

*Александр А. Локшин*

# **О ПРИРОДЕ ПОНИМАНИЯ**

Учебное пособие



---

МОСКВА – 2025

УДК 004.8+51(072)  
ББК 32.18:22.1я721  
Л73



<https://elibrary.ru/akstty>

Рецензент:

*Е.А. Иванова* – канд. физ.-мат. наук, доцент МПГУ

**Локшин, Александр Александрович.**

Л73     **О природе понимания : учебное пособие / А.А. Локшин.** – М.: МАКС Пресс, 2025. – 48 с. : ил.  
ISBN 978-5-317-07431-9  
<https://doi.org/10.29003/m4722.978-5-317-07431-9>

В пособии рассматриваются различные подходы к определению того, что представляет собой «понимание», в основном на примерах из курса математики для начальной и средней школы. Обнаружена тесная связь проблемы понимания сюжетно-текстовой математической задачи с объемом рабочей памяти человека. Обсуждаются проблемы, которые может привести в образовательный процесс использование искусственного интеллекта.

Адресовано студентам педвузов, будущим преподавателям математики в начальной и средней школе.

*Ключевые слова:* понимание, искусственный интеллект, свободная воля, субъектность, текстовая задача, визуализация, геометрическое моделирование, алгебраическое моделирование.

УДК 004.8+51(072)  
ББК 32.18:22.1я721

Reviewer:

*E.A. Ivanova*, Ph.D. physics and mathematics Sciences, Associate Professor,  
Moscow State Pedagogical University

**A.A. Lokshin**

**On the nature of understanding:** manual. – Moscow: MAKS Press, 2025. – 48 p.: ill.  
ISBN 978-5-317-07431-9  
<https://doi.org/10.29003/m4722.978-5-317-07431-9>

The manual examines various approaches to defining what constitutes “understanding”, mainly using examples from the mathematical course for primary and secondary schools. A close connection is found between the problem of understanding a plot-text mathematical problem and the volume of human working memory. The problems that the use of Artificial Intelligence can bring to the educational process are also discussed.

Addressed to students of pedagogical universities, future teachers of mathematics at primary and secondary schools.

*Keywords:* Understanding, Artificial Intelligence, free will, subjectivity, text problem, visualization, geometric modeling, algebraic modeling

**ISBN 978-5-317-07431-9**

© Локшин А.А., 2025

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2025

## Содержание

Предисловие.....	4
§ 1. Понимание: локальность и субъективность.....	6
§ 2. Понимание и моделирование при изучении математики в начальной школе.....	10
§ 3. Пещера Али-Бабы и Переправа. Таинственная роль симметрии.....	19
§ 4. Лягушата — веселые и грустные .....	27
§ 5. Сказочные животные .....	31
§ 6. Лучшие и худшие ученики .....	35
§ 7. Задача, в которой невозможно моделирование .....	38
§ 8. Странные мышки и птички .....	40
§ 9. Заключительные замечания.....	45

## Предисловие

Эта маленькая книжка составлена из статей (некоторые из них были написаны автором совместно с коллегами), посвященных *проблеме понимания*. На мой взгляд, дать точное и окончательное определение *пониманию* невозможно, это понятие представляется мне столь же основополагающим и неопределимым, как *сознание, свободная воля, жизнь*.

Тем не менее, подобраться к «пониманию» в какой-то мере возможно и даже необходимо, особенно в эпоху победоносного наступления Искусственного Интеллекта.

Википедия дает следующее определение пониманию:

*Понимáние — универсальная операция мышления, связанная с усвоением нового содержания, включением его в систему устоявшихся идей и представлений.*

Определение это кажется мне не слишком удачным, т.к. в нем не подчеркнут тот факт, что без субъектности (наличия собственного «Я») не может быть речи о понимании.

Более удачным представляется определение, данное акад. В.Д. Шадриковым:

*Понимание — есть факт нашей психической жизни, который обозначает, что что-то из того, что мы знаем, мы и понимаем, т.е. знаем, для чего это знание можно использовать, какой личностный смысл это знание имеет для нас.*

Определение, которое будет дано ниже (см., в частности, параграф 2) близко к определению Шадрикова, но не тождественно ему.

На мой взгляд, исследовать особенности понимания весьма удобно, анализируя восприятие детьми математического материала в начальной школе. Элементарная математика хороша для этой цели прежде всего потому, что материал ее прост (хотя и фундаментален) и не допускает множественных расплывчатых толкований (в отличие от истолкований литературных произведений).

Именно пониманию детьми (а также взрослыми) математических текстов в основном и посвящена эта книжка. Автор признателен Е.А. Ивановой и О.В. Бахтиной за полезные обсуждения.

*Автор,  
Москва, август, 2025*

## § 1. Понимание: локальность и субъективность [2]

Эта заметка навеяна результатами работы [1] и посвящена различным аспектам понятия «понимание» (прошу прощения за тавтологию!).

Откуда же оно берется, это самое *понимание*, где его корни, где его слабые места?

В своей превосходной (в целом) книге «Апология математики» на стр. 393 известный логик В.А. Успенский пишет: «...Эти понятия, устанавливаемые не из словесного определения, а из непосредственного личного опыта, естественно назвать *первичными понятиями*, или *категориями*, математики. К числу таких категорий относятся, например, понятия точки, прямой, множества, натурального числа» (конец цитаты). А вот и нет! Как показали недавно проведенные биологами опыты над новорожденными крысятами, у них имеется врожденное представление о точке и о направлении. Уверен, что это относится и к человеку в полной мере. Точно так же у человека имеется врожденное представление о численности небольших множеств (проявляется как *субитайзинг* — мгновенное определение числа объектов, без пересчета).

Вот дополнительное соображение в пользу выводов, сделанных биологами — для того, чтобы сформировать на основе жизненного опыта представление о нашем мире, как о мире Евклидовой геометрии, человеческим чувствам необходимо было за что-то зацепиться, за какие-то врожденные представления. Вот — точка, направление — это как раз то, за что можно зацепиться, вырабатывая у себя

в результате опыта ощущение расстояния и пространственного континуума.

(Насколько я понимаю, в вышеупомянутых опытах речь идет о направлении, соединяющем две произвольные точки.)

Итак, я буду исходить из того, что представления о точке и о направлении являются для человека врожденными. (Думаю, что врожденным для человека является также представление о непрерывности.)

Тогда перестает казаться удивительным, что в начальной школе дети прекрасно усваивают такое труднейшее геометрическое понятие как «точка».

Учитель просто-напросто говорит:

– Дети! Представьте себе маленький шарик, который все время уменьшается, и в конце концов исчезает. Вот то место, где он исчезает, и есть точка. (Сообщено автору Н.Ю. Лукановой.)

И дети все прекрасно понимают.

**Замечание.** Это кажется совершенно невероятным, но, по-видимому, является научно установленным фактом: *«задолго до того, как они [младенцы] произносят первые слова, они манипулируют вероятностями и объединяют их в сложные силлогизмы. Их чувство вероятности позволяет им делать логические выводы из наблюдений. Они постоянно экспериментируют, а их мозг — как и мозг всякого ученого — непрерывно аккумулирует результаты этих экспериментов»* (см. [3].)

Обладание врожденными представлениями о точке и о направлении делает для каждого человека естественным (понятным) и такое ключевое для математики понятие как «множество». Ставим точку на один объект,

потом точку на другой объект, на третий, ... И соединяем себя с каждой такой точкой лучом (направлением). Это позволяет не терять объекты из виду и говорить об их совокупности, как о множестве.

Кстати, любопытно, что это исключительно трудное, не определяемое и фундаментальное для математики понятие дети в начальной школе усваивают без проблем.

Но сообщает ли учитель ученикам истину, рассказывая о точке? Вот это большой вопрос — физики утверждают, что о сверхмалых расстояниях (меньших *планковской длины*) говорить вообще нет смысла. Значит, нет и возможности стремиться к нулю радиус уменьшающегося шарика...

Так что «понимание», возникающее у учеников, представляет собой *выраженное согласие с врожденным представлением* об окружающем мире, но вовсе не с истинным положением вещей.

В то же время квантовые эффекты (например, прохождение одного электрона одновременно через две щели сразу) — абсолютно непонятны любому здравомыслящему человеку. Как сказал кто-то из великих: *квантовую механику невозможно понять, ее можно только полюбить*.

Начиная более пристально вглядываться в природу «понимания», обнаруживаешь различные его градации и типы.

Например, если я понял одну за другой 27 лемм, из которых вытекает какая-нибудь фундаментальная математическая теорема, это еще не значит, что я понял саму теорему. (Я даже смогу ею воспользоваться при случае, но понимания от этого не прибавится.) Таким образом, здесь может идти речь о *локальном* и *интегральном* понимании.



Вот, что я еще хотел бы добавить по этому поводу. Трудных лемм было слишком много. Конечно, я мог бы их вызубрить наизусть, но охватить их все единым мысленным взором все равно был бы не в состоянии. Для достижения понимания мне (похоже на то) нужно было бы самому разбить эти 27 лемм на 3 большие части, которые я уже смог бы (не вникая в подробности) разместить в своей рабочей памяти.

При прочтении художественного текста этот эффект проявляется, может быть, даже более ярко.

Один реально существующий человек (это мне доподлинно известно) как-то раз прочел рассказ «И грянул гром» Рэя Брэдбери, понял там каждую фразу в отдельности, но рассказа в целом не понял совершенно. (Брэдбери не разжевывает читателю суть рассказа, до нее нужно самостоятельно догадаться.)

Таким образом, мы можем говорить о «пространственной» иерархии пониманий — от локального понимания к интегральному.

В этой связи известный физик, проф. Э. Бормашенко заметил, что существует и временная иерархия. Прочтя «Преступление и наказание» в молодости, можно его понять, но затем, перечитав спустя несколько лет — тоже понять, но уже совершенно по-другому. Т.е. понимание художественного текста оказывается еще и *субъективным*, в отличие от понимания текста не художественного.

### Литература

[1] Бормашенко Э. Истинное и понятное // Семь искусств, № 7, 2023.

[2] Локшин А.А. Понимание: локальность, субъективность, двойственность // «Семь искусств», 2024, №1-2.

[3] Деан С. Как мы учимся. — М.: Эксмо, 2021. — 352 с.

## § 2. Понимание и моделирование при изучении математики в начальной школе [4], [6]

Мы будем исходить из того, что:

*Понимание — это приобретение чего-либо (нематериального) человеческим «Я».*

Возникает, однако вопрос, каким образом может происходить это приобретение? На наш взгляд, такое приобретение обычно осуществляется за один или несколько *интуитивно понятных* шагов. Речь ни в коем случае не идет о формальных правилах вывода из системы каких-нибудь аксиом, а именно об интуитивно понятных действиях.

Заметим далее, что, как известно, среднему человеку удастся одновременно оперировать не более, чем с тремя-четырьмя объектами.

Очевидно, однако, что одновременно оперировать с двумя объектами намного проще, чем с тремя-четырьмя. Геометрическое моделирование обеспечивает нам во многих случаях именно такую возможность. Результат, полученный после (не вызывающего сомнений в своей допустимости) оперирования с двумя объектами, оказывается *понятным*.

Рассмотрим, например, такую задачу (см. [3]).

**Задача 1.** *Веселых зайцев в Зоопарке столько же сколько невеселых волков.*

*1) Кого в Зоопарке больше: волков или веселых зверей?*

2) Кого в Зоопарке больше: зайцев или невеселых зверей?

3) Кого в Зоопарке больше: зайцев или веселых зверей?

(Никаких других животных, кроме волков и зайцев в Зоопарке нет.)

**Ответ:** 1) и 2) Одинаковое количество. 3) Чтобы ответить на этот вопрос данных задачи недостаточно.

Педагогический опыт говорит о том, что эта простая задача вызывает у многих учеников затруднения, до тех пор, пока они не воспользуются графической моделью «в отрезках». При опоре на такую модель, ответ оказывается очевидным.

Отчего так происходит? Видимо, суть в том, что, решая данную задачу без опоры на графическую модель, мы вынуждены одновременно оперировать с четырьмя объектами: множеством веселых зайцев, множеством всех зайцев, множеством невеселых волков, множеством всех волков. Это далеко не просто — удерживать в рабочей памяти четыре таких множества, не имеющих к тому же четкого зрительного образа.

При моделировании «в отрезках» естественно использовать следующую картинку (см. рис. 2.1):

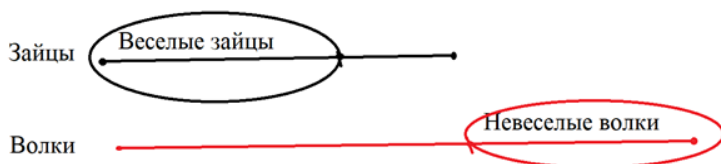


Рис. 2.1

Теперь, чтобы решить задачу, достаточно оперировать только с двумя четко очерченными объектами — «Веселыми зайцами» и «Невеселыми волками». Остальные два объекта — «множество всех зайцев» и «множество всех волков» — фиксированы, с ними не нужно производить никаких действий.

Предыдущую задачу можно сделать еще более «нерешаемой» без зрительной опоры на графическую модель:

**Задача 1'.** *Веселых зайцев в Зоопарке меньше, чем невеселых волков.*

1) Кого в Зоопарке больше: волков или веселых зверей?  
2) Кого в Зоопарке больше: зайцев или невеселых зверей?

3) Кого в Зоопарке больше: зайцев или веселых зверей?  
(Никаких других животных, кроме волков и зайцев в Зоопарке нет.)

Рассмотрим теперь еще одну задачу из элементарного курса логики, в которой геометрическое моделирование также способствует пониманию.

**Задача 2.** Правильная ли форма у следующего рассуждения.

*Все шахматисты — математики*

*Все аквалангисты — водолазы*

*Некоторые водолазы не математики*

*Следовательно,*

*Некоторые шахматисты не аквалангисты*

Попробуйте решить эту задачу, не привлекая себе на помощь никакие (даже мысленные) модельные геометрические образы (типа кругов Эйлера), а только рассуждая

строго логически. Задача окажется весьма трудной, а кому-то может показаться вообще нерешаемой при наложенном ограничении.

В то же время, используя рис. 2.2, на котором упомянутые множества спортсменов изображены в виде овалов и обозначены буквами, легко получаем отрицательный ответ на вопрос задачи.

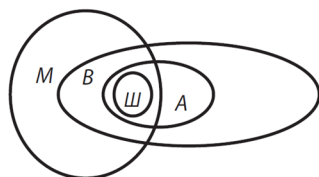


Рис. 2.2

Из рисунка видно, что, не нарушая условий задачи, можно (зрительно!) представить себе ситуацию, когда все шахматисты окажутся аквалангистами.

В чём же дело? Почему задача вдруг стала намного легче? Какова здесь связь с объёмом рабочей памяти человека, позволяющей ему эффективно работать лишь с малым числом объектов?

В данной задаче таких объектов, которые требуют нашего одновременного внимания, всего четыре. Это упомянутые множества шахматистов, математиков, аквалангистов и водолазов. Однако, до того момента, как мы приступили к моделированию, эти множества выглядят расплывчато, каждое из них состоит из неопределенного числа людей. Чтобы избавиться от этой расплывчатости, мы изображаем каждое из упомянутых множеств в виде овала на плоскости. Но это — только полдела.

Как мы только что видели, четыре четко очерченных объекта — это для нашего воображения уже много!

В чём же второй секрет геометрической модели? Почему нашей рабочей памяти работать с ней оказывается так просто? Дело, очевидно, в том, что (см. рис. 2.2) здесь можно работать с четырьмя объектами, как с двумя. А именно, начинаем варьировать положение овала *A*, оставляя остальные овалы и круги неподвижными и рассматривая их как единое целое. Если не удаётся найти опровержение утверждения задачи, начинаем варьировать, например, положение овала *B* (а остальные овалы и круги фиксируем на своих местах и рассматриваем теперь их как единое целое.

Итак, построение геометрической модели для какой-либо задачи не просто позволяет выявить связи между объектами, но даёт возможность манипулировать каким-то одним (или двумя), временно фиксируя остальные. Это часто позволяет «уместить» в рабочей памяти человеческого мозга такую задачу, которая в исходном виде была бы для рабочей памяти слишком громоздкой. Осознание этой роли моделирования наверняка весьма полезно при решении математических задач.

Вот еще одна задача, для решения которой крайне полезным оказывается геометрическое моделирование.

**Задача 3** (см. [3]). *Рассмотрим дом, целиком заселенный супружескими парами с маленькими детьми. (Никаких взрослых, кроме упомянутых супружеских пар, в доме нет.) Известно, что:*

- 1) бездетных пар в доме нет;*
- 2) у каждого мальчика есть сестра;*
- 3) мальчиков больше, чем девочек.*



Мы видим (!), что в каждой семье обязательно есть хотя бы одна девочка. Поэтому число девочек не меньше половины числа взрослых. А мальчиков (по условию) еще больше, чем девочек. Значит, детей больше, чем взрослых, т.е. отчет был действительно неверен.

Похожая ситуация возникает при решении многих текстовых задач, допускающих геометрическое моделирование. Выделяются один или два объекта из нескольких, и с ними производят необходимые действия (например, сравнение). Если задачу решить не удалось, выделяют какой-то другой объект или пару объектов и с ними производят аналогичные действия. Иными словами, задача фактически решается методом перебора вариантов. При этом окончательное решение задачи и полученный ответ оказываются *понятными* ученику, так как были получены в результате ряда *интуитивно понятных* шагов.

Существуют, однако, ситуации, когда геометрическое моделирование не приводит к успеху, тогда как алгебраическое моделирование (составление уравнений или неравенств) быстро ведет к решению задачи. Но и в этом случае, оперируя с уравнением (неравенством), мы опираемся на возможность *«зрительно заморозить»* некоторые объекты, а манипулировать не более, чем двумя или тремя.

**Задача 4** (см. [5]). *Известно, что доля левшей среди рыжих больше, чем доля левшей среди всех людей. Что больше: доля рыжих среди левшей или доля рыжих среди всех людей?*



Как ни странно, геометрическое моделирование не помогает решить эту задачу. Вообще подступиться к ней не просто: имеется слишком много объектов, взаимосвязь между которыми нужно учитывать одновременно. Необходима *зрительная опора* для решения этой задачи. И такую опору дает теперь именно алгебраический, а не геометрический подход.

Введем обозначения:

$P$  — множество рыжих людей,

$L$  — множество левшей среди людей,

$LP$  — множество левшей среди рыжих,

$PL$  — множество рыжих среди левшей,

$B$  — множество всех людей.

С помощью буквы  $n$  будем обозначать численности соответствующих множеств.

Заметим, что  $LP = PL$  (очевидно!).

Теперь условие задачи запишется в виде:

$$\frac{n(LP)}{n(P)} > \frac{n(L)}{n(B)}. \quad (*)$$

Умножая обе части неравенства (\*) на дробь  $n(P)/n(L)$ , сразу же получаем ответ на вопрос задачи:

$$\frac{n(LP)}{n(L)} > \frac{n(P)}{n(B)}, \quad (**)$$

т.е. доля рыжих среди левшей больше, чем доля рыжих среди всех людей.

**Замечание.** Пожалуй, можно утверждать, что приведенные решения каждой из задач 1–4 достаточно обозримы и подводят ученика к пониманию ситуации в целом, т.е. глобальному (а не только локальному) пониманию.

## Литература

[1] Шадриков В.Д. Мысль и познание. — М.: Логос, 2014. — 280 с.

[2] Макарова К.В. К вопросу о сущности и факторах понимания // Школа будущего. — 2018. — № 6. — С. 116–122.

[3] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

[4] Локшин А.А., Бахтина О.В. Понимание и моделирование в педагогическом процессе // Педагогические технологии, 2024, № 1.

[5] Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. — М.: МЦНМО, 2012. — 207 с.

[6] Локшин А.А., Бахтина О.В., Бахтин М.М. Понимание и моделирование при изучении математики в начальной школе // Тенденции развития науки и образования, 2025, № 122, июнь, часть 5, с. 50–54.

### § 3. Пещера Али-Бабы и Переправа. Таинственная роль симметрии [2], [4]

Напомним читателю о том, чем отличается локальное понимание решения от глобального (интегрального). При локальном понимании решение представляется в виде серии интуитивно понятных шагов, приводящих к ответу на вопрос задачи, но охватить все решение в целом единым взглядом не удастся. (Остается без ответа вопрос: *почему* предпринятые действия в результате привели к успеху?)

Рассмотрим важный пример, когда локального понимания достичь сравнительно легко, а интегрального — значительно труднее.

**Задача 1** (взята из интернета). *Перед пещерой Али-Бабы стоит бочка с четырьмя отверстиями, расположенными на равных расстояниях друг от друга в верхней крышке. В каждое из этих отверстий можно просунуть руку и обнаружить там следку, висящую либо хвостом вверх, либо головой вверх. Если все 4 следки смотрят одновременно в одну сторону, пещера сразу же открывается. Аладдин может засовывать в любые два отверстия сразу обе руки и переворачивать (либо не переворачивать) каждую из попавшихся ему следок. После того, как Аладдин вынимает руки из отверстий, бочка начинает бешено вращаться, так что становится невозможно определить, в какие именно отверстия он засовывал свои руки. Как должен действовать Аладдин, чтобы наверняка попасть в пещеру?*

Решение этой задачи хорошо известно, и схематично представлено на рис. 3.1.

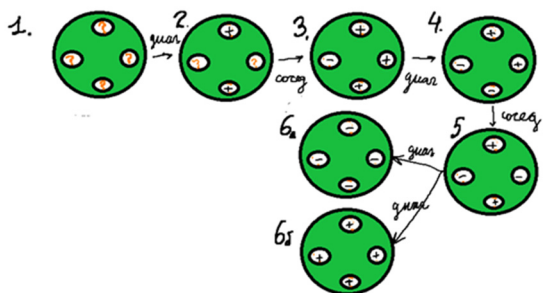


Рис. 3.1. Решение задачи про пещеру Али Бабы.

Шаги алгоритма пронумерованы. Минусами обозначены положения селедок хвостом вверх; плюсами — положения селедок головой вверх

Здесь отметим лишь, что Аладдину необходимо чередовать опускание своих рук в соседние дырки (на рис. 3.1 такой шаг обозначен как «сосед») с опусканием рук в диаметрально противоположные дырки (на рис. 3.1 использована пометка «диаг»). В результате задача решается не более, чем за 6 шагов. Упомянутое чередование представляется вполне логичным. Действительно, два раза подряд опускать руки одним и тем же способом, очевидно, бессмысленно — всегда есть вероятность встретить ту же пару селедок, которые попались раньше. При этом фактически я решал эту задачу методом проб и ошибок. Интегрального понимания — почему задачу вообще удалось решить и какую роль играла в найденном решении внешне образующаяся симметрия — достичь не смог.

**Замечание.** Из курса биологии известно, что макаки (и другие низшие обезьяны), решая предложенные им интеллектуальные задачи, как правило, достигают успеха в результате длительной серии беспорядочных действий. По сути — случайно.

В то же время умные шимпанзе демонстрируют совершенно иной образ действий — сидят, обхватив голову лапами, и думают. Затем, не производя никаких лишних действий, решают интеллектуальную задачу. Например, ставят один ящик на другой, чтобы дотянуться до банана, или составляют из двух коротких палок одну длинную — и получившейся длинной палкой сбивают банан, и т.д.

Как это ни обидно для нас, людей, но человек, решающий трудную задачу (например, задачу о пещере Али-Бабы), обычно действует именно методом хаотичного перебора.

Следующая задача также взята из интернета, где она была в свое время реализована в виде головоломки online:  
[http://online-igra.com.ua/IQ-challenge-animal-cross\\_YHjFE4i](http://online-igra.com.ua/IQ-challenge-animal-cross_YHjFE4i)  
<http://www.willinggames.com/kids-games/kids-595.html>

Здесь приводится **усиленная** (по сравнению с упомянутой выше головоломкой online) формулировка рассматриваемой задачи.

**Задача 2** (см. [4]). *На другой берег реки хотят переправиться шесть зверей: Мамонт с мамонтенком, Лев с львенком и Тигр с тигренком. Лодка вмещает только двоих, грести умеют Лев, Тигр и, кроме того, мамонтенок. Ни одного маленького звереныша нельзя оставлять без его собственного родителя в компании взрослого зверя другой породы. Как организовать переправу?*

**Решение.** Будем обозначать зверей соответствующими начальными буквами, заглавными для взрослых зверей и строчными для зверят.

Тогда начальное положение, описанное в условии задачи можно условно изобразить так:

Левый берег

Правый берег

1) М, м; Л, л; Т, т; <лодка> |||

Нетрудно заметить, что вначале нужно переправить на другой берег львенка или тигренка (безразлично, кого — львенок и тигренок входят в условие задачи симметрично). Итак, пусть, для определенности, мамонтенок везет львенка:

2) М; Л; Т, т

||| м; л; <лодка>

После чего мамонтенок, естественно, возвращается (надо же вернуть лодку для перевозки остальных зверей!):

3) М, м; Л; Т, т <лодка> ||| л

Следующие две переправы также очевидны — мамонтенок должен перевезти тигренка и затем вернуться обратно:

4) М; Л ; Т

||| м; л; т; <лодка>

5) М, м; Л; Т; <лодка> ||| л; т

Далее, единственный естественным образом напрашивающийся шаг — это переезд Льва и Тигра к своим детенышам:

6) М, м

||| Л, л; Т, т ;<лодка>

Теперь, наконец, задача становится трудной. Единственная возможность как-то изменить ситуацию, не допуская повторения ходов — это перевести Льва и львенка (или Тигра с тигренком) обратно, но при этом мы как будто не приближаемся к цели, а удаляемся от нее! Итак,

7) М, м; Л, л; <лодка>

||| Т, т

Что же делать дальше? Снова единственная возможность избежать повторения ходов — это перевести Ма-монта с мамонтенком на правый берег. Но не тупик ли это? Ситуация

-7) Л, л

||| М, м; Т, т; <лодка>

на первый взгляд не внушает оптимизма — решение, вроде бы, не просматривается... (И это легко объяснить — до окончательного решения задачи еще шесть ходов.) И тут на помощь приходит математика!

Действительно, Лев с львенком и Тигр с тигренком входят в нашу задачу равноправно. Поэтому расположения 7) и -7) можно считать симметричными относительно реки. Но это значит, что, повторяя (в обратном порядке) предыдущие ходы с заменой Л, л на Т, т, мы придем к расположению зверей, симметричному по отношению к расположению 1) относительно реки, т.е. решим задачу.

Действительно, вот эти ходы:

-6) Л, л; Т, т; <лодка>

||| М, м

-5) л; т

||| М, м; Л; Т; <лодка>

-4) м; л; т; <лодка>

||| М; Л; Т

-3) л

||| М, м; Л; Т, т; <лодка>

-2) м; л; <лодка>

||| М; Л; Т, т

-1)

||| М, м; Л, л; Т, т; <лодка>

Задача решена.

**Замечание.** Начиная с хода -3) можно было бы заканчивать переправу зверей по-другому. За львенком мог бы поехать не мамонтенок, а Лев.

**Замечание.** Так как задачу 2 все-таки удалось решить, то можно с уверенностью сказать, что локальное понимание задачи достигнуто. Однако с глобальным пониманием дело обстоит несколько хуже (хотя и не так плохо, как в случае задачи 1). Глядя на формулировку задачи 2, я не могу сказать, разрешима ли она. Иными словами, я не могу сослаться на какой-то общий принцип, который позволил бы мне сразу утверждать — эта задача относится к классу разрешимых. Такой принцип мне неизвестен. Тем не менее, проблеск интегрального понимания задачи все же присутствует — это обнаруженная возможность использования симметрии.

**Замечание.** Некоторый общий взгляд на задачи 1 и 2 существует и заключается он в следующем. Количество возможных неповторяющихся комбинаций ходов в каждой из этих задач конечно. Перепробовав их все, мы наверняка узнаем, разрешима ли задача.

Следующая задача может показаться столь же трудной и «непрозрачной», как и две предыдущие. Однако она, как мы сейчас увидим, не просто легче, но еще и почти допускает глобальное понимание ситуации.

**Задача 3.** *На берегу реки расположены три кувшина, емкостями соответственно в 15 л, 12 л и 10 л. Требуется с помощью этих кувшинов точно отмерить 1 литр воды.*

**Решение.** Сначала с помощью двух больших кувшинов отмеряем 3 л воды и переливаем (из самого большого кувшина) эти 3 л в самый маленький кувшин. Из среднего кувшина воду выливаем в реку. Затем повторяем упомянутые выше шаги еще два раза. В результате в маленьком кувшине оказывается 9 л воды; из двух больших кув-



шинов воду выливаем. Теперь мы подошли к решающему моменту в наших переливаниях. Наполняем средний кувшин доверху и выливаем из него 1 л в самый маленький кувшин, в котором оставалось пустое место как раз объемом в 1 л (см. рис. 3.2).

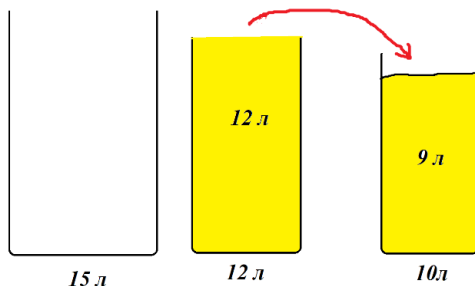


Рис. 3.2

Наконец, из полностью заполненного маленького кувшина выливаем всю воду и замечаем, что в среднем кувшине осталось 11 л воды. Переливаем 10 л из среднего кувшина в маленький, тогда в среднем кувшине останется ровно 1 л воды. Задача решена.

Почему эта задача, в отличие от двух предыдущих, — намного более легкая? Все дело в том, что, начиная наши переливания, мы могли быть *почти* уверены, что наши действия в конце концов приведут к успеху. Этот успех нам почти гарантировала математическая теорема, которая (применительно к случаю трех натуральных слагаемых) имеет вид:

**Теорема 3.1.** Если три натуральных числа  $A$ ,  $B$ ,  $C$  взаимно просты в совокупности (т.е. у этих чисел не существует общего для них всех множителя, отличного от 1), то найдутся такие целые коэффициенты  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , что

$$pA + qB + rC = 1. \quad (*)$$

Эта теорема почти обеспечивает нам общее, глобальное понимание ситуации, мы не удивлены, что задачу 3 удалось решить; в этом ее отличие от задач 1 и 2.

И все же, почему в этой задаче глобальное понимание обеспечено нам теоремой 3.1 всего лишь «почти»?

Дело здесь в следующем. Пусть, например, в  $(*)$

$$p > 0, q > 0, r < 0. \quad (**)$$

Наличие трех сосудов с емкостями (в литрах)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  еще не дает нам возможности  $p$  раз подряд набрать  $A$  литров воды, затем  $q$  раз набрать  $B$  литров воды, после чего вылить  $r$  раз  $C$  литров воды. Мы вынуждены маневрировать, чтобы оставаться в рамках условия задачи. Если бы нам в условии был дополнительно предоставлен четвертый сосуд неограниченной вместимости, то тогда все перечисленные процедуры были бы, очевидно, осуществимы; при этом требуемый 1 литр оставался бы в результате именно в этом четвертом сосуде.

### Литература

[1] Макарова К.В. К вопросу о сущности и факторах понимания // Школа будущего. — 2018. — № 6. — С. 116–122.

[2] Локшин А.А., Лаврова Н.Н. О понимании детьми математических текстов // Тенденции развития науки и образования, 2024, № 1, с. 32–36.

[3] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

[4] Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 3. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 124 с.

## § 4. Лягушата — веселые и грустные

В этом параграфе мы разберем решение одной известной олимпиадной задачи (для 3–4 классов), сопоставив два разных способа визуализации ее условий.

**Задача о лягушатах** (см. [1, с. 9] и [2, с. 37]).

*Известно, что:*

- (а) Если лягушонок зеленый, то он веселый.*
- (б) Если лягушонок невеселый, то он сидит на берегу.*
- (с) Все лягушата либо зеленые, либо пестренькие.*
- (д) Если лягушонок пестренький, то он плавает в воде.*

*Верно ли, что тогда обязательно:*

- 1) все лягушата — пестренькие;*
- 2) все лягушата плавают в воде;*
- 3) все лягушата — веселые;*
- 4) все лягушата — невеселые;*
- 5) все веселые лягушата — зеленые?*

**Замечание.** Вчитываясь в условие задачи, мы обнаруживаем, что лягушата могут находиться в воде и на берегу, а о том, что они могут обнаружиться где-то еще (например, в Зоопарке, в лаборатории и т.д.), ничего не сказано. Это неслучайно. Ученик, опираясь на здравый смысл, должен сам догадаться (понять!) что никаких других вариантов, кроме как «в воде» и «на берегу» для сказочных лягушат не предусмотрено.

**Решение № 1.** Условие задачи состоит из четырех пунктов и выглядит довольно-таки громоздким. Поэтому справиться с задачей без подходящей визуализации было бы весьма непросто. Заметим теперь, что, в сущности, мы

имеем дело с классификацией объектов (лягушат) по трем свойствам:

- А) веселый/невеселый;
- В) зеленый/не зеленый;
- С) в воде/не в воде.

Нам остается только разместить на плоскости «в общем положении» три круга Эйлера, затем, пользуясь условиями (а) – (d), произвести штриховку (или заливку краской) соответствующих областей и обнаружить, что все существующие сказочные лягушата обязательно веселые, т.е. справедливо утверждение № 3. Утверждения №№ 1, 2, 4 и 5, вообще говоря, неверны — это также можно увидеть (!) на рис. 4.1.

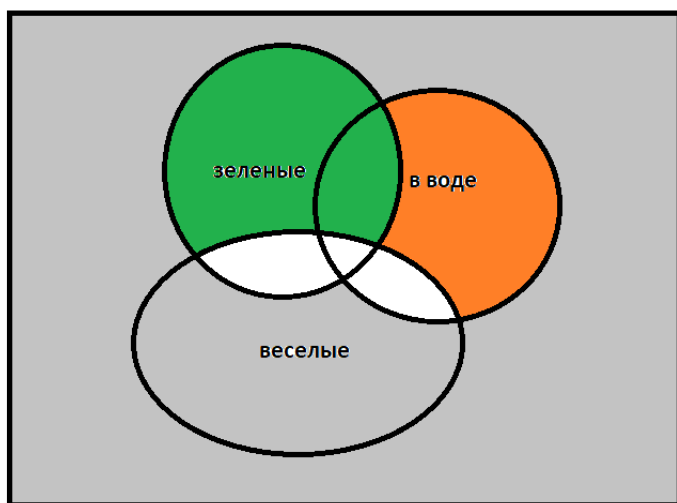


Рис. 4.1

$U$

На рис. 4.1  $U$  — это универсальное множество, состоящее из всех потенциально возможных сказочных лягушат. Как же последовательно строилось изображение на

рис. 4.1? Прежде всего, зеленым цветом были покрашены те лягушата, существование которых *противоречит* условию (a). Затем розовым цветом были покрашены те лягушата, существование которых *противоречит* условию (b) (невеселый лягушонок не может находиться в воде). Наконец, серым цветом были покрашены лягушата, существование которых *противоречит* условию (d) (если лягушонок не зеленый, то он не может находиться не в воде). В результате не покрашенной на рис. 4.1. осталась область, состоящая только из лягушат, существование которых не противоречит условиям задачи. Все эти лягушата, как видно из рисунка, — веселые.

**Замечание.** Итак, визуализация с помощью кругов Эйлера, помогла нам решить задачу, не особенно задумываясь. Каждый отдельно взятый шаг раскраски рисунка был совершенно понятен, и нам *приходится* считать, что окончательный ответ в задаче именно такой, к которому мы пришли. Иными словами, предложенный способ решения позволяет достичь локального понимания задачи, но не глобального.

**Решение № 2.** Визуализация «в отрезках» представляет собой более мощное (но обладающее более узкой областью применимости) математическое орудие, чем визуализация при помощи кругов Эйлера. Однако к задаче о лягушатах метод визуализации «в отрезках», к счастью, удастся применить, хотя и несколько необычным способом (см. рис. 4.2).

В результате решение удастся охватить «единым взглядом» и достичь не только локального, но и интегрального (глобального) понимания.

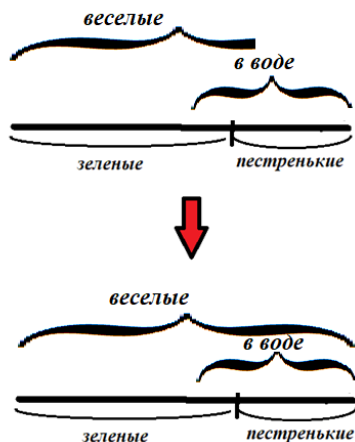


Рис. 4.2

**Замечание.** В [1] на с. 37 приведено чисто логическое решение этой задачи, не опирающееся на зрительные образы. Однако приведенное там решение является неполным, т.к. не позволяет получить ответ на вопросы №№ 1, 2, 4 и 5.

### Литература

- [1] Из сумки «Кенгуру», вып. 2. — СПб., 2014. — 76 с.
- [2] Босова Л.Л., Босова А.Ю., Коломенская Ю.Г. Занимательные задачи по информатике. — М.: БИНОМ, 2014. — 152 с.

## § 5. Сказочные животные [2]

Похоже, что визуализация (геометрическая или алгебраическая) помогает пониманию всегда (или почти всегда). В [2] была предпринята попытка найти текстовую задачу, в которой никакая визуализация не была бы полезна.

**Задача 1** (см. [1], [2]). *Баба-Яга завела себе сказочных животных. Все, кроме двух, — Мудрые Тараканы; все кроме семи, — Волшебные Совы; остальные — Невозмутимые Коты. Сколько всего сказочных животных завела Баба-Яга?*

**Решение № 1 «по вопросам»** (без использования геометрической или алгебраической модели, т.е. без опоры на зрительные образы).

1) Сколько всего сказочных животных, не являющихся Мудрыми Тараканами, завела себе Баба-Яга?

Из условия следует, что таких животных ровно 2.

2) Сколько Волшебных Сов завела себе Баба Яга?

Из предыдущего ответа следует, что у Бабы-Яги проживала ровно одна Волшебная Сова.

3) Сколько Невозмутимых Котов завела себе Баба-Яга?

$2 - 1 = 1$  (Невозмутимый Кот).

4) Сколько Мудрых Тараканов завела себе Баба-Яга?

$7 - 1 = 6$  (Мудрых Тараканов).

5) Сколько всего сказочных животных завела себе Баба-Яга?

$6 + 2 = 8$  (сказочных животных).

*Ответ:* Баба-Яга завела себе 8 сказочных животных.

**Замечание.** Понимание, достигнутое в результате такого решения, является, пожалуй, локальным. Было сделано целых пять (!) логически обоснованных шагов, которые охватить единым мысленным взором нелегко. Нам приходится считать найденный ответ верным, т.к. мы доверяем собственному логическому мышлению.

**Решение № 2** (использующее геометрическую зрительную опору). См. рис. 5.1.

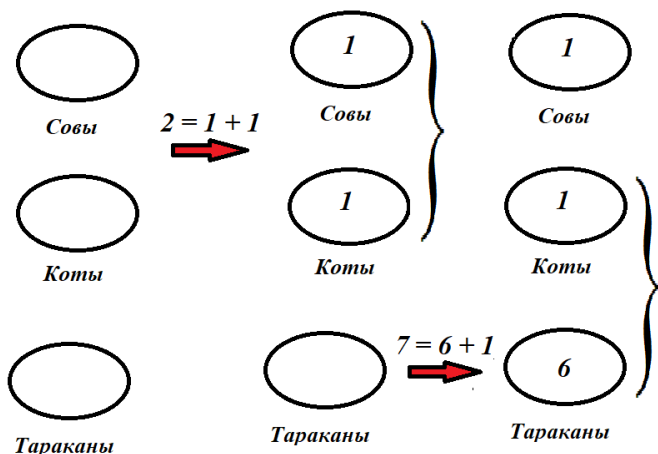


Рис. 5.1

Этот рисунок, очевидно, дает возможность охватить все решение «единым взглядом» и достичь не только локального, но и глобального (интегрального) понимания решения.

**Замечание.** Любопытно, что алгебраический подход к решению этой задачи вызывает дополнительные трудности у слабых учеников (обычно стремящихся все текстовые задачи решать именно алгебраически) и, взятый сам по себе, не слишком способствует пониманию. При



таком подходе все сводится к решению *системы из двух уравнений с тремя неизвестными*, что ставит некоторых учеников в тупик.

Действительно, пусть  $s$  — число Сов,  $k$  — число Котов,  $t$  — число Тараканов. Тогда имеем из условий задачи:

$$s + k + t - 2 = t;$$

$$s + k + t - 7 = s,$$

откуда

$$s + k = 2; \quad (*)$$

$$k + t = 7. \quad (**)$$

Теперь нужно еще сообразить, что *мы ищем решение в натуральных числах*, а на множестве натуральных чисел уравнение  $(*)$  имеет единственное решение:

$$s = 1, k = 1.$$

Отсюда и из  $(**)$  получаем  $t = 6$ . Тем самым приходим к окончательному ответу:

$$s + k + t = 8.$$

Возможно, что для всеобщего расширения кругозора разбор алгебраического решения (после ознакомления с геометрическим) тоже будет полезен.

**Задача 2.** *Баба-Яга завела себе сказочных животных. Все, кроме трех, — Мудрые Тараканы; все кроме семи, — Волшебные Совы; остальные — Невозмутимые Коты и Летучие Мыши. Сколько всего сказочных животных завела Баба-Яга?*

**Решение.** См. рис. 5.2.

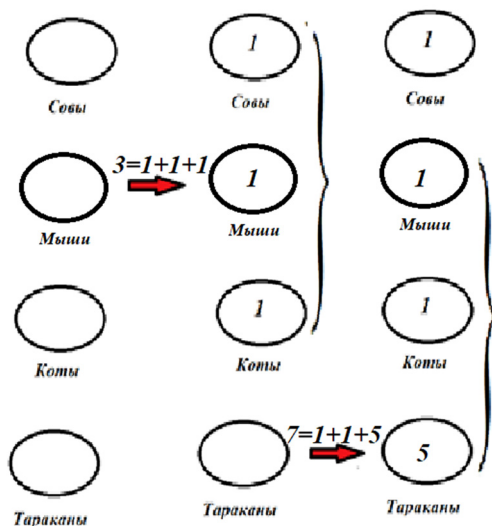


Рис. 5.2

### Литература

[1] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

[2] Локшин А.А. Лаврова Н.Н. Три подхода к решению текстовых (сюжетных) задач // Тенденции развития науки и образования, 2024, № 108 (февраль, ч. 1), с. 174–178.

## § 6. Лучшие и худшие ученики

Сейчас, разбирая одну не совсем стандартную задачу, мы снова увидим, что от способа визуализации данных зависит глубина понимания найденного решения задачи. Итак,

**Задача** (см. [1]). *Из всех учеников школы только Маша, Паша и Вася не входят одновременно в состав 40 лучших учеников и 39 худших учеников. Сколько всего учеников в школе?*

**Решение № 1.** Пусть  $A$  — множество из сорока лучших учеников,  $B$  — множество из 39 худших учеников. Мы будем использовать букву  $n$  для обозначения численности множеств. Таким образом:

$$n(A) = 40; \quad n(B) = 39. \quad (*)$$

**Замечание.** Объединение  $A \cup B$  представляет собой множество *всех* учеников школы. Никаких «средних» учеников, не входящих ни в  $A$ , ни в  $B$ , существовать не может. Действительно, из условия ясно, что пересечение множеств  $A$  и  $B$  непусто (см. рис. 6.1), откуда и следует сделанное утверждение.

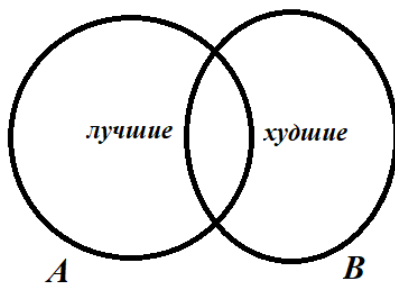


Рис. 6.1

Таким образом, нас интересует именно численность множества  $A \cup B$ .

По формуле включений и исключений имеем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

откуда с учетом (\*) получаем

$$n(A \cup B) = 79 - n(A \cap B). \quad (**)$$

Далее, из условия задачи ясно, что

$$n(A \cup B) = 3 + n(A \cap B). \quad (***)$$

Складывая соотношения (\*\*) и (\*\*\*), легко получаем ответ:

$$n(A \cup B) = (79 + 3)/2 = 41. \quad (****)$$

**Ответ:** всего в школе 41 ученик.

**Замечание.** Достигнутое нами понимание — чисто локальное. Каждый шаг приведенного решения логичен, поэтому *приходится* верить, что полученный результат — правильный. Смущает, однако, следующее обстоятельство. Если добавить к Маше, Паше и Васе еще Катю, то вместо (\*\*\*\*) получим странное соотношение:

$$n(A \cup B) = (79 + 4)/2 = 41,5.$$

Как такое может быть?

**Решение № 2.** См. рис. 6.2.

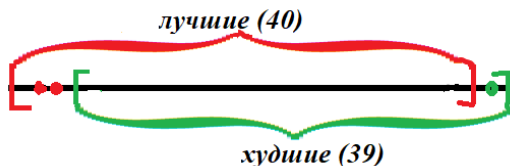


Рис. 6.2

Решение, представленное на рис. 6.2, дает нам возможность охватить всю ситуацию в целом; при этом становится понятно, что добавлять к Маше, Паше и Васе новых учеников, не входящих в пересечение множеств  $A$  и  $B$ , можно только парами, поэтому парадокс, приведенный после решения № 1, получает свое объяснение.

### **Литература**

[1] Локшин А.А., Бахтина О.В., Бахтин М.М. Диаграммы Эйлера в элементарной математике. — М.: МАКС Пресс, 2022. — 96 с.

## § 7. Задача, в которой невозможно моделирование

Не так-то просто найти (не относящуюся к чистой логике) сюжетно-текстовую задачу, в которой моделирование (ни геометрическое, ни алгебраическое) не помогает. Говоря о моделировании, я подразумеваю такую переформулировку задачи, при которой происходит отбрасывание большого объема несущественной информации и от условия остается только «костяк», отражающий основную суть.

Изображение живых существ и их множеств в виде треугольников, квадратилов, отрезков или кругов Эйлера, а также в виде букв латинского алфавита и т.д. — все это приемы, которые применяются при моделировании.

Заметим, кстати, что рисунок к задаче из параграфа 3 (задача про пещеру Али-Бабы) уже не очень хочется называть моделью — на нем основной участвующий в задаче объект (бочонок с четырьмя дырками) изображен «в натуральном виде», если смотреть на него сверху. Впрочем, расположение сеledок (вверх и вниз головой) на этом рисунке обозначено плюсами и минусами, так что, скрепя сердце, согласимся считать рис. 3.1 моделью.

В следующей удивительной задаче никакое моделирование (в упомянутом выше смысле) не помогает.

**Задача** (см. [1]). *Даны неправильные чашечные весы (не уравновешенные и с плечами разной длины), мешок с золотым песком и правильная гиря весом в 1 кг. Требуется точно отвесить 1 кг золотого песка.*

**Решение.** См. рис. 7.1.

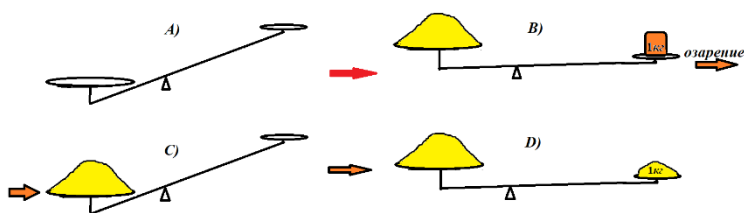


Рис. 7.1

Когда зрительная опора представляет собой модель (в которой ненужная, мешающая информация уже отброшена), решать задачу обычно становится намного легче. Но здесь мы имеем дело не с моделью, а с «натуральным» изображением действий. Как догадаться, что в положении В) гирю нужно просто-напросто убрать и больше ее не использовать? Для этого, несомненно, нужно озарение. Которое в данном случае равносильно интегральному (глобальному) пониманию.

### Литература

[1] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

## § 8. Странные мышки и птички [1]

Цель этого параграфа — разобраться в том, при решении *какого именно* класса сюжетно-текстовых задач алгебраический метод должен в начальной школе уступать место арифметическому методу.

С точки зрения педагога, арифметический метод хорош тем, что он одновременно активизирует и наглядно-образное мышление ученика, и его логику, формируя у детей понимание событий, описываемых в сюжете задачи. Алгебраический метод обычно быстрее ведет к цели, но в значительно меньшей степени нацелен на развитие мышления в широком смысле этого слова.

Решая задачу арифметическим способом, младший школьник, как правило, оперирует именованными числами, что соответствует наиболее развитому у него типу мышления — наглядно-образному.

В то же время решение задач алгебраическим способом обычно (но не всегда!) минимизирует нагрузку на наглядно-образное мышление ребенка, решение текстовой задачи в основном сводится к оперированию символами. Научить ребенка такому оперированию, безусловно, важно. Однако, здесь имеются «подводные камни». Дело в том, что *при решении некоторых задач, у детей происходит утрата понимания смысла производимых ими математических действий, и задача перестает выполнять свою развивающую функцию, превращается в рутинный «пример»*. Рассмотрим в этой связи две задачи, предлагавшиеся третьеклассникам, обучавшимся по системе Л.Г. Петерсон.



**Задача А. Мышка и птичка (игрушечные)** вместе стоят 10 рублей. 5 мышек и 6 птичек стоят 56 рублей. Сколько стоят мышка и птичка по отдельности?

**Решение № 1 (арифметическое)**

1) Сколько комплектов игрушек (мышка плюс птичка) можно составить из 5 мышек и 6 птичек? 5 комплектов.

2) Сколько стоят эти 5 комплектов игрушек?  $5 \cdot 10 = 50$  (руб.).

3) Сколько птичек останется без мышек? Одна.

4) Сколько стоит 1 птичка?  $56 - 50 = 6$  (руб.).

5) Сколько стоит одна мышка?  $10 - 6 = 4$  (руб.).

**Ответ:** мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

**Замечание.** Это решение, безусловно, опирается на наглядно-образное мышление ребенка. Задача легкая, и дополнительная визуализация в виде геометрической модели, на которой мышки и птички изображались бы, например, кружочками и квадратиками, здесь не нужна. Детям вполне достаточно тех мысленных образов, которыми они оперируют, решая задачу «по вопросам».

**Решение № 2 (алгебраическое).** Пусть  $x$  — цена мышки,  $y$  — цена птички. Тогда система из двух уравнений, соответствующая задаче А, должна была бы содержать именованные величины и иметь вид

$$x + y = 10 \text{ (руб.)}, \quad 5x + 6y = 56 \text{ (руб.)} \quad (*)$$

Фактически же, математические преобразования обычно проводят над системой, в которой имена величин опускаются; в данном случае — над системой

$$x + y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \quad (**)$$

Умножая первое уравнение системы (\*\*) на 5 и вычитая его из второго, получаем  $y = 6$ , а затем из первого урав-

нения находим  $x = 4$ . Теперь в ответе имена величин вспоминают:

**Ответ:** мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

Заметим, что действия при решении алгебраической системы (\*), в сущности, те же, что и при решении этой задачи арифметическим способом. Как показывает опыт, дети в состоянии объяснить смысл каждого преобразования в процессе решения системы (\*) на языке наглядных образов. В результате решение, полученное алгебраическим способом, способствует закреплению и упорядочению знаний, служит связующим звеном между наглядно-образным и абстрактным (символьным) мышлением, углубляет интегральное понимание задачи.

Рассмотрим теперь другую известную задачу (см., например, [2]).

**Задача Б.** *Десять мышек и птичек (птички и мышки настоящие, не игрушечные) съели 56 зерен. Каждая мышка съела 5 зерен, а каждая птичка — 6 зерен. Сколько было мышек и сколько птичек?*

**Решение № 1** (арифметическое)

1) Если бы птичек не было совсем, а были только одни мышки, сколько зерен они смогли бы съесть?  $5 \cdot 10 = 50$  (зерен).

2) Сколько осталось бы не съеденных зерен?  $56 - 50 = 6$  (зерен).

3) Сколько мышек нужно превратить в птичек, чтобы все зерна были съедены? 6 мышек превращаем в птичек, которые доедают оставшиеся 6 зерен.

4) Сколько осталось мышек?  $10 - 6 = 4$  (мышки).

**Ответ:** 4 мышки, 6 птичек.

**Замечание.** Итак, мы видим, что у задачи Б существует простое арифметическое решение, успешно приводящее к интегральному пониманию.

Посмотрим теперь, что нам преподнесет алгебраический подход.

**Решение № 2 (алгебраическое).** Пусть  $x$  — число мышек,  $y$  — число птичек. Составляем соответствующую задаче Б систему уравнений, содержащих именованные величины:

$$x + y = 10 \text{ (животных)}, \quad 5x + 6y = 56 \text{ (зерен)}. \quad (***)$$

Опуская имена величин (если говорить более аккуратно — *обезразмеривая* полученные уравнения), приходим к системе

$$x + y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \quad (****)$$

Решая ее, получаем:  $x = 4, y = 6$ .

**Ответ:** 4 мышки, 6 птичек.

Система (\*\*\*\*) формально совпадает с системой (\*\*) и решается тем же способом, что и система (\*\*). Однако дети, решив сначала задачу А алгебраическим способом и дав своему решению правильное истолкование на языке наглядных образов, в принципе не смогут объяснить смысл аналогичных преобразований системы (\*\*\*) (или, что то же самое, системы (\*\*\*\*)). Некоторые говорят так: «Нужно взять пять комплектов животных и вычесть их из 56 зерен...» *Причина затруднений, очевидно, в том, что уравнения системы (\*\*\*), в отличие от системы (\*), содержат величины разных наименований.*

И это значит, что алгебраическое решение задачи Б в лучшем случае приводит нас (и детей, и взрослых) к локальному пониманию. Мы *верим*, что правила алгебры надежны, но математические действия, которые мы производим над урав-

нениями системы (\*\*\*\*) *полностью лишены физического смысла.*

Возникающая здесь ситуация глубоко нетривиальна и требует осмысления. Фактически речь идет о том, что алгебраическая модель задачи обладает свойствами, которые не объяснимы на языке наглядных образов.

Итак, мы с удивлением обнаруживаем, что алгебраический подход к текстовым задачам бывает иногда исключительно полезен для понимания (и даже незаменим), а иногда — скорее вреден, чем полезен.

### **Литература**

[1] Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 3. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 124 с.

[2] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. — М.: МЦНМО, 2004. — 165 с.

## § 9. Заключительные замечания

**9.1.** В этом, совсем маленьком, заключительном параграфе я хочу рассказать о том, насколько важно для учителя (и вообще — любого преподавателя) обладать глобальным пониманием материала, который он излагает ученикам.

Я исхожу из того, что на идеальном уроке должна возникать особая атмосфера, когда весь класс и учитель представляют собой как бы *единое целое*. Для этого учитель должен не просто владеть материалом, но понимать взаимосвязи различных разделов и т.д. Иными словами, должен понимать свой предмет глобально (интегрально).

Недостаточно просто доказать какую-нибудь математическую лемму, важно объяснить, на что она похожа, нельзя ли без нее обойтись, где в ней заключена «изюминка», как этот результат интерпретируется, например, в биологии, и т.д. Все эти дополнительные и необязательные сведения, пояснения и замечания на самом деле крайне важны. Именно благодаря им (этим экскурсам в сторону) у ученика возникает более глубокое понимание предмета. Замечу, кстати, что такого рода устный избыточный материал невозможно в нужном количестве поместить в учебник, т.к. в результате учебник сделался бы попросту нечитабельным.

**9.2.** Вот еще тема, которая как бы сама собой всплыла «по ходу дела». Зрительная опора — она всегда нужна для более полного и глубокого понимания материала любой природы?

Я вспоминаю один давний эпизод (свидетелем которому я был), не имеющий никакого отношения к математике. Мой школьный учитель литературы и истории Анатолий Якобсон сказал как-то раз после урока примерно следующее (передаю смысл): «Если, читая какую-нибудь художественную вещь, вы не видите героев своим мысленным взором, то это значит, что вы еще не научились читать». Дело было, скорее всего, в 1966 году, в 8-м классе.

Этот врезавшийся в мою память эпизод поразительным образом ассоциируется с наблюдением нейробиолога Станисласа Деана, впервые опубликованным в 2020 году:

*«Недавно наша лаборатория получила разрешение на проведение другого смелого эксперимента. Мы хотели увидеть, как именно формируется система для чтения у ребенка. С этой целью каждые два месяца, начиная с окончания детского сада и до окончания первого класса, мы приглашали в наш центр визуализации мозга одних и тех же детей. Результаты превосходили все ожидания. <...> реакция на лица в правом полушарии усиливалась прямо пропорционально скорости чтения»* (см. Деан С. Как мы учимся. — М.: Эксмо, 2021, с. 165).

**9.3.** Еще одна тема, которую я хочу здесь коротко коснуться, — это взаимосвязь понимания, свободы воли и Искусственного Интеллекта.

Мне кажется, что с течением времени соблазн перестать думать самостоятельно, переложив эту обязанность на ИИ, будет только возрастать.

Вот с какой ситуацией мы можем столкнуться в отдаленном гипотетическом будущем: человеческий мозг с младенчества интегрирован с ИИ. В результате само понятие «понимание» делается размытым — невозможно определить, понимает ли человек то, что произносит вслух, или всего лишь воспроизводит сведения, сообщенные ему ИИ (который берет на себя функции атрофированного подсознания).

Можно представить себе и иную ситуацию, когда возможность думать самостоятельно остается за человеком, но для ее реализации требуется усилие свободной воли. Пока что это — темы для фантастических романов, однако будущее наступает с невероятной скоростью...

*Учебное издание*

ЛОКШИН Александр Александрович

## О ПРИРОДЕ ПОНИМАНИЯ

Учебное пособие

*В издании использованы рисунки автора*

Подготовка оригинал-макета:  
*Издательство «МАКС Пресс»*  
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*  
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*  
Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 15.08.2025 г.  
Формат 84х108 1/32. Усл. печ. л. 5,04.  
Тираж 25 экз. Заказ 099.

Издательство ООО «МАКС Пресс».  
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.  
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, эт. 1, пом. 1, ком. 6.3-23Н