



Σ

А.А.Локшин, Е.А.Сагомонян

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ
В МЕХАНИКЕ
ТВЕРДОГО ТЕЛА



А.А.Локшин, Е.А.Сагомонян

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ
В МЕХАНИКЕ
ТВЕРДОГО ТЕЛА
МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ**

Издательство
Московского университета
1989

УДК 539.3

Локшин А. А., Сагомоян Е. А. Нелинейные волны в механике твердого тела: Метод факторизации. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 144 с. — ISBN 5—211—00326—8.

Монография посвящена применению метода факторизации к решению нелинейных одномерных волновых уравнений, возникающих в механике деформируемого твердого тела. Получены новые классы асимптотических и точных решений. Для волн в средах, обладающих наследственными свойствами, построена модификация приближения Ландау — Уизема.

Для научных работников, специализирующихся в области волновой динамики.

Ил. 10. Библиогр.: 103 назв.

Рецензенты:

профессор В. М. Бабич,

д-р физико-математических наук В. Л. Бердичевский,

профессор В. А. Шачнев

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Локшин Александр Александрович,
Сагомоян Елена Артуровна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ
В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Зав. редакцией С. И. Зеленский. Редактор О. В. Семененко. Художественный редактор Б. С. Вехтер. Технический редактор Г. Д. Колоскова. Корректоры И. А. Мущникова, С. Ф. Будаева

ИБ № 3264

Сдано в набор 06.06.88.

Подписано в печать 09.01.89.

Л-15004

Формат 60×90/16

Бумага тип. № 1

Гарнитура литературная

Высокая печать

Усл. печ. л. 9,0

Уч.-изд. л. 8,69

Тираж 1780 экз.

Заказ 384

Изд. № 228

Цена 1 р. 70 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

Л 1603040000—026—84—89
077(02)—89

ISBN 5—211—00326—8

© Издательство Московского
университета, 1989 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Нелинейные волны в однородной среде	7
§ 1. Инварианты Римана, характеристики, условия на разрыве	7
§ 2. Принцип равных площадей	13
§ 3. Точная факторизация нелинейного волнового уравнения	23
§ 4. Ударная волна в простой волне	30
§ 5. Ударная волна в простой волне (продолжение)	39
Глава 2. Нелинейные волны в плавно неоднородных средах	41
§ 1. Малая квадратичная нелинейность. Приближение Ландау—Уизема	41
§ 2. Степенная нелинейность	52
§ 3. Нелинейность общего вида. Теорема о равномерной асимптотической факторизации нелинейного волнового уравнения с плавно меняющимся коэффициентом. Условия точной факторизации и их применения	56
§ 4. Обобщение теоремы о равномерной асимптотической факторизации. Нестационарные среды	64
Глава 3. Нелинейные волны в средах с памятью	71
§ 1. Вспомогательные сведения из наследственной теории упругости	71
§ 2. Малая квадратичная нелинейность. Теорема об асимптотической факторизации нелинейного волнового уравнения с памятью	74
§ 3. Непрерывные волны стационарного профиля и ненулевые решения однородных интегральных уравнений Вольтерра	79
§ 4. Разрывные волны стационарного профиля и самосогласованные интегральные уравнения Вольтерра	97
§ 5. Стабилизирующиеся волны. Метод Рока	107
§ 6. Нестационарные волны. Аналог формулы Ландау — Уизема	111
§ 7. Нелинейность общего вида. Дальнейшие теоремы о факторизации нелинейных волновых уравнений с памятью	117
§ 8. Экспоненциальная функция памяти. Точные и асимптотические формулы для нестационарных волн	124

§ 9. Отражение волны от границы линейно-упругой и нелинейно-наследственной сред	131
§ 10. Взаимодействие малой квадратичной нелинейности, памяти и плавной неоднородности	134
Список обозначений	139
Литература	140

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются одномерные волны, описываемые различными видами нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике деформируемого твердого тела. В основу изложения положен метод факторизации, дающий точное либо асимптотическое разложение исследуемых волновых уравнений на множители первого порядка.

Первая глава является в основном подготовительной. В ней собраны известные сведения о характеристиках, инвариантах Римана, простых волнах и т. п. Основной результат первой главы — теорема 3.1 из § 3 о возможности точно факторизовать нелинейное волновое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0.$$

Эта теорема позволяет затем строить факторизации более сложных волновых уравнений, встречающихся в следующих главах.

Вторая глава посвящена нестационарным волнам в нелинейных плавно неоднородных средах. Основным результатом главы — теоремы о равномерной асимптотической факторизации нелинейных волновых уравнений с плавно меняющимися коэффициентами и описание соответствующих одноволновых процессов без предположения о малости амплитуды волны (§ 3, 4).

Остановимся подробнее на содержании третьей главы, в которой исследуются волны в нелинейных наследственных средах. Нелинейные волновые уравнения с памятью, описывающие распространение таких волн, также удается факторизовать (§ 2, 7, 10). Из получающихся одноволновых уравнений видно, что в рассматриваемых средах взаимодействуют два в каком-то смысле противоположных фактора: нелинейное укрупнение фронтов и релаксационное сглаживание. В результате этого взаимодействия при определенных условиях могут образоваться волны стационарного профиля, т. е. волны, перемещающиеся в пространстве, не меняя своей формы. Показано, что такие волны описываются ненулевыми решениями однородных (§ 3) или самосогласованных (§ 4) нелинейных интегральных уравнений. Поэтому с чисто математической точки зрения само существование таких волн заранее не очевидно.

Результаты § 4 гл. 3 дают ответ также на вопрос о том, могут ли распространяться сильные разрывы в нелинейных сре-

дах с сингулярной памятью (т. е. с функцией памяти, обладающей интегрируемой особенностью в текущий момент времени). Этот вопрос естественным образом возник после того, как было доказано [31], что в линейных средах с сингулярной памятью сильные разрывы распространяться не могут. В § 4 на примере волн стационарного профиля показано, что если амплитуда волны достаточно велика, то нелинейный эффект укручения оказывается сильнее сглаживания за счет релаксации, так что даже при сингулярной функции памяти возникают сильные разрывы.

Из других результатов гл. 3 отметим обобщение асимптотического подхода Ландау (предложенного им в [20] для волн в плавно неоднородных средах) на случай сред с памятью (§ 6 и 10).

В заключение укажем на определенную идейную близость используемого в этой книге метода факторизации с методом дифференциальных связей [55, 61] и методом многих масштабов [2, 5]. На взгляд авторов, дальнейшее взаимодействие этих методов может оказаться плодотворным.

В основу книги положены результаты, полученные авторами в последние годы.

Авторы глубоко благодарны Н. В. Зволинскому, чья строгая критика способствовала улучшению этой книги. Кроме того, авторы благодарны В. М. Бабичу, В. Л. Бердичевскому, М. А. Гринфельду, О. В. Семененко и В. А. Шачневу, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд важных замечаний. Наконец, авторы признательны О. С. Виноградовой, М. А. Ицкович, С. Л. Лопатникову и В. Е. Року за полезные обсуждения.

Авторы

ГЛАВА 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В данной главе собраны подготовительные сведения о решениях нелинейных волновых уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих, как известно, распространение продольных волн в нелинейно-упругих однородных стержнях. Центральный результат этой главы — теорема 3.1 о точной факторизации нелинейного волнового уравнения.

§ 1. ИНВАРИАНТЫ РИМАНА, ХАРАКТЕРИСТИКИ, УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ

1. Уравнения движения однородного нелинейного стержня

Рассмотрим однородный стержень плотности $\rho = \text{const}$, в котором деформация ε и напряжение σ связаны соотношением

$$\varepsilon = a(\sigma), \quad (1.1)$$

где $a(0) = 0$, $a'(\sigma) > 0$, $a''(\sigma) \neq 0$. Нас будут интересовать продольные волны напряжений (и деформаций), распространяющихся в таком стержне, после того как к нему приложена нагрузка. (Эффектами, связанными с поперечной инерцией, мы будем пренебрегать.)

Предположим, что в некоторой области изменения времени t и лагранжевой координаты x напряжение и деформация являются гладкими функциями, и запишем уравнения движения стержня:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

(здесь v — скорость материального элемента стержня). Подставляя во второе из этих уравнений значение ε из (1.1), приходим к известной в механике нелинейной системе

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial a(\sigma)}{\partial t}. \quad (1.3)$$

(Подобные системы возникают также в газовой динамике и в механике жидкости; см. [55, 63].)

Нетрудно видеть, что из написанной нами системы уравнений можно исключить функцию v . Для этого нужно только продифференцировать (1.2) по x , а (1.3) — по t и сложить. Тогда система (1.2), (1.3) сведется к одному нелинейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0. \quad (1.4)$$

2. З а м е ч а н и е. Если в некоторой области изменения переменных t и x функции $\sigma = \sigma(t, x)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t, x)$ — гладкие, то система (1.2), (1.3) и уравнение (1.4) представляют собой по существу эквивалентные объекты. Но если функции σ и ε терпят разрывы, то между системой (1.2), (1.3) и уравнением (1.4) существует тонкая разница, связанная с неединственностью решения уравнения (1.4). Подробнее этот вопрос будет обсуждаться ниже.

3. Инварианты Римана и характеристики

Определим функции, называемые *инвариантами Римана* системы (1.2), (1.3):

$$r \equiv v + \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma, \quad s \equiv v - \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma. \quad (1.5)$$

Функции r и s , как нетрудно проверить, удовлетворяют уравнениям

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad (1.6)$$

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

Каждое из уравнений (1.6), (1.7) может быть переписано в эквивалентном виде, использующем *характеристики* этих уравнений.

Рассмотрим, например, уравнение (1.6) и, временно обращаясь с функцией $\sigma = \sigma(t, x)$ как с известной, запишем на плоскости t, x следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение характеристик):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{\rho a'(\sigma)}}{-1}, \quad \sigma = \sigma(t, x).$$

В качестве правой части этого уравнения мы, как нетрудно заметить, взяли отношение коэффициента при $\partial r / \partial t$ к коэффициенту при $\partial r / \partial x$ в (1.6).

Тогда на каждой характеристике $t=t(x)$, определяемой каким-либо решением последнего уравнения, должно быть

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\partial r}{\partial t} \frac{dt}{dx} + \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\sqrt{\rho a'(\sigma)}}{-1} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

(мы воспользовались правилом вычисления полной производной и уравнением (1.6)). Система

$$\frac{dt}{dx} = -\sqrt{\rho a'(\sigma)}, \quad \frac{dr}{dx} = 0 \quad (1.8)$$

и представляет собой искомую эквивалентную запись уравнения (1.6).

Аналогично уравнению (1.7) соответствует система

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\rho a'(\sigma)}, \quad \frac{ds}{dx} = 0. \quad (1.9)$$

Отметим, что если поменять t и x ролями, то вместо (1.8) и (1.9) мы придем соответственно к системам

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma)}}, \quad \frac{dr}{dt} = 0 \quad (1.8')$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma)}}, \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad (1.9')$$

эквивалентным (1.8) и (1.9).

Из (1.8) видно, что на каждой характеристике отрицательного наклона t^- , определяемой уравнением $dt/dx = -\sqrt{\rho a'(\sigma)}$, величина r постоянна. Аналогично из (1.9) следует, что величина s постоянна на каждой характеристике t^+ положительного наклона, определяемой уравнением $dt/dx = \sqrt{\rho a'(\sigma)}$.

Конечно, пока величина σ неизвестна, сами характеристики семейств $\{t^-\}$ и $\{t^+\}$ тоже еще не определены. Однако, несмотря на это, факт постоянства инвариантов Римана r и s вдоль соответствующих кривых очень важен.

Подчеркнем, что уравнения (1.8) и (1.9) для инвариантов r и s справедливы лишь в области гладкого изменения функций v и σ . Если функции v и σ терпят разрывы на некоторой кривой, то инварианты r и s также будут терпеть разрывы на этой кривой.

4. Уравнение простых волн

Пусть $v=v_0=\text{const}$, $\sigma=\sigma_0=\text{const}$ при $x>0$, $t=0$, и пусть $v(t, x)$, $\sigma(t, x)$ — гладкие функции своих аргументов. Тогда,

очевидно, в области, заметаемой характеристиками отрицательного наклона, исходящими из точек полуоси $x > 0$, имеем

$$r \equiv \text{const}, \quad (1.10)$$

поскольку r принимает одно и то же значение на каждой такой характеристике l^- (см. рис. 1).

Теперь первое из равенств (1.5) дает нам в силу (1.10) функциональную связь между v и σ :

$$v = - \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma + \text{const}. \quad (1.11)$$

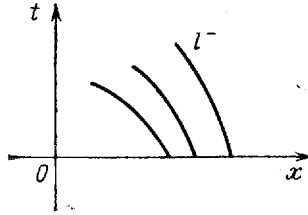


Рис. 1

Используя эту связь, исключим v из второго равенства (1.5). Имеем

$$s = -2 \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma + \text{const}.$$

Наконец, подставляя полученное выражение в (1.7), приходим к дифференциальному уравнению первого порядка для σ , справедливому в области, где тождественно постоянен инвариант Римана r :

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

Аналогично, если $s \equiv \text{const}$ в некоторой области, то в этой области справедливо уравнение для напряжений

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (1.12')$$

Уравнения (1.12) и (1.12') называются *уравнениями простых волн*. Очевидно, что уравнение (1.12) описывает волну, движущуюся вправо, а уравнение (1.12') — волну, движущуюся влево.

5. Условия на разрыве

Пусть на кривой $t=t(x)$ функции ϵ , v и σ терпят разрывы 1-го рода. Такие разрывы называют *сильными*, в противоположность слабым разрывам, при которых функции ϵ , σ , v сохраняют свою непрерывность, а рвутся только их производные. Будем называть кривую $t=t(x)$ *ударным фронтом* волны и введем следующее обозначение для скачка функции, терпящей разрыв на ударном фронте:

$$[f] = f(t(x) + 0, x) - f(t(x) - 0, x).$$

Тогда, как известно [18], для скачков $[\varepsilon]$, $[\sigma]$ и $[v]$ должны выполняться соотношения:

$$[\sigma] = -\rho[v]U, \quad U \equiv \left(\frac{dt(x)}{dx} \right)^{-1} \quad (1.13)$$

(динамическое условие совместности, вытекающее из закона сохранения импульса);

$$[v] = -[\varepsilon]U \quad (1.14)$$

(кинематическое условие совместности);

$$[\varepsilon] = [a(\sigma)] \quad (1.15)$$

(это условие сразу следует из определяющего соотношения (1.1)).

Исключая из (1.13)–(1.15) величины скачков $[v]$ и $[\varepsilon]$, легко получаем следующее условие на скорость ударного фронта U , выраженное в терминах напряжений:

$$U = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho[a(\sigma)]}}. \quad (1.16)$$

(Для определенности мы выбрали здесь знак «плюс» перед радикалом, что соответствует ударной волне, движущейся вправо.)

6. Условие устойчивости разрывов

Необходимо отметить, что возникающие сильные разрывы должны удовлетворять также следующему условию устойчивости [43, 73]:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x)-0, x))}} < U < \frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x)+0, x))}}. \quad (1.17)$$

Таким образом, если назвать величину $1/\sqrt{\rho a'(\sigma)}$ местной скоростью звука (в лагранжевых координатах), то можно сказать, что скорость движения ударного фронта U должна быть сверхзвуковой с точки зрения наблюдателя, находящегося перед фронтом, и дозвуковой с точки зрения наблюдателя, находящегося за фронтом.

Условие (1.17), очевидно, может быть переписано также в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x+0))}} < U < \frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x-0))}}. \quad (1.17')$$

Приведем нестрогие соображения (взятые нами из [4]), которые объясняют смысл введенного условия устойчивости. Рассмотрим разрывный профиль волны напряжений, изображенный

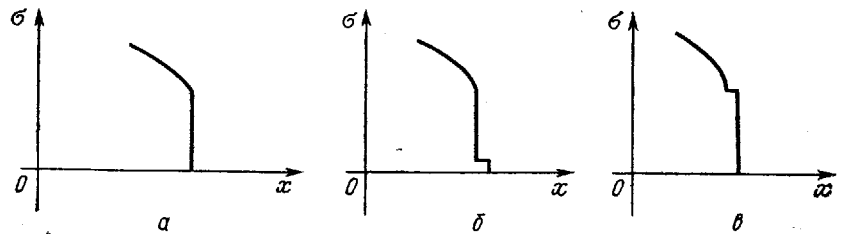


Рис. 2

на рис. 2, а, и временно допустим, что вместо левого неравенства (1.17') выполнено противоположное неравенство:

$$\frac{U}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x+0))}} > U.$$

Однако малое разрывное возмущение профиля, изображенное на рис. 2, б, будет в силу (1.16) распространяться со скоростью, близкой к $1/\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x+0))}$, и вследствие сделанного допущения обгонит основной ударный фронт. Серия подобных малых возмущений, очевидно, приведет к разрушению ударной волны.

Допустим теперь, что вместо правого неравенства (1.17') справедливо противоположное неравенство:

$$U > \frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x-0))}}.$$

Но малое разрывное возмущение, изображенное на рис. 2, в, будет в силу (1.16) распространяться со скоростью, близкой к $1/\sqrt{\rho a'(\sigma(t(x), x-0))}$. В силу сделанного допущения это возмущение отстанет от основного ударного фронта. Как и в предыдущем случае, серия подобных возмущений, очевидно, разрушит ударный фронт. Таким образом, замена хотя бы одного из неравенств в (1.17') (или, что то же самое, в (1.17)) на противоположное приводит к неустойчивости ударной волны.

Напротив, выполнение условия устойчивости (1.17') (или, что то же, (1.17)) приводит к тому, что в ситуации, изображенной на рис. 2, б, основной ударный фронт догоняет возмущение, а в ситуации, изображенной на рис. 2, в, возмущение догоняет ударный фронт. Следовательно, ударная волна действительно оказывается устойчивой.

Замечание 1. Из (1.16) и (1.17) ясно, что условие устойчивости может быть переписано также в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} [\sigma] > 0 & \text{ при } a''(\sigma) < 0, \\ [\sigma] < 0 & \text{ при } a''(\sigma) > 0. \end{aligned} \quad (1.17'')$$

Замечание 2. Случай, когда $a''(\sigma)$ имеет нули, является намного более сложным (см. [3, 38]), и мы его здесь не рассматриваем.

7. Слабые разрывы

Предположим теперь, что ϵ , σ и v являются непрерывными функциями в некоторой области, однако их производные терпят разрыв на кривой l , принадлежащей этой области. Таким образом, ϵ , σ и v терпят *слабые разрывы* на кривой l . Однако слабый разрыв можно рассматривать так же, как сильный разрыв бесконечно малой интенсивности. Переходя в (1.16) к пределу при $[\sigma] \rightarrow 0$, получаем, что скорость распространения слабого разрыва равна $1/\sqrt{\rho a'(\sigma)}$, т. е. слабые разрывы распространяются по характеристикам. Замечательно, что этот факт можно вывести непосредственно из системы уравнений (1.2), (1.3), не обращаясь к условиям на (сильном) разрыве. Дальнейшие подробности см., например, в [55, 63].

§ 2. ПРИНЦИП РАВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ

1. Нелинейные гиперболические уравнения 1-го порядка. Условия на разрыве

В этом параграфе мы приведем некоторые простейшие сведения о непрерывных и разрывных решениях нелинейных гиперболических уравнений 1-го порядка.

Пусть $w = w(t, x)$ — функция, гладкая всюду, за исключением кривой $t = t(x)$, на которой она терпит разрыв 1-го рода. Будем считать, что в дополнении к линии разрыва справедливо следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial \Phi(w)}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(w) > 0$, $\Phi''(w) \neq 0$. Кроме того, будем предполагать, что на линии разрыва $t = t(x)$ выполнено условие

$$U = \frac{[w]}{[\Phi(w)]}, \quad (2.2)$$

где $U \equiv \left(\frac{dt(x)}{dx} \right)^{-1}$. Уравнение (2.1), дополненное таким условием, мы будем называть *законом сохранения*. (О происхождении условий вида (2.2) для уравнений, представляющих собой законы сохранения физических величин, см. [63].)

Можно показать [63], что разрывная функция w , удовлетворяющая (2.1) и (2.2), является обобщенным решением уравнения (2.1) в следующем смысле: для произвольной гладкой финитной функции $g(t, x)$

$$-\iint (g'_t \varphi(w) + g'_x w) dt dx = 0.$$

Обратно, обобщенное решение уравнения (2.1), гладкое вне кривой $t=t(x)$ и обладающее конечными односторонними пределами при подходе к этой кривой, удовлетворяет условию (2.2) (а в области гладкости, очевидно, является обычным решением уравнения (2.1)).

Как и в § 1, переходя в условии на разрыве к пределу при величине скачка, стремящейся к нулю, получаем, что слабые разрывы функции w распространяются по характеристикам $\frac{dt}{dx} = \varphi'(w)$ уравнения (2.1).

2. Постоянство интегралов от решений

Решения «закона сохранения» (2.1), (2.2) обладают следующим важным свойством. Оказывается, что если $w=0$ при $t \rightarrow \pm \infty$, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t, x) dt = \text{const.} \quad (2.3)$$

Действительно, если семейство прямых $x=\text{const}$ не пересекает линии разрыва, то, интегрируя (2.1) по t , сразу получаем

$$\varphi(w) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} w dt = 0,$$

что и доказывает справедливость (2.3) для данного случая.

Если же семейство прямых $x=\text{const}$ пересекает линию разрыва, то для доказательства соотношения (2.3) поступим следующим образом. (Здесь мы обращаем рассуждения, приведенные в [63].) В силу (2.1)

$$\left(\int_{-\infty}^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial \varphi(w)}{\partial t} dt + \left(\int_{-\infty}^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dt = 0. \quad (2.4)$$

Однако, очевидно,

$$\left(\int_{-\infty}^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial \varphi(w)}{\partial t} dt = -[\varphi(w)] \quad (2.5)$$

в силу того, что $w=0$ при $t \rightarrow \pm \infty$, а $\varphi(0)=0$. С другой стороны, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} w dt &= \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) w dt = w(t(x)-0, x) \frac{dt}{dx} + \\ &+ \int_{-\infty}^{t(x)-0} \frac{\partial w}{\partial x} dt - w(t(x)+0, x) \frac{dt}{dx} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left(\int_{-\infty}^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dt = [w] \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} w dt. \quad (2.6)$$

Подставляя теперь (2.5) и (2.6) в (2.4), получаем

$$-[\varphi(w)] + [w] \frac{dt(x)}{dx} + \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} w dt = 0,$$

откуда в силу условия на разрыве (2.2)

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} w dt = 0,$$

что и требовалось установить.

Наконец, возможна еще ситуация, когда, например, при $0 < x < x_0$ функция $w(t, x)$ является гладкой, а при $x > x_0$ у нее имеется сильный разрыв. Тогда из сказанного выше следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dt = C_1 \quad \text{при } 0 < x < x_0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dt = C_2 \quad \text{при } x > x_0.$$

где C_1, C_2 — постоянные. Однако, очевидно, $w(t, x_0-0) = w(t, x_0+0)$ (иначе прямая $x=x_0$ была бы линией разрыва

для w , на которой не выполнено условие на разрыве (2.2)). Поэтому $C_1 = C_2$. Тем самым равенство (2.3) установлено и в общем случае.

3. Решение граничной задачи методом характеристик

Вернемся к уравнению (2.1). Будем сначала считать функцию w гладкой и перепишем (2.1) в виде

$$\varphi'(w) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

Предположим для определенности, что для этого уравнения поставлена следующая граничная задача:

$$\begin{aligned} w &= 0 \text{ при } x > 0, t = 0, \\ w(t, 0) &= w_0(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $w_0(t)$ — гладкая функция, определенная при $t \geq 0$ и равная нулю при $t > T > 0$. Мы будем предполагать также, что функция $w_0(t)$ может быть продолжена нулем на полуось $t < 0$ с сохранением гладкости; за этой продолженной функцией мы сохраним прежнее обозначение $w_0(t)$.*)

Покажем, что в области гладкости функции w решение задачи (2.7), (2.8) может быть построено аналитически методом характеристик.

Действительно, запишем уравнения характеристик для (2.7):

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'(w), \quad \frac{dw}{dx} = 0. \quad (2.9)$$

Из второго уравнения этой системы ясно, что на каждой характеристике $w = \text{const}$. Поэтому из первого уравнения системы (2.9) вытекает, что

$$\frac{dt}{dx} = \text{const}.$$

Следовательно, все характеристики уравнения (2.7) — прямые линии.

*) Такое продолжение граничной функции удобно для применения метода характеристик. В дальнейшем в задачах вида (2.8) с нулевыми начальными данными мы всегда будем считать граничную функцию продолженной нулем на полуось $t < 0$.

Решение системы (2.9), очевидно, может быть записано в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0(\tau), \\ t &= x\varphi'(\omega_0(\tau)) + \tau, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где τ — параметр, равный значению t при $x=0$. Исключая из (2.10) параметр τ , можно получить также следующую неявную формулу для ω :

$$\omega = \omega_0(t - x\varphi'(\omega)). \quad (2.11)$$

Ясно, что (2.10) определяет $\omega = \omega(t, x)$. Фиксируем теперь x и будем рассматривать ω как функцию переменной t . Очевидно, что профиль $\omega(t, x)$, $x = \text{const}$, можно рассматривать как результат эволюции (при увеличении x) профиля $\omega_0(\tau)$, заданного на границе $x=0$. Чтобы лучше представить себе эту эволюцию, фиксируем некоторое $\tau > 0$ и соответствующую «высоту» профиля $\omega_0(\tau)$. Тогда при $x = \text{const} > 0$, как видно из (2.10), эта же высота профиля будет достигаться при $t = x\varphi'(\omega_0(\tau)) + \tau$. Таким образом, граничный профиль $\omega_0(\tau)$ будет деформироваться, при этом для достаточно больших значений x ($x > x_0$) деформированный профиль $\omega(t, x)$, $x = \text{const}$, обязательно станет неоднозначным (произоидет опрокидывание волны). В области $x > x_0$ решение уравнений (2.10) (или, что то же, уравнения (2.11)) мы будем обозначать $\tilde{\omega}(t, x)$.

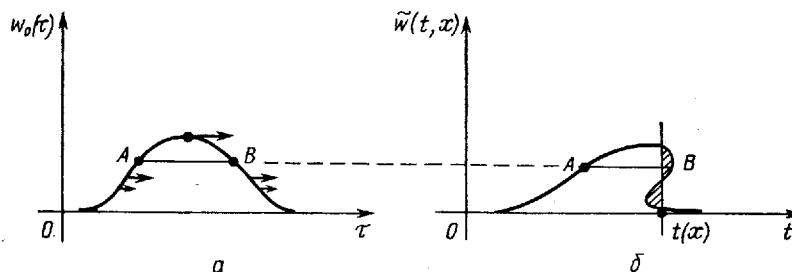


Рис. 3

На рис. 3 изображено опрокидывание в случае, когда граничный профиль $\omega_0(\tau)$ неотрицателен и когда большие значения граничного профиля сдвигаются (с ростом x) на большие отрезки вдоль временной оси. Однако последнее означает, что большие значения распространяются с меньшими скоростями. Отсюда вытекает, что:

функция $\varphi'(\omega)$ является возрастающей (см. (2.9));
по оси x опрокидывание происходит против хода волны.

Если бы мы рассматривали случай, когда $\phi'(\omega) < 0$, то направление опрокидывания по оси x поменялось бы на противоположное.

4. Градиентная катастрофа и ее координаты

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Однозначный граничный профиль $w_0(\tau)$ деформировался (с ростом x) таким образом, что его значения перемещались по характеристикам уравнения (2.7). Следовательно, возникновение неоднозначности в результате этой деформации говорит о том, что при достаточно больших x характеристики уравнения (2.7) пересекаются. Ясно, что если $\tilde{w}(t, x)$ является в некоторой области k -значной функцией, то в каждой точке этой области пересекаются k характеристик уравнения (2.7). (Для граничного профиля $w_0(\tau)$, обладающего единственным экстремумом, деформированный профиль \tilde{w} , как это видно из рис. 3, не более, чем трехзначен. Так что в этом случае ни при каких t, x не может пересекаться больше трех характеристик уравнения (2.7).)

Далее, начало опрокидывания, очевидно, характеризуется тем, что у профиля волны впервые (т. е. при некотором наименьшем $x = x_0 > 0$) появляется вертикальная касательная и тем самым градиент функции w обращается в бесконечность. Это явление называется *градиентной катастрофой*.

Ясно, что градиентной катастрофе соответствует самое первое (считая по оси x) пересечение характеристик. Нетрудно видеть также, что самое первое пересечение обязательно будет пересечением бесконечно близких характеристик. Действительно, если характеристики l_1 и l_2 , исходящие из точек τ_1 и τ_2 оси t , пересекаются при некотором $x = x_1 > 0$, то характеристика l , исходящая из произвольной точки $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, обязательно пересечется с одной из характеристик l_1 или l_2 при $x = x_1' < x_1$ (рис. 4). Отсюда и следует сделанное утверждение.

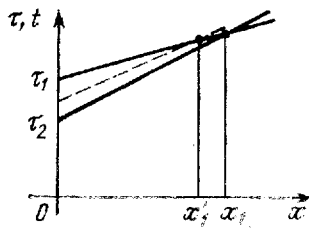


Рис. 4

Из сказанного, очевидно, вытекает, что точка (t_0, x_0) , в которой происходит градиентная катастрофа, принадлежит огибающей семейства характеристик уравнения (2.7). Ясно также, что на плоскости t, x при $x < x_0$ точки огибающей отсутствуют, т. е. x_0 — наименьшая из абсцисс точек огибающей. Установленный факт имеет место и в более общей ситуации, когда характеристики уравнения

криволинейны, а значения решения уравнения не постоянны вдоль характеристик (см. по этому поводу также [63]).

Расстояние, на котором происходит градиентная катастрофа, равно [63]

$$x_0 = - \frac{1}{\left. \frac{d}{d\tau} \Phi'(\omega_0(\tau)) \right|_{\tau=\tau^*}}, \quad (2.12)$$

где τ^* — точка, в которой производная $\frac{d}{d\tau} \Phi'(\omega_0(\tau))$ достигает наибольшего по модулю отрицательного значения; для простоты мы будем считать, что эта точка единственная. (Если $\frac{d}{d\tau} \Phi'(\omega_0(\tau)) \geq 0$, то градиентная катастрофа вообще не наступает.) Время возникновения градиентной катастрофы вычисляется из (2.10):

$$t_0 = x_0 \Phi'(\omega_0(\tau^*)) + \tau^*. \quad (2.12')$$

Можно показать [63], что в точке (t_0, x_0) становятся бесконечными обе производные w'_t и w'_x .

5. Принцип равных площадей. Построение разрывного решения

Для физических задач необходимы, как правило, однозначные решения. Возникновение неоднозначности, описанное нами выше, свидетельствует о том, что предположение о гладкости решения уже неприемлемо и у настоящего решения задачи возникает разрыв (который должен удовлетворять уже введенному условию (2.2)).

Оказывается, однако, что построить разрывное решение $w(t, x)$ нашей задачи (2.1), (2.2), (2.8) можно очень просто, подправив функцию $\tilde{w}(t, x)$ с помощью следующего геометрического приема, называемого *принципом равных площадей*.

Заметим, во-первых, что преобразование граничного профиля $\omega_0(\tau)$ по формулам (2.10) сохраняет площадь, ограничиваемую профилем. Действительно, при этом преобразовании сохраняются длины горизонтальных отрезков, соединяющих точки профиля, расположенные на равных высотах. Кроме того, расстояния этих горизонтальных отрезков до оси времени также не меняются (см. рис. 3). Отсюда по теореме Фубини и вытекает сделанное утверждение.

Во-вторых, для неизвестного нам пока что однозначного разрывного решения, как мы знаем, должно быть справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dt = \text{const}$$

(см. (2.3)).

Теперь уже нетрудно догадаться, что истинное решение $w(t, x)$ может быть получено из $\tilde{w}(t, x)$ способом, изображенным на рис. 3, б. А именно, при каждом фиксированном $x > x_0$ нужно провести вертикальную прямую на плоскости t, \tilde{w} таким образом, чтобы области, заштрихованные на рис. 3, б, имели равные площади. (Точку пересечения этой вертикальной прямой с осью t мы обозначим через $t(x)$.) Получающийся в результате разрывный профиль, изображенный на рис. 3, б жирной линией, соответствует искомому разрывному, но однозначному решению нашей задачи.

Тот факт, что построенная функция $w(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) вне линии разрыва $t=t(x)$, очевиден. Справедливость начального и граничного условий (2.8) также ясна. Наконец, нетрудно показать [63], что для введенного нами разрыва действительно удовлетворяется условие на разрыве (2.2), причем скорость этого разрыва удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\varphi'(\omega(t(x)-0, x))} < U < \frac{1}{\varphi'(\omega(t(x)+0, x))} \quad (2.13)$$

(здесь $U \equiv \left(\frac{dt(x)}{dx}\right)^{-1}$).

З а м е ч а н и е 1. Те же рассуждения, что и в § 1, показывают, что (2.13) является условием устойчивости ударного фронта. Из (2.2) ясно, что (2.13) может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} [\omega] > 0 \text{ при } \varphi''(\omega) < 0, \\ [\omega] < 0 \text{ при } \varphi''(\omega) > 0. \end{aligned} \quad (2.13')$$

З а м е ч а н и е 2. Если граничная функция $w_0(\tau)$ имеет вид, изображенный на рис. 3, а (т. е. обращается в нуль вне компактного множества и имеет единственный экстремум), то геометрически очевидно, что линия фронта $t=t(x)$, $x > x_0$, будет представлять собой непрерывную однозначную возрастающую функцию. Очевидно также, что величина разрыва $[\omega]$ будет изменяться вдоль фронта непрерывным образом, не обращаясь при этом в нуль. Можно показать, что при этом $[\omega] \sim \text{const} \times t^{-1/2}$, $t \rightarrow \infty$ (см. [7, 19, 63]).

6. Пример (см. [55]). Пусть $\varphi(w) = w + kw^2/2$, $k > 0$, и пусть

$$w = 0 \text{ при } x > 0, t = 0,$$

$$w(t, 0) = \Theta(t), \text{ где } \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда решение уравнения (2.1), даваемое методом характеристик, оказывается непрерывным при $x > 0$ и имеет вид

$$w_1(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > (1+k)x, \\ \frac{t/x - 1}{k} & \text{при } x < t < (1+k)x, \\ 0 & \text{при } t < x. \end{cases}$$

С другой стороны, уравнение (2.1) при тех же начальном и граничном условиях имеет разрывное решение

$$w_2(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > \left(1 + \frac{k}{2}\right)x, \\ 0 & \text{при } t < \left(1 + \frac{k}{2}\right)x, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию на разрыве

$$U = \frac{[w]}{[\varphi(w)]} = \frac{1}{1 + k/2}.$$

Ясно, однако, что решение $w_2(t, x)$ не удовлетворяет условию устойчивости (2.13). Если рассмотреть непрерывный граничный профиль, близкий к $\Theta(t)$, то соответствующее единственное решение задачи (которое строится методом характеристик) будет близко к $w_1(t, x)$ и тем самым будет сильно отличаться от неустойчивого разрывного решения $w_2(t, x)$.

Таким образом, в рассмотренном примере естественно считать истинным решением именно $w_1(t, x)$. Картины характеристик для решений $w_1(t, x)$ и $w_2(t, x)$ изображены соответственно на рис. 5, а и б.

7. Дифференциальное уравнение для разрыва, распространяющегося по невозмущенной области

Рассмотрим теперь случай, когда в области перед фронтом $w = 0$. (Ясно, что в этом случае разрыв должен быть задан непосредственно в граничном условии.) Тогда нетрудно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для линии фронта из следующих соображений, не использующих принципа равных площадей.

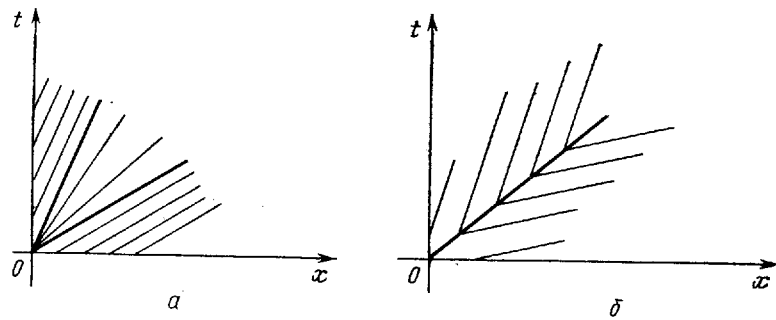


Рис. 5

Из неявного соотношения (2.11), которое в области неоднозначности принимает вид

$$\tilde{w} = w_0(t - x\varphi'(\tilde{w})),$$

очевидно, следует, что в рассматриваемом случае для истинного разрывного решения w на фронте справедливо соотношение

$$[w] = w_0(t - x\varphi'([w])). \quad (2.14)$$

Присоединяя сюда условие на разрыве (2.2), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{\varphi([w])}{[w]}, \quad (2.15)$$

получаем систему для определения двух функций $t(x)$ и $[w]$.

Из системы (2.14), (2.15) нетрудно исключить скачок $[w]$. Действительно, разрешим (2.14) относительно $[w]$, выбирая наибольший по модулю корень:

$$[w] = G(t, x),$$

тогда из (2.15) следует, что

$$\frac{dt(x)}{dx} = \psi(t, x), \quad (2.16)$$

где обозначено

$$\psi(t, x) \equiv \frac{\varphi(G(t, x))}{G(t, x)}.$$

Если ударный фронт исходит из начала координат $x=0$,

в момент $t=0$, то (2.16) должно быть дополнено очевидным условием

$$t(0) = 0. \quad (2.17)$$

Решение $t(x)$ задачи (2.16), (2.17) может быть построено, например, методом ломаных Эйлера с любой степенью точности. Затем величина $[\omega]$ определится из (2.14).

Отметим, что подход к определению ударного фронта, изложенный в этом пункте, может быть применен и в некоторых более общих ситуациях, где принцип равных площадей не имеет места.

§ 3. ТОЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

1. Вернемся к волнам напряжений в нелинейно-упругом стержне, которые мы начали изучать в § 1. Там нам впервые встретилось нелинейное волновое уравнение для напряжений:

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

всегда справедливое в области гладкого изменения функции $\sigma(t, x)$.

С другой стороны, мы видели, что если для системы уравнений (1.2), (1.3) инвариант Римана r тождественно постоянен в некоторой области, то напряжение σ удовлетворяет в этой области уравнению простой волны, бегущей вправо:

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Если же в некоторой области тождественно постоянен инвариант Римана s , то тогда для σ в этой области справедливо уравнение простой волны, бегущей влево:

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Но так как нелинейное волновое уравнение (3.1) справедливо всегда (в области гладкости $\sigma(t, x)$), то каждое гладкое решение каждого из уравнений (3.2) и (3.3), очевидно, будет также решением и уравнения (3.1). (Уравнения (3.2) и (3.3) в области гладкости функции $\sigma(t, x)$ могут быть аналитически решены методом характеристик, как это было показано в п. 3 § 2.) Это наводит нас на мысль о том, что операторы 1-го порядка из левых частей (3.2) и (3.3) могут быть выделены как множители в нелинейном волновом операторе из (3.1).

2. Действительно, справедлива

Теорема 3.1 [23]. Уравнение (3.1) может быть факторизовано одним из следующих двух способов:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \sigma = 0 \quad (3.4)$$

(одновременно выбираются либо верхние, либо нижние знаки).

Замечание. Все величины в фигурных скобках в левой части (3.4) рассматриваются как операторы (дифференцирования или умножения на функцию). При этом предполагается, что при перемножении раньше действует оператор, стоящий правее. Например:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(a'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right).$$

Доказательство теоремы 3.1. Перемножим скобки в левой части (3.4). Имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp \\ & \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В силу принятого соглашения о порядке действия операторов первое слагаемое в правой части этого равенства равно

$$\frac{\partial}{\partial t} a'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Поэтому для доказательства теоремы остается установить, что

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Однако равенство (3.7), очевидно, вытекает из того факта, что

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma.$$

Таким образом, из (3.5) — (3.7) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Рассмотрим для определенности случай, когда в разложении (3.4) взяты верхние знаки:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} = 0. \quad (3.8)$$

Такое представление уравнения (3.1), к сожалению, не дает возможности построить его общего решения. Действительно, полагая

$$w = \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (3.9)$$

мы должны будем решать уравнение, соответствующее внешнему множителю в (3.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{a'(\sigma)} w) - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.10)$$

Однако коэффициенты этого уравнения все еще зависят от неизвестного нам σ . (Именно здесь заключается основное отличие рассматриваемой факторизации от факторизации линейных уравнений.) Поэтому для построения общего решения уравнения (3.8) приходится решать (3.9) и (3.10) совместно, что ничуть не проще, чем решать исходную систему динамических уравнений (1.2), (1.3). В дальнейшем, однако, мы увидим, что факторизация нелинейного волнового уравнения далеко не бесполезна.

З а м е ч а н и е. О подходах к построению общего решения уравнения (3.1) см., например, [42, 55].

4. Разрешим определяющее соотношение $\varepsilon = a(\sigma)$ относительно σ , положив

$$\sigma = b(\varepsilon). \quad (3.11)$$

Тогда из (3.1) немедленно получается нелинейное волновое уравнение для деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 b(\varepsilon)}{\partial x^2} = 0. \quad (3.12)$$

Это уравнение, очевидно, принадлежит тому же типу, что и уравнение (3.1), с той лишь разницей, что теперь переменные t и x поменялись ролями. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 3.2. Уравнение (3.12) может быть факторизовано одним из следующих двух способов:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{b'(\varepsilon)} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{b'(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \varepsilon = 0. \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что замена $\varepsilon = a(\sigma)$ (где $a(\sigma) \equiv b^{-1}(\sigma)$) переводит разложение (3.13) в (3.4).

5. Наконец, из уравнений движения и соотношения (3.11) нетрудно вывести уравнение для перемещений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Для этого уравнения справедлив следующий результат.

Теорема 3.3 (Ирншоу). *Положим*

$$g(y) \equiv \frac{1}{V\rho} \int_0^y \sqrt{b'(y)} dy + \text{const}. \quad (3.15)$$

Тогда каждое (гладкое) решение любого из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.17)$$

является также решением уравнения (3.14).

Доказательство. Пусть, например, $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3.17). Покажем, что тогда $u(t, x)$ удовлетворяет и уравнению (3.14). Имеем, подставляя $\partial u / \partial t$ из (3.17) в (3.14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= g' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{\rho} b' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= g' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho} b' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= \left\{ \left(g' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)^2 - \frac{1}{\rho} b' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

(в силу определения (3.15)). Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что уравнения (3.16) и (3.17) представляют собой эквивалентные формы записи соотношений $r = \text{const}$ и $s = \text{const}$ соответственно.

Таким образом, уравнения (3.16) и (3.17) описывают уже известные нам простые волны, но только не в терминах напряжений, а в терминах перемещений.

6. Пусть на стержень действует равномерно распределенная продольная внешняя нагрузка $\bar{F}(t)$, рассчитанная на единицу объема. Тогда, как нетрудно видеть, уравнение для перемещений принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{F(t)}{\rho}. \quad (3.18)$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся непосредственным обобщением теоремы 3.3.

Теорема 3.4. Каждое гладкое решение любого из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt + \text{const}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt + \text{const} \quad (3.20)$$

является также решением уравнения (3.18). Здесь функция g определена формулой (3.15).

Доказательство. Пусть, например, $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3.20). Проверим, что тогда $u(t, x)$ удовлетворяет и уравнению (3.18). Подставляя $\partial u / \partial t$ из (3.20) в левую часть (3.18), последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt + \text{const} \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ & = g' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{F(t)}{\rho} - \frac{1}{\rho} b' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ & = g' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt + \text{const} \right\} + \\ & + \frac{F(t)}{\rho} - \frac{1}{\rho} b' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(g'^2 - \frac{b'}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(t)}{\rho} \equiv \frac{F(t)}{\rho}. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали, что функция $u(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (3.20), удовлетворяет также и (3.18). Аналогично доказывается утверждение теоремы, относящееся к уравнению (3.19). Теорема доказана.

7. Будем теперь считать функцию $F(t)$ тождественно равной нулю при $t \leq 0$ и поставим следующую граничную задачу для уравнения (3.18):

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad x > 0, \quad t = 0, \\ u(t, 0) = u_0(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь предполагается, что $u_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t \leq 0$.

Из физических соображений ясно, что до возникновения ударных волн решение нашей задачи будет иметь одноволновой характер. Следовательно, будет справедливо уравнение (3.19), соответствующее волне, распространяющейся вправо. Заметим теперь, что в силу первого из условий (3.21)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } x > 0, t = 0.$$

Поэтому, полагая в (3.19) $t=0$, легко получаем, что в (3.19) и (3.15) неопределенные постоянные следует положить равными нулю. Итак, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt, \quad g(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^y \sqrt{b'(y)} dy. \quad (3.22)$$

Задачу (3.21), (3.22) непосредственно решить методом характеристик невозможно, поскольку уравнение (3.22) не является квазилинейным. Однако, как мы увидим, метод характеристик все же удастся применить к этой задаче, если переформулировать ее в терминах деформаций.

Заметим прежде всего, что, полагая в уравнении (3.22) $x=0$, мы сразу получаем граничное условие для деформаций:

$$u'_0(t) + g(\varepsilon_0(t)) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt \quad (3.23)$$

(здесь обозначено $\varepsilon_0(t) \equiv \partial u / \partial x|_{x=0}$). Равенство (3.23) может быть переписано также в следующем эквивалентном виде:

$$\varepsilon_0(t) = g^{-1}\left(\frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt - u'_0(t)\right). \quad (3.24)$$

Очевидно, что при сделанных выше предположениях функция (3.24) обращается в тождественный нуль при $t \leq 0$.

Далее, из первого из соотношений (3.21) ясно, что

$$\varepsilon = \partial \varepsilon / \partial t = 0 \quad \text{при } x > 0, t = 0. \quad (3.25)$$

Равенства (3.24) и (3.25) представляют собой соответственно граничное и начальное условия для задачи в деформациях.

Наконец, нелинейное одноволновое уравнение, описывающее распространение деформаций, сразу получается дифференцированием уравнения (3.22) по x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sqrt{\frac{b'(\varepsilon)}{\rho}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

Задача (3.24) — (3.26) легко интегрируется методом характеристик, изложенным в § 2. Действительно, уравнения характеристик для (3.26) имеют вид

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{\rho}{b'(\varepsilon)}}, \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = 0,$$

откуда, используя граничное условие для деформаций, получаем

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon_0(\tau),$$

$$t = x \sqrt{\frac{\rho}{b'(\varepsilon_0(\tau))}} + \tau. \quad (3.27)$$

(Поскольку $\varepsilon_0(t) = 0$ при $t \leq 0$, начальные условия для деформаций будут выполнены автоматически.)

Теперь, учитывая граничное условие из (3.21), окончательно получаем решение поставленной задачи для перемещений:

$$u(t, x) = \int_0^x \varepsilon(t, x) dx + u_0(t) \quad (3.28)$$

(здесь функция $\varepsilon(t, x)$ параметрически определена соотношениями (3.27)).

Проверим, что функция (3.28) действительно является искомым решением. Действительно, справедливость условий (3.21) очевидна (поскольку в силу сделанных предположений $u_0(0) = u_0'(0) = 0$). Покажем, что функция (3.28) удовлетворяет уравнению движения (3.18). Для этого в силу теоремы 3.4 достаточно установить, что данная функция удовлетворяет одноволновому уравнению для перемещений (3.22). Имеем, дифференцируя (3.28) по t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0'(t) + \int_0^x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx.$$

Но в силу (3.26) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \sqrt{\frac{b'(\varepsilon)}{\rho}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0'(t) - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^x \sqrt{b'(\varepsilon)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = u_0'(t) - g(\varepsilon(t, x)) + g(\varepsilon_0(t)).$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = u_0'(t) + g(\varepsilon_0(t)) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(t) dt,$$

что и требовалось установить.

Подчеркнем, что построенное аналитическое решение справедливо лишь до момента возникновения ударной волны.

Задача. Получить результаты этого пункта с помощью инвариантов Римана.

Замечание. В § 6 гл. 3 мы увидим, что подход, развитый в этом пункте, оказывается полезным и в более общей ситуации, когда инварианты Римана отсутствуют.

§ 4. УДАРНАЯ ВОЛНА В ПРОСТОЙ ВОЛНЕ

1. Итак, как мы знаем из § 1, напряжения в однородном нелинейном стержне плотности ρ удовлетворяют вне ударного фронта уравнению

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad (4.1)$$

а на ударном фронте (который мы для определенности считаем распространяющимся вправо) должно быть выполнено условие

$$U = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho [a(\sigma)]}}. \quad (4.2)$$

На функцию $a(\sigma)$ в этом параграфе мы наложим следующие ограничения:

$$a(0) = 0, \quad a'(\sigma) > 0, \quad a''(\sigma) < 0.$$

Считая стержень полубесконечным и расположенным на полуоси $x \geq 0$, поставим теперь следующую модельную задачу:

$$\begin{aligned} \sigma = \partial \sigma / \partial t = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad t = 0, \\ \sigma(t, 0) = \sigma_0(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь предполагается, что:

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) &= 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ и } t > T > 0, \\ \sigma_0(0) &> 0, \\ \sigma_0'(t) &< 0 \quad \text{при } t > 0, \end{aligned}$$

т. е. рассматривается волна растяжений и граничный профиль имеет «треугольный» вид (рис. 6).

Заметим теперь, что если мы сумеем решить уравнение

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad (4.4)$$

удовлетворив условиям (4.2) и (4.3), то в силу теоремы 3.1 мы тем самым получим и решение задачи (4.1)–(4.3), поставлен-

ной в терминах напряжений. (Ниже мы увидим, что такое, одноволновое решение не вполне отвечает физическому смыслу задачи и что его можно рассматривать лишь как хорошее приближение к истинному решению, годное при умеренных амплитудах.)

На рис. 6 изображен также веер характеристик уравнения (4.4), соответствующий граничному профилю $\sigma_0(t)$. Как видно из рис. 6, большие значения σ распространяются с большими скоростями, поэтому ясно, что волна растяжения будет опрокидываться вперед, по ходу своего движения вправо вдоль оси x (см. по этому поводу также § 2).

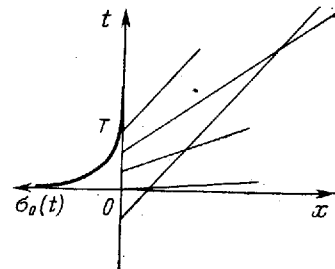


Рис. 6

2. Сразу ясно, что решение уравнения (4.4), удовлетворяющее условию на разрыве (4.2), не будет обобщенным решением уравнения (4.4). Действительно, для обобщенного решения на разрыве выполнялось бы условие (см. п. 1 § 2)

$$U = \frac{\frac{1}{\sqrt{\rho}} [\sigma]}{\left[\int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma \right]},$$

которое, очевидно, не совпадает с (4.2) ни для какой функции $a(\sigma)$, за исключением линейной. Тем самым (4.4), (4.2) не есть закон сохранения, и решение задачи (4.2) — (4.4) не может быть непосредственно построено с помощью принципа равных площадей.

3. Оказывается, однако, что уравнение (4.4) можно так тождественно преобразовать, что к преобразованному уравнению (дополненному условием на разрыве (4.2) и условиями (4.3)) уже будет применим принцип равных площадей. (Мы не случайно упоминаем здесь о граничном и начальных условиях (4.3), поскольку для нас будет существенно то, что разрыв будет распространяться по невозмущенной среде.)

Будем вначале считать функцию $\sigma(t, x)$ гладкой и домножим (4.4) на некоторую неизвестную неотрицательную функцию $g(\sigma)$. В результате получим

$$g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} g(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\sigma g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma = 0. \quad (4.5)$$

Наша цель — найти такую функцию $g(\sigma)$, чтобы в нашей задаче условие на разрыве (4.2) совпало с условием

$$U = \frac{\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma \right]}{\left[\int_0^\sigma g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma \right]}. \quad (4.6)$$

Так как в силу сделанных предположений ударная волна будет распространяться по невозмущенной области, то в нашей задаче условие совпадения (4.2) и (4.6) запишется в виде

$$\sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho a([\sigma])}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{[\sigma]} g(\sigma) d\sigma}{\int_0^{[\sigma]} g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma}. \quad (4.7)$$

(Отметим, что в общем случае, когда ударная волна распространяется по уже возмущенной области, добиться совпадения (4.2) и (4.6) невозможно.)

Если теперь функция $g(\sigma)$, удовлетворяющая (4.7), будет найдена, то тогда, с одной стороны, решение задачи (4.5), (4.6), (4.3) будет, очевидно, и решением задачи (4.1) — (4.3). С другой же стороны, решение задачи (4.5), (4.6), (4.3) можно будет найти с помощью принципа равных площадей, сведя ее к задаче, изученной в § 2.

Действительно, обозначим

$$G(\sigma) \equiv \int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma, \quad F(\sigma) \equiv \int_0^\sigma g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma$$

и введем новую неизвестную функцию

$$w = G(\sigma).$$

Тогда уравнение (4.5), очевидно, перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} F(G^{-1}(w)) + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (4.8)$$

а условие (4.6) — в виде

$$U = \frac{\frac{1}{V_p} [\omega]}{[F(G^{-1}(\omega))]} \quad (4.9)$$

Начальное и граничное условия для ω определяются из соответствующих условий для σ (см. (4.3)):

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \text{ при } x > 0, t = 0, \\ \omega(t, 0) &= G(\sigma_0(t)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Задача (4.8)–(4.10), очевидно, принадлежит к типу, рассмотренному в § 2, и ее решение строится с помощью принципа равных площадей.

В результате, когда решение задачи (4.8)–(4.10) найдено, остается положить

$$\sigma = G^{-1}(\omega). \quad (4.11)$$

Нетрудно проверить, что построенное таким образом решение будет удовлетворять условиям устойчивости (1.17).

4. Итак, нам осталось найти функцию g , удовлетворяющую интегральному уравнению (4.7). Для краткости будем в дальнейших вычислениях вместо $[\sigma]$ писать σ . Тогда уравнение (4.7) переписывается в виде

$$\int_0^\sigma g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma = \sqrt{\frac{a(\sigma)}{\sigma}} \int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma,$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$g(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} = \left(\sqrt{\frac{a(\sigma)}{\sigma}} \right)' \int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma + \sqrt{\frac{a(\sigma)}{\sigma}} g(\sigma),$$

т. е.

$$\frac{g(\sigma)}{\int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma} = \frac{(\sqrt{a(\sigma)/\sigma})'}{\sqrt{a'(\sigma)} - \sqrt{a(\sigma)/\sigma}},$$

или, что то же самое,

$$\frac{g(\sigma)}{\int_0^\sigma g(\sigma) d\sigma} = \frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right). \quad (4.12)$$

Вновь используя обозначение

$$G(\sigma) \equiv \int_0^{\sigma} g(\sigma) d\sigma,$$

получим из (4.12), что

$$G(\sigma) = \exp \int_{\sigma^*}^{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) d\sigma \quad (4.13)$$

($\sigma^* = \text{const} > 0$).

5. Тот факт, что функция (4.13) действительно представима в виде интеграла $\int_0^{\sigma} g(\sigma) d\sigma$ от некоторой неотрицательной функции $g(\sigma)$, вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 4.1. Пусть $a(\sigma)$ — гладкая функция, такая, что $a(0) = 0$ и $a'(\sigma) > 0$, $a''(\sigma) < 0$ при $\sigma > 0$. Тогда для функции $G(\sigma)$, определенной в (4.13), справедливо следующее:

- а) $G(0) = 0$,
- б) $G(\sigma)$ монотонно возрастает при $\sigma \geq 0$,
- в) $G'(\sigma)$ — локально ограниченная функция при $\sigma \geq 0$.

Доказательство. Имеем при малых $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)} \right)^{1/2} &= \left(\frac{\sigma(a'(0) + \sigma a''(0) + \dots)}{\sigma a'(0) + \frac{\sigma^2}{2} a''(0) + \dots} \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{a'(0) + O(\sigma)}{a'(0) + O(\sigma)} \right)^{1/2} = 1 + O(\sigma). \end{aligned}$$

Следовательно, при малых $\sigma > 0$

$$\frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) = \frac{1}{\sigma} + O(1). \quad (4.14)$$

Выражение в левой части (4.14), очевидно, ограничено, когда $\sigma > 0$ отделено от нуля, поэтому мы будем считать равенство (4.14) выполненным при всех $\sigma > 0$ (а не только при малых $\sigma > 0$), понимая при этом под $O(1)$ некоторую ограниченную функцию от σ .

Из (4.14), очевидно, следует, что

$$\int_{\sigma^*}^{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) d\sigma = \ln \frac{\sigma}{\sigma^*} + \int_{\sigma^*}^{\sigma} O(1) d\sigma.$$

Подставляя это выражение в (4.13), получаем

$$G(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^*} e^{\int_{\sigma^*}^{\sigma} O(1) d\sigma}, \quad (4.15)$$

откуда и вытекает утверждение а) леммы.

Для доказательства утверждения б) достаточно заметить, что подынтегральное выражение в (4.13) положительно.

Наконец, утверждение в), очевидно, достаточно доказать при малых $\sigma > 0$. Продифференцируем (4.13) и воспользуемся (4.14) и (4.15). Имеем

$$\begin{aligned} G'(\sigma) &= \frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) G(\sigma) = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma} + O(1) \right) \frac{\sigma}{\sigma^*} e^{\int_{\sigma^*}^{\sigma} O(1) d\sigma} \quad \sigma \rightarrow +0, \end{aligned}$$

что и доказывает локальную ограниченность $G'(\sigma)$.

Лемма доказана.

Таким образом, мы действительно нашли неотрицательную функцию $g(\sigma)$, удовлетворяющую уравнению (4.7):

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= \frac{dG(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) \exp \int_{\sigma^*}^{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \times \\ &\times \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma a'(\sigma)}{a(\sigma)}} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.16)$$

что и завершает построения п. 3 этого параграфа.

6. Мы построили аналитическое решение $\sigma = G^{-1}(w)$ задачи (4.1)–(4.3), сформулированной исключительно в терминах напряжений. При этом мы полагались на теорему о факторизации 3.1, заменяя нелинейное волновое уравнение (4.1) на его фактор-множитель, т. е. на уравнение простой волны

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (4.17)$$

Посмотрим, однако, согласуется ли решение σ задачи (4.1)–(4.3), построенное выше, с решением системы исходных динамических уравнений:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial a(\sigma)}{\partial t} \quad (4.19)$$

и соответствующими условиями на разрыве:

$$[\sigma] = -\rho[v]U, \quad (4.20)$$

$$[v] = -[a(\sigma)]U \quad (4.21)$$

(см. § 1).

Прежде всего из (4.17), (4.18) следует, что за линией фронта

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma + \sqrt{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad (4.22)$$

(где $r \equiv v + \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma$ — инвариант Римана; см. (1.5)). Однако, как мы знаем, в дополнении к фронту для инварианта r справедливо уравнение

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (4.23)$$

Из (4.22), (4.23), очевидно, вытекает, что за фронтом

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$r = \text{const.}$$

Следовательно, за фронтом волны должно быть

$$v = \text{const} - \int_0^\sigma \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma.$$

Поскольку перед фронтом $v = \sigma = 0$, получаем отсюда, что на фронте должно выполняться условие

$$[v] = \text{const} - \int_0^{[\sigma]} \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma. \quad (4.24)$$

С другой стороны, исключая U из (4.20), (4.21) (и учитывая, что перед фронтом $v = \sigma = 0$), очевидно, имеем

$$[v] = - \sqrt{\frac{[\sigma] a([\sigma])}{\rho}}. \quad (4.25)$$

Теперь из (4.24) и (4.25) следует, что должно выполняться равенство

$$\text{const} - \int_0^{[\sigma]} \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma = - \sqrt{\frac{[\sigma] a([\sigma])}{\rho}}.$$

Полагая здесь $[\sigma] = 0$, сразу получаем, что $\text{const} = 0$. (Отсюда, в частности, следует, что за фронтом должно быть

$$v = - \int_0^{\sigma} \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma.)$$

Итак, мы должны исследовать, возможно ли равенство

$$\int_0^{[\sigma]} \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma - \sqrt{[\sigma] a([\sigma])} = 0. \quad (4.26)$$

Но нетрудно проверить, что (4.26) не может выполняться ни для какой функции $a(\sigma)$, за исключением линейной. Следовательно, пара функций

$$\sigma = G^{-1}(w), \quad v = - \int_0^{\sigma} \sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}} d\sigma \quad (4.27)$$

(при функции $a(\sigma)$, отличной от линейной) не удовлетворяет условиям на разрыве (4.20), (4.21).

Заметим, однако, что если функция $a(\sigma)$ представима в виде

$$a(\sigma) = a_1 \sigma + a_2 \sigma^2 + \dots; \quad a_1 > 0,$$

то для разности из левой части (4.26) справедлива оценка

$$\int_0^{[\sigma]} \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma - \sqrt{[\sigma] a([\sigma])} = O([\sigma]^3). \quad (4.28)$$

Это означает, что пара функций (4.27) удовлетворяет условиям на разрыве (4.20), (4.21) с точностью до $O([\sigma]^3)$.

Наконец, очевидно, что функции (4.27) удовлетворяют уравнениям движения. Таким образом, пара функций (4.27) при умеренных амплитудах представляет собой хорошее приближение к решению задачи (4.18)—(4.21) с начальными и граничными условиями (4.3).

Отметим также следующий важный факт. У задачи (4.18)—(4.21), (4.3) при предположениях, сделанных в этом параграфе, существует (и притом единственное) решение $\sigma = \sigma^*(t, x)$, $v = v^*(t, x)$, удовлетворяющее условию устойчивости (1.17) [44]. Ясно, что функция $\sigma = \sigma^*(t, x)$ (так же как и функция $\sigma = G^{-1}(w)$) будет решением задачи (4.1)—(4.3), но (для нелинейной функции $a(\sigma)$)

$$\sigma^*(t, x) \neq G^{-1}(w).$$

Таким образом, мы обнаружили, что задача (4.1)—(4.3), поставленная исключительно в терминах напряжений, имеет не единственное решение даже при выполнении дополнительного условия устойчивости сильного разрыва (1.17). Нетрудно видеть также, что истинное решение

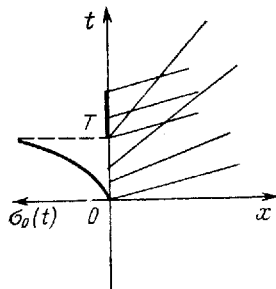


Рис. 7

$\sigma = \sigma^*(t, x)$ уже не удовлетворяет уравнению простой волны, поскольку единственное решение задачи (4.2)—(4.4) — это, очевидно, $G^{-1}(w)$. Но сказанное означает, что от истинного ударного фронта исходит и сравнительно слабая волна, направленная влево. Ясно, что мы не могли ее обнаружить, заменяя уравнение (4.1) на его фактор-множитель (4.4).

7. Замечание. Аналогичным образом можно было бы рассмотреть и случай, когда $a''(\sigma) > 0$, но при этом нам пришлось бы для волны растяжений взять в качестве граничного профиля, изображенный на рис. 7. На этом рисунке изображен также веер характеристик уравнения (4.4), соответствующих заданному граничному профилю. Как видно из рис. 7, большие значения σ распространяются на этот раз с меньшими скоростями, поэтому при своем движении вправо по стержню волна растяжения будет опрокидываться назад. Следовательно, невозмущенная область в этом случае будет оставаться позади фронта (а не лежит впереди него, как в рассмотренном выше случае). Все построения настоящего параграфа очевидным образом переносятся на этот случай. Точно так же могут быть исследованы и волны сжатия ($\sigma \leq 0$) с граничными профилями треугольного вида.

§ 5. УДАРНАЯ ВОЛНА В ПРОСТОЙ ВОЛНЕ
(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1. Фактически (4.28) означает, что приближенное решение (4.27) отличается от точного на величину $O([\sigma]^3)$. Поэтому, например, из (4.21) следует, что и величина скорости фронта U определяется при этом с точностью $O([\sigma]^3)$. Если же ограничиться точностью порядка $O(\sigma^2)$, то даже не нужно предполагать, что ударный фронт движется по невозмущенной области, и задачу, поставленную в предыдущем параграфе, можно решить гораздо проще. (Как обычно, мы предполагаем, что $a(0)=0$, $a'(\sigma)>0$, $a''(\sigma)\neq 0$.)

Действительно (см. [63]), нетрудно видеть, что если

$$a(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \dots,$$

то

$$V \frac{[\sigma]}{[a(\sigma)]} - \frac{[\sigma]}{\left[\int_0^\sigma V a'(\sigma) d\sigma \right]} = O(\sigma^2). \quad (5.1)$$

Поэтому условие на разрыве (4.2)

$$U = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho [a(\sigma)]}}$$

можно с указанной точностью заменить условием

$$U = \frac{\frac{1}{V\rho} [\sigma]}{\left[\int_0^\sigma V a'(\sigma) d\sigma \right]}. \quad (5.2)$$

Но уравнение простой волны

$$V a'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{V\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

совместно с условием (5.2) представляет собой закон сохранения (в смысле § 2), и при таком подходе уравнение ударного фронта определяется с помощью принципа равных площадей.

2. Прием, описанный в предыдущем пункте, хорош тем, что он позволяет описывать ударную волну, движущуюся по уже возмущенной области. (Заметим, что при опрокидывании первоначально гладкой простой волны вначале реализуется именно эта ситуация.) Однако этот прием все же огрубляет возможности метода введения ударной волны в простую волну.

Можно предложить еще один довольно очевидный способ определения ударного фронта (в рамках приближения простой волны). Пусть (t_0, x_0) — точка, в которой произошла градиентная катастрофа. Тогда в этой точке значение $\sigma = \sigma(t_0, x_0)$ все еще определяется методом характеристик, и скачок $[\sigma(t_0, x_0)] = 0$. Поэтому условие на разрыве (4.2) дает в этой точке

$$U = U_0 = \lim_{[\sigma] \rightarrow 0} \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho[a(\sigma)]}} = \frac{1}{\sqrt{\rho a'(\sigma(t_0, x_0))}}.$$

Положим

$$t_1 = t_0 + \Delta,$$

$$x_1 = x_0 + U_0 \Delta,$$

где Δ — некоторое малое положительное число (рис. 8, а). Нарисуем теперь неоднозначный профиль $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, x_1)$, параметри-

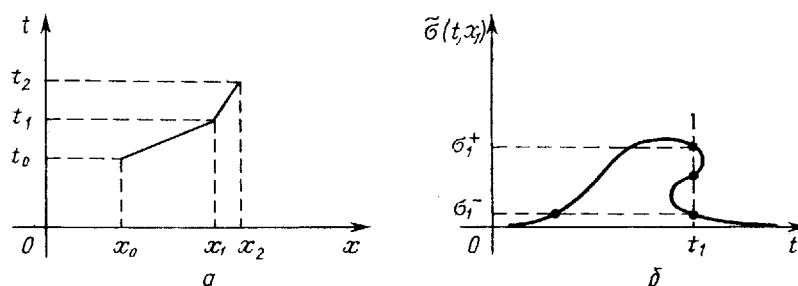


Рис. 8

чески задаваемый уравнениями характеристик, и положим

$$U_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1^+ - \sigma_1^-}{\rho(a(\sigma_1^+) - a(\sigma_1^-))}}$$

(величины σ_1^+ и σ_1^- определяются способом, показанным на рис. 8, б). После этого построим конец следующего отрезка ломаной:

$$t_2 = t_1 + \Delta,$$

$$x_2 = x_1 + U_1 \Delta$$

и т. д. Искомое приближение к линии ударного фронта определится в виде ломаной, составленной из отрезков с концами в точках $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots$

ГЛАВА 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Эта глава посвящена применениям теоремы 3.1 из § 3 гл. 1 о факторизации нелинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами к изучению одноволновых процессов в стержнях с плавно меняющейся плотностью. В § 1 рассмотрен случай, когда определяющее соотношение содержит малую квадратичную нелинейность, в § 2 рассмотрен случай степенной нелинейности и, наконец, в § 3, 4 рассмотрена нелинейность общего вида. В первых двух параграфах, используя конкретный вид нелинейности и делая замены неизвестной функции и пространственной переменной (преобразования типа Грина — Лиувилля), довольно легко удастся найти одноволновое решение задачи. При этом формулы, получающиеся для случая малой квадратичной нелинейности, фактически совпадают с известными формулами Ландау—Уизема [20, 63]. Однако в случае нелинейности общего вида такие приемы неприменимы. Поэтому в § 3, 4 используется совершенно иной метод, основанный на теоремах о равномерной асимптотической факторизации нелинейных волновых уравнений с плавно меняющимися коэффициентами. При этом в § 3 одноволновое решение задачи о распространении напряжений удастся найти в замкнутой аналитической форме, а в § 4 (где считается, что плотность и нелинейная функция из определяющего соотношения плавно зависят от обеих переменных) получающиеся уравнения характеристик проинтегрировать в квадратурах, вообще говоря, не удастся. Точность методов § 3 и 4 не зависит от вида нелинейности и по существу та же, что и точность первого приближения ВКБ в линейных задачах.

Подчеркнем, наконец, что плавность изменения свойств среды является понятием относительным и означает лишь, что длины волн рассматриваемых импульсов много меньше характерного масштаба неоднородности. Интуитивно ясно, что в такой ситуации одноволновые решения оказываются физически осмысленными в широких областях.

§ 1. МАЛАЯ КВАДРАТИЧНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛАНДАУ—УИЗЕМА

1. В этой главе мы будем рассматривать только импульсы конечной длительности; пусть соответствующие длины волн имеют порядок l . Мы будем предполагать, что характерные

расстояния, на которых изменяется плотность стержня ρ , имеют порядок $L \gg l$. Тогда естественным образом возникает малый параметр, характеризующий волновую задачу:

$$\gamma = l/L, \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

Далее, будем считать, что определяющее соотношение для стержня содержит малую квадратичную нелинейность следующего вида:

$$\varepsilon = A\sigma + \gamma B\sigma^2, \quad \text{где } A > 0, \quad B/A^2 = O(1),$$

или, что то же самое (с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$),

$$\sigma = \frac{1}{A} \left(\varepsilon - \frac{\gamma B}{A^2} \varepsilon^2 \right).$$

Переобозначим теперь время через \tilde{t} , лагранжеву координату — через \tilde{x} и введем новые переменные t, x по формуле

$$t = \tilde{t}/\gamma, \quad x = \tilde{x}/\gamma.$$

Тогда плотность ρ , очевидно, окажется *плавно меняющейся* функцией от x :

$$\rho = \rho(\gamma x),$$

а для напряжений в новых переменных легко получим уравнение

$$\frac{\partial^2 (A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

(Здесь и далее предполагается, что функция ρ ограничена вместе с двумя первыми производными и $\rho \gg \text{const} > 0$.)

Будем решать уравнение (1.1) на полуоси $x > 0$ при следующих условиях

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad t = 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma(t, 0) = \sigma_0(t).$$

При этом мы будем считать, что $\sigma_0(t)$ — гладкая функция, равная нулю при $t < 0$ и при $t > T > 0$. (Нетрудно видеть, что $T = O\left(\frac{l/c}{\gamma}\right) = O\left(\frac{L}{c}\right)$, где c — характерная скорость звука.)

Что касается условия на разрыве, то его мы примем в виде

$$U = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho(\gamma x) [A\sigma + \gamma B\sigma^2]}} = \frac{1}{\sqrt{A\rho(\gamma x)}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\gamma B}{A} \cdot \frac{[\sigma^2]}{[\sigma]}}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{2A} \cdot \frac{[\sigma^2]}{[\sigma]}\right)}, \quad (1.3)$$

что, очевидно, возможно, если амплитуда волны не слишком велика. (Здесь U — скорость ударного фронта. Знак «плюс» перед радикалом соответствует разрыву, распространяющемуся вправо.)

Наша цель — попытаться преобразовать уравнение (1.1) так, чтобы его можно было (асимптотически) разложить на множители 1-го порядка, и затем найти одноволновое решение задачи в виде волны, распространяющейся вправо.

2. Вначале мы будем рассматривать волновое движение в области гладкости функции $\sigma = \sigma(t, x)$.

Сделаем замену (преобразование Грина—Лиувилля)

$$y = y(x),$$

$$\omega = \frac{\sigma}{\varphi(x)} \quad (1.4)$$

с таким расчетом, чтобы (1.1) перешло в уравнение, у которого члены с производными 1-го порядка по y отсутствуют, а старшая линейная часть имеет постоянные коэффициенты. Таким образом, смысл наших преобразований в том, чтобы среди старших членов преобразованного уравнения переменным остался лишь коэффициент при малом квадратичном члене (при этом мы ожидаем, что этот переменный коэффициент будет плавно меняющейся функцией от x).

Имеем для произвольной функции $F(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} y',$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'',$$

поэтому уравнение (1.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A\varphi(x)\omega + \gamma B\varphi^2(x)\omega^2) - \frac{1}{\rho(\gamma x)} \left\{ \frac{\partial^2 (\varphi(x)\omega)}{\partial y^2} y'^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\varphi(x)\omega)}{\partial y} y'' \right\} + \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho^2(\gamma x)} \frac{\partial (\varphi(x)\omega)}{\partial y} y' = 0; \quad x = x(y), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A\varphi\omega + \gamma B\varphi^2\omega^2) - \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \omega + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) y'^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \omega + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) y'' \right\} + \frac{\gamma \rho'}{\rho^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \omega + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) y' = 0. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Потребуем теперь, чтобы в (1.5) сократились слагаемые, содержащие $\partial w / \partial y$:

$$-\frac{1}{\rho(\gamma x)} 2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} y'^2 - \frac{1}{\rho(\gamma x)} \varphi(x) y'' + \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho^2(\gamma x)} \varphi(x) y' = 0. \quad (1.6)$$

Кроме того, потребуем, чтобы коэффициенты при старших *линейно* входящих производных $\partial^2 w / \partial t^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ были пропорциональны (для определенности коэффициент пропорциональности берем равным A):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho(\gamma x)} \varphi(x) y'^2, \text{ т. е. } y' = \sqrt{\rho(\gamma x)}. \quad (1.7)$$

Из (1.7), очевидно, имеем

$$y = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{\rho(z)} dz. \quad (1.8)$$

Подставляя теперь (1.8) в (1.6), легко приходим к уравнению

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)},$$

решение которого есть

$$\varphi = C \rho^{1/4}(\gamma x) \quad (1.9)$$

(величина C окажется в дальнейшем для нас несущественной).

Теперь, подставляя (1.8) и (1.9) в (1.5) и деля на φ , перепишем (1.5) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (A\omega + \gamma B C \rho^{1/4}(\gamma x) \omega^2) - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = O(\gamma^2). \quad (1.10)$$

Здесь величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном ω (и обращается в нуль при $\omega=0$).

3. В линейном случае ($B=0$) преобразование Грина—Лиувилля, обеспечившее переход от (1.1) к (1.10), уже позволило бы нам построить искомое приближение к решению, поскольку в этом случае (1.10) является (с точностью $O(\gamma^2)$) просто линейным волновым уравнением с постоянными коэффициентами. (Такое приближение называется геометроакустическим.)

В нелинейном же случае уравнение (1.10) оказывается близким к нелинейному волновому уравнению с постоянными коэффициентами. Поэтому естественно, действуя по аналогии с теоремой 3.1 из гл. 1, рассмотреть произведение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A + 2\gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x)} w \mp \frac{\partial}{\partial y} \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A + 2\gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x)} w \frac{\partial w}{\partial t} \pm \frac{\partial w}{\partial y} \right\}. \quad (1.11)$$

Перемножая в (1.11) скобки, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Aw + \gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x) w^2) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \mp \\ & \mp \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{A + 2\gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x)} w \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A + 2\gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x)} w \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Aw + \gamma BC \rho^{1/4}(\gamma x) w^2) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \mp \\ & \mp V \bar{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + \frac{\gamma BC}{A} \rho^{1/4}(\gamma x) w - \dots \right) \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \frac{\gamma BC}{A} \rho^{1/4}(\gamma x) w - \dots \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Однако выражение в фигурных скобках в правой части последнего равенства, очевидно, равно

$$\mp \frac{\gamma BC}{A} \frac{\gamma \rho'}{4\rho^{3/4}} \frac{1}{V\rho} w \frac{\partial w}{\partial t} + \dots = O(\gamma^2).$$

Таким образом, с точностью до $O(\gamma^2)$ левая часть уравнения (1.10) может быть заменена на (1.11).

Домножая теперь (1.11) на $\varphi(x)$, возвращаясь к исходным переменным по формулам

$$w = \frac{\sigma}{C\rho^{1/4}(\gamma x)}, \quad y = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{\rho(z)} dz$$

и учитывая все возникавшие погрешности, получаем следующий результат.

Теорема 1.1. Уравнение (1.1) представимо в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \mp \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \sigma = \\ & = O(\gamma^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Как видно из (1.12), постоянная C при переходе к исходным переменным сократилась.

З а м е ч а н и е 1. Погрешность факторизации (1.12), вообще говоря, не является равномерно малой величиной при ограниченном σ , поскольку производная $\partial\sigma/\partial t$ может оказаться сколь угодно большой по модулю.

З а м е ч а н и е 2. Разложение (1.12), очевидно, может быть переписано также в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \mp \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} + \frac{1}{4} \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \sigma = \\ & = O(\gamma^2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

4. Так как по смыслу задачи мы ищем волну, распространяющуюся вправо, то из теоремы предыдущего пункта вытекает, что нам достаточно решить уравнение

$$\sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} = 0$$

(погрешностью в правой части (1.12) мы пренебрегаем). Замена здесь (с погрешностью $O(\gamma^2)$)

$$\sqrt{A+2\gamma B\sigma} \text{ на } \sqrt{A} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right),$$

окончательно приходим к уравнению

$$\sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} = 0, \quad (1.14)$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right) \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{4\rho(\gamma x)} \sigma = 0. \quad (1.14)'$$

Запишем теперь уравнения характеристик для (1.14)':

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right),$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{4\rho(\gamma x)} \sigma,$$

откуда получаем, что до первого пересечения характеристик решение $\sigma = \sigma(t, x)$ нашей задачи в рассматриваемом приближении дается формулами

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(\tau) \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4}, \quad (1.15)$$

$$t = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma_0(\tau) \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right) dz + \tau. \quad (1.16)$$

Здесь через τ обозначено значение переменной t при $x=0$.

Замечание 1. В линейном случае ($B=0$) формулы (1.15) и (1.16), очевидно, приводят нас к геометриакустическому приближению

$$\sigma(t, x) = \sigma_0 \left(t - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} dz \right) \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4}. \quad (1.15')$$

Замечание 2. Впервые формулы типа (1.15), (1.16) на основе интуитивных соображений были получены Ландау [20] (см. по этому поводу также [63]).

5. Займемся теперь вычислением расстояния, на котором происходит градиентная катастрофа.

С одной стороны, при фиксированном τ формула (1.15) определяет значение σ на характеристике, выходящей из точки τ оси t (уравнение этой характеристики есть (1.16)). С другой стороны, в силу (1.16) τ можно рассматривать как функцию от t, x . Переходя на эту точку зрения, продифференцируем (1.15) по t :

$$\sigma'_t = \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \sigma'_0(\tau) \tau'_t.$$

Входящая сюда производная τ'_t , очевидно, определится дифференцированием (1.16) по t :

$$1 = \frac{B}{A} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} dz \cdot \sigma'_0(\tau) \tau'_t + \tau'_t,$$

откуда

$$\tau'_t = \frac{1}{1 + \frac{B}{\sqrt{A}\rho^{1/4}(0)} \sigma'_0(\tau) \int_0^{\gamma x} \rho^{3/4}(z) dz}.$$

Следовательно,

$$\sigma'_t = \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \frac{\sigma'_0(\tau)}{1 + \frac{B}{\sqrt{A}\rho^{1/4}(0)} \sigma'_0(\tau) \int_0^{\gamma x} \rho^{3/4}(z) dz}. \quad (1.17)$$

При каждом фиксированном τ формула (1.17), очевидно, определяет производную σ'_t на характеристике (1.16).

Аналогично вычисляется производная σ'_x :

$$\begin{aligned} \sigma'_x = & \left(\left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right)'_x \sigma_0(\tau) - \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \times \\ & \times \frac{\sigma'_0(\tau) \sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B \sigma_0(\tau)}{A} \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right)}{1 + \frac{B}{\sqrt{A}\rho^{1/4}(0)} \sigma'_0(\tau) \int_0^{\gamma x} \rho^{3/4}(z) dz}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.17), (1.18) видно, что градиентная катастрофа происходит, когда одинаковый у этих выражений знаменатель впервые (т. е. при наименьшем значении x) обращается в нуль. Таким образом, расстояние x_0 , на котором происходит градиентная катастрофа, определяется как решение уравнения

$$\int_0^{\gamma x} \rho^{3/4}(z) dz = -\frac{\sqrt{A}}{B} \rho^{1/4}(0) \frac{1}{\sigma'_0(\tau^*)}, \quad (1.19)$$

где τ^* — точка, в которой величина $B\sigma'_0(\tau)$ достигает наибольшего по модулю отрицательного значения. (Так как, по предположению, $\sigma_0(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и при $\tau > T > 0$, то такая точка обязательно найдется. Для простоты мы будем предполагать, что она единственная.) Теперь время наступления градиентной катастрофы определяется из (1.16):

$$t_0 = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x_0} \sqrt{A\rho(z)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma_0(\tau^*) \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right) dz + \tau^*. \quad (1.20)$$

З а м е ч а н и е. Уравнения огибающей семейства характеристик (1.16) в параметрической форме имеют вид

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma_0(\tau) \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right) dz + \tau, \\ 0 &= \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} \frac{B}{A} \sigma'_0(\tau) \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} dz + 1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В силу соображений, приведенных в п. 4 § 2 гл. 1, можно было бы сразу искать расстояние x_0 , на котором происходит градиентная катастрофа, как абсциссу самой левой точки огибающей (1.21). Результат при этом получился бы тот же самый.

(Действительно, из второго из уравнений (1.21) снова вытекает (1.19).) Мы, однако, предпочли провести прямые вычисления, чтобы лучше выяснить суть дела.

6. Вернемся теперь к уравнению (1.14) и проинтегрируем его по t от 0 до ∞ . Учитывая, что $\sigma=0$ при $t=0$ и при $t \rightarrow \infty$, легко получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sigma(t, x)}{\rho^{1/4}(\gamma x)} dt = 0, \quad 0 < x < x_0,$$

откуда

$$\left(\frac{\rho(0)}{\rho(\gamma x)} \right)^{1/4} \int_0^\infty \sigma(t, x) dt = \int_0^\infty \sigma_0(t) dt. \quad (1.22)$$

Это вычисление мы, естественно, могли провести только в случае, когда $\sigma(t, x)$ — однозначная гладкая функция, т. е. при $0 < x < x_0$.

Пусть теперь $x = \text{const} > 0$ и пусть $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, x)$ — (неоднозначное) решение уравнений характеристик. Положим

$$\tilde{w} \equiv \left(\frac{\rho(0)}{\rho(\gamma x)} \right)^{1/4} \tilde{\sigma}$$

и проверим, что площадь, которую ограничивает на плоскости \tilde{w} , t параметрически заданный контур (см. (1.15), (1.16))

$$\tilde{w}(t, x) = \sigma_0(\tau),$$

$$t = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A\rho(z)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma_0(\tau) \left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \right) dz + \tau \quad (1.23)$$

(параметром является τ), равна той же величине $\int_0^\infty \sigma_0(t) dt$.

Действительно, рассмотрим отображение (1.23) графика $\sigma_0(\tau)$ на график $\tilde{w}(t, x)$, $x = \text{const}$. Очевидно, что при этом отображении ординаты сохраняют свои значения. Поэтому каждая пара точек с одинаковыми ординатами на графике $\sigma_0(\tau)$ переходит в пару точек с (теми же) одинаковыми ординатами на графике $\tilde{w}(t, x)$, $x = \text{const}$. Кроме того, разность абсцисс для каждой такой пары точек на графике $\sigma_0(\tau)$ (т. е. длина соединяющего их горизонтального отрезка) также не меняется при отображении (1.23). Отсюда и следует равенство площадей, ограничиваемых контурами $\sigma_0(\tau)$ и $\tilde{w}(t, x)$, $x = \text{const}$. (Мы уже использовали аналогичные соображения в § 2 гл. 1.)

Однако интересующее нас решение задачи $\sigma(t, x)$ при $x > x_0$ должно быть однозначным. Оно, конечно, будет разрывным. Действуя, как и в § 2 гл. 1, проверим справедливость равенства (1.22) при $x > x_0$.

Пусть $t=t(x)$, $x > x_0$, — уравнение ударного фронта. В силу (1.14)

$$\left(\int_0^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \sqrt{A\rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right) \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \\ + \left(\int_0^{t(x)-0} + \int_{t(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right) dt = 0,$$

откуда

$$- \sqrt{A\rho(\gamma x)} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \left[\sigma + \frac{\gamma}{2} \frac{B}{A} \sigma^2 \right] + \\ + \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} dt + \left[\frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right] \frac{dt(x)}{dx} = 0.$$

Здесь $dt(x)/dx = 1/U$ (U — скорость ударного фронта); квадратные скобки, как обычно, обозначают величину разрыва на фронте. Подставляя сюда условие на разрыве, получаем, что

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\sigma(t, x)}{\rho^{1/4}(\gamma x)} dt = 0, \quad x > x_0.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\rho(0)}{\rho(\gamma x)} \right)^{1/4} \int_0^{\infty} \sigma(t, x) dt = \text{const}, \quad x > x_0. \quad (1.24)$$

Однако, очевидно,

$$\sigma(t, x_0-0) = \sigma(t, x_0+0),$$

поэтому из справедливости (1.22) при $0 \leq x < x_0$ и из (1.24) следует справедливость (1.22) при всех $x \geq 0$.

Теперь искомую разрывную функцию $\sigma(t, x)$ можно определить следующим образом. Для неоднозначной функции

$$\tilde{\omega} \equiv \left(\frac{\rho(0)}{\rho(\gamma x)} \right)^{1/4} \tilde{\sigma}$$

разрыв вводится при каждом $x = \text{const} > x_0$ с помощью принципа равных площадей (см. рис. 3, б к § 2 гл. 1). Получающаяся

разрывную функцию обозначим $w(t, x)$; теперь остается положить

$$\sigma(t, x) = \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} w(t, x), \quad x > x_0. \quad (1.25)$$

Очевидно, что разрывная функция $\sigma(t, x)$, определенная формулой (1.25), удовлетворяет уравнению (1.14) вне ударного фронта $t=t(x)$. Нетрудно проверить также, что функция (1.25) удовлетворяет условию на разрыве (1.3).

7. Из результатов пп. 5 и 6 видно, что в рассматриваемом приближении амплитуда волны изменяется вдоль характеристик пропорционально $\left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4}$ (как в линейном случае*) и независимо от нелинейного искажения профиля волны. В следующих параграфах мы увидим, что этот результат перестает быть верным, если нелинейный член в волновом уравнении не является малым.

Дальнейшие результаты, относящиеся к случаю малой нелинейности см. в [11—14, 79—81].

Задачи. 1. Вывести из (1.14') одноволновое уравнение, описывающее волну деформаций, распространяющуюся вправо:

$$\sqrt{A\rho(\gamma x)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon - \frac{\gamma B}{2A^2} \varepsilon^2 \right) - \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{4\rho(\gamma x)} \varepsilon = 0. \quad (1.26)$$

2. Подставляя в предыдущее уравнение выражение для деформации через перемещение и пренебрегая членами порядка $O(\gamma^2)$, вывести одноволновое уравнение для перемещений:

$$\sqrt{A\rho(\gamma x)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\gamma B}{2A^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{4\rho(\gamma x)} u = 0. \quad (1.27)$$

(Предполагается, что перед фронтом волны $u=0$.)

3. Рассмотрим расположенный на полуоси $x>0$ ненапряженный покоящийся стержень с плавно меняющейся плотностью, к концу которого прикреплен точечный груз массы m . Пусть к концу стержня в момент $t=0$ прикладывается кратковременная внешняя сила $F(t)$, являющаяся гладкой функцией от t . Предполагая, что определяющее уравнение стержня содержит малую квадратичную нелинейность и пренебрегая членами высшего порядка малости, вывести обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее перемещение груза.

Указание: воспользоваться результатом предыдущей задачи.

*) В геометроакустическом приближении.

§ 2. СТЕПЕННАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

1. В этом параграфе мы продолжим исследование уравнения, описывающего распространение волн напряжений в нелинейном стержне с плавно меняющейся плотностью $\rho = \rho(\gamma x)$, $0 < \gamma \ll 1$. Однако определяющее соотношение на этот раз мы возьмем следующее:

$$\varepsilon = A |\sigma|^m \operatorname{sign} \sigma; \quad A > 0, \quad m > 0.$$

Тогда в координатах t, x , введенных в п. 1 § 1, волновое уравнение для напряжений запишется в виде

$$A \frac{\partial^2 |\sigma|^m \operatorname{sign} \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы воспользуемся преобразованием Грина—Лиувилля, причем в данном случае это преобразование более непосредственно приведет нас к успеху. А именно, с равномерно малой погрешностью (при ограниченных σ) уравнение (2.1) перейдет в нелинейное волновое уравнение с постоянными коэффициентами.

Действительно, будем для определенности считать $\sigma \geq 0$ и положим

$$y = y(x),$$

$$\omega = \frac{\sigma}{\varphi(x)}, \quad \text{где } \varphi(x) \geq 0. \quad (2.2)$$

Тогда (2.1), очевидно, переписывается следующим образом:

$$A \varphi^m \frac{\partial^2 \omega^m}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \omega \right) y'^2 + \right. \\ \left. + \left(\varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \omega \right) y'' \right\} + \frac{\gamma \rho'}{\rho^2} \left(\varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \omega \right) y' = 0; \quad \omega \geq 0. \quad (2.3)$$

Потребуем теперь, чтобы в (2.3) коэффициенты при старших производных были пропорциональны (для определенности коэффициент пропорциональности считаем равным A):

$$\varphi^m = \frac{1}{\rho} \varphi y'^2,$$

т. е.

$$y' = \varphi^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.4)$$

Кроме того, потребуем, чтобы в (2.3) члены, содержащие в качестве множителя первую производную $\partial \omega / \partial y$, сократились:

$$-\frac{1}{\rho} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'^2 - \frac{1}{\rho} \varphi y'' + \frac{\gamma \rho'}{\rho^2} \varphi y' = 0. \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что

$$y'' = \frac{m-1}{2} \Phi^{\frac{m-3}{2}} \Phi' \rho^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Phi^{\frac{m-1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \gamma \rho'.$$

Подставляя это выражение и выражение (2.4) в (2.5) и учитывая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi'(y) \frac{1}{y'(x)}$, приходим к следующему уравнению относительно $\Phi(x)$:

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{1}{m+3} \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)}.$$

Ясно, что интересующее нас положительное решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(x) = C \rho^{\frac{1}{m+3}}(\gamma x), \quad C = \text{const} > 0. \quad (2.6)$$

Теперь из (2.4), (2.6) получаем, наконец, выражение для $y(x)$:

$$y(x) = C^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \rho^{\frac{m+1}{m+3}}(z) dz. \quad (2.7)$$

Как и в § 1, значение постоянной C для окончательного решения задачи безразлично, однако нам будет удобно положить

$$C = \rho^{-\frac{1}{m+3}}(0),$$

с тем чтобы обеспечить равенство

$$w|_{x=0} = \sigma|_{x=0}.$$

2. Теперь, подставляя (2.6) и (2.7) в уравнение (2.3) и деля его на $\Phi^m(x)$, перепишем (2.3) в виде

$$A \frac{\partial^2 w^m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = O(\gamma^2); \quad w \geq 0,$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном w (и обращается в нуль при $w=0$). Однако это уравнение, как мы знаем из теоремы 3.1 гл. 1, представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A m w^{m-1}} \mp \frac{\partial}{\partial y} \right\} \left\{ \sqrt{A m w^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right\} w = O(\gamma^2); \quad w \geq 0. \quad (2.8)$$

Теперь для того, чтобы из (2.8) получить асимптотическую факторизацию уравнения (2.1), нужно вернуться к исходным

переменным по формулам (2.2) (где $\varphi(x)$ и $y(x)$ определены соответственно в (2.6) и (2.7)) и домножить (2.8) на $\varphi^m(x)$ слева (поскольку при переходе от (2.3) к (2.8) мы разделили на этот множитель).

Действительно, в силу (2.4) и (2.6)

$$\frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{1}{y'(x)} \frac{\partial}{\partial x} = C^{-\frac{m-1}{2}} \rho^{-\frac{m+1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Поэтому в результате указанной выше процедуры левая часть (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} & \rho^{\frac{m}{m+3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \rho^{-\frac{m-1}{2(m+3)}} \mp \rho^{-\frac{m+1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \rho^{-\frac{m-1}{2(m+3)}} \frac{\partial}{\partial t} \pm \rho^{-\frac{m+1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \rho^{-\frac{1}{m+3}} \sigma \equiv \\ & \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \rho^{\frac{m+1}{2(m+3)}} \mp \rho^{-\frac{1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} \frac{\partial}{\partial t} \pm \rho^{-\frac{m+1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{m+3}} \right\} \sigma \equiv \\ & \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \mp \rho^{-\frac{1}{m+3}} \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} \right\} \rho^{\frac{m+1}{2(m+3)}} \times \\ & \times \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} \left\{ \sqrt{Am\sigma^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t} \pm \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{m+3}} \right\} \sigma, \end{aligned}$$

после чего множители, расположенные между фигурными скобками, сокращаются, и мы получаем искомую факторизацию.

Случай, когда $\sigma \leq 0$, рассматривается аналогично.

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 2.1. Уравнение (2.1) представимо в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{Am|\sigma|^{m-1}} \mp \rho^{-\frac{1}{m+3}} (\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} (\gamma x) \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{Am|\sigma|^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t} \pm \rho^{-\frac{m+1}{2(m+3)}} (\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{m+3}} (\gamma x) \right\} \sigma = O(\gamma^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$.

В частности, если $m=1$, из этой теоремы вытекает
Теорема 2.2. Уравнение

$$A \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

представимо в виде

$$\left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \mp \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \pm \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \right\} \sigma = O(\gamma^2), \quad (2.10)$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$.

Замечание 1. Разложения (2.9) и (2.10), очевидно, могут быть переписаны также следующим образом:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{Am} |\sigma|^{m-1} \mp \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} + \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{(m+3) \rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{Am} |\sigma|^{m-1} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{(m+3) \rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \sigma = O(\gamma^2), \quad (2.9')$$

$$\left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \mp \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} + \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)} \right) \right\} \sigma = O(\gamma^2). \quad (2.10')$$

Замечание 2. Теорема 2.2, очевидно, позволяет построить в явном виде асимптотическое решение линейного уравнения $A \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$, не делая предположения об одноволновости процесса. (Этим линейная факторизация выгодно отличается от нелинейной.) Действительно, выбирая для определенности в (2.10) верхние знаки и пренебрегая погрешностью $O(\gamma^2)$, сведем (2.10) к системе двух уравнений:

$$\sqrt{A} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \sigma = f(t, x),$$

$$\sqrt{A} \frac{\partial f}{\partial t} - \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-\frac{1}{4}}(\gamma x) f = 0.$$

Эти уравнения могут быть последовательно решены методом характеристик (вначале решается второе уравнение, затем первое).

Задача. Предложить еще один способ построения общего асимптотического решения линейного уравнения

$$A \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Замечание 3. Ясно, что факторизации (2.9) и (2.10), так сказать, «лучшего качества», чем факторизация (1.12), установленная в теореме 1.1, поскольку погрешности в них равномерно малы (при ограниченном σ). Однако метод этого параграфа, очевидно, неприменим к случаю квадратичной нелинейности

$$\varepsilon = A\sigma + \gamma B\sigma^2 \quad (A > 0, B \neq 0),$$

поэтому без привлечения новых идей улучшить результат § 1 мы пока не можем. В следующем параграфе будет предложен совершенно иной подход, позволяющий строить равномерную асимптотическую факторизацию нелинейного волнового уравнения с плавно меняющимся коэффициентом для нелинейности произвольного вида (и, в частности, для квадратичной).

§ 3. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ОБЩЕГО ВИДА.

**ТЕОРЕМА О РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
ФАКТОРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМСЯ
КОЭФФИЦИЕНТОМ. УСЛОВИЯ ТОЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

1. Теорема 3.1 из § 3 гл. 1 и теорема 2.2 из предыдущего параграфа естественным образом наводят на мысль о том, что уравнение

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

можно асимптотически факторизовать с равномерно малой погрешностью, если σ ограничено.

Будем искать представление уравнения (3.1) в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} + g(\gamma x) \varphi'(\sigma) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g(\gamma x) \varphi(\sigma) \right\} = O(\gamma^2) \quad (3.2)$$

(для простоты мы ограничились пока случаем, когда внутренний множитель в разложении описывает волну, распространяю-

щуюся вправо). Перемножая в левой части (3.2) скобки, перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\gamma x) \varphi'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\ & + g(\gamma x) \varphi'(\sigma) \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} g(\gamma x) \varphi(\sigma) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} g(\gamma x) \varphi(\sigma) + g^2(\gamma x) \varphi'(\sigma) \varphi(\sigma). \end{aligned}$$

Объединяя здесь второе слагаемое с четвертым, третье — с седьмым, а шестое — с восьмым, перепишем предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left\{ g(\gamma x) \varphi'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} g(\gamma x) \varphi(\sigma) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\ & - \left. \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} + \left\{ g(\gamma x) \varphi'(\sigma) \frac{1}{V\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \right. \\ & - \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V\rho(\gamma x)} g(\gamma x) \varphi(\sigma) \right\} + g^2(\gamma x) \varphi'(\sigma) \varphi(\sigma) \equiv \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g(\gamma x) \left\{ \varphi'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} + \right. \\ & + \left. \frac{d}{d\sigma} (\sqrt{a'(\sigma)} \varphi(\sigma)) \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left(\frac{1}{V\rho(\gamma x)} \right)'_x \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \\ & - \left(\frac{g(\gamma x)}{V\rho(\gamma x)} \right)'_x \varphi(\sigma) + g^2(\gamma x) \varphi'(\sigma) \varphi(\sigma). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нам, очевидно, нужно, чтобы в правой части (3.3) сократились слагаемые, содержащие $\partial \sigma / \partial t$. Для этого потребуем, чтобы:

$$\text{а) } g(\gamma x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{V\rho(\gamma x)} \right), \quad (3.4)$$

$$\text{б) } \varphi'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{d}{d\sigma} (\sqrt{a'(\sigma)} \varphi(\sigma)) = \sqrt{a'(\sigma)}. \quad (3.5)$$

Имеем из (3.5)

$$2\varphi'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} + (\sqrt{a'(\sigma)})' \varphi(\sigma) = \sqrt{a'(\sigma)},$$

т. е.

$$\varphi' + \frac{1}{4} \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)} \varphi = \frac{1}{2}.$$

Решение данного уравнения, обращающееся в нуль при $\sigma=0$, имеет вид

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{2} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta. \quad (3.6)$$

Требование $\varphi(0)=0$ мы наложим, чтобы два последних слагаемых в (3.3) (которые, очевидно, и будут представлять собой погрешность факторизации) исчезали при $\sigma \rightarrow 0$.

Подставляя теперь найденные функции φ и g в правую часть (3.3) и в тождественно равную ей левую часть (3.2), получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\ & + \frac{\gamma^2}{4\rho^3(\gamma x)} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \cdot \left\{ \rho''\rho - 2\rho'^2 + \frac{1}{4} \rho'^2 \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right\} = \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} - \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'}{\rho^{3/2}} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'}{\rho^{3/2}} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right\}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Таким образом, произведение из левой части (3.2) при найденных φ и g отличается от левой части (3.1) на величину

$$\begin{aligned} O(\gamma^2) = & \frac{\gamma^2}{4\rho^3(\gamma x)} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \cdot \left\{ \rho''\rho - 2\rho'^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \rho'^2 \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right\}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

т. е. при найденных φ и g (3.2) действительно представляет собой искомую асимптотическую факторизацию уравнения (3.1).

Точно так же рассматривается случай, когда внутренний множитель в произведении, аналогичном (3.2), описывает волну, распространяющуюся влево. Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 3.1 [26]. Уравнение (3.1) может быть представлено в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \mp \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} + \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'}{\rho^{3/2}} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{4} \frac{\gamma \rho'}{\rho^{3/2}} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta \right) \right\} = O(\gamma^2), \quad (3.9)$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала, если σ — ограниченная функция, и выражается формулой (3.8). (Ясно, что при $\sigma=0$ погрешность $O(\gamma^2)$ обращается в нуль.)

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда $a(\sigma) = A\sigma^m \operatorname{sign} \sigma$, теорема (3.1), очевидно, переходит в теорему 2.1 из предыдущего параграфа.

З а м е ч а н и е 2. Условия, которые мы наложили в этой главе (см. § 1) на функцию $\rho = \rho(\xi)$, $\xi = \gamma x$, довольно грубы. Как видно из формулы (3.8), для справедливости теоремы 3.1 достаточно потребовать ограниченности функций ρ''/ρ^2 и ρ'^2/ρ^3 .

З а м е ч а н и е 3. Интересно выяснить, когда равномерная факторизация (3.9) является не асимптотической (при $\gamma \rightarrow 0$), а точной. В этом последнем случае, очевидно, малость параметра γ перестает играть какую-либо роль, т. е. не нужно требовать, чтобы плотность ρ изменялась плавно. Из выражения (3.8) для погрешности факторизации $O(\gamma^2)$ ясно, что, для того чтобы эта погрешность тождественно равнялась нулю, должно быть тождественно равно нулю выражение в фигурных скобках в правой части (3.8). В частности, это выражение в фигурных скобках не должно зависеть от σ , откуда следует, что должно выполняться равенство

$$\frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta = A, \quad (3.10)$$

откуда

$$\frac{\int_0^\sigma (a'(\eta))^{1/4} d\eta}{(a'(\sigma))^{1/4}} = A\sigma + B$$

(где A и B — некоторые постоянные).

Мы считаем, что функция $a'(\sigma) \geq 0$ и не обращается в тождественный нуль ни на каком интервале изменения σ . Следовательно, левая часть последнего равенства отрицательна при $\sigma < 0$ и положительна при $\sigma > 0$. Отсюда, очевидно, вытекает, что $B=0$, $A>0$. Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\frac{(a'(\sigma))^{1/4}}{\int_0^\sigma (a'(\eta))^{1/4} d\eta} = \frac{1}{A\sigma},$$

т. е.

$$d \ln \left| \int_0^\sigma (a'(\eta))^{1/4} d\eta \right| = d \ln |\sigma|^{1/A},$$

откуда

$$a(\sigma) = C |\sigma|^{\frac{4}{A}-3} \operatorname{sign} \sigma, \quad C = \text{const} > 0. \quad (3.11)$$

Ясно, что показатель степени у $|\sigma|$ в (3.11) должен быть положительным, откуда $A < 4/3$. Таким образом, окончательно имеем, что величина A должна принадлежать интервалу

$$0 < A < 4/3. \quad (3.12)$$

Далее, из (3.10) и (3.8) следует, что погрешность $O(\gamma^2)$ обратится в нуль, если функция $\rho(\xi)$ будет удовлетворять уравнению

$$\rho''\rho - 2\rho'^2 + \frac{1}{4}\rho'^2 A = 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \left(2 - \frac{A}{4}\right) \frac{\rho'}{\rho}.$$

Из последнего равенства без труда получаем

$$\rho(\xi) = (C_1 \xi + C_2)^{\frac{4}{A-4}}, \quad (3.13)$$

$$C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}.$$

Итак, если функция ρ определяется формулой (3.13), а функция $a(\sigma)$ — формулой (3.11), то факторизация (3.9) уравнения (3.1) оказывается точной. В этом случае, очевидно, можно в (3.1) и (3.9) положить $\gamma=1$.

Нетрудно видеть также, что функциями (3.11) и (3.13) исчерпываются все случаи точной факторизации уравнения (3.1). (См. по этому поводу также [57, 58].)

2. Поставим теперь все ту же граничную задачу, которой мы занимались выше:

$$\begin{aligned}\sigma = \partial\sigma/\partial t = 0 \text{ при } x > 0, t = 0, \\ \sigma(t, 0) = \sigma_0(t),\end{aligned}\tag{3.14}$$

где $\sigma_0(t)$ — гладкая функция, равная нулю при $t < 0$ и при $t > T > 0$.

Из теоремы 3.1 предыдущего пункта ясно, что в одноволновом приближении следует заменить уравнение (3.1) уравнением первого порядка:

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}} \frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta = 0.\tag{3.15}$$

Мы будем решать задачу (3.14), (3.15), не предполагая амплитуды малыми. Поэтому наш анализ будет возможен лишь до момента возникновения ударной волны (поскольку, как мы знаем, при больших амплитудах с возникновением ударной волны теряется одноволновость процесса).

Итак, запишем уравнения характеристик для (3.15):

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{a'(\sigma)\rho(\gamma x)},\tag{3.16}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{4} \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)} \int_0^\sigma \left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)} \right)^{1/4} d\eta.\tag{3.17}$$

Из (3.17) имеем на характеристике

$$\frac{(a'(\sigma))^{1/4} d\sigma}{\int_0^\sigma (a'(\eta))^{1/4} d\eta} = \frac{1}{4} \frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)} dx,$$

т. е.

$$d \ln \left| \int_0^\sigma (a'(\eta))^{1/4} d\eta \right| = d \ln \rho^{1/4}(\gamma x).$$

откуда

$$\int_0^{\sigma} (a'(\eta))^{1/4} d\eta = C \rho^{1/4}(\gamma x), \quad (3.18)$$

где C постоянна на каждой характеристике.

Обозначим теперь координату t при $x=0$ через τ . Тогда, полагая в (3.18) $x=0$ и учитывая граничное условие (см. (3.14)), имеем

$$C = \rho^{-1/4}(0) \int_0^{\sigma_0(\tau)} (a'(\eta))^{1/4} d\eta.$$

Поэтому (3.18) можно переписать в виде

$$\int_0^{\sigma} (a'(\eta))^{1/4} d\eta = \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \int_0^{\sigma_0(\tau)} (a'(\eta))^{1/4} d\eta. \quad (3.19)$$

С другой стороны, из (3.16) имеем

$$t = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{a'(\sigma) \rho(z)} dz + \tau. \quad (3.20)$$

Формулы (3.19), (3.20) и определяют решение нашей задачи до возникновения градиентной катастрофы.

Итак, нам удалось проинтегрировать уравнения характеристик (3.16), (3.17) в квадратурах. Причина, по которой нам удалось это сделать, в том, что в уравнении (3.17) разделяются переменные. Фактически такую возможность разделения переменных мы заложили уже с самого начала в уравнение (3.1), где функция a считается зависящей только от σ , в то время как $\rho = \rho(\gamma x)$.

3. Положим

$$F(\sigma) \equiv \int_0^{\sigma} (a'(\eta))^{1/4} d\eta, \quad G(w) \equiv \sqrt{a'(F^{-1}(w))}.$$

Тогда (3.19), очевидно, переписывается следующим образом:

$$\sigma = F^{-1} \left(\left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} F(\sigma_0(\tau)) \right). \quad (3.21)$$

Подставляя это выражение в (3.20), получим уравнение семейства характеристик в виде

$$t = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{\rho(z)} G \left(\left(\frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right)^{1/4} F(\sigma_0(\tau)) \right) dz + \tau. \quad (3.22)$$

Задача. Пусть для функции G' справедливы неравенства вида

$$g_1(\omega_1)g_2(\omega_2) \leq G'(\omega_1\omega_2) \leq f_1(\omega_1)f_2(\omega_2). \quad (3.23)$$

Получить оценки для расстояния x_0 , на котором происходит градиентная катастрофа.

Наконец, при $x > x_0$ при умеренных амплитудах можно воспользоваться методом определения ударного фронта, изложенным в п. 2 § 5 гл. 1.

4. Выше мы уже отмечали, что теорема 2.1 из предыдущего параграфа является частным случаем теоремы 3.1 этого параграфа. Нетрудно проверить также, что при $a(\sigma) = A\sigma + \gamma B\sigma^2$, $0 < \gamma \ll 1$, факторизация, установленная в теореме 3.1, совпадает с факторизацией из теоремы 1.1 с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$. Отсюда, в частности, следует, что в случае малой квадратичной нелинейности формулы (3.19), (3.20) асимптотически переходят в формулы Ландау—Уизема из § 1.

5. Точно факторизуемое линейное волновое уравнение с переменным коэффициентом и его общее решение

Пусть

$$a(\sigma) = k\sigma, \quad \rho = (C_1x + C_2)^{-4/3},$$

где $k = \text{const} > 0$, C_1, C_2 — некоторые постоянные. (Обратим внимание на то, что в выражение для плотности не входит малый параметр.) Тогда уравнение (3.1) оказывается линейным и принимает вид

$$k \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (C_1x + C_2)^{4/3} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (3.24)$$

Из замечания 3 к теореме 3.1 следует, что это уравнение точно факторизуется следующим образом:

$$\left\{ \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial t} \mp \left(\frac{\partial}{\partial x} (C_1x + C_2)^{2/3} - \frac{C_1}{3} (C_1x + C_2)^{-1/3} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial t} \pm \left((C_1x + C_2)^{2/3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C_1}{3} (C_1x + C_2)^{-1/3} \right) \right\} \sigma = 0. \quad (3.25)$$

С помощью этого разложения нетрудно построить общее решение уравнения (3.24). Действительно, рассмотрим вначале уравнение

$$\sqrt{k} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (C_1x + C_2)^{2/3} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{C_1}{3} (C_1x + C_2)^{-1/3} \sigma = 0, \quad (3.26)$$

отвечающее внутреннему операторному множителю в (3.25),

где взяты верхние знаки. (Ясно, что все решения этого уравнения будут также точными решениями уравнения (3.24).) Запишем уравнения характеристик для (3.26):

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{k} (C_1 x + C_2)^{-2/3}, \quad \frac{d\sigma}{dx} = -\frac{C_1}{3} (C_1 x + C_2)^{-1} \sigma.$$

Интегрируя, легко получаем общее решение этих уравнений:

$$t = \tau + \sqrt{k} \int_{x_0}^x (C_1 x + C_2)^{-2/3} dx, \quad \sigma = f(\tau) (C_1 x + C_2)^{-1/3}$$

(f — произвольная функция). Следовательно, общее решение уравнения (3.26) имеет вид

$$\sigma = \frac{f(t - 3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{1/3}/C_1)}{(C_1 x + C_2)^{1/3}}.$$

Аналогично решается уравнение

$$\sqrt{k} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - (C_1 x + C_2)^{2/3} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{C_1}{3} (C_1 x + C_2)^{-1/3} \sigma = 0,$$

соответствующее случаю нижних знаков во внутреннем операторном множителе в (3.25). А именно, его общее решение имеет вид

$$\sigma = \frac{g(t + 3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{1/3}/C_1)}{(C_1 x + C_2)^{1/3}}$$

(g — произвольная функция).

Теперь ясно, что общее решение уравнения (3.24) представляет собой сумму:

$$\sigma = \frac{f(t - 3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{1/3}/C_1) + g(t + 3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{1/3}/C_1)}{(C_1 x + C_2)^{1/3}}. \quad (3.27)$$

Этот результат хорошо известен в газовой динамике. В других переменных он приведен в [61, с. 14].

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СРЕДЫ

1. Предположим теперь, что плотность ρ и нелинейная функция a зависят от лагранжевой координаты (которую мы будем в этом параграфе обозначать через ξ), а также от времени (которое мы будем обозначать через τ):

$$\rho = \rho(\tau, \xi), \quad a = a(\tau, \xi, \sigma).$$

Пусть l — характерная длина волны, L — характерный масштаб пространственной неоднородности, Θ — характерный масштаб временной неоднородности, c — характерная скорость звука. Будем считать, что

$$l \ll \min \{L, c\Theta\}.$$

Тогда в задаче естественным образом возникает малый параметр

$$\gamma = \frac{l}{\min \{L, c\Theta\}}, \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

Подобно тому как мы это делали в п. 1 § 1, введем переменные $t = \tau/\gamma$, $x = \xi/\gamma$. Нелинейное волновое уравнение для напряжений в переменных t , x , очевидно, запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 a(\gamma t, \gamma x, \sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma t, \gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Хотя это и кажется довольно удивительным, но уравнение (4.1) также удастся равномерно асимптотически факторизовать.

Сформулируем ограничения, которым должны удовлетворять функции $a(\tau, \xi, \sigma)$ и $\rho(\tau, \xi)$:

- 1) $a(\tau, \xi, 0) = 0$,
- 2) $a'_{\sigma}(\tau, \xi, \sigma) > 0$,
- 3) функции $a(\tau, \xi, \sigma)$ и $\rho(\tau, \xi)$ ограничены вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков,
- 4) $\rho(\tau, \xi) \geq \text{const} > 0$.

2. Прежде чем приступить к факторизации уравнения (4.1), сделаем следующее замечание относительно обозначений для производных, которые мы будем использовать в данном параграфе. Пусть

$$f = f(\tau, \xi, \sigma); \quad \tau \equiv \gamma t, \quad \xi \equiv \gamma x.$$

Тогда через f'_{τ} и f'_{ξ} мы будем обозначать частные производные функции f при фиксированном σ . Для производных же по t и x сложной функции f при $\sigma = \sigma(t, x)$ мы будем использовать обозначения $\partial f / \partial t$ и $\partial f / \partial x$. Таким образом, по теореме о производной сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \gamma f'_{\tau} + f'_{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \gamma f'_{\xi} + f'_{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \end{aligned}$$

3. Будем искать асимптотическую факторизацию уравнения (4.1) в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'_\sigma(\tau, \xi, \sigma)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho(\tau, \xi)}} + g_1(\tau, \xi, \sigma) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{a'_\sigma(\tau, \xi, \sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\tau, \xi)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g_2(\tau, \xi, \sigma) \right\} = O(\gamma^2). \quad (4.2)$$

(Для простоты мы ограничились случаем, когда внутренний множитель в разложении отвечает волне, распространяющейся вправо.) Перемножая скобки в левой части (4.2), получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} a'_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g_1 \sqrt{a'_\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g_1 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'_\sigma} g_2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho}} g_2 + g_1 g_2. \quad (4.3)$$

Прежде чем приводить в (4.3) подобные члены, заметим, что справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} a'_\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \gamma^2 a''_{\tau\tau} - \gamma a''_{\tau\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4.4)$$

и

$$- \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \\ \equiv -\gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\xi} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (4.5)$$

(Тождества (4.4) и (4.5) проверяются непосредственным дифференцированием.) Теперь, учитывая (4.4) и (4.5), перепишем выражение (4.3) в виде

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\ + \left\{ g_1 \sqrt{a'_\sigma} + (V \sqrt{a'_\sigma})'_\sigma g_2 + V \sqrt{a'_\sigma} (g_2)'_\sigma - \gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\xi} - \gamma a''_{\tau\sigma} \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \\ + \left\{ g_1 \frac{1}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} (g_2)'_\sigma + \gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau} \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\ + \left\{ -\gamma^2 a''_{\tau\tau} + \gamma (V \sqrt{a'_\sigma})'_\tau g_2 + \gamma V \sqrt{a'_\sigma} (g_2)'_{\tau} - \right. \\ \left. - \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)'_{\xi} g_2 - \gamma \frac{1}{\sqrt{\rho}} (g_2)'_{\xi} + g_1 g_2 \right\}. \quad (4.6)$$

Для того чтобы сделать выражение (4.6) возможно более близким к левой части уравнения (4.1), приравняем в (4.6) к нулю коэффициенты при $\partial\sigma/\partial t$ и $\partial\sigma/\partial x$:

$$g_1 \sqrt{a'_\sigma} + (\sqrt{a'_\sigma})'_\sigma g_2 + \sqrt{a'_\sigma} (g_2)'_\sigma - \gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\xi - \gamma a''_{\tau\sigma} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} g_1 - \frac{1}{\sqrt{\rho}} (g_2)'_\sigma + \gamma \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\tau = 0. \quad (4.8)$$

Заметим теперь, что в системе уравнений (4.7), (4.8) относительно неизвестных функций $g_1(\tau, \xi, \sigma)$ и $g_2(\tau, \xi, \sigma)$ переменные τ и ξ фактически являются параметрами, и саму систему (4.7), (4.8) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений (по переменной σ).

Исключая из (4.7), (4.8) g_1 , приходим к следующему уравнению относительно g_2 :

$$2 \sqrt{a'_\sigma} \frac{dg_2}{d\sigma} + (\sqrt{a'_\sigma})'_\sigma g_2 = \gamma \left\{ \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\xi + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\tau + a''_{\tau\sigma} \right\},$$

т. е.

$$2 (a'_\sigma)^{1/4} \frac{d}{d\sigma} \{ (a'_\sigma)^{1/4} g_2 \} = \gamma \left\{ \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\xi + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\tau + a''_{\tau\sigma} \right\}.$$

Следовательно,

$$(a'_\sigma)^{1/4} g_2 = \frac{\gamma}{2} \int_0^\sigma (a'_\sigma)^{-1/4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\xi + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\tau + a''_{\tau\sigma} \right\} \times \\ \times d\sigma + \text{const}. \quad (4.9)$$

Мы полагаем здесь $\text{const}=0$, с тем чтобы сделать погрешность факторизации равной нулю при $\sigma=0$. (Действительно, в этом случае из (4.9) следует, что $g_2(\tau, \xi, 0)=0$; кроме того, в силу сделанных предположений $a''_{\tau\sigma}(\tau, \xi, 0)=0$. Поэтому выражение в последних фигурных скобках в (4.6), которое, очевидно, и представляет собой погрешность факторизации, оказывается равным нулю при $\sigma=0$.) Итак, окончательно, имеем для g_2 формулу

$$g_2(\tau, \xi, \sigma) = \frac{\gamma}{2} (a'_\sigma)^{-1/4} \int_0^\sigma (a'_\sigma)^{-1/4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\xi + \right. \\ \left. + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_\tau + a''_{\tau\sigma} \right\} d\sigma. \quad (4.9')$$

Теперь из (4.8) и (4.9)' находим g_1 :

$$g_1(\tau, \xi, \sigma) = \frac{\gamma}{2} \frac{d}{d\sigma} \left((a'_\sigma)^{-1/4} \int_0^\sigma (a'_\sigma)^{-1/4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau} + a''_{\tau\sigma} \right\} d\sigma \right) - \gamma \sqrt{\rho} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau}. \quad (4.10)$$

Подставляя функции g_1 и g_2 из (4.9) и (4.10) в (4.6), легко получаем, что это выражение будет отличаться от левой части уравнения (4.1) на равномерно малую (при ограниченном σ) величину $O(\gamma^2)$, которая представляет собой содержимое последних фигурных скобок в (4.6):

$$O(\gamma^2) = -\gamma^2 a''_{\tau\tau} + \gamma (V a'_\tau)'_{\tau} g_2 + \gamma V a'_\sigma (g_2)'_{\tau} - \\ - \gamma \left(\frac{1}{V \rho} \right)'_{\xi} g_2 - \gamma \frac{1}{V \rho} (g_2)'_{\xi} + g_1 g_2.$$

Следовательно, (4.2) при найденных g_1 и g_2 является искомой асимптотической факторизацией уравнения (4.1).

Точно так же рассматривается случай, когда в разложении, аналогичном (4.2), внутренний множитель описывает волну, распространяющуюся влево.

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 4.1. Уравнение (4.1) представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V a'_\sigma(\gamma t, \gamma x, \sigma) \mp \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{V \rho(\gamma t, \gamma x)} + \gamma f_1^\pm(\gamma t, \gamma x, \sigma) \right\} \times \\ \times \left\{ V a'_\sigma(\gamma t, \gamma x, \sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{V \rho(\gamma t, \gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma f_2^\pm(\gamma t, \gamma x, \sigma) \right\} = O(\gamma^2), \quad (4.11)$$

где

$$f_1^\pm(\tau, \xi, \sigma) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} \left((a'_\sigma)^{-1/4} \int_0^\sigma (a'_\sigma)^{-1/4} \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau} + a''_{\tau\sigma} \right\} d\sigma \right) - \sqrt{\rho} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau}, \quad (4.12)$$

$$f_2^\pm(\tau, \xi, \sigma) = \frac{1}{2} (a'_\sigma)^{-1/4} \int_0^\sigma (a'_\sigma)^{-1/4} \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\xi} + \right. \\ \left. + \sqrt{\rho a'_\sigma} \left(\sqrt{\frac{a'_\sigma}{\rho}} \right)'_{\tau} + a''_{\tau\sigma} \right\} d\sigma, \quad (4.13)$$

а величина $Q(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$. (В (4.11), как обычно, у всех членов разложения выбираются одновременно верхние или нижние знаки.)

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что при $a=a(\sigma)$, $\rho=\rho(\gamma x)$ теорема 4.1 переходит в теорему 3.1 из предыдущего параграфа.

З а д а ч а. При каких условиях факторизация (4.11) является точной? (См. по этому поводу [55, с. 107], а также [57].)

4. Пренебрегая теперь величиной $O(\gamma^2)$ в разложении (4.11), волну, распространяющуюся, например, вправо, можно описать уравнением

$$\sqrt{a'_\sigma(\gamma t, \gamma x, \sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma f_2^+(\gamma t, \gamma x, \sigma) = 0. \quad (4.14)$$

Это уравнение, очевидно, можно решать с помощью характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x) a'_\sigma(\gamma t, \gamma x, \sigma)}, \\ \frac{d\sigma}{dx} &= -\gamma \sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x)} f_2^+(\gamma t, \gamma x, \sigma). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Система обыкновенных уравнений (4.15) в квадратурах, вообще говоря, не интегрируется (в отличие от аналогичной системы из § 3). Однако работать с ней, конечно, намного проще, чем с исходным уравнением (4.1).

З а д а ч а. Рассмотрим составной стержень, материал которого является однородным и линейно-упругим при $0 < x < l$, а при $x > l$ удовлетворяет определяющему соотношению $\varepsilon = a(\gamma t, \gamma x, \sigma)$, причем плотность стержня при $x > l$ имеет вид $\rho = \rho(\gamma t, \gamma x)$ (где $0 < \gamma \ll 1$). Пусть стержень ненапряжен при $t < 0$, а в момент $t=0$ к его краю прикладывается нагрузка $\sigma(t, 0) = \sigma_0(t)$. Найти асимптотическое выражение для волны, отраженной от границы раздела в упругую часть стержня.

5. Пусть теперь

$$a = A(\gamma t, \gamma x) \sigma,$$

тогда из теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 4.2. Уравнение

$$\frac{\partial^2 (A(\gamma t, \gamma x) \sigma)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(\gamma t, \gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.16)$$

представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A} \mp \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{A'_t \pm \left(\sqrt{\frac{A}{\rho}} \right)'_{\xi}}{\sqrt{A}} - \sqrt{\rho} \left(\sqrt{\frac{A}{\rho}} \right)'_{\tau} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma \sigma}{2} \left(\frac{A'_t \pm \left(\sqrt{\frac{A}{\rho}} \right)'_{\xi}}{\sqrt{A}} + \sqrt{\rho} \left(\sqrt{\frac{A}{\rho}} \right)'_{\tau} \right) \right\} = \\ = O(\gamma^2), \quad (4.17)$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$.

Замечание 1. Одноволновые уравнения, соответствующие двум различным выборам знаков во внутреннем множителе в (4.17), очевидно, решаются методом характеристик (при произвольных начальных данных). В силу линейности сумма решений таких уравнений будет представлять собой асимптотическое приближение к общему решению уравнения (4.16).

Замечание 2. В отличие от теоремы 2.2 теорема 4.2 уже не есть следствие преобразования Грина—Лиувилля и в этом смысле является более содержательной.

Задача. Полагая в теореме 4.1

$$a = A(\gamma t, \gamma x) \sigma + \gamma B(\gamma t, \gamma x) \sigma^2,$$

получить из (4.11) аналог теоремы 1.1.

ГЛАВА 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ

Эта глава посвящена нелинейным одномерным волнам в наследственных средах, т. е. таких, в которых связь между напряжением и деформацией зависит от всей предыдущей истории процесса. В волновое уравнение, описывающее, например, распространение напряжений, эта зависимость от истории процесса входит в виде интеграла по времени. Характеристики оказываются, как правило, бесполезными для построения решений таких уравнений, однако существуют и важные исключения из этого правила, которые будут обсуждаться ниже.

Основным инструментом нашего исследования остаются теоремы факторизации (как точные, так и асимптотические), подобные соответствующим теоремам из гл. 1 и 2.

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Рассмотрим однородный стержень, сделанный из нестареющего линейно-наследственно-упругого материала. Тогда напряжения и деформации связаны в нем соотношением [54]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (1.1)$$

которое может быть записано также в следующем эквивалентном виде:

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (1.2)$$

Здесь E — мгновенный модуль упругости, $K(t)$ — ядро ползучести, $R(t)$ — ядро релаксации. Связь между ядрами ползучести и релаксации дается формулой

$$K(t) = R(t) + \int_0^t R(t-\tau) R(\tau) d\tau + \int_0^t R(t-\tau) \int_0^\tau R(\tau-\tau_1) R(\tau_1) \times \\ \times d\tau_1 d\tau + \dots, \quad (1.3)$$

где многоточием обозначены кратные свертки более высокого порядка.

Ясно, что для того чтобы соотношения (1.1) и (1.2) имели смысл, функции $K(t)$ и $R(t)$, определенные на полуоси $t > 0$, должны быть локально интегрируемы на $[0, \infty)$.

В наследственной упругости обычно считают ядра $K(t)$ и $R(t)$ неотрицательными и монотонно убывающими. Это предположение называют *гипотезой о затухающей памяти*. (Заметим, однако, что для парожидкостных и пузырьковых сред ядра наследственности оказываются осциллирующими функциями [16, 37].)

Из формулы (1.3) видно, что

$$K(t) \sim R(t) \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Функции $K(t)$, $R(t)$ называются *регулярными*, если они стремятся к конечному пределу при $t \rightarrow +0$, и *сингулярными*, если они стремятся к $+\infty$ при $t \rightarrow +0$. Интересное обсуждение вопросов сингулярности и регулярности ядер наследственности содержится в работе [16].

2. Если деформации не являются очень малыми, то, как правило, в соотношения (1.1) и (1.2) необходимо вводить нелинейность. Две наиболее распространенные нелинейно-наследственные модели — это *модель Работнова*

$$\varepsilon(t) = a \left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right),$$

(в которой используется одна нелинейная функция a) и *модель Лидермана—Розовского*

$$\varepsilon(t) = a(\sigma(t)) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) b(\sigma(\tau)) d\tau$$

(в которой используются две нелинейные функции a и b).

В дальнейшем мы будем, как правило, использовать следующий частный случай уравнения Лидермана—Розовского:

$$\varepsilon(t) = a(\sigma(t)) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) a(\sigma(\tau)) d\tau. \quad (1.4)$$

Это уравнение может быть переписано также в следующем эквивалентном виде:

$$\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau = a(\sigma(t)), \quad (1.4')$$

где ядро $R(t)$ по-прежнему связано с $K(t)$ формулой (1.3).

Если $\varepsilon = \sigma = 0$ при $t < 0$, то как из модели Работнова, так и из модели Лидермана—Розовского вытекает, что

$$\varepsilon(t) \sim a(\sigma(t)) \text{ при } t \rightarrow +0. \quad (1.5)$$

Если при этом нагружение при $t > 0$ происходит достаточно быстро, то (1.5) будет иметь место даже для больших по модулю значений ε и σ . Зависимость (1.5) называют иногда *кривой мгновенного деформирования*.

3. Нам будет удобно ввести следующие обозначения для операторов свертки:

$$K^*u \equiv \int_{-\infty}^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$R^*u \equiv \int_{-\infty}^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

(здесь u — пробная функция). В этих обозначениях соотношение (1.4)' перепишется в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{1-R^*} a(\sigma) \quad (1.6)$$

(где $\frac{1}{1-R^*}$ следует понимать как $1+R^*+R^*R^*+\dots$). Отметим также, что формуле (1.3) будет соответствовать следующая связь между операторами K^* и R^* :

$$1+K^* = \frac{1}{1-R^*}.$$

4. Модели Работнова и Лидермана—Розовского не исчерпывают, конечно, всего многообразия определяющих соотношений с кривой мгновенного деформирования $\varepsilon \sim a(\sigma)$. Например, та же кривая мгновенного деформирования, как нетрудно видеть, соответствует и определяющему соотношению

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sigma'_t dt$$

(предполагается, что $\sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$). В этом определяющем соотношении $\sqrt{1+K^*} = 1 + 1/2K^* - \dots$, а произведение $\sqrt{1+K^*} \times \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)}$ следует понимать как произведение операторов (применяемое к σ'_t), причем оператор, стоящий правее, действует раньше. Хотя такое определяющее соотношение кажется сложно устроенным, в дальнейшем мы увидим, что его использование дает большие преимущества при решении волновых задач.

З а м е ч а н и е. Все встречающиеся в дальнейшем алгебраические и рациональные функции от операторов свертки K^* , R^* , ... понимаются как ряды Тейлора по степеням этих операторов.

**§ 2. МАЛАЯ КВАДРАТИЧНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ.
ТЕОРЕМА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ
НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ**

1. Пусть в однородном стержне плотности ρ напряжение и деформация связаны соотношением (принадлежащим к типу (1.6))

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \gamma R^*} (A\sigma + \gamma B\sigma^2), \quad 0 < \gamma \ll 1, \quad (2.1)$$

где $A > 0$, $B/A^2 = O(1)$, $\int_0^\infty R(t) dt = O(1)$. Запишем уравнения движения стержня в лагранжевых координатах:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Из этих уравнений, как мы знаем, вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0. \quad (2.2)$$

Подставляя сюда выражение для ε из (2.1), приходим к следующему нелинейному волновому уравнению с памятью:

$$\frac{\partial^2 (A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} (1 - \gamma R^*) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. Уравнение (2.3) может быть асимптотически факторизовано следующим образом:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \mp \sqrt{\frac{1 - \gamma R^*}{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma R^*}{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \sigma = O(\gamma^2). \quad (2.4)$$

Доказательство. Перемножим в (2.4) скобки. Имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \mp \sqrt{\frac{1 - \gamma R^*}{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A + 2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma R^*}{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} \equiv$$

$$\begin{aligned}
& \equiv \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sqrt{\frac{1-\gamma R^*}{\rho}} \sqrt{\frac{1-\gamma R^*}{\rho}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \mp \\
& \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right). \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Нам, очевидно, достаточно оценить выражение в скобках в правой части (2.5). Заметим, однако, что в силу тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

где $f(\sigma)$ — произвольная гладкая функция (см. доказательство теоремы 3.1 гл. 1), а также в силу коммутативности оператора свертки с операторами дифференцирования справедливо тождество

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} & \equiv \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \\
& \equiv \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1-\gamma R^*} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \equiv \\
& \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{1-\gamma R^*} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} - \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{1-\gamma R^*}) \frac{\partial \sigma}{\partial x},
\end{aligned}$$

откуда с учетом разложений

$$\begin{aligned}
\sqrt{A+2\gamma B\sigma} &= \sqrt{A} \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma \right) - \dots, \\
\sqrt{1-\gamma R^*} &= 1 - \frac{\gamma}{2} R^* - \dots
\end{aligned} \quad (2.6)$$

(где многоточием обозначены члены порядка $O(\gamma^2)$), получаем, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \equiv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \equiv \sqrt{\frac{A}{\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* - \dots \right) \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma - \dots \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma - \dots \right) \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* - \dots \right) \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \\
& \equiv - \frac{\gamma^2 B}{V A \rho} \frac{\partial}{\partial t} (R^* \sigma - \sigma R^*) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \dots = O(\gamma^2). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Теперь из (2.5) и (2.7) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что в силу (2.6) разложение (2.4) может быть упрощено следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A} \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma \right) \mp \frac{1}{V \rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\
& \times \left\{ \sqrt{A} \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma \right) \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{V \rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \sigma = O(\gamma^2). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

2. Из (2.7) хорошо видна причина, по которой факторизация в теореме 2.1 не могла быть точной. Эта причина — некоммутативность оператора свертки и оператора умножения на функцию. Ясно также, что величина $O(\gamma^2)$ в правой части (2.4) не является равномерно малой при ограниченной σ . Эта величина может оказаться существенной в области быстрого изменения функции σ (например, вблизи волновых фронтов). Однако области, где σ меняется быстро, имеют, как правило, малую площадь, что, очевидно, уменьшает их влияние.

Таким образом, мы установили определенное сходство между теоремами 2.1 и 1.1 из § 1 гл. 2.

3. Из (2.8) ясно, что в рамках рассматриваемого асимптотического подхода волна, распространяющаяся вправо, описывается уравнением

$$\sqrt{A \rho} \left(1 + \gamma \frac{B}{A} \sigma \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

(Из других соображений уравнение (2.9) было выведено в [56].)

Это уравнение может быть преобразовано следующим образом. Домножим (2.9) на оператор

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right)^{-1} = 1 + \frac{\gamma}{2} R^* + \dots,$$

тогда, очевидно, получим, что с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$ (2.9) совпадает с уравнением

$$\sqrt{A \rho} \left(1 + \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \sqrt{A \rho} \frac{B}{A} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

В случае, когда ядро $R(t)$ близко к константе ($R'(t) = o(1)$), уравнение (2.10), очевидно, с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка переходит в чисто дифференциальное уравнение

$$\sqrt{A\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} R(0) \sigma \right) + \gamma \sqrt{A\rho} \frac{B}{A} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

которое легко интегрируется методом характеристик (см. по этому поводу [23]).

В дальнейшем мы будем работать в основном с уравнением (2.9), которое, как мы увидим, можно считать не только результатом асимптотической факторизации, но и в некотором смысле точным уравнением (соответствующим модифицированному определяющему соотношению).

4. Выведем теперь условие на разрыве для напряжений, которым должно быть дополнено нелинейное волновое уравнение (2.3).

Запишем динамическое и кинематическое условия совместности:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= -\rho[v]U, \\ [v] &= -[\epsilon]U \end{aligned} \quad (2.11)$$

(здесь U — скорость ударного фронта). Из этих условий следует равенство

$$[\sigma] = \rho[\epsilon]U^2. \quad (2.12)$$

С другой стороны, из определяющего соотношения (2.1), которое мы перепишем в эквивалентной форме:

$$\epsilon - \gamma R^* \epsilon = A\sigma + \gamma B\sigma^2,$$

следует

$$[\epsilon] = A[\sigma] + \gamma B[\sigma^2] \quad (2.13)$$

(поскольку свертка является, очевидно, непрерывной функцией, даже если ϵ терпит сильный разрыв). Подставляя (2.13) в (2.12), получаем

$$U = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho(A[\sigma] + \gamma B[\sigma^2])}} \quad (2.14)$$

(для определенности мы выбрали знак плюс перед радикалом, что соответствует волне, распространяющейся вправо).

Учитывая малость γ , можно преобразовать (с точностью $O(\gamma^2)$) соотношение (2.14) к виду

$$U = \frac{1}{\sqrt{A\rho}} \frac{1}{1 + \gamma \frac{B}{2A} \frac{[\sigma^2]}{[\sigma]}}. \quad (2.15)$$

(Как и в гл. 1, переходя здесь к пределу при $[\sigma] \rightarrow 0$, получаем, что слабые разрывы должны распространяться по характеристикам.)

Заметим теперь, что условие на разрыве (2.15) имеет тот же вид, что и в случае, когда память отсутствует. Поэтому мы можем воспользоваться теми же соображениями, что и в п. 6 § 1 гл. 1, и получить условие устойчивости ударного фронта, совпадающее с (1.17'') (где нужно $a(\sigma)$ заменить на $A\sigma + \gamma B\sigma^2$):

$$[\sigma] > 0 \text{ при } B < 0,$$

$$[\sigma] < 0 \text{ при } B > 0. \quad (2.16)$$

5. В заключение этого параграфа несколько упростим наши обозначения, положив

$$\bar{x} = x\sqrt{A\rho}, \quad k = -B/A.$$

Тогда уравнения (2.9) и (2.10), как нетрудно проверить, примут соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (2.9)'$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \quad (2.10)'$$

а условие (2.15) переписывается следующим образом:

$$\bar{U} = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[\sigma^2]}{[\sigma]}} \quad (2.15)'$$

(\bar{U} — скорость фронта в координатах t, \bar{x}). Наконец, из положительности A следует, что условие устойчивости может быть переписано в виде

$$[\sigma] > 0 \text{ при } k > 0,$$

$$[\sigma] < 0 \text{ при } k < 0. \quad (2.16')$$

Нетрудно показать, что функция σ , удовлетворяющая уравнению (2.9') в области гладкости и условию (2.15)' на разрыве, является обобщенным решением уравнения (2.9') в следующем смысле: для любой финитной гладкой пробной функции $g = g(t, \bar{x})$

$$-\iint \left\{ g'_t \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + g'_x \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} R^* \sigma \right) \right\} dt d\bar{x} = 0.$$

Обратно, обобщенное решение уравнения (2.9'), непрерывное вне гладкой кривой $t = t(\bar{x})$ и обладающее конечными односто-

ронными пределами при подходе к этой кривой, удовлетворяет условию (2.15'). (В области гладкости это решение является, очевидно, решением уравнения (2.9') в обычном смысле.)

Аналогичные утверждения справедливы и для уравнения (2.10').

З а м е ч а н и е. В следующих четырех параграфах мы будем пользоваться соотношениями (2.9'), (2.10') и (2.15'), опуская для простоты черту над U и x .

§ 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ВОЛНЫ СТАЦИОНАРНОГО ПРОФИЛЯ И НЕНУЛЕВЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

1. Волны, распространяющиеся по невозмущенной среде

Представляет интерес следующий вопрос: существуют ли в рамках модели (2.1) волны напряжений, распространяющиеся по невозмущенной среде (для определенности, вправо), не изменяя своей формы? В этом параграфе мы будем рассматривать только волны, не содержащие сильных разрывов, поэтому мы будем иметь дело с непрерывными решениями*) уравнения (2.9'):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

(в соответствии со сделанным соглашением мы опустили здесь черту над x .)

2. Прежде чем двигаться дальше, сформулируем все предположения относительно уравнения (3.1), которые нам потребуются.

Во-первых, мы будем предполагать, что

$$k > 0.$$

В случае отсутствия памяти это условие соответствует опрокидыванию волны растяжения (движущейся вправо) по ходу ее движения. Случай $k < 0$, соответствующий опрокидыванию по ходу движения волны сжатия, сводится к случаю $k > 0$ переменной знака у σ в (3.1).

Во-вторых, относительно ядра наследственности $R(t)$ мы будем предполагать следующее:

$$\begin{aligned} \text{а) } R(t) \geq 0, \quad R'(t) \leq 0 \text{ при } t > 0; \\ \text{б) } I \equiv \int_0^\infty R(t) dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

*) Понимаемыми в обобщенном смысле, чтобы не исключать слабых разрывов.

3. Вернемся теперь к вопросу, поставленному в п. 1. Ясно, что этот вопрос может быть переформулирован так: существуют ли у уравнения (3.1) непрерывные решения вида

$$\sigma = f(t-x/c), \quad c > 0,$$

где $f(z) = 0$ при достаточно больших по модулю отрицательных z ?

Как известно, возмущения бесконечно малой амплитуды распространяются по невозмущенной среде с мгновенно-упругими скоростями (в наших координатах — с единичной скоростью). Однако из непрерывности функции f следует, что вблизи фронта величина σ будет бесконечно малой. Поэтому искомое непрерывное решение уравнения (3.1) следует искать в виде

$$\sigma = f(t-x). \quad (3.3)$$

Имеем, подставляя (3.3) в (3.1),

$$\left(f - \frac{k\gamma}{2} f^2\right)' - f' + \frac{\gamma}{2} R^* f' = 0,$$

т. е.

$$(k\gamma f^2)' - \gamma (R^* f)' = 0,$$

откуда

$$kf^2(t-x) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau-x) d\tau = \text{const.}$$

Переобозначая здесь $z = t-x$ через t и учитывая, что $\text{const} = 0$ (ибо $f(t) = 0$ при $t \rightarrow -\infty$), окончательно приходим к уравнению

$$kf^2(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0. \quad (3.4)$$

4. Ясно, что $f(t) \equiv 0$ — решение уравнения (3.4). Однако это решение не представляет для нас никакого интереса. Наша цель — обнаружить ненулевые решения уравнения (3.4) (обращающиеся, однако, в тождественный нуль при $t \rightarrow -\infty$).

Лемма 3.1. Пусть функция $f(t)$ — решение уравнения (3.4). Тогда для произвольного t_0 функция $f(t-t_0)$ — также решение уравнения (3.4).

Доказательство. Имеем, заменяя в (3.4) t на $t-t_0$,

$$f^2(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} R(t-t_0-\eta) f(\eta) d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^t R(t-t_0-(\tau-t_0)) f(\tau-t_0) d\tau = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau-t_0) d\tau,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если у уравнения (3.4) есть хотя бы одно ненулевое решение (обращающееся в тождественный нуль при $t \rightarrow -\infty$), то таких решений оказывается сразу целое семейство. Очевидно, что тогда среди этого семейства решений должно существовать решение, обращающееся в тождественный нуль при $t \leq 0$ и отличное от нуля при сколь угодно малых положительных t . Такое решение соответствует волне $\sigma = f(t-x)$, фронт которой проходит в момент $t=0$ через начало координат $x=0$. Именно это решение (в предположении его существования) исследуется в следующей лемме.

Замечание. Так как интересующее нас решение уравнения (3.4) обращается в тождественный нуль при $t \leq 0$, то вместо (3.4) можно рассматривать уравнение

$$kf^2(t) - \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

с начальным условием $f(0)=0$, вытекающим из непрерывности $f(t)$ в нуле. Это начальное условие оказывается, однако, излишним, поскольку оно автоматически выполняется для любого разумного решения уравнения (3.5).

Лемма 3.2. Пусть у уравнения (3.5) существует ограниченное монотонно возрастающее решение $f(t)$, $t \geq 0$, отличное от тождественного нуля на сколь угодно малом промежутке $(0, \epsilon)$. Тогда функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, $f(0)=0$ и $f(t) > 0$ при $t > 0$. Кроме того, справедливы соотношения

$$f(t) \rightarrow f(\infty) = \frac{I}{k} \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

(здесь $I \equiv \int_0^\infty R(t) dt$);

$$\frac{1}{2k} \sqrt{R(t)} \int_0^t \sqrt{R(t)} dt \leq f(t) \leq \frac{1}{k} \int_0^t R(t) dt. \quad (3.7)$$

Доказательство. Пусть $f(t)$, $t \geq 0$, — решение уравнения (3.5), обладающее свойствами, указанными в условии леммы. Тогда, очевидно, интегральное слагаемое в (3.5) является непрерывной функцией при $t \geq 0$ и обращается в нуль при $t=0$. Следовательно, и $f(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ функция, обра-

шающаяся в нуль при $t=0$. Теперь тот факт, что $f(t) > 0$ при $t > 0$, очевиден из условий леммы.

Если ядро $R(t)$ бесконечно-дифференцируемо при $t > 0$ и, кроме того,

$$|R^{(j)}(0)| < \infty, \quad j=0, 1, \dots,$$

то функция $f(t)$ оказывается также бесконечно-дифференцируемой при $t > 0$. (Справедливость этого факта очевидна из (3.5).)

Устремляя t к бесконечности в равенстве (3.5), легко получаем, что должно быть

$$kf^2(\infty) = f(\infty) \int_0^{\infty} R(t) dt,$$

откуда следует (3.6).

Далее, используя монотонное возрастание функции $f(t)$ и ее доказанную неотрицательность, получаем из (3.5)

$$kf^2(t) \leq f(t) \int_0^t R(t) dt,$$

откуда следует правое неравенство в (3.7).

Для доказательства левого неравенства в (3.7) заметим, что из (3.5) вытекает неравенство

$$kf^2(t) \geq R(t) \int_0^t f(t) dt$$

(поскольку $R(t)$ — неотрицательная убывающая функция). Обозначим

$J(t) \equiv \int_0^t f(t) dt$, тогда предыдущее неравенство перепишется в виде

$$k(J'(t))^2 \geq R(t) J(t),$$

откуда (в силу отличия $J(t)$ от тождественного нуля!)

$$\frac{J'(t)}{\sqrt{J(t)}} \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} \sqrt{R(t)}. \quad (3.8)$$

Интегрируя это неравенство и учитывая, что $J(0) = 0$, получаем

$$2\sqrt{J(t)} \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} \int_0^t \sqrt{R(t)} dt. \quad (3.8')$$

Теперь из (3.8) и (3.8') вытекает требуемое неравенство:

$$J'(t) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k} \right)^{1/2} \sqrt{R(t)} \int_0^t \sqrt{R(t)} dt.$$

Лемма доказана.

5. В дальнейшем мы увидим, что решение $f(t)$, о котором идет речь в лемме 3.2, действительно существует. Однако, прежде чем доказывать этот чисто математический результат в общем случае, рассмотрим важный частный случай, когда ядро $R(t)$ имеет при малых $t > 0$ специальный аналитический вид.

Пусть

$$R(t) = Ct^{\alpha-1} \text{ при } 0 < t < t_0, \quad (3.9)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $C > 0$. Будем искать решение уравнения (3.5) при $0 \leq t < t_0$ в виде

$$f(t) = Dt^{\beta}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.5) (с ядром (3.9)), получаем при $0 \leq t < t_0$

$$kD^2t^{2\beta} - CD \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{(\beta+1)-1} d\tau = 0,$$

т. е.

$$kDt^{2\beta} - C \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta} = 0,$$

откуда сразу получаем

$$\alpha = \beta, \quad D = C \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{k\Gamma(2\alpha+1)}$$

(здесь Γ — гамма-функция Эйлера). Таким образом, функция

$$f(t) = \frac{C\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{k\Gamma(2\alpha+1)} t^{\alpha} \quad (3.10)$$

является на полуинтервале $[0, t_0)$ точным решением уравнения (3.5) с ядром (3.9).

Теорема 3.1 (подготовительная). Пусть ядро $R(t)$ удовлетворяет условию (3.9) (а также общим условиям (3.2)). Тогда у уравнения (3.5) существует ограниченное монотонно возрастающее решение $f(t)$, определенное на всей полуоси $t \geq 0$ и совпадающее на $[0, t_0)$ с функцией (3.10). (Для этого решения, очевидно, справедливы все утверждения леммы 3.2.)

Доказательство. Мы будем вести доказательство методом последовательных приближений. Поскольку искомое ненулевое решение уравнения (3.5) заведомо не может быть

единственным, для получения сходящегося процесса последовательных приближений исключительно важную роль играет выбор нулевого приближения.

Положим

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{\text{C}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{k\Gamma(2\alpha+1)} t^\alpha & \text{при } 0 \leq t < t_0, \\ I/k & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

(ясно, что $f_0(t)$ — неубывающая функция), а следующие приближения определим рекуррентным образом:

$$kf_1^2(t) = \int_0^t R(t-\tau) f_0(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

$$kf_2^2(t) = \int_0^t R(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

.....

Здесь при определении $f_n(t)$, $n=1, 2, \dots$, берется положительное значение квадратного корня из правой части соответствующего равенства.

Ясно, что

$$f_1(t) \equiv f_0(t) \text{ при } 0 \leq t < t_0. \quad (3.14)$$

Кроме того, в силу монотонного убывания $R(t)$ и монотонного возрастания $f_0(t)$ из (3.12) следует, что функция $f_1(t)$ монотонно возрастает. Наконец, заметим, переходя в (3.12) к пределу при $t \rightarrow \infty$, что

$$kf_1^2(\infty) = f_0(\infty) \int_0^\infty R(t) dt \equiv f_0(\infty) I,$$

откуда в силу (3.11)

$$kf_1^2(\infty) = \frac{I}{k} I,$$

и, следовательно,

$$f_1(\infty) = \frac{I}{k} = f_0(\infty). \quad (3.15)$$

Отсюда, очевидно, можно сделать вывод, что $0 \leq f_1(t) \leq f_0(t)$ на всей полуоси $t \geq 0$ (рис. 1).

Теперь рассмотрим разность равенств (3.13) и (3.12). Имеем

$$k(f_2^2(t) - f_1^2(t)) = \int_0^t R(t-\tau) (f_1(\tau) - f_0(\tau)) d\tau \leq 0,$$

т. е.

$$k(f_2(t) + f_1(t))(f_2(t) - f_1(t)) \leq 0,$$

откуда в силу неотрицательности f_1 и f_2 следует, что

$$0 \leq f_2(t) \leq f_1(t) \text{ при } t \geq 0.$$

Кроме того, из (3.13) и (3.15) легко следует, что

$$f_2(\infty) = f_0(\infty) = I/k,$$

а из (3.13) и (3.14) следует, что

$$f_2(t) = f_0(t) \text{ при } 0 \leq t < t_0.$$

Аналогично, рассуждая по индукции, получаем

$$0 \leq f_n(t) \leq f_{n-1}(t) \leq \dots \leq f_0(t) \text{ при } t \geq 0,$$

(3.16)

где f_i , $i=1, 2, \dots$, — монотонно возрастающие непрерывные функции, стремящиеся к пределу I/k и такие, что

$$f_i(t) = f_0(t) \text{ при } 0 \leq t < t_0. \quad (3.17)$$

Поэтому существует ненулевой предел

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad (3.18)$$

который и будет искомым решением уравнения (3.5) с ядром $R(t)$, удовлетворяющим условию (3.9).

Ясно, что $f(t)$ — возрастающая ограниченная функция, имеющая вид (3.10) при $0 \leq t < t_0$. Теорема доказана.

6. Пусть теперь $R(t)$ — произвольная функция (удовлетворяющая лишь общим геометрическим ограничениям (3.2)). Определим последовательность ядер

$$R_n(t) = \begin{cases} R\left(\frac{1}{n}\right) & \text{при } 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ R(t) & \text{при } t \geq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (3.19)$$

($n=1, 2, \dots$). Ясно, что

$$R_1(t) \leq R_2(t) \leq \dots \leq R_n(t) \leq \dots \leq R(t), \quad (3.20)$$

причем все $R_n(t)$ — убывающие функции и каждая из них удовлетворяет условию (3.9) соответственно с $C=R(1/n)$, $\alpha=$

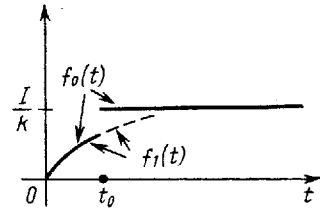


Рис. 1

$=1$, $t_0=1/n$. Поэтому в силу теоремы 3.1 и леммы 3.2 каждое уравнение

$$k \overset{(n)}{f}^2(t) = \int_0^t R_n(t-\tau) \overset{(n)}{f}(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

имеет непрерывное монотонно возрастающее ограниченное решение $\overset{(n)}{f}(t)$ такое, что $\overset{(n)}{f}(0)=0$ и

$$\overset{(n)}{f}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\infty R_n(\tau) d\tau}{k} \leq \frac{\int_0^\infty R(\tau) d\tau}{k}. \quad (3.22)$$

Далее, каждая из функций $\overset{(n)}{f}(t)$ в соответствии с теоремой 3.1 является пределом последовательных приближений, определенных формулами типа (3.11) — (3.13). А именно

$$\overset{(n)}{f}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \overset{(n)}{f}_i(t),$$

где

$$\overset{(n)}{f}_0(t) = \begin{cases} R\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{k\Gamma(3)} t & \text{при } 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{k} \int_0^\infty R_n(\tau) d\tau & \text{при } t > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

$$k \overset{(n)}{f}_1^2(t) = \int_0^t R_n(t-\tau) \overset{(n)}{f}_0(\tau) d\tau,$$

$$k \overset{(n)}{f}_2^2(t) = \int_0^t R_n(t-\tau) \overset{(n)}{f}_1(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

Однако из (3.23) в силу (3.20) и того очевидного факта, что

$$R(1) < R\left(\frac{1}{2}\right) < \dots < R\left(\frac{1}{n}\right) < \dots,$$

легко следует, что при $t > 0$

$$0 < \overset{(1)}{f}_0(t) \leq \overset{(2)}{f}_0(t) \leq \dots \leq \overset{(n)}{f}_0(t) \leq \dots, \quad (3.24)$$

$$0 < \overset{(1)}{f}_1(t) \leq \overset{(2)}{f}_1(t) \leq \dots \leq \overset{(n)}{f}_1(t) \leq \dots,$$

Поэтому, очевидно, и для предельных функций будут справедливы аналогичные неравенства:

$$0 < f^{(1)}(t) \leq f^{(2)}(t) \leq \dots \leq f^{(n)}(t) \leq \dots \quad (3.25)$$

Но из монотонного возрастания неотрицательных функций $f^{(n)}(t)$ и соотношения (3.22) вытекает, что все они ограничены одной постоянной:

$$f^{(n)}(t) \leq \frac{1}{k} \int_0^\infty R(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

Теперь из (3.25), (3.26) и монотонности функций $f^{(n)}(t)$ следует существование предела

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(t).$$

Поэтому в (3.21) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, откуда вытекает следующий результат.

Теорема 3.2 (основная). Пусть ядро $R(t)$ удовлетворяет геометрическим ограничениям (3.2). Тогда у уравнения

$$kf^2(t) - \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq 0,$$

существует неотрицательное ограниченное монотонно возрастающее решение, отличное от нуля при сколь угодно малых $t > 0$. (Для этого решения, очевидно, справедливы все утверждения леммы 3.2.)

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом может быть построено ненулевое решение более общего уравнения:

$$F(f) - \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.27)$$

где $F(f)$ — монотонно возрастающая функция, представимая в виде $\sum_{n \geq 2} c_n f^n$.

7. Рассмотрим в качестве примера случай, когда

$$R(t) = Ce^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (3.28)$$

где $\alpha > 0$, $C > 0$ (см. [56, 75]). Тогда уравнение (3.5) переписывается в виде

$$f^2(t) = C_1 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad C_1 = \frac{C}{k}. \quad (3.29)$$

Дифференцируя (3.29) по t , получаем

$$2ff' = C_1 f - C_1 \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Исключая теперь из (3.29), (3.30) интегральное слагаемое, приходим к дифференциальному уравнению

$$\alpha f^2 + 2ff' = C_1 f,$$

откуда, сокращая на f (поскольку мы ищем ненулевое решение), получаем

$$f' + \frac{\alpha}{2} f = \frac{C_1}{2}. \quad (3.31)$$

Общее решение уравнения (3.31) имеет вид

$$f(t) = \frac{C_1}{\alpha} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t}.$$

Нас, однако, интересует не любое решение уравнения (3.31), а только такое, которое обращается в нуль при $t=0$. Следовательно, $C_2 = -C_1/\alpha$ и

$$f(t) = \frac{C_1}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}), \quad t \geq 0. \quad (3.32)$$

Нетрудно проверить, что эта функция действительно является решением уравнения (3.29).

Задача. Доказать, что решение уравнения (3.5), равное нулю при $t \leq 0$ и отличное от нуля при сколь угодно малых $t > 0$, единственно. (Предполагается, что условия (3.2) выполнены.)

8. Монотонность и неотрицательность ядра $R(t)$ обеспечили нам выше существование, монотонность и неотрицательность ненулевого решения $f(t)$ уравнения (3.5). Однако, как мы уже отмечали, существуют модели (см. [16, 37]), в которых используются осциллирующие ядра наследственности. По-видимому, для существования ненулевого решения у уравнения (3.5) достаточно положительности ядра $R(t)$ при малых $t > 0$.

Рассмотрим простейшее осциллирующее ядро

$$R(t) = C \sin \omega t, \quad t \geq 0 \quad (3.33)$$

(здесь $\omega > 0$, $C > 0$). Тогда уравнение (3.5) перепишется в виде

$$f^2(t) = C_1 \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \cdot f(\tau) d\tau, \quad C_1 = \frac{C}{k}. \quad (3.34)$$

Последовательно дифференцируя это уравнение, имеем

$$(f^2)' = C_1 \omega \int_0^t \cos \omega(t-\tau) \cdot f(\tau) d\tau, \quad (3.35)$$

$$(f^2)'' = C_1 \omega f(t) - C_1 \omega^2 \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (3.36)$$

Исключая из (3.34) и (3.36) интегральное слагаемое, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(f^2)'' = C_1 \omega f - \omega^2 f^2. \quad (3.37)$$

Умножим обе части этого уравнения на $(f^2)' = 2ff'$, получим

$$d \frac{1}{2} ((f^2)')^2 = d \left(\frac{2}{3} C_1 \omega f^3 - \frac{\omega^2}{2} f^4 \right),$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (f^2)' = \sqrt{\frac{2}{3} C_1 \omega f^3 - \frac{\omega^2}{2} f^4} + \text{const.}$$

Однако из (3.35), очевидно, следует, что $(f^2)' = 0$ при $t=0$. Учитывая этот факт и то, что $f(0)=0$, получаем, что в предыдущем равенстве должно быть $\text{const}=0$. Поэтому предыдущее равенство дает нам

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{df^2}{\sqrt{\frac{2}{3} C_1 \omega f^3 - \frac{\omega^2}{2} f^4}} = t + \text{const.}$$

Однако и здесь $\text{const}=0$, так как $f(0)=0$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$2 \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{df}{\sqrt{\frac{2}{3} C_1 \omega f - \frac{\omega^2}{2} f^2}} = t,$$

откуда

$$f(t) = \frac{2C_1}{3\omega} \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right). \quad (3.38)$$

С помощью непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что функция (3.38) действительно удовлетворяет исходному уравнению (3.34).

9. Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$R(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad t \geq 0 \quad (3.39)$$

(здесь $C > 0$, $\alpha \geq 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \varphi_0 < \pi$). Тогда интегральное уравнение (3.5) принимает вид

$$f^2(t) = C_1 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau) + \varphi_0) \cdot f(\tau) d\tau, \quad C_1 = \frac{C}{k}. \quad (3.40)$$

Дифференцируя (3.40) по t (и приводя подобные члены), последовательно получаем

$$(f^2)' = C_1 \left\{ \sin \varphi_0 \cdot f(t) - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau) + \varphi_0) \cdot f(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \omega \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cos(\omega(t-\tau) + \varphi_0) \cdot f(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.41)$$

$$(f^2)'' = C_1 \left\{ \sin \varphi_0 \cdot f'(t) - \alpha \sin \varphi_0 \cdot f(t) + (\alpha^2 - \omega^2) \times \right. \\ \times \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau) + \varphi_0) \cdot f(\tau) d\tau + \omega \cos \varphi_0 \cdot f(t) - \\ \left. - 2\alpha\omega \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cos(\omega(t-\tau) + \varphi_0) \cdot f(\tau) d\tau \right\}.$$

Теперь, исключая из двух последних равенств и (3.40) интегральные слагаемые, приходим к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(f^2)'' + 2\alpha(f^2)' - C_1 \sin \varphi_0 \cdot f' - C_1 (\omega \cos \varphi_0 + \alpha \sin \varphi_0) f + (\alpha^2 + \omega^2) f^2 = 0. \quad (3.42)$$

Начальные условия для уравнения (3.42) нетрудно определить. Во-первых, $f(0) = 0$ в силу (3.40). Чтобы определить значение $f'(0)$, перейдем к пределу при $t \rightarrow +0$ в первом из равенств (3.41). Имеем

$$2f(t)f'(t) = C_1 \{ \sin \varphi_0 \cdot f(t) - \alpha f(t) \cdot o(1) + \omega f(t) \cdot o(1) \}, \quad t \rightarrow +0,$$

откуда

$$f'(0) = \frac{C_1 \sin \varphi_0}{2}.$$

К сожалению, в общем случае уравнение (3.42) не удастся решить в квадратурах.

Задача. а) Доказать, что в случае, когда $\int_0^\infty R(t) dt = 0$ и $R(t) > 0$ при малых $t > 0$, уравнение (3.5) имеет солитонобразное решение.

б) Доказать, что если при всех конечных $t > 0$ $\int_0^t R(t) dt > 0$, то решение, о котором шла речь в п. а), неотрицательно.

10. Волны, распространяющиеся по возмущенной среде

Несомненный интерес представляют также непрерывные волны стационарного профиля в ситуации, когда возмущенной является вся среда и невозможно выделить фронт, перед которым движение отсутствует.

В этом случае для функции $R(t)$ общего вида нам не удастся математически строго обосновать получающиеся интуитивно ясные результаты, поскольку возникающее здесь нелинейное интегральное уравнение уже не допускает простого геометрического подхода. Однако в качестве примера, подтверждающего наши выводы, мы рассмотрим затем случай экспоненциального ядра наследственности, для которого решение может быть найдено в квадратурах.

Итак, будем искать непрерывное решение одноволнового уравнения (3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

в виде

$$\sigma = f \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad c > 0.$$

Непосредственная подстановка дает

$$\left(f - \frac{k\gamma}{2} f^2 \right)' - \frac{1}{c} f' + \frac{1}{c} R^* f' = 0.$$

Ясно, что $f \equiv \text{const}$ всегда есть решение этого уравнения, однако нас будут интересовать только решения, отличные от тождественной постоянной. Интегрируя предыдущее уравнение и переобозначая $z = t - x/c$ через t , получаем

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{c} \right) f(t) - \frac{k\gamma}{2} f^2(t) + \\ & + \frac{\gamma}{2c} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = \tilde{C}_0, \quad \tilde{C}_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

На этот раз мы уже, вообще говоря, не можем считать, что $\tilde{C}_0=0$; скорость волны c тоже является пока неизвестной величиной. Нам будет удобно переписать полученное уравнение в следующем эквивалентном виде:

$$f^2(t) - \frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) f(t) - \frac{1}{kc} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau = C_0, \quad (3.43)$$

где $C_0 = -\frac{2}{k\gamma} \tilde{C}_0$.

Предположим теперь, что решение уравнения (3.43) стремится к конечным пределам при $t \rightarrow \pm\infty$. Эти пределы мы будем обозначать через $f(\infty)$ и $f(-\infty)$. Тогда, переходя в (3.43) к пределу при $t \rightarrow \infty$, легко получаем

$$f^2(\infty) - \frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) f(\infty) - \frac{I}{kc} f(\infty) = C_0 \quad (3.44)$$

(мы использовали тот факт, что $I \equiv \int_0^\infty R(\tau) d\tau < \infty$). С другой стороны, переходя в (3.43) к пределу при $t \rightarrow -\infty$, легко получаем аналогичное равенство

$$f^2(-\infty) - \frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) f(-\infty) - \frac{I}{kc} f(-\infty) = C_0. \quad (3.44')$$

Таким образом, величины $f(\infty)$ и $f(-\infty)$ оказались корнями одного и того же квадратного уравнения

$$P(f) \equiv f^2 - \left(\frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{I}{kc} \right) f - C_0 = 0. \quad (3.45)$$

Далее, в силу нашего предположения о том, что в уравнении (3.1) $k > 0$, интуитивно ясно, что для волны стационарного профиля $\sigma = f(t-x/c)$, $f \neq \text{const}$, должно выполняться неравенство

$$f(\infty) > f(-\infty). \quad (3.46)$$

Именно в этом случае нелинейность будет стремиться вызвать опрокидывание волны (заставляя большие значения напряжений двигаться с большими скоростями), а сглаживание за счет релаксации будет препятствовать опрокидыванию и тем самым поддерживать стационарность профиля волны.

Итак, вещественные (по смыслу задачи) величины $f(\infty)$ и $f(-\infty)$ оказались различными. Поэтому дискриминант квадратного уравнения (3.45) должен быть положительным:

$$\left(\frac{1}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{I}{2kc} \right)^2 + C_0 > 0.$$

Приравняем теперь левые части (3.44) и (3.44'). Имеем

$$\begin{aligned} f^2(\infty) - \left(\frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{I}{kc} \right) f(\infty) = \\ = f^2(-\infty) - \left(\frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{I}{kc} \right) f(-\infty), \end{aligned}$$

т. е.

$$f^2(\infty) - f^2(-\infty) = \left(\frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{I}{kc} \right) (f(\infty) - f(-\infty)),$$

откуда, сокращая на $f(\infty) - f(-\infty)$, получаем следующее выражение для скорости волны:

$$c = \frac{1 - \frac{\gamma I}{2}}{1 - \frac{k\gamma}{2} (f(\infty) + f(-\infty))}. \quad (3.47)$$

В частности, при $f(-\infty) = 0$ имеем

$$c = \frac{1 - \frac{\gamma I}{2}}{1 - \frac{k\gamma}{2} f(\infty)}. \quad (3.47')$$

(Другим способом это выражение будет получено в § 5.) Наконец, при $f(\infty) = I/k$ имеем из (3.47') $c = 1$, что согласуется с результатами этого параграфа, полученными выше.

Однако ясно, что даже при условии (3.46) не для любых двух вещественных значений $f(\infty)$ и $f(-\infty)$ может существовать непрерывная волна стационарного профиля $\sigma = f(t - x/c)$, поскольку при достаточно большой разнице между этими двумя значениями должен будет образоваться ударный фронт. В следующем пункте мы исследуем этот вопрос на примере экспоненциального ядра наследственности. В этом частном случае мы получим также строгое доказательство существования пределов $f(\infty)$ и $f(-\infty)$ у волны стационарного профиля (при условии ограниченности ее амплитуды). Тем самым в случае экспоненциального ядра будет строго обоснована и формула (3.47) для скорости волны.

З а м е ч а н и е. Случай, когда волна стационарного профиля (несущая на фронте слабый разрыв) распространяется по однородно напряженной среде, может быть исследован с той же полнотой и теми же методами, что и случай, когда волна распространяется по невозмущенной среде (см. нп. 1—9). Проведение соответствующих выкладок мы предоставляем читателю.

11. Итак, пусть

$$R(t) = Ae^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (3.48)$$

где $A > 0$, $\alpha > 0$. Будем искать решение интегрального уравнения (3.43) (с ядром (3.48)) в классе ограниченных гладких функций, определенных на всей оси. (На этот раз мы для определенности исключаем из рассмотрения слабые разрывы.)

Дифференцируя (3.43) по t и исключая стандартным способом интегральное слагаемое, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению (см. по этому поводу также [56]):

$$\left(\frac{1}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c} \right) - f \right) \frac{df}{dt} = \frac{\alpha}{2} P(f), \quad (3.49)$$

где обозначено

$$P(f) \equiv f^2 - \left(\frac{2}{k\gamma} \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{A}{k\alpha} \right) f - C_0. \quad (3.50)$$

(Заметим, что, поскольку интеграл от ядра (3.48) равен A/α , квадратный трехчлен (3.50), очевидно, совпадает с квадратным трехчленом (3.45), введенным нами выше для ядра общего вида.)

Ясно, что если $\frac{1-1/c}{k\gamma}$ — корень квадратного трехчлена (3.50), то $f \equiv \frac{1-1/c}{k\gamma}$ будет решением уравнения (3.49). Однако мы уже договорились не рассматривать решения, тождественно равные константе. Что касается решений уравнения (3.49), отличных от тождественной постоянной, то они, очевидно, представимы в виде

$$\int \frac{\frac{1-1/c}{k\gamma} - f}{P(f)} df = \frac{\alpha}{2} t + \text{const}. \quad (3.51)$$

Здесь const — неопределенная постоянная, несущественная для нас, поскольку она соответствует лишь сдвигу решения вдоль оси t .

Заметим теперь, что если квадратное уравнение $P(f) = 0$ не имеет вещественных корней, то при ограниченных f левая часть (3.51) всегда остается ограниченной величиной. Но это означает, что равенство (3.51) не может задавать ограниченную функцию $f = f(t)$, определенную на всей оси. Далее, с помощью непосредственного интегрирования нетрудно показать, что в случае, когда квадратное уравнение $P(f) = 0$ имеет два совпадающих корня, (3.51) также не может задавать ограниченную функцию, определенную на всей оси. Следовательно, для того чтобы равенство (3.51) могло задавать ограниченную функцию $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, необходимо, чтобы корни квадрат-

ного уравнения $P(f)=0$ были вещественны и различны. С этим условием мы уже сталкивались в п. 10, где оно было выведено (правда, нестрого) в более общей ситуации и из других соображений.

Итак, предположим, что корни квадратного уравнения $P(f)=0$ вещественны и различны. Обозначим их на этот раз f_1 и f_2 , предполагая для определенности, что

$$f_2 > f_1.$$

Ясно, что тогда любая первообразная функции

$$\frac{\frac{1-1/c}{k\gamma} - f}{P(f)}$$

состоит из трех гладких ветвей, определенных соответственно на промежутках $(-\infty, f_1)$, (f_1, f_2) и (f_2, ∞) . Очевидно также, что интересующее нас решение уравнения (3.49) может определяться только средней ветвью, т. е.

$$\int_{\xi}^f \frac{\frac{1-1/c}{k\gamma} - f}{P(f)} df = \frac{\alpha}{2} t + \text{const}, \quad (3.51')$$

где $\xi \equiv (f_1, f_2)$. Для того чтобы соотношение (3.51') действительно определяло ограниченную гладкую функцию $f=f(t)$, $-\infty < t < \infty$, нужно, чтобы производная по f от левой части (3.51') не меняла знака на интервале (f_1, f_2) , т. е. должно быть $\frac{1-1/c}{k\gamma} \leq f_1$ или $\frac{1-1/c}{k\gamma} \geq f_2$. Нетрудно показать, однако, что случай, когда $\frac{1-1/c}{k\gamma}$ совпадает с одним из корней f_1 или f_2 , должен быть исключен, поскольку в этом случае функция $f=f(t)$, определяемая (3.51'), оказывается неограниченной.

Таким образом, должна выполняться одна из двух систем неравенств

$$\begin{cases} f_1 < f_2, \\ \frac{1-1/c}{k\gamma} < f_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_1 < f_2, \\ \frac{1-1/c}{k\gamma} > f_2. \end{cases} \quad (3.52)$$

Величину c , очевидно, можно выразить через f_1 и f_2 по формуле, аналогичной (3.47):

$$c = \frac{1 - \frac{\gamma A}{2\alpha}}{1 - \frac{k\gamma}{2} (f_1 + f_2)}$$

поэтому (3.52) переписывается в виде

$$\begin{cases} f_1 < f_2, \\ 1 - \frac{1 - \frac{k\gamma}{2}(f_1 + f_2)}{1 - \frac{\gamma A}{2\alpha}} < k\gamma f_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f_1 < f_2, \\ 1 - \frac{1 - \frac{k\gamma}{2}(f_1 + f_2)}{1 - \frac{\gamma A}{2\alpha}} > k\gamma f_2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что вторая из этих систем несовместна, а первая эквивалентна неравенствам

$$f_1 < f_2 < \left(1 - \frac{\gamma A}{\alpha}\right) f_1 + \frac{A}{\alpha k}. \quad (3.53)$$

Теперь ясно, что если выполнены неравенства (3.53) (т. е. справедлива первая из систем неравенств (3.52)), то левая часть соотношения (3.51)' представляет собой монотонно возрастающую функцию от f , стремящуюся к $-\infty$ при $f \rightarrow f_1$ и стремящуюся к ∞ при $f \rightarrow f_2$. Таким образом,

$$f_1 = f(-\infty), \quad f_2 = f(\infty). \quad (3.54)$$

Учитывая этот факт и то, что

$$\frac{A}{\alpha} = I \equiv \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau,$$

окончательно перепишем условие (3.53) в виде

$$f(-\infty) < f(\infty) < (1 - \gamma I) f(-\infty) + \frac{I}{k}. \quad (3.55)$$

Это и есть искомое условие гладкости для волны стационарного профиля.

Заметим, что при $f(-\infty) = 0$ условие (3.55) принимает вид

$$0 < f(\infty) < \frac{I}{k},$$

что, очевидно, согласуется с (3.6), где для волны, распростра-

нявшейся по невозмущенной среде и обладавшей слабым разрывом на фронте, мы имели

$$f(\infty) = \frac{I}{k}.$$

Наконец, интегрируя (3.51) с учетом (3.54) и равенства (3.47) для скорости волны, легко получаем следующую аналитическую формулу для гладкой волны стационарного профиля:

$$(f - f(-\infty)) \frac{f(-\infty) - B}{f(\infty) - f(-\infty)} (f(\infty) - f) \frac{f(\infty) - B}{f(\infty) - f(-\infty)} = \text{const } e^{\pm \alpha t/2}, \quad (3.56)$$

где

$$B = \frac{1}{2} \frac{f(-\infty) + f(\infty) - I/k}{1 - \gamma I/2}, \quad \text{const} > 0.$$

§ 4. РАЗРЫВНЫЕ ВОЛНЫ СТАЦИОНАРНОГО ПРОФИЛЯ И САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

1. Волны, распространяющиеся по невозмущенной среде

В этом параграфе мы снова начнем с изучения волн напряжений, распространяющихся (вправо) по невозмущенной среде без изменения своей формы:

$$\sigma = g(t - x/c), \quad c > 0. \quad (4.1)$$

Однако теперь нас будет интересовать случай, когда на фронте волны имеется сильный разрыв. Как и в предыдущем параграфе, нам будет удобно рассматривать σ как обобщенное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad k > 0, \quad 0 < \gamma \ll 1, \quad (4.2)$$

что автоматически гарантирует нам выполнение условия на разрыве (2.15'):

$$U = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[\sigma^2]}{[\sigma]}}. \quad (4.3)$$

(В соответствии со сказанным в п. 5 § 2 мы опускаем черту над величинами U и x .)

Как и в § 3, мы предполагаем, что ядро наследственности $R(t)$ удовлетворяет условиям

$$R(t) \geq 0, \quad R'(t) \leq 0 \text{ при } t > 0, \quad (4.4)$$

$$I \equiv \int_0^{\infty} R(t) dt < \infty.$$

2. Не ограничивая общности, будем сразу считать, что в момент $t=0$ фронт волны проходит через начало координат. Это соответствует предположению о том, что в (4.1)

$$g(z)=0 \text{ при } z < 0 \quad (4.5)$$

и что $g(+0) \neq 0$. Нам будет удобно доопределить функцию g в нуле по непрерывности справа, это позволит нам вместо $g(+0)$ писать просто $g(0)$.

Ясно, что в (4.1) c есть скорость ударного фронта, а $g(0)$ есть величина скачка напряжения на этом фронте. Таким образом, в силу (4.3) c и $g(0)$ оказываются связанными соотношением

$$c = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} g(0)}. \quad (4.6)$$

Далее, так как в силу наших предположений $k > 0$, то условие устойчивости (2.16)' принимает вид

$$g(0) > 0. \quad (4.7)$$

Поэтому из (4.6) следует, что

$$c > 1.$$

3. Подставим теперь (4.1) в (4.2). Имеем

$$\left(g\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{k\gamma}{2} g^2\left(t - \frac{x}{c}\right) \right)' - \frac{1}{c} g'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma}{2c} R^* g'\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0,$$

откуда, интегрируя по t от $-\infty$ до t , получаем

$$\left(1 - \frac{1}{c}\right) g\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{k\gamma}{2} g^2\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma}{2c} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) g\left(\tau - \frac{x}{c}\right) d\tau = \text{const.}$$

В силу (4.5) и (4.6) последнее равенство, очевидно, может быть переписано так:

$$\frac{k\gamma}{2} g(z)(g(0) - g(z)) + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{k\gamma}{2} g(0)\right) \int_0^z R(z-\xi) g(\xi) d\xi = \text{const}$$

(здесь $z = t - x/c$; ясно, что мы можем считать $z \geq 0$).

Полагая в последнем равенстве $z=0$, получаем, что $\text{const} = 0$. Окончательно, переобозначая z через t , приходим к уравнению

$$g(t)(g(t) - g(0)) - A_0 \int_0^t R(t-\tau) g(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

где обозначено

$$A_0 \equiv \frac{1 - k\gamma g(0)/2}{k}. \quad (4.9)$$

При этом предполагается, что малый параметр γ достаточно мал для того, чтобы было

$$A_0 > 0.$$

Отметим нестандартный, *самосогласованный* характер уравнения (4.8): величина $g(0)$, являющаяся «начальным условием» для функции $g(t)$, входит непосредственно в уравнение (4.8). Следовательно, функция $g(t) \equiv 0$ не является решением уравнения (4.8).

4. Лемма 4.1. Пусть при некотором значении $g(0) > 0$ у уравнения (4.8) существует ограниченное монотонно возрастающее решение $g(t)$, $t \geq 0$. Тогда

$$g(t) \rightarrow g(\infty) = g(0) + A_0 I \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

(где $I \equiv \int_0^\infty R(\tau) d\tau$), выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \frac{g(0)}{2} + \sqrt{\frac{g^2(0)}{4} + A_0 g(0) \int_0^t R(\tau) d\tau} &\leq \\ &\leq g(t) \leq g(0) + A_0 \int_0^t R(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

и функция $g(t)$ непрерывна при $t > 0$.

Доказательство. Переходя в (4.8) к пределу при $t \rightarrow \infty$, легко получаем, что должно быть

$$g(\infty)(g(\infty) - g(0)) = A_0 g(\infty) I,$$

откуда и вытекает (4.10) (ибо $g(\infty) \neq 0$ в силу нашего предположения о возрастании функции $g(t)$).

Далее, из (4.8), очевидно, следует, что

$$g(t)(g(t) - g(0)) \leq A_0 g(t) \int_0^t R(\tau) d\tau,$$

откуда вытекает правое неравенство в (4.11).

С другой стороны, из (4.8) вытекает неравенство

$$g(t)(g(t) - g(0)) \geq A_0 g(0) \int_0^t R(\tau) d\tau,$$

из которого непосредственно следует левое неравенство в (4.11).

Докажем непрерывность $g(t)$ при $t \geq 0$. В силу очевидной из условий леммы строгой положительности $g(t)$ из (4.8) вытекает, что

$$g(t) = \frac{g(0)}{2} + \sqrt{\frac{g^2(0)}{4} + A_0 \int_0^t R(t-\tau) g(\tau) d\tau}. \quad (4.12)$$

Из условий леммы следует также, что интегральное слагаемое под радикалом в правой части (4.12) — непрерывная функция при $t \geq 0$. Поэтому из (4.12) вытекает и непрерывность $g(t)$ при $t \geq 0$.

Если ядро $R(t)$ бесконечно-дифференцируемо при $t > 0$ и, кроме того,

$$|R^{(j)}(0)| < \infty, \quad j=0, 1, \dots,$$

то функция $g(t)$ оказывается также бесконечно-дифференцируемой при $t > 0$. (Справедливость этого факта очевидна из (4.8).)

5. В этом параграфе мы применим несколько иной вариант метода последовательных приближений, чем в § 3, и сразу докажем существование решения $g(t)$ (о котором шла речь в предыдущей лемме) для ядра $R(t)$ общего вида. Частные случаи степенного и экспоненциального ядра будут рассмотрены позднее в качестве примеров.

Теорема 4.1. Для каждого значения $g(0) > 0$ у уравнения (4.8) существует ограниченное монотонно возрастающее решение $g(t)$, $t \geq 0$. (Для этого решения, очевидно, справедливы все утверждения леммы 4.1.)

Доказательство. Будем строить решение уравнения (4.8) методом последовательных приближений, полагая

$$g_n(t)(g_n(t) - g(0)) = A_0 \int_0^t R(t-\tau) g_{n-1}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (4.13)$$

где в качестве $g_0(t)$ взята произвольная непрерывная положительная возрастающая функция, такая, что $g_0(0) = g(0) > 0$, $g_0(\infty) = g(0) + A_0 I$. При этом в качестве решения квадратного уравнения (4.13) на каждом шаге будем выбирать больший корень, а именно

$$g_n(t) = \frac{g(0)}{2} + \sqrt{\frac{g^2(0)}{4} + A_0 \int_0^t R(t-\tau) g_{n-1}(\tau) d\tau}. \quad (4.13)'$$

Из (4.13)' очевидно, что $g_n(0) = g(0)$, $g_n(t) \geq g(0) > 0$; $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, с помощью (4.13)' по индукции легко доказывается, что все $g_n(t)$ — возрастающие функции.

Покажем теперь, что последовательность $g_n(t)$ сходится при $0 \leq t \leq \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Имеем, вычитая из (4.13) аналогичное равенство, где n заменено на $n-1$,

$$\begin{aligned} (g_n(t) - g_{n-1}(t))(g_n(t) + g_{n-1}(t) - g(0)) &= \\ &= A_0 \int_0^t R(t-\tau) (g_{n-1}(\tau) - g_{n-2}(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |g_n(t) - g_{n-1}(t)| (g_n(t) + g_{n-1}(t) - g(0)) &= \\ &= A_0 \int_0^t R(t-\tau) |g_{n-1}(\tau) - g_{n-2}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому в силу монотонного возрастания и неотрицательности функций $g_i(t)$ имеем

$$|g_n(t) - g_{n-1}(t)| \leq \frac{A_0}{g(0)} \int_0^t R(t-\tau) |g_{n-1}(\tau) - g_{n-2}(\tau)| d\tau,$$

откуда, учитывая, что $0 \leq t \leq \delta$, получаем

$$|g_n(t) - g_{n-1}(t)| \leq \frac{A_0 \int_0^\delta R(\tau) d\tau}{g(0)} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} |g_{n-1}(\tau) - g_{n-2}(\tau)|. \quad (4.14)$$

Но из предыдущего неравенства сразу следует и более сильное неравенство

$$\max_{0 \leq \tau \leq \delta} |g_n(\tau) - g_{n-1}(\tau)| \leq \frac{A_0 \int_0^\delta R(\tau) d\tau}{g(0)} \max_{0 \leq \tau \leq \delta} |g_{n-1}(\tau) - g_{n-2}(\tau)|, \quad (4.15)$$

откуда и вытекает сходимость последовательных приближений на отрезке $[0, \delta]$, если только

$$\frac{A_0 \int_0^\delta R(\tau) d\tau}{g(0)} < 1.$$

Однако последнее условие, очевидно, будет выполнено, если взять $\delta > 0$ достаточно малым. Итак, на некотором малом отрезке $[0, \delta]$ существует предельная функция

$$\tilde{g}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t).$$

Ясно, что $\tilde{g}(0) = g(0)$ (ибо все $g_n(0) = g(0)$) и что построенная функция $\tilde{g}(t)$ будет удовлетворять уравнению (4.8) при $0 \leq t \leq \delta$.

Положительность и монотонное возрастание $\tilde{g}(t)$ на $[0, \delta]$ также очевидны.

Для того чтобы доказать теперь возможность продолжения построенного решения $\tilde{g}(t)$ с малого отрезка $[0, \delta]$ на всю полуось $t \geq 0$, воспользуемся более тонким вариантом нашего метода последовательных приближений. (Мы уже использовали такой подход при доказательстве теоремы 3.1 в предыдущем параграфе.)

А именно положим

$$g_0(t) = \begin{cases} \tilde{g}(t) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ g(0) + A_0 I & \text{при } t \geq \delta, \end{cases} \quad (4.16)$$

а последовательные приближения $g_n(t)$ определим все той же формулой (4.13). Теперь, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.1, легко получаем, что все $g_n(t)$ — монотонно возрастающие функции, причем

$$g_n(t) \equiv g_0(t) = \tilde{g}(t) \text{ при } 0 \leq t < \delta,$$

$$g_n(t) \rightarrow g(0) + A_0 I \text{ при } t \rightarrow \infty$$

и на всей полуоси $t \geq 0$ выполнены неравенства

$$0 < g_n(t) \leq g_{n-1}(t) \leq \dots \leq g_0(t).$$

Как и при доказательстве теоремы 3.1, заключаем отсюда, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $g_n(t)$ сходится при $t \geq 0$ к некоторой предельной функции, которую мы обозначим теперь $g(t)$. Очевидно, что $g(t)$ и есть искомое решение уравнения (4.8), обладающее всеми свойствами, указанными в теореме. Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию частных случаев.

6. Пусть

$$R(t) = Ct^{\alpha-1} \text{ при } 0 < t < t_0, \quad (4.17)$$

где $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда при $0 \leq t < t_0$ уравнение (4.8) переписывается в виде

$$g(t)(g(t) - g(0)) = C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau, \quad (4.18)$$

где положено

$$C_1 = \frac{C}{k} \left(1 - \frac{k\gamma}{2} g(0) \right).$$

Будем искать при $t \rightarrow +0$ решение уравнения (4.18) в виде

$$g(t) = g(0) + g_1 t^\alpha + g_2 t^{2\alpha} + \dots \quad (4.19)$$

Имеем, подставляя (4.19) в (4.18),

$$\begin{aligned} & \{g(0) + g_1 t^\alpha + g_2 t^{2\alpha} + \dots\} \{g_1 t^\alpha + g_2 t^{2\alpha} + \dots\} = \\ & = C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(0) d\tau + C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g_1 \tau d\tau + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь, учитывая, что

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{n\alpha} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} t^{(n+1)\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

(где Γ — гамма-функция Эйлера), получаем, приравнявая в (4.20) коэффициенты при одинаковых степенях t ,

$$\begin{aligned} g(0) g_1 t^\alpha &= \frac{C_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} g(0) t^\alpha, \\ (g_1^2 + g(0) g_2) t^{2\alpha} &= \frac{C_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} g_1 t^{2\alpha}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из (4.21) видно, что величина разрыва $g(0) > 0$ может быть задана произвольно (что согласуется с результатом теоремы

4.1), а коэффициенты g_1, g_2, \dots определяются рекуррентным образом. В частности,

$$g_1 = \frac{C_1}{a} \equiv \frac{C}{ka} \left(1 - \frac{k\gamma}{2} g(0) \right).$$

Итак, при малых $t \geq 0$

$$g(t) = g(0) + \frac{C_1}{a} t^\alpha + \dots \quad (4.22)$$

7. Интересен также случай, когда экспоненциальное ядро задано на всей полуоси:

$$R(t) = Ce^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (4.23)$$

($C > 0, \alpha > 0$). Тогда уравнение (4.8) переписывается так:

$$g(t)(g(t) - g(0)) = C_1 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad (4.24)$$

где, как и в п. 6,

$$C_1 = \frac{C}{k} \left(1 - \frac{k\gamma}{2} g(0) \right).$$

Продифференцируем (4.24) по t . Имеем

$$g'(t)(2g(t) - g(0)) = -C_1 \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} g(\tau) d\tau + C_1 g(t). \quad (4.25)$$

Исключая теперь из (4.24) и (4.25) интегральное слагаемое, приходим к дифференциальному уравнению

$$\alpha g(g - g(0)) + g'(2g - g(0)) = C_1 g,$$

откуда

$$\left(g - \frac{g(0)}{2} \right) \frac{dg}{dt} = \frac{\alpha}{2} g \left(\frac{C_1}{\alpha} + g(0) - g \right). \quad (4.26)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{C_1}{\alpha} + g(0) = g(\infty) > \frac{g(0)}{2} \quad (4.27)$$

(см. (4.10), (4.9)), поэтому уравнение (4.26) окончательно переписывается в виде

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{g(g(\infty) - g)}{g - g(0)/2}. \quad (4.28)$$

Решение этого уравнения, принимающее значение $g(0)$ при $t=0$, есть, очевидно,

$$\frac{2}{\alpha} \int_{g(0)}^g \frac{g - g(0)/2}{g(g(\infty) - g)} dg = t,$$

откуда, интегрируя, легко получаем

$$(g(\infty) - g)^{-1 + \frac{g(0)}{2g(\infty)}} g^{-\frac{g(0)}{2g(\infty)}} = \text{const} e^{\frac{\alpha t}{2}}, \quad (4.29)$$

где

$$\text{const} = (g(\infty) - g(0))^{-1 + \frac{g(0)}{2g(\infty)}} (g(0))^{-\frac{g(0)}{2g(\infty)}}.$$

(См. по этому поводу также статью У. К. Нигула и А. С. Стулова из [51].)

Задача. Свести уравнение (4.8) с осциллирующим ядром (3.39) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. В каких случаях это уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах?

8. Волны, распространяющиеся по возмущенной среде

Коротко коснемся теперь случая, когда среда перед фронтом возмущена. Здесь все наши выкладки будут полностью аналогичны выкладкам из п. 10 § 3. Снова для ядер общего вида мы сможем получить лишь нестрогие качественные результаты. Для экспоненциального ядра эти результаты могут быть обоснованы и дополнены, что на этот раз мы предоставляем читателю.

Итак, будем снова искать обобщенное решение уравнения (4.2) в виде $\sigma = g(t - x/c)$, где теперь

$$c = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[g^2]}{[g]}}. \quad (4.30)$$

Как и в п. 3, приходим к уравнению

$$\left(1 - \frac{1}{c}\right) g\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{k\gamma}{2} g^2\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma}{2c} \int_{-\infty}^t R(t - \tau) g\left(\tau - \frac{x}{c}\right) d\tau = \tilde{C}_0, \quad \tilde{C}_0 = \text{const},$$

откуда, переобозначая $z = t - x/c$ через t и учитывая (4.30), окончательно получаем

$$g^2(t) - \frac{[g^2]}{[g]} g(t) - \frac{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[g^2]}{[g]}}{k} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) g(\tau) d\tau = C_0, \quad (4.31)$$

где $C_0 = -\frac{2}{k\gamma} \tilde{C}_0$. (Как и уравнение (4.8), это нелинейное интегральное уравнение, очевидно, является самосогласованным.)

Для определенности будем снова считать, что ударный фронт проходит в момент $t=0$ через начало координат и что функция g непрерывна справа (т. е. $g(+0)=g(0)$). Тогда, очевидно,

$$\frac{[g^2]}{[g]} = g(0) + g(-0).$$

В силу положительности k условием устойчивости ударной волны будет следующее неравенство (см. (2.16')):

$$[g] = g(0) - g(-0) > 0. \quad (4.32)$$

Предположим, что у уравнения (4.31) существует решение, стремящееся к конечным пределам при $t \rightarrow \pm\infty$. Эти пределы мы будем обозначать соответственно через $g(\infty)$ и $g(-\infty)$. Из соображений, аналогичных высказанным в п. 10 § 3, ясно, что должно быть

$$g(\infty) > g(-\infty). \quad (4.33)$$

Переходя в (4.31) к пределам при $t \rightarrow \pm\infty$ и используя конечность интеграла $I = \int_0^\infty R(\tau) d\tau$, легко получаем, что предельные значения $g(\infty)$ и $g(-\infty)$ должны удовлетворять соотношениям

$$g(\infty) - \frac{[g^2]}{[g]} g(\infty) - \frac{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[g^2]}{[g]}}{k} I g(\infty) = C_0, \quad (4.34)$$

$$g(-\infty) - \frac{[g^2]}{[g]} g(-\infty) - \frac{1 - \frac{k\gamma}{2} \frac{[g^2]}{[g]}}{k} I g(-\infty) = C_0. \quad (4.34')$$

Таким образом, $g(\infty)$ и $g(-\infty)$ оказываются двумя различными вещественными корнями одного и того же квадратного уравнения, откуда вытекает, что дискриминант этого уравнения должен быть положительным, т. е.

$$\frac{1}{4} \left(\frac{I}{k} + \left(1 - \frac{\gamma I}{2} \right) \frac{[g^2]}{[g]} \right) + C_0 > 0.$$

Считая это неравенство выполненным, исключим теперь из (4.34) и (4.34') постоянную C_0 . С помощью выкладок, аналогичных проведенным в п. 10 § 3, легко получим

$$g(\infty) + g(-\infty) = \frac{I}{k} + \left(1 - \frac{\gamma I}{2}\right) \frac{|g^2|}{|g|}.$$

Отсюда и из (4.30) вытекает следующая формула для скорости ударной волны:

$$c = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} \cdot \frac{g(\infty) + g(-\infty) - I/k}{1 - \gamma I/2}} = \frac{1 - \frac{\gamma I}{2}}{1 - \frac{k\gamma}{2} (g(\infty) + g(-\infty))}. \quad (4.35)$$

(Эта формула, очевидно, устроена аналогично (3.47).)

Задача. Пусть ядро наследственности — экспоненциальное.

а) Доказать, что условием существования ударного фронта в волне стационарного профиля является выполнение неравенства (4.33) и неравенства $g(\infty) > (1 - \gamma I)g(-\infty) + I/k$.

б) Вычислить $g(0)$ и $g(-0)$ через $g(\infty)$ и $g(-\infty)$.

Замечание. С иным подходом к задачам о распространении волн стационарного профиля в наследственных средах можно познакомиться по работам У. К. Нигула и его учеников (см. [51, 75]). Ряд интересных результатов содержится также в книге [56].

§ 5. СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ. МЕТОД РОКА

1. В двух предыдущих параграфах мы имели в основном дело с непрерывными и разрывными обобщенными решениями уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

описывающими волны стационарного профиля, распространяющиеся вправо по невозмущенной среде. (Напомним, что здесь $k > 0$,

$$0 < \gamma \ll 1, \quad R^* u \equiv \int_{-\infty}^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

где $R(t)$ — неотрицательная убывающая функция, такая, что $I \equiv \int_0^\infty R(t) dt < \infty$.) Непрерывные волны стационарного про-

филя, распространяющиеся по невозмущенной среде, имели вид

$$\sigma = f(t-x)$$

(где $f(z)=0$ при $z \leq 0$), а разрывные волны — вид

$$\sigma = g(t-x/c)$$

$$\left(\text{где } g(z)=0 \text{ при } z < 0, g(0) > 0, c = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} g(0)} \right).$$

Сравним формулу для $g(\infty)$ (см. (4.10) и (4.9)):

$$g(\infty) = \frac{I}{k} + g(0) \left(1 - \frac{\gamma I}{2} \right) \quad (5.2)$$

с формулой для $f(\infty)$ (см. 3.6)):

$$f(\infty) = \frac{I}{k}. \quad (5.3)$$

Ясно, что при наших предположениях

$$g(\infty) > f(\infty) > 0, \quad (5.4)$$

причем величина $g(\infty)$ растет вместе с $g(0)$.

2. Из (5.2)–(5.4) можно сделать некоторые качественные выводы о поведении на больших временах (обобщенного) нестационарного решения уравнения (5.1) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \text{ при } x > 0, t \leq 0, \\ \sigma(t, 0) &= \sigma_0 \Theta(t), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\text{где } \sigma_0 > 0, \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

а) Если $\sigma_0 > I/k$, то при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (5.1), (5.5) стремится к разрывной волне стационарного профиля, распространяющейся по невозмущенной среде:

$$\sigma = g(t-x/c + \text{const}).$$

Здесь g — решение автомодельного интегрального уравнения (4.8), продолженное нулем в область $t-x/c + \text{const} < 0$. Скорость фронта c и величина разрыва на фронте $g(0)$ определяются при этом из равенства

$$c = \frac{1}{1 - \frac{k\gamma}{2} g(0)} \quad (5.6)$$

(см. (4.6)) и интуитивно ясного соотношения

$$\sigma_0 = g(\infty).$$

В силу формулы (5.2), связывающей значения $g(\infty)$ и $g(0)$, последнее равенство принимает вид

$$\sigma_0 = \frac{I}{k} + g(0) \left(1 - \frac{\gamma I}{2}\right). \quad (5.7)$$

Из (5.6), (5.7) имеем

$$g(0) = \frac{\sigma_0 - \frac{I}{k}}{1 - \frac{\gamma I}{2}}, \quad (5.8)$$

$$c = \frac{1 - \frac{\gamma I}{2}}{1 - \frac{k\gamma\sigma_0}{2}} > 1.$$

(Последнюю из этих формул можно было бы получить также из (4.35), полагая там $g(\infty) = \sigma_0$, $g(-\infty) = 0$.) Наличие неза-
тухающего разрыва на фронте $[\sigma] = g(0)$ говорит о том, что
нелинейный эффект опрокидывания оказывается здесь сильнее,
чем сглаживание за счет релаксации. Соответствующий про-
филь волны при достаточно большом t изображен на рис. 2, а.

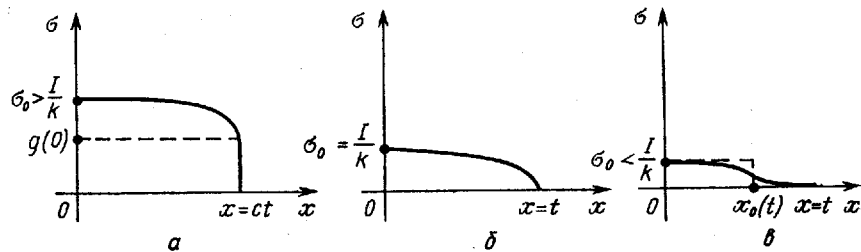


Рис. 2

б) Если $\sigma_0 = I/k$, то при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (5.1), (5.5) стремится к непрерывной волне стационарного профиля, распространяющейся по невозмущенной среде:

$$\sigma = f(t - x + \text{const}).$$

Здесь f — ненулевое решение автомодельного интегрального уравнения (3.5), продолженное нулем в область $t - x + \text{const} <$

< 0 . Можно сказать, что в этом случае нелинейные и релаксационные эффекты уравнивают друг друга (рис. 2, б).

в) Если $0 < \sigma_0 < I/k$, то ни у одного из автомодельных уравнений (3.5) или (4.8) не существует решения, которое стремилось бы к σ_0 при $t \rightarrow \infty$. Поэтому решение задачи (5.1), (5.5) не может стремиться ни к какому из решений этих уравнений. Однако из физических соображений ясно, что профиль волны все же должен стабилизироваться. Таким образом, остается заключить, что решение задачи (5.1), (5.5) стремится к непрерывной волне стационарного профиля, распространяющейся по возмущенной среде:

$$\sigma = f(t - x/c + \text{const}).$$

Здесь f — решение автомодельного интегрального уравнения (3.43), а величина скорости c определяется из (3.47'), где $f(\infty)$ нужно заменить на σ_0 :

$$c = \frac{1 - \frac{\gamma I}{2}}{1 - \frac{k\gamma\sigma_0}{2}} < 1. \quad (5.9)$$

Соответствующий профиль волны при больших временах изображен на рис. 2, в. Ясно, что в рассмотренном случае релаксационное сглаживание является преобладающим фактором при формировании фронта волны.

3. Характерную скорость стабилизирующейся волны можно оценить также с помощью следующих соображений, принадлежащих В. Е. Року.

Будем для определенности считать, что мы находимся в ситуации в) из п. 2, т. е. что $0 < \sigma_0 < I/k$. Интегрируя (5.1) по x при достаточно большом t , получим

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) dx = \sigma_0 - \frac{\gamma}{2} \int_0^t R(t-\tau) \sigma_0 d\tau.$$

Приближенно заменим теперь истинный профиль волны на прямоугольный профиль размера $\sigma_0 \times x_0(t)$ (см. рис. 2, в). Тогда предыдущее соотношение, очевидно, дает нам

$$\left(1 - \frac{k\gamma\sigma_0}{2} \right) \frac{dx_0(t)}{dt} \sim 1 - \frac{\gamma}{2} \int_0^t R(t) dt,$$

откуда при больших t имеем

$$\frac{dx_0(t)}{dt} \sim \frac{1 - \frac{\gamma}{2} I}{1 - \frac{k\gamma\sigma_0}{2}}.$$

Таким образом, характерная скорость волны на больших временах, как и следовало ожидать, совпала с величиной (5.9), т. е. со скоростью стабилизовавшейся волны.

§ 6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ. АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ЛАНДАУ—УИЗЕМА

1. В трех предыдущих параграфах мы имели дело с уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (6.1)$$

Как уже отмечалось выше (см. п. 5 § 2), с точностью $O(\gamma^2)$ это уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \frac{k\gamma}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \quad (6.2)$$

или, что то же самое (в области гладкости $\sigma(t, x)$),

$$(1 - k\gamma\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \quad (6.2')$$

В следующем параграфе мы увидим, что существует простая модификация определяющего соотношения, при которой уравнение (6.1) оказывается не асимптотическим, а точным. Для уравнения (6.2) такая модификация определяющего соотношения нам неизвестна. Однако при исследовании нестационарных волн уравнение (6.2) несколько удобнее, и в этом параграфе мы будем работать именно с ним.

Для уравнения (6.2) мы поставим следующую задачу:

$$\sigma = 0 \text{ при } x > 0, t \leq 0, \quad (6.3)$$

$$\sigma(t, 0) = \sigma_0(t),$$

где $\sigma_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t \leq 0$.

2. Если $k=0$ (т. е. волна линейная), то уравнение (6.2) принимает вид

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (6.4)$$

Применяя к (6.4) преобразование Лапласа $L_{t \rightarrow p}$, получим при $x > 0$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} \bar{R}(p)\right) p \bar{\sigma}(p) + \frac{d}{dx} \bar{\sigma}(p, x) = 0,$$

откуда, очевидно, имеем

$$\bar{\sigma}(p, x) = C(p) e^{-p \left(1 + \frac{\gamma}{2} \bar{R}(p)\right) x}, \quad x \geq 0.$$

Из (6.3) ясно, что здесь $C(p) = \bar{\sigma}(p, 0) = \bar{\sigma}_0(p)$.

Итак, окончательно можно написать

$$\sigma(t, x) = L_{p \rightarrow t}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) e^{-px - \frac{\gamma}{2} p \bar{R}(p) x}, \quad x \geq 0, \quad (6.5)$$

где $L_{p \rightarrow t}^{-1}$ — обратное преобразование Лапласа. Из свойств преобразования Лапласа легко следует, что предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\sigma(t, x) = L_{p \rightarrow t-x}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) e^{-\frac{\gamma}{2} p \bar{R}(p) x}, \quad x \geq 0. \quad (6.5')$$

3. Пусть теперь $k \neq 0$. Будем вначале считать, что сильные разрывы отсутствуют, и по аналогии с подходом Ландау—Уизема [см. [20, 63], а также § 1 гл. 2] определим функцию

$$\sigma(t, x) = L_{p \rightarrow t}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) e^{-\frac{\gamma}{2} p \bar{R}(p) x}, \quad x \geq 0, \quad (6.6)$$

где «фаза» $\tau = \tau(t, x)$ определяется из условия своего постоянства на характеристиках:

$$\frac{dt}{dx} = 1 - k\gamma\sigma \quad \text{при} \quad \tau = \text{const}, \quad (6.7)$$

$$\tau|_{x=0} = t. \quad (6.8)$$

Ясно, что правая часть (6.6) представляет собой некоторую известную функцию от переменных τ и x ; обозначим ее $G(\tau, x)$. Подставляя эту функцию (вместо σ) в (6.7), получаем

$$\frac{dt}{dx} = 1 - k\gamma G(\tau, x),$$

откуда, учитывая (6.8), имеем

$$t = \int_0^x (1 - k\gamma G(\tau, y)) dy + \tau. \quad (6.9)$$

Последнее равенство и определяет τ как функцию от t, x .

Очевидно также, что построенное нами приближение (6.6)—(6.8) в линейном случае переходит в (6.5').

4. Исследуем теперь, насколько хорошо работает приближение (6.6)—(6.8) в нелинейной ситуации. Если $R(t) \equiv 0$, то формулы (6.6)—(6.8), очевидно, дают нам

$$\begin{aligned}\sigma(t, x) &= \sigma_0(\tau), \\ t &= (1 - k\gamma\sigma_0(\tau))x + \tau.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Элементарная проверка показывает, что (6.10) представляет собой точное решение уравнения

$$(1 - k\gamma\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

и удовлетворяет начальному и граничному условиям (6.3).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$R(t) = R(0) = \text{const.} \quad (6.11)$$

В этом случае

$$\bar{R}(p) = \frac{R(0)}{p},$$

и из (6.6) следует, что

$$\sigma(t, x) = e^{-\frac{\gamma}{2} R(0)x} \sigma_0(\tau). \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.7), с учетом (6.8) имеем

$$t = \int_0^x (1 - k\gamma e^{-\frac{\gamma}{2} R(0)y} \sigma_0(\tau)) dy + \tau \quad (6.13)$$

(откуда определяется τ как функция t, x).

Покажем, что на самом деле (6.12), (6.13) снова является точным решением соответствующего одноволнового уравнения! Действительно, (6.2') в случае (6.11) сводится к уравнению

$$(1 - k\gamma\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} R(0) \sigma = 0,$$

решение которого определяется уравнениями характеристик

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= 1 - k\gamma\sigma, \\ \frac{d\sigma}{dx} &= -\frac{\gamma}{2} R(0) \sigma.\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения с учетом (6.3), приходим в точности к соотношениям (6.12), (6.13).

5. Может показаться, что соотношения (6.6)—(6.8) вообще дают точное решение поставленной одноволновой задачи (6.2)—(6.3). Однако это не так. Проверка (которую мы предоставляем читателю) показывает, что (6.6)—(6.8) — всего лишь хорошее асимптотическое приближение, имеющее точность порядка $O(\gamma^2)$.

Задача. Пользуясь формулами (6.6)—(6.8), оценить расстояние, на котором происходит градиентная катастрофа.

Наконец, если в процессе движения функция (6.6) становится неоднозначной, то это означает, что возникает ударная волна. Для определения положения ударного фронта в рамках приближения (6.6)—(6.8) можно воспользоваться, например, методом ломаных (см. гл. 1).

Замечание. Подход, развитый в этом параграфе для уравнения (6.2), очевидно, применим и к более общему уравнению вида

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (6.14)$$

(где $f(0)=0$, $f'(\sigma)>0$).

6. Выведем теперь одноволновое уравнение для деформаций, соответствующее одноволновому уравнению для напряжений, взятому, например, в форме (6.2'). Вспомним прежде всего, что определяющее соотношение для рассматриваемой среды имеет вид (см. (2.1))

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \gamma R^*} (A\sigma + \gamma B\sigma^2). \quad (6.15)$$

Разрешая это соотношение относительно σ , легко получаем (с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$)

$$\sigma = \frac{1 - \gamma R^*}{A} \varepsilon - \frac{\gamma B}{A^2} \varepsilon^2,$$

т. е.

$$\sigma = \frac{1 - \gamma R^*}{A} \varepsilon + \frac{k\gamma}{A^2} \varepsilon^2, \quad k \equiv -\frac{B}{A}. \quad (6.16)$$

Подставим полученное выражение для σ в уравнение (6.2)'. Снова пренебрегая членами порядка $O(\gamma^2)$, легко получаем искомого одноволновое уравнение для деформаций в виде, аналогичном (6.2'):

$$(1 - k_1\gamma\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad k_1 \equiv -\frac{B}{A^2}. \quad (6.17)$$

Замечание. Из (6.17), очевидно, следует, что $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + O(\gamma)$. Используя этот факт, нетрудно привести (с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$) уравнение (6.17) к виду

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon + \frac{k_1 \gamma}{2} \varepsilon^2 \right) = 0. \quad (6.18)$$

Эта форма уравнения для деформаций понадобится нам ниже для вывода одноволнового уравнения для перемещений.

Пусть теперь для деформаций поставлена следующая граничная задача:

$$\varepsilon = 0 \text{ при } x > 0, t \leq 0, \quad (6.19)$$

$$\varepsilon(t, 0) = \varepsilon_0(t),$$

где $\varepsilon_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t \leq 0$. Тогда асимптотическое решение задачи (6.17), (6.19), очевидно, дается формулой, устроенной аналогично формуле (6.6):

$$\varepsilon(t, x) = L_{p \rightarrow \tau}^{-1} \varepsilon_0(p) e^{-\frac{\gamma}{2} p \bar{R}(p)x}, \quad (6.20)$$

где $\tau = \tau(t, x)$ определяется из условия своего постоянства на характеристиках:

$$\frac{dt}{dx} = 1 - k_1 \gamma \varepsilon \text{ при } \tau = \text{const}, \quad \tau|_{x=0} = t.$$

7. Получим теперь одноволновое уравнение для перемещений. Для этого вспомним, что переменная x , используемая нами здесь, это есть на самом деле координата \bar{x} , введенная в п. 5 § 2, в обозначении которой для простоты опущена черта. Таким образом, имеем

$$\varepsilon = \sqrt{A\rho} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.21)$$

Сейчас нам будет удобнее воспользоваться уравнением для деформаций в форме (6.18) (а не (6.17)), поскольку в это уравнение производная $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ входит без нелинейного множителя. Подставляя (6.21) в (6.18), имеем

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{A\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_1 \gamma}{2} \left(\sqrt{A\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0,$$

откуда, используя перестановочность операторов дифференцирования и свертки, получаем

$$\sqrt{A\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_1 \gamma}{2} \sqrt{A\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0.$$

Из последнего равенства, очевидно, вытекает, что

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_1 \gamma}{2} \sqrt{A\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = f(t), \quad (6.22)$$

где $f(t)$ — некоторая неопределенная функция.

8. Пусть теперь рассматривается граничная задача для перемещений:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ при } x > 0, t \leq 0, \\ u(t, 0) &= u_0(t), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где $u_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t \leq 0$. Ясно, что тогда при достаточно большом $x = \text{const} > 0$ будет $u(t, x) = 0$ в течение сколь угодно большого промежутка времени. Следовательно, в рассматриваемом случае нужно положить в (6.22) $f \equiv 0$, и одноволновое уравнение для перемещений окончательно приобретает вид

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_1 \gamma}{2} \sqrt{A\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (6.24)$$

Для того чтобы построить асимптотическое решение задачи (6.23), (6.24), сформулированной в терминах перемещений, переформулируем ее в терминах деформаций (подобно тому как это делалось в п. 7 § 3 гл. 1). Полагая в (6.24) $x = 0$ и пользуясь равенством (6.21), получаем квадратное уравнение для $\varepsilon(t, 0)$:

$$\left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) u'_0(t) + \frac{\varepsilon(t, 0)}{\sqrt{A\rho}} + \frac{k_1 \gamma}{2} \sqrt{A\rho} \left(\frac{\varepsilon(t, 0)}{\sqrt{A\rho}}\right)^2 = 0, \quad (6.25)$$

откуда, обозначая $\varepsilon(t, 0) \equiv \varepsilon_0(t)$, имеем

$$\varepsilon_0(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2k_1 \gamma \sqrt{A\rho} \left(1 + \frac{\gamma}{2} R^*\right) u'_0(t)}}{k_1 \gamma}. \quad (6.26)$$

Мы выбрали здесь знак «плюс» перед радикалом, руководствуясь тем соображением, что при $\gamma \rightarrow 0$ функция $\varepsilon_0(t)$ должна оставаться ограниченной (и переходить в соответствующую граничную функцию линейно-упругой задачи). Ясно, что функция (6.26) равна нулю при $t \leq 0$. Далее, из (6.23) очевидно, что $\varepsilon = 0$ при $x > 0, t \leq 0$. Очевидно также, что распространяющаяся волна деформаций будет описываться одноволновым уравнением (6.18), или, что то же самое (с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$), уравнением (6.17). (Для доказательства этого факта достаточно продифференцировать (6.24) по x .) Поэтому волна деформаций в рассматриваемой задаче асимптотически оп-

ределяется соотношением (6.20), где функция $\varepsilon_0(t)$ выражается через $u_0(t)$ по формуле (6.26). Наконец, зная деформации, мы тем самым знаем и волну перемещений в нашей задаче:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{A\rho}} \int_0^x \varepsilon(t, x) dx + u_0(t). \quad (6.27)$$

Содержание этого параграфа основано на результатах работ [28, 32, 33], в которых можно найти также дальнейшие подробности.

§ 7. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ОБЩЕГО ВИДА. ДАЛЬНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ О ФАКТОРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

1. В предыдущих параграфах мы имели дело с определяющим соотношением (2.1), содержащим квадратичную нелинейность с малым параметром γ при σ^2 (причем перед наследственным оператором также присутствовал коэффициент γ). Попробуем теперь ввести в определяющее соотношение нелинейность общего вида. На первый взгляд наиболее удобным кажется следующее обобщение соотношения (2.1) (где малый параметр оставлен лишь в качестве коэффициента при наследственном слагаемом):

$$\varepsilon(t) - \gamma \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau = a(\sigma).$$

Однако соответствующее динамическое уравнение для напряжений

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} (1 - \gamma R^*) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad \rho = \text{const},$$

не удастся разумным образом факторизовать не только точно, но даже асимптотически с точностью $O(\gamma^2)$. Причиной такой неудачи является уже отмечавшаяся в § 2 некоммутативность оператора свертки R^* и оператора умножения на функцию (от σ).

Для того чтобы получить содержательные результаты о взаимодействии памяти и нелинейности общего вида, нам придется воспользоваться следующим, более сложно устроенным определяющим соотношением (мы уже упоминали о нем в п. 4 § 1).

2. Пусть σ гладким образом зависит от t и пусть

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^t \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sigma'_t dt. \quad (7.1)$$

Здесь K^* — оператор свертки (от $-\infty$ до t) с ядром $K(t)$, $\sqrt{1+K^*}$ понимается как ряд $1+K^*/2 - \dots$, а произведение операторов (свертки и умножения на функцию) под знаком интеграла понимается в соответствии с нашим обычным соглашением:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sigma'_t \equiv \\ & \equiv \sqrt{1+K^*} (\sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} (\sqrt{a'(\sigma)} \sigma'_t)), \end{aligned}$$

т. е. мы считаем, что оператор, стоящий правее, действует раньше. Подчеркнем, что в соотношении (7.1) ни нелинейная функция, ни ядро наследственности не содержат малого параметра.

Если $\sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ (что мы будем предполагать выполненным), то в случае, когда $K^* \equiv 0$, (7.1) приобретает вид обычного нелинейного соотношения:

$$\varepsilon = a(\sigma).$$

С другой стороны, в линейном случае, когда $a'(\sigma) = \text{const} = 1/E$, (7.1) переходит в обычное линейное определяющее соотношение наследственной упругости:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (1 + K^*) \sigma.$$

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 7.1. Пусть имеет место определяющее соотношение (7.1), причем предполагается, что $\sigma(t, x)$ — гладкая функция. Тогда соответствующее динамическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \sigma'_t dt - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0 \quad (7.2)$$

точно факторизуется:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \pm \right. \\ & \quad \left. \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \sigma = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что при перемножении скобок в (7.3) (с соблюдением порядка действия сомножителей-операторов) слагаемые, содержащие смешанные производные, сократятся, т. е. проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1+K^*} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \quad (7.4)$$

Однако в силу коммутативности оператора свертки с дифференцированием левую часть (7.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+K^*} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\} \equiv \\ & \equiv \sqrt{1+K^*} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить. Теорема доказана.

Следствие. Определим оператор Φ^* равенством

$$1 - \Phi^* \equiv \frac{1}{\sqrt{1+K^*}}. \quad (7.5)$$

Тогда из (7.3), очевидно, вытекает, что каждое гладкое решение любого из уравнений

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm (1 - \Phi^*) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (7.6)$$

будет также решением уравнения (7.2).

Заметим, что определяющее соотношение (7.1) непосредственно не приспособлено к описанию сильных разрывов. Действительно, если σ — разрывная функция от t , то под интегралом в (7.1) стоит произведение разрывной функции $\sqrt{a'(\sigma)}$ на функцию σ_t' , имеющую сингулярность типа δ -функции Дирака, а такое произведение без каких-либо дополнительных соглашений вообще не определено. Можно показать, однако, что существует такая регуляризация интеграла в (7.1), что это соотношение будет определено и для функций ε и σ , имеющих сильные разрывы, причем в дополнении к ударному фронту будет справедливо следствие из теоремы 7.1, а на самом фронте будет выполнено соотношение

$$[\varepsilon] = [a(\sigma)].$$

Из этого соотношения, очевидно, вытекает условие на разрыве для волны напряжений

$$U = \pm \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho [a(\sigma)]}}. \quad (7.7)$$

В то же время если σ — непрерывная кусочно-гладкая функция, то соотношение (7.1) сохраняет свой смысл и не нуждается ни в какой регуляризации. Это обстоятельство позволяет несколько усилить результат теоремы 7.1. Пусть l — линия слабого разрыва функции σ , являющейся в дополнении к l решением одного из уравнений (7.6). Тогда, как легко следует из теоремы 7.1, вне l функция σ удовлетворяет также уравнению (7.2). Ясно, что линия l будет характеристикой соответствующего одноволнового уравнения.

Теперь становится понятно, с какой точки зрения результаты § 3 можно считать точными. В § 3 рассматривались непрерывные решения уравнения (2.9), принадлежащего, очевидно, к типу (7.6). Напомним, что само уравнение (2.9) было получено в результате асимптотической факторизации (при $\gamma \rightarrow 0$). Однако можно считать, что исходным является не определяющее соотношение (2.1):

$$\varepsilon - \gamma R^* \varepsilon = A\sigma + \gamma B\sigma^2,$$

а соотношение (7.1), где положено

$$\sqrt{a'(\sigma)} = \sqrt{A} \left(A + \gamma \frac{B}{A} \sigma \right), \quad \sqrt{1 + K^*} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{2} R^*}.$$

Тогда в силу теоремы 7.1 уравнение (2.9) будет справедливо уже не асимптотически, а точно *).

Что касается результатов § 4, то даже при таком подходе их можно считать верными лишь асимптотически (при величине разрыва $[\sigma]$, стремящейся к нулю). Действительно, как мы знаем, уже для чисто нелинейного определяющего соотношения $\varepsilon = a(\sigma)$ (являющегося частным случаем регуляризованного соотношения (7.1)) наличие сильных разрывов нарушает предположение об одноволновости процесса.

3. Рассмотрим еще одно сильно нелинейное определяющее соотношение с памятью довольно специального вида:

$$\varepsilon = a(\sigma) + \gamma \int_{-\infty}^t b(\sigma(\tau)) d\tau \quad (7.8)$$

(здесь $a(\sigma)$ и $b(\sigma)$ — произвольные гладкие монотонно возрастающие функции, $a(0) = 0$, γ — малый параметр). Соответствующее динамическое уравнение для напряжений имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a(\sigma) + \gamma \int_{-\infty}^t b(\sigma(\tau, x)) d\tau \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0,$$

*) См. по этому поводу также [40].

или, что то же самое,

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial b(\sigma)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0. \quad (7.9)$$

Попробуем асимптотически факторизовать уравнение (7.9). Будем искать разложение левой части (7.9) в виде

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \right) \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times \left\{ \left(\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\}, \quad (7.10)$$

где $\beta(\sigma)$ — неопределенная пока что функция. Перемножая скобки в (7.10), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \right) \left(\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \mp \\ \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \right) \times \\ \times \left(\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (7.10')$$

(мы воспользовались хорошо знакомым нам тождеством $\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t}$). Перемножая скобки в правой части (7.10'), окончательно приводим (7.10) к виду

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} + \left\{ \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \right\} + \\ + \frac{\gamma^2}{4} \beta'(\sigma) \beta(\sigma) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (7.11)$$

Определим теперь $\beta(\sigma)$, потребовав, чтобы выражение в фигурных скобках в (7.11) равнялось $\gamma \frac{\partial b(\sigma)}{\partial t}$:

$$\frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) = \gamma \frac{\partial b(\sigma)}{\partial t},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{2} \left(2\beta'(\sigma) \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{a''(\sigma)}{2\sqrt{a'(\sigma)}} \beta(\sigma) \right) = b'(\sigma),$$

откуда

$$\beta' + \frac{1}{4} \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)} \beta = \frac{b'(\sigma)}{\sqrt{a'(\sigma)}}. \quad (7.12)$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $\sigma=0$, есть

$$\beta(\sigma) = (a'(\sigma))^{-1/4} \int_0^\sigma (a'(\sigma))^{-1/4} b'(\sigma) d\sigma. \quad (7.13)$$

Ясно, что при $\beta(\sigma)$, определенном в (7.13), выражение (7.11) совпадает с левой частью (7.9) с точностью до $\frac{\gamma^2}{4} \beta'(\sigma) \beta(\sigma)$. Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема 7.2. Уравнение (7.9) представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\} = O(\gamma^2), \quad (7.14)$$

где функция $\beta(\sigma)$ определена формулой (7.13), а величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$.

Замечание 1. Вытекающие из (7.14) (где нужно пренебречь погрешностью $O(\gamma^2)$) и (7.13) одноволновые уравнения

$$\sqrt{a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} (a'(\sigma))^{-1/4} \int_0^\sigma (a'(\sigma))^{-1/4} b'(\sigma) d\sigma \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

легко решаются методом характеристик. В дальнейшем, однако, мы не будем ими заниматься, поскольку определяющее соотношение (7.8) не обладает затухающей памятью и является поэтому несколько искусственным.

Замечание 2. Уравнения типа (7.9) возникают также в некоторых задачах о распространении волн в стержнях при наличии внешнего трения. Пусть $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующего на боковую поверхность стержня и рассчитанная на единицу объема. Тогда уравнение движения стержня запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + F_{\text{тр}} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.15)$$

Возможны две ситуации, при которых это уравнение приводит к виду (7.9).

а) *Линейно-упругий стержень, нелинейная сила трения.* Предположим, что для материала стержня имеет место закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

($\varepsilon = \partial u / \partial x$), а сила трения имеет вид

$$F_{\text{тр}} = -\gamma F(\partial u / \partial t), \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

Тогда (7.15), очевидно, перепишется следующим образом:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Дифференцируя это уравнение по t и полагая $v = \partial u / \partial t$, приходим к уравнению для скоростей, принадлежащему к типу (7.9):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial F(v)}{\partial t} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (7.16)$$

б) *Нелинейно-упругий стержень, линейная сила трения.* Пусть теперь для материала стержня имеет место нелинейное определяющее соотношение

$$\varepsilon = a(\sigma),$$

но зато сила трения зависит от скорости элементов стержня линейным образом:

$$F_{\text{тр}} = -k\gamma \frac{\partial u}{\partial t}; \quad k > 0, \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

Подставляя выражение для $F_{\text{тр}}$ в уравнение (7.15), имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - k\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Продифференцировав это уравнение по x , получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - k\gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2},$$

откуда с учетом определяющего соотношения окончательно имеем

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2} + \frac{k\gamma}{\rho} \frac{\partial a(\sigma)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0. \quad (7.17)$$

Таким образом, мы снова пришли к уравнению типа (7.9).

Замечание 3. Интересная существенно двухволновая теория, описывающая распространение возмущений в стержнях при внешнем сухом трении (когда $F_{\text{тр}} = -k \operatorname{sign} \partial u / \partial t$, $k > 0$),

построена в работах Л. В. Никитина; см. [100, 101]. Некоторые дальнейшие результаты см. в [64, 102].

4. Приведем, наконец, для иллюстрации возможностей нашего метода теорему о факторизации уравнения Клейна—Фока—Гордона с малым параметром γ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma g'(w) = 0 \quad (7.18)$$

($g(w)$ — гладкая функция).

Теорема 7.3. Уравнение (7.15) представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} 1^* g'(w) \mp \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} 1^* g'(w) \pm \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = O(\gamma^2), \quad (7.19)$$

где через 1^* обозначен оператор интегрирования от $-\infty$ до t , а величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном w и обращается в нуль при $w=0$.

Справедливость этой теоремы проверяется непосредственным перемножением скобок в (7.19).

§ 8. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ПАМЯТИ. ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

1. Вернемся к определяющему соотношению (7.1) и предположим, что ядро наследственности $\Phi(t)$, введенное в (7.5), имеет вид

$$\Phi(t) = ke^{-kt}, \quad k > 0.$$

Тогда из теоремы 7.1 следует, что волна напряжений, распространяющаяся вправо, описывается в области гладкого движения уравнением

$$\sqrt{\rho a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k \int_{-\infty}^t e^{-k(t-\tau)} \frac{\partial \sigma(\tau, x)}{\partial x} d\tau = 0. \quad (8.1)$$

Мы будем рассматривать нашу обычную задачу:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \text{ при } x > 0, \quad t \leq 0, \\ \sigma(t, 0) &= \sigma_0(t), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $\sigma_0(t) = 0$ при $t \leq 0$ и при $t \geq T > 0$. Функцию $\sigma_0(t)$ мы будем предполагать гладкой и не обращающейся в нуль на интервале $0 < t < T$.

2. Покажем, каким образом можно построить точное решение задачи (8.1), (8.2) (пригодное до возникновения ударной волны). Прежде всего, поскольку ядро оператора свертки в

(8.1) — экспоненциальное, мы можем стандартным способом избавиться в (8.1) от интегрального слагаемого и свести (8.1) к дифференциальному уравнению.

Действительно, продифференцируем (8.1) по t . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\rho a'}(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \\ + k^2 \int_{-\infty}^t e^{-k(t-\tau)} \frac{\partial \sigma(\tau, x)}{\partial x} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Умножим теперь (8.1) на k и сложим с (8.3) (при этом, очевидно, уничтожатся не только интегральные слагаемые, но и члены с $\partial \sigma / \partial x$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\rho a'}(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + k \sqrt{\rho a'}(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sqrt{\rho a'}(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + k \int_0^\sigma \sqrt{\rho a'}(\sigma) d\sigma \right\} = 0. \quad (8.4)$$

Из (8.4) следует, что

$$\sqrt{\rho a'}(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + k \int_0^\sigma \sqrt{\rho a'}(\sigma) d\sigma = f(x).$$

Однако, так как до прихода волны напряжение σ равно нулю, то должно быть и

$$f(x) \equiv 0.$$

Итак, мы пришли к дифференциальному уравнению 1-го порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\sigma \sqrt{\rho a'}(\sigma) d\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + k \int_0^\sigma \sqrt{\rho a'}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (8.5)$$

3. Ясно, что уравнение (8.5) может быть непосредственно решено методом характеристик. Однако формулы несколько упрощаются, если сделать замену

$$w = \int_0^\sigma \sqrt{\rho a'}(\sigma) d\sigma. \quad (8.6)$$

Обращение этого соотношения мы будем записывать в виде

$$\sigma = \varphi(w). \quad (8.7)$$

Тогда уравнение (8.5), очевидно, переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \varphi'(w) \frac{\partial w}{\partial x} + kw = 0. \quad (8.8)$$

Граничное условие для этого уравнения вычисляется из (8.2) и (8.6):

$$w(t, 0) = \int_0^{\sigma_0(t)} \sqrt{\rho a'(\sigma)} d\sigma \equiv w_0(t) \quad (8.9)$$

(ясно, что $w_0(t) = 0$ при $t \leq 0$ и при $t \geq T > 0$ и что $w_0(t) \neq 0$ при $0 < t < T$).

Из (8.8) видно, что на этот раз удобнее записать уравнения характеристик в следующей форме:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(w), \quad (8.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = -kw. \quad (8.11)$$

Интегрируя (8.11), с учетом (8.9) получаем

$$w = e^{-k(t-\tau)} w_0(\tau) \quad (8.12)$$

(через τ обозначено значение t при $x=0$). Подставляя теперь (8.12) в (8.10), окончательно имеем

$$x = \int_{\tau}^t \varphi'(e^{-k(y-\tau)} w_0(\tau)) dy \quad (8.13)$$

(мы учли здесь, что должно быть $x=0$ при $t=\tau$).

Итак, система (8.12), (8.13) определяет решение задачи (8.8), (8.9) (до возникновения ударных волн). Переход к решению задачи (8.1), (8.2) дает, очевидно, формула (8.7).

4. Чтобы определить время возникновения градиентной катастрофы, нам нужно найти огибающую семейства характеристик (8.13), зависящего от параметра τ . Поскольку $w_0(\tau) = 0$ при $\tau \leq 0$ и при $\tau \geq T$, из (8.13) ясно, что характеристики, соответствующие этим значениям τ , будут представлять собой параллельные прямые линии. Поэтому для нахождения огибающей семейства (8.13) достаточно ограничиться значениями $0 < \tau < T$.

Сделаем в (8.13) замену переменной интегрирования, положив

$$z = e^{-k(y-\tau)} w_0(\tau), \quad 0 < \tau < T. \quad (8.14)$$

Отсюда, очевидно, имеем

$$dz = -k e^{-k(y-\tau)} w_0(\tau) dy,$$

т. е.

$$dy = -\frac{1}{k} \frac{dz}{z}.$$

Далее, при $y = \tau$, очевидно,

$$z = w_0(\tau),$$

а при $y = t$

$$z = e^{-k(t-\tau)} w_0(\tau).$$

Таким образом, уравнение семейства характеристик (8.13) (при $0 < \tau < T$) переписывается в виде

$$x = \frac{1}{k} \int_{e^{-k(t-\tau)} w_0(\tau)}^{w_0(\tau)} \frac{\varphi'(z)}{z} dz. \quad (8.15)$$

Теперь, чтобы найти огибающую нашего семейства характеристик, продифференцируем (8.15) по параметру τ . Имеем

$$0 = \frac{1}{k} w_0'(\tau) \frac{\varphi'(w_0(\tau))}{w_0(\tau)} - \frac{1}{k} e^{-kt} (e^{k\tau} w_0(\tau))' \times \\ \times \frac{\varphi'(e^{-kt} e^{k\tau} w_0(\tau))}{e^{-kt} e^{k\tau} w_0(\tau)}, \quad 0 < \tau < T. \quad (8.16)$$

Уравнения (8.15) и (8.16) определяют (в параметрической форме) огибающую нашего семейства характеристик.

Как мы знаем, время возникновения градиентной катастрофы в нашей задаче — это наименьшее положительное значение координаты t точек огибающей. Чтобы определить это наименьшее значение, нам достаточно иметь дело с одним только уравнением (8.16). Перепишем (8.16) в более удобном виде:

$$w_0'(\tau) \varphi'(w_0(\tau)) = (k w_0(\tau) + w_0'(\tau)) \varphi'(e^{-kt} e^{k\tau} w_0(\tau)),$$

откуда

$$t = -\frac{1}{k} \ln \left\{ \frac{e^{-k\tau}}{w_0(\tau)} \varphi'^{-1} \left(\frac{w_0'(\tau) \varphi'(w_0(\tau))}{k w_0(\tau) + w_0'(\tau)} \right) \right\}. \quad (8.17)$$

Наименьшее значение $t=t_0$, определяемое из (8.17) (и соответствующее некоторому $\tau=\tau^*$), и будет временем возникновения градиентной катастрофы. Соответствующее расстояние $x=x_0$ может быть вычислено по формуле (8.15), где нужно t заменить на t_0 , а вместо τ подставить его значение τ^* . Если же среди значений t , даваемых формулой (8.17), положительных нет, то это означает, что градиентная катастрофа в нашей задаче не возникает.

Задача. Каким образом нужно изменить проведенные выше вычисления, если функция $\sigma_0(t)$ имеет изолированный нуль на интервале $0 < t < T$?

5. В случае малых амплитуд для координат градиентной катастрофы в нашей задаче удастся получить явные асимптотические формулы. Кроме того, оказывается возможным качественно описать волну напряжений и после формирования ударного фронта.

Итак, пусть для простоты

$$\int_0^\sigma V \rho a'(\sigma) d\sigma = A\sigma + B\sigma^2, \quad A > 0. \quad (8.18)$$

Тогда уравнение (8.5) (вытекающее, как мы знаем, из (8.1)) перепишется в виде

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + kA\sigma + kB\sigma^2 = 0.$$

Отбрасывая здесь последнее слагаемое, окончательно приходим к уравнению

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + C\sigma = 0, \quad (8.19)$$

где положено

$$C \equiv kA.$$

Ясно, что $C > 0$, ибо постоянные k и A положительны.

Сделаем теперь в (8.19) замену неизвестной функции

$$\sigma = \frac{f}{2B} e^{-Cx} \quad (8.20)$$

и замену независимых переменных

$$x_1 = \frac{1 - e^{-Cx}}{C}, \quad t_1 = t - Ax. \quad (8.21)$$

Тогда уравнение (8.19) перепишется в виде

$$f \frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \quad (8.22)$$

Далее, очевидно, что при отображении (8.21) полуплоскость $x \geq 0$ перейдет в полосу

$$0 \leq x_1 < 1/C; \quad (8.23)$$

ясно также, что ось t перейдет в ось t_1 , причем положительное направление сохранится.

Заметим теперь, что, поскольку мы продолжили граничную функцию $\sigma_0(t)$ нулем на полуось $t < 0$, первое из условий (8.2) оказывается фактически излишним. Второе же условие (8.2) в новых координатах запишется в виде

$$f(t_1, 0) = 2B\sigma_0(t_1). \quad (8.24)$$

Таким образом, мы пришли к задаче (8.22), (8.24), решение которой было подробно изучено в § 2 гл. 1.

Подчеркнем еще раз, что это решение интересует нас лишь в полосе $0 \leq x_1 < 1/C$.

В п. 4 мы уже получили формулы для координат градиентной катастрофы. Однако при подходе, использующем малость амплитуды волны, эти формулы удастся существенно упростить. Действительно, в силу результатов § 2 гл. 1 расстояние (по оси x_1), на котором происходит градиентная катастрофа, равно

$$-\frac{1}{2B\sigma'_0(\tau^*)},$$

где τ^* — точка, в которой величина $-2B\sigma'_0(\tau)$ достигает максимума. (При сделанных предположениях относительно функции σ_0 этот максимум, очевидно, всегда будет положителен.)

Следовательно (см. 8.21)), разрыв возникает при

$$x = x_0 = -\frac{1}{C} \ln \left(1 + \frac{C}{2B\sigma'_0(\tau^*)} \right). \quad (8.25)$$

С помощью уравнений характеристик нетрудно определить также время t_0 возникновения разрыва.

Далее, очевидно, что должно выполняться условие

$$1 + \frac{C}{2B\sigma'_0(\tau^*)} > 0, \quad (8.26)$$

иначе опрокидывание не произойдет ни при каком вещественном x . Таким образом, при малых амплитудах возможность образования разрыва зависит только от наибольшей крутизны граничного профиля, а от других деталей профиля не зависит.

Предположим теперь, что условие (8.26) выполнено, и исследуем возникающую ударную волну (в одноволновом приближении). Для определенности мы будем предполагать теперь,

что граничная функция σ_0 имеет единственный экстремум. Таким образом, мы будем рассматривать опрокидывание «одиночного горба».

Нетрудно проверить, что с точностью до величин 2-го порядка малости условие на разрыве (7.7) в новых переменных f, t_1, x_1 принимает вид

$$V = \frac{[f]}{[f^2/2]}, \quad (8.27)$$

где V — скорость ударного фронта в координатах t_1, x_1 . Поэтому в силу результатов § 2 гл. 1 ударный фронт в нашей задаче легко строится с помощью принципа равных площадей. Пусть

$$t_1 = S(x_1) \quad (8.28)$$

— уравнение ударного фронта в координатах t_1, x_1 . Как мы знаем из § 2 гл. 1, функция $S(x_1)$ определена и непрерывна всюду правее точки возникновения градиентной катастрофы, т. е. при

$$x_1 > -\frac{1}{2B\sigma'_0(\tau^*)}. \quad (8.29)$$

(Нас, однако, интересуют ее значения лишь в промежутке (8.23).) Это простое соображение сразу позволяет нам дать качественное описание ударного фронта в исходных координатах. Действительно, переходя в (8.28) к координатам t, x , имеем

$$t - Ax = S\left(\frac{1 - e^{-Cx}}{C}\right), \quad x > x_0,$$

откуда при больших x

$$t \sim Ax + S\left(\frac{1}{C}\right). \quad (8.30)$$

Наконец, что касается разрыва напряжения на фронте, то его величина будет экспоненциально убывать при $x \rightarrow \infty$ в силу вытекающего из (8.20) соотношения

$$[\sigma] = \frac{[f]}{2B} e^{-Cx}. \quad (8.31)$$

Действительно, при всех конечных x_1 , удовлетворяющих неравенству (8.29), величина $[f]$ изменяется непрерывным образом и не равна нулю (см. § 2 гл. 1). В частности, значение $[f]$ при

$x_1 \rightarrow 1/C$ стремится к некоторой ненулевой постоянной. Однако $x_1 \rightarrow 1/C$ соответствует $x \rightarrow \infty$. Тем самым показано, что

$$\frac{|f|}{2B} \rightarrow \text{const} \neq 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

откуда и следует экспоненциальное убывание разрыва $[\sigma]$ с ростом x .

Итак, в случае малых амплитуд и экспоненциальных ядер специального вида нам удалось качественно описать поведение ударного фронта, возникающего при опрокидывании уединенной волны. Однако, как мы знаем из предыдущего (см. § 4), ударные фронты могут возникать фактически при любых разумных ядрах наследственности. Нахождение соответствующих условий опрокидывания для уединенных волн и описание ударных фронтов — интересная открытая проблема.

§ 9. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ И НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕД

1. Теорема 7.1 о точной факторизации нелинейного волнового уравнения с памятью позволяет свести к интегральному уравнению следующую задачу.

Рассмотрим составной стержень, расположенный на полуоси $x \geq 0$. Пусть участок $0 \leq x < l$ этого стержня является линейно-упругим, имеет плотность $\rho_1 = \text{const}$ и модуль Юнга $E_1 = \text{const}$, так что напряжения на этом участке стержня удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{E_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l. \quad (9.1)$$

Пусть, далее, часть $x > l$ рассматриваемого стержня имеет плотность $\rho_2 = \text{const}$, а соответствующее определяющее соотношение имеет вид (7.1), так что волны, распространяющиеся вправо, описываются уравнением (7.6):

$$\sqrt{\rho_2 a'(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (1 - \Phi^*) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad x > l. \quad (9.2)$$

На границе раздела $x = l$, очевидно, должны быть выполнены следующие два условия:

$$\sigma^- = \sigma^+ \quad (9.3)$$

(равенство напряжений) и

$$\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^- = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^+ \quad (9.4)$$

(равенство ускорений материальных элементов). Здесь индексами «—» и «+» отмечены предельные значения величин при подходе к границе раздела соответственно слева и справа.

Предположим, наконец, что

$$\begin{aligned}\sigma &= 0 \text{ при } x > 0, \quad t \leq 0, \\ \sigma(t, 0) &= \sigma_0(t),\end{aligned}\quad (9.5)$$

где $\sigma_0(t) = 0$ при $t < 0$.

Наша задача — определить волну напряжений, возникающую в линейно-упругой части стержня в результате переотражений падающей волны от границ $x=l$ и $x=0$.

Проводимый ниже анализ будет ограничен временами, при которых ударные волны в правой части стержня еще не образуются. (Ясно, что на этих временах напряжения в правой части стержня будут удовлетворять как раз уравнению (9.2).)

2. Прежде всего из (9.1) и (9.5) легко следует, что при $0 \leq x < l$ решение нашей задачи представимо в виде

$$\sigma = \sigma_0\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - \sigma_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \sigma_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right); \quad c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad (9.6)$$

где σ_1 — функция, подлежащая определению. Поскольку отраженная волна впервые возникает при $x=l$ в момент $t=l/c_1$, функция σ_1 , очевидно, должна подчиняться условию

$$\sigma_1(z) = 0 \text{ при } z < 2l/c_1. \quad (9.7)$$

Теперь (9.3) переписывается в виде

$$\sigma_0\left(t - \frac{l}{c_1}\right) - \sigma_1\left(t - \frac{l}{c_1}\right) + \sigma_1\left(t + \frac{l}{c_1}\right) = \sigma^+. \quad (9.8)$$

Далее, из (9.2) имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^+ &= -\frac{1}{1-\Phi^*} \left(\sqrt{\rho_2 a'(\sigma^+)} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^+ \right) \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{1-\Phi^+} \left(\sqrt{\rho_2 a'(\sigma^+)} \frac{d\sigma^+}{dt} \right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (9.6), очевидно, следует, что (9.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1 c_1} \left\{ -\sigma'_0\left(t - \frac{l}{c_1}\right) + \sigma'_1\left(t - \frac{l}{c_1}\right) + \sigma'_1\left(t + \frac{l}{c_1}\right) \right\} = \\ = -\frac{1}{1-\Phi^*} \left(\sqrt{\frac{a'(\sigma^+)}{\rho_2}} \frac{d\sigma^+}{dt} \right).\end{aligned}\quad (9.9)$$

Уравнения (9.8) и (9.9) представляют собой систему относительно неизвестных функций σ_1 и σ^+ , которую нам нужно решить.

3. Интегрируя (9.9) по dt и учитывая коммутативность операций интегрирования и свертки, легко получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 c_1} \left\{ -\sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) + \sigma_1 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) + \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right\} = \\ = - \frac{1}{V \rho_2 (1 - \Phi^*)} \int_0^{\sigma^+} \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma + \text{const.} \end{aligned}$$

Взяв произвольное t из промежутка $(0, l/c_1)$, очевидно, получим, что здесь $\text{const} = 0$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что

$$(1 - \Phi^*) \left\{ \sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right\} = F(\sigma^+), \quad (9.10)$$

где обозначено

$$F(\sigma^+) \equiv \sqrt{\frac{E_1 \rho_1}{\rho_2}} \int_0^{\sigma^+} \sqrt{a'(\sigma)} d\sigma.$$

Теперь, подставляя выражение для σ^+ из (9.8) в (9.10), получаем нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} (1 - \Phi^*) \left\{ \sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right\} = \\ = F \left(\sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) + \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right), \quad (9.11) \end{aligned}$$

в которое неизвестная функция σ_1 входит со сдвигами аргумента.

4. Хотя уравнение (9.11) кажется на первый взгляд довольно сложным, его решение нетрудно построить с помощью стандартных приемов.

Ясно, что в силу (9.7) уравнение (9.11) имеет смысл рассматривать лишь при $t \geq l/c_1$. Пусть вначале $l/c_1 \leq t < 3l/c_1$. В силу (9.7) функция $\sigma_1(t - l/c_1)$ обращается в тождественный нуль на указанном промежутке, и уравнение (9.11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} (1 - \Phi^*) \left\{ \sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) - \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right\} = F \left(\sigma_0 \left(t - \frac{l}{c_1} \right) + \sigma_1 \left(t + \frac{l}{c_1} \right) \right), \\ \frac{l}{c_1} \leq t < \frac{3l}{c_1}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения легко строится методом последовательных приближений.

Однако тем самым функция $\sigma_1(t-l/c_1)$ определится на промежутке $3l/c_1 \leq t < 5l/c_1$. Следовательно, при $3l/c_1 \leq t < 5l/c_1$ уравнение (9.11) можно снова решать методом последовательных приближений относительно $\sigma_1(t+l/c_1)$ (используя найденное значение $\sigma_1(t-l/c_1)$). Продолжая процесс, получим искомое решение уравнения (9.11) при всех t .

Подробности, относящиеся к случаю малой квадратичной нелинейности, содержатся в [24].

5. В заключение подчеркнем, что ключевым моментом при сведении нашей волновой задачи к интегральному уравнению (9.11) была возможность выразить на границе раздела выходящую производную $(\partial\sigma/\partial x)^+$ через $(\partial\sigma/\partial t)^+ \equiv d\sigma^+/dt$. Именно здесь сыграл роль тот факт, что для выбранной модели среды движение в правой части стержня является в точности одно-волновым (в силу теоремы 7.1).

В качестве очевидного следствия результатов пп. 1—4 мы получаем, что задачи о распространении волн в обеих частях стержня становятся независимыми. Наконец, ясно, что если в (9.2) $\Phi^* \equiv 0$, то волна напряжений в правой части стержня может быть аналитически рассчитана методом характеристик.

Задача. Перенести результаты этого параграфа на случай, когда левая часть стержня является линейно-наследственно-упругой.

§ 10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАЛОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ, ПАМЯТИ И ПЛАВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

1. Будем, как и в § 1 гл. 2, считать стержень неоднородным, предполагая при этом, что отношение характерной длины волны рассматриваемого импульса к характерному расстоянию, на котором изменяется плотность ρ , равно γ , $0 < \gamma \ll 1$. Предположим также, что определяющее соотношение для стержня имеет вид (2.1):

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \gamma R^*} (A\sigma + \gamma B\sigma^2). \quad (10.1)$$

Обозначим, как и в § 1 гл. 2, время через \tilde{t} , лагранжеву координату — через \tilde{x} и введем переменные $t = \tilde{t}/\gamma$, $x = \tilde{x}/\gamma$. Нетрудно видеть, что в переменных t , x волновое уравнение для напряжений примет вид, аналогичный (2.3):

$$\frac{\partial^2 (A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t^2} - (1 - \gamma R^*) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (10.2)$$

Попробуем факторизовать уравнение (10.2). Руководствуясь аналогией с теоремой 2.1 этой главы и теоремой 1.1 гл. 2, рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \mp \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \sigma = \\ & \equiv \frac{\partial}{\partial t} (A+2\gamma B\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - (1-\gamma R^*) \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/2}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \mp \\ & \mp \left\{ \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Однако, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/2}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} = \\ & \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\rho'}{\rho^{7/4}} \right)' \sigma \end{aligned} \quad (10.4)$$

(здесь штрих обозначает производную по аргументу $\xi = \gamma x$). Учитывая этот факт и разлагая радикалы в правой части (10.3) в ряды, перепишем (10.3) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t^2} - (1-\gamma R^*) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + O(\gamma^2) \mp \\ & \mp \frac{\sqrt{A}}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* - \dots \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma - \dots \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma - \dots \right) \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* - \dots \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} = \\ & \equiv \frac{\partial^2 (A\sigma + \gamma B\sigma^2)}{\partial t^2} - (1-\gamma R^*) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + O(\gamma^2). \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 10.1. Уравнение (10.2) представимо в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \mp \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{A+2\gamma B\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{1-\gamma R^*} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \right\} \sigma = O(\gamma^2). \end{aligned} \quad (10.5)$$

2. Пренебрегая величиной $O(\gamma^2)$ в правой части (10.5) и ограничиваясь первыми двумя членами в разложении радикалов, получаем из предыдущей теоремы, что волна, распространяющаяся, например, вправо, описывается уравнением

$$\sqrt{A} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{1}{\rho^{1/4}(\gamma x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{\rho^{1/4}(\gamma x)} = 0. \quad (10.5')$$

Прежде чем применять к этому уравнению подход Ландау—Уизема, имеет смысл преобразовать его так, чтобы переменным остался коэффициент только при квадратичном члене, а слагаемые, содержащие неизвестную функцию не под знаком производной, исчезли. Для этого сделаем преобразование Грина—Лиувилля, положив

$$y = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma x} \sqrt{A \rho(z)} dz, \quad (10.6)$$

$$\omega = \left(\frac{\rho(0)}{\rho(\gamma x)} \right)^{1/4} \sigma.$$

Тогда (10.5') перепишется в виде

$$\left(1 + \frac{\gamma B}{A} \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \omega \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Умножая это уравнение на $\left(1 - \frac{\gamma}{2} R^* \right)^{-1} = [1 + \frac{\gamma}{2} R^* + \dots]$ и пренебрегая членами порядка $O(\gamma^2)$, получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{\gamma B}{A} \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} \omega \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\gamma}{2} R^* \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (10.7)$$

3. Пусть теперь для (10.2) поставлена задача

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) &= 0 \text{ при } x > 0, t \leq 0, \\ \sigma(t, 0) &= \sigma_0(t) \end{aligned} \quad (10.8)$$

(где $\sigma_0(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T > 0$). Тогда из (10.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \omega(t, y) &= 0 \text{ при } y > 0, t \leq 0, \\ \omega(t, 0) &= \sigma_0(t). \end{aligned} \quad (10.8')$$

Учитывая результаты § 6 этой главы, а также результаты § 1 гл. 2, естественно предположить, что асимптотическое поведение функции $w = w(t, y)$ дается формулой

$$w(t, y) = L_{p \rightarrow \tau}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) e^{-\frac{\gamma}{2} p \bar{R}(p) y}, \quad (10.9)$$

где $\tau = \tau(t, y)$ определяется из условий

$$\frac{dt}{dy} = 1 + \gamma \frac{B}{A} \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} w \quad \text{при} \quad \tau = \text{const}; \quad x = x(y), \quad (10.10)$$

$$\tau|_{y=0} = t.$$

(Здесь $\bar{\sigma}_0(p) = L_{t \rightarrow p} \sigma$, $\bar{R}(p) = L_{t \rightarrow p} R$; L и L^{-1} — соответственно прямое и обратное преобразования Лапласа.) Подставляя (10.9), (10.10) в уравнение (10.7), нетрудно показать малость возникающей невязки.

Возвращаясь, наконец, к функции σ и координате x по формулам (10.6), получаем из (10.9), (10.10)

$$\sigma(t, x) = \left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)} \right)^{1/4} L_{p \rightarrow \tau}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) e^{-\frac{1}{2} p \bar{R}(p) \int_0^{\gamma x} \sqrt{A \rho(z)} dz}, \quad (10.11)$$

где $\tau = \tau(t, x)$ определяется из условий

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{A \rho(\gamma x)} \left(1 + \frac{\gamma B}{A} \sigma \right) \quad \text{при} \quad \tau = \text{const}, \quad (10.12)$$

$$\tau|_{x=0} = t.$$

Задачи. 1. Обобщить теоремы 7.1 и 7.2 на случай плавно меняющейся плотности $\rho = \rho(\gamma x)$, $0 < \gamma \ll 1$.

2. Вывести из (10.5') соответствующие одноволновые уравнения для деформаций и для перемещений.

3. Пусть плотность стержня изменяется по закону $\rho = (C_1 x + C_2)^{-4/3}$, а определяющее соотношение линейно: $(1 - R^*) \varepsilon = A \sigma$. Доказать, что тогда линейное динамическое уравнение для напряжений

$$A \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - (1 - R^*) \frac{\partial}{\partial x} (C_1 x + C_2)^{4/3} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (10.13)$$

может быть точно факторизовано следующим образом:

$$\left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \mp \sqrt{1-R^*} \left(\frac{\partial}{\partial x} (C_1 x + C_2)^{2/3} - \frac{C_1}{3} (C_1 x + C_2)^{-1/3} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{A} \frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{1-R^*} \left((C_1 x + C_2)^{2/3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C_1}{3} (C_1 x + C_2)^{-1/3} \right) \right\} \sigma = 0. \quad (10.14)$$

Вывести отсюда формулу для волны напряжений, распространяющейся вправо по стержню (расположенному на полуоси $x \geq 0$), к концу которого в момент $t=0$ прикладывается продольная нагрузка $\sigma(t, 0) = \sigma_0(t)$:

$$\sigma(t, x) = L_{p \rightarrow t}^{-1} \bar{\sigma}_0(p) \left(\frac{C_2}{C_1 x + C_2} \right)^{1/3} \exp \left\{ -\frac{3p \sqrt{A}}{\sqrt{1-R(p)}} \times \right. \\ \left. \times \frac{(C_1 x + C_2)^{1/3} - C_2^{1/3}}{C_1} \right\}. \quad (10.15)$$

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

x — лагранжева координата,
 t — время,
 u — перемещение,
 v — скорость материального элемента,
 ε — деформация,
 σ — напряжение,
 ρ — плотность,
 U — скорость ударного фронта,
 R^* — оператор свертки с ядром $R(t)$:

$$R^*f(t) \equiv \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$[f] \equiv f(t+0, x) - f(t-0, x),$$

γ — безразмерный малый параметр ($0 < \gamma \ll 1$).

В произведениях операторов дифференцирования, умножения на функцию и свертки оператор, стоящий правее, действует раньше. Например:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma) R^* \frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\sigma) \left(R^* \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Булдырев В. С. Искусство асимптотики//Вестн. Ленингр. ун-та. 1977. Т. 13, № 3. С. 5—12.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
3. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжения от деформации//ПММ. 1953. Т. 17, № 4. С. 455—460.
4. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
6. Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
7. Гринфельд М. А. Лучевой метод вычисления волновых фронтов в нелинейно-упругом материале//ПММ. 1978. Т. 42, № 5. С. 883—898.
8. Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа//ПМТФ. 1976. № 6. С. 90—95.
9. Егоров Ю. А., Молотков И. А. О влиянии переменной глубины, а также нелинейных и дисперсионных членов второго порядка на распространение поверхностных гравитационных волн//Дифференциальные уравнения. Теория рассеяния. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. С. 113—124.
10. Калашников А. С. О единственности решения задачи Коши для одного класса квазилинейных гиперболических систем//УМН. 1959. Т. 14. С. 195—202.
11. Калякин Л. А. Длинноволновые асимптотики решений нелинейных систем уравнений с дисперсией//ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 4. С. 809—813.
12. Калякин Л. А. Асимптотический распад на простые волны решения возмущенной системы гиперболических уравнений//Дифф. уравнения с малым параметром. Свердловск, 1984. С. 36—49.
13. Калякин Л. А. Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений//Матем. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 96—120.
14. Калякин Л. А. Асимптотика решений гиперболической системы уравнений с нелинейным возмущением//УМН. 1984. Т. 39, № 5. С. 243—244.
15. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
16. Кельберт М. Я., Чабан И. А. Релаксация и распространение импульсов в жидкостях//МЖГ. 1986. № 4. С. 164—171.
17. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
18. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: ИЛ, 1950.
19. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
20. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от мест их возникновения//ПММ. 1945. Т. 9, № 9. С. 496—500.

21. Локшин А. А. Фронты стационарных нелинейных волн в средах с памятью и теоремы факторизации//ПММ. 1987. № 5. С. 880—885.
22. Локшин А. А. Нелинейные ударные волны в средах с памятью и метод разрывов//ДАН СССР. 1982. Т. 263, № 4. С. 834—838.
23. Локшин А. А. Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора//МТТ. 1985, № 6. С. 104—108.
24. Локшин А. А. Факторизация нелинейного волнового оператора и ее применение к исследованию ударных волн в нелинейной теории упругости//МТТ. 1986, № 2. С. 134—141.
25. Локшин А. А., Рок В. Е. Ударные волны в линейных наследственных средах с пространственной дисперсией//ДАН. 1985. Т. 283, № 1. С. 61—66.
26. Локшин А. А., Сагомоян Е. А. Факторизация нелинейного волнового оператора и нелинейный аналог метода ВКБ в теории распространения упругих волн//МТТ. 1987. № 1. С. 95—97.
27. Локшин А. А., Сагомоян Е. А. О движении стержня переменной плотности//Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1987. № 3. С. 93—95.
28. Локшин А. А., Сагомоян Е. А. Факторизация нелинейного волнового уравнения с правой частью, зависящей от времени и ее применение в волновых задачах упругости//МТТ (в печати).
29. Локшин А. А., Сагомоян Е. А. О распространении нелинейной сферической волны//Вест. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1987. № 2. С. 32—35.
30. Локшин А. А., Рок В. Е. Об эволюции длинной волны на мелкой воде//МЖГ. 1987. № 5. С. 186—188.
31. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
32. Локшин А. А., Ицкович М. А. Распространение нестационарных волн напряжения в наследственно-упругой среде//МТТ (в печати).
33. Локшин А. А., Ицкович М. А. Нестационарные волны в нелинейных наследственных средах и нестандартное применение преобразования Лапласа//Акустический журнал. 1987. № 4. С. 675—679.
34. Маслов В. П. Распространение слабых ударных волн в изэнтропическом невязком газе//Современные проблемы математики. Т. 8. 1977.
35. Митропольский Ю. А., Хома Г. П. Математическое обоснование методов нелинейной механики. Киев: Наукова думка, 1983.
36. Молотков И. А., Вакуленко С. А. Нелинейные продольные волны в неоднородных стержнях//Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 99. С. 64—73.
37. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных смесях. Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1983.
38. Нелинейные волны. М.: Мир. 1977.
39. Нигул У. К. Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981.
40. Нигул У. К. Применение модифицированных ядер при описании волн деформации в линейных и нелинейных вязкоупругих средах//Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 147—160.
41. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
42. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
43. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений//УМН. 1957. Т. 12, № 3. С. 3—73.
44. Олейник О. А. О единственности обобщенного решения задачи Коши для одной нелинейной системы уравнений, встречающейся в механике//УМН. 1957. Т. 12, № 6. С. 169—176.

45. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Панасенко Г. П. Асимптотическое разложение системы теории упругости с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами//ДАН СССР. 1982. Т. 266, № 1. С. 18—22.
46. Осокин А. Е., Суворова Ю. В. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров//ПММ. 1978. Т. 42. С. 1107—1114.
47. Островский Л. А. Приближенные методы в теории нелинейных волн//Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 4. С. 454—476.
48. Островский Л. А., Сутин Л. Н. Нелинейные упругие волны в стержнях//ПММ. 1977. Т. 41. С. 531—537.
49. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984.
50. Потапов А. И. Нелинейные волны в стержнях и пластинах. Горький: Изд-во ГГУ, 1985.
51. Проблемы нелинейной акустодиагностики. Таллин: Валгус, 1986.
52. Рабинович М. И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем//ДАН СССР. 1970. Т. 191. С. 1253—1256.
53. Рабинович М. И., Розенблюм А. А. Об асимптотических методах решения нелинейных уравнений в частных производных//ПММ. 1972. Т. 36, № 2. С. 330—343.
54. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
55. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
56. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
57. Распопов В. Е., Шапеев В. П. К вопросу о существовании промежуточных интегралов//Численные методы механики сплошной среды. Т. 1, № 2. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1970. С. 76—81.
58. Распопов В. Е., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Применение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям газовой динамики//Изв. вузов. Сер. матем. 1974. № 11. С. 69—74.
59. Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
60. Самсонов А. М., Сокуринская Е. В. Солитоны продольного смещения в неоднородном нелинейно упругом стержне. Ленинград, ФТИ им. А. Ф. Иоффе, препринт № 973. 1985. С. 1—14.
61. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
62. Суворова Ю. В., Локшин А. А. Волны в наследственно-упругой балке Тимошенко с сингулярной памятью//ДАН СССР. 1985. Т. 282, № 4. С. 819—823.
63. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
64. Филиппов И. Г. Теория продольного колебания вязкоупругого круглого стержня, находящегося в деформируемой среде//МТТ. 1987. № 6. С. 155—163.
65. Шемякин Е. И. Задача Лэмба для среды с упругим последствием//ДАН. 1955. Т. 104, № 2. С. 193—196.
66. Штарас А. Л. Асимптотическое интегрирование слабонелинейных уравнений с частными производными//ДАН СССР. 1977. Т. 237, № 3. С. 525—528.
67. Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981.

68. Asano N., Taniuti T. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media//J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 27, N 4. P. 1059—1062.
69. Chicwendu S. C., Kevorkian I. A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities//SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22, N 2. P. 235—258.
70. Chu B.-T. Stress waves in isotropic linear viscoelastic materials. I//Journal de Mecanique. 1962. V. 1, N 4. P. 439—462.
71. Glimm J., Lax P. D. Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws//Mem. Amer. Math. Soc. 1970. N 1.
72. Greenberg J.M. On the interaction of shocks and simple waves of the same family//Arch. Rat. Mech. Anal. 1970. V. 37. P. 136.
73. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws, II//Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10, N 4. P. 537—566.
74. Nigul U. K. The modified theory of viscoelasticity. Tallinn, 1983.
75. Nigul U. Asymptotic analysis of the pulse shape evolution and of the inverse problem of acoustic evaluation in case of the nonlinear hereditary medium//Proc. IUTAM Symposium on Nonlinear Deformation Waves. Tallinn, 1982. Ed. by U. Nigul, J. Engelbrecht. Springer, Berlin e. a. 1983. P. 255—272.
76. Oikava M., Yajima N. Generalization of the reductive perturbation method to multi-wave systems//Suppl. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 55, N 3. P. 36—51.
77. Sideris T. C. Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations//Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. V. 86, N 4. P. 369—382.
78. Suvorova J. V., Lokshin A. A. Evolution of jumps and wavefronts in nonlinear viscoelastic media//J. de Physique, Suppl. 1985. V. 46, N 8. P. 131—136.
79. Taniuti T. Reductive perturbation method and far fields of wave equation//Suppl. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 55. P. 1—35.
80. Taniuti T., Nishihara K. Nonlinear waves. London: Pitman, 1983.
81. Taniuti T., Wei C. C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I//J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 941—946.
82. Alber H. D. Local existence of weak solutions to the quasilinear wave equations for large initial values//Math. Z. 1985. Bd. 190. P. 249.
83. Liu T.-P. Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations//J. Diff. Equat. 1979. V. 33. P. 92—111.
84. Liu T.-P. Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws//Bull. Amer. Math. Soc. 1985. V. 12. P. 233.
85. Литвин А. Л., Цванкин И. Д. Отражение и преломление плоских волн на нелинейно-упругих объектах//Актуальные проблемы геофизики. Материалы 2-й Всесоюзной конференции молодых ученых. Звенигород. 1984. М., 1985. С. 134—141.
87. Parker D. F., Talbot F. M. Analysis and computation for nonlinear elastic surface waves of permanent form//J. Elast. 1985. V. 15, N 4. P. 389—426.
88. Розенблюм А. А. Асимптотический метод для многомерных систем уравнений в частных производных//ПММ. 1975. Т. 39, № 4. С. 668—675.
89. Johnson J. L., Smoller J. A. Global solutions for certain systems of quasi-linear hyperbolic equations//J. Math. Mech. 1967. V. 17. P. 561—576.
90. Klainerman S., Majda A. Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string//Comm. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 241—263.
91. Glassey R. Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations//Math. Z. 1981. V. 177. P. 323—340.

92. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations//Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 697—715.
93. Glimm J., Lax P. D. Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws//Bull. Amer. Math. Soc. 1967. N 105.
94. Моисеев С. С., Тур А. В. О «квазиупругости» взаимодействия волн Римана в недиспергирующих средах//Укр. физ. журн. 1977. Т. 22, № 10. С. 1638—1645.
95. Моисеев С. С., Тур А. В. О некоторой особенности взаимодействия волн в недиспергирующей среде//Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 1, № 2. С. 68—70.
96. Островский Л. А. Ударные волны и солитоны//Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 5—6. С. 661—690.
97. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
98. Earnshaw S. On the mathematical theory of sound//Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1860. V. 150, part. 1. P. 133—148.
99. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при кратковременных интенсивных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.
100. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения//Инж. журнал. 1963. Т. 3, № 1. С. 126—130.
101. Никитин Л. В. Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения//МТТ. 1978. № 6. С. 137—145.
102. Локшин А. А., Рок В. Е., Виноградова О. С. Сухое трение, память и псевдодифференциальные операторы//МТТ (в печати).
103. Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987.