z_2 b \psi_1}}{z_2}, \quad (8)$$

где ψ_1 — значение ψ для $x=0$, так как электрическая сила $E = -\partial\psi/\partial x$, по соображениям симметрии, при $x=0$ равна нулю. Для внешнего объема электролита имеем

$$C = C_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}, \quad (8')$$

так как при $x = \pm \infty$ $E = -\partial\psi/\partial x = 0$ и $\psi = 0$. Следуя примеру, использованному ранее [11], мы для взаимодействия (отталкивания) пластин $P(h)$, рассчитанного на единицу площади, можем написать

$$\begin{aligned} P(h) &= \frac{D}{8\pi} [E_2^2 - E_1^2] = \frac{D}{8\pi} \frac{a}{b} [C_1 - C_2] = \\ &= ckT \left[\frac{e^{z_1 b \psi_1} - 1}{z_1} + \frac{e^{-z_2 b \psi_1} - 1}{z_2} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где E_2 и E_1 — величины электрической силы соответственно у наружной (где она больше) и у внутренней поверхности пластин. В уравнении (9) механическая (пондеромоторная) сила, действующая на каждую пластину, приравнена разности натяжений силовых линий на обеих сторонах пластины, в то время как осмотические давления, действующие там же, уравновешиваются, так как являются функциями только от потенциала ψ , на обеих поверхностях каждой пластины принимающего одно и то же значение $\psi = \psi_0$.

Как видно из (9), то же самое значение $P(h)$ можно получить, определяя избыточное осмотическое давление ионов в плоскости $x=0$, как это, например, сделал И. Лэнгмюр [17].

Таким образом, оба способа расчета совершенно эквивалентны. Это обстоятельство, отмеченное, в частности, А. Н. Фрумкин-ым и А. Городецкой [18], ускользнуло по непонятной причине от внимания С. Левина [19], выступившего с критикой работ Б. Дерягина и И. Лэнгмюра и отвергшего их по разным мотивам. Впрочем, основной мотив был один — несогласие с формулами, полученными самим С. Левиным. Причина этого расхождения была указана одним из нас ранее [20] и заключается в ошибочном выражении для свободной энергии заряженных поверхностей, помещенных в электролит; было, в частности, показано, что выражение для свободной энергии, найденное С. Левиным стати-

стическим методом, неверно примененным, противоречит термодинамике. Выражением, эквивалентным выражению С. Левина и, следовательно, также ошибочным, пользуются А. Коркилл и Л. Розенхид [21] при расчетах взаимодействия параллельных пластин в электролите. Наличием этой ошибки и объясняется расхождение их расчетов с нашими, в частности найденное ими притяжение одноименно заряженных пластин³.

Для того чтобы из (9) извлечь выражение для $P(h)$ в явном виде через h , необходимо в (9) выразить C_1 через h .

Связь между h и C_1 мы получим, проинтегрировав уравнение (6), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h &= \sqrt{\frac{b}{a}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{e^{z_1 b \psi}}{z_1} + \frac{e^{-z_2 b \psi}}{z_2} - C_1 \right)^{-1/2} d\psi = \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{e^{z_1 b \psi}}{z_1} + \frac{e^{-z_2 b \psi}}{z_2} - \frac{e^{z_1 b \psi_1}}{z_1} - \frac{e^{-z_2 b \psi_1}}{z_2} \right)^{-1/2} d\psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учтено, что при $h = 0$ $\psi_1 = \psi_0$. Введем теперь чрезвычайно важное упрощение. Предполагая, что

$$\psi_0 > 0,$$

допустим, что имеет место соотношение

$$z_1 b \psi_0 \gg 1, \quad (11)$$

практически совпадающее с условием (4).

Тогда верхний предел ψ_0 в интеграле (10) можно без заметного ущерба для точности заменить на ∞ , так как подынтегральное выражение для $\psi > \psi_0$ будет крайне мало, если только в случае чрезмерной малости h разность $\psi_0 - \psi_1$ не будет слишком мала.

Вводя, кроме того, обозначения

$$ckT = \gamma n_1 z_1 kT = \gamma n_2 z_2 kT = p, \quad (12)$$

$$\sqrt{ab} = \kappa' = \sqrt{\frac{8\pi}{D} \frac{e^2 c}{kT}} = \sqrt{\frac{2}{z_1 + z_2} \kappa_1}, \quad (12')$$

$$b\psi = \eta, \quad b\psi_1 = \eta_1, \quad \kappa = \frac{1}{a}, \quad (12'')$$

Наличие отталкивания, но не притяжения между одноименно заряженными поверхностями раздела тонкой пленки воды с воздухом согласуется с наблюдениями Б. Дерягина и А. Титиевской над устойчивостью подобных пленок.

где d — дебаевская толщина ионной атмосферы, мы уравнения (9) и (10) можем написать в следующем виде:

$$P = p \left[\frac{e^{z_1 \eta_1} - 1}{z_1} + \frac{e^{-z_2 \eta_1} - 1}{z_2} \right], \quad (13)$$

$$\frac{\kappa' h}{2} = \int_{\eta_1}^{\infty} \left(\frac{e^{z_1 \eta}}{z_1} + \frac{e^{-z_2 \eta}}{z_2} - \frac{e^{z_1 \eta_1}}{z_1} - \frac{e^{-z_2 \eta_1}}{z_2} \right)^{-1/2} d\eta. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) выражают связь между P и h в параметрической форме: для получения этой зависимости в явном виде необходимо из (13) и (14) исключить η_1 . Легко видеть, что искомая зависимость может быть выражена с помощью эллиптических интегралов для случаев, когда

$$\beta = \frac{z_2}{z_1} = 1, 2, 1/2.$$

Из рассмотрения (13) и (14) видно, что η_1 с уменьшением давления P от 0 до ∞ растет монотонно от 0 до ∞ , а h , наоборот, монотонно убывает от ∞ до 0. Следовательно, с убыванием h P непрерывно растет.

Рассмотрим теперь приближенные соотношения, имеющие место, когда

$$z_1 \eta > z_1 \eta_1 \gg 1, \quad (15)$$

т. е. когда вследствие большой величины η_1 , что имеет место при достаточно малом h , в уравнениях (13) и (14) можно сохранить одни только члены, зависящие от противоионов.

Тогда вместо (13) и (14), вводя в последнем уравнении переменную интегрирования $\xi = z_1 (\eta - \eta_1)$, получим приближенно

$$P = \frac{p e^{z_1 \eta_1}}{z_1}, \quad (16)$$

$$\frac{\kappa' h}{2} = \frac{1}{\sqrt{z_1 e^{z_1 \eta_1}}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{e^{\xi} - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{z_1 e^{z_1 \eta_1}}}. \quad (16')$$

Из (16) и (16') находим

$$P = p \frac{4\pi^2}{z_1^2 \kappa'^2} \frac{1}{h^2} = \frac{2p(z_1 + z_2)\pi^2}{z_1^2} \frac{1}{(\kappa h)^2} = \frac{\pi}{2} D \left(\frac{kT}{z_1 e} \right)^2 \frac{1}{h^2}. \quad (17)$$

Эта формула для частного случая $z_1 = z_2$ была найдена И. Лэнгмюром [17]. Из сопоставления (13) и (14) с (16) и (16') следует, что сделанное приближение увеличивает значения P и уменьша-

ет значения h , соответствующие заданному значению η_1 , и, следовательно, а fortiori увеличивает значения P , соответствующие заданным значениям h , т. е. формула (17) дает всегда преувеличенные значения P ⁴. Это верно не только в отношении отклонений P от формулы (17) при больших h , но и в отношении отклонений от нее, которые должны наступать при очень малых h при всяком конечном, хотя бы очень высоком, значении потенциала пластин ψ_0 .

Это замечание стоит в связи со следующим положением физического порядка, доказываемым аналогичным рассмотрением: учет влияния побочного иона (например, члена $\frac{e^{-z_1\eta_1} - 1}{z_1}$ в формуле (13)) может только уменьшить давление P , вычисляемое для данного значения h .

Рассмотрим теперь случай больших значений $\kappa'h$ и малых η_1 , соответственно чему положим

$$\eta_1 \ll 1.$$

Разлагая экспоненциальные функции, стоящие в (13), в ряд, мы для этого случая получим

$$P = p \frac{(z_1 + z_2)}{2} \eta_1^2. \quad (18)$$

Допустим далее, что электрический потенциал в точке промежуточного слоя, значительно удаленной от поверхностей обеих пластин, может быть найден простым сложением потенциалов, которые были бы созданы в этой точке каждой пластиной в отсутствие другой, т. е. на основе предположения об аддитивности этих действий⁵. При таком допущении мы можем написать

$$\eta_1 = 2\eta \frac{h}{2}, \quad (18')$$

где $\eta (h/2)$ — значение потенциала, производимого на расстоянии $h/2$ одной заряженной пластиной в отсутствие другой.

Так как для малых $\eta (h/2)$ вместо (5") можно пользоваться уравнением

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa^2\psi \quad (19)$$

Противоположное утверждение И. Лэнгмюра является, следовательно, ⁴ неправильным, равно как ошибочен в этом же смысле приведенный им график зависимости $\ln P$ от $\ln h$.

⁵ Это допущение может быть доказано чисто аналитически.

или

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \kappa^2\eta, \quad (19')$$

то для больших значений κh $\eta = b\psi$ имеет вид

$$\eta = \eta_0 e^{-\kappa x}, \quad (20)$$

где η_0 — постоянная, зависящая только от z_1 и z_2 , и, следовательно, но,

$$\eta_1 = 2\eta_0 e^{-0,5\kappa l}, \quad (21)$$

$$P = 2p(z_1 + z_2)\eta_0^2 e^{-\kappa l} = P_0 e^{-\kappa l}, \quad (21')$$

где P_0 — другая константа.Для симметричного электролита с $z_1 = z_2 = z$ и $n_1 = n_2 = n$

$$\eta = \frac{4}{z} \quad (22)$$

и, следовательно,

$$P = P_0 e^{-\kappa l} = \frac{64p}{z} e^{-\kappa l} = 64\gamma nkT e^{-\kappa l}. \quad (22')$$

Для несимметричного электролита η_0 вычисляется довольно громоздким способом из соотношения

$$\ln(z_1\eta_0) = F(\beta) = \int_0^1 \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{e^t + \frac{e^{-\beta t}}{\beta} - 1 - \frac{1}{\beta}}} - \frac{1}{t} \right\} dt + \int_1^\infty \frac{\sqrt{\frac{1+\beta}{2}} dt}{\sqrt{e^t + \frac{e^{-\beta t}}{\beta} - 1 - \frac{1}{\beta}}}, \quad (22'')$$

где $\beta = z_2/z_1$, которое получается в результате сопоставление значения κh , получаемого из соотношения (20), с тем, которое следует из точной формулы (14) после введения переменной интегрирования $t = z\eta$ и параметра $\beta = z_2/z_1$ с учетом (12'). Рассмотрим теперь детальнее точное решение для случая симметричного электролита, положив

$$z_1 = z_2 = z, \quad n_1 = n_2 = n. \quad (23)$$

Соотношение (14) в этом случае преобразуется после введения новой переменной интегрирования

$$u = \frac{1}{k \operatorname{ch} \frac{z\eta}{2}},$$

где
$$k = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{z\eta_1}{2}}, \quad (23')$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{zh}{2} &= \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{z d\eta}{\sqrt{2(\operatorname{ch} z\eta - \operatorname{ch} z\eta_1)}} = \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{z d\eta}{2\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{z\eta}{2} - \operatorname{ch}^2 \frac{z\eta_1}{2}}} = \\ &= k \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = kK(k) = \sin \alpha K(\sin \alpha), \quad (24) \end{aligned}$$

где $K(k)$ — обычное обозначение полного эллиптического интеграла первого рода с модулем $k = \sin \alpha$.

С помощью (12), (23) и (23') мы вместо (13) можем написать

$$P = 4\gamma nkT \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) = 4\gamma nkT \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) определяют зависимость $P(h)$ в параметрической форме, несколько более удобной, чем аналогичное

$$\omega = 4 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right)$$

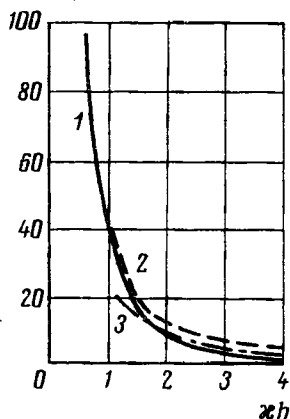


Рис. 2

- 1 — точные значения;
- 2 — вычислено по уравнению (17);
- 3 — вычислено по уравнению (22')

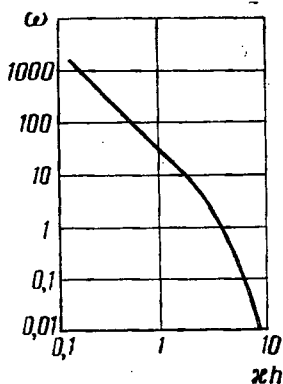


Рис. 3

представление этой же зависимости, данное И. Лэнгмюром [17]. Пользуясь асимптотическим выражением для $K(k)$ при $k \rightarrow 1$, не представляет труда вывести соотношения (22) и (22').

Приводим на рис. 2 и 3 графики функциональной зависимости величины

$$\frac{P}{\gamma nkT} = \omega$$

от kh в обычном и двойном логарифмическом масштабах. График рис. 3 исправляет неточность, имеющуюся в статье И. Лэнгмюра [17]. Вычисления производились при помощи таблиц численных значений функции $K(k)$.

§ 5. Условия слипания под действием ван-дер-ваальсовых сил поверхностей, разделенных слоем электролита

Учтем теперь ван-дер-ваальсовы силы, убывающие обратно пропорционально седьмой степени расстояния между молекулами и дающие на единицу площади пленки, разделяющей две параллельные пластины значительной толщины, притяжение

$$R = P - Q$$

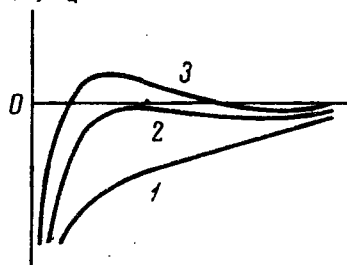


Рис. 4

$$Q = \frac{A}{6\pi h^3}, \quad (26)$$

где A зависит от вещества пластин и промежуточной среды между ними. Из сопоставления формул (17), (21') и (26) следует, что на больших и малых расстояниях перевешивают силы притяжения. Обозначая через $R(h) = P - Q$ результирующее отталкивание, мы видим, что кривая $R(h)$ может быть следующих трех

основных видов (рис. 4). Очевидно, что только при условии реализации кривой вида 3 с максимумом, лежащим над осью абсцисс, пленка может обладать устойчивостью и предохранять поверхности, разделенные ею, от слипания.

Предел устойчивости будет наблюдаться, когда вершина этого максимума будет расположена на уровне оси абсцисс, т. е. когда одновременно будут иметь место соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial h} = 0, \quad (27)$$

$$R = 0 \quad (27')$$

или согласно (26)
$$\frac{\partial P}{\partial h} = - \frac{A}{2\pi h^2}, \quad (28)$$

$$P = \frac{A}{6\pi h^3}. \quad (28')$$

Отсюда выводим

$$\frac{d \ln P}{d \ln h} = - 3. \quad (29)$$

Уравнение (29) после подстановки в него значений P и h из (13) и (14) в функции параметра ($z_1 \eta_1$) определит при заданном значении отношения $\beta = z_2/z_1$ значение этого параметра, после чего из тех же соотношений (13) и (14) определятся и величины

$$\left(\frac{zP}{P}\right)_c = \omega_c = u(\beta), \quad (30)$$

$$(\kappa h)_c = v(\beta). \quad (30')$$

Подставляя эти величины в (28), получим критерий устойчивости пленки или критерий слипания пластин в виде

$$\frac{\kappa^3 A}{\gamma n_1 k T} = C(\beta), \quad (31)$$

где $C(\beta)$ — функция только от величины β . Точное вычисление величины C для разных значений β связано с громоздкими числовыми расчетами, поэтому мы рассмотрим сначала только наиболее простой для расчетов случай $\beta = 1$, соответствующий симметричному электролиту. В этом случае, пользуясь уравнениями (24) и (25), мы вместо (29) можем написать

$$\frac{d \ln (k^{-2} - 1)}{dk} \Big/ \frac{d \ln kK}{dk} = - 3. \quad (32)$$

Пользуясь известным из теории эллиптических функций [22] соотношением

$$\frac{dkK}{dk} = \frac{E}{1 - k^2},$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k = \sin \alpha$:

$$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} du,$$

мы после упрощений получим из (32)

$$\frac{K}{E} = \frac{3}{2}. \quad (32')$$

Отсюда, пользуясь таблицами значений K и E , находим корень этого уравнения:

$$k = 0,773 \dots \quad (32'')$$

По этому значению модуля k находим из (24) и (23) «критические» значения величин κh и $z\eta_1$:

$$(\kappa h)_c = 3,014 \dots, \quad (33)$$

$$(z\eta_1)_c = 1,5 \dots, \quad (33')$$

$$\omega_c = \frac{P_c}{\gamma n k T} = 2,68 \dots \quad (33'')$$

В результате критерий (31) примет вид

$$\frac{\kappa^3 A}{\gamma n_1 k T} = B \approx 1390 \quad (31')$$

или

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} = C \frac{A^2}{D^2} \frac{e^{6z_1^6}}{(kT)^5}, \quad (31'')$$

где

$$C = \frac{(4\pi)^3}{\beta^2} = 0,819 \dots \cdot 10^{-2}$$

и m — обратная величина коагулирующей концентрации противоионов — может быть принята за меру коагулирующей концентрации электролита.

Значения (33) и (33') показывают, что «критическая точка» лежит при таких толщинах, когда в первом приближении можно попытаться пользоваться формулами (21) и (21'). Действительно, если сделать эту попытку, подставив в (29) значение (21'), то мы получим

$$(\kappa h)'_c = 3, \quad (34)$$

что близко к значению (33).

Подставляя далее найденное значение $\kappa h_c = 3$ в (22'), а также в (21) и (22), мы получим

$$(z\eta_1)'_c = 1,78 \dots, \quad (34')$$

$$\omega'_c = \frac{P_c}{\gamma n k T} = 3,20 \dots, \quad (34'')$$

$$B' \approx 1630. \quad (34''')$$

Таким образом, допускаемая при этом неточность невелика. Найденное в (31'') значение C справедливо только при $z_2 = z_1$. Однако, так как во всех формулах, выражающих $P(h)$,

члены, зависящие от побочного иона, имеют второстепенное значение, влияние z_1 на числовое значение C невелико.

Изложенные расчеты можно распространить⁶ на случай, когда $\beta = z_2/z_1 = 2$; при этом оказывается, что константа C уменьшается примерно только на 4%. Таким образом, подтверждается малое влияние валентности побочного иона.

§ 6. Условия слипания выпуклых поверхностей, разделенных слоем электролита

В теории прилипания, развитой одним из нас ранее [23], было показано, что от взаимодействия плоских поверхностей можно перейти к взаимодействию выпуклых поверхностей той же природы и в той же среде посредством формулы

$$N = G \int_0^{\infty} R(h) dh, \quad (35)$$

где $R(h)$ — отталкивание на единицу площади поверхностей, разделенных плоскопараллельным слоем толщины h , N — сила отталкивания двух шаров при наименьшем расстоянии их поверхностей, равном H (рис. 5), G — величина, зависящая от формы (радиусов кривизны) и взаимной ориентировки поверхностей в районе их максимального сближения.

Для двух шаров радиуса r

$$G = \pi r. \quad (35')$$

При этом формула (35) является хорошим приближением для случаев достаточно больших r .

Для случая, когда взаимодействие поверхностей целиком ионно-электростатического происхождения, «достаточно большими» будут значения r , удовлетворяющие условию

$$\pi r \gg 1. \quad (36)$$

Для случая сил, подчиняющихся формуле (1), мы взамен (36) должны рассматривать условие

$$\frac{r}{H} \gg 1. \quad (36')$$

⁶ Эти расчеты мы опускаем; они составляют часть расчетов, предпринятых В. Дерягиным и посвященных распространению излагаемой теории на несимметричные электролиты.

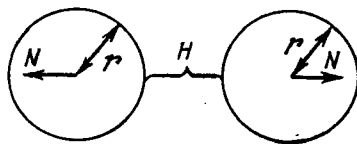


Рис. 5

При одновременном действии сил обоого рода надо рассматривать оба условия (36) и (36') одновременно. Так как, однако, значения N при H , весьма больших по сравнению с $d = 1/\kappa$, будут влиять на дальнейшие расчеты мало по сравнению с влиянием значений N при меньших H , то практически достаточно принимать во внимание одно условие (36), считая, что (36') будет его следствием.

Так или иначе, предполагая, что условия применимости уравнения (35) выполнены, мы из (35), (28), (26) и (26') получим

$$\frac{N}{G} = I(H) - \frac{A}{12\pi} H^{-2}, \quad (37)$$

где

$$I(H) = \int_0^{\infty} P(h) dh. \quad (37')$$

Вместо (28) и (29) в качестве предельного условия сближения частиц получим

$$\frac{d \ln I(H)}{d \ln H} = -2, \quad (38)$$

$$I(H) \cdot H^2 = \frac{A}{12\pi}. \quad (38')$$

Для частного случая симметричного электролита мы из (24) и (25) найдем

$$\begin{aligned} I(H) &= \int_H^{\infty} \frac{4\gamma\kappa k T}{\kappa} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) 2 \frac{d(kK)}{dH} dH = \frac{8\gamma\kappa k T}{\kappa} \int_H^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \frac{d(kK)}{dH} dH = \\ &= \frac{8\gamma\kappa k T}{\kappa} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) kK + \frac{8\gamma\kappa k T}{\kappa} \int_k^1 \frac{2K}{k^2} dk \end{aligned}$$

или по легко доказываемому свойству полных эллиптических интегралов

$$I(H) = \frac{8\gamma\kappa k T}{\kappa} \left[\frac{2}{k} E - \left(\frac{1}{k} - k \right) K - 2 \right], \quad (39)$$

$$H = 2kK. \quad (39')$$

Из (38) и (39) после простых преобразований получим уравнение

$$4E - 3(1 - k^2)K - 4k = 0,$$

корень которого равен

$$k = 0,543 \dots \quad (40)$$

Из (40) и (39) получим «критическую» толщину

$$\kappa H_c = 1,858 \dots \quad (40')$$

и критерий слипания

$$\frac{\kappa^3 A}{\gamma n k T} = B' = 1160, \quad (41)$$

или

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} = C' \frac{A^2}{D^3} \frac{e^{\epsilon_2} z_1^6}{(kT)^5},$$

где

$$C' = \frac{(8\pi)^3}{(B')^2} = 1,174 \dots 10^{-2}.$$

Мы видим, что не только форма критерия прилипания осталась прежней, но и численное значение его константы изменилось весьма мало при переходе от плоских поверхностей к выпуклым. Это обстоятельство весьма важно с точки зрения экспериментальной проверки теории или ее приложимости к системам, содержащим частицы неправильной формы, но достаточно крупные.

Заметим, что хотя теперь критическая толщина H_c передвинулась по сравнению с плоским случаем в сторону меньших значений (ср. с (33)), вычисление критерия устойчивости на основе упрощенного уравнения (22') взамен точных соотношений (24) и (25) приводит к практически тождественному результату. Именно, с помощью (37), (38) и (38') мы, исходя из (22), найдем

$$(\kappa H)_c = 2, \quad (40'')$$

$$\frac{\kappa^3 A}{\gamma n k T} \approx 1300, \quad (41')$$

так что и в этом случае ошибка не имеет существенного значения.

§ 7. Критерий устойчивости сильно заряженных золей

От статически рассматриваемого слипания двух частиц отличается кинетический процесс коагуляции золя, когда слипание происходит в результате предварительного сближения частиц в процессе броуновского движения. Как было показано ранее [24], величина L , обратная скорости коагуляции ν , рассматриваемая в качестве меры устойчивости золя, пропорциональна выражению

$$L = \frac{1}{\nu} \sim \int_0^{\infty} e^{U(H)/kT} \frac{2r dH}{(2r + H)^2}, \quad (42)$$

где $U(H)$ — энергия взаимодействия частиц при расстоянии H их поверхностей в месте наибольшего сближения. Из (42) видно, что это взаимодействие только тогда начинает играть положительную роль в устойчивости золя, когда при некоторых значениях H $U(H)$ положительно, т. е. максимум функции $U(H)$ лежит выше оси абсцисс, иными словами, существует энергетический барьер.

При этом высота барьера, как и величина силы отталкивания N , согласно (35) и (35'), пропорциональна радиусу частиц r . Отсюда вытекает, что чем больше r , тем резче, при прочих равных условиях, переход между неустойчивыми состояниями золя и устойчивыми, реализующимися при наличии барьера, т. е. тем резче граница между теми и другими состояниями. В пределе для крайне «больших» частиц всякая размытость этой границы должна исчезнуть.

Следует, вообще говоря, различать критерий устойчивости и его размытость, соответствующие началу коагуляции (агрегации первичных частиц) и коагуляции, дошедшей до конца.

Если первичные частицы имеют радиусы, значительно превышающие толщину ионных атмосфер, то размытость порога коагуляции будет невелика, и в то же время, по мере образования в процессе коагуляции крупных агрегатов, эта размытость не будет падать, так как радиусы кривизны сближающихся участков поверхностей каких-нибудь двух побочных агрегатов будут равны радиусам первичных частиц. Положение меняется, если первичные частицы имеют радиус, сравнимый или, в особенности, малый по сравнению с толщиной ионных атмосфер. Порог коагуляции (ее начальной стадии) будет при этом сильно размыт; однако по мере агрегации этих частиц размытость будет падать, ибо зернистость поверхности образующихся агрегатов будет иметь размеры, малые по сравнению с толщиной диффузных ионных атмосфер, вследствие чего взаимодействие соударяющихся агрегатов и возникающий за его счет энергетический барьер будут таковы же, как если бы поверхность агрегатов была гладкой с радиусом кривизны, соответствующим грубой форме агрегатов (т. е. поверхности, огибающей ее микрорельеф).

Таким образом, здесь особенно велико будет указанное различие между критериями начала и окончания коагуляции, причем размытость последнего критерия будет меньше, чем даже в случае золя с более крупными первичными частицами. Поэтому возможно принять в качестве критерия устойчивости условие исчезновения энергетического барьера, выражающееся уравнениями

$$U = 0, \quad \frac{dU}{dH} = 0.$$

Получающийся при этом критерий устойчивости для симметричных электролитов не отличается по форме от (31') и (41). Что касается числового значения критерия, то его определение требует громоздких расчетов, которые еще не были выполнены. Впрочем, точное вычисление соответствующей константы вряд ли имеет значение вследствие некоторой размытости перехода между устойчивыми и неустойчивыми состояниями зольей. Можно, однако, воспользоваться для грубого расчета следующим методом. Одним из нас [3] был найден критерий устойчивости слабо заряженных зольей в следующем виде:

$$\frac{Ax}{D\psi_0^2} = C, \quad (43)$$

где C имеет порядок величины, близкий к двум, а ψ_0 — потенциал поверхностей частиц. Приближенный критерий устойчивости сильно заряженных зольей мы получим, заменив в (43) ψ_0 на «кажущийся» потенциал поверхностей частиц⁷ с помощью формул

$$b\psi_0 = \eta_0 = \frac{4}{z}$$

(см. формулы (22) и (22")).

После простых преобразований получим

$$\frac{x^3 A}{\gamma n_1 k T} \approx 800 \quad (44)$$

и

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} = C'' \frac{A^2 e^6 z_1^6}{D^3 (kT)^5}, \quad (44')$$

где

$$C'' \sim 2,5 \cdot 10^{-2}. \quad (44'')$$

Ввиду приближенного характера подсчета он дает по существу только грубую оценку величины константы C'' .

⁷ «Кажущимся» потенциалом ψ_0 мы называем потенциал, который нужно приписать плоской поверхности для того, чтобы при экспоненциальном его спадеании по мере удаления от этой поверхности, в соответствии не с точным, а с *приближенным* уравнением Дебая — Гюккеля [19], он асимптотически стремился совпасть с фактически имеющимися в электролите на большом расстоянии от поверхности значениями потенциала (см. формулу (20)). Кажущийся потенциал заряженной поверхности меньше фактического (который может быть крайне большим) за счет той части экранирующего облака противоположных, которая не учитывается при пользовании упрощенным уравнением Дебая — Гюккеля взамен полного.

Что касается влияния валентности побочного иона, то оно остается малым. Согласно приближенной оценке этого влияния, не претендующей на строгость, с увеличением валентности побочного иона константа C и коагулирующая способность электролита, по-видимому, во всех случаях возрастают, но несколько медленнее, чем это требует вытекающая из правила Во. Оствальда пропорциональность величине $(1 + \beta)$ (см. ниже).

§ 8. Дискуссия результатов и их сравнение с экспериментом

Мы рассмотрели три задачи, связанные со стабилизирующим действием ионных атмосфер по отношению к трем явлениям: слипанию пластин, слипанию частиц с выпуклыми поверхностями и коагуляцией или агрегацией зольей и суспензий. Точные критерии устойчивости легко вычисляются для случая симметричного электролита и во всех трех случаях имеют одинаковый вид:

$$\frac{\kappa^3 A}{\gamma n k T} = B$$

с близкими во всех случаях значениями константы B .

Пользуясь известной формулой для κ , мы можем критерию устойчивости придать следующий вид:

$$m = \frac{1}{\gamma n} = \frac{(8\pi)^3}{B^3} \frac{A^2 e^3 z^6}{D^3 (kT)^6} \equiv C \frac{A^2 e^6 z^6}{D^3 (kT)^6}; \quad (45)$$

$m = 1/\gamma n$ — мера коагулирующей способности электролита, — таким образом, оказывается прямо пропорциональной шестой степени заряда ионов. Вследствие зависимости A от рода частиц, γ будет для разных зольей неодинаково даже при равных z .

Для случая несимметричного электролита расчеты сильно усложняются. В основном коагулирующая способность электролита оказывается зависящей от противоиона. Влияние побочного иона сказывается относительно мало. Таким образом, правило Гарди — Шульца оказывается обоснованным. Критерий устойчивости в присутствии несимметричного электролита для всех трех случаев имеет вид

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} = f(\beta) C \frac{A^2 e^6 z_1^6}{D^3 (kT)^6}, \quad (46)$$

где $f(1) = 1$; точное вычисление функции $f(\beta)$ является весьма трудоемким делом, требующим громоздких числовых и графических расчетов, но в принципе не представляет трудностей.

Сравним условие (46) с эмпирическим критерием устойчивости слабо сольватированных золей Во. Оствальда [15]:

$$-\ln f_1 = \text{const}, \quad (46')$$

где f_1 — коэффициент активности доминирующего иона. Подставляя для $\ln f_1$ его предельное выражение, взятое из теории сильных электролитов Дебая — Гюккеля, мы вместо (46') получим

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} = \text{const} (1 + \beta) \frac{e^6 z_1^6}{D^3 (kT)^3}. \quad (46'')$$

Известно, что правило Во. Оствальда (46'') нашло себе подтверждение на огромном экспериментальном материале, относящемся как к коагуляции золей [15], так и к прилипанию кварцевых частиц [16]. В качестве иллюстрации приводим следующую, заимствованную у Во. Оствальда [25] таблицу:

Тип электролита				$m = \frac{1}{\gamma n_1}$ теоретическое по (46'')	$m = \frac{1}{\gamma n_1}$ экспериментальное*
z_1	n_1	z_2	n_2		
1	1	1	1	1**	1
1	2	2	1	1,5	1,65
1	3	3	1	2,0	2,5
1	4	4	1	2,5	2,8
2	1	1	2	48	51
2	1	2	1	64	47
3	1	1	3	486	573
3	2	2	3	608	938
4	1	1	4	2560	1720
6	1	1	6	27216	14050

* Приведенные в этом столбце цифры являются средними из многих экспериментальных определений.

** За единицу принято m , соответствующее случаю $z_1 = 1, z_2 = 1$.

Мы видим, что во всем огромном диапазоне наблюдаемых концентраций имеется согласие с опытом в пределах экспериментальных ошибок и неизбежной «размытости» порога коагуляции. Сравнение (46) и (46'') показывает, что выведенный нами теоретически критерий коагуляции отличается от эмпирически найденного Во. Оствальдом множителем

$$\left(\frac{A}{kT}\right)^3$$

и множителем $f(\beta)$ взамен $(1 + \beta)$.

Множитель A/kT не зависит от рода электролита, а отношение $f(\beta)$ к $(1 + \beta)$ при различных β должно сохранять порядок величины, близкой к единице.

Поэтому значение развитой нами теории двоякое.

Во-первых, развитая теория, приводя к формуле (46), делает понятным существование согласия многочисленных экспериментов, при которых A/kT не варьировалось (исследовалась коагуляция одного и того же золя разными электролитами) с правилом Во. Оствальда, в то время как ранее это согласие вызывало подчас только недоверчивое удивление. Основной причиной такого отношения является, по-видимому, предвзятое стремление видеть критерий коагуляции выраженным с не переменным участием ζ -потенциала, что связано как с некоторыми экспериментальными результатами (опыты Эллиса и Повиса [26] и др.), так и с теоретическими расчетами, относящимися к случаю слабо заряженных частиц (например, эмульсий масла в воде) [3].

Содержащиеся в данной работе расчеты со всей возможной ясностью показывают, что для сильно заряженных золь критерий устойчивости перестает содержать потенциал частиц и должен в основном определяться концентрацией и природой электролита. В случае, если ζ -потенциал окажется по величине близким к «кажущемуся» потенциалу ψ_0 , может, как следует из (43), существовать форма критерия устойчивости вида

$$\frac{A\kappa}{D\zeta^2} = C,$$

содержащая ζ -потенциал. Однако в этом случае (в отличие от случая слабо заряженных золь) введение ζ -потенциала является совершенно лишним, так как критерий (46), содержащий только концентрации, несравненно полезнее: он дает возможность заранее вычислить наступление коагуляции, не производя часто затруднительных и мало точных измерений ζ -потенциала. К тому же совпадение ζ с ψ_0 может иметь место скорее в порядке исключения.

Таким образом, проведенные расчеты подводят прочную базу под понятие коагулирующей концентрации и правило Шульца — Гарди. В то же время оказывается неправильным то противопоставление концепции сжатия ионной атмосферы и собственной концепции о преимущественной роли дисперсионной среды в коагуляции, которое сделано самим Во. Оствальдом [27].

Из всех расчетов, приведенных выше, ясно, что коагуляция наступает тогда, когда вследствие сжатия диффузного слоя ионов радиус действия сил отталкивания ионного происхождения настолько сокращается по сравнению с радиусом ван-дер-ваальсовых сил притяжения, что энергетический (или силовой в случаях

статического прилипания) барьер исчезает и как неизбежное следствие наступает быстрая коагуляция системы.

Во-вторых, наша теория исправляет правило Во. Оствальда, основывая строго теоретически видоизмененное по сравнению с ним правило (46).

Такое видоизменение заставляет считать связь между критерием коагуляции и коэффициентом активности случайной, а не закономерной, ибо для того, чтобы подобная закономерная связь теоретической коагулирующей способности с коэффициентом активности существовала, необходимо, как показывает сопоставление формул (46), (46'') и (46'), чтобы $f(\beta)$ было в точности равно $(1 + \beta)$, чего на самом деле нет.

Далее, существование множителя $(A/kT)^2$ позволяет указать на те эксперименты, которые могли бы решить вопрос окончательно в пользу предлагаемого критерия коагуляции и отказаться от критерия Во. Оствальда. Именно, исследуя температурный ход коагулирующей концентрации, можно было бы обнаружить разногласия с правилом Во. Оствальда, если только A не будет меняться прямо пропорционально T , что маловероятно. Однако малая точность измерений коагулирующих концентраций делает такое решение вопроса пока мало надежным. Впрочем, преимущества теоретически обоснованного правила перед эмпирическим настолько ясны, что уже одно это является решающим.

Следует отметить, что не все наблюдения над коагулирующей способностью электролитов укладываются в правило (46).

Зависимость коагулирующей концентрации от концентрации золя (правило Буртона [28]) и от рода противоиона (при одинаковой электровалентности), конечно, не согласуется с (46). Что касается правила Буртона, возможно, что толкование его мало связано с изложенной теорией, упираясь, в частности, в трудности правильного определения коагулирующей концентрации, в особенности при малых концентрациях, так как применение фотоэлемента для этой цели отнюдь не устраняет сомнений в действительной сравнимости результатов измерений при различных концентрациях золя. Влияние рода иона [29], быть может, возможно в случае больших органических ионов объяснить, введя в нашу теорию его радиус, что, однако, является задачей будущего. Наконец, остается открытым вопрос о роли сольватации, разумея под ней эффекты, зависящие от сил отталкивания неэлектростатической природы между поверхностями, разделенными слоями дисперсионной среды. В качестве очередной задачи следует также указать на более точные расчеты критерия коагуляции для асимметричных электролитов.

Выводы

1. Развитые расчеты позволяют найти взаимодействие сильно заряженных плоских и выпуклых поверхностей, в частности шаров, помещенных в растворе электролита.

2. Взаимодействие одноименно заряженных поверхностей всегда сводится к отталкиванию в противоположность расчетам С. Левина, А. Коркилла и Л. Розенхида, ошибочность которых была доказана ранее. Наложение на отталкивание электрической природы ван-дер-ваальсова притяжения приводит к кривым силы или энергии в функции расстояния, имеющим один или два минимума, разделенных (если их два) максимумом. Существование и высота последнего определяют в случае силовой диаграммы устойчивость разделяющей поверхности пленки раствора электролита и в случае энергетической диаграммы — устойчивость золя или суспензии.

3. Учитывая ван-дер-ваальсовы силы, можно найти следующий критерий наступления слипания указанных поверхностей:

$$m = \frac{1}{\gamma n_1} \approx C \cdot f(\beta) \frac{A^2 e^2 z_1^6}{D^3 (kT)^6},$$

где A — ван-дер-ваальсова постоянная, e — заряд электрона, γ — концентрация электролита в молях на 1 см^3 , n_1 — число противоионов в одной молекуле, D — диэлектрическая постоянная, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, β — отношение электровалентности побочного иона Z_2 к таковой противоиона Z_1 , C — константа, $f(\beta)$ — функция от «асимметрии электролита», $f(1)=1$, причем сохраняется тот же порядок величины и при других значениях β .

4. Такую же форму, как (1), и примерно с тем же числовым значением константы в правой части мы получаем для критерия устойчивости сильно заряженных лиофобных золя или суспензии, указывающего границу быстрой и весьма медленной коагуляций.

5. Полученный критерий устойчивости отличается множителем $(A/kT)^2$ от известного эмпирического правила Во. Оствальда, что, с одной стороны, позволяет обосновать это последнее, объяснив его хорошее согласие с большим экспериментальным материалом, и, с другой стороны, указывает на необходимость его видоизменения.

6. В первую очередь получает строгое обоснование правило Гарди — Шульце о влиянии валентностей доминирующего и побочного ионов на коагулирующую концентрацию.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. A. March. *Ann. Phys.*, 84, 605, 1927; *Koll. Zs.*, 45, 97, 1938.
[2] I. Langmuir. *J. Chem. Phys.*, 6, 873, 1938.
[3] B. Derjaguin. *Trans. Farad. Soc.*, 36, 730, 1940; 36, 203, 1940.
[4] H. Kallmann, M. Willstätter. *Naturwiss.*, 20, 952, 1932.
[5] F. Donnan (см. R. Ellis. *Zs. Phys. Chem.*, 80, 597, 1912).
[6] H. Hamaker. *Physica*, 10, 1058, 1937.
[7] А. И. Рабинович. *Успехи химии*, 10, 19, 1941.
[8] H. Freundlich. *Thixotropy*. Paris, 1935.
[9] H. Hamaker. *Rec. d. travaux chim. d. Pays-Bas*, 55, 1015, 1936; 56, 3, 1937; 56, 727, 1937.
[10] R. Houwink, Burgers. *Elasticity, Plasticity and Structure of Matter*. Cambridge Univ. Press., 1937 (см. в особенности стр. 338—342); R. Houwink. *Sec. Rep. on Viscosity and Plasticity*, Comm. of Acad. of Sci. of Amsterdam. N. Y. 1938, p. 233—237.
[11] Б. Дерягин. *Изв. АН СССР, серия хим.*, № 5, 1153, 1937.
[12] B. Derjaguin, M. Kussakov. *Acta Physicochim. USSR*, 10, 25, 1939; 10, 153, 1939; Б. Дерягин, М. Кусаков. *Изв. АН СССР, серия химич.*, № 5, 1119, 1937 и др.
[13] B. Derjaguin. *Acta Physicochim. USSR*, 10, 333, 1939; *Trans. Farad. Soc.*, 36, 203, 1940; Б. Дерягин. *Изв. АН СССР, серия хим.*, № 5, 1153, 1937.
[14] H. Eilers, I. Korff. *Trans. Farad. Soc.*, 36, 229, 1940.
[15] Wo. Ostwald. *Koll. Zs.*, 73, 301, 1935; 88, 1, 1939.
[16] A. Buzagh. *Koll. Zs.*, 76, 2, 1936.
[17] I. Langmuir. *Science*, 88, 430, 1938; *J. Chem. Phys.*, 6, 873, 1938.
[18] A. Frumkin, A. Gorodetzkaia. *Acta Physicochim. USSR*, 9, 327, 1938.
[19] S. Levine, G. Dube. *Trans. Farad. Soc.*, 35, 1125, 1939.
[20] B. Derjaguin. *Trans. Farad. Soc.*, 36, 203, 1940; Б. Дерягин. *Колл. ж.*, 6, 291, 1940.
[21] A. Corkill, L. Rosenhead. *Proc. Roy. Soc., A*, 172, 410, 1939.
[22] См., например, Уиттекер, Ватсон. *Курс современного анализа*. ГТТИ, 1934, ч. II, гл. 22, § 736.
[23] B. Derjaguin. *Koll. Zs.*, 69, 155, 1934; Б. Дерягин. *ЖФХ*, 6, 1306, 1935.
[24] N. Fuchs. *Zs. Phys.*, 89, 736, 1934.
[25] Wo. Ostwald. *Koll. Zs.*, 88, 1, Tabelle VII, 1939.
[26] R. Ellis. *Zs. Phys. Chem.*, 78, 321, 1912; 80, 597, 1912; 84, 145, 1915; F. Povich. *Zs. Phys. Chem.*, 89, 91, 1915; 89, 179, 1915.
[27] Wo. Ostwald. *Koll. Zs.*, 73, 301, 1935; *Z. Phys. Chem.*, 42, 981, 1938.
[28] См., например, H. Freundlich. *Kapillarchemie*, Bd. 2, 162. Leipzig, 1932.
[29] Wo. Ostwald. *Koll. Zs.*, 85, 34, 1938.

УВЛЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ
ПЛАСТИНКОЙ

Совместно с В. Г. ЛЕВИЧЕМ

Acta phys.-chim. USSR, 17, 42, 1942

Один из методов нанесения на поверхность твердого тела тонкого слоя жидкости, смачивающей эту поверхность, состоит в вытяжении бесконечной пленки с постоянной скоростью v_0 . Этот метод, в частности, применяется в производстве кинопленки с целью нанесения однородного слоя фоточувствительной эмульсии на основание пленки. Бесконечная пленка, смоченная раствором, вытягивается из ванны, содержащей растворенную фоточувствительную эмульсию. После того как растворитель испарится, на поверхности основания пленки остается равномерно нанесенный слой эмульсии.

Задача определения толщины увлекаемого слоя жидкости как функции скорости движения пленки и параметров, характеризующих свойства жидкости (ее вязкость η , поверхностное натяжение σ и плотность ρ), представляет существенный интерес для практики. Многочисленные попытки вычисления толщины увлекаемого слоя жидкости, имеющиеся в литературе, содержат ряд некорректных предположений уже в самой основе метода расчета, что приводит к ошибочным формулам для этой толщины.

В предлагаемой статье вычисляются толщина слоя и количество жидкости, уносимое при вытягивании бесконечной пластинки из сосуда. Последний достаточно велик, чтобы можно было пренебречь влиянием его стенок и краев пластинки.

Выберем систему координат таким образом, чтобы пластинка являлась плоскостью $x = 0$, а поверхность жидкости, невозмущенная капиллярным мениском (т. е. достаточно далеко от пластинки), — плоскостью $z = 0$; ось z направим вверх вдоль пластинки,

Прежде всего рассмотрим случай малых скоростей движения пластинки (какие именно скорости все еще можно считать малыми, будет установлено ниже). В этом случае всю поверхность жидкости можно разделить на две независимые области: часть поверхности, расположенную достаточно высоко над мениском и непосредственно увлекаемую пластинкой (в этой области поверхность жидкости можно считать почти параллельной плоскости пластинки), и область жидкого мениска, который будет слегка деформирован благодаря движению пластинки, а, следовательно, форма поверхности будет приблизительно совпадать с формой статического мениска.

Ниже мы выпишем решения уравнений гидродинамики в обеих независимых областях и затем сошьем оба найденных решения.

Обозначим через h толщину слоя жидкости, отсчитанную от пластинки. Нас интересуют $h = h(z)$ в обеих независимых областях. Прежде всего выпишем уравнения для толщины жидкой пленки, уносимой движущейся пластинкой, т. е. уравнения для h в первой области.

Так как поверхность жидкости в первой области приблизительно плоская, то ясно, что течение движущейся жидкости также будет почти плоским. Иными словами, главной компонентой движения жидкости в первой области является течение вниз почти параллельно поверхности пластинки. Эту особенность можно использовать для того, чтобы упростить уравнения гидродинамики применительно к рассматриваемому случаю.

В самом деле, очевидно, что единственной компонентой скорости жидкости, играющей существенную роль, является вертикальная (вдоль оси z) компонента u_z . Точно так же очевидно, что градиент скорости в направлении нормали к поверхности $\partial u_z / \partial x$ велик по сравнению с градиентом скорости вдоль пластинки $\partial u_z / \partial z$. Поэтому движение жидкости, уносимой вместе с пластинкой, описывается уравнениями пограничного слоя Прандтля, которые в стационарном случае имеют вид

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь для краткости z -компонента скорости u_z обозначена просто через u ; x отсчитывается по нормали от пластинки. Остальные символы имеют обычный смысл.

В качестве граничных условий для уравнений (1) и (2) служат следующие условия: на поверхности пластинки отсутствует

скольжение между пластинкой и жидкостью, т. е.

$$u = v_0 \text{ при } x = 0. \quad (3)$$

Здесь v_0 — скорость движения пластинки.

На свободной поверхности жидкости, т. е. при $x = h(z)$, где h — толщина жидкого слоя, давление внутри жидкости должно равняться капиллярному давлению p_σ и, кроме того, должны отсутствовать тангенциальные напряжения, так что

$$\left. \begin{aligned} p &= p_\sigma, \\ \eta \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} x = h. \quad (4)$$

Как известно, капиллярное давление равно

$$p_\sigma = \frac{\sigma}{R},$$

где σ — поверхностное натяжение, R — радиус кривизны поверхности. Подставляя хорошо известное выражение для радиуса кривизны R , получаем

$$p_\sigma = -\sigma \frac{\frac{d^2h}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (5)$$

Ясно, что пока толщина уносимого слоя жидкости очень мала, кривизна поверхности жидкости вблизи пластинки будет также очень малой. Поэтому можно пренебречь квадратом dh/dz в знаменателе уравнения (5) и записать окончательно следующее выражение для капиллярного давления в этой области:

$$p_\sigma \approx -\sigma \frac{d^2h}{dz^2}. \quad (5a)$$

Следовательно, первое из граничных условий (4) можно переписать следующим образом:

$$p = -\sigma \frac{d^2h}{dz^2} \text{ при } z = h.$$

Однако из уравнения (2) вытекает, что давление постоянно по толщине уносимого слоя жидкости. Поэтому давление дается выражением

$$p = -\sigma \frac{d^2h}{dz^2} \quad (6)$$

не только на свободной поверхности, но и по всему объему жидкости.

Решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (3) и (4), является

$$u = v_0 + \left(\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} + \frac{\rho g}{\eta} \right) \left(\frac{x^2}{2} - hx \right) = \\ = v_0 + \left(\frac{\rho g}{\eta} - \frac{\sigma}{\eta} \frac{d^3 h}{dz^3} \right) \left(\frac{x^2}{2} - hx \right), \quad (7)$$

где значение p подставляется из уравнения (6).

Наконец, для того чтобы связать толщину жидкого слоя с течением жидкости, увлекаемой пластинкой, используем уравнение непрерывности.

Для случая стационарного движения жидкости и при учете ее несжимаемости уравнение непрерывности, очевидно, можно записать в виде

$$j = \int_0^h u \, dx = \text{const},$$

где j представляет собой поток жидкости, отнесенный к единице ширины пластинки. Подставляя значение u из уравнения (7), получаем

$$v_0 h - \left(\rho g - \sigma \frac{d^3 h}{dz^3} \right) \frac{h^3}{3\eta} = j. \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет толщину жидкого слоя $h(z)$ вдали от поверхности жидкости (в первой области)¹.

Во второй области вблизи поверхности жидкости толщина $h(z)$ определяется, как уже говорилось выше, уравнением статического мениска.

Перепишем уравнение (8) в более удобном виде:

$$\frac{d^3 h}{dz^3} = \frac{3\eta}{\sigma} \left(\frac{j - v_0 h}{h^3} - \frac{\rho g}{\sigma} \right). \quad (8a)$$

Введем новую безразмерную координату λ , определяемую уравнением

$$z = \left(\frac{\sigma}{3\eta} \right)^{1/3} \frac{j}{v_0^{1/3}} \lambda, \quad (9)$$

¹ Б. В. Дерягин любезно информировал одного из нас (В. Левича), что это уравнение было выведено им независимо. Однако Б. В. Дерягину в то время не удалось сделать с его помощью каких-либо конкретных заключений, касающихся толщины переносимой пленки.

а вместо толщины жидкого слоя — безразмерное выражение

$$\mu(\lambda) = \frac{v_0 h(z)}{j}. \quad (10)$$

Тогда, внося λ и $\mu(\lambda)$ в уравнение (8а), находим

$$\frac{d^3\mu}{d\lambda^3} - \frac{1-\mu}{\mu^3} - \frac{\rho g l^2}{3\eta v_0^3} = 0. \quad (11)$$

Порядок величины последнего члена в уравнении (11), который содержит все размерные константы, входящие в задачу, определяется видом зависимости потока j от скорости пластинки v_0 . Если поток j пропорционален v_0 в степени, высшей, чем $3/2$, то последний член в уравнении (11) при достаточно малых значениях скорости извлечения v_0 будет мал по сравнению с единицей.

Будем считать, что j зависит от v_0 упомянутым выше способом. Тогда последний член в уравнении (11) фактически мал по сравнению с двумя первыми, и поэтому им можно пренебречь. Ниже будет показано, что это предположение оказывается справедливым в пределах некоторой области значений скорости извлечения пластинки. Тем самым будет определена область пригодности решений уравнения (11), полученных на основании этого предположения.

Пренебрегая последним членом в уравнении (11), получаем окончательно

$$\frac{d^3\mu}{d\lambda^3} = \frac{1-\mu}{\mu^3}. \quad (12)$$

В качестве граничных условий для уравнения (12) служат следующие условия: на верхней границе области при очень больших значениях z (далеко от поверхности жидкости) толщина жидкого слоя h должна стремиться к постоянному пределу h_0 , равному, очевидно,

$$h_0 \rightarrow \frac{j}{v_0} \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Производные dh/dz и d^2h/dz^2 в этом случае должны стремиться к нулю.

Поэтому в терминах безразмерных величин λ и μ граничные условия на верхней границе области можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \mu &\rightarrow 1, \\ \frac{d\mu}{d\lambda} &\rightarrow 0, \\ \frac{d^2\mu}{d\lambda^2} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Для того чтобы найти граничные условия на нижней границе области при малых значениях z (вблизи мениска), обратимся к уравнениям для статического мениска, которые определяют форму поверхности слоя во второй области.

Как известно, уравнение статического мениска имеет следующий вид:

$$\frac{\frac{d^2h}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\rho g z}{\sigma}. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (14), находим

$$\frac{\frac{dh}{dz}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\rho g z^2}{2\sigma} + c.$$

Постоянную интегрирования можно определить из граничных условий вдали от пластинки. В этом случае $z \rightarrow 0$ и $dh/dz \rightarrow -\infty$, т. е. поверхность жидкости строго горизонтальна. Поэтому $x = -1$ и

$$\frac{\frac{dh}{dz}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\rho g z^2}{2\sigma} - 1. \quad (15)$$

Величина $(\sigma/\rho g)^{1/2}$, входящая в уравнения (14) и (15), есть не что иное, как капиллярная постоянная Лапласа; она имеет размерность длины. Капиллярная постоянная является характеристической длиной задачи о статическом мениске. Если обозначить ее через a , то уравнения (14) и (15) можно записать в виде

$$\frac{\frac{d^2h}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{z}{a^3}, \quad (14a)$$

$$\frac{\frac{dh}{dz}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{z^2}{2a^3} - 1. \quad (15a)$$

Уравнения (14) и (15) определяют толщину жидкого слоя $h(z)$ во второй области вблизи мениска.

При небольших значениях $h(z)$, малых по сравнению с a , и больших значениях z , решение уравнения (14) должно,

очевидно, перейти в решение уравнения (12) для толщины уносимой пленки. Поэтому мы должны спивать решение уравнения (12) с решением (14). Условия сшивки двух уравнений служат в то же самое время искомыми граничными условиями для уравнения (11) на нижней границе первой области. Условия сшивки двух решений получаются из уравнения (15а) путем перехода к пределу малых толщин $h \rightarrow 0$.

Ясно, что при стремлении h к нулю величина dh/dz будет тоже стремиться к нулю. Поскольку поверхность жидкости, смачивающей стенку вблизи начала пленки, сама будет почти вертикальна, то из уравнения (15) мы находим, что в то же самое время толщине, стремящейся к нулю и почти вертикальной поверхности жидкости, соответствует конечная высота, стремящаяся к предельному значению

$$z \rightarrow \sqrt{2} a. \quad (16)$$

Далее, с помощью уравнения (14) находим, что вторая производная толщины d^2h/dz^2 для статического решения в то же время стремится к пределу

$$\frac{d^2h}{dz^2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{a}. \quad (17)$$

Переходя к безразмерным координате λ и толщине μ , с помощью уравнений (9), (10), (16) и (17) получаем

$$\mu \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \lambda \rightarrow \sqrt{2} a \left(\frac{3\eta}{\sigma} \right)^{1/2} \frac{v_0^{4/3}}{j}, \\ \frac{d^2\mu}{d\lambda^2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\frac{\sigma}{3\eta} \right)^{3/4} \frac{j}{v_0^{4/3}}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Таким образом, на границе с первой областью $d^2\mu/d\lambda^2$ стремится к постоянному пределу, определяемому уравнением (18).

Вернемся теперь к граничным условиям для уравнения (11) на нижней границе области. В этом месте толщина жидкой уносимой пленки велика по сравнению с ее предельной толщиной $\mu = 1$ на верхней границе области. Поэтому мы должны определить граничные условия для уравнения (11), отвечающие $\mu \rightarrow \infty$. Таким образом, границы обеих независимых областей перекрываются. $\mu \rightarrow \infty$ соответствует нижней границе первой области, а $\mu \rightarrow 0$ — верхней границе второй области.

Потребуем в качестве условий сшивки решений в обеих областях, чтобы вторая производная $d^2\mu/d\lambda^2$ была непрерывна.

С геометрической точки зрения непрерывность $d^2\mu/d\lambda^2$ выражает непрерывность кривизны поверхности в области малых кривизн. Обозначив через α предел $(d^2\mu/d\lambda^2)_{\mu \rightarrow \infty}$, где μ является

решением уравнения (11), с помощью уравнения (18) условие сшивки решений в обеих областях можно записать в виде

$$\left(\frac{d^2\mu}{d\lambda^2}\right)_{\mu \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{2}\sigma^{3/2}j}{v_0^{5/2}(3\eta)^{2/3}a} = \alpha. \quad (19)$$

Поскольку в уравнение (11) размерные величины не входят, α — безразмерное число. Величину α можно найти численным интегрированием уравнения (11), что будет сделано ниже.

Уравнение (19) дает

$$j = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{v_0^{5/2}(3\eta)^{2/3}a}{\sigma^{5/2}}. \quad (20)$$

Условие (20) будет обсуждаться ниже. Для проведения численного интегрирования уравнения (11) нужно более детально изучить характер стремления к нулю производных $dp/d\lambda$ и $du^2/d\lambda^2$ при бесконечно возрастающем λ , т. е. на верхней границе области (см. уравнение (13)). Он может быть выяснен из поведения асимптотических решений уравнения (11). Для достаточно больших значений λ толщину μ , очевидно, можно представить в виде

$$\mu(\lambda) = 1 + \mu_1(\lambda) \quad (21)$$

с $\mu_1(\lambda) \ll 1$. Подставляя теперь значение $\mu(\lambda)$ из равенства (21) в уравнение (11), находим после пренебрежения квадратами малых величин линейное уравнение для μ_1 :

$$\frac{d^3\mu_1}{d\lambda^3} = -\mu_1. \quad (22)$$

Граничным условием для него служит

$$\mu_1 \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

В качестве частного решения уравнения (22), удовлетворяющего этому граничному условию, может служить

$$\mu_1 = \text{const} \cdot e^{-\lambda}.$$

Очевидно в то же самое время, что

$$\frac{d\mu_1}{d\lambda} = -\text{const} \cdot e^{-\lambda} = -\mu_1,$$

$$\frac{d^2\mu_1}{d\lambda^2} = \text{const} \cdot e^{-\lambda} = \mu_1.$$

Поэтому при больших λ имеются следующие асимптотические уравнения для μ и его производных:

$$\mu = 1 + \text{const} \cdot e^{-\lambda}, \quad (23)$$

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = 1 - \mu, \quad (23a)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\lambda^2} = \mu - 1. \quad (23б)$$

Значение постоянной, фигурирующей в уравнении (23), для наших целей оказывается несущественным. Для непосредственного проведения численного интегрирования уравнения (11), имея в виду граничные условия (23), (23a) и (23б), представляется удобным понизить порядок уравнения, выбрав μ в качестве новой независимой переменной и $(d\mu/d\lambda)^2$ — в качестве новой неизвестной функции. Тогда, обозначив $(d\mu/d\lambda)^2$ через ξ , после простых преобразований находим следующее уравнение для ξ :

$$\frac{d^2\xi}{d\mu^2} = \frac{2(1-\mu)}{\mu^3 \sqrt{\xi}}. \quad (24)$$

Граничные условия (23) — (23б) записываются теперь, как

$$\left. \begin{aligned} \xi &\rightarrow (1-\mu)^2, \\ \frac{d\xi}{d\mu} &\rightarrow 2(\mu-1) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

при $\mu \rightarrow 1$.

Нас интересует величина α , равная в новых обозначениях

$$\alpha = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\frac{d^2\mu}{d\lambda^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\frac{d\xi}{d\mu} \right).$$

Числовой анализ уравнения (24) с граничным условием (23) дает

$$\alpha = 0,63 \dots$$

Подставляя это значение α в формулу (20) для потока жидкости, получаем окончательно:

$$j = 0,93 \frac{\eta^{1/3} v_0^{5/3}}{\sigma^{1/3} (\rho g)^{1/2}}. \quad (20a)$$

Мы видим, таким образом, что условия сшивки решений в обеих областях позволяют выразить поток j через величины, характерные для нашей задачи. Из уравнения (20a) видно, что количество жидкости, уносимой медленно движущейся пластин-

кой, прямо пропорционально скорости движения в степени $5/3$ и вязкости жидкости в степени $2/3$; оно обратно пропорционально поверхностному натяжению в степени $1/6$ (т. е. очень слабо зависит от поверхностного натяжения).

Предельная толщина жидкого слоя, уносимого пластинкой, вдали от жидкого мениска, т. е. при $\mu = 1$, равна (ср. (10))

$$h_0 = 0,93 \frac{(v_0 \eta)^{3/2}}{\sigma^{1/2} \sqrt{\rho g}}. \quad (26)$$

Отсюда видно, что предельная толщина уносимого жидкого слоя пропорциональна скорости извлечения пластинки и вязкости жидкости в степенях $2/3$ и довольно слабо зависит от поверхностного натяжения, будучи обратно пропорциональной последнему в степени $1/6$.

Установим теперь условия применимости формул, полученных для расхода и толщины уносимого слоя (формулы (20) и (24)).

При переходе от (15) к (16) мы опустили последний член в уравнении (15), предположив, что величина $\rho g j^2 / 3 \eta v_0^3$ мала по сравнению с единицей.

Подставляя для j его значение из формулы (20а), находим, что упомянутая величина действительно мала, а тем самым наши вычисления законны, если выполнено следующее неравенство:

$$\left(\frac{\eta v_0}{\sigma} \right)^{1/2} \ll 1, \text{ т. е. } v_0 \ll \frac{\sigma}{\eta}, \quad (27)$$

т. е. при достаточно малом значении скорости пластинки.

Полученные выражения, по-видимому, находятся в хорошем согласии с экспериментом. В самом деле, эксперимент показывает: толщина уносимого слоя при малых скоростях пропорциональна v_0 в степени 0,6, что согласуется с показателем степени, полученным нами.

В противоположном предельном случае, когда скорость оказывается большей, чем σ/η , проведенные выше вычисления становятся неприменимыми. А именно, теперь уже несправедливо предположение о том, что всю поверхность жидкости можно разбить на две независимые области, которое привело ко всем написанным выше выражениям. В этом случае невозможно получить точные выражения для j и h . Однако общий характер зависимости этих величин от основных параметров v_0 , η , ρ и σ при больших скоростях можно указать на основании соображений размерности.

А именно, ясно, что при высоких скоростях расход j и толщина h уносимого слоя не должны зависеть от поверхностного

натяжения. С физической точки зрения это можно усмотреть из того, что при достаточно высоких скоростях пластинки форма всей поверхности жидкости будет определяться характером процесса уноса, а не статическими свойствами поверхности жидкости. Поэтому при больших скоростях пластинки толщина уносимого слоя должна зависеть только от величин v_0 , η , ρ и g . Единственной величиной размерности длины, которую можно составить из этих параметров, является величина $(\eta v_0 / \rho g)^{1/2}$.

Поэтому при достаточно больших скоростях подъема пластинки толщина уносимого жидкого слоя будет иметь вид

$$h \approx A \left(\frac{\eta v_0}{\rho g} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

а расход

$$j \approx A \left(\frac{\eta}{\rho g} \right)^{1/2} v_0^{3/2}.$$

Численное значение постоянной A может быть найдено только из эксперимента.

Наконец, в промежуточной области, как можно убедиться из соображений размерности, толщина уносимого слоя имеет следующий вид:

$$h = \left(\frac{\eta v_0}{\rho g} \right)^{1/2} f \left(\frac{v_0 \eta}{\sigma} \right), \quad (29)$$

где $f(v_0 \eta / \sigma)$ является некоторой функцией от безразмерного параметра, вид которой должен определяться из эксперимента.

В обоих предельных случаях больших и малых значений $v_0 \eta / \sigma$ функция $f(v_0 \eta / \sigma)$ стремится соответственно к величинам порядка единицы и $(v_0 \eta / \sigma)^{1/2}$. При этом уравнение (29) переходит в уравнение (28) или (26).

В заключение мы хотели бы выразить нашу благодарность М. М. Кусакову и Б. В. Дерягину, которые обратили наше внимание на важность рассмотренного здесь вопроса для эксперимента и техники.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР,*

*Институт коллоидной химии и электрохимии
Академии наук СССР*

К ТЕОРИИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОСТОЯНИЯ
СВЕРХПРОВОДНИКОВ

ЖЭТФ, 13, 377, 1943

J. Phys. USSR, 7, 99, 1943

Построена количественная теория слоистого строения сверхпроводников в промежуточном состоянии. Исследовано поведение сверхпроводника с поперечной щелью в магнитном поле. Предложено объяснение запаздывания перехода в промежуточное состояние в поперечном магнитном поле у цилиндрических проводников.

Хорошо известно, что при значениях внешнего магнитного поля, лежащих в определенном (зависящем от формы образца) интервале, сверхпроводник приходит в так называемое промежуточное состояние, в котором магнитная индукция B внутри тела имеет значения, промежуточные между нулем и критическим значением поля H_c . В действительности, однако, как уже было указано автором ранее [1, 2], в промежуточном состоянии сверхпроводник должен состоять из участков, каждый из которых находится либо в сверхпроводящем, либо в нормальном состоянии. Обычное, формальное описание промежуточного состояния получается, если рассматривать значения величин, усредненные по этим участкам. Возникает вопрос о том, каковы форма и размеры сверхпроводящих (s) и нормальных (n) участков.

Раньше всего замечаем, что границы между различными участками должны быть образованы силовыми линиями магнитного поля. Действительно, если бы в n -участке магнитная индукция B имела отличную от нуля нормальную к поверхности раздела компоненту B_n , то в силу непрерывности B_n внутри s -участка тоже имелась бы отличная от нуля индукция, между тем как в сверхпроводящем состоянии должно быть всегда $B = 0$. Что касается абсолютного значения поля, то на границе между s - и n -участками оно должно быть, очевидно, равно как раз

критическому полю H_c , причем внутри n -участка должно быть больше, чем H_c . В противном случае мы не получили бы термодинамически устойчивого¹ состояния, соответствующего минимуму свободной энергии.

Наиболее естественно предположить, что в промежуточном состоянии тело распадается на ряд слоев, попеременно сверхпроводящих и нормальных, расположенных параллельно приложенному магнитному полю. Простые рассуждения, однако,

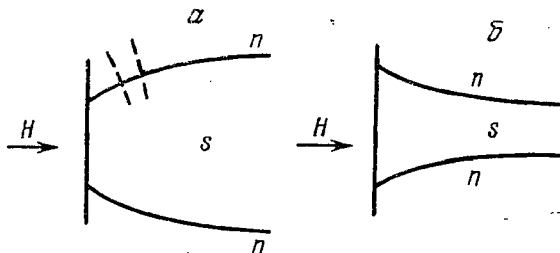


Рис. 1

показывают, что это не могут быть слои с постоянной вдоль их длины толщиной, «закругляющиеся» лишь вблизи самой поверхности образца. Действительно, предположим сначала, что вблизи своих концов сверхпроводящие слои ограничены выпуклыми поверхностями (рис. 1, а). Поскольку в отсутствие тока магнитное поле имеет потенциал, мы можем рисовать эквипотенциальные поверхности поля. Эти поверхности должны быть, в частности, нормальны поверхностям раздела между s -и n -слоями, образованными, как было указано, силовыми линиями. В выпуклых местах границы s -слоя эквипотенциальные поверхности будут расположены так, как изображено штриховыми линиями на рис. 1, а, т. е. будут расходиться по направлению внутрь n -слоя. Но абсолютная величина поля падает в направлении расхождения эквипотенциальных поверхностей. Поэтому поле в n -слое оказалось бы меньше, чем H_c , т. е. вся конфигурация была бы термодинамически неустойчивой¹. Предположим теперь, что s -слои ограничены вблизи своих концов вогнутыми поверхностями (рис. 1, б). Тогда на силовых линиях, огибающих s -слой (внутри него силовые линии, разумеется, не проникают), в точках на заостренных его краях поле обращалось бы в бесконечность, что противоречит граничному условию $H = H_c$, другими словами, решений уравнений поля с такой формой слоев вообще не существует.

¹ Это обстоятельство не было учтено в [1].

Таким образом, простая форма слоев оказывается невозможной. Всем необходимым условиям можно, однако, удовлетворить с помощью следующей, более сложной картины структуры сверхпроводника в промежуточном состоянии. По мере приближения к поверхности образца, на некотором определенном расстоянии от нее, n -слои делятся каждый на два слоя меньшей толщины.

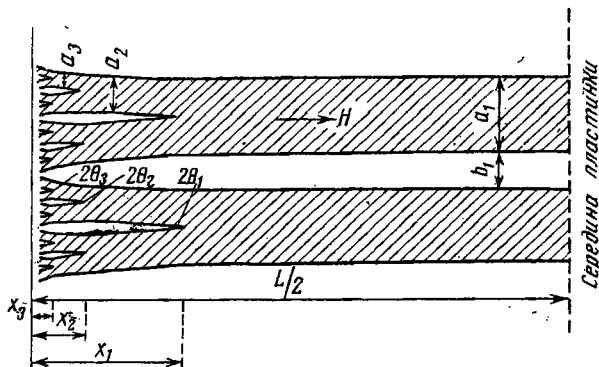


Рис. 2

При дальнейшем приближении к поверхности образовавшиеся слои делятся еще раз и т. д. Таким образом, слои ветвятся формально неограниченное число раз, так что толщина слоев стремится с уменьшением расстояния до поверхности образца к нулю. В действительности, разумеется, можно говорить об отдельных n - и z -слоях в рассматриваемом смысле слова (т. е. считая $B = 0$ в z -слоях) только до тех пор, пока их толщина не сравнивается по порядку величины с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Мы вернемся еще к этому вопросу.

Для вывода количественных формул рассмотрим плоскопараллельную пластинку в поперечном магнитном поле. Для сверхпроводника такой формы область промежуточного состояния простирается по интервалу значений внешнего поля непосредственно от нуля и вплоть до H_c . На рис. 2 изображен разрез пластинки в направлении, параллельном внешнему полю; заштрихованы n -слои.

В каждом участке между двумя последовательными разветвлениями n -слой можно считать обладающим постоянной толщиной и ограниченными параллельными плоскостями. Поле внутри n -слоев постоянно по величине (равно H_c) и направлено параллельно их границам. Легко видеть, что при каждом разветвлении толщина слоев уменьшается вдвое. Это следует непосредственно из того, что полный поток индукции должен оставаться

постоянным вдоль толщины пластинки. Поскольку в s -слоях $B = 0$, а в n -слоях $B = \text{const} = H_c$, то поток индукции просто пропорционален сумме поперечных сечений n -слоев, которая, следовательно, должна оставаться постоянной при их последовательных разветвлениях (подчеркнем, что речь идет не о площади сечения слоев плоскостями, параллельными поверхностям пластинки, а о площадях сечений, поперечных n -слоям в каждом данном их месте).

Формы и размеры слоев определяются условием минимальности полной свободной энергии образца, складывающейся из суммы объемных энергий сверхпроводящих и нормальных участков и из поверхностной энергии, связанной с наличием поверхностей раздела между теми и другими. Как известно, в отсутствие поля свободная энергия в нормальном состоянии (отнесенная к единице объема) превышает свободную энергию в сверхпроводящем состоянии на $H_c^2/8\pi$. При наличии магнитного поля к избыточной энергии вещества в n -слоях (где $B = H_c$) по сравнению с веществом в s -слоях (где $B = 0$) добавляется еще энергия поля, тоже равная (опять-таки на единицу объема) $H_c^2/8\pi$. Таким образом, полная избыточная объемная энергия, обусловленная наличием в сверхпроводнике n -слоев, равна произведению их общего объема на $H_c^2/4\pi$. Что же касается поверхностной энергии, то она пропорциональна площади S поверхностей раздела между n - и s -слоями и равна αS , где α есть «коэффициент поверхностного натяжения» между нормальной и сверхпроводящей фазами. Мы будем пользоваться вместо α величиной Δ , определяемой равенством

$$\alpha = \frac{H_c^2}{8\pi} \Delta. \quad (1)$$

Δ имеет размерность длины. Можно ожидать (считая, что сверхпроводимость характеризуется только одной величиной размерности длины), что порядок величины длины Δ и глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник одинаковы. Подчеркнем, однако, что нет оснований считать эти величины просто пропорциональными друг другу; в частности, законы их температурной зависимости могут оказаться совершенно различными.

Рассмотрим сначала какое-либо одно из последовательных разветвлений n -слоя (рис. 3), отвлекаясь от его дальнейших и предыдущих делений. Пусть a есть толщина слоя до его деления. После разветвления получаются два слоя толщины $a/2$. Угол между этими двумя слоями («угол разветвления») обозначим посредством 2θ . Между a и θ существует зависимость, которую можно определить следующим образом.

Представим себе, что все три конца рассматриваемого слоя закреплены на двух плоскостях (изображенных на рис. 3 штриховой линией), находящихся на заданном расстоянии друг от друга. Поскольку полная избыточная свободная энергия, связанная с наличием n -слоев, должна быть минимальной по отношению ко всем возможным изменениям их формы, то, в частности, она должна быть минимальной по отношению к смещению места разветвления (т. е. изменению расстояния x , см. рис. 3) при заданном положении концов слоя (т. е. при заданных l и d). Полный объем разветвленного n -слоя (отнесенный к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) равен

$$(l-x)a + 2 \frac{a}{2} \sqrt{x^2 + d^2},$$

а его поверхность

$$2[(l-x) + 2\sqrt{x^2 + d^2}].$$

Поэтому полная избыточная свободная энергия есть

$$2[(l-x) + 2\sqrt{x^2 + d^2}] \frac{H_c^2}{8\pi} \Delta + [(l-x) + \sqrt{x^2 + d^2}] \frac{H_c^2}{4\pi} a.$$

При вычислении следует иметь в виду, что угол разветвления θ очень мал (как это будет подтверждено дальнейшими результатами). Вводя вместо x малый угол $\theta \approx d/x$, получим избыточную энергию в виде (опуская не интересующие нас постоянные — не зависящие от θ — члены и пренебрегая членами заведомо более высокого порядка малости; предполагается, что $\Delta \ll a$)

$$\frac{H_c^2}{4\pi} \frac{d\Delta}{\theta} + \frac{H_c^2}{4\pi} \frac{d\theta a}{2}.$$

Это выражение имеет минимум при

$$\theta = \sqrt{\frac{2\Delta}{a}}, \tag{2}$$

чем и определяется искомая связь между толщиной слоя и углом его разветвления.

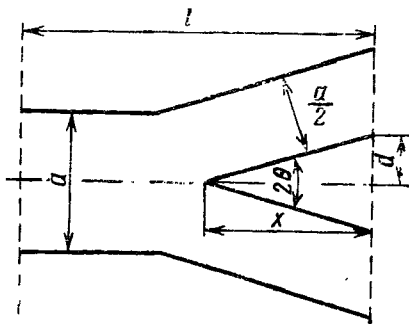


Рис. 3

Обратим внимание на то, что при выполнении соотношения (2) поверхностная и объемная части избыточной энергии равны друг другу.

После этих предварительных вычислений можно определить полностью форму n - и s -слоев, на которые разбивается пластинка в промежуточном состоянии. Обозначим посредством a_1 толщину n -слоев в середине пластинки, т. е. до начала их разветвления, посредством a_2 — толщину слоев, образующихся в результате первого разветвления, и т. д. Углы первого, второго и т. д. разветвлений обозначим как $2\theta_1, 2\theta_2, \dots$. Наконец, пусть x_1, x_2, \dots — расстояния от места первого, второго и т. д. разветвлений до ближайшей поверхности пластинки. Прежде всего, поскольку при каждом разветвлении толщина n -слоя уменьшается вдвое, имеем

$$a_n = \frac{a_1}{2^{n-1}}. \quad (3)$$

Для каждой пары a_n, θ_n имеет место соотношение (2):

$$\theta_n = \sqrt{\frac{2\Delta}{a_n}} = 2^{\frac{n-1}{2}} \theta_1. \quad (4)$$

До начала разветвления слои расположены перпендикулярно поверхности пластинки (параллельно внешнему полю). После первого разветвления образовавшиеся слои расположены под углами $\pm \theta_1$ к первоначальному направлению. Вместе с ними отклоняются на тот же угол и все проходящие в n -слое магнитные силовые линии. Если бы дальнейших разветвлений слоев не происходило, то концы силовых линий (в точках их пересечения с поверхностью пластинки) отклонились бы всего на расстояния $\pm \theta_1 x_1$ от точек, в которые они бы попали при полном отсутствии разветвлений. Дополнительное отклонение благодаря второму разветвлению равно $\pm \theta_2 x_2$ и т. д. (все углы $\theta_1, \theta_2, \dots$ малы!). Таким образом, полные отклонения концов силовых линий в результате повторных разветвлений исходного n -слоя определяются бесконечными суммами

$$\pm x_1\theta_1 \pm x_2\theta_2 \pm x_3\theta_3 \pm \dots \quad (5)$$

со всеми возможными комбинациями знаков \pm .

Силовые линии, проходящие на самой границе исходных (неразветвленных) n -слоев, должны отклоняться на расстояние, равное половине расстояния b_1 (рис. 2) между соседними n -слоями, т. е. ширины s -слоев. Это значит, что должно быть

$$x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_3\theta_3 + \dots = \frac{b_1}{2}. \quad (6)$$

Далее, расстояния между смещениями концов различных силовых линий, проходящих первоначально в одном и том же исходном n -слое, равны разностям чисел (5), т. е. изображаются суммами вида

$$2(e_1 x_1 \theta_1 + e_2 x_2 \theta_2 + \dots),$$

где каждое из чисел e_1, e_2, \dots может иметь значение 0 или 1. Поскольку силовые линии нигде не должны пересекаться, все получающиеся таким образом числа должны заполнить непрерывным образом интервал между 0 и b_1 . Как известно, интервал между 0 и 1 может быть заполнен суммами степеней половины вида

$$e_1 \frac{1}{2} + e_2 \frac{1}{4} + e_3 \frac{1}{8} + \dots$$

со всеми возможными наборами значений e_1, e_2, \dots , равными 0 или 1 (двоичный аналог десятичной дроби). Имея это в виду, заключаем, что последовательность чисел $x_1 \theta_1, x_2 \theta_2, x_3 \theta_3, \dots$ должна образовывать геометрическую прогрессию со знаменателем $1/2$. Таким образом, получаем соотношение

$$x_n \theta_n = \frac{x_1 \theta_1}{2^{n-1}}. \quad (7)$$

Из (6) находим теперь

$$2x_1 \theta_1 = \frac{b_1}{2}. \quad (8)$$

Комбинируя формулы (3), (4), (7), найдем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = 2\sqrt{2}. \quad (9)$$

Таким образом, каждое из повторных разветвлений слоя происходит в 2,83 раза ближе к поверхности пластинки, чем предыдущее.

Далее, между a_1 и b_1 существует соотношение, вытекающее непосредственно из того, что средняя (усредненная по слоям) индукция в пластинке должна иметь заданное значение B (равное в случае пластинки внешнему полю). Поскольку, с другой стороны, индукция в n -слоях равна H_c , а в s -слоях — нулю, то ясно, что должно быть $(a_1 + b_1) B = a_1 H_c$ или

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = \frac{B}{H_c}. \quad (10)$$

Наконец, воспользуемся условием минимальности свободной энергии. Если бы n -слои не разветвлялись вовсе, т. е. имели бы

на всем протяжении постоянную толщину a_1 , то избыточная свободная энергия, обусловленная наличием вещества в нормальном состоянии, отнесенная к единице площади поверхности пластинки, была бы равна

$$\frac{1}{a_1 + b_1} \left(\frac{H_c^2}{4\pi} L a_1 + \frac{H_c^2 \Delta}{8\pi} 2L \right)$$

(L — ширина пластинки). Первый член в скобках есть объемная, а второй — поверхностная энергия одного слоя; множитель перед скобками есть число n -слоев, приходящихся на единицу длины пластинки. С помощью (10) мы можем переписать это выражение в виде

$$\frac{H_c B}{4\pi} L + \frac{H_c^2}{4\pi} \Delta L \frac{1}{a_1 + b_1}.$$

Мы видим, что первый член не зависит (при заданном B) от ширины слоев. Далее, благодаря первому разветвлению на участках длины x_1 с обеих сторон n -слоя его поверхность удваивается, т. е. появляется дополнительная поверхностная энергия, равная

$$\frac{H_c^2 \Delta}{8\pi} 4x_1.$$

Дополнительная объемная энергия, связанная с разветвлением слоя, равна, как было показано выше, поверхностной энергии. Таким образом, первое разветвление приводит к дополнительной энергии (опять отнесенной к единице площади поверхности пластинки)

$$\frac{\Delta}{a_1 + b_1} \frac{H_c^2}{4\pi} 4x_1.$$

Аналогично находим, что второе разветвление даст энергию, равную $\frac{\Delta}{a_1 + b_1} \frac{H_c^2}{4\pi} 8x_2$, и т. д.

Таким образом, дополнительная свободная энергия f , связанная с наличием разветвляющихся n -слоев, равна

$$f = \frac{H_c^2}{4\pi} \frac{\Delta}{a_1 + b_1} (L + 4x_1 + 8x_2 + 16x_3 + \dots) + \frac{H_c B}{4\pi} L.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен в силу (9) $1/\sqrt{2}$, получим

$$f = \frac{H_c^2}{4\pi} \frac{\Delta}{a_1 + b_1} \left(L + \frac{4x_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) + \frac{H_c B}{4\pi} L.$$

Комбинируя формулы (4), (8) и (10), легко получить

$$x_1 = \frac{a_1^{3/2}}{4\sqrt{2}\Delta} \frac{H_c - B}{B}. \quad (11)$$

Выражая все величины в f через a_1 , получим

$$f = \frac{H_c B}{4\pi} \Delta \left[\frac{L}{a_1} + \sqrt{a_1} \left(\frac{H_c - B}{B} \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta}(\sqrt{2} - 1)} \right] + \frac{H_c B}{4\pi} L. \quad (12)$$

Это выражение, рассматриваемое как функция от a_1 , имеет минимум при

$$a_1 = 2^{2/3} (\sqrt{2} - 1)^{2/3} \Delta^{1/3} L^{2/3} \left(\frac{B}{H_c - B} \right)^{1/3}, \quad (13)$$

чем и определяется толщина n -слоев. Для толщины s -слоя имеем, согласно (10)² $b_1 = a_1 \frac{H_c - B}{B}$, так что

$$b_1 = 2^{2/3} (\sqrt{2} - 1)^{2/3} \Delta^{1/3} L^{2/3} \left(\frac{H_c - B}{B} \right)^{1/3}. \quad (14)$$

Наконец,

$$a_1 + b_1 = 2^{2/3} (\sqrt{2} - 1)^{2/3} \Delta^{1/3} L^{2/3} \frac{H_c}{B^{1/3} (H_c - B)^{2/3}}. \quad (15)$$

Таким образом, толщина слоев пропорциональна степени $L^{2/3}$ ширины пластинки. При возрастании B толщина n -слоев (a_1) растет, а толщина s -слоев (b_1) падает, как и должно было быть.

Стоящие в (13) — (15) функции от B практически можно считать постоянными почти во всех интервалах изменения B , за исключением только участков непосредственно вблизи его краев (т. е. вблизи нуля и H_c). С практически достаточной точностью можно написать

$$a_1 + b_1 \approx 2\Delta^{1/3} L^{2/3}. \quad (16)$$

Если взять предположительно $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см, то для $L = 1$ см получим $a_1 + b_1 = 0,06$. Таким образом, на протяжении 1 см длины пластинки будет находиться всего около 20 слоев. Отметим, что слои оказываются сравнительно весьма толстыми².

Подставляя (13) в (11), получим

$$x_1 = L \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = 0,14 L. \quad (17)$$

² Отметим, что углы θ порядка $\theta \sim \sqrt{\Delta/a} \sim (\Delta/L)^{1/3}$, т. е. действительно малы, как и было предположено выше.

Таким образом, длина неразветвленной части слоев ($L - 2x_1$) составляет 0,71 от их полной длины (ширины пластины).

Выпишем еще выражение для избыточной энергии f , получающееся подстановкой (13) в (12):

$$f = \frac{3}{2^{7/2}(\sqrt{2} - 1)^{3/2}\pi} L^{1/2} \Delta^{1/2} H_c B^{1/2} (H_c - B)^{1/2} + \frac{H_c B}{4\pi} L. \quad (18)$$

Все полученные формулы полностью применимы не только к пластинке, но и к телам другой формы, если только среднее поле в них однородно (этим свойством обладают, как известно, эллипсоиды и, в частности, шар и цилиндр). В этом случае под L надо понимать длину силовой линии, проходящей по рассматриваемому n -слою; при этом, разумеется, L различно для разных слоев. К телам другой формы, не удовлетворяющей этому условию, полученные результаты применимы качественно, в частности, можно по-прежнему применять приближенную формулу (16).

Что касается формы слоев «как целого» (в пластинке — это параллельные плоские слои), то, например, в случае шарообразного образца можно думать, что энергетически наиболее выгодными оказываются слои, представляющие совокупность коаксиальных цилиндров, осью которых является диаметр шара, параллельный приложенному полю. Для каждого цилиндрического слоя величина L , а потому и его толщина постоянны. В цилиндрическом образце в поперечном поле слои должны быть плоскими, параллельными оси цилиндра и направлению внешнего поля; каждый из таких слоев тоже обладает постоянной толщиной.

По мере приближения к поверхности тела толщина слоев неограниченно уменьшается в результате повторных разветвлений, пока не потеряет смысл макроскопическое описание сверхпроводящего состояния как состояния с $B = 0$. При этом теряет смысл и понятие «промежуточного состояния», и вещество будет находиться в некотором своеобразном новом состоянии, которое можно назвать «смешанным». О свойствах этого состояния нельзя сделать никаких заключений, исходя из обычной макроскопической теории сверхпроводящего состояния; для его исследования требовалось бы более тонкое рассмотрение.

Необходимо сделать еще следующее замечание по поводу формы s - и n -областей. Мы предположили, что они имеют вид чередующихся слоев. При достаточно слабых полях, когда большая часть вещества находится в сверхпроводящем состоянии, n -слои должны были бы быть весьма тонкими. В этих условиях энергетически более выгодным может оказаться распадение n -слоев на

отдельные нитевидные области, расположенные параллельно полю. Концы этих нитей должны разветвляться по такому же типу, как это имеет место у слоев. Аналогично при полях, достаточно близких к критическому, вместо очень узких s -слоев должны образовываться нитевидные s -области, расположенные в основной массе вещества в нормальном состоянии.

Разветвление слоев, приводящее к образованию на поверхности образца «смешанного» состояния, не дает возможности непосредственно обнаружить на опыте существование слоев.

Эти затруднения были обойдены в экспериментах, предложенных и начатых перед войной А. И. Шальниковым. Исходя из предположения, что на сторонах очень узкой щели, прорезанной в образце в направлении, перпендикулярном к полю, слои не будут разветвляться, он предпринял измерения поля внутри щели, прорезанной в экваториальной плоскости сверхпроводящего шара. Развиваемая здесь теория показывает, что при достаточной узости щели такой эффект должен действительно иметь место. Причина этого заключается в следующем.

Рассмотрим щель ширины d , прорезанную перпендикулярно направлению поля. Если слои не разветвляются, как бы переходя непосредственно с одной стороны щели на другую, то поле в щели можно считать равным попеременно нулю и H_c в участках пространства, являющихся продолжением слоев (рис. 4). Энергия поля в щели, отнесенная к единице площади ее поверхности, будет тогда равна

$$\frac{1}{a_1 + b_1} da_1 \frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{BH_c}{8\pi} d.$$

Энергия же однородного поля B в объеме щели была бы равна $(B^2/8\pi) d$. Поэтому избыточная энергия, обусловленная наличием неразветвляющихся у щели слоев, есть

$$\frac{B(H_c - B)}{8\pi} d.$$

Если же слои разветвляются у поверхности щели, то возникает дополнительная энергия, равная

$$[f(L_1) + f(L_2)] - f(L_1 + L_2),$$

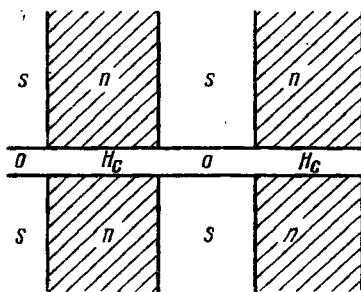


Рис. 4

где $f(L)$ определяется выражением (18), а L_1 и L_2 есть длины двух частей, на которые слой делится щелью. Первый член представляет собой дополнительную энергию слоев, разветвляющихся как у поверхности щели, так и у двух внешних поверхностей разрезанного тела. Из нее должна быть вычтена энергия (изображающаяся вторым членом) слоев, разветвляющихся только у внешних поверхностей, так, как это было бы при отсутствии щели.

Критическая ширина щели d_0 определяется из условия равенства обеих написанных дополнительных энергий:

$$\frac{B(H_c - B)}{8\pi} d_0 = [f(L_1) + f(L_2)] - f(L_1 + L_2). \quad (19)$$

При $d > d_0$ у поверхности щели слои разветвляются, а при $d < d_0$ они выходят к поверхности щели неразветвленными.

Для краткости будем считать, что тело делится щелью на две равные части; тогда $L_1 = L_2 = L/2$, где L — длина тела в данном месте в направлении внешнего поля. Из (18) и (19) получим

$$d_0 = \frac{3(2 - 2^{1/3})}{(\sqrt{2} - 1)^{2/3}} \Delta^{1/3} L^{1/3} \frac{H_c}{B^{2/3}(H_c - B)^{1/3}}. \quad (20)$$

Почти во всем интервале изменения B (за исключением областей вблизи 0 и H_c) можно написать с практически достаточной точностью

$$d_0 \approx 8\Delta^{1/3} L^{1/3}. \quad (21)$$

Так, если взять $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см, то для $L = 1$ см получим $d_0 \approx 0,01$ см. Такая ширина щели практически вполне осуществима.

А. И. Шальникову в своих весьма остроумных экспериментах удалось обнаружить существование описанного эффекта и, таким образом, экспериментально подтвердить существование слоев. Эти опыты были, к сожалению, прерваны войной, и количественное сравнение с теорией в настоящее время не может быть сделано.

Другим экспериментально наблюдаемым эффектом, связанным со «слоистой структурой» промежуточного состояния, является известный факт «запаздывания» перехода из сверхпроводящего в промежуточное состояние при увеличении приложенного магнитного поля — переход наступает при более высоком значении поля, чем это должно было бы ожидаться исходя из обычной макроскопической теории (так, для цилиндрического сверхпроводника в поперечном поле точка перехода оказывается лежащей несколько выше, чем $1/2 H_c$). С точки зрения развивае-

мой здесь теории причина этого явления заключается в следующем. Переход в промежуточное состояние происходит тогда, когда он становится энергетически выгодным. Но сложная структура промежуточного состояния связана с дополнительной энергией, обусловленной наличием поверхностей раздела между s - и n -областями и разветвлением слоев, помимо чисто «объемной» свободной энергии ($H_c B / 4\pi$ на единицу объема), которая приписывается промежуточному состоянию в обычной макроскопической теории; это и приведет к смещению точки перехода в сторону больших полей.

Точное вычисление точки перехода требовало бы полного определения распределения среднего поля в образце в момент его перехода в промежуточное состояние. Это распределение определяется уравнениями поля, причем связь между входящими в них векторами H и B дается известным термодинамическим соотношением

$$H = \frac{\partial \Phi}{\partial B}, \quad (22)$$

где $\Phi / 4\pi$ — свободная энергия единицы объема тела. В промежуточном состоянии с учетом наличия разветвляющихся слоев функция Φ равна $(4\pi/L)f$, где f (18) — энергия, отнесенная к единице площади поверхности тела. Мы можем написать Φ в виде

$$\Phi = H_c B + \varphi, \quad (23)$$

где φ соответствует первому члену в (18), т. е. энергии, связанной с наличием поверхностей раздела между s - и n -слоями и с разветвлением слоев. Существенно, что φ содержит длину силовой линии L , зависящую от формы и размеров тела; L войдет, следовательно, и в соотношение между H и B . Поскольку L в разных точках тела различно, то это приведет к тому, что даже в эллипсоиде поля B и H не будут однородными, а будут меняться от точки к точке. В этих условиях задача об определении поля представляет большие математические трудности.

Можно, однако, думать, что практически достаточно точный результат для точки перехода в эллипсоиде может быть получен исходя из грубого предположения об однородности средней индукции B в нем (в действительности B будет однородным только при пренебрежении φ). Произведем здесь соответствующие вычисления.

Напомним предварительно некоторые общие соотношения, известные из обычной теории поля в материальных средах. Обозначим свободную энергию единицы объема тела, магнитная индукция в котором есть B , посредством $\Phi(B)$. Полная энергия тела не равна, однако, просто интегралу $\frac{1}{4\pi} \int \Phi dV$ по объему

тела. Присутствие тела приводит к изменению распределения поля также и во внешнем пространстве; соответствующее изменение энергии этого поля (по сравнению с энергией, которой оно бы обладало в отсутствие тела) должно быть включено в полную энергию тела. Пусть $F(B)$ есть полная свободная энергия, формально отнесенная к единице объема тела, т. е. величина, определенная так, что интеграл $\int F dV$ по объему тела равен полной энергии. Тогда имеет место следующая формула³:

$$F = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi(B) - \frac{HB}{2} - \frac{h(B-H)}{2} \right]. \quad (24)$$

Здесь H и B — абсолютные величины векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} внутри тела, а h — внешнее поле (точнее, значение, которое оно имело бы в отсутствие тела); H , B и h связаны друг с другом соотношением (22) и (в эллипсоиде) соотношением

$$nB + (1-n)H = h, \quad (25)$$

где $4\pi n$ есть коэффициент размагничивания (т. е. $n = 1/2$ для цилиндра в поперечном поле, $n = 1/3$ для шара).

В промежуточном состоянии пишем Φ в виде (23), так что (24) дает

$$F_i = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi(B) + H_c B - \frac{HB}{2} - \frac{h(B-H)}{2} \right]. \quad (26)$$

В сверхпроводящем состоянии имеем $B = 0$, а также $\Phi = 0$, поскольку мы, по существу, отсчитываем энергию от того значения, которое она имеет в отсутствие вещества в нормальном состоянии. Из (24) и (25) получаем известную формулу

$$F_s = \frac{h^2}{8\pi(1-n)}. \quad (27)$$

Точка перехода h_i из сверхпроводящего состояния в промежуточное определяется из условия $F_s = F_i$, т. е.

$$\Phi + H_c B - \frac{HB}{2} + \frac{h_i(B-H)}{2} - \frac{h_i^2}{2(1-n)} = 0. \quad (28)$$

Для того чтобы определить отсюда значение h_i , надо присоединить к этому уравнению соотношение (25), которое можно напи-

³ В] справедливости этой формулы можно убедиться, вычисляя дифференциал dF , т. е. работу при изотермическом изменении поля. Простые вычисления с помощью (22), (24), (25) дают $dF = -\frac{B-H}{4\pi} dh = -Mdh$ (M — магнитный момент единицы объема тела), как и должно было быть.

сать в виде

$$h_t = (1 - n)H_c + nB + (1 - n) \frac{d\Phi}{dB} \quad (29)$$

(для H подставляем $H = d\Phi/dB = H_c + d\Phi/dB$). При подстановке (29) в (28) получим уравнение

$$\Phi - B \frac{d\Phi}{dB} = \frac{n}{2(1-n)} B^2. \quad (30)$$

Уравнения (29), (30) удобны для вычисления h_t ; зная функцию $\Phi(B)$, вычисляем из (30) значение B и, подставляя его в (29), получим искомое внешнее поле h_t в точке перехода.

Что касается функции $\Phi(B)$, то надо заметить, что при внешних полях в непосредственной близости от точки перехода области сверхпроводящего состояния имеют, вероятнее всего, как было выше указано, форму не слоев, а нитей. Поэтому мы не можем, собственно говоря, пользоваться здесь выражением (18) для энергии, полученным для слоистой структуры промежуточного состояния (хотя разница между обеими формулами в этой области невелика). Мы не станем приводить здесь соответствующего вычисления энергии для нитевидной структуры и приведем сразу получающийся результат. Для точки перехода цилиндрического (радиуса r) сверхпроводника в поперечном поле получается

$$h_t = H_c \left[\frac{1}{2} + 0,4 \sqrt{\frac{\Delta}{r}} \right]. \quad (31)$$

Для шара радиуса r точке перехода соответствует

$$h_t = H_c \left[\frac{2}{3} + 0,5 \sqrt{\frac{\Delta}{r}} \right]. \quad (32)$$

Вторые члены в скобках представляют собой искомые отклонения от обычно ожидаемых значений h_t . Отметим, что они оказываются обратно пропорциональными корню из размеров тела, а их зависимость от температуры связана с температурной зависимостью Δ .

К сожалению, измерений для зависимости h_t/H_c от r не делалось. Майзнером [3] были произведены систематические измерения зависимости отношения h_t/H_c от температуры для олова, индия и свинца. К сожалению, он не привел точных значений диаметра применявшихся им проволок, а указывает только порядок их величины. Кроме того, остается неясным, в какой мере дело шло о равновесном состоянии и не имели ли место гистерезисные явления. Во всяком случае, можно заключить, что величина Δ падает при повышении температуры, обращаясь в нуль

при $T = T_0$ (T_0 — точка сверхпроводящего перехода в отсутствие поля), т. е. ведет себя обратно тому, как ведет себя глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Что касается порядка величины получающихся для Δ значений, то он сильно колеблется в зависимости от температуры.

Подчеркнем, что вся развитая здесь теория относится к «статическим» свойствам промежуточного состояния. Что касается вопросов, связанных с проводимостью сверхпроводника в промежуточном состоянии, то они требуют более глубокого исследования свойств «смешанного» состояния вблизи поверхности образца.

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. А. И. Шальникову за сообщение результатов своих экспериментов.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау. ЖЭТФ, 7, 371, 1937 (Собр. трудов, № 30).
- [2] L. Landau. Nature, 141, 688, 1938 (предварительное сообщение).
- [3] Misener. Proc. Roy. Soc., A166, 43, 1938.

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ЖИДКИМ И ГАЗООБРАЗНЫМ СОСТОЯНИЕМ У МЕТАЛЛОВ

Совместно с Я. ЗЕЛЬДОВИЧЕМ

ЖЭТФ, 14, 32, 1944

Acta phys.-chim. USSR, 18, 194, 1943

Общие соображения о характере перехода вещества из состояния металла в состояние диэлектрика приводят к выводу, что такой переход совершается как обычный фазовый переход вплоть до весьма высокой температуры. В случае ртути и других легкокипящих металлов критическая точка перехода из жидкого в газообразное состояние лежит, вероятно, при более низкой температуре. Следует ожидать существования в определенной области двух раздельных (при различном давлении и температуре) переходов из металлического в неметаллическое состояние и из жидкого в газообразное состояние, т. е. существование жидкой неметаллической фазы, при повышении давления переходящей в металл, при понижении давления — в газ

Металл резко отличается от диэлектрика по своему электронному энергетическому спектру при абсолютном нуле. К основному состоянию металла примыкает непрерывный спектр состояний; благодаря этому сколь угодно слабое электрическое поле вызывает в металле электрический ток, зависящий от перехода системы на уровни, сколь угодно близкие по энергии к основному. Напротив, электронный энергетический спектр диэлектрика отличается существованием конечной «щели», определенной разности энергий между основным состоянием с минимальной энергией (в котором ток отсутствует) и ближайшими к нему возбужденными состояниями, в которых один из электронов диэлектрика становится свободным и появляется электропроводность.

Заметим, что определить металл как тело с континуумом уровней, примыкающих к основному уровню, без дополнительных условий нельзя: в действительности любое парамагнитное вещество, например жидкий кислород или сульфат гадолиния, обладает сплошным спектром уровней, отвечающих различным

значениям магнитного момента; благодаря этому и происходит изменение момента в слабом магнитном поле, характерное для парамагнитного вещества. Однако кислород или сульфат гадолиния не являются металлом, не проводят ток. Наличие сплошного спектра есть условие, необходимое, но недостаточное для того, чтобы вещество являлось металлом; для проводимости нужно, чтобы граничащие с основным возбуждением уровни обладали свойством переноса электрического заряда.

Неоднократно высказывалось и является правдоподобным (хотя и не было никогда доказано в общем виде) предположение, что при достаточно сильном сжатии любое вещество превратится в металл. Иллюстрацией служит превращение фосфора в проводящую модификацию при высоком давлении — черный фосфор Бриджмена.

При абсолютном нуле металл и диэлектрик качественно различаются; всегда можно определить, с чем именно мы имеем дело; существует определенная точка перехода¹.

Диэлектрик отличается от металла наличием энергетической щели в электронном спектре. Но может ли ширина этой щели стремиться к нулю при приближении (со стороны диэлектрика) к точке перехода в металл? В этом случае мы имели бы переход без скрытой теплоты, без скачка объема и других свойств. Пайерлс указал, что непрерывный в этом смысле переход невозможен. Рассмотрим возбужденное состояние диэлектрика, в котором он проводит ток. Электрон покинул свое место, движется в кристаллической решетке, обнажив в другом месте решетки положительный заряд. При большом удалении электрона от положительного заряда он заведомо испытывает кулоновское притяжение, стремящееся вернуть электрон. В кулоновском поле притяжения всегда имеются дискретные уровни с отрицательной энергией, отвечающие связыванию электрона; следовательно, всегда возбужденное и проводящее состояния диэлектрика отделены щелью конечной ширины от основного состояния, в котором электроны связаны.

Если и при 0° К превращение металла в диэлектрик представляет собой фазовый переход первого рода (т. е. со скрытой теплотой перехода и скачком свойств), то очевидно, что превращение будет происходить как переход первого рода и при отличной от

¹ При температуре, отличной от нуля, принципиально в любом диэлектрике имеет место некоторое возбуждение, какая-то, хотя бы ничтожная, доля электронов находится в возбужденном состоянии, так что имеется отличная от нуля электропроводность, и система в целом находится в состоянии непрерывного спектра. Поэтому совершенно строго отличить диэлектрик от металла можно только при абсолютном нуле температуры.

0° К низкой температуре. Непрерывный переход возможен лишь при высокой температуре, когда возбуждение и проводимость диэлектрика станут значительными. Энергия возбуждения — порядка энергии ионизации, т. е. порядка нескольких вольт, в худшем случае 1 эв. Таким образом, линия термодинамического равновесия металлической и диэлектрической фаз может закончиться критической точкой лишь при очень высокой температуре — порядка вольта, т. е. порядка 10^4 градусов, и соответственно при огромном давлении. При этом при высокой температуре обе фазы являются некристаллическими (плавление металла совершенно не лишает его металлических свойств). Возникает вопрос о соотношении между линией перехода из металлического в диэлектрическое состояние и линией перехода жидкость — газ в случае металлов. Совершенно ясно, что при низком давлении вещество при малой плотности (в пределе — идеальный газ) является непроводником, неметаллом. В случае ртути энергетический спектр газа дискретен, в случае парамагнитных паров натрия мы имеем континуум, который, однако (как и в примере кислорода), к металличности и проводимости прямого отношения не имеет.

Принципиально возможны три случая². Переход из металлического в диэлектрическое состояние всегда сопровождается переходом из жидкого состояния в газообразное; есть одна общая кривая, одна критическая точка, достигаемая при весьма высокой температуре. Этот случай, быть может, имеет место для нелетучих металлов. Для металлов с малой тепловой испарения (например, ртути) следует ожидать критической точки жидкость — газ (точка *ЖГ*) при температуре гораздо более низкой, чем критическая точка перехода металл — диэлектрик (точка *МД*). При этом появляются второй и третий случаи (рис. 1 и 2).

Во втором случае нагревание жидкого металла при высоком давлении вызывает скачок плотности на линии *T — ЖГ*; однако фаза меньшей плотности также является металлом («металлический газ»). Переход в обычный газ происходит на линии *T — МД*. Случай этот весьма маловероятен. В третьем случае мы ожидаем в определенном интервале давлений при повышении температуры превращения жидкого металла в жидкую непроводящую фазу (на линии *T — МД*) и лишь после этого, на линии *T — ЖГ*, превращения непроводящей фазы в газ. Потеря металличности происходит путем фазового перехода металл — газ также при

² Мы не рассматриваем кристаллические фазы, существующие при низких температурах. Соответствующие переходы не имеют отношения к нашей теме.

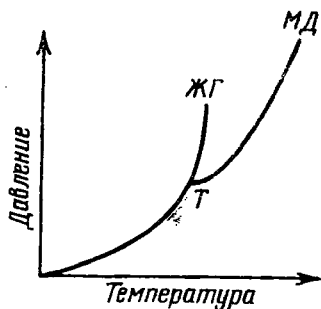


Рис. 1

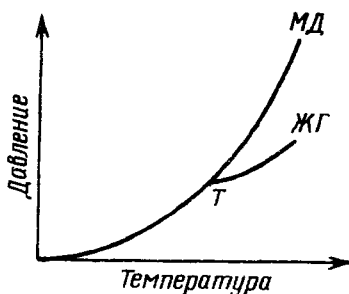


Рис. 2

температуре и давлении гораздо более высоких, чем это отвечает критической точке жидкость — газ.

В обоих последних случаях характерно появление тройной точки T сосуществования: во втором случае — двух металлических и одной диалектрической фазы, в третьем — металла и двух диалектрических (жидкой и газовой) фаз.

В случае ртути сравнительно малая теплота испарения указывает на то, что точка $ЖГ$ расположена близко, при $1000—1500^{\circ}K$ по разным оценкам, тогда как точка $МД$, вероятно, вовсе не доступна в настоящее время экспериментальному исследованию. Из наших соображений следует, что в этом случае, по-видимому, осуществляется как раз последний случай. Физические предсказания сводятся, таким образом: 1) к существованию непроводящей жидкой фазы и 2) к тому, что и при температуре и давлении выше критических должен иметь место фазовый переход со скачкообразным изменением электропроводности объема и других свойств.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ОБ ОДНОМ НОВОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

ДАН СССР, 43, 299, 1944

Задача о движении в ламинарной струе, распространяющейся в затопленном пространстве, была решена Шлихтингом с помощью теории пограничного слоя для случая больших чисел Рейнольдса. В предлагаемой работе показывается, что движение в аксиально симметрической струе, распространяющейся в неограниченном пространстве, может быть определено точно (для произвольных чисел Рейнольдса) путем точного решения уравнений Навье — Стокса.

Рассмотрим струю, бьющую, скажем, из конца тонкой трубки в неограниченном во всех направлениях пространстве. Выбираем сферические координаты r , θ , φ с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке ее выхода, которая выбирается в качестве начала координат. Движение обладает аксиальной симметрией вокруг полярной оси, так что $v_\varphi = 0$, а v_r , v_θ являются функциями только от r и θ . Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат (в частности, через бесконечно удаленную) должен протекать одинаковый полный поток импульса («импульс струи»). Для этого скорость должна падать обратно пропорционально расстоянию от начала координат, так что

$$v_r = \frac{1}{r} F(\theta), \quad v_\theta = \frac{1}{r} f(\theta), \quad (1)$$

где F , f — некоторые функции только от θ . Уравнение непрерывности гласит

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f \operatorname{ctg} \theta. \quad (2)$$

Введем тензор Π_{ik} плотности потока импульса согласно

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

С помощью этого тензора уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса) могут быть написаны в виде

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

В сферических координатах компоненты $\Pi_{r\varphi}$, $\Pi_{\theta\varphi}$ тензора плотности потока импульса в струе тождественно исчезают, как это явствует уже из соображений симметрии. Сделаем предположение, что равны нулю также и компоненты $\Pi_{\theta\theta}$ и $\Pi_{\varphi\varphi}$ (оно оправдывается тем, что в результате мы получим решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям). С помощью известных выражений для компонент тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ в сферических координатах и формул (1), (2) легко убедиться в том, что между компонентами $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{r\theta}$ тензора Π_{ik} в струе имеется соотношение

$$\sin^2 \theta \Pi_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\varphi\varphi} - \Pi_{\theta\theta})].$$

Поэтому из равенства нулю $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{\theta\theta}$ следует, что и $\Pi_{r\theta} = 0$. Таким образом, из всех компонент Π_{ik} отлична от нуля только Π_{rr} , зависящая от r , как $1/r^2$. Легко видеть, что при этом уравнения движения $\sum_k \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$ удовлетворяются автоматически.

Далее пишем:

$$\frac{1}{\rho} (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{r^2} (f^2 + 2\nu f \operatorname{ctg} \theta - 2\nu f') = 0 \quad \left(\nu = \frac{\eta}{\rho} \right)$$

или

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{f} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{1}{f} + \frac{1}{2\nu} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f = -\frac{2\nu \sin \theta}{A - \cos \theta} \quad (3)$$

(где A — постоянная), а из (2) получаем теперь для F

$$F = 2\nu \left\{ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right\}. \quad (4)$$

Распределение давления определяем из уравнения

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2} (f + 2\nu \operatorname{ctg} \theta) = 0$$

и получаем

$$p = - \frac{4\nu^2 (A \cos \theta - 1)}{r^2 (A - \cos \theta)^2}. \quad (5)$$

Постоянную A можно связать с «импульсом струи» P , т. е. с полным потоком импульса в ней. Этот поток равен интегралу по сферической поверхности:

$$P = \oint \Pi_{rr} \cos \theta df = 2\pi \int_0^\pi r^2 \Pi_{rr} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Величина Π_{rr} равна

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{rr} = \frac{4\nu^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^4} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right\},$$

и вычисление интеграла приводит к результату

$$P = 16\pi\nu^2\rho A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right\}. \quad (6)$$

Формулы (1) — (6) решают поставленную задачу.

Линии тока определяются уравнением $\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta}$, интегрирование которого дает

$$\frac{r \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} = \text{const}. \quad (7)$$

Рассмотрим два предельных случая слабой (импульс P мал) и сильной (большие P) струй. При $P \rightarrow 0$ постоянная A стремится к бесконечности; из (6) имеем

$$p = \frac{16\pi\nu^2\rho}{A}. \quad (8)$$

Для скорости получаем в этом случае

$$v_\theta = - \frac{P \sin \theta}{8\pi\nu\rho r},$$

$$v_r = \frac{P \cos \theta}{4\pi\nu\rho r}. \quad (9)$$

При $P \rightarrow \infty$ (сильная струя) A стремится к единице; (6) дает

$$A = 1 + \frac{\alpha^2}{2},$$

где

$$\alpha = \frac{32\pi\nu^2\rho}{3P}. \quad (10)$$

Для больших углов ($\theta \sim 1$) скорость определяется формулами

$$v_\theta = -2\nu \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{r}; \quad v_r = -\frac{2\nu}{r}. \quad (11)$$

Для малых углов ($\theta \sim \alpha$) получается

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{\alpha^2 + \theta^2}; \quad v_r = 8\nu \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \theta^2)^2} \quad (12)$$

в согласии с результатами Шлихтинга (роль числа Рейнольдса играет в этой задаче величина $\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{P}{\rho}}$).

В заключение отметим, что полученное здесь решение является точным для струи, которая рассматривается как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию r от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить с помощью полученного решения полный поток жидкости, проходящий через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля полный поток жидкости получился бы при учете следующих членов разложения по указанному выше отношению.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ДАН СССР, 44, 339, 1944

Несмотря на то, что турбулентное движение рассматривалось в литературе с самых различных точек зрения, в вопросе о сущности турбулентного движения в настоящее время все же недостает полной ясности. Нам кажется, что этот вопрос может получить новое освещение, если внимательно рассмотреть самый процесс возникновения турбулентности.

Как известно, неустойчивость ламинарного движения жидкости определяется следующим образом. На основное движение с распределением скоростей $v_0(x, y, z)$ накладывается малое возмущение $v_1(x, y, z, t)$; подстановка $v = v_0 + v_1$ в уравнения движения вязкой жидкости и пренебрежение членами второго порядка малости приводят к линейному дифференциальному уравнению для возмущения v_1 . Далее ищут v_1 в виде

$$v_1 = A(t) f(x, y, z), \quad (1)$$

где функция времени $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{-i\Omega t}. \quad (2)$$

Задача об определении возможных значений «частот» Ω при данных граничных условиях движения представляет собой Eigenwert-проблему. В результате ее решения должен получиться спектр «собственных частот» Ω (вообще говоря, комплексных). Этот спектр содержит как отдельные изолированные значения («дискретный спектр»), так и частоты, непрерывно заполняющие целые интервалы значений («непрерывный спектр»). Можно предполагать, что частоты непрерывного спектра соответствуют движениям v_1 , не затухающим на бесконечности, а частоты дискретного спектра — движениям, достаточно быстро затухающим

на бесконечности (подобно тому, как это имеет место во многих других Eigenwert-проблемах).

Для вопроса об устойчивости основного движения существенны те из «частот» $\Omega = \omega + i\gamma$ (ω, γ — действительны), у которых мнимая часть положительна ($\gamma > 0$). Наличие таких собственных частот в спектре означает неустойчивость основного движения по отношению к бесконечно малым возмущениям. Такие значения Ω могут иметься только среди частот дискретного спектра. Действительно, на бесконечности основное движение представляет собой плоскопараллельный однородный поток (речь идет об обтекании какого-либо конечного тела). Поскольку плоскопараллельный поток во всяком случае устойчив, то ясно, что всякое возмущение, не исчезающее на бесконечности, должно затухать со временем, т. е. должно соответствовать частотам Ω с $\gamma < 0$. Соответственно этому ниже мы можем рассматривать только «частоты» Ω дискретного спектра.

При достаточно малых скоростях основное движение устойчиво (поскольку во всяком случае устойчива покоящаяся жидкость). Напротив, при достаточно больших числах Рейнольдса ламинарное обтекание тела во всяком случае неустойчиво. Действительно, при больших числах Рейнольдса движение вдали от тела заметно отличается от плоскопараллельного потока лишь в области узкого так называемого следа. Но из работ Рэлея следует, что движение с двухмерным распределением скоростей такого типа неустойчиво; можно думать, что то же самое имеет место и для трехмерного следа.

Если рассматривать значения собственных «частот» Ω как функции от числа Рейнольдса основного движения, то критическое значение $Re_{кр}$ определяется тем, что при $Re = Re_{кр}$ мнимая часть одной из «частот» Ω обращается в нуль: пусть эта частота есть $\Omega_1 = \omega_1 + i\gamma_1$. При $Re > Re_{кр}$ имеем $\gamma_1 > 0$, причем для Re , близких к $Re_{кр}$, γ_1 мало по сравнению с ω_1 . Выражения (1), (2) для соответствующей функции $v_1(x, y, z, t)$ (с $\Omega = \Omega_1$) пригодны, однако, лишь в течение короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима, поскольку множитель $e^{\gamma_1 t}$ быстро растет со временем. В действительности, конечно, модуль амплитуды $|A|$ нестационарного движения не растет неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При Re , близких $Re_{кр}$ (везде идет речь о $Re > Re_{кр}$), этот конечный предел тоже еще мал и для его определения можно поступить следующим образом.

Для самых малых времен, когда еще применимо (2), имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2.$$

Это выражение является по существу лишь первым членом разложения в ряд по степеням A и A^* . При увеличении модуля надо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие члены есть члены третьего порядка. Нам, однако, интересуют не точное значение производной $d|A|^2/dt$, а ее среднее по времени значение, причем усреднение производится по промежуткам времени, большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_1$ периодического множителя $e^{-i\omega_1 t}$ (поскольку $\omega_1 \gg \gamma_1$, этот период мал по сравнению со временем $1/\gamma_1$ заметного изменения модуля $|A|$). Но члены третьего порядка содержат периодический множитель и при усреднении выпадают (строго говоря, они дают при усреднении не нуль, а величины четвертого порядка; эти величины предполагаются включенными в члены четвертого порядка). Среди членов же четвертого порядка есть член, пропорциональный $A^2 A^{*2} = |A|^4$; этот член при усреднении не выпадает. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4. \quad (3)$$

Здесь α — некоторая положительная постоянная (о случае отрицательных α см. ниже). Над $|A|^2$ и $|A|^4$ мы не пишем знаков усреднения, так как усреднение происходит только по промежуткам времени, малым по сравнению с $1/\gamma_1$. По этой же причине при решении этого уравнения надо поступать так, как если бы черты над производной в левой его части не было. Решение уравнения (3) имеет вид

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t},$$

т. е. $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}. \quad (4)$$

Величина γ_1 есть функция числа Рейнольдса, обращающаяся в нуль при $Re = Re_{кр}$. Поэтому при малых $Re - Re_{кр}$ имеем $\gamma_1 = \text{const} \cdot (Re - Re_{кр})$. Подставляя это в (4), видим, что

$$|A|_{\max} \sim \sqrt[3]{Re - Re_{кр}}. \quad (5)$$

Таким образом, неустойчивость ламинарного движения при $Re > Re_{кр}$ приводит к появлению нестационарного периодического движения. При Re , близких к $Re_{кр}$, это движение может быть представлено в виде наложения стационарного движения $v_0(x, y, z)$ и периодического движения $v_1(x, y, z, t)$ с малой,

но конечной амплитудой, растущей с Re пропорционально $\sqrt{Re - Re_{кр}}$. Распределение скоростей в этом движении имеет вид

$$v_1 = f(x, y, z) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \quad (6)$$

где β_1 — некоторая постоянная начальная фаза. При больших разностях $Re - Re_{кр}$ разделение скорости на две части, v_0 и v_1 , уже не имеет смысла. Мы имеем при этом дело просто с некоторым периодическим движением с частотой ω_1 . Если вместо времени пользоваться в качестве независимой переменной фазой $\varphi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, то можно сказать, что функция $v(x, y, z, \varphi_1)$ является периодической функцией от φ_1 с периодом 2π , не являющейся, однако, простой тригонометрической. Ее можно написать в виде ряда Фурье

$$v = \sum_p A_p(x, y, z) e^{-i\varphi_1 p} \quad (7)$$

(суммирование по всем положительным и отрицательным целым числам p). Существенным фактом является то, что уравнением (3) определяется только абсолютная величина временного множителя, но не его фаза. Фаза φ_1 остается, по существу, неопределенной и зависит от случайных начальных условий, в зависимости от которых β_1 может иметь любое значение. Таким образом, рассматриваемое периодическое движение не определяется однозначно заданными стационарными граничными условиями движения: одна величина — фаза — остается произвольной. Можно сказать, что это движение обладает одной степенью свободы, между тем как стационарное движение полностью определяется заданными граничными условиями и не обладает вовсе степенями свободы.

При дальнейшем увеличении Re наступает момент, когда становится неустойчивым и это периодическое движение. Исследование неустойчивости должно было бы производиться аналогично изложенному выше. Роль основного движения играет теперь периодическое движение $v_0(x, y, z, t)$ (с частотой ω_1). Подставляя в уравнения движения $v = v_0 + v_2$ с малым v_2 , получим для v_2 снова линейное уравнение, но коэффициенты этого уравнения являются теперь функциями не только координат, но и времени, причем по времени они являются периодическими функциями с периодом $2\pi/\omega_1$. Решение такого уравнения должно искаться в виде $v_2 = \Pi(x, y, z, t) e^{-i\Omega t}$, где $\Pi(x, y, z, t)$ — периодическая функция времени (с периодом $2\pi/\omega_1$). Неустойчивость наступает опять при появлении «частоты» $\Omega_2 = \omega_2 + i\gamma_2$, где мнимая часть γ_2 положительна, а соответствующая действительная часть ω_2 определяет новую появляющуюся частоту.

Таким образом, в результате возникает некоторое квазипериодическое движение, характеризующееся двумя различными периодами. Две величины (фазы) являются в нем произвольными, т. е. движение обладает двумя степенями свободы.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса появляются последовательно все новые периоды, и движение приобретает характерный для развитой турбулентности запутанный характер. При каждом значении Re движение обладает определенным числом степеней свободы; в пределе, при стремлении Re к бесконечности, число степеней свободы тоже делается сколь угодно большим. При n степенях свободы распределение скоростей описывается выражением

$$v(x, y, z, t) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} A_{p_1, \dots, p_n}(x, y, z) \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i \right\} \quad (8)$$

(суммирование по всем целым числам p_1, p_2, \dots, p_n), где фазы $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$; оно содержит n произвольных начальных фаз β_i . Поскольку частоты ω_i несоизмеримы друг с другом, то ясно, что в течение достаточно долгого времени жидкость пройдет через состояния, сколь угодно близкие к любому наперед заданному состоянию, определяющемуся любым набором одновременных значений фаз φ_i (надо, конечно, иметь в виду, что состояния, фазы которых отличаются только на целое кратное от 2π , физически тождественны). Таким образом, турбулентное движение обладает свойствами некоторой квазипериодичности.

Несколько иной характер имеет установление турбулентного режима в тех исключительных случаях (пуазейлевское и т. п. движения), когда ламинарное течение остается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям при сколь угодно больших числах Рейнольдса. При достаточно малых числах Рейнольдса нестационарное движение здесь, очевидно, невозможно вовсе; устойчивое нестационарное движение становится возможным лишь начиная с некоторого определенного значения Re , играющего здесь роль критического. При очень больших Re стационарное движение может быть, как известно, осуществлено лишь при соблюдении достаточных предосторожностей в смысле устранения возмущений, накладывающихся на движение. Напротив, при Re , близких к $Re_{кр}$, с трудом может быть осуществлено нестационарное движение. Поэтому надо думать, что истинное значение $Re_{кр}$, скажем для пуазейлевского движения, лежит, во всяком случае, ниже принятых в настоящее время значений. Что касается свойств турбулентного движения, возникающего здесь при $Re > Re_{кр}$, то в отличие от предыдущего оно с самого начала должно обладать сразу большим числом степеней свободы.

Наконец, принципиально возможен еще один тип потери устойчивости ламинарным движением, соответствующий случаю, когда в (3) коэффициент при $|A|^4$ оказывается положительным, так что

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 + \alpha|A|^4$$

с положительным α . При Re , несколько меньших $Re_{кр}$, член второго порядка отрицателен (так как $\gamma_1 < 0$ при $Re < Re_{кр}$). Но поскольку член четвертого порядка положителен, то при достаточной величине амплитуды $|A|$ производная $\frac{d}{dt}|A|^2$ сделалась бы положительной. Это значит, что движение становится неустойчивым по отношению к достаточно сильным возмущениям уже при $Re < Re_{кр}$. Таким образом, этот тип неустойчивости характеризуется тем, что при определенном значении $Re_{кр}$ числа Рейнольдса движение становится неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, но уже при $Re < Re_{кр}$ имеет место неустойчивость по отношению к возмущениям конечной величины. В этом случае наряду с указанным критическим числом $Re_{кр}$ должно существовать еще одно «нижнее» критическое число Рейнольдса, определяющее момент появления устойчивых нестационарных решений уравнений движения.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЖЭТФ, 14, 112, 1944

J. Phys. USSR, 8, 1, 1944

Развит метод решения задач о гидродинамическом движении гелия II, рассматриваемого как несжимаемая жидкость.

В предыдущей работе [1] автором было показано, что на основании предложенного им микроскопического механизма явления сверхтекучести может быть построена полная система гидродинамических уравнений, которые описывают движение гелия II макроскопическим образом.

В этой гидродинамике движение гелия II описывается одновременно двумя скоростями — скоростью «сверхтекучего» движения v_s и скоростью «нормального» движения v_n . «Сверхтекучее» движение всегда потенциально, т. е.

$$\operatorname{rot} v_s = 0. \quad (1)$$

Плотность ρ жидкости может быть разделена на «сверхтекучую» и «нормальную» части ρ_s и ρ_n , так что для ρ и для плотности потока массы жидкости \mathbf{j} имеем

$$\rho = \rho_s + \rho_n, \quad \mathbf{j} = \rho_s v_s + \rho_n v_n. \quad (2)$$

Эти величины должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

Закон сохранения импульса выражается уравнением

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (4)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса; в общем случае, когда для движения может играть роль вязкость «нормальной» жидкости, этот тензор равен

$$\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho_n v_i^{(n)} v_k^{(n)} + \rho_s v_i^{(s)} v_k^{(s)} - \eta \left(\frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l^{(n)}}{\partial x_l} \right) - \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l^{(n)}}{\partial x_l} \quad (5)$$

(по дважды повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование), η и ζ — два коэффициента вязкости нормального течения гелия II. Далее, при пренебрежении эффектами вязкости имеет место сохранение энтропии, выражающееся уравнением

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} + \text{div}(\rho S \mathbf{v}_n) = 0, \quad (6)$$

где S — энтропия, отнесенная к единице массы жидкости, $\rho S \mathbf{v}_n$ — плотность «потока энтропии», переносимой нормальной частью жидкости. При учете вязкости в правой части этого уравнения должны были бы быть написаны члены, выражающие увеличение энтропии, связанное с необратимым вязким трением. Эти члены, однако, оказываются здесь величинами высшего порядка малости и потому могут быть опущены даже при условии сохранения вязких членов в уравнениях (4), (5). Наконец, последнее уравнение из полной системы гидродинамических уравнений движения имеет вид, как показано в [1],

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = - \text{grad} \left\{ \Phi + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2\rho} \right\}. \quad (7)$$

Граничные условия к этим уравнениям заключаются в следующем. На поверхности (неподвижной) твердого тела должна, очевидно, обращаться в нуль нормальная компонента потока вещества \mathbf{j} . Далее, надо помнить, что «нормальная часть» жидкости представляет собой в действительности совокупность тепловых возмущений в жидкости — фононов и ротоннов (при достаточно низких температурах можно говорить о ней как о «фононном и ротонном газе»). При движении вдоль твердой поверхности фононы и ротоны «зацепляются» о стенку; происходит прилипание нормальной части жидкости, подобно обычному прилипанию вязких жидкостей. Соответственно этому тангенциальная составляющая скорости \mathbf{v}_n должна обращаться в нуль на твердой стенке. Что же касается нормальной ее составляющей, то надо иметь в виду, что фононы и ротоны могут «поглощаться» твердым телом, что соответствует просто наличию теплопередачи от жидкости к твердому телу. Плотность потока тепла есть $\rho S T \mathbf{v}_n$ соответ-

ственно тому, что единица массы жидкости переносит со скоростью v_n количество тепла ST (см. [1]). Нормальная к поверхности тела компонента этого потока отнюдь не обязана исчезать; граничные условия требуют лишь ее непрерывности на поверхности. Кроме того, должна быть непрерывна сама температура. Таким образом, граничные условия на поверхности твердого тела гласят (выбираем систему координат с осью x по нормали к поверхности в данной ее точке):

$$\rho_s v_{sx} + \rho_n v_{nx} = 0, \quad v_{ny} = v_{nz} = 0, \quad \rho ST v_{nx} = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{ТВ}}, \quad (8)$$

$$T = T_{\text{ТВ}},$$

где κ — коэффициент теплопроводности твердого тела.

Фактически, однако, вплоть до самых низких температур теплопередача в твердом теле настолько медленна по сравнению с теплопередачей в гелии II, что эффекты, связанные с теплопроводностью твердого тела, оказываются очень малыми. Тогда мы можем положить κ просто равным нулю, и граничные условия приобретают вид

$$v_{sx} = 0, \quad v_n = 0, \quad (9)$$

т. е. для v_s и v_n имеют место обычные граничные условия соответственно идеальной и вязкой жидкостей.

Рассмотрим движения гелия II, при которых жидкость можно считать несжимаемой (как это обычно и имеет место). Уравнения (3) — (7) при этом значительно упрощаются. Считая ρ_s , ρ_n , S постоянными, получаем, прежде всего, из (3) и (6)

$$\operatorname{div} v_s = 0, \quad \operatorname{div} v_n = 0. \quad (10)$$

Уравнение (4) дает теперь

$$\rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial t} + \rho_s (v_s \nabla) v_s + \rho_n (v_n \nabla) v_n = -\nabla p + \eta \Delta v_n, \quad (11)$$

а уравнение (7) сохраняет прежний вид.

Поскольку сверхтекучее движение потенциально, то можно ввести потенциал φ_s его скорости согласно

$$v_s = \operatorname{grad} \varphi_s.$$

В силу $\operatorname{div} v_s = 0$ φ_s должно удовлетворять обычному уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_s = 0. \quad (12)$$

Вводя потенциал φ_s в уравнение (11) и написав в нем также

$$(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla \frac{v_s^2}{2},$$

получим

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s \text{grad} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \rho_s \text{grad} \frac{v_s^2}{2} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}_n.$$

Введем в качестве вспомогательных величин «давления сверхтекучего и нормального течений» p_s и p_n согласно

$$p = p_0 + p_s + p_n \quad (13)$$

(p_0 — давление на бесконечности), причем p_s определяется обычной для идеальных жидкостей формулой

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}. \quad (14)$$

Тогда уравнение движения для \mathbf{v}_n приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n} \nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n} \Delta \mathbf{v}_n. \quad (15)$$

Это есть уравнение вида обычного уравнения Навье — Стокса для жидкости с плотностью ρ_n и вязкостью η (и соответственно кинематической вязкостью η/ρ_n).

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II сводится к решению двух задач обычной гидродинамики — одной для идеальной и другой для вязкой жидкости. Именно, распределение скорости \mathbf{v}_s определяется уравнением Лапласа (12) с граничным условием для $\partial \varphi_s / \partial n$, как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Далее, распределение скорости \mathbf{v}_n определяется решением уравнения Навье — Стокса (15) с граничным условием для всей скорости \mathbf{v}_n , опять таки как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем согласно (13).

Наконец, с помощью уравнения (7) можно определить распределение температуры. Написав в нем $\mathbf{v}_s = \nabla \varphi_s$ и интегрируя, получим

$$\Phi + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2\rho} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \text{const.}$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости незначительны, и потому можно разложить термодинамиче-

ский потенциал Φ по степеням $T - T_0$, $p - p_0$. С точностью до членов первого порядка имеем

$$\Phi - \Phi_0 = -S(T - T_0) + \frac{p - p_0}{\rho}.$$

Подставляя это в написанное уравнение, получим

$$-S(T - T_0) + \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (v_n - v_s)^2}{2\rho} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = 0.$$

Вводя здесь p_n и p_s , получим окончательно

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho S} \left\{ \frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(v_n - v_s)^2}{2} \right\}. \quad (16)$$

Подчеркнем, что в уравнение (15) входит в качестве кинематической вязкости величина η/ρ_n . Кеезом и Мак Вуд [2] измеряли вязкость η гелия II по трению, испытываемому круглым диском, совершающим крутильные колебания. При этом они пользовались для вычисления формулой, определяющей момент сил трения, действующий на диск, подставляя в нее для плотности истинную плотность ρ гелия II. Как видно из изложенного, в действительности надо подставлять в эту формулу для плотности значение ρ_n . Пользуясь значениями ρ_n , полученными в [1], и производя соответствующий пересчет данных Кеезома и Мак Вуда, получим для вязкости η в температурном интервале от 1,5° K и до точки перехода примерно постоянное значение, равное около $2 \cdot 10^{-5}$ пуаз. Для более низких температур непосредственный пересчет невозможен; дело в том, что характерная для вязкости «глубина проникновения» $\delta \sim (\eta/\rho_n \omega)^{1/2}$ (ω — частота колебаний) оказывается здесь благодаря малости ρ_n того же порядка величины, что и размеры просветов между диском и стенками прибора, в связи с чем нельзя уже пользоваться формулой, выведенной для диска, вращающегося в неограниченной массе жидкости.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941 (Собр. трудов, № 44).
[2] W. H. Keeseom, G. M. Wood. Physica, 5, 737, 1938.

ЖЭТФ, 14, 240, 1944

Acta phys.-chim., 19, 77, 1944

При построении физической теории медленного горения обычно исходят из представления, что передача тепла от нагретых (в результате реакции) продуктов горения к еще несгоревшей газовой смеси происходит посредством простой теплопроводности. Толщина «слоя горения», отделяющего область исходной смеси от продуктов горения, в этих условиях определяется целиком теплопроводностью газа и чисто химическими свойствами данной реакции. Существенно, что она не будет при этом зависеть от характеристических размеров данной задачи (размеров фигурирующих в условиях задачи тел, соприкасающихся с газом, например, при горении газа в трубе — от диаметра трубы).

Будем считать, что характеристические размеры задачи велики по сравнению с толщиной слоя горения. Тогда при определении гидродинамического движения газа, сопровождающего процесс горения, можно рассматривать весь переходный слой просто как некоторую поверхность, отделяющую область сгоревшего и несгоревшего газов. Что касается скорости распространения горения, то при рассматриваемом «теплопроводностном» режиме медленного горения она, во всяком случае, мала по сравнению со скоростью звука.

Для того чтобы описанный режим горения действительно мог осуществляться, необходимо, чтобы он был устойчив. Выяснению этого вопроса посвящено приводимое ниже вычисление.

Выберем некоторый малый участок слоя горения (рассматриваемого как некоторая поверхность разрыва), который можно считать плоским, и рассмотрим движение газа вблизи него. Вводим систему координат, в которой этот участок покоится. Плоскость этого участка выбираем в качестве плоскости yz . Невозму-

щенное движение газа стационарно, причем скорость его направлена нормально к поверхности разрыва (положительное направление оси x выберем по направлению скорости газа). Значение невозмущенной скорости газа впереди разрыва (несгоревшего; $x < 0$) обозначим посредством v_1 , а газа позади него (сгоревшего; $x > 0$) — посредством v_2 . Поскольку v_1 и v_2 малы по сравнению со скоростями звука, газ можно считать несжимаемым. Наложим теперь на невозмущенное движение с постоянными скоростями v_1 и v_2 малое возмущение v' , периодическое по времени и по координате y . Для определения этого возмущения исходим из уравнения непрерывности

$$\frac{v v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

и уравнений Эйлера

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + v \frac{\partial v'_x}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'_y}{\partial t} + v \frac{\partial v'_y}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2)$$

(под v и p здесь подразумеваются v_1, p_1 или v_2, p_2 , смотря по тому, для какого газа пишется уравнение). Продифференцировав первое из этих уравнений по x , а второе по y и вычтя их одно из другого, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия, которые должны соблюдаться на поверхности разрыва, заключаются в следующем. Прежде всего, должна быть непрерывна тангенциальная скорость. Пусть $\zeta(y, t)$ есть малое смещение (вдоль оси x) точек поверхности разрыва при возмущении; тогда $d\zeta/dy$ есть угол ее наклона к оси y . Касательная к поверхности разрыва компонента скорости газа состоит из двух частей — из проекции на эту поверхность скорости v' , равной в первом приближении просто v'_y , из проекции невозмущенной скорости $v_x = v$, равной в том же приближении $v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$. Таким образом, должно быть выполнено условие

$$v'_{1y} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v'_{2y} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4)$$

(при $x = 0$).

Далее, несжимаемость газа означает, в частности, что те изменения давления, которые возникают при движении, настолько малы, что можно пренебречь вызываемым ими изменением скорости горения. Другими словами, скорость распространения разры-

ва не должна изменяться при возмущении. В рассматриваемой системе координат это означает, что изменение относительной скорости газа и поверхности разрыва должно быть равным нулю. Отсюда имеем $v'_x - d\xi/dt = 0$ и приходим к условию (при $x = 0$)

$$v'_{1x} = v'_{2x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (5)$$

Наконец, в этом же приближении должны быть равными давления с обеих сторон поверхности разрыва, откуда получаем последнее условие при $x = 0$:

$$p'_1 = p'_2. \quad (6)$$

Ищем решение уравнений (1) — (3), в которых p' , v'_x , v'_y пропорциональны множителю $e^{iky+\Omega t}$. Из (3) находим, что в области газа 1 ($x < 0$)

$$p'_1 = \text{const} \cdot e^{iky+kx+\Omega t}.$$

Написав] в таком же виде v'_x и v'_y и подбирая коэффициенты так, чтобы удовлетворить уравнениям (1) — (3), получаем

$$v'_{1x} = A e^{iky+kx+\Omega t}, \quad v'_{1y} = i A e^{iky+kx+\Omega t}, \quad (7)$$

$$p'_1 = -A \rho_1 \left(\frac{\Omega}{k} + v_1 \right) e^{iky+kx+\Omega t}.$$

В области газа 2 ($x > 0$) наряду с решением вида $\text{const} \cdot e^{iky+kx+\Omega t}$ должно быть учтено еще и другое частное решение уравнений (1) — (3), в котором зависимость величин от y и t определяется тем же множителем $e^{iky+\Omega t}$. Это решение получится, если положить $p' = 0$; тогда в уравнениях (2) правые части исчезают, а остающиеся однородные уравнения имеют решение, в котором v'_x и v'_y пропорциональны $e^{iky+\Omega t - (\Omega/v_2)x}$. Причина, по которой это решение должно быть учтено только для газа 2, заключается в следующем. Нашей конечной целью является определение возможности существования таких значений Ω , у которых действительная часть положительна; наличие таких значений указывало бы на неустойчивость основного движения. Но для таких Ω множитель $e^{-(\Omega/v_2)x}$ неограниченно возрастал бы с $|x|$ при $x < 0$, и потому в области газа 1 такое решение должно быть отброшено. Подбирая опять соответствующим образом постоянные коэффициенты, ищем решение при $x > 0$ в виде

$$v'_{2x} = B e^{iky-kx+\Omega t} + C e^{iky+\Omega t - (\Omega/v_2)x},$$

$$\begin{aligned} v'_{2y} &= -iBe^{iky-kx+\Omega t} - \frac{i\Omega}{kv_2} Ce^{iky+\Omega t - (\Omega/v_2)x}, \\ p'_2 &= -B\rho_2 \left(v_2 - \frac{\Omega}{k} \right) e^{iky-lx+\Omega t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Положив также

$$\zeta = De^{iky+\Omega t} \quad (9)$$

и подставив все полученные выражения в условия (4) — (6), получим четыре однородных уравнения для коэффициентов A , B , C , D . Простое вычисление приводит к следующему условию совместности этих уравнений:

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega kv_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0 \quad (10)$$

(при вычислении следует помнить, что потоки вещества $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$).

Если $v_1 > v_2$, то (10) имеет либо два отрицательных действительных корня, либо два комплексных сопряженных корня с отрицательными действительными частями. Если же $v_1 < v_2$, то оба корня действительны и различны по знаку. Таким образом, при $v_1 > v_2$ всегда $\text{Re} \{\Omega\} > 0$ и движение устойчиво. Если же $v_1 < v_2$, то имеются такие Ω , у которых $\text{Re} \{\Omega\} > 0$, т. е. основное движение неустойчиво. Поскольку $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, то из $v_1 < v_2$ следует $\rho_1 > \rho_2$. Мы приходим, следовательно, к результату, что рассматриваемая поверхность разрыва неустойчива, если

$$\rho_1 > \rho_2. \quad (11)$$

Но плотность продукта горения ρ_2 практически всегда меньше плотности исходной газовой смеси ρ_1 , что связано со значительным нагреванием при горении. Поэтому это условие практически всегда выполняется и рассматриваемый режим горения неустойчив.

Поскольку мы при вычислениях пренебрегали вязкостью газа, полученный результат применим в тех случаях, когда числа Рейнольдса av_1/ν_1 и av_2/ν_2 (a — размеры системы, определяющие наименьшие значения волнового вектора k ; ν_1 , ν_2 — кинематические вязкости первоначального и сгоревшего газов) велики по сравнению с единицей. Другими словами, стационарный режим медленного горения может существовать только в условиях движения, в котором вязкость, а, следовательно, у газов и теплопроводность играют существенную роль. При этом, однако, нельзя будет, вообще говоря, считать «слой горения» тонким. Мы приходим, таким образом, к результатам, находящимся в противоречии с обычной точкой зрения.

Неустойчивость рассмотренной «поверхности разрыва» должна приводить к возникновению турбулентности, так что вместо узкого переходного слоя возникает размытая область горения, в которой движение газа турбулентно. Турбулентность приводит, как всегда, к сильному конвекционному перемешиванию газа. Такое перемешивание ведет к значительно более быстрой передаче тепла, чем посредством истинной теплопроводности. Таким образом, распространение горения будет определяться не теплопроводностью газа, как это предполагалось выше, а турбулентным перемешиванием; можно говорить о «конвективном» режиме горения.

О скорости распространения горения (и ширине области горения) теперь уже нельзя утверждать, что они не зависят от характеристических размеров задачи; турбулентное движение всегда существенным образом зависит от этих размеров.

Рассмотрим горение газа, находящегося в длинной трубе. Сгоревший газ отделен от несгоревшего турбулентной «областью горения», передвигающейся с течением времени вперед по трубе. Пусть l — порядок величины толщины области горения, а u — скорость распространения горения. Зависимость l и u от диаметра трубы d легко определить непосредственно из соображений размерности. Поскольку теплопроводность и вязкость при турбулентном движении несущественны (предполагается, что «числа Рейнольдса» велики), коэффициенты вязкости и температуропроводности не могут входить в l и u . Далее, чисто химическая кинетика реакции характеризуется некоторой величиной размерности времени, определяющей скорость реакции. Параметр размерности длины есть только один — диаметр d трубы. Поэтому из соображений размерности очевидно, что должно быть

$$l \sim d, \quad (12)$$

т. е. ширина области горения пропорциональна диаметру трубы. Для скорости же распространения горения должно иметь место соотношение

$$u = \frac{d}{\tau}, \quad (13)$$

где τ — некоторое время, характерное для данной реакции. Таким образом, скорость распространения горения по трубе пропорциональна диаметру последней.

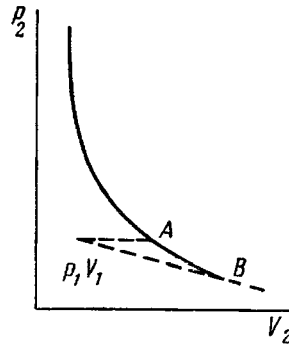
Необходимо отметить следующее. Поскольку u зависит теперь от диаметра трубы, являющегося величиной произвольной, то нельзя утверждать, что скорость распространения горения непременно мала по сравнению со скоростью звука c . Надо, од-

нако, иметь в виду, что полученные соотношения (12) и (13) справедливы, только если $u \ll c$. В противном случае газ нельзя считать несжимаемым, и нет также оснований считать, что l и u не могут зависеть от сжимаемости газа (как это молчаливо подразумевается выше). Кроме того, эти результаты справедливы только для не слишком узких труб. Именно, необходимо, чтобы «число Рейнольдса» ud/ν было достаточно велико.

Для дальнейшего выяснения свойств медленного горения удобно исходить из графического представления с помощью адиабаты Гюгонно. На рисунке изображена адиабата Гюгонно для некоторого процесса горения (p_2, V_2 — давление и удельный объем продуктов горения, p_1, V_1 — их значения для исходной газовой смеси). Нас будет интересовать здесь только участок AB адиабаты, точки которого как раз соответствуют режиму медленного горения (прямая, проведенная из точки $p_1 V_1$ в A , параллельна оси абсцисс, а в точку B — касательна к адиабате). С помощью известных свойств адиабаты Гюгонно легко убедиться в том, что на отрезке AB скорости v_1 и v_2 распространения «слоя горения» (рассматриваемого как некоторая поверхность разрыва) относительно соответственно несгоревшего и сгоревшего газов меньше соответствующих скоростей звука c_1 и c_2 ($v_1 < c_1, v_2 < c_2$).

Скорость горения можно характеризовать «потоком вещества» $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ через поверхность разрыва, т. е. отнесенным на единицу площади этой поверхности количеством сгорающего в 1 сек вещества. В точке A поток j и скорости v_1, v_2 равны нулю; по направлению от точки A к точке B j возрастает. Поток вещества j зависит для данной реакции также и от диаметра трубы (будем говорить для определенности о горении в трубе). В зависимости от величины диаметра горение будет соответствовать различным точкам участка AB адиабаты. При увеличении диаметра трубы j растет, чему соответствует перемещение по адиабате по направлению от A к B .

Можно показать, что режим горения не может при этом соответствовать точкам, лежащим на продолжении адиабаты под точкой B . Поверхность разрыва может обладать своеобразной неустойчивостью, проявляющейся в том, что от нее могут самопроизвольно излучаться звуковые волны; ясно, что такой разрыв вовсе не может реально осуществляться. «Число» различных звуковых волн, которые могли бы излучаться от разрыва, огра-



ничивается, прежде всего, по чисто геометрическим причинам взаимной величиной скоростей v_1 , v_2 и скоростей звука c_1 , c_2 . Это соотношение должно быть таким, чтобы разрыв при своем распространении не мог «догнать» излученную волну. При $v_1 < c_1$, $v_2 < c_2$ (что соответствует участку AB адиабаты) могли бы излучиться две волны: одна от разрыва в сторону газа 1, а другая — в сторону газа 2. При $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$ (что соответствует части адиабаты под точкой B) возможны уже три волны: одна, распространяющаяся от разрыва в сторону газа 1, и две — в газе 2, распространяющиеся одна от, а другая к поверхности разрыва. Однако для того, чтобы излучение могло действительно иметь место, необходимо также, помимо чисто геометрической его возможности, чтобы оно удовлетворяло соответствующим граничным условиям на самой поверхности разрыва. Подсчет этих условий показывает, что двух волн еще недостаточно для этого, с тремя же волнами эти граничные условия можно удовлетворить. Таким образом, разрывы, соответствующие точкам, лежащим ниже точки B , оказываются неустойчивыми, так что этот участок адиабаты вообще не соответствует каким бы то ни было реально существующим разрывам.

Точка B соответствует некоторому «предельному» режиму медленного горения. При горении же газа в трубе большего диаметра, чем соответствующий точке B , единственным устойчивым режимом является детонация.

С помощью обычного уравнения адиабаты Гюгонио и используя тот факт, что точка B есть точка касания адиабаты, проведенной из точки r_1 , V_1 прямой, легко получить выражение для предельной скорости распространения «медленного горения». Вычисление, которое мы здесь не приводим, дает

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{2} [(\gamma_2 + 1)\gamma + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1] - \sqrt{\frac{\gamma_2 + 1}{2} [(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1]} \quad (14)$$

(q — отнесенная к единице массы теплота реакции, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, $\gamma = c_p/c_v$, T — температура). Если теплота реакции велика ($q \gg c_{v1}T_1$), как это обычно имеет место, то эта формула упрощается и дает

$$v_1 = \frac{\gamma_2(\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}{\sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}} \quad (15)$$

Давление и температура сгоревшего газа оказываются при этом равными

$$p_2 = p_1 \frac{1}{\gamma_2 + 1}, \quad T_2 = \frac{2q}{\gamma_2 (\gamma_2 + 1) c_{v_2}}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь вопрос о горении жидкости. Речь идет при этом о реакции, протекающей без участия посторонних веществ, скажем кислорода воздуха, т. е. о реакции самопроизвольного разложения. Горение происходит в примыкающем к поверхности жидкости слое ее насыщенного пара. Если рассматривать весь слой горения как поверхность разрыва, отделяющую несгоревшую жидкость (плотности ρ_1) от ее газообразных продуктов горения (плотности ρ_2), то этой поверхности надо приписать поверхностное натяжение с коэффициентом α , равным коэффициенту поверхностного натяжения между жидкостью и ее насыщенным паром. При исследовании устойчивости такого режима горения необходимо учесть также факт наличия поля тяжести.

Все вычисления здесь в точности аналогичны произведенным выше для горения газовой смеси, с той лишь разницей, что вместо условия (6) равенства давлений будем иметь теперь условие

$$p'_2 - p'_1 = -g(\rho_2 - \rho_1)\xi - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Подставляя в условия (4), (5) и (17) выражения (7) — (9), снова получим четыре уравнения для коэффициентов A, B, C, D . В качестве условия совместности этих уравнений получается теперь вместо (10) следующее квадратичное уравнение:

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega kv_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) - kg(v_1 - v_2) + \alpha k^3 \frac{v_1 v_2}{j} = 0. \quad (18)$$

Для устойчивости движения необходимо, чтобы $\text{Re} \{\Omega\}$ было меньше нуля, т. е. уравнение имело бы два отрицательных действительных корня или же два комплексно сопряженных корня с отрицательной действительной частью. Для этого свободный член в уравнении (18) должен быть положительным:

$$\alpha k^3 \frac{v_1 v_2}{j} - kv_1 v_2 (v_2 - v_1) + g(v_2 - v_1) > 0. \quad (19)$$

В свою очередь это неравенство имеет место при всех положительных k , если

$$v_1^2 v_2^2 (v_1 - v_2)^2 + 4\alpha \frac{v_1 v_2}{j} g (v_1 - v_2) < 0.$$

Поскольку $v_2 > v_1$ (это следует из $j \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ вследствие того, что $\rho_1 > \rho_2$ — плотность жидкости больше плотности пара), то полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{4\alpha g}{j} - v_1 v_2 (v_2 - v_1) > 0.$$

Наконец, выражая v_1 и v_2 через поток вещества j (количество сгорающего в единицу времени вещества), получим в качестве условия устойчивости рассматриваемого режима горения жидкости следующее неравенство:

$$j^4 < \frac{4\alpha g \rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} \approx 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2. \quad (20)$$

В таком виде это неравенство относится к бесконечной поверхности жидкости, на которой возможны колебания всех длин волн. Если жидкость находится в небольшом сосуде, то для устойчивости медленного горения условие (20) не является необходимым. Достаточно, если выражение (19) не принимает отрицательных значений при k , больших некоторого определенного значения порядка $1/a$, где a — размеры сосуда. Соответственно этому, если условие (20) не выполнено, для устойчивости необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство $a < a_0$, где

$$a_0 \sim \frac{\alpha}{j(v_2 - v_1)} \sim \frac{\alpha}{jv_2} = \frac{\alpha \rho_2}{j^2}. \quad (21)$$

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

Совместно с Я. А. СМОРОДИНСКИМ

ЖЭТФ, 14, 269, 1944

J. Phys. USSR, 8, 154, 1944

Выведена формула для рассеяния протонов протонами без предположения о конкретной форме кривой потенциальной энергии между двумя протонами. На основании анализа экспериментальных данных показано отсутствие у системы протон — протон стабильного уровня. Показано, что вывод о примерном равенстве сил между протоном и протоном, с одной стороны, и протоном и нейтронами — с другой, можно сделать без помощи вычислений с прямоугольной ямой.

1. Введение

Для изучения ядерных сил большую роль играет исследование рассеяния элементарных частиц — протонов и нейтронов. Этому вопросу посвящено значительное число экспериментальных и теоретических работ. Большая их часть основывается на заранее делаемых предположениях о функции $U(r)$ — потенциальной энергии между двумя частицами, обычно зависящей от двух параметров (прямоугольная яма или кривая ошибок Гаусса). Однако такого рода предположения, конечно, ни на чем не основаны, и остается совершенно неясным, что же в действительности не является произвольным допущением, а следует из экспериментальных данных.

Бете и Пайерлс [1] обратили внимание, что в случае рассеяния протонов нейтронами можно воспользоваться тем, что энергии частиц, с которыми имеют дело в экспериментах, малы по сравнению с энергиями взаимодействия, а соответствующие длины волн значительно больше радиуса действия ядерных сил. Поэтому точное знание вида функции $U(r)$ не существенно, и

влияние ядерных сил в таком случае можно учесть изменением граничных условий, налагаемых на волновую функцию в начале координат. При этом в эффективное сечение входит некоторая постоянная, которая должна быть определена из эксперимента.

Рассеяние протонов протонами подвергалось значительно более тщательному исследованию, чем рассеяние протонов нейтронами. В то же время существующая теория такого рассеяния не является вполне удовлетворительной.

Теоретическому исследованию этой задачи посвящен ряд работ Брейта и его сотрудников (см. [2])¹. Однако во всех этих работах вычисления основаны на предположениях о конкретном виде взаимодействия. На применении прямоугольной ямы основан и фундаментальный вывод о приблизительном равенстве специфических сил, действующих между протоном и нейтроном, с одной стороны, и протоном и протоном — с другой.

В действительности можно показать, что основные результаты указанных работ могут быть получены без этих ненужных предположений, основываясь на идеях, аналогичных развитым в упомянутой работе Бете и Пайерлса. При этом оказывается, что все экспериментальные данные могут быть описаны формулой, зависящей от двух параметров. Отсюда, в частности, следует полная безнадежность попыток определения формы кривой $U(r)$, как это делает Брейт. С другой стороны, этого оказывается вполне достаточно для выяснения ряда вопросов, в частности вопроса о сравнении сил протон — протон и протон — нейтрон.

Аналогичные исследования могут быть проведены и для рассеяния дейтронов и α -частиц. Но в этих случаях недостаток экспериментальных данных, а также участие в рассеянии высших моментов делают пока результаты этих исследований мало плодотворными.

2. Метод

Волновая функция протона в кулоновом поле удовлетворяет уравнению (в системе центра инерции)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{M} \Delta + \frac{Ze^2}{r}\right) \psi = \frac{E}{2} \psi \quad (2.1)$$

(Z — заряд ядра, в случае рассеяния протоном $Z=1$; M — масса протона; E — энергия рассеиваемых протонов в лабораторной системе координат).

¹ Обзор теоретических и экспериментальных работ по рассеянию протонов протонами дан в докладе Брейта [3]. Там же имеется и библиография по этому вопросу.

Если никаких других сил, кроме кулоновских, нет и уравнение (2.1) справедливо во всем пространстве, то функция ψ должна удовлетворить граничному условию

$$\psi(0) \neq \infty. \quad (2.2)$$

Если же вблизи начала координат существует какое-то поле сил, отличных от кулоновских, то волновая функция в этой области оказывается отличной от (2.1). Однако, так как мы ничего не можем сказать о потенциале этих сил, уравнение для правильной функции даже не может быть написано.

Если энергия рассеиваемой частицы значительно меньше энергии взаимодействия, можно считать, что решение этого волнового уравнения будет лишь в слабой степени зависеть от энергии протонов. Тогда вместо решения уравнения в области вблизи начала координат мы можем считать, что новая волновая функция также удовлетворяет (2.1), а присутствие ядерных сил сказывается в том, что вместо условия (2.2) волновая функция должна удовлетворять некоторому другому условию, а именно: граничное условие в начале координат мы запишем в форме Бете и Пайерлса

$$\left(\frac{f'}{f}\right)_{r=0} = c, \quad (2.3)$$

где $f = r\psi$.

Рассмотрим теперь задачу о рассеянии протонов протонами, ограничиваясь пока только случаем $l = 0$ (S -рассеяние). Случай $l > 0$ будет разобран ниже (раздел 5).

Вводя вместо функции ψ функцию $f = r\psi$, перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\frac{\hbar^2}{M} \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{E}{2} - \frac{Ze^2}{r}\right) f = 0. \quad (2.4)$$

Введем обозначения

$$\rho = kr, \quad k = \frac{Mv}{2\hbar}, \quad \eta = \frac{1}{ka}, \quad (2.5)$$

$$a = \frac{2\hbar^2}{ZMe^2} = \frac{5,47 \cdot 10^{-13}}{Z} \text{ см.}$$

В этих обозначениях (2.1) переходит в

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho}\right) f = 0. \quad (2.6)$$

Уравнению (2.6) удовлетворяют функции Уиттекера $W_{\eta, \nu}$, $(2i\rho)$ и $W_{-\eta, \nu}$, $(-2i\rho)$ [4].

При помощи линейной комбинации этих функций можно получить два решения, которые на больших расстояниях имеют вид [5]

$$F \sim \sin(\rho - \eta \lg 2\rho + \sigma_0), \quad (2.7)$$

$$G \sim \cos(\rho - \eta \lg 2\rho + \sigma_0), \quad (2.8)$$

где

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\eta). \quad (2.9)$$

На малых расстояниях эти функции могут быть разложены в ряд:

$$F = C e^{-i\rho} \left\{ 1 + \frac{1-i\eta}{1! 2!} 2i\rho + \frac{(1-i\eta)(2-i\eta)}{1! 2! 3!} (2i\rho)^2 + \dots \right\}, \quad (2.10)$$

$$G = \frac{1}{C} \cos \rho + \frac{2\eta}{C} \left[-1 + \ln 2\rho + 2\gamma + \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \right] \frac{F}{C} - \\ - \frac{2\eta}{C} \operatorname{Re} e^{-i\rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s-i\eta) (2i\rho)^s}{(1+s)! s! \Gamma(1-i\eta)} \sum_{t=1}^s \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-i\eta} \right). \quad (2.11)$$

Здесь

$$C^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad \gamma = 0,577\dots$$

(Во избежание недоразумений отметим, что в выражение для F мнимость входит только кажущимся образом. Если заменить экспоненту ее разложением и перемножить оба ряда, то произведение окажется вещественным.)

Функция F , как это видно из (2.6), обращается в начале координат в нуль. Функция же G из-за наличия члена с $\lg \rho$ имеет в нуле особенность.

В случае рассеяния в чисто кулоновом поле граничным условиям удовлетворяет только функция F . В нашем же случае, после того как граничные условия изменились, поведение функций в нуле становится несущественным и условиям задачи удовлетворяет уже линейная комбинация обоих решений. Обозначая постоянную, входящую в эту новую функцию, через $\operatorname{ctg} K_0$, получаем для решения

$$f = \operatorname{ctg} K_0 F + G. \quad (2.12)$$

Такой выбор сделан для того, чтобы асимптотическое выражение волновой функции отличалось от волновой функции в отсутствие ядерных сил только постоянной фазой K_0 , как это обычно делается в теории рассеяния [6]

$$f \sim \sin(\rho - \eta \ln 2\rho + \sigma_0 + K_0). \quad (2.13)$$

В формулах (2.12) и (2.13) мы опускаем постоянные множители (разные в обоих случаях), которые определяются нормировкой волновой функции и не существенны для наших целей.

Для того чтобы найти связь между K_0 и постоянной c , поставим в граничное условие (2.3) выражение для функции (2.12). При этом будем считать это условие отнесенным не к нулю, а к точке, сколь угодно близкой к нему, но все же находящейся на некотором заданном конечном расстоянии от начала координат (это приходится делать из-за того, что функция расходится в нуле)².

Ограничиваясь первыми членами разложений, получим

$$\frac{f'}{f} = k \left[C^2 \operatorname{ctg} K_0 + 2\eta \left(2\gamma + \ln 2\rho + \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \right) \right] = c. \quad (2.14)$$

Напомним, что слева производная берется по r , а не по переменной $\rho = kr$; отсюда и множитель k . Так как произведение $k\eta = 1/a$ не зависит от энергии, то выражение в скобках содержит ряд постоянных членов. Мы можем, изменив обозначения, включить их в постоянную c . То же самое можно сделать и с членом $\ln 2r/a$ ³. Получающаяся в этом случае постоянную обозначим через α_{pp} , после чего можем во всех остальных членах уже считать $r = 0$. Путем простых преобразований мы придем тогда к окончательной формуле, связывающей фазу K_0 с постоянной α_{pp} :

$$\operatorname{ctg} K_0 = \frac{1}{\pi} (e^{2\pi\eta} - 1) \left[\ln \eta - \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} + \frac{a}{2} \alpha_{pp} \right]. \quad (2.15)$$

3. Анализ экспериментальных данных

Наиболее тщательные исследования углового распределения рассеянных протонов были проведены Хербом и др. [7] для различных энергий протонов в интервале от 860 до 2392 кэв, а также Гейденбургом, Хафстадом и Тювом [8] для протонов с энергиями 670, 776 и 867 кэв.

На основании этих данных Брейтом, Такстоном и Эйзенбудом [9] были вычислены соответствующие фазы. Кроме того, Раганом, Канне и Ташеком [10] были изучены протоны с энергиями в 250 и 300 кэв. Вычисление фаз для этого случая проведено нами.

² При рассеянии протонов нейтронами два соответствующих решения были $\sin kr$ и $\cos kr$. Оба они регулярны в нуле, а потому в этом случае такая операция излишня, и можно было бы прямо относить граничное условие к нулю.

³ Получаемся из $\ln 2\rho = -\ln \eta + \ln 2r/a$.

Одним из основных результатов этого анализа было то, что в рассеянии протонов протонами при всех исследованных энергиях участвует только волна с $l = 0$ ⁴ (речь, конечно, идет только о дополнительном рассеянии, происходящем от наличия ядерных сил, рассеяние же в кулоновом поле содержит волны со всеми значениями углового момента). Что же касается волн с большими значениями углового момента, то соответствующие фазы настолько малы, что определению их мешает неточность самих экспериментов, а потому ими можно пренебречь.

В том случае, когда мы пренебрегаем всеми фазами, кроме K_0 , угловое распределение протонов протонами в лабораторной системе координат описывается формулой [12]

$$\sigma = 4 \cos \frac{\theta}{2} P, \quad (3.1)$$

где

$$P = \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left\{ \sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} - \cos \left(2\eta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \times \right. \\ \times \cos^{-2} \frac{\theta}{2} - \frac{2}{\eta} \left[\cos \left(K_0 + 2\eta \lg \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin^{-2} \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + \cos \left(K_0 + 2\eta \lg \cos \frac{\theta}{2} \right) \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \right] \sin K_0 + \frac{4}{\eta^2} \sin^2 K_0 \left. \right\}. \quad (3.2)$$

Наоборот, по этой формуле, зная угловое распределение, можно вычислить K_0 , как это и было сделано⁵. Вычисленные фазы приведены в табл. 1. В этой же таблице приведены значения функции $\operatorname{ctg} K_0$, входящей в формулу (2.12). О последней строке будет сказано ниже.

По определенным таким образом фазам мы можем вычислить постоянную α . Проведем это вычисление для каждой энергии отдельно и сравним полученные значения. Результат вычислений приведен в табл. 2.

Таблица 1. Значение фазы K_0

$E, \text{кэв}$	250	300	670	776	860	867	1200	1390	1830	2105	2392
K_0 (эксп.)	9°	10°	24°8'	27°4'	29°3'	29°4'	35°9'	38°8'	44°	46°1'	48°1'
$\operatorname{ctg} K_0$	6	5	2,16	1,93	1,78	1,78	1,38	1,25	1,03	0,96	0,90
$\operatorname{ctg} K_0$ (теор.)	6,23	5,15	2,24	1,92	1,78	1,78	1,38	1,25	1,03	0,95	0,90

⁴ См. также работу Крейца [11].

⁵ Вычисления упрощаются, если пользоваться таблицами, имеющимися в [9] и [12]. Дополнения к этим таблицам для больших энергий даны в [13].

Таблица 2. Значение постоянной $\frac{2}{a} \alpha_{pp}$

$E, \text{кэв}$	250	300	670	776	860	867	1200	1390	1830	2105	2392
$\frac{2}{a} \alpha_{pp}$	3,8	3,8	4,0	4,16	4,19	4,19	4,34	4,45	4,61	4,74	4,85

Мы видим, что $(2/a) \alpha_{pp}$ не остается в действительности строго постоянной, а несколько растет с энергией. Такое изменение не является неожиданным. Ведь значение α_{pp} , соответствующего $E = 0$, есть $1,33 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$, между тем оценка примерного значения α_{pp} по величине ядерных сил дает $\alpha \sim \sqrt{MU/\hbar}$, где U — энергия ядерного взаимодействия порядка 15 Мэв , т. е. $\alpha_{pp} \sim \sim 6 \cdot 10^{12}$. Отсюда видно, что значения α_{pp} аномально малы по сравнению с ожидаемыми, что, как и в случае взаимодействия протона — нейтрона, соответствует резкому резонансу.

С другой стороны, мы считали α_{pp} постоянной, допуская, что в ряде по степеням отношения энергии падающей частицы к энергии ядерного взаимодействия можно ограничиться первым членом. Но в этом разложении нельзя ограничиться одним членом, так как вблизи резонанса первый член ряда мал, и поэтому второй его член оказывается сравнимым с первым.

Действительно, все полученные значения постоянной $(a/2) \alpha_{pp}$ хорошо ложатся на прямую

$$\frac{a}{2} \alpha_{pp} = 3,82 + 0,43E \text{ (Мэв)}, \quad (3.3)$$

где E — энергия протона в лабораторной системе координат, выраженная в Мэв .

Для дальнейшего нам удобно будет также иметь значение этой постоянной в см^{-1} :

$$\alpha_{pp} = [1,40 + 0,15E \text{ (Мэв)}] \cdot 10^{13} \text{ см}^{-1}. \quad (3.4)$$

Для проверки вычислений можно при помощи значений α_{pp} , полученных из (3.3), вычислить соответствующие фазы. Результат этих вычислений приведен в табл. 1 в последней строке.

Из сказанного выше совершенно ясно, что из всего экспериментального материала, существующего в настоящее время, можно определить только две постоянные — два коэффициента в разложении (3.3) и (3.4). Понятно, что если а priori выбрать какую-либо форму потенциала, зависящую как раз от двух параметров, то их и можно определить.

Однако в действительности, если таких предположений заранее не делать, получить какие-либо количественные выводы о функции $U(r)$ из существующих экспериментальных данных невозможно. Дальнейшего повышения точности можно ожидать только от результатов изучения рассеяния более быстрых протонов. При этом надо иметь в виду, что с увеличением энергии должна стать существенной фаза K_1 (а при дальнейшем увеличении энергии и K_2 и т. д.), что приведет к появлению дополнительных постоянных. Поэтому такие исследования должны сами по себе обладать высокой степенью точности.

Во второй части нашей работы будет показано, что аналогичное поведение соответствующей постоянной α_{pn} имеет место и для рассеяния протонов нейтронами. В случае рассеяния, при котором спины частиц антипараллельны, эта постоянная оказывается равной

$$\alpha_{pn} = [0,43 + 0,10E \text{ (Мэв)}] \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}. \quad (3.5)$$

Из сравнения (3.4) и (3.5) мы видим, что вторые члены этих выражений оказываются весьма близкими друг другу. Это показывает, что ядерные силы между протоном и нейтроном, с одной стороны, и двумя протонами — с другой, имеют примерно одинаковую величину. То, что первые члены (3.4) и (3.5) отличаются друг от друга, не противоречит этому положению. Действительно, мы видели, что члены эти аномально малы, а потому сравнить имеет смысл не их абсолютные величины, а разности между ними и их нормальными значениями, которые, как мы видели, должны быть порядка $6 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$. Подробное обсуждение этих вопросов будет дано в следующей работе*.

4. Вопрос о существовании стабильного уровня дипротона

На основании полученных данных можно выяснить вопрос о том, существует ли у системы, состоящей из двух протонов, стабильный уровень или нет. Эта задача должна быть сформулирована следующим образом.

Наличие уровня у системы означает, что существует такое состояние этой системы, волновая функция которого при некотором отрицательном значении энергии (собственное значение) экспоненциально затухает на бесконечности. Соответствующая энергия будет тогда энергией связи этого состояния. Может слу-

* Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 15, 89, 1945.—Прим. ред.

читься, что такого решения не существует. Это, однако, не означает, что в таком случае не могут иметь места резонансные явления. Система может не иметь действительного уровня, а резонанс при этом может существовать, как это и происходит, например, в случаях рассеяния протонов нейтронами с антипараллельными спинами. Резонанс при этом означает, что уже малые изменения параметров системы могут привести к появлению действительного уровня (изменению знака у постоянной α_{pp} и несколько более сложному условию для постоянной α_{pp}).

Решение волнового уравнения, соответствующее отрицательному значению энергии $E = -\varepsilon$, можно получить из выписанных нами решений для положительной энергии (2.10) и (2.11), если в них положить $k = i\kappa$ (для того чтобы $k^2 < 0$). Асимптотические разложения полученных таким образом функций будут

$$F \sim \sin(i\kappa r + \dots), \quad (4.1)$$

$$G \sim \cos(i\kappa r + \dots). \quad (4.2)$$

Для того чтобы получить функцию, ведущую себя на бесконечности как экспонента, очевидно, надо взять линейную комбинацию

$$iF + G \sim \exp(-\kappa r + \dots). \quad (4.3)$$

Для упрощения расчетов обратим внимание на то, что (4.3) получается из соответствующей функции, использованной нами в задаче о рассеянии $\text{ctg } \xi F + G$ формальной заменой

$$\text{ctg } \xi \rightarrow i, \quad k \rightarrow i\kappa. \quad (4.4)$$

Далее мы должны удовлетворить тем же граничным условиям, что и в задаче о рассеянии, так как выводили их в предположении, что оно слабо зависит от энергии. Так как все эти действия совпадают с теми, которые проводились нами в задаче о рассеянии, то и окончательный результат можно получить из (2.15) заменой (4.4). Тогда мы получаем уравнение для определения κ ⁶:

$$\xi(x) = \frac{i\pi}{e^{-2\pi i x} - 1} - \ln x + i \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma'(-x)}{\Gamma(-x)} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right] = \frac{a}{2} \alpha_{pp}. \quad (4.5)$$

⁶ Для этого заметим, что выражение $\text{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)}$ заменяло в старых формулах сумму $\frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} + \frac{\Gamma'(i\eta)}{\Gamma(i\eta)} \right]$, которая равна предыдущему только при вещественных η . При мнимых η надо воспользоваться последним выражением.

Здесь мы для краткости ввели обозначение

$$x = \frac{1}{\kappa a}. \quad (4.6)$$

Очевидно, что вопрос об уровне решается знаком корня уравнения (4.5). Если бы он оказался положительным, то, как это видно из (4.3), решение на бесконечности затухало, и, согласно сказанному выше, это значение κ соответствовало бы реальному уровню. В действительности же это уравнение не может иметь положительных корней, что и доказывает отсутствие реального уровня у дипротона.

Покажем теперь, что (4.5) действительно не имеет положительных корней. Преобразуем сначала уравнение (4.5). Легко видеть, что

$$\frac{i\pi}{e^{-2\pi ix} - 1} = -\frac{i\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi x = -\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x \sin \pi x) + \frac{1}{2x}. \quad (4.7)$$

Далее воспользуемся известным соотношением

$$\Gamma(x) \Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x}. \quad (4.8)$$

Тогда

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \lg(x \sin \pi x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(-x)}{\Gamma(-x)} \right]. \quad (4.9)$$

Подставляя в (4.5), получим окончательно

$$\zeta(x) = -\lg x + \frac{1}{2x} + \psi(x) = \frac{a}{2} \alpha_{pp}, \quad (4.10)$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная Γ -функции.

Легко видеть, что левая часть (4.10) при всех положительных значениях x отрицательна.

Действительно, при больших значениях x

$$\psi(x) \sim \ln x - \frac{1}{2x}. \quad (4.11)$$

Отсюда

$$\zeta(\infty) = 0. \quad (4.12)$$

При малых x $\psi(x)$ ведет себя как $-1/x$, что видно из

$$\psi(x) = \psi(x+1) - \frac{1}{x}. \quad (4.13)$$

Поэтому

$$\zeta(0) = -\infty. \quad (4.14)$$

Можно показать (например, графически), что $\zeta(x)$ есть монотонная функция. Поэтому

$$\zeta(x) < 0 \text{ при } x > 0. \quad (4.15)$$

Замечая теперь, что в правой части (4.10) стоит положительная величина, получаем, что равенство это не может иметь места ни при каких положительных x , что и требовалось доказать⁷.

Более строго неравенство (4.15) может быть доказано следующим образом.

В теории Г-функций (см. [4], § 12,32) выводится соотношение

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x - \frac{1}{2x} - 2 \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)}. \quad (4.16)$$

Подставляя это выражение в (4.10), получаем

$$\zeta(x) = -2 \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)}. \quad (4.17)$$

Отсюда находим искомое неравенство.

5. Случай $l > 0$

Все сказанное выше относилось к задаче о рассеянии протонов с моментом $l = 0$ (S -рассеяние).

При исследовании рассеяния более тяжелых частиц в рассеянии могут участвовать и состояния с угловыми моментами, отличными от нуля. Поэтому выведем формулу, аналогичную (3.12), справедливую для любого l ⁸.

При $l \neq 0$ к волновому уравнению для функции $f_l = \psi_l r$ добавляется член $l(l+1)/r^2$. В обозначениях раздела 3 это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 f_l}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) f_l = 0. \quad (5.1)$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $W_{-in, l+1/2}(2i\rho)$ и $W_{in, l+1/2}(-2i\rho)$.

⁷ Легко видеть, что из-за того, что α_{pp} сравнительно слабо зависит от энергии, наш вывод не изменится, если для него взять выражение (3.3), в котором надо положить $E/2 = -\epsilon$.

⁸ Нужные для этого функции также приведены в работе Иоста, Уиллера и Брейта [5].

Аналогично предыдущему мы можем составить из них линейные комбинации, имеющие на бесконечности вид

$$F_l \sim \sin \left(\rho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln \rho + \sigma_l \right), \quad (5.2)$$

$$G_l \sim \cos \left(\rho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln \rho + \sigma_l \right), \quad (5.3)$$

где

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 - i\eta). \quad (5.4)$$

На малых расстояниях эти функции могут быть разложены в ряд:

$$F_l = C_l e^{-i\eta\rho} \rho^{l+1} \left\{ 1 + \frac{l+1-i\eta}{(2l+2)} \frac{2i\rho}{1!} + \frac{(l+1-i\eta)(l+2-i\eta)}{(2l+2)(2l+3)} \frac{(2i\rho)^2}{2!} + \dots \right\}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} G_l &= \frac{r^1}{C_l(2l+1)} \operatorname{Re} e^{-i\eta\rho} \rho^{-l} \left\{ 1 + \frac{l+i\eta}{(2l)} \frac{2i\rho}{1!} + \dots \right. \\ &\dots + \frac{(l+i\eta) \dots (-l+1+i\eta)}{(2l)!} \frac{(2i\rho)^{2l}}{(2l)!} \left. \right\} + \frac{e^{2\pi\eta} - 1}{\pi} \left[\ln 2\rho + 2\gamma - \sum_1^{2l+1} s^{-1} + \right. \\ &+ \sum_1^l \frac{s}{s^2 + \eta^2} + \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \left. \right] F_l - \\ &- \frac{e^{\pi\eta} - 1}{\pi} C_l \operatorname{Re} e^{-i\eta\rho} \rho^{l+1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2l+1)! \Gamma(l+1+s-i\eta)}{(2l+1+s)! s! \Gamma(l+1-i\eta)} \frac{(2i\rho)^s}{\times} \\ &\times \sum_{t=1}^s \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2l+1+t} - \frac{1}{l+t-i\eta} \right), \quad (5.6) \end{aligned}$$

где

$$C_l^2 = \frac{2^{2l}}{[(2l+1)!]^2} (l^2 + \eta^2) [(l-1)^2 + \eta^2] \dots (1 + \eta^2) \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}. \quad (5.7)$$

Так же как и выше, составим выражение f'/f . В этом случае такое выражение оказывается бесконечным в начале координат. Поэтому следует приравнять к постоянной не f'/f , а выражение $(r^l f)' / r^l f$, что, конечно, не нарушает в остальном всех рассуждений:

$$\frac{(r^l f)'}{r^l f} = c_l. \quad (5.8)$$

Легко видеть также, что последний член при $r = 0$ обращается в нуль, так как он не имеет особенности ни при каких значениях η . Это видно из того, что так как

$$\Gamma(l+1+s-i\eta) = (l+1-i\eta)(l+2-i\eta) \dots \\ \dots (l+s-i\eta) \Gamma(l+1-i\eta),$$

члены во второй сумме, содержащие η в знаменателе, обязательно сокращаются с одним из слагаемых первой суммы.

Включая все не зависящие от η члены в постоянную c_l (в том числе и член с $\lg r$) и опять полагая после этого $r=0$, получим после простых преобразований окончательную формулу, представляющую обобщение (2.15) на случай любого l :

$$\operatorname{ctg} K_l = \frac{1}{\pi} (e^{2\pi\eta} - 1) \left[\ln \eta - \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} - \sum_{s=1}^l \frac{s}{s^2 + \eta^2} + \right. \\ \left. + \alpha_{pp}^l \prod_{p=0}^l \left(1 + \frac{p^2}{\eta^2} \right)^{-1} \right]. \quad (5.9)$$

6. Рассеяние легких ядер

Можно было сделать попытку произвести анализ, аналогичный анализу рассеяния протонов протонами, и для случая рассеяния легких ядер.

Метод исследования должен остаться старым. По данным по угловому распределению надо получить фазы K_l . При этом для каждого состояния с разными значениями полного момента J существует своя фаза K_{lj} . После этого по формуле (5.9) мы должны определить соответствующую постоянную (или функцию от E). Таким образом, мы исключим влияние кулонова поля и сведем задачу к простой величине α_J .

Однако здесь из-за того, что данные по угловому распределению значительно менее полны, а, с другой стороны, количество постоянных больше (так как в рассеянии принимает участие и P -состояние), а также из-за большого спина в случае рассеяния дейтронов нам не удалось получить таких результатов, как в первом случае. Поэтому мы лишь кратко сообщим те выводы, которые можно было все же сделать.

А. Рассеяние протонов дейтронами

Экспериментальное исследование этого случая было проведено Тьюмом, Гейденбургом и Хафстадом [14] для энергии протонов 0,83 Мэв. Однако, как уже указывалось [15], их данные, особен-

но для больших углов, по-видимому, ошибочны, так как они получают для отношения сечения рассеяния к резерфордовскому 2275 (для угла рассеяния в 126° в лабораторной системе). Такая величина никак не может быть получена, если считать, что в рассеянии участвует только несколько первых моментов.

Рассеяние протонов с энергиями от 200 до 300 *кэв* исследовалось Ташеком [16]. Предположив сначала, что в рассеянии участвует *S*-состояние, можно было попытаться описать рассеяние при помощи двух постоянных (соответствующих общему спину системы, равному $1/2$ и $3/2$). Однако этого оказывается недостаточно. С другой стороны, вводя в рассмотрение еще и *P*-состояние, мы тем самым вводим еще пять постоянных (соответственно числу различных значений, которые может принимать квантовая сумма трех векторов, равных по величине 1, 1 и $1/2$). Однако по имеющимся данным нельзя сколько-нибудь точно определить все семь постоянных. Но не исключена и возможность, что в рассеянии участвуют лишь волны с моментом, равным нулю, а определению фаз мешает недостаточная точность экспериментов.

В. Рассеяние нейтронов и протонов α -частицами

Штауб и Тателъ [17] изучали рассеяние нейтронов с энергиями вблизи 1 *Мэв* α -частицами, измеряя полное число α -частиц отдачи в телесном угле $\pm 12^\circ$. Анализируя свои данные, они приходят к заключению, что в рассеянии принимает участие *P*-состояние, причем у системы имеется два близко лежащих уровня $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$ с маленькой разницей в энергии (0,3 *Мэв*).

С другой стороны, Уиллер и Баршалл [18] показали, что для энергии нейтронов в 2,5 *Мэв* фазы, соответствующие волнам $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$, отличаются примерно на 60° .

Аналогичные результаты получены нами и для рассеяния протонов α -частицами по данным Гейденбурга и Рамзея [19]. В этом случае также оказалось, что для описания рассеяния необходимо учесть три состояния: S_0 , $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$, причем фазы последних также сильно отличаются по величине.

Эти данные показывают, что вывод Штауба и Тателя о существовании узкого дублета неверен и связан с переоценкой ими точности своих вычислений. Существование такого узкого дублета было бы даже неожиданным, если принять во внимание тот факт, что взаимодействие спина с орбитой у ядерных частиц не мало (это следует из наличия относительно большого квадрупольного момента у дейтрона).

Надо при этом отметить, что формула Блоха [20], которой пользуются Штауб и Тателъ, верна лишь для небольшого интервала энергии, так как при ее выводе предполагалось, что шири-

на нейтронного уровня не зависит от энергии, что в действительности не имеет места.

После получения фаз K_0 , $K_{1/2}$ и $K_{3/2}$ как функций энергии можно было по формуле (5.9) получить значения соответствующих α_j . Однако вычисление показало, что при этом точки не ложатся на плавную кривую, что связано, по-видимому, с тем, что измерения производились через большие интервалы энергии (через $0,5 M\text{эв}$). В то же время, чем больше заряд и масса ядра, тем меньшие интервалы энергий необходимо брать, так как с увеличением числа частиц, входящих в состав ядра, возрастает и количество и плотность уровней.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. Bethe, R. Peierls. Proc. Roy. Soc., A148, 146, 1935.
- [2] Г. Бете, Р. Бечер. Физика ядра. Харьков, 1938, ч. I, гл. III.
- [3] Nuclear Physics, Pennsylvania, 1941.
- [4] Е. Уиттекер, Г. Ватсон. Курс современного анализа. М. — Л., т. 2, стр. 139, 1934.
- [5] F. Yost, J. Wheeler, G. Breit. Phys. Rev., 49, 174, 1936.
- [6] Н. Мотт, Х. Мессе. Теория атомных столкновений. М. — Л. 1936, гл. 2.
- [7] R. Herb, D. Kerst, D. Parkinson, G. Plain. Phys. Rev., 55, 998, 1939.
- [8] N. Heidenburg, L. Hafstad, M. Tuve. Phys. Rev., 56, 1078, 1939.
- [9] G. Breit, H. Thaxton, L. Eisenbud. Phys. Rev., 55, 1018, 1939.
- [10] G. Ragan, W. Kanne, R. Tashek. Phys. Rev., 60, 628, 1941.
- [11] E. Creutz. Phys. Rev., 56, 893, 1939.
- [12] G. Breit, E. Condon, R. Present. Phys. Rev., 50, 825, 1936.
- [13] H. Thaxton, L. Horsington. Phys. Rev., 56, 1194, 1939.
- [14] M. Tuve, N. Heidenburg, L. Hafstad. Phys. Rev., 50, 806, 1936.
- [15] H. Primakoff. Phys. Rev., 52, 1000, 1937.
- [16] R. Tashek. Phys. Rev., 61, 13, 1942.
- [17] H. Staub, H. Tattel. Phys. Rev., 58, 820, 1940.
- [18] John A. Wheeler, H. Barshall. Phys. Rev., 58, 682, 1940.
- [19] N. Heidenburg, N. Ramsey. Phys. Rev., 60, 42, 1941.
- [20] F. Bloch. Phys. Rev., 58, 829, 1940.

О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ БЫСТРЫМИ ЧАСТИЦАМИ НА ИОНИЗАЦИЮ

J. Phys. USSR, 8, 201, 1944

Определена функция распределения по энергии для быстрых частиц, прошедших через слой вещества заданной толщины и терявших энергию в результате ионизационных столкновений.

Когда быстрая частица пересекает слой вещества, то благодаря ионизационным потерям ее энергия по выходе будет меньше, чем ее начальное значение. При данной толщине слоя эти потери энергии не постоянны в силу того, что вероятность заметных флуктуаций оказывается вполне значительной.

Здесь под быстрыми частицами мы понимаем частицы (электроны, мезотроны и т. д.), которые обладают достаточно большой энергией для того, чтобы можно было применить обычную теорию ионизации. Слой вещества считается не слишком толстым, так что полные средние потери энергии малы по сравнению с начальной энергией E_0 .

Обозначим неизвестную функцию распределения через $f(x, \Delta)$; она представляет собой вероятность того, что частица с заданной начальной энергией E_0 , проходя через слой x , потеряет долю энергии, лежащую между Δ и $\Delta + d\Delta$ (функция f нормирована так, что $\int f d\Delta = 1$). Напишем кинетическое уравнение, определяющее эту функцию. Пусть $w(E_0, \epsilon)$ — вероятность (на единицу длины пути) потери энергии ϵ частицей с энергией E . Поскольку ионизационные потери считаются малыми по сравнению с E_0 , вместо E в $w(E, \epsilon)$ можно написать E_0 ; мы будем записывать $w(E_0, \epsilon)$ просто как $w(\epsilon)$. Как обычно, кинетическое уравнение можно получить, приравняв изменение функции распределения $(df/dx) dx$ на длине dx «интегралу столкновений»,

который выражает собой разность между числом частиц, приобретающих заданную энергию E в результате потерь на ионизацию на пути dx , и числом частиц, покидающих данный интервал энергий.

Таким способом мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^{\infty} w(\varepsilon) [f(x, \Delta - \varepsilon) - f(x, \Delta)] d\varepsilon. \quad (1)$$

В качестве верхнего предела интегрирования можно подставить ∞ , так как $f(x, \Delta) = 0$ при $\Delta < 0$ и $w(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > E_0$.

Уравнение (1) не содержит независимых переменных x и Δ явно. Это позволяет искать решение при помощи преобразования Лапласа. Проведем это преобразование по независимой переменной Δ , запишем

$$\varphi(p, x) = \int_0^{\infty} f(\Delta) e^{-p\Delta} d\Delta. \quad (2)$$

В свою очередь $f(\Delta)$ следующим образом может быть выражено через $\varphi(p)$:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{p\Delta} \varphi(p, x) dp, \quad (3)$$

где интегрирование производится вдоль прямой линии, параллельной мнимой оси и сдвинутой вправо от последней ($\sigma > 0$).

Умножая обе части уравнения (1) на $e^{-p\Delta}$ и интегрируя по $d\Delta$, легко получаем

$$\frac{\partial \varphi(p, x)}{\partial x} = -\varphi(p, x) \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4)$$

При $x = 0$, т. е. на поверхности, где частица входит в слой, должно выполняться условие $f(0, \Delta) = \delta(\Delta)$, которое означает, что на этой поверхности имеется одна частица с энергией $E = E_0$. Тогда из (2) находим, что $\varphi(p) = 1$ при $x = 0$. Интегрируя уравнение (4) с этим начальным условием, получаем

$$\varphi(p, x) = \exp \left[-x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon \right].$$

Подставляя это в (3), получим следующее общее выражение для функции распределения, выраженной через вероятность $w(\varepsilon)$:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \exp \left\{ p\Delta - x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon \right\} dp. \quad (5)$$

Формула (5) в принципе дает решение нашей задачи в общем случае. Для возможности ее применения необходимо знать функцию $w(\varepsilon)$; вообще говоря, вид этой функции был найден лишь для энергий, больших по сравнению с энергиями электронов в атоме. Однако можно показать, что в случае, когда потери энергии не слишком малы, не обязательно знать функцию $w(\varepsilon)$ полностью. Условие применимости (см. (20)) соответствующих формул будет выведено ниже.

Для того чтобы вычислить интеграл в экспоненте подынтегрального выражения, поступим следующим образом. Пусть ε_0 представляет собой некоторую характерную для атома энергию (порядка величины средней энергии связи атомных электронов). Пусть далее ε_{\max} является максимальной энергией, которую частица может передать электрону в процессе ионизации. Мы предположим, что в интеграле (5) существенны лишь такие значения p , для которых

$$p\varepsilon_0 \ll 1, \quad p\varepsilon_{\max} \gg 1. \quad (6)$$

Ограничения, которые это предположение накладывает на область применимости результатов, будут рассмотрены ниже. Введем теперь некоторую энергию ε_1 , такую, что $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$ и $p\varepsilon_1 \ll 1$; благодаря (6) это всегда можно сделать. Разобьем интеграл по $d\varepsilon$ на два интеграла с пределами соответственно от 0 до ε_1 и от ε_1 до ∞ . В первом из них (благодаря $p\varepsilon_1 \ll 1$) можно написать $e^{-p\varepsilon} \approx 1 - p\varepsilon$. Тогда

$$\int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon = p \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon w(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (7)$$

При $\varepsilon_0 \ll \varepsilon \ll \varepsilon_{\max}$ справедлива следующая хорошо известная формула (см., например, [1]):

$$w(\varepsilon) = \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m v^2 \Sigma A} \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (8)$$

(m — масса электрона, e — заряд электрона, совпадающий с зарядом падающей частицы, v — скорость частицы с энергией E_0 , N — число Авогадро, ρ — плотность вещества, ΣZ — сум-

ма атомных номеров в молекуле вещества, ΣA — сумма атомных весов). Можно видеть, в частности, что при $pe \gg 1$ второй интеграл быстро сходится, в силу чего эта область энергий несущественна. Из $pe_{\max} \gg 1$ следует, что для рассматриваемого интеграла выражение (8) можно применять во всей области интегрирования.

Хорошо известно [1], что для интеграла $\int_0^{\varepsilon_1} w(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon$, т. е. для потерянной частицей (на единицу пути) энергии, усредненной по интервалу от 0 до ε_1 , имеет место следующая формула:

$$\int_0^{\varepsilon_1} w(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m v^2 \Sigma A} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'}, \quad \ln \varepsilon' = \ln \frac{(1 - v^2/c^2) I^2}{2m v^2} + \frac{v^2}{c^2}, \quad (9)$$

где I представляет собой известным образом определенный ионизационный потенциал атома, величина которого обычно принимается равной $I = I_0 Z$, где $I_0 = 13,5$ эв.

Подставив (8) во второй член в правой части (7), получим интеграл вида

$$\int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1} (1 - e^{-pe_1}) + p \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{e^{-pe}}{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Вспоминая, что $\varepsilon_1 p \ll 1$, и вводя $z = pe$ в качестве новой переменной интегрирования, запишем

$$\frac{1}{p} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 + \int_{\varepsilon_1 p}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = 1 + \int_{\varepsilon_1 p}^1 \frac{dz}{z} + \int_0^1 \frac{e^{-z} - 1}{z} dz + \int_1^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz.$$

Как известно, сумма двух последних интегралов в правой части этого равенства равна $-C$, где $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера (см., например, [2]). Таким образом,

$$\int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = p(1 - C - \ln pe_1).$$

Подставляя это выражение в равенства (9) и (7), получим

$$x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-pe}) d\varepsilon = \xi p (1 - C - \ln pe'), \quad (10)$$

где вместо координаты x мы ввели величину

$$\xi = x \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m v^2 \Sigma A}. \quad (11)$$

Наконец, подставляя (10) в (5) и вводя новую переменную интегрирования $u = \xi r$, получаем для функции распределения следующее интегральное представление:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{\xi} \varphi(\lambda), \quad (12)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{u \ln u + \lambda u} du, \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{\Delta - \xi \left(\ln \frac{\xi}{e} + 1 - C \right)}{\xi}. \quad (14)$$

Таким образом, функция двух переменных $f(\Delta, x)$ оказалась равной произведению $1/\xi$ на универсальную функцию $\varphi(\lambda)$ от безразмерной переменной λ . Последняя была рассчитана в Вычислительном бюро Математического института Академии наук СССР, которому автор выражает свою благодарность. Функция $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = -0,05$ имеет максимум. Таким образом, наиболее вероятное значение потерь энергии дается выражением

$$\Delta_0 = \xi \left(\ln \frac{\xi}{e} + 0,37 \right), \quad (15)$$

которое более точно, чем обычная формула для этой величины.

Введем обозначение

$$\eta = \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m c^2 \Sigma A} x = \frac{1,54 \cdot 10^5 \mu \Sigma Z}{\Sigma A}, \quad (16)$$

где μ — масса слоя вещества, отнесенная к 1 см^2 его поверхности, и η измеряется в электронвольтах. Тогда $\xi = \eta / (v/c)^2$, и мы получаем

$$\Delta_0 = \frac{\eta}{(v/c)^2} \left[\ln \frac{3 \cdot 10^3 \eta}{Z^2 (1 - v^2/c^2)} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (17)$$

Вероятность для потери энергии, лежащей между Δ и $\Delta + d\Delta$, равна

$$f(x, \Delta) d\Delta = \varphi \left(\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right) d \left(\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right), \quad (18)$$

а интегральная вероятность для энергетических потерь, превосходящих Δ , —

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x, \Delta) d\Delta = \psi \left[\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right], \quad (19)$$

где ϕ и ψ — две универсальные функции, показанные на рис. 1 и 2.

Кривая на рис. 1 слева от максимума ($\Delta < \Delta_0$, т. е. потери энергии меньше, чем наиболее вероятная) убывает очень быстро, справа от максимума ($\Delta > \Delta_0$) кривая убывает значительно медленнее.

Из рис. 2 можно увидеть, что медиана распределения вероятности (т. е. вертикальная линия, разделяющая площадь этой кривой на две равные части) проходит приблизительно на одну единицу вправо от оси ординат.

Определим, какие ограничения на область применимости полученных результатов накладывают сделанные выше допущения (6). Очевидно, что в интеграле (13) существенна область интегрирования $u \sim 1$. Так как $u = \xi p$, то предположение (6) сводится к условиям

$$\xi \gg \varepsilon_0, \quad (20)$$

$$\xi \ll \varepsilon_{\max}. \quad (21)$$

Первое условие означает, что наблюдаемые энергии должны быть достаточно велики по сравнению с атомными энергиями. Это

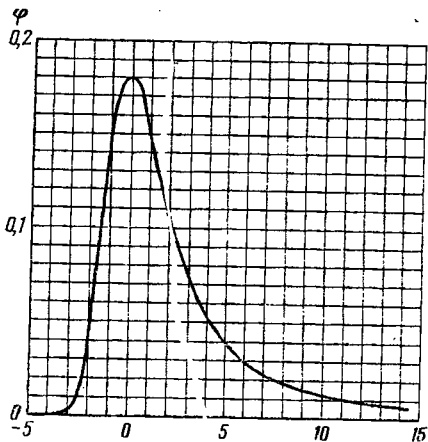


Рис. 1

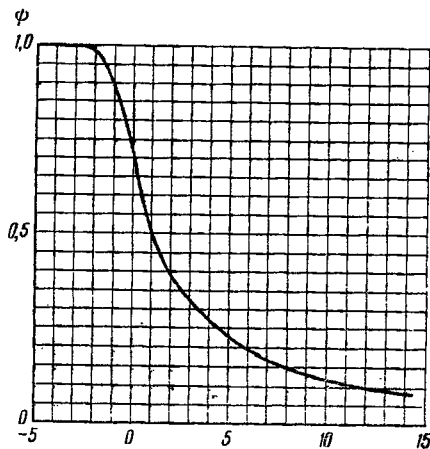


Рис. 2

является главным ограничением на применимость полученных здесь результатов. Если быстрая частица — электрон или позитрон, то $\varepsilon_{\max} = E_0$ и условие (21), во всяком случае, выполнено, поскольку с самого начала предполагалось, что полная потерянная частицей энергия мала по сравнению с E_0 . Однако если масса быстрой частицы гораздо больше, чем масса электрона (мезотроны, протоны), ε_{\max} может стать меньшей, чем E_0 , и тогда соотношение (21) будет ограничивать применимость формул. Легко показать, что в этом случае должно выполняться условие

$$\xi \ll \frac{2mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \eta \ll 2mc^2 \frac{(v/c)^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (22)$$

Можно упомянуть, что если нас интересуют большие флуктуаций, т. е. большие значения $(\Delta - \Delta_0)/\varepsilon$, то, как можно элементарно показать, вместо (22) следует написать

$$\Delta - \Delta_0 \ll \frac{2mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

С помощью (5) легко изучить также предельный случай, противоположный (22); как было неоднократно показано, это приводит к гауссовскому распределению флуктуаций.

Выведем теперь асимптотическую формулу для функции $\varphi(\lambda)$ при больших λ . Сначала мы рассмотрим отрицательные λ , большие по абсолютной величине. Для вычисления интеграла (13) воспользуемся «методом перевала». Показатель экспоненты $u \ln u - |\lambda| u$ в подынтегральном выражении в (13) минимален при $u = e^{|\lambda| - 1}$. Воспользуемся этой величиной в качестве σ , которое определяет путь интегрирования. Записав $u = e^{|\lambda| - 1} + i\xi$, мы сведем интеграл по du к интегралу по $d\xi$ от $-\infty$ до $+\infty$; в этом интеграле существенны только малые значения ξ . В соответствии с этим, разлагая выражение в показателе экспоненты в ряд по степеням ξ , получим

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -e^{|\lambda| - 1} - \frac{\xi^2}{2e^{|\lambda| - 1}} \right\} d\xi$$

или окончательно

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \exp \left\{ \frac{|\lambda| - 1}{2} - e^{|\lambda| - 1} \right\}. \quad (23)$$

Эта формула показывает, что $\varphi(\lambda)$ очень быстро убывает с возрастанием $|\lambda|$.

Для больших положительных λ интеграл удобно брать вдоль контура, показанного на рис. 3. Тогда после простых преобразований он принимает вид

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u \ln u - \lambda u} \sin \pi u du. \quad (24)$$

При больших λ этот интеграл стремится к $1/\lambda^2$, а интеграл $\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$ соответственно стремится к $1/\lambda$. Это означает, как легко

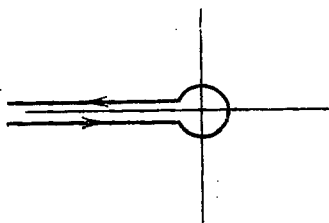


Рис. 3

убедиться, что вероятность такой флуктуации соответствует в основном образованию одной частицы с энергией $\Delta - \Delta_0$. Для того чтобы получить более точную формулу, введем вместо λ величину ω , которая связана с λ уравнением

$$\lambda = \omega + \ln \omega + A,$$

где значение постоянной выбрано ниже. Очевидно, что

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-u \ln u - \lambda u} \frac{\sin \pi u}{\pi u} du = \int_0^{\infty} e^{-u \ln \omega u - \omega u - A u} \frac{\sin \pi u}{\pi u} du$$

или, обозначая ωu через U ,

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-U - \frac{U}{\omega} (\ln U + A)} \frac{\sin \frac{\pi U}{\omega}}{\pi U / \omega} dU,$$

Этот интеграл можно разложить в ряд по $1/\omega$. Тогда

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-U} U (\ln U + A) dU + \dots$$

Второй член исчезает, если $A = C - 1$. Поэтому с точностью, включающей члены порядка $1/\omega^2$, существует следующее параметрическое соотношение между ψ и $(\Delta - \Delta_0)/\xi$:

$$\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} = \omega + \ln \omega - 0,37, \quad \psi = \frac{1}{\omega} \quad (25)$$

и

$$\varphi = \frac{1}{\omega(\omega + 1)}. \quad (26)$$

Эти формулы уже при $(\Delta - \Delta_0)/\xi = 10$ справедливы с точностью в несколько процентов.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Livingston, H. Bethe. Rev. Mod. Phys., 9, 245, 1937.
[2] Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, 4-е изд., 1935, стр. 246.

ОБ ИЗУЧЕНИИ ДЕТОНАЦИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ

Совместно с К. П. СТАНЮКОВИЧЕМ

ДАН СССР, 46, 399, 1945

Современная гидродинамическая теория детонации конденсированных взрывчатых веществ, развитая Беккером [1] и Шмидтом [2], основана на применении к продуктам детонации уравнения состояния

$$p(v - \alpha) = RT, \quad (1)$$

где p — давление, v — объем, T — температура, α — коволюм, представляющий несжимаемую часть продуктов детонации.

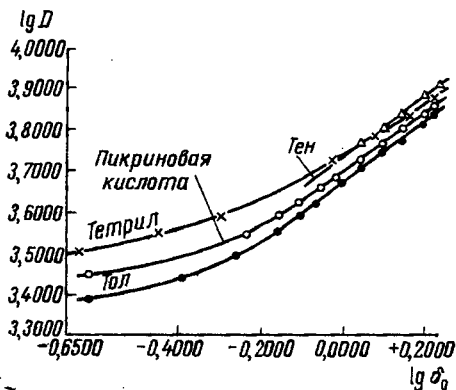
Применение этого уравнения приводит к многочисленным недоразумениям, так как для целого ряда ВВ оказывается, что $\alpha \geq v_n$, где v_n — начальный объем ВВ. Различные гипотезы об уменьшении α при возрастании давления, хотя и подтвержденные экспериментальными данными Бриджмена [3] и Шмидта [4], все же не дают возможности точно определить $\alpha = \alpha(p)$, а следовательно, избавиться от этих недоразумений.

Ввиду того, что плотность ВВ после разложения достаточно высока, вообще малополезно использовать какое-либо уравнение состояния, написанное для газа; целесообразнее сравнивать продукты разложения с некоторой жидкостью, частицы которой совершают колебания, обуславливающие характер протекания процесса расширения этих продуктов детонации до определенного объема v_R . При $v > v_R$ можно воспользоваться уравнением состояния, написанным уже для идеального газа:

$$pv = RT. \quad (2)$$

Наиболее целесообразно построение таких элементов теории детонации, которые основаны на экспериментальных данных,

определенных с большой точностью и удовлетворяющих изложенному выше. Для целого ряда бризантных ВВ на широком интервале плотностей (от 0,5 до 1,8) оказывается возможным найти зависимость между скоростью детонации D или плотностью ВВ δ_0 .



Эта зависимость представлена на графике и может быть аппроксимирована простой формулой

$$D = B\delta_0^a. \quad (3)$$

Используя основные уравнения гидродинамической теории детонации

$$E = Q + \frac{p + p_0}{2} (v_0 - v), \quad (4)$$

$$p - p_0 = -\frac{\partial p}{\partial v} (v_0 - v), \quad (5)$$

$$D^2 = -v_0^2 \frac{\partial p}{\partial v} \quad (6)$$

(где E — энергия на фронте детонационной волны и Q — теплота реакции) и произведя с ними некоторые операции, можно показать, что будет иметь место следующая формула:

$$\frac{d \ln D}{d \ln v_0} = \frac{2v - v_0}{2(v - v_0)} + \frac{v_0 \frac{\partial p}{\partial T}}{2 \left(2c_v + (v - v_0) \frac{\partial p}{\partial T} \right)}. \quad (7)$$

Так как $v_0 = 1/\delta_0$, то из (3) имеем

$$\frac{d \ln D}{d \ln v_0} = -a. \quad (7a)$$

Согласно нашей гипотезе, предполагая, что свободная энергия F продуктов детонации зависит от частоты колебаний их молекул, можно написать

$$p = p_0 + LkT \frac{\partial \ln \omega}{\partial v}, \quad (8)$$

где p_0 — часть давления, не зависящая от температуры, L — число степеней свободы движения молекул как целого, k — постоянная Больцмана, ω — частота колебаний. Так как $\omega \approx c/r$, где c — скорость звука в рассматриваемой среде и r — расстояние между молекулами, то, поскольку c является степенной функцией объема (что станет очевидным ниже), а $r \approx v^{1/3}$, уравнение состояния может быть написано в виде

$$p = \bar{p} + \frac{AT}{v}, \quad (9)$$

где \bar{p} — часть давления, не зависящая от температуры, и A — некоторый коэффициент, зависящий от числа степеней свободы. Из (9) следует, что $dp/dT = A/v$, и (7) может быть написано в виде

$$-a = \frac{2v - v_0}{2(v - v_0)} + \frac{v_0}{2 \left(2 \frac{c_v}{A} v + v - v_0 \right)}, \quad (7б)$$

откуда следует, что $v \approx v_0$. А это означает, предполагая на основании уравнения (9), что в рассматриваемой области

$$pv^n = \text{const} \quad (10)$$

вместо аналогичного уравнения для идеального газа

$$pv^\gamma = \text{const}, \quad (10а)$$

что $c \approx v^{(1-n)/2}$. Величина n , как мы видим, может быть определена из (7б). В самом деле, на основании классической теории детонации можно, используя уравнение (10), написать:

$$v_H = \frac{n}{n+1} v_0, \quad (11)$$

$$p_H v_0 = D u_H, \quad (11а)$$

$$u_H = \frac{D}{n+1}, \quad (11б)$$

$$c_H = \frac{n}{n+1} D, \quad (11в)$$

где p_H — давление на фронте детонационной волны, c_H — скорость звука и u_H — скорость среды за фронтом детонационной

волны. Отсюда следует, что

$$a = \frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{2 \left[2n \frac{c_v}{A} - 1 \right]}, \quad (7в)$$

поскольку c_v и A зависят от числа степеней свободы, а именно, можно написать, что

для двухатомных молекул	$c_v = 12,$	$A = 5n - 3,$	
» трехатомных	$c_v = 18,$	$A = 6n - 3,$	простая система;
»	$c_v = 12,$	$A = 5n - 3,$	линейная система.

Таким образом, очевидно, что методом последовательных приближений можно и из уравнения (7в) определить значение n .

Теперь возможно определить координаты точки, где сопрягается уравнение (10) с уравнением (10а). Для этой цели определим работу расширения w продуктов детонации при изменении объема от v_H до v_K :

$$w = \frac{p_H v_H}{n-1} - \frac{p_K v_K}{n-1} + \frac{p_K v_K}{\gamma-1} = E. \quad (12)$$

Используя уравнения (11) — (11в) и пренебрегая величиной $p_K v_K / (n-1)$, малой по сравнению с $p_K v_K / (\gamma-1)$, а также изменением c_v от T , получим, что

$$\frac{p_K v_K}{\gamma-1} = Q - \frac{D^2}{2(n^2-1)}, \quad (12а)$$

или, обозначая $Q - \frac{D^2}{2(n^2-1)}$ через ΔQ ,

$$c_v T_K = \Delta Q. \quad (12б)$$

Приведем вычисленные для некоторых ВВ наиболее интересные параметры (см. таблицу).

ВВ	Q, <i>кал</i> <i>град</i>	D, <i>м</i> <i>сек</i>	δ_0	a	n	u _H , <i>м</i> <i>сек</i>	c, <i>м</i> <i>сек</i>	δ_H	p _H , <i>атм</i>	ΔQ	p _K , <i>атм</i>	δ_K	T _K
Тол	950	7000	1,60	0,78	3,2	1680	5320	2,10	190 000	320	2150	0,52	1580
Тетрил . .	1150	7600	1,63	0,76	3,1	1850	5750	2,15	230 000	350	2000	0,46	1540
Пикриновая кислота .	1000	7100	1,63	0,76	3,1	1730	1730	2,15	210 000	300	2360	0,48	1530
Тен	1400	8400	1,69	0,80	3,2	2000	2000	2,28	275 000	490	2900	0,52	1940

Для бризантных ВВ вполне возможно пользоваться приближенным значением $n=3$, что в значительной степени упрощает все вычисления без большой потери точности.

Инженерный комитет Красной Армии,

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Becker. Zs. Phys., 8, 321, 1922.
- [2] A. Schmidt. Zs. Schiess- u. Sprengstoffwesen, 6, 7, 8, 1936.
- [3] P. W. Bridgeman. The physics of high pressure. London, 1931.
- [4] A. Schmidt. Zs. Schiess- u. Sprengstoffwesen, 5, 12, 1936.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ИСТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ НЕКОТОРЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Совместно с К. П. СТАНЮКОВИЧЕМ

ДАН СССР, 47, 205, 1945

Распределение продуктов детонации газовых смесей для одно размерного случая может быть получено непосредственно из римановского решения основных уравнений гидродинамики.

Это решение основано на предположении, что $u = f(v)$, где v — удельный объем, u — скорость частиц. Тогда оказывается, что

$$du = -\sqrt{-dp} dv, \quad (1)$$

где p — давление. Для идеального газа, интегрируя, получаем

$$u = u_n + \frac{2}{\gamma - 1} (c_n - c), \quad (2)$$

где u_n — скорость среды за фронтом детонационной волны, c_n — начальная и c — местная скорости звука, $\gamma = c_p/c_v$. Поскольку

$$u_n = \frac{D}{\gamma + 1}, \quad (3)$$

$$c_n = \frac{\gamma D}{\gamma + 1}, \quad (3a)$$

где D — скорость детонации, можно написать

$$u = \frac{3\gamma - 1}{\gamma^2 - 1} D - \frac{2c}{\gamma - 1}. \quad (4)$$

При истечении в пустоту $c = 0$, при истечении в атмосферу значение c может быть найдено из условия

$$c = c_n \left(\frac{p}{p_n} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma}.$$

Подставляя значение c_n из (3а), получаем

$$c = \frac{\gamma D}{\gamma + 1} \left(\frac{p}{p_n} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma}$$

Величина p определится из условия равенства давления в продуктах разложения (p_x) и в ударной волне, движущейся перед ними (p_y).

Так как

$$p_y = \frac{\gamma_a + 1}{2} \rho_a u^2,$$

где ρ_a — плотность атмосферы, γ_a — отношение ее теплоемкостей, то

$$u = \frac{D}{\gamma^2 - 1} \left[3\gamma - 1 - 2\gamma u^{(\gamma-1)/\gamma} \left(\frac{(\gamma_a - 1) p_a}{2 p_n} \right)^{(\gamma-1)/\gamma_a} \right]. \quad (4a)$$

Величина p_n может быть определена формулой

$$p_n = \frac{\rho_0}{\gamma + 1} D^2, \quad (5)$$

где ρ_0 — плотность газовой смеси. Максимальная плотность и температура на фронте волны определяются формулами

$$\rho_n = \frac{\gamma + 1}{\gamma} \rho_0, \quad (6)$$

$$T_n = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} T_2, \quad (6a)$$

где T_2 — температура реакции. В приведенных формулах не учитывалось изменение теплоемкостей с температурой, причем если за величину γ брать ее значение, отнесенное к некоторой средней температуре, лежащей между T_2 и T_n , как это обычно делается, то результат не будет являться вполне точным, особенно при определении скорости истечения.

Величина γ_a должна соответствовать температуре на фронте ударной волны, однако можно принять $\gamma_a = 1,4$.

Для более точного определения скорости истечения можно воспользоваться эмпирической формулой $\gamma = \bar{\gamma} - aT$, где для данного газа значения $\bar{\gamma}$ и a могут быть вычислены. В этом случае можно написать следующую формулу:

$$u_0 = u_n + \int_T^{T_n} \sqrt{\frac{c_p c_v}{RT}} dT. \quad (2a)$$

Поскольку

$$c_0 = \frac{R}{\gamma - 1 - aT}, \quad c_p = \frac{R(\bar{\gamma} - aT)}{\bar{\gamma} - 1 - aT},$$

интегрирование дает

$$u_0 = \frac{D}{\gamma_H + 1} + 2\sqrt{\frac{R}{a}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_H}{\gamma_H}} - \arcsin \sqrt{\frac{\bar{\gamma} - \gamma}{\bar{\gamma}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma} - 1}} \left(\text{Arth} \sqrt{\frac{(\bar{\gamma} - 1)\gamma_H}{\bar{\gamma} - \gamma_H}} - \text{Arth} \sqrt{\frac{(\bar{\gamma} - 1)\gamma}{\bar{\gamma} - \gamma}} \right) \right]. \quad (46)$$

Разница в скоростях, определяемых по формулам (4) и (46), достигает не слишком значительной величины, доходя все же до 8% от самого значения скорости.

Скорость ударной волны и температура на ее фронте определялись по формулам

$$D_y = \frac{\gamma_a + 1}{2} u_x, \quad (7)$$

$$T_y = \frac{\gamma_a - 1}{2} u_x^2. \quad (7a)$$

Вычисление скорости истечения в атмосферу приходится вести методом последовательных приближений или графически, исходя, как раньше, из условия, что давление на фронте ударной волны должно быть равно остаточному давлению продуктов детонации. Результаты вычислений сведены в следующую таблицу.

Газовая смесь	D , м/сек	T_H , °K	u_H , м/сек	p_H , м/сек ²	u_0 , м/сек	u_x , м/сек	p_y , м/сек ²	D_y , м/сек	T_y , °K
$2H_2 + O_2$	2820	4600	1330	19	21 500	1350	19	1600	1000
$2H_2 + O_2 + N_2$	2400	3900	1100	19	15 000	1200	18	1400	900
$2H_2 + O_2 + 3N_2$	2060	2700	930	18	11 600	1000	16	1200	850
$2H_2 + O_2 + 5N_2$	1820	2700	840	17	7 900	900	14	1100	770

Очевидно, что предельные скорости, которые возникают при неустановившемся режиме истечения, могут быть весьма велики и значительно превышать скорости стационарного процесса. При истечении в атмосферу вследствие малой плотности детонирующего газа скорости не успевают нарастать и гасятся возникшей ударной волной.

Институт физических проблем Академии наук СССР,

Инженерный комитет Красной Армии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ИСТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ

Совместно с К. П. СТАНЮКОВИЧЕМ

ДАН СССР, 47, 273, 1945

При определении скорости истечения продуктов детонации было установлено, что в некоторых случаях эта скорость превосходит скорость детонации. Особенно резко большая скорость истечения наблюдалась при экспериментах с кумулятивными зарядами Покровского [1] и Беккера [2] при детонации в трубе. В настоящее время это является хорошо известным и неоднократно проверенным явлением, причем для экспериментов, приближающихся к случаю одномерной детонации, скорости истечения для обычно применяемых ВВ (тол, тетрил) лежат в пределах 8000—12 000 м/сек.

Случай одномерной детонации может быть сравнительно легко теоретически изучен, а скорость истечения продуктов детонации u определяется из римановского решения уравнения гидродинамики, которое можно представить в виде

$$u = u_n + \int_{v_n}^v \sqrt{-dp} dv, \quad (1)$$

где p — давление, v — удельный объем, u_n — скорость продуктов детонации и v_n — их удельный объем на фронте детонационной волны.

Как мы показали [3], для случая детонации имеет место следующий закон, связывающий p и v (заменяющий обычный адиабатический закон для идеального газа):

$$pv^n = \text{const}, \quad (2)$$

где $n = 3$ для стандартных бризантных ВВ.

Поэтому будут справедливы следующие формулы:

$$u_{\text{н}} = \frac{D}{n+1}, \quad (3)$$

$$c_{\text{н}} = \frac{nD}{n+1}, \quad (3a)$$

$$v_{\text{н}} = v_0 \frac{n}{n+1}, \quad (4)$$

где D — скорость детонации, $c_{\text{н}}$ — скорость звука на фронте детонационной волны, v_0 — начальный объем ВВ.

Найдем значение интеграла $\int_{v_{\text{н}}}^v \sqrt{-d\rho dv}$. Для этого разобьем область интегрирования на две, причем в точке (p_k, v_k) будем сопрягать решение, написанное для расширения продуктов детонации, подчиняющихся (2), с решением, написанным для идеального газа. Тогда

$$u = u_{\text{н}} + \frac{2c_{\text{н}}}{n-1} - \frac{2c_k}{n-1} + \int_T^{T_k} \sqrt{\frac{c_p c_v}{RT}} dT, \quad (5)$$

где T_k — температура в точке сопряжения, c_v и c_p — удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, R — удельная газовая постоянная. Эта температура может быть получена из уравнения

$$\Delta Q = \int_0^{T_k} c_v dT,$$

где ΔQ — остаточная энергия в точке сопряжения, определяемая уравнениями

$$\frac{p_{\text{н}} v_{\text{н}}}{n-1} - \frac{p_k v_k}{n-1} + \Delta Q = E = \frac{p_{\text{н}} + p_0}{2} (v_0 - v_{\text{н}}) + Q,$$

где Q — теплота реакции.

Отсюда, воспользовавшись формулами (3) и (4) и пренебрегая величинами $p_k v_k / (n-1)$ и $2c_k / (n-1)$, малыми по сравнению с ΔQ , получим

$$\Delta Q = Q - \frac{D^2}{2(n^2-1)}.$$

Теперь для определения u будем иметь формулу

$$u = \frac{3n-1}{n^2-1} D + \int_0^{T_k} \sqrt{\frac{c_p c_v}{RT}} dT. \quad (5a)$$

Если пренебречь зависимостью c_p и c_v от температуры, то формулы значительно упростятся, а именно:

$$u = \frac{3n-1}{n^2-1} D + \frac{2}{\gamma-1} [\sqrt{\gamma RT_k} - \sqrt{\gamma RT}] \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right).$$

Поскольку $T_k = \Delta Q / c_v$, то окончательно для определения будем иметь формулу

$$u = \frac{3n-1}{n^2-1} D + 2 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1} \Delta Q} - \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma RT}. \quad (6)$$

Как показывают вычисления, T_k имеет сравнительно небольшие значения (порядка $1000-1500^\circ$), и, действительно, представляется возможным пренебречь зависимостью теплоемкостей от температуры, причем ошибка в определении u не будет превышать 5%.

При истечении в пустоту надо положить $T = 0$. Для определения скорости истечения в атмосферу u_x необходимо учесть сопротивление ударной волны, возникающей перед фронтом движущегося газа.

Для этой цели определим скорость D_y и давление p_y на фронте ударной волны:

$$D_y = \frac{\gamma_a + 1}{2} u_x, \quad (7)$$

$$p_y = \frac{\gamma_a + 1}{2} \rho_a u_x^2, \quad (8)$$

где ρ_a — плотность воздуха, γ_a — отношение его теплоемкостей; очевидно, что условие $p_y = p_x$, где p_x — остаточное давление продуктов детонации, и позволит определить искомую скорость. Для этого необходимо знать p_k и v_k — давление и объем в точке сопряжения.

Эти величины определяются из уравнений

$$p_k v_k^n = p_{II} v_{II}^n, \quad p_k v_k = (\gamma - 1) \Delta Q.$$

Так как значение γ_a не может быть определено точно ввиду высокой температуры на фронте ударной волны, то можно, нарушая лишь незначительно точность вычислений, принять $\gamma_a = 1$ и написать выражения (7) и (8) в виде

$$D_y = u_x, \quad (7a)$$

$$p_y = \rho_a u_x^2. \quad (8a)$$

Далее, очевидно, что $\sqrt{\gamma RT_x} = c_k (p_x/p_k)^{(\gamma-1)/2\gamma}$, а отсюда следует, что

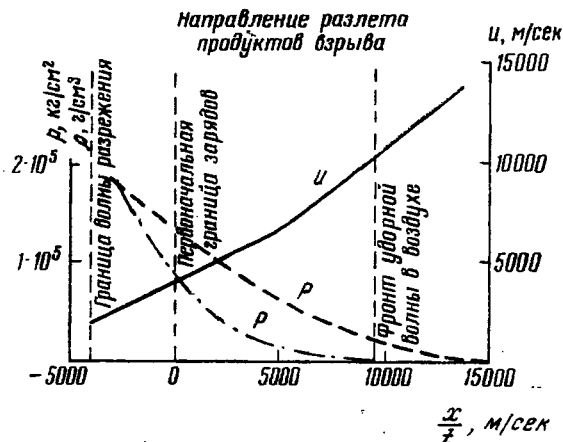
$$u = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} \left(\frac{p_x}{p_a}\right)^{1/2} = \frac{3n-1}{n^2-1} D + 2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1} \Delta Q \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_k}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma}\right]}, \quad (6a)$$

откуда могут быть определены p_x , u_x , T_x и ρ_x .

Результаты вычислений приведены в таблице.

ВВ	u_k	u	u_x	p_x	ρ_x	T_x
Тротил	6600	11 300	7800	750	0,23	1200
Пикриновая кислота	6900	11 550	8000	800	0,21	1200
Тен	7900	18 500	9800	1200	0,26	1600
Тетрил	7400	11 950	9200	900	0,25	1300

Что касается температуры на фронте ударной волны, то она оказывается порядка 20 000—30 000°, если пользоваться уравнением состояния, написанным для идеального газа, и не учитывать



ни его диссоциации, ни ионизации. Очевидно, что оба эти обстоятельства имеют место и значительно снижают температуру на фронте ударной волны. Поскольку при этом происходит значительное лучеиспускание, то вообще трудно сделать какие-либо заключения о характере ударной волны, и может оказаться, что

резкая ударная волна при этих условиях не возникает. На снимках, сделанных искровым и теневым методом проф. Г. И. Покровским, ударная волна перед фронтом газа действительно отсутствует.

Доведем до конца римановское решение, рассматривая отдельно обе области расширяющихся продуктов детонации и связывая решения в точке их сопряжения. Имеем такие уравнения:

$$\frac{x}{t} = u - c, \quad (9)$$

$$u = u_n + \frac{2c_n}{n-1} - \frac{2c}{n-1}$$

$$\text{при } u_n \leq u \leq \frac{3n-1}{n^2-1} D \quad (10)$$

и

$$u = \frac{3n-1}{n^2-1} D + \frac{2c_k}{\gamma-1} - \frac{2c}{\gamma-1}$$

$$\text{при } \frac{3n-1}{n^2-1} D \leq u \leq \frac{3n-1}{n^2-1} D + \frac{2c_k}{\gamma-1}. \quad (10a)$$

Рассмотрим какое-либо идеализированное ВВ, близкое по своим свойствам к тену, примем $n = 3$, $\gamma = 1,3$, $D = 8000$ м/сек, $Q = 1400$ кал/г, $\rho_0 = 1,5$. Результаты вычислений представлены на рисунке.

Институт физических проблем Академии наук СССР,

Инженерный комитет Красной Армии

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. И. Покровский. Направленное действие взрыва. Воениздат, 1942.
- [2] R. Becker. Zs. Phys., 321, 1922.
- [3] Л. Д. Ландау, К. П. Станюкович. ДАН СССР, 46, 399, 1945 (Собр. трудов, № 55).
- [4] Ф. А. Королев, Г. И. Покровский. ДАН СССР, 42, № 6, 1944.

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ НА ДАЛЕКИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ МЕСТА ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Прикл. матем. и мех., 9, 286, 1945
J. Phys. USSR, 9, 496, 1945

На больших расстояниях от места их возникновения ударные волны слабы и поэтому имеют характер звуковых волн. Однако для наших целей недостаточно обычное линейное приближение, и необходимо рассматривать свойства звуковых волн малой амплитуды во втором приближении. Ниже мы будем иметь дело с цилиндрическими волнами; однако, имея в виду, что на больших расстояниях цилиндрическую или сферическую волну можно рассматривать в каждом небольшом участке как плоскую, остановимся предварительно на некоторых свойствах плоских волн.

Как известно, одномерная бегущая волна произвольной амплитуды описывается так называемым римановским решением уравнений движения

$$x = t[v + c(v)] + f(v),$$

где $f(v)$ — произвольная функция скорости v газа, а c — местная скорость звука, связанная с v посредством

$$v = \int \frac{dp}{\rho c} = \int \sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}} dp,$$

где ρ — плотность, V — удельный объем газа.

Эти две формулы определяют неявным образом скорость v , а с нею и остальные величины для волны как функцию от x и t , т. е. профиль волны в каждый данный момент времени. При $t = 0$ имеем $x = f(v)$, т. е. функция, обратная $f(v)$, определяет профиль волны в начальный момент времени.

Величина

$$u = v + c(v) \tag{1}$$

есть скорость, с которой перемещаются точки профиля волны. Эта скорость различна для разных точек профиля, вследствие чего он не остается неизменным и меняет со временем свою форму. Выразив u в виде функции, скажем, от давления p в волне, имеем для производной

$$\frac{du}{dp} = \frac{dc}{dp} + \frac{1}{\rho c}.$$

Так как

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = V \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}},$$

то вычисление дает

$$\frac{du}{dp} = \frac{1}{2} \rho^2 c^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S.$$

Адиабатическая производная $(d^2V/dp^2)_S$, где S — энтропия, для всех газов положительна, так что $du/dp > 0$. Таким образом, скорость перемещения заданной точки профиля волны тем больше, чем больше давление в этой точке; поэтому с течением времени точки сжатия выдвигаются вперед, а точки разрежения оказываются отставшими¹.

Для волны малой амплитуды скорость u передвижения точек профиля в первом приближении получится, если положить в (1) скорость $v = 0$, т. е. $u = c_0$ (буквы с индексом нуль будут обозначать равновесные значения величин), что соответствует перемещению профиля волны без изменения его формы.

В следующем приближении имеем

$$u = c_0 + \frac{\partial u}{\partial p_0} p'$$

или

$$u = c_0 \left(1 + \alpha \frac{p'}{p_0} \right), \quad \alpha = \frac{p_0}{2} \frac{c_0^2}{V_0^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S, \quad (2)$$

где p' — переменная часть давления в волне. Для идеального газа

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \quad (\text{для воздуха } \alpha = 0,86),$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Когда профиль волны деформируется настолько, что в нем возникает неоднозначность, появляется, как известно, ударная

¹ Подробнее о римановском решении см., например, [1], § 77.

волна. Римановское решение, вообще говоря, становится неприменимым после образования разрывов. Существенно, однако, что для волн малой амплитуды в рассматриваемом втором приближении это решение сохраняет силу и при наличии разрывов. Убедиться в этом можно следующим образом. Скачки скорости, давления и удельного объема в разрыве связаны друг с другом соотношением

$$v_2 - v_1 = V \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}.$$

Изменение же скорости v вдоль некоторого участка длины оси x в римановском решении равно интегралу

$$v_2 - v_1 = \int_{p_1}^{p_2} V \sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}} dp.$$

Простое вычисление с помощью разложения в ряд показывает, что оба написанных выражения отличаются друг от друга только в членах третьего порядка малости (при вычислении следует иметь в виду, что изменение энтропии в разрыве есть величина третьего порядка, а в римановском решении энтропия вообще постоянна).

Отсюда следует, что с точностью до членов второго порядка движение в бегущей волне при наличии разрыва может быть описано с каждой стороны от разрыва римановским решением, причем на самом разрыве будет выполнено надлежащее граничное условие. В следующих же приближениях это уже не будет иметь места, что связано с появлением отраженных от поверхности разрыва волн.

Место образования разрыва в волне определяется простым геометрическим условием, которое может быть легко выведено с помощью формулы (2) и условия непрерывности потока вещества в разрыве (см. [1], § 78). Именно, разрыв располагается таким образом, чтобы площадь, заключенная под кривой, изображающей профиль волны, осталась такой же, как для однозначной кривой, определяющейся римановским решением.

Рассмотрим теперь тело, совершающее стационарное сверхзвуковое движение со скоростью U . Выбираем координатную ось x вдоль направления движения тела, и пусть r есть расстояние от этой оси. На больших расстояниях от тела потенциал $\varphi(r, z)$ скорости газа определяется в первом приближении волновым уравнением

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

Условие стационарности движения тела

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Комбинируя оба эти уравнения, получим

$$\left(\frac{U^2}{c_0^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).$$

Если ввести вместо x переменную

$$\tau = \frac{x}{\sqrt{U^2 - c_0^2}}, \quad (3)$$

то получим уравнение

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right),$$

т. е. уравнение цилиндрической волны, в котором роль времени играет τ .

На достаточно больших расстояниях цилиндрическую волну в каждом небольшом участке можно рассматривать как плоскую. Скорость перемещения каждой точки профиля волны будет тогда определяться формулой (2). Однако, если мы хотим проследить с помощью этой формулы за смещением точки профиля волны на протяжении больших промежутков времени, необходимо учесть, что амплитуда цилиндрической волны уже в первом приближении падает с расстоянием, как $1/\sqrt{r}$.

Вводя обозначение

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\chi}{\sqrt{r}} \quad (4)$$

и подставляя его в формулу (2), получим

$$u = c_0 \left(1 + \frac{\alpha \chi}{\sqrt{r}} \right). \quad (5)$$

Первый член соответствует перемещению волны без изменения профиля (отвлекаясь от общего уменьшения амплитуды, как $1/\sqrt{r}$), а второй приводит к искажению профиля. Величина δr этого дополнительного смещения точки профиля на расстоянии от некоторого заданного (большого) r_0 до r получится умножением на $c_0^{-1} dr$ и интегрированием в пределах от r до r_0 при постоянном χ . Получим

$$\delta r = 2\alpha \chi (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}).$$

Если рассматривать профиль волны как ход изменения p' с τ при заданном r , то искажение δr профиля будет

$$\delta\tau = \frac{\delta r}{c_0} = \frac{2\alpha\chi}{c_0} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}). \quad (6)$$

Расходящаяся цилиндрическая волна может быть в линейном приближении написана, как известно, в виде

$$\varphi = \int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} f\left(\tau + \frac{\xi}{c}\right) d\xi. \quad (7)$$

Знак в f — обратный обычному соответственно тому, что в данном случае волна распространяется от положительных значений τ к отрицательным (здесь и ниже опускаем для краткости индекс нуль у значений величин для равновесного состояния).

В нашем случае время τ является в действительности координатой x . Выберем начало координат внутри тела (в данный момент времени), причем области впереди от тела соответствуют положительные значения x . Поскольку при сверхзвуковом движении возмущения не распространяются в пространство перед телом, то можно, во всяком случае, утверждать, что $\varphi \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Далее, на достаточном больших расстояниях позади тела, где вызываемые им возмущения малы даже на самой оси $r = 0$, определяемый формулой (7) потенциал расходящейся волны должен оставаться конечным при $r = 0$. Для сходимости интеграла

$$\varphi(0, \tau) = \int_0^{\infty} f\left(\tau + \frac{\xi}{c}\right) \frac{d\xi}{\xi}$$

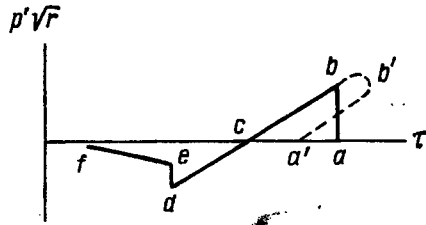
на нижнем пределе (при больших отрицательных τ) необходимо, чтобы было $f(\tau) \rightarrow 0$ при больших отрицательных τ . Отсюда легко вывести, что и $\varphi \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. С другой стороны, переменная часть давления в линейном приближении связана с φ посредством равенства $p' = -\rho c^2 \partial\varphi/\partial\tau$. Интегрируя по τ , получим, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p' d\tau = 0. \quad (8)$$

Это значит, что если в газе имеется сгущение — область $p' > 0$, то непременно должна существовать также и область разрежения, где $p' < 0$. В этом отношении цилиндрическая волна — и то же самое относится к сферической — существенно отличается

ся от плоской волны, которая может состоять и из одних только сгущений или одних только разрежений.

Как известно, при сверхзвуковом движении тела в газе возникает ударная волна; в пространстве впереди этой волны газ неподвижен, а непосредственно за волной имеется область сгущения. Из сказанного выше следует, что сгущение непременно должно смениться разрежением и, следовательно, должна существовать точка, в которой разрежение максимально; благодаря эффекту постепенного искажения профиля эта точка будет отставать от расположенных сзади нее, в результате чего в конце концов получится неоднозначность и появится еще одна ударная волна.



Таким образом, приходим к результату, что по крайней мере на достаточно больших расстояниях от движущегося тела имеется не одна ударная волна, как это обычно принято считать, а две следующие друг за другом волны. В первой волне давление испытывает скачок вверх, затем следует область постепенного уменьшения давления и сгущение сменяется разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во второй ударной волне.

На рисунке схематически изображена (сплошной линией) получающаяся картина зависимости давления p' от τ , т. е. координаты x , при заданном большом значении r ; отрезок ab соответствует первой ударной волне, de — второй волне. В последней давление возрастает лишь до некоторого отрицательного значения, а обращение p' в нуль происходит асимптотически при $\tau \rightarrow -\infty$.

Переходя к количественному расчету изображенного на рисунке профиля, рассмотрим область между обеими ударными волнами. Пусть функция

$$\tau = f(\chi)$$

определяет профиль на некотором расстоянии r_0 .

Учитывая эффект искажения профиля, получим профиль на расстоянии $r > r_0$ путем прибавления к τ смещения $\delta\tau$ согласно (6)

$$\tau = f(\chi) + \frac{2\alpha}{c} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}) \chi. \quad (9)$$

При больших значениях r величина χ мала, и с достаточной точностью можно писать в (9) значение функции $f(\chi)$ при $\chi = 0$,

а также пренебречь $\sqrt{r_0}$ по сравнению с \sqrt{r} . Таким образом,

$$\tau = \frac{2\alpha}{c} \sqrt{r} \chi + \text{const.} \quad (10)$$

Обозначим посредством x_0 значение координаты x в точке c (см. рисунок), где $\chi = 0$. Это значение, конечно, зависит от r по закону $x_0 = \text{const} - r/c$. Переходя к переменным p' и x вместо χ и τ , имеем отсюда

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{2\alpha \sqrt{U^2/c^2 - 1}} \frac{x - x_0}{r}. \quad (11)$$

Таким образом, отрезок bd профиля оказывается прямолинейным. Профиль, который получается непосредственно путем применения римановского решения во всем интервале, изображен на рисунке штриховой линией. В действительности в некоторой точке a имеется разрыв. Положение этой точки определяется указанным выше геометрическим условием равенства площадей $a'b'c$ и abc . Замечая, что $\chi = 0$ в точках a' и c , найдем с помощью (9) для площади $a'b'c$

$$\int_{(cb'a')} \chi d\tau = \int_{(cb'a')} \chi f'(\chi) d\chi,$$

т. е. значение, оказывающееся не зависящим от r . То же самое должно, следовательно, иметь место и для площади abc .

Учитывая зависимость (10) величины χ от τ , получаем без труда, что длина l_1 участка от точки c (где $p' = 0$) до передней ударной волны ($p' = p_1$) пропорциональна

$$l_1 \sim r^{1/4}. \quad (12)$$

Отсюда закон зависимости скачка p_1 давления в передней ударной волне от расстояния будет

$$p_1 = \frac{\text{const}}{r^{3/4}}. \quad (13)$$

Что касается второго разрыва ed (см. рисунок), то можно легко показать, что отношение остающегося за ним давления (давления в точке e) к скачку p_2 давления в разрыве (длина отрезка ed) стремится к единице при $r \rightarrow \infty$, однако сравнительно медленно. Давление позади этого разрыва можно считать равным нулю лишь на очень больших расстояниях r ; скачок p_2 равен при этом p_1 ; полная площадь профиля должна быть равна в силу (8) нулю,

Остановимся еще на сферически симметричном распространении ударной волны, возникающей при взрыве и рассматриваемой на больших расстояниях от места взрыва. Все рассуждения здесь в точности аналогичны приведенным выше.

При сферическом распространении амплитуда волны падает в первом приближении как $1/r$, причем r есть теперь расстояние до центра. Поэтому для скорости u перемещения точек профиля имеем теперь вместо (5)

$$u = c \left(1 + \frac{\alpha\chi}{r} \right), \quad (14)$$

где через χ обозначено

$$\chi = \frac{p'}{p} r. \quad (15)$$

Соответственно этому находим для смещения δr точек профиля на пути от некоторого r_0 до r

$$\delta r = \alpha\chi \ln \frac{r}{r_0}.$$

Если же рассматривать профиль волны как ход изменения p' со временем t , то искажение δt есть

$$\delta t = - \frac{\alpha\chi}{c} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (16)$$

Таким образом, искажение профиля сферической волны увеличивается с расстоянием по логарифмическому закону, т. е. много медленнее, чем у плоской или цилиндрической волны (где оно пропорционально соответственно первой степени или корню из расстояния). Поскольку при распространении реальной волны в газе всегда имеет место обычное поглощение звука, связанное с вязкостью и теплопроводностью, то ввиду медленности возрастания искажения сферическая звуковая волна может поглотиться раньше, чем искажение профиля приведет к образованию разрывов. В частности, если речь идет о распространении взрывной ударной волны, то вторая ударная волна, которая должна была бы, как и в цилиндрическом случае, следовать за ней, может не успеть возникнуть.

Вместо (9) в рассматриваемом случае имеем уравнение

$$t = f(\chi) - \frac{\alpha}{c} \chi \ln \frac{r}{r_0}. \quad (17)$$

Разлагая $f(\chi)$ в ряд по степеням χ и ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$t = - \frac{\alpha}{c} \chi \ln \frac{r}{a} + \text{const}, \quad (18)$$

где a — некоторая постоянная. Отсюда получим для p' опять линейную зависимость от t в виде

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{\alpha} \frac{c(t_0 - t)}{r \ln(r/a)}. \quad (19)$$

Учитывая закон сохранения площади, получим теперь для сферического случая

$$l_1 \sim \sqrt{\ln \frac{r}{a}}, \quad p'_1 \sim \frac{1}{r \sqrt{\ln(r/a)}}. \quad (20)$$

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- 1] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1945.

Лев Давидович Ландау
Собрание трудов, том 1

Утверждено к печати Отделением ядерной физики Академии наук СССР

Редактор А. Л. Черняк. Художник А. Г. Кобтин
Художественно-технический редактор А. П. Гусева

Сдано в набор 27/III 1968 г. Подписано к печати 2/Х 1968 г. Формат 60×90^{1/16}. Бумага № 1
Усл. печ. л. 32+1 вкл. Уч.-изд. л. 25,2. Т-13220. Тираж 15 000. Тип. зак. 317

Цена 2 р.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10