



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
БИБЛИОТЕЧКА

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, И. Ц. ГОХБЕРГ

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ  
КОМБИНАТОРНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

---

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, И. Ц. ГОХБЕРГ

# ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1965

517.5  
Б 79  
УДК 513.8

*Владимир Григорьевич Болтянский,  
Израиль Цудикович Гохберг*  
Теоремы и задачи комбинаторной геометрии  
(Серия «Математическая библиотечка»)

М., 1965 г., 108 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *М. Л. Липелис*

---

Сдано в набор 31/VIII 1965 г. Подписано к печати 12/XI 1965 г. Бумага  
№ 106/142. Физ. печ. л. 3,38. Условн. печ. л. 5,54. Уч.-изд. ч. 5,06.  
Тираж 28 000 экз. Т-13772. Цена книги 15 коп. Заказ № 2956.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова  
Главполиграфпрома Государственного комитета  
Совета Министров СССР по печати.  
Москва, Ж-54, Вавокая, 28.

Отпечатано с матриц в гос. тип. «Вайздас».  
г. Вильнюс, ул. Страздялю 1. Заказ № 1258.

2-2-2  
186-15

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В теории выпуклых фигур есть много изящных результатов, вполне доступных пониманию школьников и в то же время представляющих интерес для специалистов-математиков. Некоторые из таких результатов мы и хотим предложить вниманию читателя. Мы расскажем о комбинаторных задачах теории выпуклых фигур, связанных главным образом с разбиением фигур на «меньшие» части.

Теоремы и задачи, излагаемые в книге, вошли в математику совсем недавно: самой старой из них недавно исполнилось 30 лет, а многие из теорем находятся еще в «младенческом» возрасте — они опубликованы в специальных математических журналах за последние 5 лет.

Нам кажется, что основная часть книги будет вполне доступна учащимся старших классов, интересующимся математикой. Материал, который покажется сложным, можно пропустить. Наиболее простыми являются §§ 1—3, 7—10, 12—14, относящиеся к плоским фигурам. Остальные параграфы относятся к пространственным (и даже  $n$ -мерным) фигурам. Для требовательного и подготовленного читателя в конце книги сделано несколько примечаний и указан список журнальных статей и книг. Ссылки на примечания даны в круглых скобках ( ), ссылки на литературу — в квадратных скобках [ ]. В некоторых местах (особенно в примечаниях) изложение ведется на уровне научных статей. Мы не считаем включение такого материала в популярную книгу недопустимым: как нам кажется, популяризация научных знаний возможна не только среди начинающих, но и среди специалистов.

Изложение подводит читателя к современному состоянию рассматриваемых вопросов. В конце книги (§ 19)

сформулированы нерешенные проблемы. Некоторые из них настолько наглядны и так просто формулируются, что размышление над их решением доступно даже способным школьникам.

В заключение — несколько слов о самой «комбинаторной геометрии». Эта новая ветвь геометрии еще не сформировалась окончательно, и потому рано говорить о предмете комбинаторной геометрии. Кроме задач, разбираемых в этой книге, к комбинаторной геометрии, несомненно, относится круг вопросов, связанных с теоремой Хелли (см. главу 2 книги [37]), задачи о расположениях фигур (см. превосходную книгу Фейеша Тота [23]) и ряд других вопросов. Заинтересовавшемуся читателю мы очень рекомендуем также книгу Хадвигера и Дебрунера [29], посвященную задачам комбинаторной геометрии плоскости, и интереснейший обзор Грюнбаума [10], тесно соприкасающийся с содержанием предлагаемой вниманию читателя книги.

Авторы пользуются случаем выразить искреннюю признательность И. М. Яглому, энтузиазм и дружеское участие которого немало содействовали улучшению текста книги.

*В. Г. Болтянский,  
И. Ц. Гохберг*

ГЛАВА I  
РАЗБИЕНИЕ ФИГУР НА ЧАСТИ МЕНЬШЕГО  
ДИАМЕТРА

§ 1. Диаметр фигуры

Предположим, что мы рассматриваем круг диаметра  $d$ . Тогда расстояние между любыми двумя точками  $M$  и  $N$  этого круга (рис. 1) не превосходит  $d$ . В то же время можно найти две точки  $A$  и  $B$  нашего круга, удаленные друг от друга в точности на расстояние  $d$ .

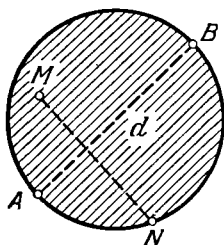


Рис. 1.

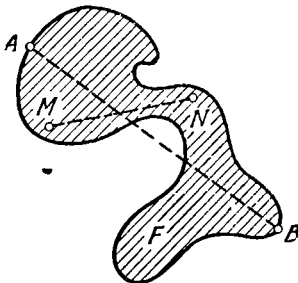


Рис. 2.

Рассмотрим теперь вместо круга какую-либо другую фигуру. Что можно назвать «диаметром» этой фигуры? Сказанное выше наводит на мысль назвать диаметром фигуры *наибольшее* из расстояний между ее точками. Иначе говоря, *диаметром* фигуры  $F$  (рис. 2) мы будем называть такое расстояние  $d$ , что, во-первых, расстояние между любыми двумя точками  $M$  и  $N$  фигуры  $F$  не превосходит  $d$  и, во-вторых, можно отыскать в фигуре  $F$

хотя бы одну пару точек  $A, B$ , расстояние между которыми в точности равно  $d$  (<sup>1</sup>).

Пусть, например, фигура  $F$  представляет собой полуокруг (рис. 3). Обозначим через  $A$  и  $B$  концы ограничивающей его полуокружности. Тогда ясно, что диаметром фи-

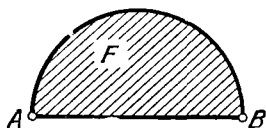


Рис. 3.

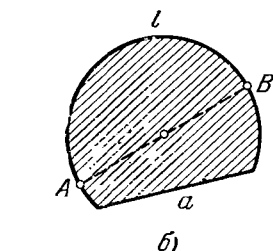
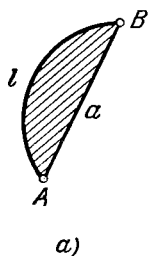


Рис. 4.

гуры  $F$  является длина отрезка  $AB$ . Вообще, если фигура  $F$  представляет собой сегмент круга, ограниченный дугой  $l$  и хордой  $a$ , то в случае, когда дуга  $l$  не превосходит полуокружности (рис. 4, а), диаметр фигуры  $F$  равен  $a$  (т. е. длине хорды), в случае же, когда дуга  $l$  больше

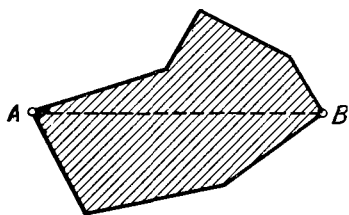


Рис. 5.

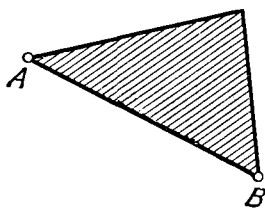


Рис. 6.

полуокружности (рис. 4, б) диаметр фигуры  $F$  совпадает с диаметром всего круга.

Легко понять, что если  $F$  представляет собой многоугольник (рис. 5), то его диаметром является наибольшее из расстояний между вершинами. В частности, диаметр любого треугольника (рис. 6) равен его наибольшей стороне.

Заметим, что если диаметр фигуры  $F$  равен  $d$ , то в фигуре  $F$  может существовать и много пар точек, рас-

стояние между которыми равно  $d$ . Например, в случае эллипса (рис. 7) такая пара точек только одна, в случае

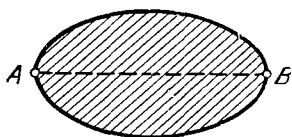


Рис. 7.

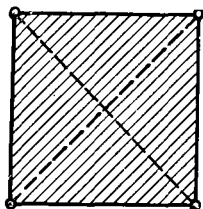


Рис. 8.

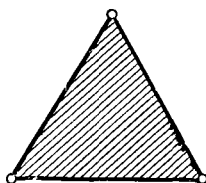


Рис. 9.

квадрата (рис. 8) их две, в случае правильного треугольника (рис. 9) — три, наконец, в случае круга таких пар точек бесконечно много.

## § 2. Постановка задачи

Нетрудно понять, что если круг диаметра  $d$  разрезать некоторой линией  $MN$  на две части, то хотя бы одна из этих частей будет иметь тот же диаметр  $d$ . В самом деле, если  $M'$  — точка, диаметрально противоположная точке  $M$ , то она должна принадлежать какой-нибудь из частей, и эта часть (содержащая точки  $M, M'$ ) будет иметь диаметр  $d$  (рис. 10) (2). Вместе с тем ясно, что круг можно разрезать на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший  $d$  (рис. 11).

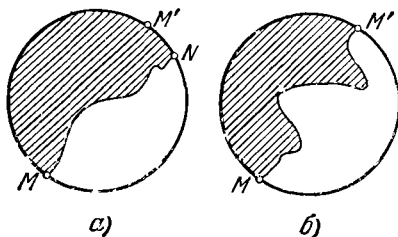


Рис. 10.

Итак, круг диаметра  $d$  нельзя разбить на две части, диаметр каждой из которых будет меньше  $d$ , но можно разбить на три таких части. Тем же свойством обладает равносторонний треугольник со стороной  $d$  (если он разбит на две части, то какая-нибудь из частей должна содержать две вершины треугольника, и диаметр этой части будет равен  $d$ ). Но имеются фигуры, которые можно разбить на две части меньшего диаметра (рис. 12).



Мы можем рассматривать для любой фигуры  $F$  задачу о разбиении ее на части меньшего диаметра  $a$  (\*). Наименьшее число частей, которые для этого потребуются, обозначим через  $a(F)$ . Таким образом, если

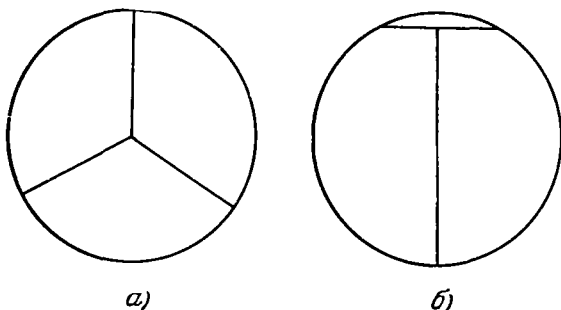


Рис. 11.

$F$  — круг или равносторонний треугольник, то  $a(F) = 3$ , а для эллипса или параллелограмма  $a(F) = 2$ .

Задачу о разбиении фигуры на части меньшего диаметра можно рассматривать не только для плоских фигур, но и для тел, расположенных в пространстве (или даже

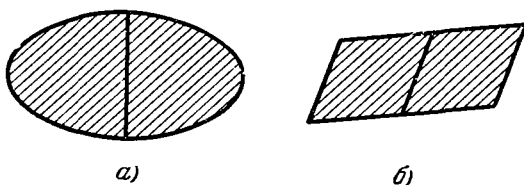


Рис. 12.

в  $n$ -мерном пространстве, если читатель знаком с этим понятием).

Задачу о том, какие значения может принимать  $a(F)$ , поставил в 1933 г. известный польский математик К. Борсук [4]. С тех пор изучению этой задачи посвящались многочисленные научные работы. Изложению полученных здесь результатов и посвящена первая глава этой книги.

Мы рассмотрим сначала случай плоских фигур, затем изложим решение задачи для пространственных тел и, наконец, для подготовленного читателя дадим обзор результатов, полученных для  $n$ -мерного случая.

### § 3. Решение задачи для плоских фигур

Мы уже видели, что для некоторых плоских фигур  $a(F)$  принимает значение 2, а для других — значение 3. Возникает вопрос, нельзя ли найти плоскую фигуру, для которой  $a(F) > 3$ , т. е. такую фигуру, что для разбиения ее на части меньшего диаметра нельзя обойтись тремя частями, а требуется 4 или большее число частей? Оказывается, что на самом деле трех частей всегда достаточно, т. е. имеет место следующая теорема, установленная Борсуком в 1933 г. [4]:

**Теорема 1.** *Всякая плоская фигура  $F$  диаметра  $d$  может быть разбита на три части диаметра  $< d$ , т. е.  $a(F) \leq 3$ .*

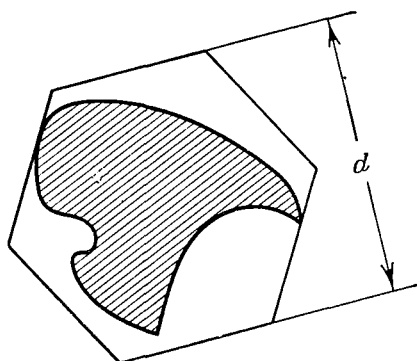


Рис. 13

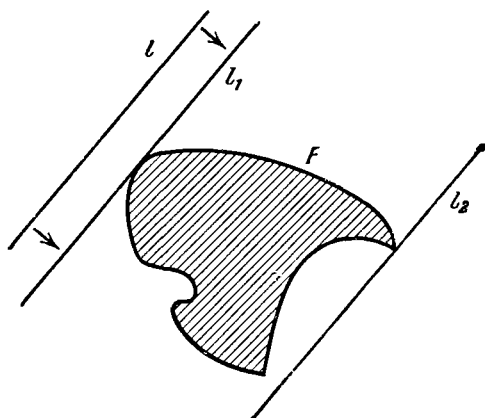


Рис. 14.

**Доказательство.** Основной частью доказательства будет установление следующей леммы, которую в 1920 г. получил венгерский математик Пал [20]: *всякая*

плоская фигура диаметра  $d$  может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между противоположными сторонами равно  $d$  (рис. 13).

Возьмем прямую  $l$ , не пересекающую фигуры  $F$ , и начнем приближать эту прямую к  $F$  (оставляя ее параллельной самой себе) до тех пор, пока перемещающаяся прямая не прикоснется к фигуре  $F$  (рис. 14). Полученная прямая  $l_1$  обладает тем свойством, что она имеет хотя бы одну общую точку с фигурой  $F$  и вся фигура  $F$  расположена по одну сторону от  $l_1$ . Такая прямая называется опорной прямой фигуры  $F$  (\*). Проведем, кроме того, вторую опорную прямую  $l_2$ , параллельную  $l_1$  (рис. 14). Ясно, что вся фигура  $F$  будет находиться в полосе между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  и что расстояние между этими прямыми не превосходит  $d$  (так как диаметр фигуры  $F$  равен  $d$ ).

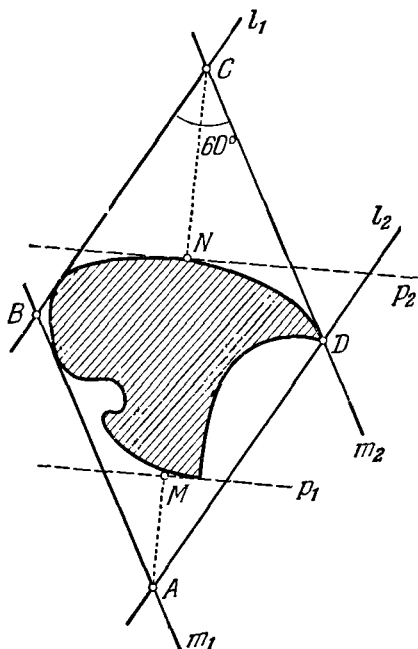


Рис. 15.

Проведем теперь к фигуре  $F$  две параллельные опорные прямые

$m_1, m_2$ , составляющие с  $l_1$  угол  $60^\circ$  (рис. 15). Прямые  $l_1, l_2, m_1, m_2$  образуют параллелограмм  $ABCD$  с углом  $60^\circ$  и высотами, не превосходящими  $d$ , внутри которого целиком заключается фигура  $F$ .

Проведем теперь две опорные прямые  $p_1, p_2$  фигуры  $F$ , составляющие с  $l_1$  угол  $120^\circ$ , и обозначим через  $M$  и  $N$  основания перпендикуляров, опущенных на эти прямые из концов диагонали  $AC$  (рис. 15). Мы покажем, что направление прямой  $l_1$  можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство  $AM = CN$ . В самом деле, допустим, что  $AM \neq CN$  и пусть для определенности  $AM < CN$ .

Таким образом, величина  $y = AM - CN$  отрицательна. Теперь мы начнем непрерывно изменять направление прямой  $l_1$  до тех пор, пока она повернется на  $180^\circ$  (фигуру  $F$  будем оставлять неподвижной). Вместе с прямой  $l_1$  будут менять свое положение и остальные прямые  $l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$  (так как их положение полностью определяется выбором прямой  $l_1$ ). Поэтому при повороте прямой  $l_1$  будут непрерывно перемещаться и точки  $A, C, M, N$  (3), а значит, будет непрерывно изменяться величина  $y = AM - CN$ . Но когда прямая  $l_1$  повернется на  $180^\circ$ , она займет положение, которое раньше занимала прямая  $l_2$ . Поэтому мы получим тот же

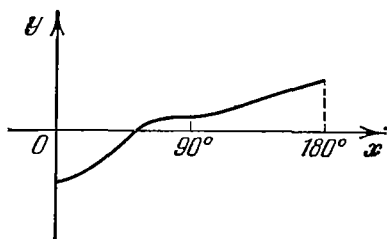


Рис 16

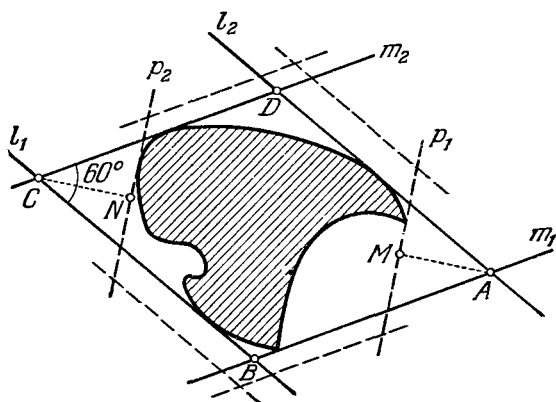


Рис. 17.

параллелограмм, что и на рис. 15, но в нем точки  $A$  и  $C$ , а также  $M$  и  $N$ , поменяются ролями. Следовательно, в этом положении величина  $y$  будет уже положительной. Если мы теперь изобразим график изменения величины  $y$  при повороте прямой  $l_1$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  (рис. 16), то поймем, что найдется положение прямой  $l_1$ , при котором величина  $y$  обращается в нуль, т. е.  $AM = CN$  (ибо, непрерывно изменяясь от отрица-

тельного значения до положительного, величина  $y$  должна в некоторый момент обратиться в нуль). Мы рассмотрим положение всех наших прямых как раз в тот момент времени, когда величина  $y$  обращается в нуль (рис. 17). Из равенства  $AM = CN$  вытекает, что шестиугольник, образованный прямыми  $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$ , центрально симметричен. Каждый угол этого шестиугольника равен  $120^\circ$ , а расстояние между противоположными сторонами

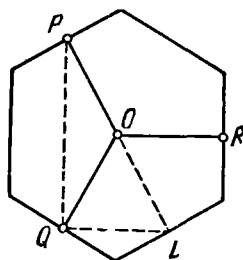


Рис. 18.

не превосходит  $d$ . Если расстояние между  $p_1$  и  $p_2$  меньше  $d$ , то мы раздвинем эти прямые (перемещая их на одинаковое расстояние) так, чтобы расстояние между раздвинутыми прямыми было равно  $d$ . Точно так же мы поступим с прямыми  $l_1, l_2$ , а затем с прямыми  $m_1, m_2$ . В результате мы получим центрально симметричный шестиугольник (с углами  $120^\circ$ ), у которого противоположные стороны удалены друг от друга на расстояние  $d$  (пунктирный шестиугольник на рис. 17).

Из сказанного ясно, что все стороны этого шестиугольника равны между собой, т. е. этот шестиугольник — правильный, причем фигура  $F$  расположена внутри шестиугольника.

Теперь мы покажем, что построенный правильный шестиугольник можно разрезать на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший  $d$ . При этом фигура  $F$  также разрежется на три части, диаметр каждой из которых и подавно будет меньше  $d$ . Требуемое разбиение правильного шестиугольника на три части показано на рис. 18 (точки  $P, Q$  и  $R$  являются серединами сторон, а  $O$  — центр шестиугольника). Чтобы убедиться, что диаметры частей меньше  $d$ , достаточно заметить, что в треугольнике  $PQL$  угол  $Q$  прямой и потому  $PQ < PL = d$ .

Таким образом, теорема 1 доказана. (См. в связи с теоремой 1 проблему 4 на стр. 86.)

#### § 4. Разбиение шара на части меньшего диаметра

Как легко видеть, в пространстве существуют такие тела  $F$ , для которых  $a(F)$  равно 2 или 3. Например, если тело очень вытянуто в одном направлении (рис. 19, а),

то для него  $a(F) = 2$  (рис. 19, б). Далее, если  $F$  — конус, высота которого меньше радиуса основания (рис. 20, а), то  $a(F) = 3$ . В самом деле, диаметр этого тела равен диаметру основания, и потому  $a(F) \geq 3$  (ибо даже круг, лежащий в основании, нельзя разбить на две части меньшего диаметра); разбиение тела  $F$  на три части меньшего диаметра показано на рис. 20, б.

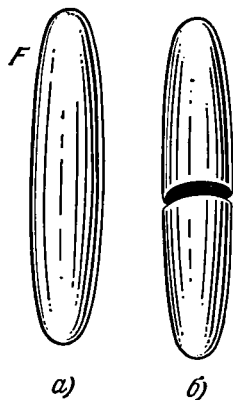


Рис. 19.

Оказывается, что в пространстве существуют и такие тела, для которых  $a(F) > 3$ . Этим свойством обладает, например, правильный тетраэдр с ребром  $d$  (если он разбит на три части, то какая-нибудь из частей должна содержать две вершины тетраэдра, и потому диаметр этой части будет равен  $d$ ). Значительно более глубокий факт выражает нижеследующая теорема 2, которая показывает, что таким телом является также шар.

**Теорема 2.** Шар диаметра  $d$  не может быть разбит на три части, диаметр каждой из которых меньше  $d$ .

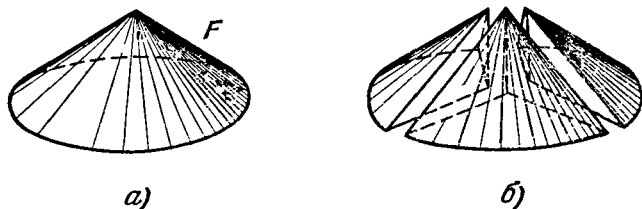


Рис. 20.

Прежде чем переходить к доказательству, сопоставим эту теорему со сказанным ранее \*). Как мы видели, круг нельзя разбить на две части меньшего диаметра.

\*) Читатель, которому приводимые « $n$ -мерные» рассуждения покажутся непонятными, может перейти к доказательству теоремы 2 (стр. 14) или даже, пропустив доказательство, перейти сразу к чтению § 5 (стр. 20) или главы 2.

Условимся называть круг *двумерным шаром* (двумерным — потому, что он расположен в плоскости, которая, как известно, имеет два измерения). Тогда мы приходим к такой формулировке: *двумерный шар диаметра  $d$  нельзя разбить на две части меньшего диаметра*. Обычный шар (т. е. расположенный в трехмерном пространстве) естественно называть *трехмерным шаром*. Объединяя случай круга и шара (теорема 2), мы приходим к следующей формулировке:

*Т е о р е м а 2'. Невозможно разбить  $n$ -мерный шар на  $n$  частей меньшего диаметра ( $n = 2$  или  $3$ ).*

Кроме «двумерного пространства» (т. е. плоскости) и трехмерного пространства в математике и ее приложениях рассматриваются также пространства четырех и большего числа измерений. Оказывается, что теорема 2' справедлива не только для  $n = 2$  или  $3$ , но и для произвольного натурального  $n$ . Эта теорема в такой общей формулировке была установлена К. Борсуком [3] в 1932 г., а еще раньше (в 1930 г.) советскими математиками Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом [19] был получен по существу этот же результат, но в другой формулировке. Доказательства, найденные этими учеными, весьма сложны и неэлементарны (они основываются на теоремах, относящихся к новой области геометрии, называемой *топологией*). Поэтому привести здесь эти доказательства не представляется возможным. Однако для  $n = 3$  доказательство может быть изложено элементарно. (См. также упоминаемые на стр. 85 теоремы, доказанные немецким математиком Ленцем.)

*Доказательство теоремы 2.* Обозначим через  $E$  шар диаметра  $d$ . Предположим, вопреки утверждению теоремы, что шар  $E$  можно разбить на три части  $M_1, M_2, M_3$ , каждая из которых имеет диаметр, меньший  $d$ . Поверхность шара  $E$  (т. е. сферу) обозначим через  $S$ . Множество всех точек сферы  $S$ , принадлежащих части  $M_1$ , обозначим через  $N_1$ ; аналогично определим множества  $N_2$  и  $N_3$ . Таким образом, сфера  $S$  разбивается на три части  $N_1, N_2, N_3$ , каждая из которых, очевидно, имеет диаметр, меньший  $d$ . Обозначим через  $d_1$  диаметр множества  $N_1$  (так что  $d_1 < d$ ) и положим  $h = \frac{1}{3}(d - d_1)$ .

Произведем теперь на сфере  $S$  следующее построение. Выберем две диаметрально противоположные точки  $P$  и  $Q$

(«полюсы» сферы  $S$ ) и пересечем сферу  $S$  несколькими плоскостями, перпендикулярными отрезку  $PQ$ . Эти плоскости пересекают сферу  $S$  по окружностям («параллелям»),

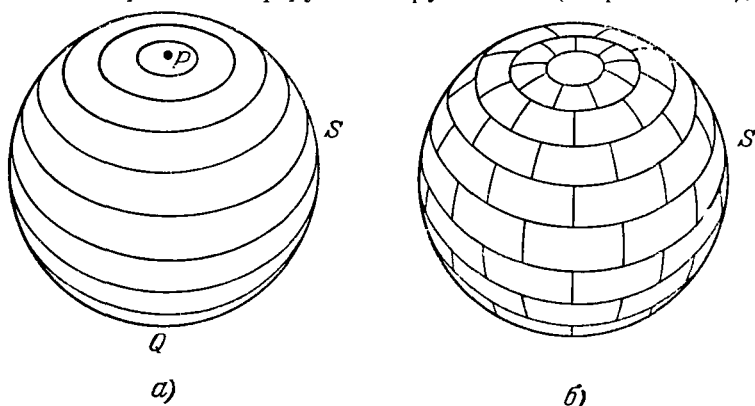


Рис. 21.

разбивающим сферу  $S$  на две «полярные шапочки» и несколько поясов (рис. 21, а). Каждый из этих поясов мы разделим дугами меридианов на несколько частей, причем так, чтобы получающееся разбиение сферы напоминало «кирпичную кладку» (рис. 21, б). Кроме того, количество меридианов и параллелей выберем настолько большим, чтобы каждый из кусочков, на которые разбивается сфера (полярные шапочки и кирпичики), имел диаметр  $< h$ .

Рассмотрим теперь все кусочки, каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с множеством  $N_1$ . Вместе взятые они образуют фигуру, которую мы обозначим через  $G_1$ . Так как множество  $N_1$  имеет диаметр  $d_1$ , а диаметр каждого кусочка меньше  $h$ , то диаметр множества  $G_1$  меньше  $d_1 + 2h$ . Но

$$d_1 + 2h = d - h < d,$$

т. е. диаметр множества  $G_1$  меньше  $d$ .

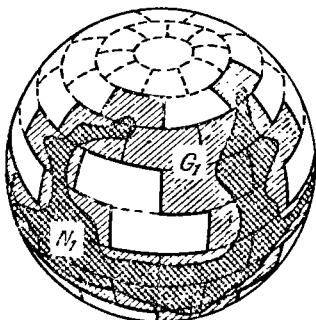


Рис. 22



Рассмотрим теперь границу множества  $G_1$ . Нетрудно понять, что она состоит из конечного числа замкнутых линий, которые не пересекают самих себя и не пересекаются друг с другом (рис. 22). Действительно, в каждой точке стыка сходится только по три кусочка

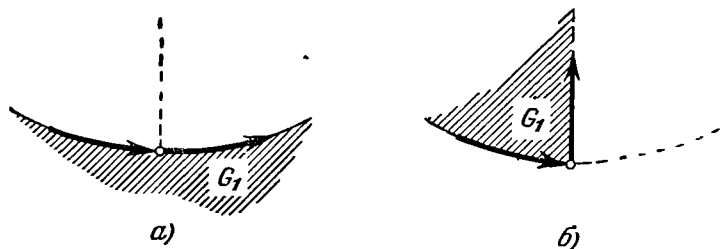


Рис. 23.

(рис. 21, б). Если точка стыка лежит на границе множества  $G_1$ , то из трех примыкающих к этой точке кусочков множеству  $G_1$  принадлежат один (рис. 23) или два (рис. 24). Возьмем теперь какую-либо граничную точку множества  $G_1$  и начнем из нее двигаться по границе этого множества.

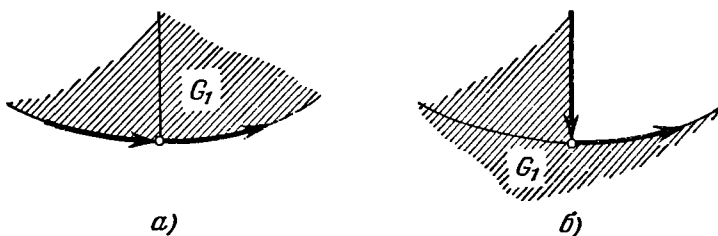


Рис. 24.

Пока мы не дошли до точки стыка, граница множества  $G_1$  идет по вполне определенному пути. Но и в точке стыка эта граница не «раздваивается», а вполне однозначно продолжается дальше (это непосредственно видно из рис. 23, 24). Так как всех кусочков — лишь конечное число, то, идя все дальше и дальше по границе множества  $G_1$ , мы неминуемо должны будем возвратиться в исходную точку, т. е. описать замкнутую линию (ибо граничная линия

нигде не может «оборваться»). Следует заметить, что граница множества  $G_1$  может состоять не только из одной такой замкнутой линии, но из нескольких (рис. 22). Замкнутые линии, составляющие границу множества  $G_1$ , мы обозначим через  $L_1, L_2, \dots, L_k$ .

Пусть теперь  $G'_1$  — множество, симметричное множеству  $G_1$  относительно центра сферы  $S$ ; иначе говоря,  $G'_1$  состоит из всех точек сферы  $S$ , диаметрально противоположных точкам множества  $G_1$ . Легко понять, что множества  $G_1$  и  $G'_1$  не имеют общих точек. Действительно, если бы точка  $A$  принадлежала обоим множествам  $G_1$  и  $G'_1$ , то точка  $B$  — диаметрально противоположная к  $A$  — должна была бы принадлежать  $G_1$  (поскольку  $A$  принадлежит  $G'_1$ ). Но тогда множеству  $G_1$  принадлежали бы две диаметрально противоположные точки  $A$  и  $B$ , а это противоречит тому, что множество  $G_1$  имеет диаметр, меньший  $d$ .

Граница множества  $G'_1$  образована линиями  $L'_1, L'_2, \dots, L'_k$ , симметричными линиям  $L_1, L_2, \dots, L_k$ . Так как множества  $G_1$  и  $G'_1$  не имеют общих точек, то замкнутые линии  $L_1, L_2, \dots, L_k, L'_1, L'_2, \dots, L'_k$  попарно не пересекаются друг с другом.

Заметим теперь, что если на сфере  $S$  даны  $q$  замкнутых линий, не пересекающих самих себя и непересекающихся друг с другом, то они разбивают сферу на  $q + 1$  частей. Это легко понять по индукции: одна линия разбивает сферу на две части, а каждая следующая добавляемая линия вырезает одну новую часть <sup>(6)</sup>.

Так как у нас имеется  $2k$  линий  $L_1, L_2, \dots, L_k, L'_1, L'_2, \dots, L'_k$ , то они разбивают сферу на  $2k + 1$  частей, т. е. на нечетное число частей. Эти части мы будем называть *странами*. Каждая страна либо целиком содержится в множестве  $G_1$  или в  $G'_1$ , либо же расположена вне обоих множеств  $G_1$  и  $G'_1$ . Так как линии  $L_1, L_2, \dots, L_k$  симметричны линиям  $L'_1, L'_2, \dots, L'_k$ , то каждая страна либо имеет симметричную ей страну, либо она сама симметрична относительно центра сферы. Число стран, попарно симметричных друг другу, четно, а так как общее число стран нечетно, то обязательно найдется по крайней мере одна страна, симметричная самой себе

относительно центра сферы. Пусть  $H$  — такая страна и  $C$  — некоторая ее внутренняя точка. Так как страна  $H$  симметрична, то точка  $C'$ , диаметрально противоположная точке  $C$ , также принадлежит стране  $H$ . Отсюда видно,

что диаметр страны  $H$  равен  $d$ , и потому вся внутренняя часть страны  $H$  расположена вне множеств  $G_1$  и  $G'_1$ . Но так как  $H$  — это одна страна, то она представляет собой цельный, связный кусок сферы, и потому точки  $C$  и  $C'$  (рис. 25) можно соединить линией  $\Gamma$ , целиком лежащей внутри страны  $H$ . Линия  $\Gamma'$ , симметричная линии  $\Gamma$ , соединяет те же точки  $C$  и  $C'$  и тоже целиком расположена внутри страны  $H$ . Ли-

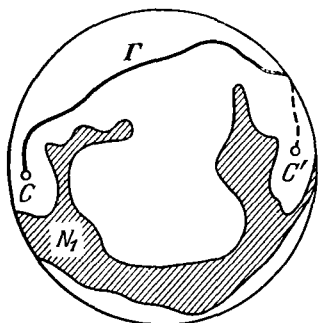


Рис. 25.

нии  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  не имеют общих точек с множеством  $G_1$  и тем более не имеют общих точек с множеством  $N_1$ .

Возвратимся теперь к множествам  $N_1, N_2, N_3$ , упомянутым в начале доказательства. Каждая точка линии  $\Gamma$

принадлежит хотя бы одному из множеств  $N_2, N_3$ . Концевые точки  $C$  и  $C'$  (как диаметрально противоположные), принадлежат разным множествам  $N_2, N_3$ ; пусть, для определенности,  $C$  принадлежит множеству  $N_2$ , а  $C'$  — множеству  $N_3$ . Будем двигаться по линии  $\Gamma$  от точки  $C$  к  $C'$  и обозначим через  $D$  последнюю встретившуюся нам точку множества  $N_2$  (рис. 26). Если бы точка  $D$  не принадлежала множеству  $N_3$ , то

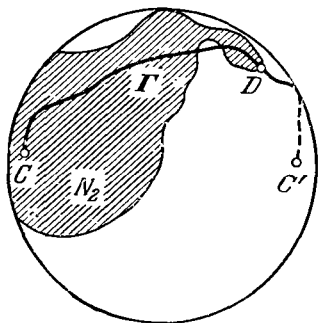


Рис. 26.

близкие к ней точки также не принадлежали бы множеству  $N_3$  (<sup>1</sup>). Но тогда точки, расположенные на линии  $\Gamma$  между  $D$  и  $C'$  и близкие к точке  $D$ , не могли бы принадлежать ни одному из множеств  $N_1, N_2, N_3$ , что невозможно. Итак, точка  $D$  принадлежит обоим множествам  $N_2$  и  $N_3$ .

Рассмотрим, наконец, точку  $D'$ , диаметрально противоположную точке  $D$ . Она принадлежит линии  $\Gamma'$  и, следовательно, не содержится в множестве  $N_1$ . Но она не содержится также в множествах  $N_2, N_3$ , ибо эти множества имеют диаметр  $< d$  и содержат точку  $D$ . Таким образом, точка  $D'$  не содержится ни в одном из множеств  $N_1, N_2, N_3$ , что противоречит предположению.

Полученное противоречие показывает, что шар  $E$  не может быть разбит на три множества меньшего диаметра.

Теорема 2 полностью доказана.

Итак, для шара  $E$  мы доказали неравенство  $a(E) > 3$ . Чему же в действительности равно число  $a(E)$ ? Иными

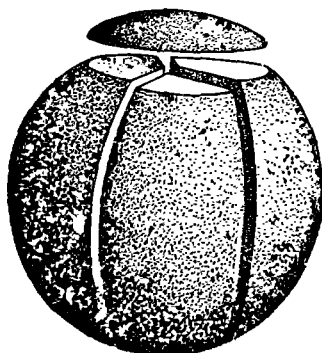


Рис. 27.

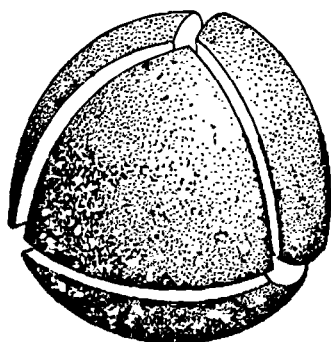


Рис. 28.

словами, можно ли разбить шар на четыре части меньшего диаметра или потребуется большее число частей? Нетрудно показать, что  $a(E) = 4$ , т. е. что разбиение шара на четыре части меньшего диаметра возможно. Одно из таких разбиений показано на рис. 27. Другое, более симметричное разбиение может быть получено следующим образом. Впишем в шар  $E$  диаметра  $d$  правильный тетраэдр  $ABCD$  и рассмотрим трехгранные углы  $OABC, OABD, OACD$  и  $OBCD$  с общей вершиной  $O$ , под которыми видны из центра  $O$  грани тетраэдра. Эти четыре трехгранных угла рассекают шар  $E$  на четыре части (рис. 28), каждая из которых имеет диаметр, меньший  $d$ .

## § 5. Решение задачи для тел в пространстве

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы:

**Т е о р е м а 3.** *Всякое тело  $F$  диаметра  $d$ , расположенное в трехмерном пространстве, может быть разбито на четыре части меньшего диаметра, т. е.  $a(F) \leq 4$ .*

Прежде чем переходить к доказательству, сделаем некоторые замечания о месте этой теоремы в комбинаторной геометрии и об истории ее появления и доказательства \*).

Мы видели, что для любой двумерной фигуры  $F$  справедливо неравенство  $a(F) \leq 3$ , причем для двумерного шара (т. е. круга) в этом соотношении достигается равенство. В то же время для трехмерного шара  $E$  имеет место равенство  $a(E) = 4$ . Таким образом, если мы обозначим  $n$ -мерный шар через  $E^n$  (где  $n = 2, 3$ ), то имеет место равенство  $a(E^n) = n + 1$ . Это соотношение имеет место не только для  $n = 2$  или  $3$ , но и для произвольного натурального  $n$ . Действительно, сформулированная выше теорема 2' показывает, что  $a(E^n) \geq n + 1$ , т. е. что шар  $E^n$  нельзя разбить на  $n$  частей меньшего диаметра. В то же время  $n + 1$  частей уже достаточно; это устанавливается построением в  $n$ -мерном пространстве такого разбиения шара  $E^n$ , которое аналогично разбиению, осуществленному для  $n = 3$  на рис. 27. Мы не останавливаемся здесь на этом подробно. Для читателя, владеющего понятиями  $n$ -мерной геометрии, построение разбиений, аналогичных изображенным на рис. 27, 28, не будет особенно затруднительным.

Итак,  $a(E^n) = n + 1$ . Но при  $n = 2$  двумерный шар  $E^2$  (т. е. круг) является одной из фигур, требующих максимального числа частей (при разбиении на части меньшего диаметра), т. е. является одной из фигур, для которых в неравенстве  $a(F) \leq 3$  достигается равенство. Естественно предположить, что такое положение вещей сохраняется и при всех больших значениях  $n$ . Эта гипотеза была сформулирована К. Борсуком [4] в 1933 году. Иначе говоря, Борсук высказал следующее предположение:

**Г и п о т е з а Б о р с у к а.** *Всякое тело  $F$  диаметра  $d$ , расположенное в  $n$ -мерном пространстве, может быть*

\*) Эти « $n$ -мерные» рассуждения также могут быть пропущены.

разбито на  $n + 1$  частей меньшего диаметра, т. е. в  $n$ -мерном пространстве справедливо неравенство  $a(F) \leq n + 1$ .

На доказательство справедливости этой гипотезы были направлены усилия многих математиков мира. Однако даже для  $n = 3$  (т. е. для тел, расположенных в обычном пространстве) полное решение этой проблемы долго не удавалось получить. Решение (для  $n = 3$ ) было получено только в 1955 году английским математиком Эгглстоном [32]: он показал, что в трехмерном пространстве предположение Борсука действительно справедливо, т. е. имеет место сформулированная выше теорема 3.

Следует заметить, что доказательство самого Эгглстона было весьма сложным, длинным и неэлементарным. В 1957 году израильским математиком Грюнбаумом было предложено новое, весьма изящное и более короткое доказательство этой же теоремы [7]. По идее оно напоминает доказательство теоремы 1: тело  $F$  заключается в некоторый многогранник, который затем разбивается на четыре части диаметра  $< d$ . Доказательство Грюнбаума мы здесь и изложим.

**Доказательство теоремы 3.** Первой частью доказательства будет установление следующей леммы, полученной в 1953 г. американским математиком Гэйлом [11]: *всякое пространственное тело  $F$  диаметра  $d$  может быть заключено в правильный октаэдр, у которого расстояние между противоположными гранями равно  $d$ .*

Рассмотрим правильный октаэдр  $ABCA'B'C'$ , у которого  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$  — попарно противоположные вершины, а расстояние между противоположными гранями равно  $d$  (рис. 29). Всего у октаэдра 8 граней, которые попарно параллельны. Мы рассмотрим не четыре пары параллельных плоскостей, в которых лежат эти грани, а только три из них; например, возьмем плоскости  $ABC'$  и  $A'B'C$ ,  $AB'C$  и  $A'BC'$ ,  $A'BC$  и  $AB'C'$ . Эти три пары параллельных плоскостей, пересекаясь, образуют параллелепипед  $AB'CDA'BC'D'$  (см. рис. 30, на котором жирным пунктиром показаны «новые» ребра этого параллелепипеда); этот параллелепипед мы обозначим через  $\Phi$ . Расстояние между противоположными гранями параллелепипеда  $\Phi$  по-прежнему равно  $d$ . Далее, диагональ  $DD'$  перпендикулярна к «отброшенным» граням  $ABC$  и  $A'B'C'$  октаэдра. Таким образом, параллелепипед  $\Phi$  обладает

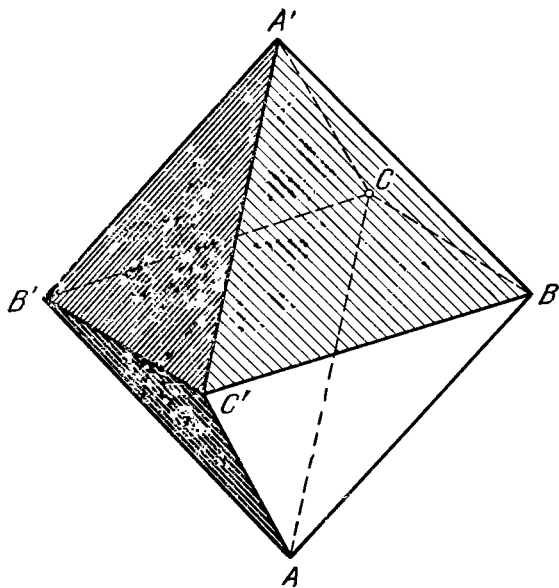


Рис. 29

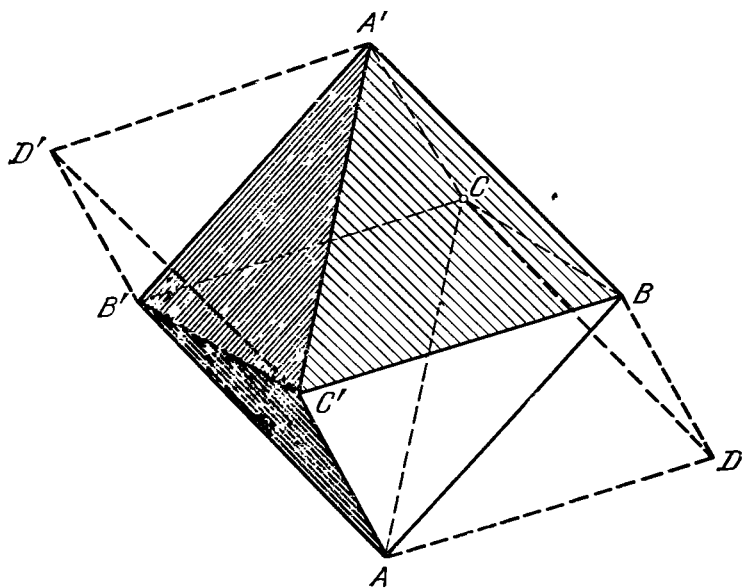


Рис. 30.

тем свойством, что если провести две плоскости, перпендикулярные диагонали  $DD'$  и находящиеся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от центра параллелепипеда, то они отсекут от параллелепипеда две треугольных пирамиды, а оставшаяся средняя часть будет правильным октаэдром. Заметим еще, что плоскость  $BDB'D'$  является плоскостью симметрии

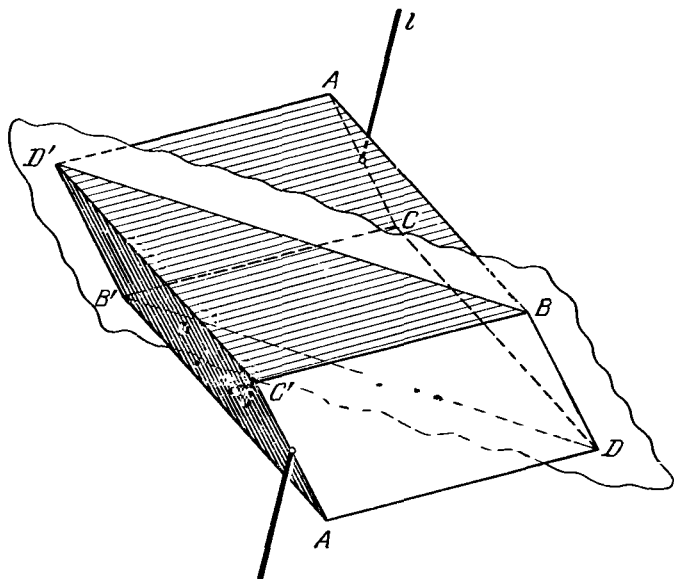


Рис. 31.

рассматриваемого параллелепипеда  $\Phi$ , а прямая  $l$ , перпендикулярная этой плоскости и проходящая через середину диагонали  $DD'$ , является его осью симметрии. Иначе говоря, при повороте параллелепипеда вокруг прямой  $l$  на  $180^\circ$  он совместится с самим собой (рис. 31).

Пусть теперь  $F$  — тело диаметра  $d$ . Проведем две плоскости, параллельные грани  $AB'CD$  параллелепипеда  $\Phi$ , так, чтобы тело  $F$  находилось между ними (рис. 32). Далее начнем приближать эти плоскости к телу  $F$ , оставляя их все время параллельными грани  $AB'CD$ , до тех пор, пока эти плоскости прикоснутся к телу  $F$ . Мы получим таким образом две опорные плоскости тела, параллельные грани  $AB'CD$ . Проведем затем еще две пары опорных



плоскостей фигуры  $F$ , параллельных другим граням параллелепипеда. В результате будет построен описанный параллелепипед тела  $F$  с гранями, параллельными граням параллелепипеда  $\Phi$ . Этот описанный параллелепипед мы обозначим через  $\Pi$ , а его диагональ, соответствующую диагонали  $DD'$ , — через  $EE'$ . Проведем еще две опорные

плоскости тела  $F$ , перпендикулярные диагонали  $DD'$  параллелепипеда  $\Phi$ . Перпендикулярно, опущенные на эти плоскости из точек  $E$  и  $E'$ , мы обозначим через  $EM$  и  $E'M'$ , а разность  $EM - E'M'$  обозначим через  $y$ .

Мы покажем, что исходный параллелепипед  $\Phi$  можно так расположить в пространстве, чтобы выполнялось равенство  $EM = E'M'$ . В самом деле, допустим, что  $EM \neq E'M'$ ; для определенности, пусть  $EM < E'M'$ , т. е. величина

$$y = EM - E'M'$$

отрицательна. Начнем непрерывно вращать параллелепипед  $\Phi$  вокруг прямой  $l$ , пока он не повернется на  $180^\circ$  (и, следовательно, совместится с самим собой). Вместе с параллелепипедом  $\Phi$  будет непрерывно изменяться и параллелепипед  $\Pi$ , а также опорные плоскости, перпендикулярные диагонали  $DD'$ . Поэтому при повороте параллелепипеда  $\Phi$  будут непрерывно перемещаться точки  $E$ ,  $E'$  и  $M$ ,  $M'$ , а следовательно, будет непрерывно изменяться и величина  $y = EM - E'M'$ . При повороте на  $180^\circ$  точки  $E$  и  $E'$  поменяются местами, и потому величина  $y$  будет уже положительной. Изображая графически зависимость величины  $y$  от угла поворота, мы, так же как на стр. 11, убедимся, что найдется такое поло-

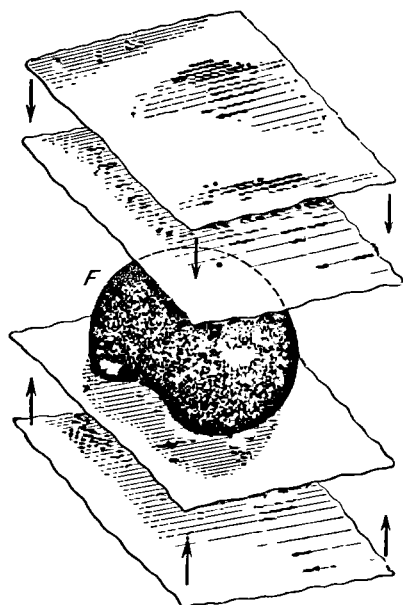


Рис. 32.

ра параллелепипед  $\Phi$  вокруг прямой  $l$ , пока он не повернется на  $180^\circ$  (и, следовательно, совместится с самим собой). Вместе с параллелепипедом  $\Phi$  будет непрерывно изменяться и параллелепипед  $\Pi$ , а также опорные плоскости, перпендикулярные диагонали  $DD'$ . Поэтому при повороте параллелепипеда  $\Phi$  будут непрерывно перемещаться точки  $E$ ,  $E'$  и  $M$ ,  $M'$ , а следовательно, будет непрерывно изменяться и величина  $y = EM - E'M'$ . При повороте на  $180^\circ$  точки  $E$  и  $E'$  поменяются местами, и потому величина  $y$  будет уже положительной. Изображая графически зависимость величины  $y$  от угла поворота, мы, так же как на стр. 11, убедимся, что найдется такое поло-

жение поворачивающегося параллелепипеда  $\Phi$ , при котором величина  $y$  обращается в нуль, т. е.  $EM = E'M'$ . Это положение параллелепипеда  $\Phi$  (и параллелепипеда  $\Pi$ ) мы и рассмотрим. Опорные плоскости, перпендикулярные диагонали  $DD'$ , обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$ .

Если расстояние между какими-либо двумя противоположными гранями параллелепипеда  $\Pi$  меньше  $d$ , то мы раздвинем плоскости этих граней (удаляя их на одинаковое расстояние от центра параллелепипеда) так, чтобы расстояние между раздвинутыми плоскостями было равно  $d$ . Так мы поступим со всеми тремя парами параллельных граней параллелепипеда  $\Pi$ , а также с параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . В результате мы получим новый параллелепипед  $\Pi^*$ , равный исходному параллелепипеду  $\Phi$ , и две плоскости  $\alpha^*$  и  $\beta^*$ , перпендикулярные диагонали  $DD'$  и находящиеся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от центра параллелепипеда  $\Pi^*$ . Эти плоскости отсекают от параллелепипеда  $\Pi^*$  две треугольные пирамиды, а оставшаяся часть представляет собой правильный октаэдр. Ясно, что тело  $F$  находится внутри этого октаэдра.

Итак, тело  $F$ , имеющее диаметр  $d$ , мы поместили в правильный октаэдр  $ABCA'B'C'$ , у которого расстояние между противоположными гранями равно  $d$ .

Следующая часть доказательства будет заключаться в построении многогранника  $V$ , несколько меньшего, чем многогранник  $ABCA'B'C'$ , и также содержащего тело  $F$ . Именно, проведем две плоскости  $\gamma$  и  $\gamma'$ , перпендикулярные диагонали  $AA'$  и находящиеся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от центра октаэдра. Эти две плоскости отсекают от октаэдра две пирамиды (с вершинами  $A$  и  $A'$ ). Легко понять, что хотя бы одна из этих пирамид не содержит внутри себя точек тела  $F$  (ибо если  $P$  и  $Q$  — какие-либо внутренние точки этих пирамид, то они расположены по разные стороны от полосы, ограниченной плоскостями  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , и потому  $PQ > d$ ). Пусть, для определенности, пирамида с вершиной  $A'$  не содержит внутри себя точек тела  $F$  (в противном случае можно было бы поменять местами обозначения точек  $A$  и  $A'$ ).

Многогранник, остающийся от октаэдра после отсечения от него указанной пирамиды с вершиной  $A'$ , целиком содержит тело  $F$  (рис. 33).

Теперь мы проведем две плоскости, перпендикулярные диагонали  $BB'$  и находящиеся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от центра октаэдра. Они снова отсекают две пирамиды (с вершинами  $B$  и  $B'$ ), причем одна из этих пирамид не содержит внутри себя точек тела  $F$ ; для определенности, пусть это будет

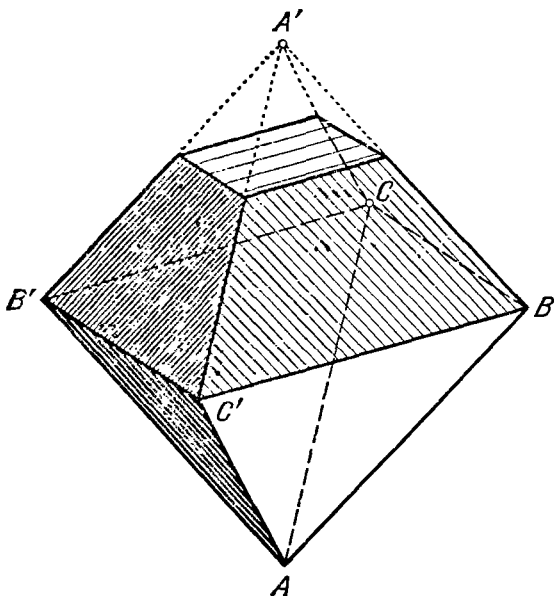


Рис. 33.

пирамида с вершиной  $B'$  (рис. 34). Многогранник, полученный из предыдущего после отсечения от него пирамиды с вершиной  $B'$ , также содержит тело  $F$ . Аналогично можно отсечь одну из таких же пирамид с вершинами  $C$  и  $C'$  — пусть, для определенности, пирамиду с вершиной  $C'$ . Мы приходим к многограннику  $V$ , изображенному на рис. 35 и все еще содержащему тело  $F$ .

Для завершения доказательства остается установить, что многогранник  $V$  может быть разбит на 4 части, каждая из которых имеет диаметр  $< d$  (ибо при этом тело  $F$ , заключенное в многограннике  $V$ , разобьется на 4 части, диаметр каждой из которых и подавно  $< d$ ). Это разбиение многогранника  $V$  мы сейчас и произведем (см. рис. 36, а:

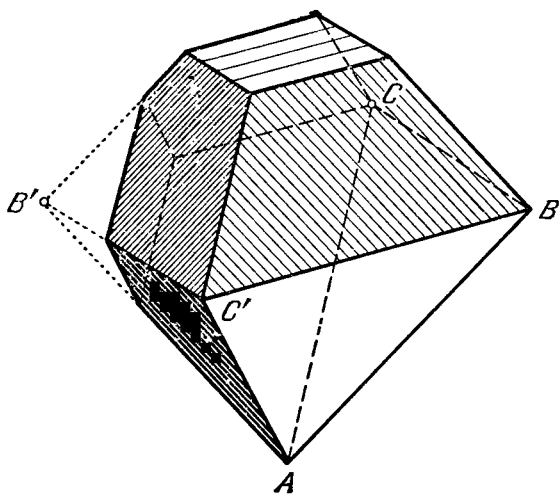


Рис. 34.

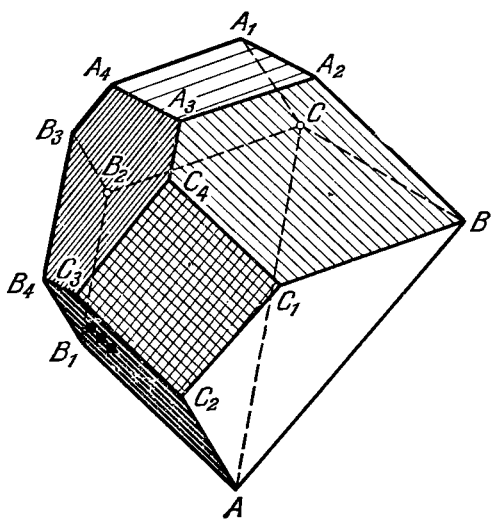
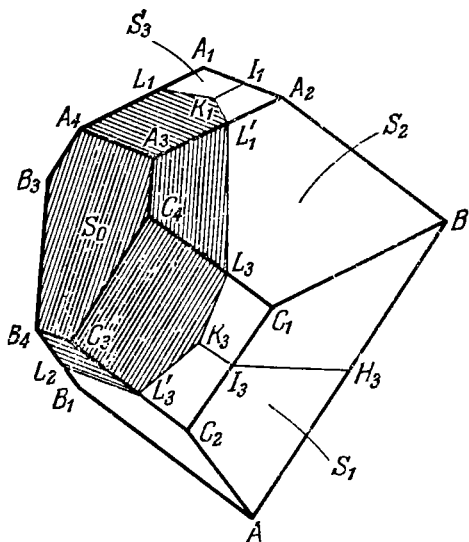
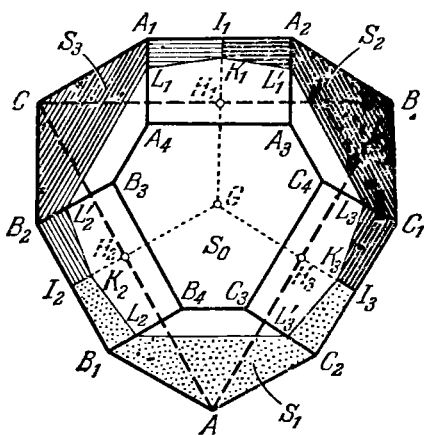


Рис. 35.



a)



б)

Рис. 36

на рис. 36, б — вид многогранника  $V$  со стороны шестиугольной грани). Многогранник  $V$  имеет одну треугольную грань  $ABC$  (оставшуюся от октаэдра), три квадратных грани  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $B_1B_2B_3B_4$ ,  $C_1C_2C_3C_4$  (основания срезанных пирамид), три пятиугольных грани и три грани, являющиеся трапециями. Пусть  $G$  — центр равностороннего треугольника  $ABC$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  — середины сторон этого треугольника, а  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  — середины меньших оснований трапеций. Возьмем некоторые точки  $K_1, K_2, K_3$ , лежащие внутри квадратных граней, и точки  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$ , лежащие на боковых сторонах квадратов (не параллельных основаниям трапеций). Соединив теперь выбранные точки, мы разобьем поверхность многогранника  $V$  на четыре области  $S_0, S_1, S_2, S_3$ , ограниченные замкнутыми ломаными

$$L'_1K_1L_1L'_2K_2L_2L'_3K_3L_3L'_1, \quad GH_2I_2K_2L_2L'_3K_3I_3H_3G, \\ GH_3I_3K_3L_3L'_1K_1I_1H_1G, \quad GH_1I_1K_1L_1L'_2K_2I_2H_2G.$$

Обозначим теперь через  $O$  центр октаэдра, из которого отсечением пирамид получился многогранник  $V$ . Точка  $O$  лежит внутри многогранника  $V$ . Рассмотрим всевозможные отрезки, соединяющие точку  $O$  с точками области  $S_0$ . Все такие отрезки заполняют некоторое тело  $V_0$ , представляющее собой как бы «пирамиду» с вершиной  $O$ , «основанием» которой служит неплоская область  $S_0$ . Аналогично мы построим тела  $V_1, V_2, V_3$ , являющиеся «пирамидами» с вершиной  $O$  и «основаниями»  $S_1, S_2, S_3$ . Вместе тела  $V_0, V_1, V_2, V_3$  составляют весь многогранник  $V$  (рис. 37).

До сих пор мы не указывали точного местонахождения точек  $K_1, K_2, K_3$  и  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  на квадратных гранях и их сторонах. Теперь мы укажем такое расположение этих точек, при котором каждое из тел  $V_0, V_1, V_2, V_3$  будет иметь диаметр, меньший  $d$ . Именно, мы выберем точки  $L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  таким образом, чтобы они находились на расстоянии  $\frac{15\sqrt{3}-10}{46\sqrt{2}}d$  от меньших оснований трапеции (т. е. чтобы указанную длину имели отрезки  $A_1L_1, A_2L'_1, \dots$ ). Далее, точку  $K_1$  возьмем так, чтобы было  $K_1L_1 = K_1L'_1$  и чтобы расстояние от точки  $K_1$  до меньшего основания трапеции (т. е. до отрезка  $A_1A_2$ )

было равно  $\frac{1231\sqrt{3}-1936}{1518\sqrt{2}}d$ . Пусть читатель не удивляется сложности выбора этих чисел. Они найдены с помощью сложных подсчетов автором доказательства Грюнбаумом (эти числа выбирались так, чтобы все части  $V_0, V_1, V_2, V_3$  имели одинаковые диаметры). Оказывается,

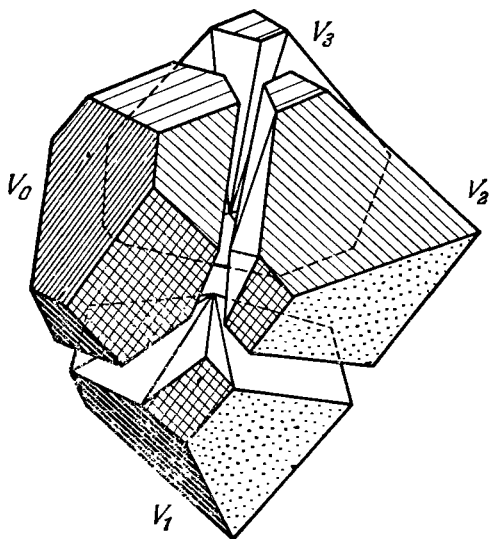


Рис. 37.

что при таком выборе точек  $K_1, K_2, K_3, L_1, L'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3$  диаметр каждого из тел  $V_0, V_1, V_2, V_3$  действительно меньше единицы, именно, каждое из них имеет диаметр, равный

$$\frac{\sqrt{6\,129\,030 - 937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}}d \approx 0,9887d.$$

Для установления этого результата, скажем, для вычисления диаметра многогранника  $V_0$ , надо найти всевозможные расстояния между его вершинами и выбрать из них наибольшее. Эта задача решается вполне элементарно (например, с помощью многократного применения теоремы Пифагора или с помощью метода координат в пространстве), но требует громоздких вычислений. Этими вычис-

лениями (набранными ниже мелким шрифтом — мы рекомендуем их при первом чтении пропустить) и завершается доказательство теоремы 3.

Возьмем в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и шесть точек

$$\begin{aligned} A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \quad C(0, 0, a), \\ A'(-a, 0, 0), \quad B'(0, -a, 0), \quad C'(0, 0, -a), \end{aligned}$$

где  $a$  — некоторое положительное число. Эти шесть точек являются вершинами правильного октаэдра. Ясно, что плоскость, в которой расположена грань  $ABC$  этого октаэдра, имеет уравнение  $x+y+z=a$ ; от центра октаэдра (т. е. от начала координат) эта плоскость находится на расстоянии  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ . Следовательно, расстояние  $d$  между двумя

параллельными гранями этого октаэдра имеет значение  $d=2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Плоскость, перпендикулярная диагонали  $AA'$ , параллельна плоскости  $Oyz$ . Таким образом, плоскость, перпендикулярная диагонали  $AA'$ , находящаяся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от центра октаэдра и отсекающая пирамиду с вершиной  $A'$ , имеет уравнение  $x=-\frac{d}{2}$ . Отсюда легко найти координаты точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (рис. 35). Например, точка  $A_2$  находится в плоскости  $Oxy$  (т. е. для нее  $z=0$ ), в плоскости  $x=-\frac{d}{2}$  и в плоскости грани  $A'BC$ , т. е. в плоскости с уравнением  $-x+y+z=a-\frac{d\sqrt{3}}{2}$ . Следовательно, точка  $A_2$  имеет координаты.

$$x=-\frac{a}{\sqrt{3}}=-\frac{d}{2}, \quad y=a-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{d}{2}(\sqrt{3}-1), \quad z=0.$$

Аналогично найдем координаты всех точек  $A_i, B_i, C_i$ :

$$\begin{aligned} A_1\left(-\frac{d}{2}, 0, b\right), \quad A_2\left(-\frac{d}{2}, b, 0\right), \\ A_3\left(-\frac{d}{2}, 0, -b\right), \quad A_4\left(-\frac{d}{2}, -b, 0\right), \\ B_1\left(b, -\frac{d}{2}, 0\right), \quad B_2\left(0, -\frac{d}{2}, b\right), \\ B_3\left(-b, -\frac{d}{2}, 0\right), \quad B_4\left(0, -\frac{d}{2}, -b\right), \\ C_1\left(0, b, -\frac{d}{2}\right), \quad C_2\left(b, 0, -\frac{d}{2}\right), \\ C_3\left(0, -b, -\frac{d}{2}\right), \quad C_4\left(-b, 0, -\frac{d}{2}\right), \end{aligned}$$



где через  $b$  обозначено число  $a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{d}{2} (\sqrt{3} - 1)$ . Таким образом, координаты всех вершин многогранника  $V$  вычислены.

Перейдем к вычислению координат вершин многогранников  $V_0, V_1, V_2, V_3$ . Точка  $G$  имеет координаты  $x = y = z = \frac{a}{3} = \frac{d}{2\sqrt{3}}$ :

$$G \left( \frac{d}{2\sqrt{3}}, \frac{d}{2\sqrt{3}}, \frac{d}{2\sqrt{3}} \right).$$

Точки  $H_1, H_2, H_3$  легко находятся как середины отрезков  $BC, CA, AB$ :

$$H_1 \left( 0, \frac{d\sqrt{3}}{4}, \frac{d\sqrt{3}}{4} \right), \quad H_2 \left( \frac{d\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{d\sqrt{3}}{4} \right), \\ H_3 \left( \frac{d\sqrt{3}}{4}, \frac{d\sqrt{3}}{4}, 0 \right).$$

Далее, точки  $I_1, I_2, I_3$  являются серединами отрезков  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ :

$$I_1 \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad I_2 \left( \frac{b}{2}, -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad I_3 \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{d}{2} \right).$$

Определим теперь координаты точек  $L_1$  и  $L_1'$ . Вектор  $p$ , направленный от  $A_1$  к  $A_4$  и имеющий длину 1, имеет вид  $p = \left\{ 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ . Поэтому  $\overline{A_1L_1} = \overline{A_2L_1'} = cp$ , где

$$c = \frac{15\sqrt{3} - 10}{46\sqrt{2}} d.$$

Это дает нам возможность легко определить координаты точек  $L_1, L_1'$ :

$$L_1 \left( -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}}, b - \frac{c}{\sqrt{2}} \right), \quad L_1' \left( -\frac{d}{2}, b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right).$$

Аналогично находим остальные точки  $L_i$  и  $L_i'$ :

$$L_2 \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right), \quad L_2' \left( -\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, b - \frac{c}{\sqrt{2}} \right),$$

$$L_3 \left( -\frac{c}{\sqrt{2}}, b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right), \quad L_3' \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right).$$

Наконец, по определению точки  $K_1$  мы имеем  $\overline{I_1K_1} = ep$ , где

$$e = \frac{1231\sqrt{3} - 1986}{1518\sqrt{2}} d.$$

Отсюда находим координаты точки  $K_1$  (и аналогично для точек  $K_2, K_3$ ):

$$K_1 \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right),$$

$$K_2 \left( \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right),$$

$$K_3 \left( \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2} \right).$$

Тем самым определены все вершины многогранников  $V_0, V_1, V_2, V_3$  (еще одна общая вершина этих многогранников находится в начале координат).

Теперь для нахождения диаметра многогранника  $V_0$  (или  $V_1, V_2, V_3$ ) нужно найти наибольшее из расстояний между его вершинами, что нетрудно сделать, так как координаты всех вершин известны. Например, зная точки

$$K_1 = \left( -\frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2} - \frac{e}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \left( -\frac{d}{2}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{1518} \cdot \frac{d}{2}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{1518} \cdot \frac{d}{2} \right),$$

$$L_2 = \left( b - \frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{2}, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \left( \frac{31\sqrt{3} - 36}{46} \cdot \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, -\frac{15\sqrt{3} - 10}{46} \cdot \frac{d}{2} \right),$$

мы легко найдем, что длина отрезка  $K_1L_2$  равна

$$\sqrt{\left( b - \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{d}{2} \right)^2 + \left( -\frac{d}{2} - \frac{b}{2} + \frac{e}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( -\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2} + \frac{e}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

или, подставив числовые значения  $b, c$  и  $e$  и произведя указанные действия:

$$\frac{\sqrt{6\,129\,030 - 937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} \cdot d \approx 0,9887d.$$

Это и есть наибольшее из расстояний между вершинами многогранника  $V_0$  (т. е. диаметр многогранника  $V_0$ ; ср. стр. 30). Аналогично вычисляются диаметры многогранников  $V_1, V_2, V_3$ .

Заметим, что в этом доказательстве многогранник  $V$  разбивается на части  $V_0, V_1, V_2, V_3$ , диаметры которых очень мало отличаются от  $d$ . Естественно, это происходит потому, что многогранник  $V$  не только содержит тело  $F$ , но и содержит много «лишнего»

Если бы удалось «экономнее» подобрать многогранник, содержащий тело  $F$ , то, по-видимому, можно было бы несколько уменьшить число  $0,9887 d$ , оценивающее размеры частей (см. в связи с этим проблему 4 на стр. 86).

Отметим еще, что решение задачи Борсука в трехмерном пространстве одновременно с Грюнбаумом (в 1957 году) было дано и венгерским математиком Хеппешом [30]; однако его решение менее известно, так как оно опубликовано на венгерском языке, который большинству математиков мира незнаком. В решении Хеппеша разбиение на части «менее экономно», чем в приведенном доказательстве: у него для диаметров частей получена оценка  $0,9977 d$

## § 6. О гипотезе Борсука для $n$ -мерных тел\*)

Читателя теперь, по-видимому, интересует вопрос, как же обстоит дело с доказательством гипотезы Борсука в пространстве, имеющем больше трех измерений. К сожалению, эта проблема в общем виде до сих пор не решена, несмотря на усилия многих математиков. Неизвестно даже, справедлива ли она для тел, расположенных в ч е т ы р е х м е р н о м пространстве, т. е. неизвестно, любое ли четырехмерное тело диаметра  $d$  может быть разбито на пять частей меньшего диаметра. В этом заключается одна из интересных черт рассматриваемой проблемы: резкий контраст между чрезвычайной простотой формулировки задачи и огромными трудностями в ее решении — трудностями, которые на сегодняшний день представляются совершенно непреодолимыми. (См. в связи с этим проблемы 1, 2, 3, 5 на стр. 83—88.)

Однако для некоторых частных видов  $n$ -мерных тел справедливость гипотезы Борсука установлена.

В первую очередь следует назвать работы известного швейцарского геометра Хадвигера. Хадвигер рассматривает не произвольные тела  $n$ -мерного пространства, а только выпуклые тела (несколько слов о выпуклых фигурах читатель найдет в п. 7), ибо ясно, что справедливость гипотезы Борсука достаточно установить только для таких тел (ср. ниже, стр. 46). В одной из работ 1946 года (см. [24]) Хадвигер рассмотрел  $n$ -мерные выпуклые тела с г л а д к о й г р а н и ц е й, т. е. выпуклые тела, у которых через каждую граничную точку проходит единственная опорная гиперплоскость. Изящным рассуждением Хадвигер показывает, что для

\*) Читателю, не знакомому с геометрией  $n$ -мерного пространства, мы рекомендуем перейти теперь к чтению главы 2.

таких выпуклых тел гипотеза Борсука справедлива. Иными словами, имеет место следующая

**Т е о р е м а 4.** *Всякое  $n$ -мерное выпуклое тело с гладкой границей, имеющее диаметр  $d$ , может быть разбито на  $n + 1$  частей меньшего диаметра.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $F$  — некоторое  $n$ -мерное выпуклое тело с гладкой границей, имеющее диаметр  $d$ . Рассмотрим кроме того  $n$ -мерный шар  $E$ , имеющий тот же диаметр  $d$ , и построим какое-либо разбиение этого шара на  $n + 1$  частей диаметра  $< d$  (ср. рис. 27, 28). Части, на которые разбит шар  $E$ , обозначим

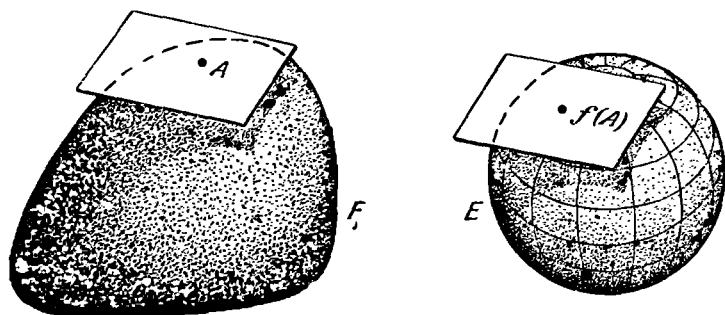


Рис. 38.

через  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . Мы сейчас построим некоторое разбиение границы  $G$  тела  $F$  на  $n + 1$  множеств  $N_0, N_1, \dots, N_n$ . Именно, пусть  $A$  — произвольная граничная точка тела  $F$ .

Проведем через точку  $A$  опорную гиперплоскость тела  $F$  (она, по предположению, единственна) и параллельно ей проведем касательную гиперплоскость шара  $E$ , причем так, чтобы тело  $F$  и шар  $E$  лежали по одну и ту же сторону от этих гиперплоскостей (рис. 38). Точку, в которой проведенная гиперплоскость касается шара  $E$ , обозначим через  $f(A)$ . Мы будем считать, что точка  $A$  принадлежит множеству  $N_i$ , если соответствующая точка  $f(A)$  принадлежит множеству  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). В результате вся граница  $G$  тела  $F$  разобьется на  $n + 1$  множеств  $N_0, N_1, \dots, N_n$  (\*).

Докажем, что каждое из множеств  $N_0, N_1, \dots, N_n$  имеет диаметр  $< d$ . Допустим противное, т. е. что некоторое

множество  $N_i$  имеет диаметр  $d$ , и пусть  $A$  и  $B$  — две точки множества  $N_i$ , находящиеся друг от друга на расстоянии  $d$ . Проведем две гиперплоскости  $\Gamma_A, \Gamma_B$ , проходящие через точки  $A$  и  $B$  и перпендикулярные отрезку  $AB$ . Ясно, что тело  $F$  находится в полосе между этими гиперплоскостями (иначе диаметр тела  $F$  был бы  $> d$ ), т. е.  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_B$  являются *опорными* гиперплоскостями тела  $F$ , проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Из параллельности этих опорных гиперплоскостей вытекает, что соответствующие точки  $f(A)$  и  $f(B)$ , лежащие на границе шара  $E$ , являются диаметрально противоположными, т. е. расстояние между точками  $f(A)$  и  $f(B)$  равно  $d$ . С другой стороны, так как  $A$  и  $B$  принадлежат множеству  $N_i$ , то точки  $f(A)$  и  $f(B)$  принадлежат множеству  $M_i$ , и потому расстояние между точками  $f(A)$  и  $f(B)$  меньше  $d$ . Полученное противоречие показывает, что ни одно из множеств  $N_0, N_1, \dots, N_n$  не может иметь диаметр  $d$ .

Пусть теперь  $O$  — произвольная внутренняя точка тела  $F$ . Для любого  $i = 0, 1, \dots, n$  мы обозначим через  $P_i$  «конус» с вершиной  $O$ , криволинейным «основанием» которого является множество  $N_i$ . Ясно, что построенные «конусы»  $P_0, P_1, \dots, P_n$  заполняют все тело  $F$ , т. е. мы получили разбиение тела  $F$  на  $n + 1$  частей. Ясно кроме того, что каждое из множеств  $P_i$  имеет диаметр  $< d$  (ибо диаметр «основания»  $N_i$  меньше  $d$ ). Таким образом, построено разбиение тела  $F$  на  $n + 1$  частей диаметра  $< d$ . Тем самым теорема 4 доказана.

В другой работе 1947 г. (см. [25]), уточняя приведенное доказательство, Хадвигер доказал следующую теорему.

*Если  $n$ -мерное выпуклое тело диаметра  $d$  обладает тем свойством, что по его границе может внутри этого выпуклого тела свободно кататься  $n$ -мерный шарик некоторого радиуса  $r$ , то рассматриваемое выпуклое тело может быть разбито на  $n + 1$  частей, диаметр каждой из которых не превосходит*

$$d - 2r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} \right).$$

Итак, для выпуклых тел с гладкой границей гипотеза Борсука справедлива (теорема 4). Остаются выпуклые тела, имеющие угловые точки (т. е. точки, в которых опорная плоскость не единственна). Для таких тел до

сих пор нет почти никаких результатов. Впрочем, немецкий математик Ленц указал в одной статье 1955 г. [17], что любое  $n$ -мерное выпуклое тело диаметра  $d$  может быть разбито на части меньшего диаметра, число которых не превосходит  $(\sqrt[n]{n} + 1)^n$  \*). Однако эта оценка является, конечно, неточной и слишком далеко отходит от гипотезы Борсука. Например, оценка Ленца гарантирует возможность разбить любое четырехмерное тело на 81 часть меньшего диаметра, в то время как гипотеза Борсука требует установить возможность разбиения четырехмерного тела на пять частей меньшего диаметра! В самое последнее время Данцер [12] дал более сильную оценку

$$a(F) < \sqrt{\frac{(n+2)^3}{3}} \cdot (2 + \sqrt{2})^{\frac{n-1}{2}}.$$

(Для четырехмерных тел эта оценка устанавливает возможность разбиения на 55 частей меньшего диаметра!)

\*) Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через  $m$  целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\sqrt[n]{n} < m \leq \sqrt[n]{n} + 1.$$

Далее, заключим  $n$ -мерное тело  $F$  диаметра  $d$  в куб с ребром  $d$  и каждое из ребер этого куба разделим на  $m$  равных частей. Проводя теперь через точки деления гиперплоскости, параллельные граням куба, мы разобьем этот куб на  $m^n$  меньших кубиков с ребром  $\frac{d}{m}$ .

Диаметр каждого из этих кубиков равен  $\frac{d}{m} \sqrt[n]{n}$  и потому меньше  $d$ :

$$\frac{d}{m} \sqrt[n]{n} < \frac{d}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{n} = d.$$

Построенное разбиение на кубики порождает разбиение тела  $F$  на части диаметра  $< d$ , причем число этих частей не превосходит  $m^n$ , т. е. давно не превосходит  $(\sqrt[n]{n} + 1)^n$ .

## ГЛАВА 2

# ПОКРЫТИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ ГОМОТЕТИЧНЫМИ ТЕЛАМИ И ЗАДАЧА ОСВЕЩЕНИЯ

### § 7. Выпуклые фигуры

Плоская фигура  $F$  называется *выпуклой*, если вместе с каждым двумя точками  $A$  и  $B$  она содержит и весь соединяющий их отрезок  $AB$  (рис. 39). Так, например, треугольник, параллелограмм, трапеция, круг, сегмент круга, эллипс являются примерами выпуклых фигур (рис. 40). На

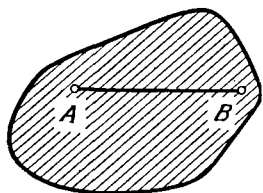


Рис. 39.

рис. 41 приведены примеры невыпуклых фигур. Фигуры, изображенные на рис. 40, являются ограниченными. Существуют также неограниченные («простирающиеся в бесконечность») выпуклые фигуры: полуплоскость, угол, меньший  $180^\circ$ , и др. (рис. 42).

Точки любой выпуклой фигуры  $F$  разделяются на два класса — *внутренние* точки и *граничные* точки. Внутренними считаются те точки, которые со всех сторон окружены точками фигуры  $F$ . Таким образом, если  $A$  — внутренняя точка фигуры  $F$ , то круг некоторого (хотя бы очень маленького) радиуса с центром в точке  $A$  целиком принадлежит фигуре  $F$  (рис. 43). К граничной же точке фигуры  $F$  как угодно близко подходят как точки, принадлежащие фигуре  $F$ , так и точки, ей не принадлежащие (точка  $B$  на рис. 43). Все граничные точки, вместе взятые, образуют некоторую линию, называемую *границей* выпуклой фигуры  $F$ . Если фигура  $F$  ограничена, то ее граница представляет собой замкнутую линию (ср. рис. 39, 40).

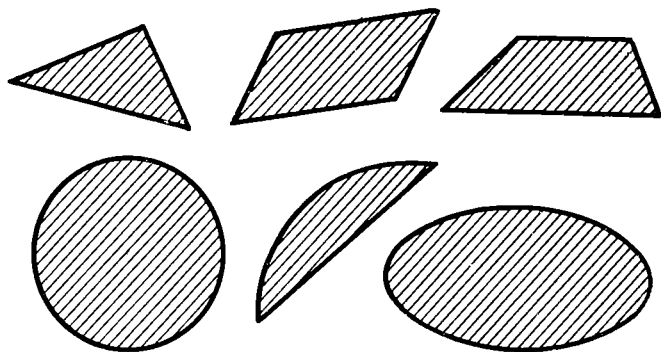


Рис. 40.

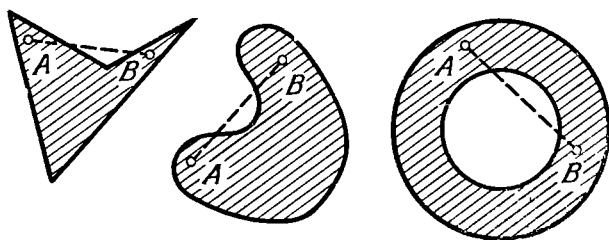


Рис. 41.

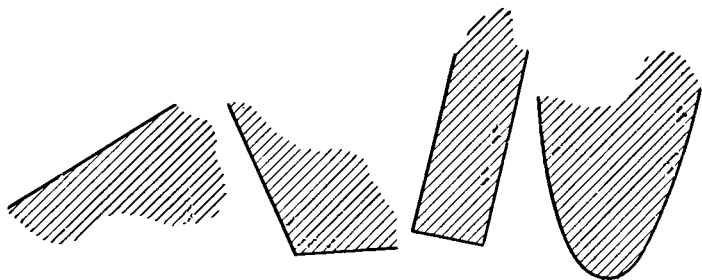


Рис. 42.



Для дальнейшего важно будет заметить, что всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку выпуклой ограниченной фигуры  $F$ , пересекает границу этой фигуры ровно в двух точках\*) (рис. 44), причем отрезок, соединяющий эти две точки, принадлежит фигуре  $F$ , а вся остальная часть этой прямой лежит вне фигуры  $F$ .

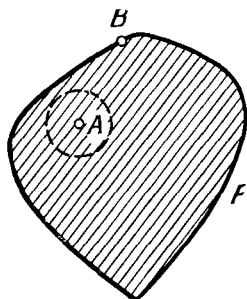


Рис. 43.

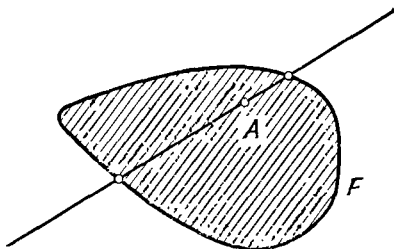
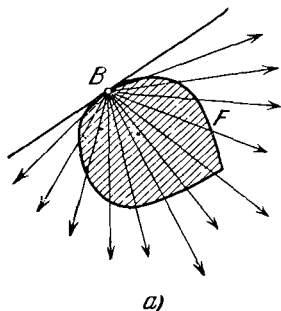
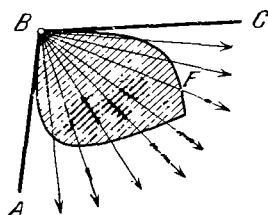


Рис. 44.



а)



б)

Рис. 45.

Пусть  $B$  — некоторая граничная точка выпуклой фигуры  $F$ . Из точки  $B$  проведем всевозможные лучи, проходящие через различные от  $B$  точки фигуры  $F$ . Эти лучи либо заполнят некоторую полуплоскость (рис. 45, а), либо составят некоторый угол, меньший  $180^\circ$  (рис. 45, б). В первом случае прямая, ограничивающая полуплоскость, является опорной прямой фигуры  $F$ . Любая другая прямая, проходящая через точку  $B$ , будет рассекать фигуру

\*) Более подробные сведения о выпуклых фигурах (и, в частности, доказательства упоминаемых здесь свойств этих фигур) читатель может найти в книгах [2], [18], [28], [33], [34], [37].

на две части (рис. 46), т. е. не будет опорной. Иначе говоря, через точку  $B$  в этом случае проходит единственная опорная прямая фигуры  $F$ . Во втором случае (рис. 45, б) вся фигура  $F$  расположена внутри угла  $ABC$ , меньшего  $180^\circ$ , и потому через точку  $B$  проходит бесконечно много опорных прямых фигуры  $F$  (рис. 47). В частности, опорными являются прямые  $BA$  и  $BC$ . Лучи  $BA$  и  $BC$  (проведенные жирной линией на рис. 47) называются *полукасательными* в точке  $B$  к фигуре  $F$ .

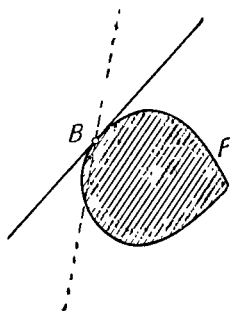


Рис. 46.

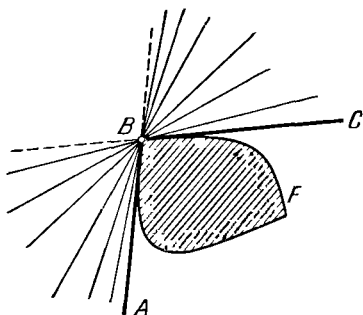


Рис. 47.

Объединяя оба случая вместе, мы видим, что *через каждую граничную точку  $B$  выпуклой фигуры  $F$  проходит хотя бы одна опорная прямая этой фигуры*. Если через точку  $B$  проходит только одна опорная прямая фигуры  $F$  (рис. 45, а), то  $B$  называется *обыкновенной* граничной точкой этой фигуры. Если же через точку  $B$  проходит бесконечно много опорных прямых фигуры  $F$ , то  $B$  называется *угловой точкой* (рис. 45, б).

## § 8. Постановка задачи о покрытии фигур гомотетичными

Пусть  $F$  — некоторая плоская фигура. Выберем на плоскости произвольную точку  $O$  и возьмем, кроме того, положительное число  $k$ . Для любой точки  $A$  фигуры  $F$  мы найдем на луче  $OA$  такую точку  $A'$ , что  $OA' : OA = k$  (рис. 48). Множество всех получаемых таким образом точек  $A'$  представляет собой новую фигуру  $F'$ . Переход от фигуры  $F$  к фигуре  $F'$  называется *гомотетией* с центром

О и коэффициентом  $k$ , а сама фигура  $F'$  называется *гомотетичной* фигуре  $F$ . (Гомотетия с отрицательным коэффициентом нам нигде в дальнейшем не понадобится, и потому мы ее не рассматриваем.) Если фигура

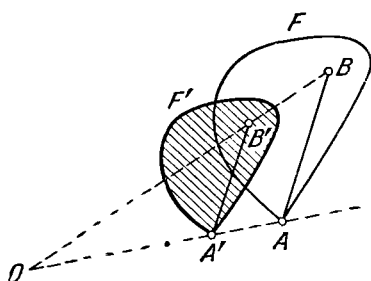


Рис. 48.

$F$  выпукла, то и гомотетичная ей фигура  $F'$  также является выпуклой (ибо если отрезок  $AB$  целиком принадлежит фигуре  $F$ , то отрезок  $A'B'$  целиком принадлежит фигуре  $F'$ ).

Заметим, что если коэффициент гомотетии  $k$  меньше единицы, то фигура  $F'$  (гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $k$ ) пред-

ставляет собой «уменьшенную копию» фигуры  $F$ .

Теперь мы поставим следующую задачу. Дана некоторая плоская выпуклая ограниченная фигура  $F$ . Найти минимальное число гомотетичных «уменьшенных копий» фигуры  $F$ , которыми можно покрыть всю фигуру  $F$ . Это минимальное число обозначим через  $b(F)$ . Более точно, если  $b(F) = m$ , то это означает, что существуют такие фигуры  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , гомотетичные фигуре  $F$  с некоторыми центрами гомотетии и с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы (хотя бы ненамного), что в своей совокупности фигуры  $F_1, F_2, \dots, F_m$  покрывают всю фигуру  $F$  (рис. 49); при этом число  $m$  минимально, т. е. меньшего чем  $m$  числа гомотетичных фигур для этой цели недостаточно.

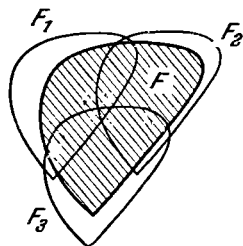


Рис. 49.

Задачу о покрытии выпуклой фигуры меньшими гомотетичными фигурами можно рассматривать не только для плоских фигур, но и для выпуклых тел в пространстве (или даже в  $n$ -мерном пространстве). Задача о том, какие значения может принимать  $b(F)$ , была поставлена в 1960 г. кишиневскими математиками И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом [6]. Несколько ранее эта задача (однако в иной формулировке) рассматривалась немецким математиком Ф. Леви ([15]; см. также проблему 14 на стр. 91).

Для примера рассмотрим случай, когда фигура  $F$  есть круг. Тогда меньшими гомотетичными фигурами являются произвольные круги меньшего диаметра. Нетрудно понять, что двумя такими кругами невозможно покрыть исходный круг  $F$ , т. е.  $b(F) \geq 3$ . В самом деле,

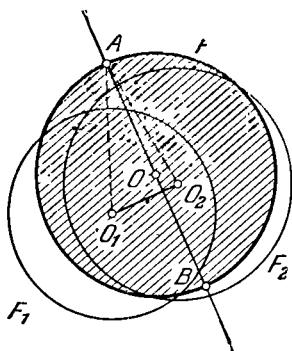


Рис. 50.

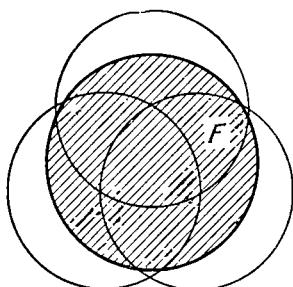


Рис. 51.

пусть  $F_1$  и  $F_2$  — два круга меньшего диаметра и  $O_1, O_2$  — их центры (рис. 50). Проведем через центр  $O$  исходного круга  $F$  перпендикуляр к линии центров  $O_1O_2$ . Этот перпендикуляр пересекает окружность круга  $F$  в двух точках  $A$  и  $B$ .

Пусть, например, точка  $A$  расположена по ту же сторону от прямой  $O_1O_2$ , что и точка  $O$  (если прямая  $O_1O_2$  проходит через точку  $O$ , то можно взять любую из точек  $A, B$ ).

Тогда  $AO_1 \geq AO = r$ ,  $AO_2 \geq AO = r$ , где  $r$  — радиус круга  $F$ . Так как круги  $F_1, F_2$  имеют радиусы, меньшие  $r$ , то точка  $A$  не принадлежит ни одному из них, т. е. круги  $F_1, F_2$  не покрывают всего круга  $F$ .

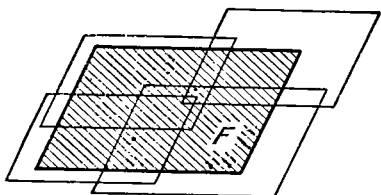


Рис. 52.

С другой стороны, круг  $F$  легко покрыть тремя кругами несколько меньшего диаметра (рис. 51). Таким образом, в случае круга  $b(F) = 3$ .

Рассмотрим еще случай, когда  $F$  представляет собой параллелограмм. Ясно, что никакой параллелограмм, гомотетичный  $F$  с коэффициентом гомотетии, меньшим

единицы, не может содержать сразу двух вершин параллелограмма  $F$ . Иначе говоря, четыре вершины параллелограмма  $F$  должны принадлежать четырём различным гомотетичным параллелограммам, т. е.  $b(F) \geq 4$ . Четырёх же гомотетичных фигур явно достаточно (рис. 52). Таким образом, в случае параллелограмма  $b(F) = 4$ .

## § 9. Другая формулировка задачи

Задаче о покрытии фигуры меньшими гомотетичными фигурами можно придать другую форму, сближающую ее с задачей Борсука о разбиении фигуры на части меньшего диаметра.

Пусть  $F$  — выпуклая фигура и  $G$  — некоторая ее часть. Будем говорить, что часть  $G$  фигуры  $F$  имеет

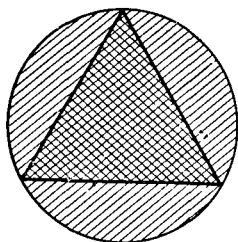


Рис. 53.

габарит, равный  $k$ , если существует фигура  $F'$ , гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $k$ , которая содержит  $G$ , но никакая фигура, гомотетичная  $F$  с коэффициентом, меньшим  $k$ , не содержит целиком  $G$  (<sup>9</sup>). Очевидно, что если часть  $G$  совпадает со всей фигурой  $F$ , то ее габарит равен 1. Поэтому для любой не совпадающей с  $F$  части  $G$  фигуры  $F$  габарит  $k \leq 1$ .

Не следует, однако, думать, что если часть  $G$  не совпадает со всей фигурой  $F$ , то ее габарит  $k$  непременно меньше единицы. Если, например,  $F$  представляет собой круг, а часть  $G$  — вписанный в него остроугольный треугольник (рис. 53), то габарит части  $G$  равен единице (ибо никакой круг меньшего диаметра не содержит целиком треугольника  $G$ ). Часть  $G$  фигуры  $F$  мы будем называть *частью меньшего габарита*, если ее габарит  $k < 1$ .

Пользуясь понятием габарита, мы можем придать определению величины  $b(F)$  другую форму:  $b(F)$  есть минимальное число частей меньшего габарита, на которые можно разбить данную выпуклую фигуру  $F$ . Нетрудно понять, что это определение величины  $b(F)$  эквивалентно предыдущему. В самом деле, пусть  $F_1, F_2, \dots, F_m$  — меньшие гомотетичные фигуры, покрывающие  $F$ . Обозначим через  $G_1, G_2, \dots, G_m$  части фигуры  $F$ , высекаемые из нее фигурами  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Очевидно, что каждая

из частей  $G_1, G_2, \dots, G_m$  фигуры  $F$  имеет габарит  $< 1$ . Таким образом, если фигура  $F$  может быть покрыта  $m$  меньшими гомотетичными фигурами, то ее можно разбить на  $m$  частей меньшего габарита. Обратно, если фигура  $F$  может быть разбита на  $m$  частей  $G_1, G_2, \dots, G_m$  меньшего габарита, то существуют фигуры  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , содержащие, соответственно, части  $G_1, G_2, \dots, G_m$  и гомотетичные фигуре  $F$  с коэффициентами, меньшими единицы. Эти фигуры  $F_1, F_2, \dots, F_m$  и образуют покрытие фигуры  $F$  меньшими гомотетичными частями.

Все сказанное (т. е. определение габарита и другое определение числа  $b(F)$ ) относится, разумеется, не только к плоским фигурам, но и к выпуклым фигурам любого числа измерений. Таким образом, задачу о покрытии выпуклой фигуры меньшими гомотетичными фигурами можно еще сформулировать, как *задачу о разбиении фигуры  $F$  на части меньшего габарита*. В этой форме она весьма напоминает изучавшуюся в главе 1 задачу Борсука.

Однако связь между этими задачами не только внешняя. В самом деле, если фигура  $F$  имеет диаметр  $d$ , то фигура, гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $k$ , имеет диаметр  $kd$ . Отсюда следует, что если выпуклая фигура  $F$  имеет диаметр  $d$ , то всякая ее часть меньшего габарита является в то же время и частью меньшего диаметра. (Обратное, вообще говоря, неверно; например, равносторонний треугольник, вписанный в круг  $F$  диаметра  $d$ , является частью меньшего диаметра, но имеет габарит, равный единице; рис. 53.) Поэтому, если выпуклая фигура  $F$  может быть разбита на  $m$  частей меньшего габарита, то она по давню может быть разбита на  $m$  частей меньшего диаметра (но, вообще говоря, не наоборот, как показывает пример параллелограмма).

Таким образом, для любой выпуклой фигуры  $F$  справедливо неравенство

$$a(F) \leq b(F). \quad (*)$$

Это утверждение справедливо как для плоских выпуклых фигур, так и для выпуклых тел любого числа измерений (см. в связи с этим проблему 7 на стр. 88).

Отметим, что задача о разбиении на части меньшего габарита относится лишь к выпуклым фигурам, в то время как задача Борсука о разбиении на части меньшего диаметра ставилась для любых (даже не-

выпуклых) фигур. Однако это несущественно; нетрудно понять, что если бы гипотеза Борсука была подтверждена

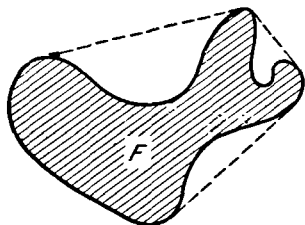


Рис. 54

для  $n$ -мерных выпуклых фигур, то отсюда вытекала бы ее справедливость и для любых  $n$ -мерных фигур. Действительно, для всякой фигуры  $F$  диаметра  $d$  существует наименьшая содержащая ее выпуклая фигура  $\bar{F}$ ; эта выпуклая фигура (рис. 54), называемая *выпуклой оболочкой* фигуры  $F$ , имеет тот же диаметр  $d$ . От-

сюда и вытекает, что возможность разбиения на  $n + 1$  частей меньшего диаметра достаточно установить только для выпуклых  $n$ -мерных фигур.

## § 10. Решение задачи для плоских фигур

Как мы видели в § 8, в задаче о покрытии выпуклой фигуры меньшими гомотетичными фигурами (в отличие от задачи Борсука) круг уже не является фигурой, требующей наибольшего числа покрывающих фигур: для параллелограмма число  $b(F)$  принимает большее значение, чем для круга.

Естественно возникает вопрос, существуют ли плоские выпуклые фигуры, для которых величина  $b(F)$  принимает еще большее значение, чем для параллелограмма? Оказывается, что таких фигур не существует; более того, среди всех плоских выпуклых фигур только для параллелограммов выполняется равенство  $b(F) = 4$ . Иными словами, имеет место следующая теорема, установленная в 1960 г. И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом [6] (несколько ранее, в 1955 г. Ф. Леви [16]) был получен другой результат, по существу совпадающий с этой теоремой; см. ниже, стр. 91, проблема 14):

**Теорема 5.** Для любой плоской ограниченной выпуклой фигуры  $F$ , не являющейся параллелограммом, справедливо равенство  $b(F) = 3$ ; если  $F$  — параллелограмм, то  $b(F) = 4$ .

Доказательство этой теоремы мы сейчас приводить не будем, так как в § 14 мы получим эту теорему как следствие других результатов. Заметим только,

что теорема 5 дает новое доказательство теоремы 1. В самом деле, если плоская фигура  $F$  не является параллелограммом, то, в силу теоремы 5,  $b(F) = 3$ , и потому  $a(F) \leq 3$  (см. неравенство (\*), стр. 45). Если же  $F$  является параллелограммом, то  $a(F) = 2$  (рис. 12, б). Таким образом, в любом случае  $a(F) \leq 3$ .

## § 11. Гипотеза Хадвигера

После решения задачи о покрытии меньшими гомотетичными фигурами для плоских выпуклых фигур естественно обратиться к рассмотрению этой задачи для пространственных тел. Для какого из выпуклых тел  $F$  в пространстве величина  $b(F)$  принимает свое наибольшее значение? Основываясь на теореме, сформулированной в предыдущем параграфе, естественно предположить, что таким выпуклым телом трехмерного пространства является параллелепипед. Для параллелепипеда величина  $b(F)$ , как легко видеть, принимает значение  $b(F) = 8$ . Действительно, никакой параллелепипед; гомотетичный  $F$  с коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, не может содержать сразу двух вершин параллелепипеда  $F$ . Следовательно, восемь вершин параллелепипеда  $F$  должны принадлежать восьми различным гомотетичным параллелепипедам, т. е.  $b(F) \geq 8$ . Восемью же гомотетичных параллелепипедов явно достаточно: например, можно разбить параллелепипед  $F$  на 8 гомотетичных (с коэффициентом  $k = 1/2$ ) параллелепипедов, получающихся, если через центр параллелепипеда  $F$  провести три плоскости, параллельные его граням.

Аналогичное положение вещей имеет место для  $n$ -мерного параллелепипеда при любом  $n$ : для него  $b(F) = 2^n$ .

Является ли это значение величины  $b(F)$  наибольшим? Иными словами, всякое ли  $n$ -мерное выпуклое тело  $F$  может быть разбито на  $2^n$  частей меньшего габарита (или, что то же самое, может быть покрыто  $2^n$  меньшими гомотетичными телами)? Если да, то являются ли  $n$ -мерные параллелепипеды единственными выпуклыми телами, для которых  $b(F) = 2^n$ ? В 1957 году Хадвигер [26] опубликовал список нерешенных геометрических проблем. Среди них находились и указанные выше задачи. Там же он высказал гипотезу, что обе эти задачи решаются утвердительно, т. е. что  $b(F) \leq 2^n$  для любого  $n$ -мерного огра-



ниченного выпуклого тела, и равенство достигается только в случае параллелепипеда. Независимо эта же гипотеза была высказана в статье И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса [6].

Эти задачи не решены до настоящего времени. Неизвестно даже их решение для  $n = 3$ . Иными словами,

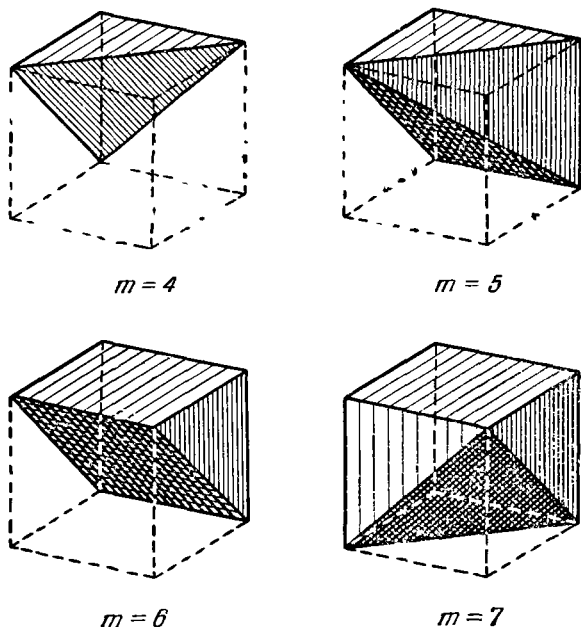


Рис. 55.

неизвестно, *всякое ли выпуклое тело трехмерного пространства может быть разбито на 8 частей меньшего габарита* (или покрыто восьмью меньшими гомотетичными телами). Более того, неизвестно решение этих задач даже для *выпуклых многогранников* (см. проблему 8 на стр. 88—89).

Впрочем, воронежские математики А. Ю. Левин и Ю. И. Петунин доказали, что для *всякого  $n$ -мерного центрально симметричного выпуклого тела  $F$*  справедливо неравенство  $b(F) \leq (n + 1)^n$ . Для трехмерных выпуклых тел это означает, что  $b(F) \leq 4^3 = 64$ . Как видим, эта оценка весьма далеко отходит от гипотезы Хадвигера. Наконец,

как нам стало известно из работы [10], недавно Роджерс получил для центрально симметричных тел оценку

$$b(F) \leq 2^n (n \ln n + n \ln \ln n + 5n).$$

Гипотеза Хадвигера дает ожидаемую верхнюю границу для величины  $b(F)$ . Нижнюю границу для этой величины можно указать точно: для любого  $n$ -мерного ограниченного выпуклого тела справедливо неравенство  $b(F) \geq n + 1$ ; в частности, для трехмерных выпуклых тел  $b(F) \geq 4$ . При этом существуют тела (например,  $n$ -мерный шар), для которых  $b(F) = n + 1$ . Доказательство неравенства  $b(F) \geq n + 1$  мы приведем ниже, см. § 15.

Заметим еще, что для любого  $m$ , удовлетворяющего неравенствам  $4 \leq m \leq 8$ , существует в трехмерном пространстве выпуклое тело (и даже многогранник), для которого  $b(F) = m$ . Эти многогранники получаются из куба «срезанием» нужного количества вершин (рис. 55).

Аналогичное положение вещей имеет место и в  $n$ -мерном пространстве: для любого  $m$ , удовлетворяющего неравенствам  $n + 1 \leq m \leq 2^n$ , существует в  $n$ -мерном пространстве ограниченное выпуклое тело (и даже многогранник), для которого  $b(F) = m$ .

## § 12. Формулировка задачи освещения

Пусть  $F$  — плоская ограниченная выпуклая фигура и  $l$  — произвольное направление в плоскости этой фигуры. Будем говорить, что граничная точка  $A$  фигуры  $F$  является точкой освещенности относительно направления  $l$ , если параллельный пучок лучей, имеющих направление  $l$ , «освещает» на границе фигуры  $F$  точку  $A$  и некоторую ее окрестность (рис. 56). Заметим, что если прямая, параллельная направлению  $l$  и проходящая через точку  $A$ , является опорной для фигуры  $F$  (рис. 57), то точку  $A$  мы не считаем точкой освещенности относительно направления  $l$ . Иначе говоря, точка  $A$  является точкой освещенности, если выполнены следующие два условия.

1°. Прямая  $p$ , параллельная направлению  $l$  и проходящая через точку  $A$ , не является опорной прямой фигуры  $F$  (т. е. на прямой  $p$  имеются внутренние точки фигуры  $F$ ).

2°. Точка  $A$  является первой точкой фигуры  $F$ , которую мы встречаем, двигаясь по прямой  $p$  в направлении  $l$ .

Условимся, далее, говорить, что направления  $l_1, l_2, \dots, l_m$  в своей совокупности достаточны для освещения границы фигуры  $F$ , если каждая граничная точка

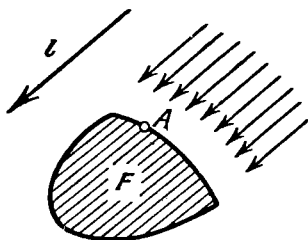


Рис. 56.

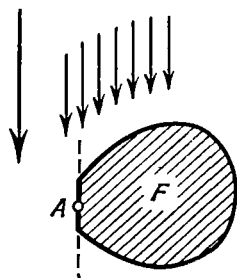


Рис. 57.

фигуры  $F$  является точкой освещенности относительно хотя бы одного из этих направлений. Наконец, обозначим

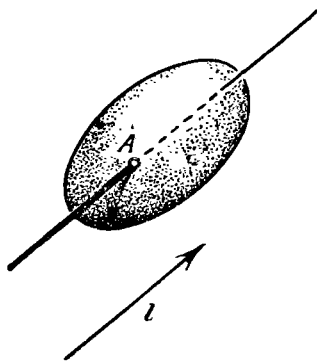


Рис. 58.

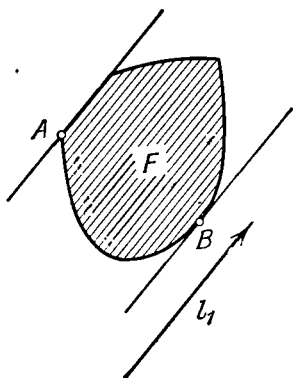


Рис. 59.

через  $s(F)$  наименьшее из таких натуральных чисел  $m$ , что на плоскости существуют  $m$  направлений, достаточных в своей совокупности для освещения всей границы фигуры  $F$ . Задачу о нахождении числа  $s(F)$ , или, как мы ее будем называть, задачей о с в е щ е

и я границы фигуры  $F$  можно рассматривать не только для плоских фигур, но и для выпуклых тел в пространстве (или даже в  $n$ -мерном пространстве). Точки освещенности определяются теми же условиями 1° и 2°, что и в

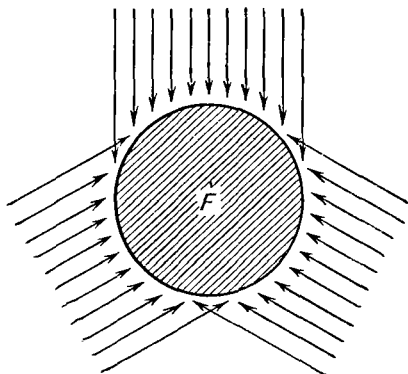


Рис. 60.

случае плоских фигур (рис. 58). Задача освещения была поставлена в 1960 г. московским математиком В. Г. Болтянским [1].

Легко доказать, что для любой плоской фигуры  $F$  величина  $s(F)$  всегда  $\geq 3$ . В самом деле, пусть  $F$  — плоская ограниченная выпуклая фигура и  $l_1, l_2$  — произвольные направления. Проведем две опорные прямые

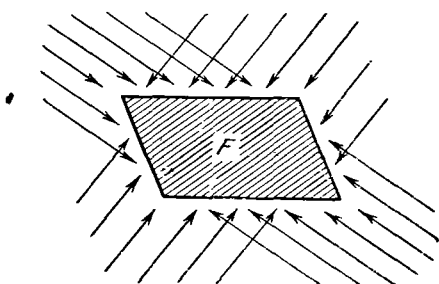


Рис. 61.

фигуры  $F$ , параллельные направлению  $l_1$ , и пусть  $A$  и  $B$  — граничные точки фигуры  $F$ , лежащие на этих опорных прямых (рис. 59). Тогда ни одна из точек  $A, B$  не

является точкой освещенности для направления  $l_1$ , а направление  $l_2$  может осветить не более чем одну из этих точек. Итак, двух направлений не достаточно для освещения всей границы фигуры  $F$ .

В случае круга (рис. 60) для освещения границы достаточно трех направлений. Для параллелограмма (рис. 61) трех направлений уже недостаточно (ибо ни одно направление не освещает сразу двух вершин параллелограмма), а четыре направления позволяют осветить всю границу параллелограмма. Иначе говоря, для круга  $c(F) = 3$ , а для параллелограмма  $c(F) = 4$ .

### § 13. Решение задачи освещения для плоских фигур

Как и в случае задачи о покрытии фигуры меньшими гомотетичными частями, в задаче освещения параллелограмм играет особую роль. Именно, имеет место следующая

**Теорема 6.** *Для любой плоской ограниченной фигуры  $F$ , не являющейся параллелограммом, справедливо равенство  $c(F) = 3$ ; если  $F$  — параллелограмм, то  $c(F) = 4$ .*

**Доказательство.**  
Предположим сначала, что фигура  $F$  не имеет ни одной угловой точки. В этом случае

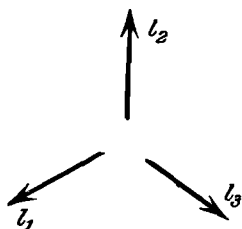


Рис. 62.

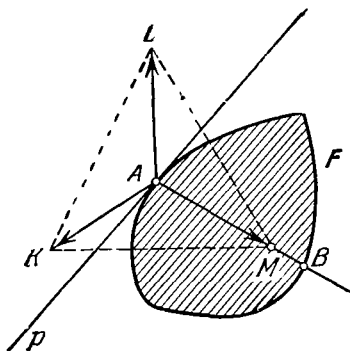


Рис. 63.

мы выберем три направления  $l_1, l_2, l_3$ , составляющие друг с другом углы  $120^\circ$  (рис. 62), и покажем, что эти три направления позволяют осветить всю границу фигуры  $F$ . В самом деле, пусть  $A$  — произвольная граничная точка фигуры  $F$  (рис. 63). Проведем опорную прямую  $p$  фигуры  $F$ , проходящую через точку  $A$ . Далее, проведем

три вектора, имеющие направления  $l_1, l_2, l_3$  и начинающиеся в точке  $A$ ; концы этих векторов обозначим соответственно через  $K, L, M$ . Тогда точка  $A$  лежит внутри треугольника  $KLM$ . Так как прямая  $p$  проходит через внутреннюю точку  $A$  треугольника  $KLM$ , то она пересекает этот треугольник на две части. Отсюда следует, что по обе стороны прямой  $p$  имеются вершины треугольника  $KLM$ . Выберем вершину треугольника  $KLM$ , расположенную по ту же сторону от  $p$ , что и фигура  $F$ ; пусть это будет, например, вершина  $M$  (соответствующая направлению  $l_3$ ). Прямая  $AM$  не является опорной для фигуры  $F$  (ибо она отлична от прямой  $p$ , а фигура  $F$  не имеет угловых точек и потому имеет в каждой граничной точке единственную опорную прямую). Иначе говоря, прямая  $AM$  пересекает фигуру  $F$ , т. е. проходит через внутренние точки этой фигуры. Границу фигуры  $F$  прямая  $AM$  пересекает в двух точках, одной из которых является точка  $A$ ; вторую точку пересечения обозначим через  $B$ . Точки  $B$  и  $M$  расположены по одну сторону от  $A$ .

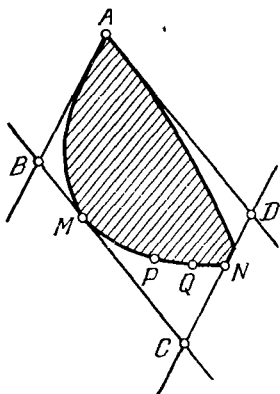


Рис. 64.

Следовательно, если мы будем двигаться по прямой  $AM$  в направлении  $l_3$ , то  $A$  будет первой встретившейся нам точкой фигуры  $F$ . Так как, кроме того, прямая  $AM$  проходит через внутренние точки фигуры  $F$ , то направление  $l_3$  освещает точку  $A$ . Итак, какова бы ни была граничная точка  $A$  фигуры  $F$ , она является точкой освещенности хотя бы для одного из направлений  $l_1, l_2, l_3$ , и потому  $c(F) = 3$ .

Теперь предположим, что фигура  $F$  имеет угловые точки, и пусть  $A$  — одна из них. Проведем в точке  $A$  две полукасательные к фигуре  $F$  и проведем еще две опорные прямые, параллельные этим полукасательным (рис. 64). Мы получим описанный вокруг фигуры  $F$  параллелограмм  $ABCD$ . Рассмотрим сначала случай, когда вершина  $C$  этого параллелограмма не принадлежит фигуре  $F$ . Ближайшие к  $C$  точки фигуры  $F$ , лежащие на сторонах  $CB$  и  $CD$ , обозначим через  $M$  и  $N$ . Точки  $M$  и

$N$  разбивают границу фигуры  $F$  на две дуги; мы рассмотрим ту из этих двух дуг, которая не содержит точки  $A$ , и возьмем на этой дуге две точки  $P$  и  $Q$ . Обозначения

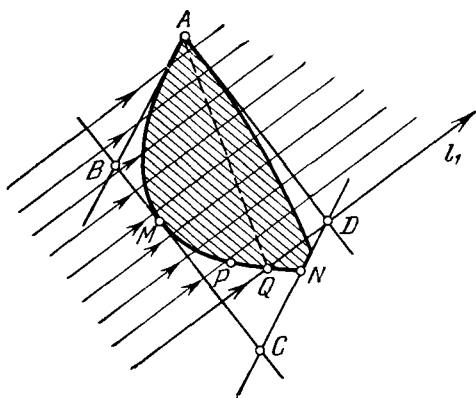


Рис. 65.

точек  $P$  и  $Q$  выберем таким образом, чтобы точки были расположены на границе фигуры  $F$  в следующем порядке:  $M, P, Q, N$ . Заметим, что точки  $P$  и  $Q$  расположены внутри параллелограмма  $ABCD$ .

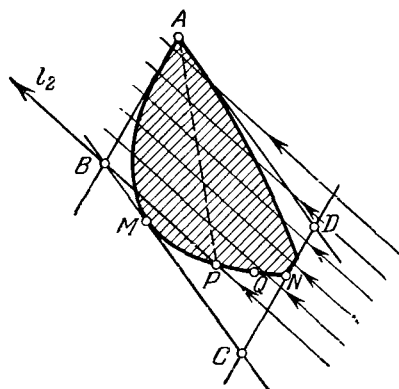


Рис. 66.

Мы покажем, что направления  $l_1 = \vec{QD}$ ,  $l_2 = \vec{PB}$  и  $l_3 = \vec{AC}$  освещают всю границу фигуры  $F$ . В самом деле, прямая  $QD$  пересекает границу фигуры  $F$  в двух точках, одной из которых является точка  $Q$  (рис. 65). Из этого легко заключить, что точка  $Q$  является точкой освещенности для направления  $l_1$ . Прово-

дя через все точки отрезка  $AQ$  прямые, параллельные  $QD$ , мы находим, что все точки дуги  $QA$ , кроме точки  $A$ , являются точками освещенности для направления  $l_1$ .

Аналогично (рис. 66) все точки дуги  $AP$ , кроме точки  $A$ , являются точками освещенности для направления  $l_2$ . Таким образом, направления  $l_1$  и  $l_2$  освещают всю границу фигуры  $F$ , кроме точки  $A$ . Точка же  $A$  освещается направлением  $l_3$ .

Итак, направления  $l_1, l_2, l_3$  освещают всю границу фигуры  $F$ , т. е.  $c(F) = 3$ .

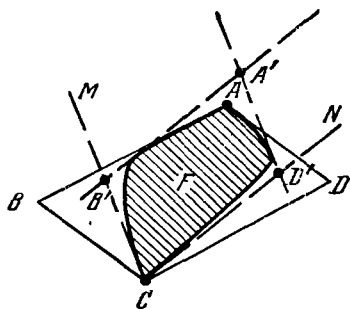


Рис. 67.

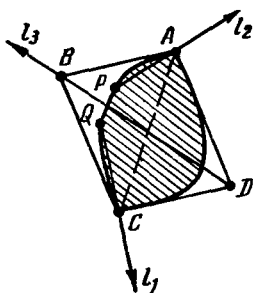


Рис. 68.

Мы рассмотрели случай, когда вершина  $C$  параллелограмма  $ABCD$  не принадлежит фигуре  $F$ . Следующий случай—когда точка  $C$  принадлежит фигуре  $F$ , но хотя бы одна из точек  $B, D$  не принадлежит этой фигуре. Пусть, для определенности, точка  $B$  не принадлежит фигуре  $F$ . Случай, когда хотя бы один из лучей  $\vec{CB}, \vec{CD}$  не является полукасательной в точке  $C$ , легко сводится к предыдущему. Достаточно провести полукасательные  $CM, CN$  и параллельные им опорные прямые фигуры  $F$  (рис. 67); в полученном описанном параллелограмме  $CB'A'D'$  вершина  $A'$ , противоположная  $C$ , не принадлежит фигуре  $F$ . Предположим поэтому, что  $\vec{CB}$  и  $\vec{CD}$ —полукасательные. Точки  $A$  и  $C$  разбивают границу фигуры  $F$  на две дуги; мы рассмотрим ту из этих двух дуг, которая расположена по ту же сторону диагонали  $AC$ , что и точка  $B$ . На этой дуге возьмем две точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри параллелограмма  $ABCD$  (рис. 68). При этом обозначения точек  $P$  и  $Q$  выберем таким образом, чтобы точки были



расположены на границе фигуры  $\check{F}$  в следующем порядке:  $A, P, Q, C$ . Мы покажем, что в рассматриваемом случае направления

$$l_1 = \overrightarrow{QC}, \quad l_2 = \overrightarrow{PA}, \quad l_3 = \overrightarrow{DB}$$

освещают всю границу фигуры  $F$ . В самом деле, проводя через все точки отрезка  $QA$  прямые, параллельные  $QC$  (рис. 69,а), мы находим, что *все точки дуги  $QA$  являются точками освещенности для направления  $l_1$* . Существенно заметить, что и  $A$  является точкой освещенности для  $l_1$ .

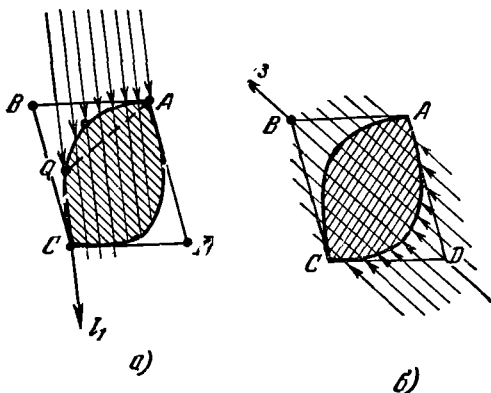


Рис. 69.

Действительно, прямая, проходящая через  $A$  параллельно  $QC$ , входит в н у т р ь параллелограмма, и потому должна проходить через внутренние точки фигуры  $F$  (ибо  $AB$  и  $AD$  — полукасательные).

Итак, направление  $l_1$  освещает все точки дуги  $AQ$ , включая точку  $A$ . Аналогично, направление  $l_2$  освещает все точки дуги  $PC$ , включая точку  $C$ . Вместе направления  $l_1$  и  $l_2$  освещают все точки дуги  $APQC$ , включая  $A$  и  $C$  (рис. 68). Оставшиеся точки освещаются направлением  $l_3$  (рис. 69,б). Таким образом,  $c(F) = 3$ .

У нас остался неразобранным лишь случай, когда все четыре вершины параллелограмма  $ABCD$  принадлежат фигуре  $F$ . Но в этом случае, в силу выпуклости, фигура  $F$  совпадает с параллелограммом  $ABCD$ , и потому  $c(F) = 4$ .

Тем самым теорема 6 полностью доказана.

## § 14. Эквивалентность двух задач

Читатель, несомненно, уже обратил внимание на то, что для круга и для параллелограмма величина  $c(F)$  принимает те же самые значения, что и  $b(F)$ . Бросается в глаза также и то, что теоремы 5 и 6 формулируются совершенно одинаково — лишь с заменой величины  $b(F)$  на  $c(F)$ . Иначе говоря, для плоских ограниченных выпуклых фигур величины  $b(F)$  и  $c(F)$  совпадают. Этот факт имеет место не только для плоских фигур, но и для выпуклых ограниченных фигур любого числа измерений. Иными словами, справедлива следующая теорема, доказанная в 1960 г. В. Г. Болтянским [1]:

*Теорема 7. Для любого  $n$ -мерного ограниченного выпуклого тела  $F$  имеет место равенство*

$$b(F) = c(F). \quad (**)$$

Эта теорема означает, что задача освещения эквивалентна задаче о покрытии выпуклого тела меньшими гомотетичными телами. Вместе с тем задача освещения, по-видимому, обладает преимуществом несколько большей наглядности. Заметим, что из теоремы 7 сразу же вытекает справедливость теоремы 5, которая выше не была доказана. Действительно, в силу равенства (\*\*) теоремы 5 и 6 непосредственно следуют одна из другой, а теорема 6 уже была доказана. (Первоначальное доказательство теоремы 5, данное И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом и не использовавшее равенства (\*\*), было сложнее, чем доказательство теоремы 6.) Заметим, далее, что равенство (\*\*) позволяет по-новому сформулировать гипотезу Хаддингера (стр. 47): *верно ли, что граница всякого  $n$ -мерного ограниченного выпуклого тела  $F$  может быть освещена с помощью  $2^n$  направлений и что, если тело  $F$  не является  $n$ -мерным параллелепипедом, то для освещения его границы достаточно  $2^n - 1$  направлений?*

Мы уже отмечали, что справедливость этой гипотезы до сих пор не установлена даже для  $n = 3$ , т. е. до сих пор не доказано, что граница любого ограниченного выпуклого тела в трехмерном пространстве может быть освещена с помощью восьми направлений. Это не доказано даже для выпуклых многогранников (см. проблему 9 на стр. 89).

Доказательство теоремы 7 проведем на примере плоских выпуклых фигур. Для выпуклых тел (любого числа измерений) доказательство проводится аналогичным образом, но с некоторыми усложнениями, которые мы отметим в примечаниях.

Предположим, что плоскую выпуклую фигуру  $F$  можно покрыть  $m$  меньшими гомотетичными фигурами  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Центр гомотетии, переводящей фигуру  $F$  в  $F_i$ , обозначим через  $O_i$ , а коэффициент этой гомотетии —

через  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Таким образом, каждое из чисел  $k_1, k_2, \dots, k_m$  меньше единицы,

Выберем теперь произвольную внутреннюю точку  $A$  фигуры  $F$ , не совпадающую ни с одной из точек  $O_1, O_2, \dots, O_m$ , и обозначим через  $l_1, l_2, \dots, l_m$  направления, определяемые лучами  $\vec{O_1A}, \vec{O_2A}, \dots,$

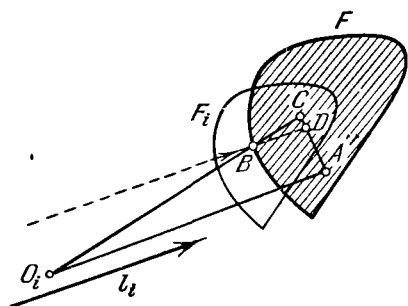


Рис. 70.

$\vec{O_mA}$ . Мы докажем, что направления  $l_1, l_2, \dots, l_m$  достаточны в своей совокупности для освещения всей границы фигуры  $F$ . В самом деле, пусть  $B$  — произвольная граничная точка фигуры  $F$  (рис. 70). Тогда точка  $B$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , — пусть, например, множеству  $F_i$ . Так как при гомотетии с центром  $O_i$  и коэффициентом  $k_i$  фигура  $F$  переходит в  $F_i$ , то найдется такая точка  $C$  фигуры  $F$ , которая при этой гомотетии переходит в точку  $B$ . Таким образом,  $O_iB : O_iC = k_i$ . Возьмем теперь на отрезке  $AC$  такую точку  $D$ , что  $AD : AC = k_i$ . Из равенства  $O_iB : O_iC = AD : AC$  вытекает, что  $BD \parallel O_iA$ , т. е. прямая  $BD$  параллельна направлению  $l_i$ . Далее, так как точка  $C$  принадлежит фигуре  $F$ , а  $A$  — внутренняя точка этой фигуры, то все точки отрезка  $AC$  (кроме, может быть, точки  $C$ ) являются внутренними точками фигуры  $F$ ; в частности,  $D$  — внутренняя точка этой фигуры.

Итак, прямая  $BD$  параллельна направлению  $l_i$  и проходит через внутреннюю точку  $D$  фигуры  $F$ . Из этого следует, что  $B$  — точка освещенности относительно на-

правления  $l_j$ . Таким образом, любая граничная точка фигуры  $F$  освещается одним из направлений  $l_1, l_2, \dots, l_m$ .

Мы доказали, что если фигура  $F$  может быть покрыта  $m$  меньшими гомотетичными фигурами, то для освещения ее границы достаточно  $m$  направлений. Следовательно, справедливо неравенство

$$c(F) \leq b(F).$$

Установим теперь справедливость обратного неравенства

$$c(F) \geq b(F).$$

Предположим, что  $s$  направлений  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  достаточны в своей совокупности для освещения всей границы фигуры  $F$ . Проведем две опорные прямые фигуры  $F$ , параллельные направлению  $l'_i$  (рис. 71), и обозначим через  $A$  и  $B$  первые точки фигуры  $F$ , которые мы встречаем, двигаясь по этим прямым в направлении  $l'_i$ . Тогда ясно, что все точки дуги  $\Delta_i$  с концами  $A, B$  (вычерченной жирно на рис. 71), кроме концевых точек  $A$  и  $B$ , являются точками освещенности относительно направления  $l'_i$ . Таким образом, множество всех точек освещенности относительно направления  $l'_i$  представляет собой некоторую дугу  $\Delta_i$  без концов; это множество мы будем называть *областью освещенности* относительно направления  $l'_i$  (<sup>10</sup>). Так как направления  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  освещают всю границу фигуры  $F$ , то соответствующие области освещенности  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  заполняют всю границу фигуры  $F$ .

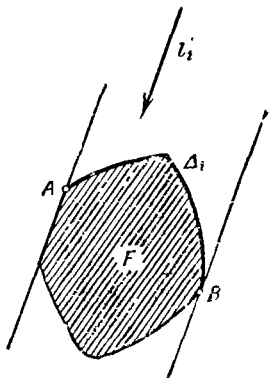


Рис. 71

Точка  $A$  на рис. 71 не является точкой освещенности относительно направления  $l'_i$ , поэтому она освещается каким-либо другим из направлений  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$ , например, направлением  $l'_j$ . Но тогда направление  $l'_j$  освещает все точки, достаточно близкие к точке  $A$ , т. е. области

освещенности  $\Delta_i$  и  $\Delta_j$  перекрываются (рис. 72). Точно так же второй конец  $B$  дуги  $\Delta_i$  покрывается еще одной областью освещенности  $\Delta_k$ .

Из того, что дуги  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ , являющиеся областями освещенности, заходят концами одна на другую, вытекает, что мы можем немножко уменьшить их, и эти уменьшенные дуги будут все еще заполнять всю границу

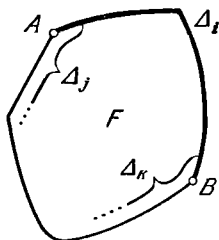


Рис. 72.

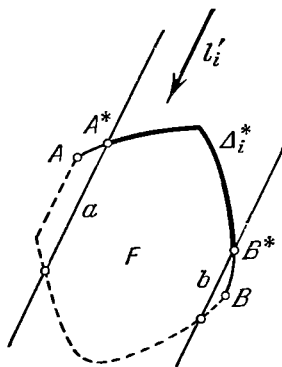


Рис. 73.

фигуры  $F$ . Иначе говоря, можно взять такие дуги  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$ , заключающиеся (вместе с концами) соответственно внутри дуг  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  (рис. 73), что вместе дуги  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$  составляют всю границу фигуры  $F$  (II).

Обозначим через  $A$  и  $B$  концы дуги  $\Delta_i$ , а через  $A^*$  и  $B^*$  — концы дуги  $\Delta_i^*$ . Прямые, проведенные через точки  $A^*$  и  $B^*$  параллельно направлению  $l'_i$ , должны проходить через внутренние точки фигуры  $F$  (ибо  $A^*$  и  $B^*$  — точки освещенности относительно направления  $l'_i$ ). Длины хорд, отсекаемых фигурой  $F$  на этих прямых, обозначим через  $a$  и  $b$  и выберем отрезок  $h_i$ , меньший чем  $a$  и  $b$ . Тогда параллелограмм, одна сторона которого совпадает с  $A^*B^*$ , а вторая параллельна  $l'_i$  и имеет длину  $h_i$ , целиком расположен внутри фигуры  $F$  (рис. 74). Отсюда следует, что на любой прямой, параллельной направлению  $l'_i$  и проходящей через какую-либо точку дуги  $\Delta_i^*$ , фигура  $F$  отсекает хорду длины  $>h_i$ . Это означает, что параллельный перенос дуги  $\Delta_i^*$  в направлении  $l'_i$  на расстояние  $h_i$

(рис. 75), переводит дугу  $\Delta_i^*$  целиком внутрь фигуры  $F$  (12). Иначе говоря, произведя параллельный перенос фигуры  $F$  в направлении, противоположном  $l'_i$ , на расстояние  $h_i$ , мы получим фигуру  $F_i^*$ , содержащую дугу  $\Delta_i^*$

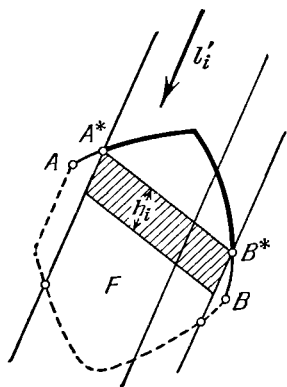


Рис. 74.

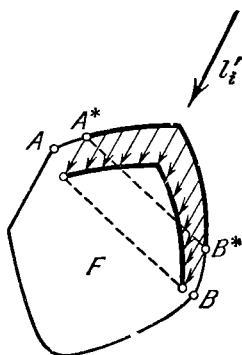


Рис. 75.

внутри себя (рис. 76). Поэтому, выбрав внутри  $F_i^*$  произвольную точку  $O_i^*$  и производя гомотегию фигуры  $F_i^*$  с центром  $O_i^*$  и коэффициентом  $k_i^* < 1$ , достаточно близ-

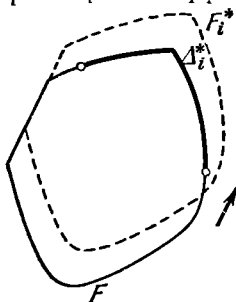


Рис. 76.

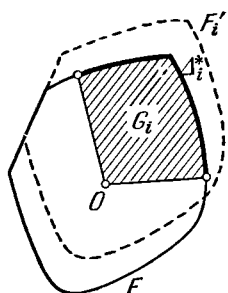


Рис. 77.

ким к единице, мы получим фигуру  $F'_i$ , гомотетичную фигуре  $F_i^*$  (а значит и фигуре  $F$ ) и содержащую дугу  $\Delta_i^*$ . Это построение мы проведем для всех  $i = 1, 2, \dots, s$  и получим фигуры  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$ , гомотетичные фигуре  $F$  с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы.

Пусть теперь  $O$  — некоторая внутренняя точка фигуры  $F$ . Мы можем предполагать предыдущие построения выполненными таким образом, что каждая из фигур  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  содержит точку  $O$  (рис. 77); для этого достаточно отрезки  $h_i$  взять достаточно малыми, а коэффициенты  $k_i$  — достаточно близкими к единице.

Обозначим, наконец, через  $G_i$  «сектор» с вершиной  $O$  и дугой  $\Delta_i^*$  (этот сектор заштрихован на рис. 77). Так как фигура  $F'_i$  выпукла, и, кроме того, содержит дугу  $\Delta_i^*$  и точку  $O$ , то фигура  $F'_i$  содержит весь сектор  $G_i$ . Следовательно, вместе взятые фигуры  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  содержат все секторы  $G_1, G_2, \dots, G_s$ . Но ясно, что секторы  $G_1, G_2, \dots, G_s$  заполняют всю фигуру  $F$  (ибо дуги  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$  покрывают всю границу фигуры  $F$ ). Поэтому фигуры  $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$  покрывают всю фигуру  $F$  (13).

Мы доказали, что если вся граница фигуры  $F$  может быть освещена с направлениями, то фигура  $F$  может быть покрыта с меньшими гомотетичными фигурами. Следовательно, справедливо неравенство

$$b(F) \leq c(F).$$

Из доказанных неравенств  $c(F) \leq b(F)$ ,  $b(F) \leq c(F)$  и вытекает справедливость равенства

$$b(F) = c(F),$$

составляющего содержание теоремы 7.

## § 15. Некоторые оценки для величины $c(F)$

Здесь мы докажем две несложных теоремы, которые, в частности, полностью решают вопрос о значении величины  $c(F)$  для выпуклых фигур с гладкой границей.

**Теорема 8.** *Для любого  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  справедливо неравенство  $c(F) \geq n + 1$ .*

**Доказательство** мы проведем для трехмерных выпуклых тел ( $n = 3$ ); для других значений  $n$  доказательство совершенно аналогично.

Пусть  $F$  — произвольное трехмерное выпуклое тело и  $l_1, l_2, l_3$  — три произвольных направления. Докажем, что эти направления не позволяют осветить всю границу тела  $F$ . Лучи  $l_1, l_2, l_3$  будем считать исходящими из одной

точки  $O$ . Проведем плоскость  $\Gamma$ , проходящую через лучи  $l_1, l_2$ . Эту плоскость мы условимся считать «горизонтальной», а то из двух определяемых этой гиперплоскостью полупространств, в котором лежит последний луч  $l_3$ — «верхним» полупространством (рис. 78, а). (Если все три луча лежат в одной плоскости, то «верхним» можно считать любое из двух полупространств.) Проведем теперь к телу  $F$  горизонтальную (т. е. параллельную  $\Gamma$ ) опорную гиперплоскость  $\Gamma'$ , относительно которой тело  $F$  расположено в нижнем полупространстве (рис. 78, б),

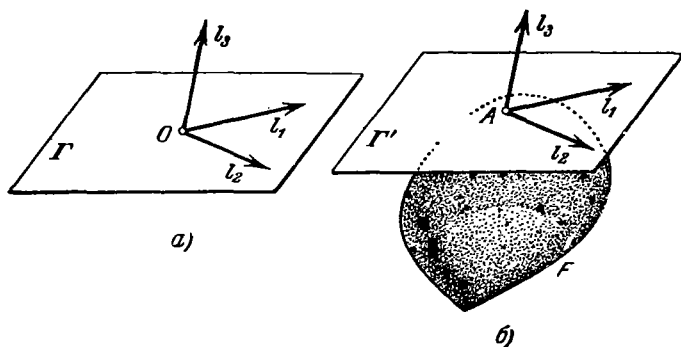


Рис. 78.

и пусть  $A$  — какая-либо общая точка плоскости  $\Gamma'$  и тела  $F$ . Тогда ни для одного из направлений  $l_1, l_2, l_3$  точка  $A$  не является точкой освещенности: лучи  $l_1, l_2$ , лежащие в опорной плоскости  $\Gamma'$ , очевидно, не освещают точку  $A$ , а луч  $l_3$  также эту точку не освещает, ибо он исходит из точки  $A$  в верхнее полупространство, а тело  $F$  расположено в нижнем полупространстве. Таким образом, трех направлений недостаточно для освещения границы тела  $F$ , и потому  $s(F) \geq 4$ .

**Теорема 9.** Если  $F$  — выпуклое  $n$ -мерное тело с гладкой границей, то для освещения его границы достаточно  $n + 1$  направлений, т. е.  $s(F) = n + 1$ .

Доказательство этой теоремы для  $n = 2$  (т. е. для плоских выпуклых фигур с гладкой границей) мы уже приводили выше (см. начало доказательства теоремы б). Для произвольного  $n$  доказательство аналогично. Именно, возьмем произвольный  $n$ -мерный симплекс (т. е. « $n$ -мерный тетраэдр») и из его внутренней точки  $O$



проведем  $n + 1$  лучей к его вершинам  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  (рис. 79). Это и даст нам  $n + 1$  направлений  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ , достаточных для освещения границы  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  с гладкой границей. В самом деле, пусть  $A$  — произвольная граничная точка тела  $F$  и  $\Gamma$  — проходящая через эту точку опорная гиперплоскость тела  $F$ . Произведем параллельный перенос симплекса с вершинами

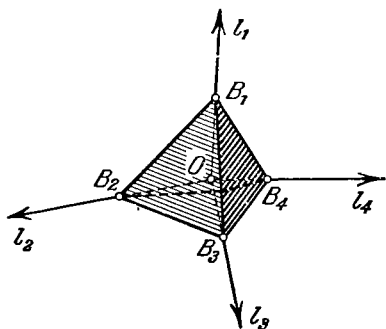


Рис. 79.

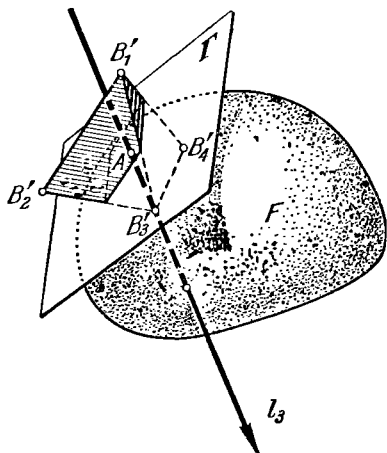


Рис. 80.

$B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ , переводящий точку  $O$  в точку  $A$  (рис. 80); вершины симплекса в этом новом положении обозначим через  $B'_1, B'_2, \dots, B'_{n+1}$ . Так как гиперплоскость  $\Gamma$  проходит через внутреннюю точку  $A$  симплекса  $B'_1 B'_2 \dots B'_{n+1}$ , то она пересекает этот симплекс, т. е. по обе стороны от  $\Gamma$  имеются точки этого симплекса. Пусть  $B'_i$  — вершина, лежащая по ту же сторону от  $\Gamma$ , что и тело  $F$  (вершина  $B'_3$  на рис. 80). Прямая  $AB'_i$  не является опорной для тела  $F$  (ибо тело  $F$  не имеет угловых точек, и потому все его опорные прямые, проходящие через точку  $A$ , лежат в гиперплоскости  $\Gamma$ ). Иначе говоря, прямая  $AB'_i$  (параллельная  $OB_i$ , т. е. имеющая направление  $l_i$ ) проходит через внутренние точки тела  $F$ . Отсюда легко заключить, что направление  $l_i$  освещает точку  $A$ . Итак, направления  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  освещают всю границу тела  $F$ , т. е.  $c(F) \leq n + 1$ . Но в теореме 8 имеется обратное неравенство; таким образом,  $c(F) = n + 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Несколько усложняя это доказательство, можно получить следующую теорему, доказанную в 1960 г. В. Г. Болтянским [11]: если  $n$ -мерное выпуклое тело имеет не более  $n$  угловых точек, то  $c(F) = n + 1$  (\*\*). (См. в связи с этим проблему 10 на стр. 89.)

**С л е д с т в и е.** Для любого  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  справедливо неравенство

$$b(F) \geq n + 1.$$

Если тело  $F$  обладает гладкой границей (или имеет не более  $n$  угловых точек), то

$$a(F) \leq b(F) = n + 1.$$

Таким образом, для  $n$ -мерных выпуклых тел с гладкой границей (и даже для  $n$ -мерных выпуклых тел, имеющих не более  $n$  угловых точек) гипотеза Борсука справедлива.

Это непосредственно вытекает из соотношений (\*) и (\*\*\*) (см. стр. 45 и 57). Таким образом, мы получили здесь новое доказательство теоремы Хадвигера (теорема 4 на стр. 34), и даже несколько более сильный результат.

## § 16. Разбиение и освещение неограниченных выпуклых фигур

Здесь будут изложены результаты, принадлежащие, главным образом, кишиневскому математику П. С. Солтану. Доказательств мы, как правило, не приводим, отсылая читателя к оригинальной статье П. С. Солтана [22].

Для неограниченных выпуклых фигур (ср. рис. 42) задача Борсука теряет смысл, так как диаметр фигуры становится бесконечным. Однако задача освещения и задача покрытия фигуры меньшими гомотетичными фигурами (т. е. фигурами, гомотетичными заданной, с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы) по-прежнему сохраняют смысл. Здесь нас с самого же начала ожидает «сюрприз»: теорема 7 о равенстве величин  $b(F)$  и  $c(F)$  перестает быть справедливой для неограниченных выпуклых фигур.

Проще всего это увидеть на примере выпуклой фигуры, ограниченной параболой  $P$ . Граница  $P$  этой выпуклой фигуры  $F$  может быть освещена одним

направлением, т. е.  $c(F) = 1$  (рис. 81, а). В то же время, как мы сейчас увидим, фигуру  $F$  невозможно покрыть никаким конечным числом меньших гомотетичных фигур, т. е.  $b(F) = \infty$ . В самом деле, пусть  $F'$  — фигура,

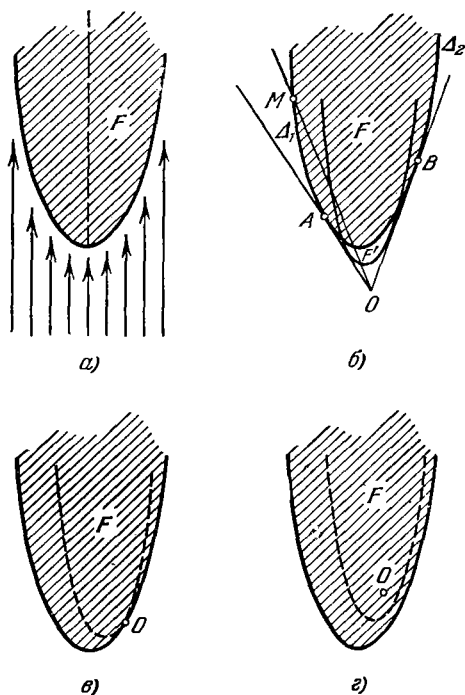


Рис. 81.

гомотетичная фигура  $F$  с коэффициентом гомотетии  $k < 1$  и центром гомотетии  $O$ , расположенным вне фигуры  $F$  (рис. 81, б). Проведем из точки  $O$  касательные  $OA$  и  $OB$  к параболу  $P$ , ограничивающей фигуру  $F$ . Точки  $A$  и  $B$  делят параболу  $P$  на три части: дугу  $AB$  и две бесконечные дуги  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , оканчивающиеся в точках  $A$  и  $B$ . Ясно, что фигура  $F'$  не содержит ни одной точки дуг  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (ибо если  $M$  — какая-либо точка дуги  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ , то на прямой  $OM$  за точкой  $M$  совсем нет точек фигуры  $F$ ). Таким образом, фигура  $F'$  может содержать лишь конечный кусок параболы  $P$  (расположенный на дуге  $AB$ ). Если же центр гомотетии  $O$  принадлежит фигуре  $F$ ,

то фигура  $F'$  содержит не более одной точки параболы  $P$  (рис. 81, в, г). Таким образом, каждая фигура, гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $k < 1$ , содержит лишь конечный кусок параболы  $P$ , и потому для покрытия всей фигуры  $F$  (содержащей параболу  $P$ ) необходимо бесконечно много меньших гомотетичных фигур, т. е.  $b(F) = \infty$ .

В то же время существуют и такие неограниченные выпуклые фигуры, для которых величина  $b(F)$  конечна. Например, если  $F$  — полуполоса (заштрихованная

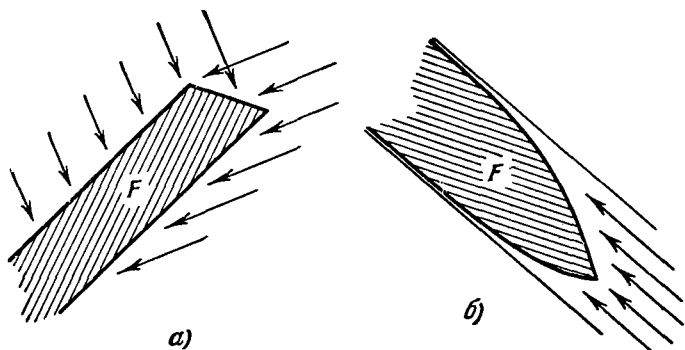


Рис. 82.

на рис. 82, а), то  $b(F) = 2$ ; заметим, что в этом случае  $c(F)$  также равно двум, т. е.  $b(F) = c(F)$ .

Наконец, существуют и такие неограниченные выпуклые фигуры, для которых обе величины  $b(F)$ ,  $c(F)$  конечны, но не совпадают между собой. Например, если фигура  $F$  расположена в полосе между двумя параллельными прямыми и асимптотически приближается к краям этой полосы (рис. 82, б), то, как легко показать,  $b(F) = 2$ ,  $c(F) = 1$ .

В связи со сказанным возникают следующие вопросы:

*Для каких неограниченных выпуклых фигур сохраняется равенство  $b(F) = c(F)$ ?*

*Для каких неограниченных выпуклых фигур величина  $b(F)$  принимает конечные значения? Существуют ли неограниченные выпуклые фигуры, для которых  $c(F) = \infty$ ? (См. также проблемы 12, 13, 14 на стр. 90—92.)*

На некоторые из этих вопросов мы здесь ответим. Прежде всего укажем, что от теоремы 7 все же кое-что остается и для неограниченных выпуклых фигур. Именно,

первая часть доказательства теоремы 7 полностью сохраняется, и потому для любой неограниченной выпуклой фигуры  $F$  справедливо неравенство

$$c(F) \leq b(F). \quad (***)$$

Теперь мы сформулируем теорему, полученную в 1963 году П. С. Солтаном (теорема 10) и дающую ответ на второй из поставленных вопросов. Пусть  $F$  — неограниченная выпуклая фигура (любого числа измерений). Возьмем произвольную внутреннюю точку  $O$  фигуры  $F$

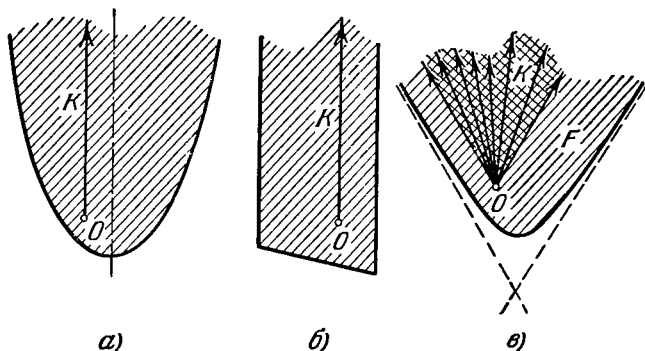


Рис. 83

и рассмотрим всевозможные лучи, исходящие из точки  $O$  и целиком содержащиеся в фигуре  $F$ . Все такие лучи, вместе взятые, образуют, как нетрудно доказать, неограниченную выпуклую фигуру  $K$ ; она называется *вписанным конусом* фигуры  $F$  с вершиной в точке  $O$ . Например, для параболы (рис. 83, а) или полуполосы (рис. 83, б) вписанный конус состоит только из одного луча, а для фигуры, изображенной на рис. 83, в (внутренняя область одной ветви гиперболы), вписанный конус представляет собой угол. (Заметим, что если вместо точки  $O$  взять в качестве вершины любую другую внутреннюю точку фигуры  $F$ , то вписанный конус не изменится, а лишь подвергнется параллельному переносу.)

Далее, неограниченную выпуклую фигуру  $F$  П. С. Солтан называет *почти конической*, если существует такой отрезок  $r$ , что все точки фигуры  $F$  находятся на расстоянии  $\leq r$  от вписанного конуса  $K$ . Так, например, фигуры,

изображенные на рис. 83, б и 83, в, являются почти коническими. В то же время фигура, изображенная на рис. 83, а, не является почти конической, так как точки параболы все более и более удаляются от ее оси.

**Т е о р е м а 10.** *Величина  $b(F)$  для неограниченной выпуклой фигуры  $F$  в том и только в том случае принимает конечное значение, если  $F$  — почти коническая фигура.*

Пусть  $F$  — неограниченная  $n$ -мерная выпуклая фигура, являющаяся почти конической, но не содержащая целиком никакой прямой; размерность вписанного конуса этой фигуры обозначим через  $q$ . П. С. Солтан строит некоторую ограниченную  $(n - q)$ -мерную выпуклую фигуру  $M$ , определяемую фигурой  $F$  <sup>(15)</sup>, и доказывает, что для этой фигуры  $M$  имеет место равенство

$$b(F) = b(M),$$

значительно уточняющее теорему 10. В частности, если  $q = n$ , то фигура  $M$  является точкой (ибо  $n - q = 0$ ), и потому  $b(F) = b(M) = 1$ , а если  $q = n - 1$ , то фигура  $M$  является отрезком (ибо  $n - q = 1$ ), и потому  $b(F) = b(M) = 2$ . Таким образом, *если  $n$ -мерная почти коническая выпуклая фигура  $F$  (не содержащая целиком никакой прямой) имеет  $n$ -мерный вписанный конус, то  $b(F) = 1$ , а если она имеет  $(n - 1)$ -мерный вписанный конус, то  $b(F) = 2$ .* В применении к плоским фигурам это дает следующий результат, найденный в 1961 г. кишиневским математиком В. Н. Визитеем [5]. Пусть  $F$  — двумерная почти коническая фигура, не содержащая целиком никакой прямой; если ее вписанный конус  $K$  является лучом, то  $b(F) = 2$ , а если  $K$  — угол, то  $b(F) = 1$ . Наконец, если двумерная выпуклая фигура содержит целиком прямую, то она может быть полосой, полуплоскостью или плоскостью; в этих случаях величина  $b(F)$  принимает соответственно значения 2, 1, 1. Тем самым для плоских неограниченных выпуклых фигур вопрос о значениях величины  $b(F)$  полностью решается.

Заметим в заключение, что П. С. Солтан построил также примеры трехмерных неограниченных выпуклых фигур, для которых  $c(F) = \infty$ . Простейший из примеров такого рода получается следующим образом. Рассмотрим обычный круговой конус (неограниченный) и проведем пересекающую его плоскость  $\Gamma$ , параллельную образующей.

Эта плоскость рассекает конус на два неограниченных выпуклых тела, из которых мы рассмотрим то, которое содержит вершину конуса. Рассматриваемое неограниченное выпуклое тело  $F$  (рис. 84) и обладает требуемым свойством:  $c(F) = \infty$ .

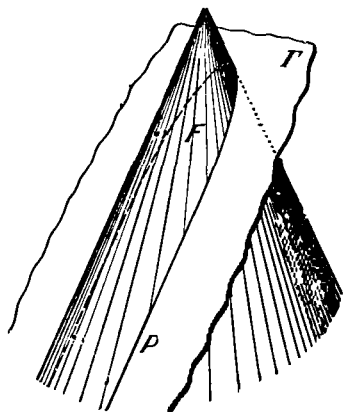


Рис. 84.

В самом деле, обозначим параболу, получающуюся в пересечении конуса с плоскостью  $\Gamma$ , через  $P$ . Каждая точка  $A$  параболы  $P$  является угловой точкой тела  $F$ , причем двугранный угол тела  $F$  в точке  $A$  (образованный плоскостью  $\Gamma$  и касательной плоскостью конуса в точке  $A$ ) стремится к нулю, когда точка  $A$  удаляется по параболе  $P$  в бесконечность. Из этого нетрудно заключить, что каждое направление мо-

жет осветить лишь конечную дугу параболы  $P$ , лежащей на границе тела  $F$ . Следовательно, чтобы осветить всю границу тела  $F$  (и, в частности, все точки параболы  $P$ ), необходимо бесконечно много направлений, т. е.  $c(F) = \infty$ .

---

## ГЛАВА 3

### НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

#### § 17. Задача Борсука в пространстве Минковского

Если выбран отрезок  $LM$ , принимаемый за единицу длины, то длина произвольного отрезка  $AB$  определяется как число, равное отношению  $AB : LM$ . Длина отрезка  $AB$  зависит только от его величины и совсем не зависит от направления и расположения этого отрезка. Однако в некоторых задачах возникает необходимость в другом определении длины отрезка, при котором длина отрезка зависит как от его величины, так и от его направления. Для определения длины в таком новом смысле необходимо задать единицу длины для каждого направления в отдельности. Весьма интересное определение такого рода было предложено в конце XIX в. известным немецким математиком Г. Минковским. Это определение мы прежде всего и рассмотрим, ограничиваясь пока лишь случаем геометрии на плоскости.

Пусть задана ограниченная плоская выпуклая фигура  $G$ , симметричная относительно некоторой точки  $O$  (рис. 85). Через  $G$  обозначим кривую, ограничивающую фигуру  $G$ . Будем считать, что единицей длины, соответствующей направлению  $l$ , является отрезок  $OL$  луча, параллельного направлению  $l$ , от точки  $O$  до точки  $L$  пересечения этого луча с линией  $G$ . Длина отрезка  $AB$  относительно новой системы масштабов определяется теперь как отношение  $AB : OL$ , где  $OL$  — единица длины, параллельная направлению  $l$ , определяемому вектором  $\overline{AB}$ . (В случае, когда точка  $A$  совпадает с точкой  $B$ , естественно считать, что длина отрезка  $AB$  равна нулю.) В дальнейшем длину отрезка  $AB$  относительно системы масштабов,



порождаемой фигурой  $G$ , мы будем обозначать символом  $\text{дл}_G AB$ . Очевидно, что  $\text{дл}_G OM = 1$  в том и только том случае, когда точка  $M$  лежит на кривой  $\Gamma$ . Если точка  $M$  лежит внутри фигуры  $G$ , то  $\text{дл}_G OM < 1$ , а если, наоборот, точка  $M$  лежит вне фигуры  $G$ , то  $\text{дл}_G OM > 1$ .

Заметим, что если фигура  $G$  совпадает с кругом, то мы приходим к обычному определению длины, при котором длина отрезка зависит только от его величины, но не от направления.

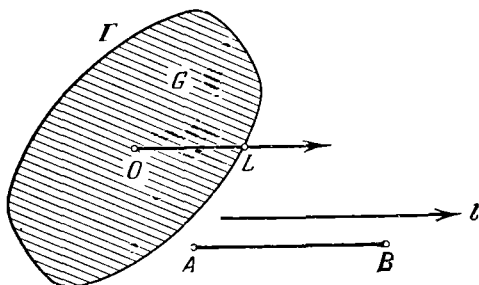


Рис. 85.

Укажем теперь основные свойства нового определения длины. Как мы уже знаем,

$$\text{дл}_G AB \geq 0,$$

причем знак равенства в последнем соотношении имеет место в том и только том случае, когда точки  $A$  и  $B$  совпадают. Кроме того, из центральной симметричности фигуры  $G$  вытекает равенство

$$\text{дл}_G AB = \text{дл}_G BA.$$

Наконец, если  $AB$  и  $CD$  — параллельные отрезки, причем  $AB : CD = k$ , то

$$\text{дл}_G AB = k \cdot \text{дл}_G CD.$$

До сих пор мы нигде не пользовались выпуклостью фигуры  $G$ . Оказывается, что выпуклость фигуры  $G$  обеспечивает справедливость следующего очень важного свойства новой длины:

*Неравенство треугольника. Во всяком треугольнике  $ABC$  длина одной из сторон (относительно*

масштабов, определяемых фигурой  $G$ ) не превосходит суммы длин двух других сторон \*).

Доказательство. Положим

$$\text{дл}_G BC = a, \quad \text{дл}_G AC = b, \quad \text{дл}_G AB = c.$$

Далее, проведем в фигуре  $G$  «радиусы»  $OP$  и  $OQ$ , имеющие то же направление, что и векторы  $\overline{BC}$  и  $\overline{CA}$  (рис. 86). Затем возьмем на отрезке  $OP$  такую точку  $M$ , что  $OM : MP = a : b$ , и проведем в треугольнике  $OPQ$  отрезок  $MN \parallel OQ$ . Мы имеем (учитывая подобие треугольников  $OPQ$  и  $MPN$ ):

$$\begin{aligned} \text{дл}_G OM &= OM : OP = \frac{a}{a+b}, \\ \text{дл}_G MN &= MN : OQ = MP : OP = \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} BC : OM &= \text{дл}_G BC : \text{дл}_G OM = a : \frac{a}{a+b} = a+b, \\ CA : MN &= \text{дл}_G CA : \text{дл}_G MN = b : \frac{b}{a+b} = a+b. \end{aligned}$$

Таким образом,  $BC : OM = CA : MN$ , кроме того,  $\angle BCA = \angle OMN$ . Отсюда вытекает, что треугольники  $BCA$  и  $OMN$  подобны, и потому  $AB \parallel ON$  и  $AB : ON = a + b$ , т. е.  $\text{дл}_G AB : \text{дл}_G ON = a + b$ . Итак,

$$\text{дл}_G ON = \frac{\text{дл}_G AB}{a+b} = \frac{c}{a+b}.$$

Но точки  $P$  и  $Q$  принадлежат фигуре  $G$ . В силу выпуклости этой фигуры весь отрезок  $PQ$  принадлежит ей, и, в частности, точка  $N$  принадлежит фигуре  $G$ . Отсюда следует, что  $\text{дл}_G ON \leq 1$ , т. е.  $\frac{c}{a+b} \leq 1$ , или, наконец,

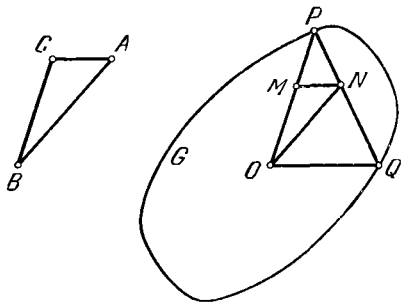


Рис. 86.

\*) В дальнейшем неравенство треугольника нам не понадобится, но для интересующегося читателя мы приведем его доказательство.

$c \leq a + b$ . Это и означает, что

$$\text{дл}_G AB \leq \text{дл}_G BC + \text{дл}_G AC.$$

Плоскость, в которой масштабы длин задаются некоторой выпуклой центрально-симметрической фигурой, называется *плоскостью Минковского*. Аналогично определяется  $n$ -мерное *пространство Минковского*, т. е. пространство, в котором масштабы длин задаются выпуклым центрально-симметричным телом  $G$ ; это тело  $G$  иногда называют *единичным шаром* пространства Минковского.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи Борсука в пространстве Минковского. Рассмотренные в предыдущих параграфах задачи по-разному ведут себя при замене обычных плоскости или пространства плоскостью или пространством Минковского. Дело в том, что в задаче покрытия меньшими гомотетичными фигурами и задаче освещения вообще не фигурируют длины отрезков, а следовательно, постановки этих задач не зависят от того, каким образом эти длины определены. Такие задачи называются *аффинными*.

Иначе обстоит дело с задачей Борсука. В этой задаче фигура диаметра  $d$  должна быть разбита на части меньших диаметров. Ясно, что диаметр как всей фигуры, так и ее частей существенно зависит от того, каким способом определяются длины отрезков.

Например, при обычном определении длины параллелограмм можно разбить на две части меньшего диаметра (рис. 12, б). Если же этот параллелограмм рассматривается в плоскости Минковского, где он сам играет роль фигуры  $G$ , задающей масштабы длин, то «диаметр» всего параллелограмма и указанных его частей, очевидно, равен двум. Это вытекает из того, что в рассматриваемой плоскости Минковского «длина» каждой стороны и каждой диагонали этого параллелограмма равна двум. Поэтому в рассматриваемом случае параллелограмм нельзя разбить на три части меньшего «диаметра». Однако четырех частей для такого разбиения уже достаточно.

Таким образом, число  $a(F)$  зависит от выбора фигуры  $G$ , играющей в плоскости Минковского роль единичного круга. Поэтому число  $a(F)$  при рассмотрении задачи Борсука для плоскости (или пространства) Минковского мы будем в дальнейшем обозначать через  $a_G(F)$ .

Задача нахождения величины  $a_G(F)$  была рассмотрена в 1957 году Грюнбаумом [8], которому принадлежит также основная часть доказываемой ниже теоремы 11. Однако, доказательство Грюнбаума сложнее приводимого здесь.

**Теорема 11.** Для любой плоской ограниченной фигуры  $F$  имеет место соотношение

$$a_G(F) \leq 4,$$

причем знак равенства достигается в том и только том случае, если фигуры  $G$  и  $F$  являются гомотетичными параллелограммами.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что неравенство (\*) сохраняет свою силу и в случае пространства Минковского:

$$a_G(F) \leq b(F). \quad (****)$$

Это устанавливается точно так же, как и неравенство (\*) (стр. 45). Следовательно, если фигура  $F$  не является параллелограммом, то, в силу теоремы 5,  $a_G(F) \leq b(F) = 3$ .

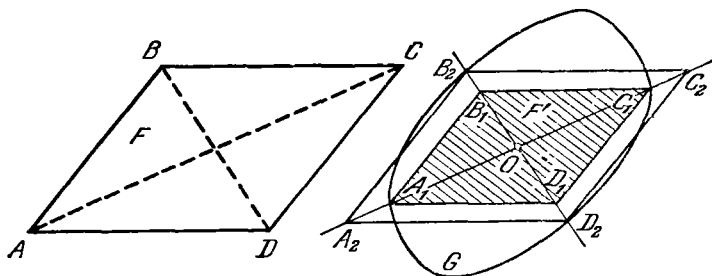


Рис. 87

Пусть теперь  $F$  — параллелограмм. Проведем через центр  $O$  фигуры  $G$  две прямые, параллельные диагоналям параллелограмма  $F$ , и обозначим через  $A_1C_1$  и  $B_2D_2$  отрезки, высекаемые фигурой  $G$  на этих прямых. На отрезках  $A_1C_1$  и  $B_2D_2$ , как на диагоналях, построим два параллелограмма со сторонами, параллельными сторонам параллелограмма  $F$  (рис. 87). Обозначим через  $F'$  меньший из этих двух параллелограммов; пусть это будет параллелограмм  $A_1B_1C_1D_1$  с диагональю  $A_1C_1$ . Так как параллелограммы  $F$  и  $F'$  гомотетичны, то  $a_G(F) = a_G(F')$ ,

и потому в дальнейших рассуждениях мы можем вместо  $F$  рассматривать параллелограмм  $F'$ .

Ясно, что  $d_{G A_1 C_1} = 2$ , и потому диаметр параллелограмма  $F'$  не меньше двух. (Здесь и дальше мы имеем

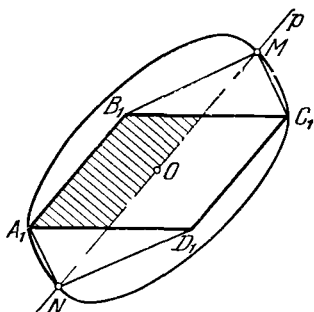


Рис. 88.

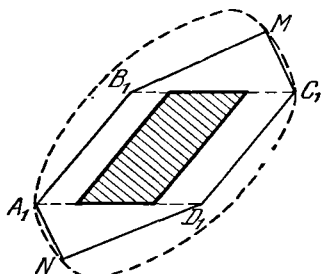


Рис. 89.

в виду «диаметры» относительно длин, определяемых фигурой  $G$ .) Но диаметр параллелограмма  $F'$  не больше двух, ибо он заключен целиком в фигуре  $G$ , имеющей диаметр 2. Итак, диаметр фигуры  $F'$  равен двум.

Проведем теперь через точку  $O$  прямую  $p$ , параллельную сторонам  $A_1 B_1$  и  $C_1 D_1$ , и обозначим через  $M$  и  $N$

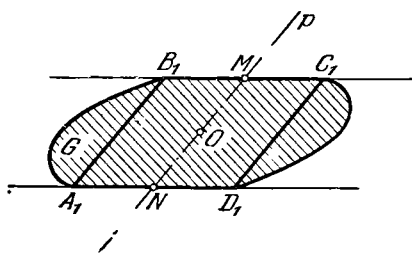


Рис. 90.

точки ее пересечения с границей фигуры  $G$ . Если точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $B_1 C_1$  и  $A_1 D_1$  параллелограмма  $F'$  (рис. 88), то весь шестиугольник  $A_1 B_1 M C_1 D_1 N$  содержится в фигуре  $G$ . Отсюда легко вытекает, что диаметр каждой из «поло-

винок», на которые прямая  $p$  пересекает параллелограмм  $F'$ , меньше двух (рис. 89), так что  $a_G(F') = 2$ . Если же точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах параллелограмма  $F'$ , то прямые  $B_1 C_1$  и  $A_1 D_1$  должны быть опорными прямыми фигуры  $G$  (ибо через граничную точку  $M$  фигуры  $G$  должна проходить опорная прямая, а всякая прямая, отличная от  $B_1 C_1$ , пересекает параллелограмм  $F'$ , а значит и фигуру  $G$ ). Таким образом, (рис. 90) вся фигура  $G$  заключена в полосе между прямыми  $B_1 C_1$  и  $A_1 D_1$ .

Итак, либо  $a_G(F') = 2$ , либо же фигура  $G$  заключена в полосу между прямыми  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$ .

Аналогично, проводя прямую  $q$ , параллельную сторонам  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$ , мы найдем, что либо  $a_G(F') = 2$ , либо же фигура  $G$  заключена в полосе между прямыми  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ . Объединяя оба случая вместе, заключаем, что либо  $a_G(F') = 2$ , либо же фигура  $G$  заключена внутри обеих указанных полос, т. е. содержится в параллелограмме  $F'$  (рис. 91). Но в последнем случае фигура  $G$  должна совпадать с параллелограммом  $F'$  (ибо она содержит параллелограмм  $F'$ ).

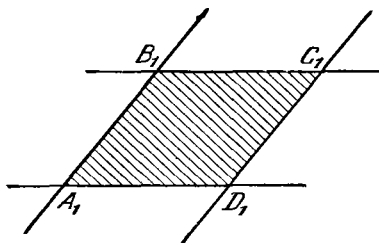


Рис. 91.

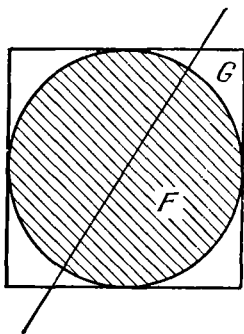


Рис. 92

Итак, либо  $a_G(F) = a_G(F') = 2$ , либо же фигура  $G$  совпадает с параллелограммом  $F'$  (т. е. гомотетична  $F$ ), и тогда, как мы уже знаем,  $a_G(F) = a_G(F') = 4$ .

Теорема доказана.

Из неравенства (\*\*\*) вытекает (в силу теоремы 9), что если тело  $F$ , расположенное в  $n$ -мерном пространстве, имеет гладкую границу (это условие может нарушаться не более чем в  $n$  точках), то, каково бы ни было центрально-симметричное выпуклое тело  $G$ , задающее масштабы, справедливо неравенство  $a_G(F) \leq n + 1$ . Однако легко видеть, что если  $F$  есть  $n$ -мерный параллелепипед, то  $a_F(F) = 2^n$ . Неравенство (\*\*\*) и гипотеза Хадвигера приводят к следующей гипотезе:

Для любого ограниченного тела  $F$ , расположенного в  $n$ -мерном пространстве Минковского с единичным шаром  $G$ , имеет место неравенство

$$a_G(F) \leq 2^n;$$

равенство  $a_G(F) = 2^n$  имеет место только для случая, когда  $G$  и  $F$  — гомотетичные параллелепипеды.

Возможно, имеет место соотношение

$$a_G(F) \leq b(G)$$

(см. проблему 15 на стр. 92). Для случая  $n = 2$  эти неравенства доказаны выше. Но уже для  $n = 3$  доказательство неизвестно. Отметим еще, что бывают случаи, когда  $a_G(F) < a(F)$ . В самом деле, если  $G$  — квадрат, а  $F$  — круг, то легко видеть, что  $a_G(F) = 2$  (рис. 92), в то время как  $a(F) = 3$ .

### § 18. Задачи Эрдеша и Кли

Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве произвольный прямоугольный параллелепипед и обозначим через  $M$  множество всех вершин этого параллелепипеда. Таким образом, если  $n = 2$ , то множество  $M$



Рис. 93.

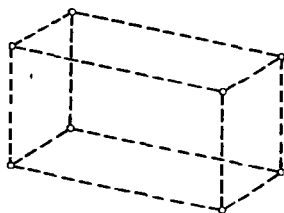


Рис. 94

состоит из четырех точек (рис. 93); при  $n = 3$  множество  $M$  состоит из восьми точек (рис. 94); вообще, для произвольного натурального  $n$  множество  $M$  состоит из  $2^n$  точек. Легко понять, что если  $A, B, C$  — любые три точки множества  $M$  (т. е. три какие-либо вершины  $n$ -мерного прямоугольного параллелепипеда), то  $\angle ABC$  не превосходит  $\frac{\pi}{2}$ . В самом деле, примем точку  $B$  за начало прямоугольной системы координат и направим оси координат по ребрам параллелепипеда (случай  $n = 3$  изображен на рис. 95). Тогда весь параллелепипед будет расположен в одном координатном угле, а именно в том, в котором все координаты неотрицательны. Поэтому все координаты векторов  $\overline{BA}$ ,  $\overline{BC}$

(а значит, и их скалярное произведение) неотрицательны, и, следовательно,  $\cos \angle ABC \geq 0$ , т. е.  $\angle ABC \leq \frac{\pi}{2}$ .

Итак, в  $n$ -мерном пространстве существует такое множество  $M$ , состоящее из  $2^n$  точек (а именно, множество всех вершин прямоугольного параллелепипеда), что для произвольно выбранных трех точек  $A, B, C$  этого множества справедливо соотношение  $\angle ABC \leq \frac{\pi}{2}$ . Существует ли в  $n$ -мерном пространстве обладающее тем же свойством множество, содержащее более чем  $2^n$  элементов? Эта задача была поставлена

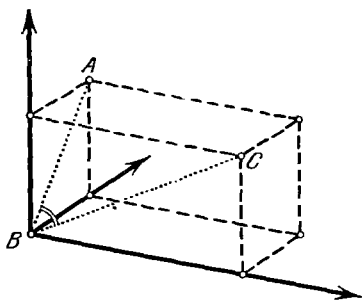


Рис. 95.

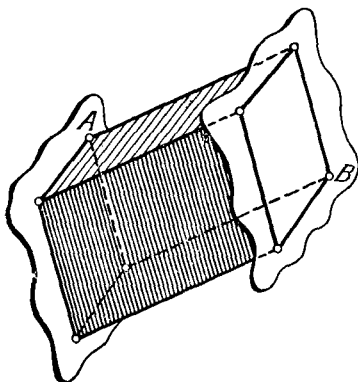


Рис. 96.

(примерно в 1950 г.) известным венгерским математиком П. Эрдешем [36]. Он предвидел, что ответ на этот вопрос отрицателен, т. е. что такое множество не может состоять более чем из  $2^n$  элементов.

С задачей Эрдеша тесно связана еще одна задача, поставленная в 1960 г. в работе американского математика Кли [14] и также возникшая из рассмотрения параллелепипедов. Обозначим снова через  $M$  множество всех вершин параллелепипеда (теперь уже не обязательно прямоугольного). Если  $A$  и  $B$  — две произвольные точки множества  $M$ , то можно найти две противоположные грани параллелепипеда, одна из которых содержит вершину  $A$ , а другая —  $B$ . Поэтому существуют две параллельные опорные плоскости множества  $M$  (плоскости этих граней), проходящие соответственно через  $A$  и через  $B$  (рис. 96). В  $n$ -мерном пространстве дело обстоит



аналогично, только надо рассматривать опорные гиперплоскости.

Итак, в  $n$ -мерном пространстве существует такое множество  $M$ , состоящее из  $2^n$  точек, что, каковы бы ни были две точки  $A$  и  $B$  этого множества, существуют две параллельные опорные гиперплоскости множества  $M$ , проходящие соответственно через  $A$  и через  $B$ . Задача Кли требует доказать, что в  $n$ -мерном пространстве не существует множества, обладающего указанным свойством и состоящего более чем из  $2^n$  элементов (при этом рассматриваются лишь множества, не лежащие целиком в одной гиперплоскости).

Нетрудно усмотреть связь, существующую между задачей Кли и задачами, рассматривавшимися в главе 2. Пусть  $N$  — множество в  $n$ -мерном пространстве, состоящее из  $m$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и обладающее «свойством Кли» (т. е. для любых двух точек  $A_i, A_j$  существуют две проходящие через них параллельные опорные гиперплоскости). Обозначим через  $V$  выпуклую оболочку точек множества  $N$ . Тогда мы имеем  $b(V) = m$ .

В самом деле, пусть  $A_i, A_j$  — две какие-либо точки множества  $N$ , а  $\alpha, \beta$  — две параллельные опорные гиперплоскости множества  $N$ , проходящие соответственно через  $A_i$  и  $A_j$ . Ясно, что  $\alpha$  и  $\beta$  будут также опорными гиперплоскостями множества  $V$ . Пусть теперь  $V'$  — тело, гомотетичное телу  $V$  с коэффициентом  $k < 1$ , и пусть  $\alpha'$  и  $\beta'$  — опорные гиперплоскости тела  $V'$ , параллельные  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда расстояние между гиперплоскостями  $\alpha'$  и  $\beta'$  меньше расстояния между  $\alpha$  и  $\beta$ , и потому обе точки  $A_i, A_j$  не могут содержаться в «полосе», ограниченной гиперплоскостями  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Тем более тело  $V'$  не может содержать одновременно обеих точек  $A_i, A_j$ . Отсюда ясно, что тело  $V'$  содержит не более чем одну из точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Таким образом, при покрытии тела  $V$  меньшими гомотетичными телами каждая из точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$  должна покрываться отдельным телом, и потому общее число меньших гомотетичных тел, покрывающих  $V$ , не меньше  $m$ , т. е.  $b(V) \geq m$ . С другой стороны, если мы выберем  $m$  направлений, освещающих вершины  $A_1, A_2, \dots, A_m$  тела  $V$ , то они, очевидно, осветят всю поверхность многогранника  $V$ . Следовательно,  $c(V) \leq m$ , и потому  $b(V) \leq m$ . Из доказанного и вытекает равенство  $b(V) = c(V) = m$ .

Может показаться, что найденная связь между задачей Кли и числом  $b(V)$  поможет в решении задачи Хадвигера. Более точно это означает следующее. Если бы удалось получить отрицательное решение задачи Кли, т. е. построить множество  $N$ , обладающее свойством Кли и состоящее более чем из  $2^n$  точек, то для выпуклой оболочки  $V$  этого множества  $N$  мы имели бы:  $b(V) > 2^n$ , т. е. получили бы отрицательное решение задачи Хадвигера. Однако, положительное решение задачи Кли ничего не дает для решения задачи Хадвигера, ибо оно означает лишь, что  $b(V) \leq 2^n$  для тел  $V$  конкретного частного вида (а не для любых выпуклых  $n$ -мерных тел). См. в связи с этим проблему 11 на стр. 90.

Как же обстоит дело в действительности с задачами Эрдеша и Кли? В 1962 г. Данцером и Грюнбаумом [13] было доказано, что обе эти задачи имеют положительное решение, т. е. имеет место следующая

**Теорема 12.** *Множество  $N$ , расположенное в  $n$ -мерном пространстве и обладающее свойством Эрдеша или свойством Кли, содержит не более  $2^n$  элементов.*

**Доказательство.** *Прежде всего покажем, что если множество  $N$  обладает свойством Эрдеша, то оно обладает и свойством Кли.* Пусть множество  $N$ , состоящее из точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , обладает свойством Эрдеша. Взяв две произвольные точки  $A_i, A_j$  множества  $N$ , проведем через эти точки две гиперплоскости, перпендикулярные отрезку  $A_i A_j$  (рис. 97). Тогда эти гиперплоскости должны быть опорными к множеству  $N$ : если бы в множестве  $N$  существовала точка  $A_k$ , расположенная, например, по другую сторону от гиперплоскости, проходящей через  $A_i$ , чем точка  $A_j$ , то угол  $\angle A_j A_i A_k$  был бы тупым, что противоречит свойству Эрдеша. Итак, через любые две точки  $A_i, A_j$  множества  $N$  проходят две параллельные опорные гиперплоскости множества  $N$ , т. е.  $N$  обладает свойством Кли.

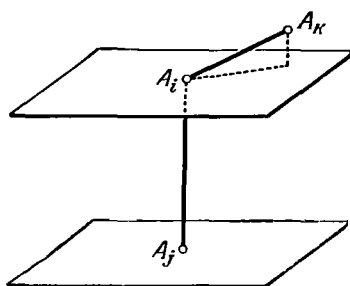


Рис. 97

Остается доказать, что в  $n$ -мерном пространстве всякое множество, обладающее свойством Кли, содержит не более  $2^n$  точек. Пусть множество  $N$ , состоящее из точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , обладает свойством Кли. Обозначим через  $V_1$  выпуклую оболочку точек множества  $N$ . Далее, через  $V_2, \dots, V_m$  обозначим тела, получающиеся из  $V_1$  параллельным переносом соответственно на векторы  $\overline{A_1 A_2}, \dots, \overline{A_1 A_m}$  (рис. 98).

Прежде всего мы установим, что тела  $V_1, V_2, \dots, V_m$  попарно не имеют общих внутренних точек. В самом деле,

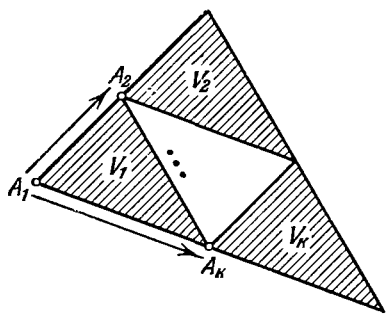


Рис. 98.

рассмотрим тела  $V_i$  и  $V_j$ . Мы проведем через точки  $A_i$  и  $A_j$  (принадлежащие телу  $V_1$ ) параллельные между собой опорные гиперплоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Условимся, для удобства, считать эти гиперплоскости «горизонтальными» и считать, что тело  $V_1$  расположено «ниже» гиперплоскости  $\alpha$ , но «выше»  $\beta$  (рис. 99). Выберем, далее, такую точку  $B$ , что

$\overline{A_1 A_j} = \overline{A_i B}$ ; тогда также  $\overline{A_1 A_i} = \overline{A_j B}$ . Иначе говоря, при параллельном переносе на вектор  $\overline{A_1 A_j}$  точка  $A_i$  переходит в  $B$ , а гиперплоскость  $\alpha$  — в гиперплоскость  $\gamma$ , проходящую через  $B$  и параллельную  $\alpha$ ; тело  $V_1$  переходит при этом в тело  $V_j$ , которое, следовательно, расположено и н и ж е гиперплоскости  $\gamma$ . Аналогично, при переносе на вектор  $\overline{A_1 A_i}$  точка  $A_j$  переходит в  $B$ , гиперплоскость  $\alpha$  — в ту же гиперплоскость  $\gamma$ , а  $V_1$  — в тело  $V_i$ , расположенное, следовательно, в ы ш е гиперплоскости  $\gamma$ . Итак,  $V_i$  и  $V_j$  расположены по разные стороны гиперплоскости  $\gamma$ , и потому не имеют общих внутренних точек. (Это рассуждение применимо и в том случае, если один из индексов  $i, j$  равен единице, ибо тело  $V_1$  получается из  $V_1$  переносом на нулевой вектор  $\overline{A_1 A_1}$ , подобно тому как  $V_i$  получается из  $V_1$  переносом на вектор  $\overline{A_1 A_i}$ ).

Обозначим теперь через  $V$  тело, получающееся из  $V_1$  гомотетией с центром  $A_1$  и коэффициентом 2. Мы докажем,

что все тела  $V_1, V_2, \dots, V_m$  содержатся в  $V$ . Пусть  $M$  — точка множества  $V_i$ . Тогда существует такая точка  $Q$  множества  $V_1$ , что  $\overline{QM} = \overline{A_1A_i}$  (рис. 100). Обозначим через  $P$  середину отрезка  $MA_1$ . Тогда точка  $P$  совпадает также с серединой отрезка  $QA_i$ , и потому, в силу выпуклости множества  $V_1$ , точка  $P$  принадлежит  $V_1$ . Так как, очевидно,  $\overline{A_1M} = 2 \cdot \overline{A_1P}$ , то из сказанного ясно, что точка  $M$  принадлежит  $V$ , т. е. тело  $V_i$  содержится в  $V$ .

Пусть теперь  $v$  — объем ( $n$ -мерный) тела  $V_1$ ; так как множество  $N$  не лежит в одной гиперплоскости, то

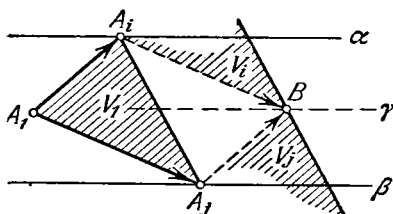


Рис. 99.

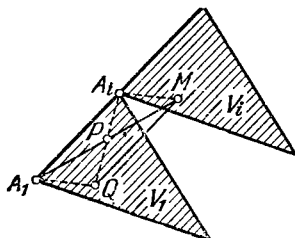


Рис. 100.

$v \neq 0$ . Каждое из тел  $V_2, \dots, V_m$  имеет тот же объем  $v$ . Кроме того, тела  $V_1, V_2, \dots, V_m$  попарно не имеют общих внутренних точек. Следовательно, общий объем, занимаемый телами  $V_1, V_2, \dots, V_m$ , равен  $mv$ . Далее, объем тела  $V$ , получающегося (в  $n$ -мерном пространстве) из  $V_1$  гомотетией с коэффициентом 2, равен  $2^n v$ . Так как все тела  $V_1, V_2, \dots, V_m$  содержатся в  $V$ , то мы имеем:  $mv \leq 2^n v$ . Наконец, вспоминая, что  $v \neq 0$ , мы и получаем отсюда требуемое неравенство  $m \leq 2^n$ .

## § 19. Некоторые нерешенные задачи

В заключение мы сформулируем некоторые проблемы — как уже упоминавшиеся ранее, так и другие, близкие к ним.

### Проблема 1

Мы начнем с основной задачи первой главы — задачи Борсука:

*Доказать, что всякое тело  $F$  диаметра  $d$ , расположенное в  $n$ -мерном пространстве, может быть разбито на*

$n + 1$  частей меньшего диаметра, т. е. что в  $n$ -мерном пространстве справедливо неравенство  $a(F) \leq n + 1$ .

Эту проблему достаточно решить только для выпуклых тел, т. е. достаточно доказать, что всякое  $n$ -мерное выпуклое тело диаметра  $d$  может быть разбито на  $n + 1$  частей меньшего диаметра.

Напомним, что эта проблема не решена для  $n \geq 4$ .

## Проблема 2

Существует еще одна задача, вполне эквивалентная задаче Борсука и связанная с рассмотрением *фигур постоянной ширины*.

Пусть  $F$  — некоторая плоская фигура и  $l$  — некоторая прямая. Проведем две опорные прямые фигуры  $F$ , перпендикулярные  $l$ ; расстояние  $h$  между этими опорными прямыми называется *шириной* фигуры  $F$  в направлении  $l$

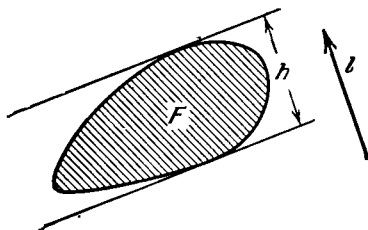


Рис. 101.

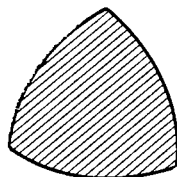


Рис. 102.

(рис. 101). Выпуклая фигура  $F$  называется *фигурой постоянной ширины*, если в любом направлении она имеет одну и ту же ширину  $d$ . Кроме круга диаметра  $d$  существует бесконечно много других фигур постоянной ширины; простейшей из них является *треугольник Релло*, ограниченный тремя дугами окружностей радиуса  $d$  (рис. 102). Аналогично, выпуклое пространственное тело называется *телом постоянной ширины*, если ширина его (т. е. расстояние между двумя параллельными опорными плоскостями) во всех направлениях одинакова.

Легко понять, что всякая фигура (или тело) постоянной ширины  $d$  имеет диаметр, равный  $d$ . Обратное, конечно, неверно: не всякая фигура диаметра  $d$  является фигурой постоянной ширины  $d$ . Однако имеет место следующая

важная теорема (см., например, книгу Боннэзен и Фенхель [2]):

*Всякая фигура диаметра  $d$  может быть вложена в некоторую фигуру постоянной ширины  $d$ . Аналогичное положение вещей имеет место и в пространстве (или в  $n$ -мерном пространстве): всякое тело диаметра  $d$  может быть вложено в некоторое тело постоянной ширины  $d$ .*

Из сформулированной теоремы непосредственно следует, что для доказательства справедливости гипотезы Борсука достаточно установить правильность этой гипотезы лишь для тел постоянной ширины. Иными словами, мы приходим к следующей задаче, эквивалентной задаче Борсука:

*Доказать, что всякое  $n$ -мерное тело постоянной ширины  $d$  может быть разбито на  $n + 1$  частей диаметра  $< d$ .*

В связи с упоминанием о телах постоянной ширины отметим еще, что в 1955 г. Ленц [17] доказал следующие теоремы:

*Никакое  $n$ -мерное тело постоянной ширины не может быть разбито на  $n$  множеств меньшего диаметра. Если же  $n$ -мерное выпуклое тело с гладкой границей не является телом постоянной ширины, то оно может быть разбито на  $n$  множеств меньшего диаметра.*

### Проблема 3

Проблема 1 (или равносильная ей проблема 2) является, по-видимому, чрезвычайно трудной. В связи с этим представляет интерес другая (возможно, несколько более легкая) проблема:

*Доказать, что всякий  $n$ -мерный выпуклый многогранник, имеющий диаметр  $d$ , может быть разбит на  $n + 1$  частей меньшего диаметра.*

Проблема не решена для  $n \geq 4$ . Заметим еще, что при рассмотрении диаметра многогранника достаточно принимать во внимание только его вершины. Поэтому поставленная проблема эквивалентна следующей:

*В  $n$ -мерном пространстве дано конечное множество точек, имеющее диаметр  $d$ . Доказать, что это множество может быть разбито на  $n + 1$  подмножеств, каждое из которых имеет диаметр  $< d$ .*

Эта проблема, независимо от общей задачи Борсука, имеет и самостоятельный интерес. Простое решение этой задачи для  $n = 2$  вытекает из одной теоремы, доказанной Эрдешем [35] в 1946 г. (см. книгу [29]). Для  $n = 3$  решение этой задачи (значительно более простое, чем общее решение проблемы Борсука для  $n = 3$ , данное Эгглстоном или Грюнбаумом) получили в 1956 г. венгерские математики Хеппеш и Ревес [31] (уже после появления работы Эгглстона, упоминавшейся на стр. 21). Для  $n \geq 4$  проблема не решена.

#### Проблема 4

Из доказательства теоремы 1 (стр. 9—12) легко заключить, что *всякая плоская фигура диаметра  $d$  может быть разбита на три части, диаметр каждой из которых не превосходит  $\frac{d\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660d$*  (так как из равенства  $PL = d$  легко вытекает, что  $PQ = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ ; см. рис. 18). Эта оценка диаметров частей является наилучшей [11], ибо, как легко видеть, *круг диаметра  $d$  нельзя разбить на три части, диаметр каждой из которых был бы меньше  $\frac{d\sqrt{3}}{2}$* .

(В самом деле, часть, имеющая диаметр  $< \frac{d\sqrt{3}}{2}$ , высекает на окружности замкнутое множество (1), крайние точки которого удалены друг от друга на угловое расстояние, меньшее  $120^\circ$ ; поэтому три таких части не покрывают всей окружности.)

В то же время мы отмечали на стр. 33, что оценка

$$\frac{\sqrt{6\,129\,030 - 937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} d \approx 0,9887d$$

не является наилучшей. Наша следующая проблема и заключается в том, чтобы *найти наилучшую оценку диаметров частей в задаче о разбиении трехмерного тела диаметра  $d$  на части меньшего диаметра*. Иными словами, речь идет о нахождении такого числа  $\alpha < 1$ , что всякое трехмерное тело диаметра  $d$  может быть разбито на четыре части, имеющие диаметры  $\leq \alpha d$ , но существует трехмерное тело диаметра  $d$ , которое не может быть разбито на четыре

части, имеющие диаметры  $< \alpha d$ . Американский математик Гэйл [11] высказал в 1953 году предположение, что  $\alpha = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}} \approx 0,888$ . Это предположение до сих пор не доказано и не опровергнуто.

## Проблема 5

Эта проблема связана с обобщением задачи Борсука в некоторых направлениях \*).

Условимся называть *радиусом*  $n$ -мерного тела радиус его  $n$ -мерного описанного шара (т. е. наименьшего шара, содержащего данное тело). Разумеется, для произвольно взятого тела радиус, вообще говоря, не равен половине диаметра. Например, в случае равностороннего треугольника радиус  $r$  и диаметр  $d$  связаны соотношением  $d = r\sqrt{3}$ .

Наша следующая проблема заключается теперь в том, чтобы доказать, что всякое  $n$ -мерное тело диаметра  $d$  может быть разбито на  $n + 1$  частей, каждая из которых имеет радиус  $< \frac{d}{2}$ . Ясно, что это — усиление проблемы Борсука (ибо всякое тело радиуса  $< \frac{d}{2}$ , очевидно, имеет диаметр  $< d$ ). Если наименьшее число частей радиуса  $< \frac{d}{2}$ , на которые может быть разбито данное тело  $F$  диаметра  $d$ , обозначить через  $a'(F)$ , то проблема может быть сформулирована следующим образом: доказать, что для любого  $n$ -мерного тела справедливо неравенство  $a'(F) \leq n + 1$ . Тот факт, что поставленная проблема является усилением проблемы Борсука, выражается очевидным неравенством  $a(F) \leq a'(F)$ .

Заметим, что для  $n = 2$  решение этой проблемы дается той же теоремой 1: легко видеть, что радиусы трех частей, на которые разбит правильный шестиугольник на рис. 18, равны  $\frac{d\sqrt{3}}{4}$ , т. е. меньше  $\frac{d}{2}$ . Для  $n = 3$  эта проблема не решена (разбиение, предложенное Грюнбаумом — теорема 3 — не позволяет утверждать, что радиусы частей

---

\*) Иные варианты проблемы Борсука и нерешенные задачи читатель может найти в интересном обзоре Грюнбаума [10].



меньше  $\frac{d}{2}$ ). Заметим еще, что для  $n$ -мерного шара диаметра  $d$  разбиение на  $n + 1$  частей радиусов  $< \frac{d}{2}$  возможно: достаточно взять разбиение, аналогичное изображенному на рис. 28.

### Проблема 6

Пусть  $F$  и  $G$  — два  $n$ -мерных тела. Будем говорить, что тело  $G$  *меньше по ширине*, чем тело  $F$ , если в любом направлении  $l$  ширина тела  $G$  меньше ширины тела  $F$ . Наименьшее число меньших по ширине частей, на которые можно разбить данное тело  $F$ , обозначим через  $b'(F)$ . Без труда доказывается, что  $a(F) \leq b'(F) \leq b(F)$ . Наша следующая проблема заключается теперь в том, чтобы доказать, что любое  $n$ -мерное тело  $F$  может быть разбито на  $2^n$  меньших по ширине частей, т. е.  $b'(F) \leq 2^n$ .

Заметим, что эта проблема *аффинна*, т. е. величина  $b'(F)$  не меняется при аффинном преобразовании тела  $F$ ; как мы знаем, величины  $a(F)$  и  $a'(F)$  этим свойством не обладали.

### Проблема 7

*Для каких классов выпуклых тел имеют место равенства*

$$a(F) = b'(F) = b(F)?$$

*В частности, справедливы ли эти равенства для тел постоянной ширины?*

Не следует думать, что величины  $b'(F)$  и  $b(F)$  тривиальным образом совпадают, т. е. что часть, меньшая по ширине, и часть меньшего габарита — это всегда одно и то же. Например, если  $F$  — круг, а его часть  $G$  является вписанным равносторонним треугольником (рис. 53), то  $G$  является меньшей по ширине частью, но габарит части  $G$  равен 1.

### Проблема 8

В качестве следующей проблемы мы напомним гипотезу Хадвигера:

*Доказать, что всякое  $n$ -мерное ограниченное выпуклое тело  $F$  может быть покрыто  $2^n$  меньшими гомотетич-*

ными телами (или, что то же самое, может быть разбито на  $2^n$  частей меньшего габарита), т. е.  $b(F) \leq 2^n$ . Доказать также, что равенство  $b(F) = 2^n$  достигается только для  $n$ -мерных параллелепипедов.

Выше (теорема 5) мы имели решение этих задач для  $n = 2$ . Уже для  $n = 3$  решение неизвестно. Более того, неизвестно решение этой проблемы даже для трехмерных многогранников:

Доказать, что любой выпуклый трехмерный многогранник  $M$  может быть покрыт восемью меньшими гомотетичными многогранниками (а если  $M$  — не параллелепипед, то — семью многогранниками).

### Проблема 9

Теорема эквивалентности (теорема 7) позволяет придать проблеме 8 другую формулировку, эквивалентную предыдущей:

Доказать, что граница всякого  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  может быть освещена при помощи  $2^n$  направлений, т. е.  $s(F) \leq 2^n$ . Доказать также, что равенство  $s(F) = 2^n$  достигается только для  $n$ -мерных параллелепипедов.

Эта проблема остается открытой уже для  $n = 3$  и даже для трехмерных многогранников:

Доказать, что границу любого выпуклого трехмерного многогранника  $M$  можно осветить восемью направлениями (а если  $M$  — не параллелепипед, то — семью направлениями).

### Проблема 10

Как мы знаем (см. замечание на стр. 65), если  $n$ -мерное выпуклое тело имеет не более  $n$  угловых точек, то  $s(F) = n + 1$ . В связи с этим возникают следующие проблемы:

Для всякого ли  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$ , имеющего  $n + 1$  угловых точек, справедливо равенство  $s(F) = n + 1$ ? (Для  $n = 2$  утвердительное решение дается теоремой 6).

Для всякого ли  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$ , у которого множество всех угловых точек имеет размерность  $\leq n - 3$ , справедливо равенство  $s(F) = n + 1$ ? В частности, для всякого ли трехмерного выпуклого тела  $F$ , имеющего лишь конечное число угловых точек, справедливо равенство  $s(F) = 4$ ?

## Проблема 11

Пусть  $F$  — произвольное  $n$ -мерное выпуклое ограниченное тело. Доказать, что на границе тела  $F$  можно таким образом выбрать  $s(F)$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_{s(F)}$ , что никакие две из этих точек не могут быть освещены одним и тем же направлением.

Заметим, что если бы удалось это доказать, то отсюда вытекало бы решение проблемы 9. В самом деле, обозначим через  $M$  многогранник с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_{s(F)}$ . Так как  $M$  содержится в теле  $F$ , то и по-прежнему, никакие две вершины многогранника  $M$  не могут быть освещены одним и тем же направлением. Поэтому если мы «отрежем» выпуклые многогранные углы многогранника  $M$  при вершинах  $A_i$  и  $A_j$  и совместим вершины этих многогранных углов при помощи параллельного переноса, то найдем, что полученные после переноса многогранные углы  $U_i$  и  $U_j$  не имеют общих внутренних точек (иначе существовало бы направление, освещающее обе вершины  $A_i, A_j$ ). Поэтому многогранные углы  $U_i, U_j$  могут быть разделены некоторой гиперплоскостью  $\Gamma$ . Проведя теперь через вершины  $A_i$  и  $A_j$  гиперплоскости, параллельные  $\Gamma$ , мы найдем, что эти гиперплоскости являются опорными для многогранника  $M$ . Таким образом, множество точек  $A_1, A_2, \dots, A_{s(F)}$  обладает свойством Кли (см. стр. 80), и потому, в силу теоремы 12,  $s(F) \leq 2^n$ .

## Проблема 12

В связи с теоремой 10 (стр. 69) возникают следующие вопросы:

*Какому условию должно удовлетворять неограниченное выпуклое  $n$ -мерное тело  $F$ , для того чтобы величина  $s(F)$  принимала конечное значение?*

*При каком условии для неограниченного выпуклого  $n$ -мерного тела  $F$  имеет место равенство  $b(F) = s(F)$ ?*

Для плоских фигур решение не представляет труда. В этом случае величина  $s(F)$  всегда принимает конечное значение, а именно, значение 2, если граница фигуры  $F$  содержит два параллельных луча, и значение 1 во всех остальных случаях (если только  $F$  не совпадает

со всей плоскостью; в этом случае задача освещения не имеет смысла).

Для  $n \geq 3$  указанные проблемы не решены.

### Проблема 13

Обозначим через  $c'(F)$  наименьшее число точечных источников света, расположенных в  $n$ -мерном пространстве, которыми можно осветить извне (рис. 103) всю границу  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$ . Как показал

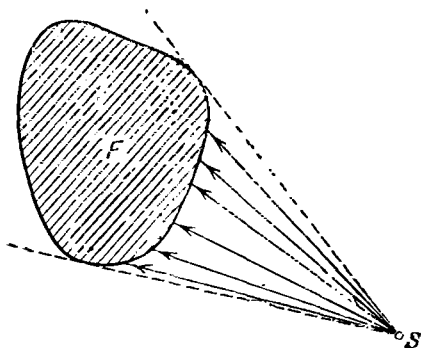


Рис. 103

П. С. Солтан, величина  $c'(F)$  удовлетворяет неравенствам  $c(F) \leq c'(F) \leq b(F)$ , так что для ограниченных выпуклых тел все три величины  $c(F)$ ,  $c'(F)$ ,  $b(F)$  совпадают. Для неограниченных тел величина  $c'(F)$ , вообще говоря, не совпадает ни с одной из величин  $b(F)$ ,  $c(F)$ . В связи с этим возникают следующие вопросы:

*Какому условию должно удовлетворять неограниченное выпуклое  $n$ -мерное тело  $F$ , для того чтобы величина  $c'(F)$  принимала конечное значение? При каких условиях справедливы равенства  $c'(F) = c(F)$ ,  $c'(F) = b(F)$ ? Для  $n=2$  эта проблема решена В. Н. Визитеем [5]: он доказал, что  $c'(F) = b(F)$  для любых плоских неограниченных фигур.*

### Проблема 14

Обозначим через  $b''(F)$  минимальное число выпуклых тел, получающихся из данного  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  параллельными переносами и обладающих тем свой-

ством, что их в н у т р е н н о с т и покрывают все тело  $F$ . Задача нахождения числа  $b''(F)$  была поставлена в 1954 г. немецким математиком Ф. Леви [15], который доказал [16], что *если плоская ограниченная выпуклая фигура  $F$  не является параллелограммом, то  $b''(F) = 3$ , а для параллелограмма  $b''(F) = 4$* . Как доказал П. С. Солтан [22], величина  $b''(F)$  удовлетворяет неравенствам  $c(F) \leq b''(F) \leq b(F)$ , так что для о г р а н и ч е н н ы х выпуклых тел все величины  $b(F)$ ,  $c(F)$ ,  $b''(F)$ ,  $c'(F)$  совпадают. Поэтому из сформулированной выше теоремы Леви непосредственно вытекает теорема 5. Для неограниченных тел величина  $b''(F)$ , вообще говоря, не совпадает ни с одной из величин  $b(F)$ ,  $c(F)$ ,  $c'(F)$ . В связи с этим возникают следующие вопросы:

*Какому условию должно удовлетворять неограниченное выпуклое  $n$ -мерное тело  $F$ , для того чтобы величина  $b''(F)$  принимала конечное значение? При каких условиях справедливы равенства  $b''(F) = b(F)$ ,  $b''(F) = c(F)$ ,  $b''(F) = c'(F)$ ?*

### Проблема 15

Напомним проблемы, связанные с геометрией Минковского (стр. 71—78):

*Доказать, что для любого ограниченного тела  $F$ , расположенного в  $n$ -мерном пространстве Минковского с единичным шаром  $G$ , имеет место неравенство*

$$a_G(F) \leq 2^n,$$

*причем равенство  $a_G(F) = 2^n$  имеет место только в случае, когда  $G$  и  $F$  — гомотетичные параллелепипеды.*

*Для любого ли тела  $F$  имеет место неравенство  $a_G(F) \leq b(G)$ ?*

Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать аналоги проблем 2—5 для пространства Минковского.

### Проблема 16

Пусть  $F$  — ограниченное выпуклое  $n$ -мерное тело. Через  $i(F)$  обозначим *на и б о л ь ш е е* из целых чисел, обладающих следующим свойством: существуют такие тела  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$ , получающиеся из  $F$  с помощью параллельных переносов, что тела  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  не перекрываются (т. е. не имеют общих внутренних точек),

но каждое из них имеет хотя бы одну общую точку с телом  $F$ . Например, если  $F$  — круг, то  $i(F) = 7$  (рис. 104), а если  $F$  — параллелограмм, то  $i(F) = 9$  (рис. 105); в обоих случаях одна из фигур  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  совпадает с исходной фигурой  $F$  (заштрихованной на рисунке), а остальные «окружают» ее. В 1961 г. Грюнбаум доказал [9], что если плоская выпуклая фигура  $F$  не является параллелограммом, то  $i(F) = 7$ , причем одна из фигур  $F_1, F_2, \dots, F_{i(F)}$  обязательно совпадает с исходной фигурой  $F$ . Кроме того, известны следующие неравенства, справедливые для любого  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$ :

$i(F) \geq n^2 + n + 1$ ; равенство достигается, например, для  $n$ -мерного симплекса (Грюнбаум, [9]);

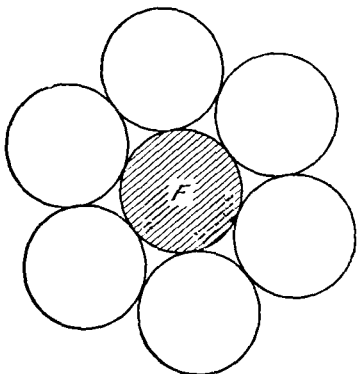


Рис. 104.

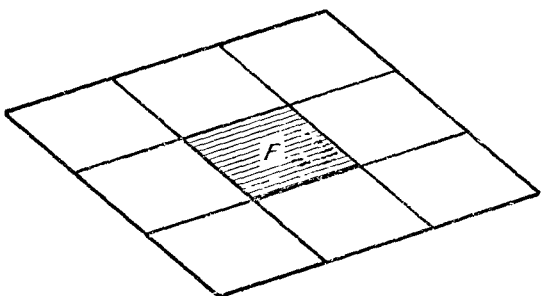


Рис. 105.

$i(F) \leq 3^n$ ; равенство достигается только для  $n$ -мерных параллелепипедов (Хадвигер, [27]).

В связи с этим Грюнбаумом была выдвинута следующая проблема:

*Доказать, что величина  $i(F)$  всегда принимает только нечетные значения, причем для любого нечетного числа  $k$ , заключенного между  $n^2 + n + 1$  и  $3^n$ , существует  $n$ -мерное выпуклое тело  $F$ , удовлетворяющее условию  $i(F) = k$ .*

## Проблема 17

Будем говорить, что фигуры  $G_1, G_2, \dots, G_k$  *окружают* фигуру  $F$ , если каждая линия, исходящая из какой-либо точки фигуры  $F$  и удаляющаяся в бесконечность,

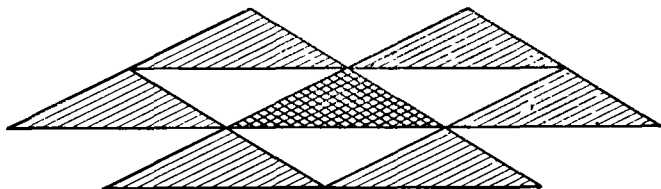


Рис. 106.

обязательно имеет общую точку хотя бы с одной из фигур  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Далее, для любого  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  обозначим через  $e(F)$  *наименьшее* из целых чисел, обладающих следующим свойством: существуют такие тела  $F_1, F_2, \dots, F_{e(F)}$ , получающиеся из  $F$  с помощью параллельных переносов, что

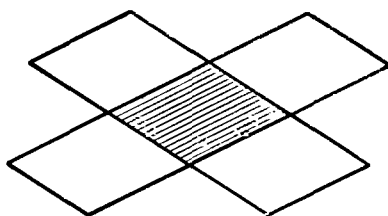


Рис. 107.

никакое из тел  $F_1, F_2, \dots, F_{e(F)}$  не перекрывается с телом  $F$  и, кроме того, тела  $F_1, F_2, \dots, F_{e(F)}$  *окружают* тело  $F$ . Грюнбаум доказал в 1961 г.

[9], что если плоская фигура  $F$  не является параллелограммом, то  $e(F) = 6$  (рис. 104, 106), а для параллелограмма  $e(F) = 4$  (рис. 107).

Какие значения может принимать величина  $e(F)$  для  $n$ -мерных выпуклых тел?

Никакие результаты в направлении решения этой проблемы при  $n \geq 3$  неизвестны.

## ПРИМЕЧАНИЯ

(<sup>1</sup>) (к стр. 6). Приведенное в тексте определение диаметра фигуры неявно предполагает, что каждая рассматриваемая «фигура» представляет собой замкнутое множество (т. е. к фигуре причисляются все ее граничные точки). Например, если  $F$  — открытый круг диаметра  $d$  (т. е. круг, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), то точная верхняя грань расстояний между двумя точками фигуры  $F$  равна  $d$ ; однако в этом случае не существует двух точек фигуры  $F$ , расстояние между которыми в точности равно  $d$ . Если же мы причислим к фигуре  $F$  все граничные точки (т. е. будем рассматривать замкнутый круг), то эта точная верхняя грань будет достигаться: найдутся две точки  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно  $d$ .

Вообще, если  $F$  — замкнутое ограниченное множество (на плоскости или в евклидовом пространстве произвольного числа измерений), то найдутся две точки  $A$  и  $B$  фигуры  $F$ , расстояние между которыми максимально. Действительно, пусть  $M$  и  $N$  — две произвольные точки множества  $F$  и  $\rho(M, N)$  — расстояние между ними. Функция  $\rho(M, N)$  непрерывна (по  $M, N$ ). Но всякая непрерывная функция (в данном случае от двух переменных  $M, N$ ), аргументы которой меняются в замкнутом ограниченном множестве, обязательно достигает своего наибольшего (и наименьшего) значения. Таким образом, найдутся такие две точки  $A$  и  $B$  фигуры  $F$ , что  $\rho(A, B) \geq \rho(M, N)$  для любых точек  $M, N$  фигуры  $F$ . Расстояние  $d = \rho(A, B)$  между такими двумя точками и представляет собой диаметр множества  $F$ .

(<sup>2</sup>) (к стр. 7). Здесь идет речь о разбиении фигуры на части и о диаметрах этих частей. В соответствии с преды-



дущим примечанием, мы будем считать, что части, на которые разбивается фигура, сами являются замкнутыми множествами. Поэтому предложение, разъясненное в тексте, уточняется следующим образом: *если круг  $F$  диаметра  $d$  каким-либо образом представлен в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств, то хотя бы одно из этих подмножеств имеет тот же диаметр  $d$* . Рассуждение, приведенное на стр. 7, конечно, не дает полного доказательства этого утверждения. Корректное доказательство выглядит так. Обозначим через  $H_1$  и  $H_2$  рассматриваемые замкнутые подмножества (так что их объединение  $H_1 \cup H_2$  дает весь круг  $F$ ). Точки множества  $H_1$ , лежащие на окружности круга  $F$ , составляют некоторое множество  $K_1$ ; аналогично определяется множество  $K_2$ . Таким образом, окружность круга  $F$  представляется в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств  $K_1$  и  $K_2$ . Если одно из этих множеств, например  $K_2$ , пусто (т. е. совсем не содержит точек), то  $K_1$  совпадает со всей окружностью; поэтому множество  $K_1$ , а значит и  $H_1$ , имеет диаметр  $d$ . Если же оба множества  $K_1$ ,  $K_2$  непусты, то они обязательно имеют общую точку  $A$  (ибо окружность связна и потому не может быть представлена в виде объединения двух непересекающихся замкнутых подмножеств). Обозначим точку, диаметрально противоположную точке  $A$ , через  $B$ , и пусть, для определенности, точка  $B$  принадлежит множеству  $K_2$ . Тогда  $K_2$  содержит обе точки  $A$ ,  $B$ . Следовательно, множество  $K_2$ , а значит и  $H_2$ , имеет диаметр  $d$ . Итак, в любом случае хотя бы одно из множеств  $H_1$ ,  $H_2$  имеет диаметр  $d$ .

(<sup>3</sup>) (к стр. 8). Сделаем еще одно замечание по поводу «разбиения» фигуры на части. Слово «разбиение» можно понимать в том смысле, что фигура  $F$  представлена в виде объединения нескольких своих замкнутых подмножеств:  $F = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m$  (именно так было в примечании (<sup>2</sup>)). В этом случае математики обычно говорят, что множества  $H_1, H_2, \dots, H_m$  составляют *покрытие* фигуры  $F$ . Однако более естественно понимать термин «разбиение» в том смысле, что замкнутые множества  $H_1, H_2, \dots, H_m$  не только составляют покрытие фигуры  $F$ , но кроме того не перекрываются друг с другом, т. е. попарно не имеют общих внутренних точек.

Легко понять, что смысл задачи о разбиении фигуры на части меньшего диаметра не меняется в зави-



конечно, строгого доказательства существования опорной прямой  $l_1$ . Строгое доказательство можно получить, например, следующим образом. Проведем прямую  $l$ , не пересекающую фигуры  $F$ , и прямую  $m \perp l$ . Примем прямые  $l$  и  $m$  за оси координат (рис. 108) и обозначим для любой точки  $A$  фигуры  $F$  через  $y(A)$  ее ординату (измеряемую вдоль прямой  $m$ ). Таким образом, на фигуре  $F$

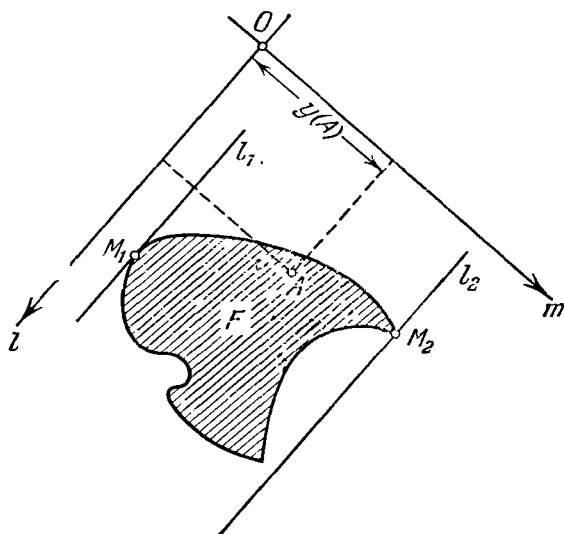


Рис. 108.

определена функция  $y(A)$ , причем эта функция непрерывна (ибо разность  $y(A) - y(A')$  не превосходит длины отрезка  $AA'$ ). Но непрерывная функция, определенная на замкнутом ограниченном множестве  $F$ , достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Иначе говоря, существуют такие точки  $M_1$  и  $M_2$  фигуры  $F$ , что  $y(M_1) \leq y(A) \leq y(M_2)$  для любой точки  $A$  этой фигуры. Но это означает, что если мы проведем через точки  $M_1$  и  $M_2$  прямые, параллельные оси абсцисс  $l$ , то вся фигура  $F$  будет заключена в полосе между этими прямыми. Таким образом, прямые  $l_1$  и  $l_2$ , проходящие через точки  $M_1$ ,  $M_2$  параллельно  $l$ , являются теми двумя опорными прямыми фигуры  $F$ , о которых идет речь в тексте (см. рис. 14).

(<sup>б</sup>) (к стр. 11). Покажем, для примера, что точка  $A$  непрерывно зависит от направления прямой  $l_1$ . Допустим, что прямая  $l_1$  повернулась на некоторый угол  $\alpha$  (рис. 109). Положение прямых  $l_1, l_2, m_1, m_2$  в этот момент обозначим

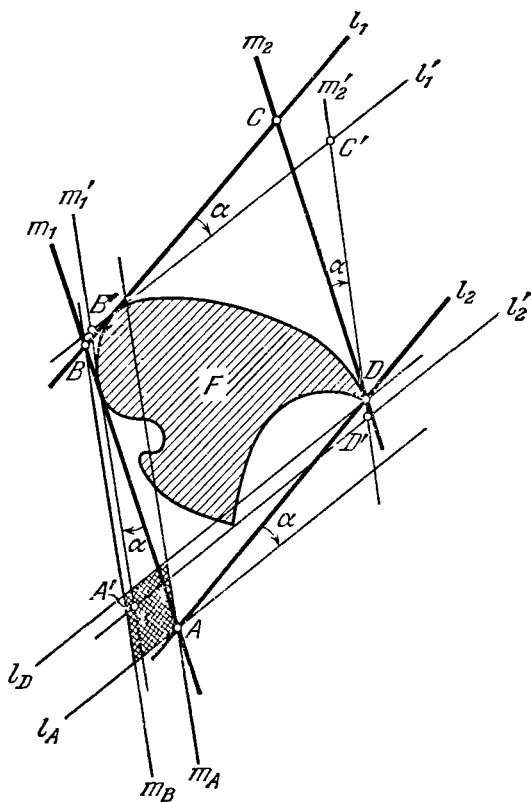


Рис. 109.

через  $l'_1, l'_2, m'_1, m'_2$ . Через точки  $A$  и  $B$  проведем прямые  $m_A$  и  $m_B$ , составляющие с  $m_1$  угол  $\alpha$  (т. е. параллельные прямой  $m'_1$ ). Так как прямая  $m_A$  пересекает фигуру  $F$ , а прямая  $m_B$  не имеет с  $F$  общих точек, то опорная прямая  $m'_1$  расположена между  $m_A$  и  $m_B$ . Аналогично, если мы проведем через точки  $A$  и  $D$  прямые  $l_A$  и  $l_D$ , состав-

ляющие с  $l_2$  угол  $\alpha$  (т. е. параллельные прямой  $l_2'$ ), то найдем, что опорная прямая  $l_2'$  расположена между  $l_A$  и  $l_D$ . Следовательно, точка  $A'$ , в которой пересекаются опорные прямые  $m_1$  и  $l_2'$ , расположена в н у т р и параллелограмма, образованного прямыми  $m_A, m_B, l_A, l_D$ . Но размеры этого параллелограмма (заштрихованного на рис. 109) могут быть сделаны как угодно малыми, если только угол  $\alpha$  достаточно мал. Таким образом, точка  $A'$  как угодно близко расположена к  $A$ , если угол  $\alpha$  достаточно мал. Это и означает, что точка  $A$  непрерывно зависит от направления прямой  $l_1$ .

Аналогичными рассуждениями можно установить и то, что точки  $C, M, N$  непрерывно зависят от направления прямой  $l_1$ .

(<sup>6</sup>) (к стр. 17). Утверждение о том, что  $q$  замкнутых линий на сфере, не пересекающих себя и не пересекающихся друг с другом, разбивают сферу на  $q + 1$  частей, является достаточно понятным. Однако строгое доказательство этого утверждения весьма непросто (оно проводится средствами топологии). Достаточно сказать, что уже при  $q = 1$  мы получаем теорему о том, что одна простая замкнутая линия разбивает сферу на две части; это знаменитая теорема Жордана, потребовавшая для своего доказательства немало усилий. В настоящее время нужное нам утверждение может быть получено как тривиальное следствие закона двойственности Л. С. Понтрягина, на чем, однако, в этой популярной книге мы останавливаться не можем. Поэтому мы ограничимся наглядной «понятностью» сформулированного утверждения.

(<sup>7</sup>) (к стр. 18). Введем на линии  $\Gamma$  параметр  $t$ , изменяющийся от 0 до 1, когда точка пробегает дугу  $\Gamma$  от  $C$  до  $C'$ . Множество  $M$  всех тех значений параметра  $t$ , для которых соответствующая точка дуги  $\Gamma$  принадлежит множеству  $N_2$ , замкнуто (ибо замкнуто множество  $N_2$ ). Следовательно, множество  $M$  содержит наибольший элемент  $t_0$ . Иначе говоря, точка дуги  $\Gamma$ , соответствующая значению параметра  $t_0$ , принадлежит множеству  $N_2$ , а точки дуги  $\Gamma$ , соответствующие большим значениям параметра, множеству  $N_2$  не принадлежат. Но это и означает, что существует последняя точка  $D$  множества  $N_2$ , встретившаяся нам при движении по линии  $\Gamma$

от  $C$  до  $C'$  (а именно, точка, соответствующая значению параметра  $t_0$ ).

Далее, если бы точка  $D$  не принадлежала множеству  $N_3$ , то расстояние от точки  $D$  до множества  $N_3$  было бы положительным (напомним, что множество  $N_3$  замкнуто). Поэтому близкие к  $D$  точки сферы  $S$  также не принадлежали бы множеству  $N_3$ .

( $\ast$ ) (к стр. 35). Заметим, что множества  $N_0, N_1, \dots, N_n$  являются замкнутыми. В самом деле, поставив в соответствие граничной точке  $A$  тела  $F$  такую граничную точку  $f(A)$  шара  $E$ , что касательные гиперплоскости в этих точках параллельны, причем тела  $F$  и  $E$  расположены по одну сторону от этих гиперплоскостей, мы получаем отображение  $f$  границы тела  $F$  в границу тела  $E$ . Это отображение однозначно определено (ибо через каждую граничную точку тела  $F$  проходит единственная опорная гиперплоскость) и, как можно доказать, непрерывно.

Далее, по определению точка  $A$  в том и только том случае принадлежит множеству  $N_i$ , если точка  $f(A)$  принадлежит множеству  $M_i$ , т. е.  $N_i = f^{-1}(M_i)$ . Так как отображение  $f$  непрерывно, а множество  $M_i$  замкнуто, то множество  $N_i = f^{-1}(M_i)$  также является замкнутым ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

( $\circ$ ) (к стр. 44). Пусть  $F$  — выпуклая ограниченная фигура и  $G$  — некоторая ее часть (т. е. замкнутое подмножество). Рассмотрим всевозможные фигуры, гомотетичные  $F$  с коэффициентами гомотетии  $\leq 1$  и содержащие фигуру  $G$ . Точную нижнюю грань всех коэффициентов гомотетии для таких гомотетичных фигур мы обозначим через  $k_0$ . Если  $k_0 = 1$ , то габарит части  $G$  равен 1 (ибо не существует фигуры, гомотетичной  $F$  с коэффициентом гомотетии  $< 1$  и содержащей фигуру  $G$ ). Пусть  $k_0 < 1$ . Тогда мы можем выбрать такую последовательность  $F_1, F_2, \dots, F_q, \dots$  фигур, гомотетичных  $F$  соответственно с центрами гомотетии  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  и коэффициентами гомотетии  $k_1, k_2, \dots, k_q, \dots$ , что каждая из этих фигур содержит  $G$  и имеет место равенство  $\lim_{q \rightarrow \infty} k_q = k_0$ .

При этом мы можем считать, что справедливы неравенства

$$1 > k_1 > k_2 > \dots > k_q > \dots > k_0.$$

Нетрудно понять, что все точки  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  расположены на расстоянии, не большем  $\frac{d}{1-k_1}$  от фигуры  $F$  (где  $d$  — диаметр фигуры  $F$ ). В самом деле, допустим, что точка  $O_q$  расположена от  $F$  на расстоянии, большем  $\frac{d}{1-k_1}$ . Тогда для произвольной точки  $A$  фигуры  $F$  мы имеем  $O_q A > \frac{d}{1-k_1}$ . При гомотетии с центром  $O_q$  и коэффициентом  $k_q$  точка  $A$  переходит в такую точку  $A'$ , что  $O_q A' = k_q \cdot O_q A$ . Поэтому имеем

$$AA' = (1 - k_q) \cdot O_q A > (1 - k_1) \cdot O_q A > d.$$

Таким образом, каждая точка  $A$  фигуры  $F$  смещается при этой гомотетии на расстояние, большее  $d$ , т. е. переходит в точку  $A'$ , не принадлежащую фигуре  $F$ . Иначе говоря, фигура  $F_q$ , в которую переходит  $F$  при рассматриваемой гомотетии, не имеет общих точек с  $F$ . Но это противоречит тому, что фигура  $F_q$  содержит часть  $G$  фигуры  $F$ .

Итак, все точки  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  расположены на конечном расстоянии от  $F$ . Поэтому последовательность  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  имеет хотя бы одну предельную точку. Без ограничения общности можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что последовательность  $O_1, O_2, \dots, O_q, \dots$  имеет только одну предельную точку  $O_0$ , т. е. существует предел  $\lim_{q \rightarrow \infty} O_q = O_0$ .

Легко понять, что фигура  $F_0$ , гомотетичная фигуре  $F$  с центром гомотетии  $O_0$  и коэффициентом  $k_0$ , содержит фигуру  $G$  (ибо  $\lim_{q \rightarrow \infty} k_q = k_0$ ,  $\lim_{q \rightarrow \infty} O_q = O_0$ ). Таким образом, существует фигура  $F_0$ , гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $k_0$ , содержащая  $G$ , но никакая фигура, гомотетичная  $F$  с коэффициентом  $< k_0$ , не может целиком содержать  $G$  (по определению точной нижней грани). Это означает, что  $k_0$  есть габарит части  $G$ . Тем самым установлено, что понятие габарита имеет смысл для любой части  $G$  фигуры  $F$ .

<sup>(10)</sup> (к стр. 59). В случае  $n$ -мерного выпуклого тела  $F$  (при  $n > 2$ ) область освещенности (т. е. множество всех точек, являющихся точками освещенности относительно заданного направления  $l$ ), конечно, уже не является

д у г о й. Однако область освещенности является (при любом  $n$ ) о т к р ы т ы м подмножеством границы тела  $F$ . В самом деле, если  $A$  — точка освещенности относительно направления  $l$ , то все граничные точки тела  $F$ , близкие к  $A$ , также будут точками освещенности относительно этого направления. Но это и означает, что область освещенности является открытым подмножеством границы тела  $F$ .

(<sup>11</sup>) (к стр. 60). В  $n$ -мерном случае вместо описанного в тексте «уменьшения дуг» нужно будет использовать следующее предложение. Пусть  $l'_1, l'_2, \dots, l'_s$  — направления, достаточные для освещения всей границы  $n$ -мерного тела  $F$ ; обозначим через  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$  области освещенности относительно этих направлений. Тогда существуют такие замкнутые множества  $\Delta^*_1, \Delta^*_2, \dots, \Delta^*_s$ , заключающиеся соответственно в областях освещенности  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$ , которые, вместе взятые, покрывают всю границу тела  $F$ .

Докажем справедливость этого предложения. Границу области освещенности  $\Delta'_i$  обозначим через  $\Gamma_i$  (например, на рис. 71 граница области освещенности состоит из двух точек  $A$  и  $B$ ; в случае трехмерного выпуклого тела границей области освещенности будет некоторая линия, и т. п.). Определим, далее, на границе выпуклого тела  $F$  следующую функцию  $f_i$ . Если точка  $A$  не принадлежит области освещенности  $\Delta'_i$ , то положим  $f_i(A) = 0$ . Если же  $A$  — точка области  $\Delta'_i$ , то через  $f_i(A)$  обозначим кратчайшее расстояние от точки  $A$  до границы  $\Gamma_i$  области  $\Delta'_i$ .

Ясно, что функция  $f_i(A)$  непрерывна и принимает положительные значения в точках области  $\Delta'_i$  (и только в этих точках). Сумма

$$\varphi(A) = f_1(A) + f_2(A) + \dots + f_s(A)$$

является непрерывной функцией (заданной на границе тела  $F$ ) и принимающей только положительные значения (ибо каждая граничная точка тела  $F$  принадлежит хотя бы одной области освещенности  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_s$ ) Пусть  $\sigma$  — наименьшее значение этой функции; таким образом,  $\varphi(A) \geq \sigma > 0$  для любой граничной точки  $A$  тела  $F$ .



Обозначим теперь через  $\Delta_i^*$  множество всех тех граничных точек  $A$  тела  $F$ , для которых справедливо неравенство  $f_i(A) \geq \frac{\sigma}{s}$ . Множество  $\Delta_i^*$  замкнуто и содержится в области освещенности  $\Delta_i'$ . Остается доказать, что множества  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$  покрывают всю границу тела  $F$ . Пусть  $A$  — произвольная граничная точка тела  $F$ . Тогда  $\varphi(A) \geq \sigma$ , или, что то же самое,

$$f_1(A) + f_2(A) + \dots + f_s(A) \geq \sigma.$$

Но тогда хотя бы для одного  $i = 1, 2, \dots, s$  должно быть выполнено неравенство  $f_i(A) \geq \frac{\sigma}{s}$ , и, следовательно, точка  $A$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$ .

(<sup>12</sup>) (к стр. 61). В  $n$ -мерном случае также существует такой отрезок  $h_i$ , что параллельный перенос множества  $\Delta_i^*$  в направлении  $l_i'$  на расстояние, меньшее  $h_i$ , переводит множество  $\Delta_i^*$  целиком *внутрь* тела  $F$ . В самом деле, для каждой точки  $A$  множества  $\Delta_i^*$  обозначим через  $g(A)$  длину хорды, высекаемой телом  $F$  на прямой, параллельной направлению  $l_i'$  и проходящей через точку  $A$ . Функция  $g(A)$ , заданная на множестве  $\Delta_i^*$ , непрерывна и принимает только положительные значения (ибо каждая точка  $A$  множества  $\Delta_i^*$  принадлежит области освещенности  $\Delta_i'$ , и потому соответствующая прямая проходит через внутренние точки тела  $F$ ). Так как непрерывная функция  $g(A)$  определена на замкнутом множестве  $\Delta_i^*$ , то она принимает в некоторой точке свое наименьшее значение, которое мы и обозначим через  $h_i$ . Таким образом,  $g(A) \geq h_i > 0$  для любой точки  $A$  множества  $\Delta_i^*$ . Иначе говоря, на любой прямой, параллельной направлению  $l_i'$  и проходящей через какую-либо точку множества  $\Delta_i^*$ , тело  $F$  высекает хорду длины  $\geq h_i$ . Отсюда и вытекает наше утверждение.

(<sup>13</sup>) (к стр. 62). Заключительная часть доказательства теоремы 7 проводится в  $n$ -мерном случае так же, как в тексте, только в этом случае мы будем иметь не «секторы», а «конусы»  $G_1, G_2, \dots, G_s$  с вершиной  $O$  и криволинейными «основаниями»  $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_s^*$ .

(14) (к стр. 65). Пусть  $F$  — выпуклое  $n$ -мерное тело, имеющее  $n$  угловых точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Выберем какие-либо направления  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , соответственно освещающие точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Так как при малых «шевелениях» направления  $l_i$  точка  $A_i$  остается, очевидно, точкой освещенности для этого направления, то мы можем предполагать, что направления  $l_1, l_2, \dots, l_n$  не параллельны одной гиперплоскости. Проведем из одной точки  $O$  какие-либо векторы  $\overline{OB_1}, \overline{OB_2}, \dots, \overline{OB_n}$ , имеющие направления  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , и отложим от той же точки вектор

$$\overline{OB_{n+1}} = -\overline{OB_1} - \overline{OB_2} \dots - \overline{OB_n}.$$

Мы получим  $n + 1$  точек  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ , причем симплекс с вершинами в этих точках содержит точку  $O$  внутри себя. Поэтому направления  $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ , определяемые векторами  $\overline{OB_1}, \overline{OB_2}, \dots, \overline{OB_n}, \overline{OB_{n+1}}$ , позволяют осветить все обыкновенные (т. е. не угловые) точки на границе тела  $F$  (см. доказательство теоремы 9). Угловые же точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  также освещаются (в силу выбора направлений  $l_1, l_2, \dots, l_n$ ). Итак, если  $n$ -мерное тело  $F$  имеет  $n$  (или меньшее число) угловых точек, то  $c(F) = n + 1$ .

(15) (к стр. 69). Пусть  $F$  — выпуклое неограниченное почти коническое  $n$ -мерное тело, не содержащее целиком никакой прямой, и  $K$  — вписанный конус этого тела. Допустим, что конус  $K$  имеет размерность  $q$ , и обозначим через  $L$  плоскость размерности  $q$ , содержащую конус  $K$ . Фиксируем, наконец, в плоскости  $L$  некоторую точку  $O$  и проведем через нее плоскость  $P$  размерности  $n - q$ , являющуюся ортогональным дополнением плоскости  $L$ . Через  $N$  мы обозначим множество всех точек  $S$  плоскости  $P$ , обладающих следующим свойством: можно подобрать такую точку  $A$  конуса  $K$  и такую точку  $B$  тела  $F$ , что  $\overline{AB} = \overline{OS}$ . Множество  $N$  является  $(n - q)$ -мерным ограниченным выпуклым телом, возможно, незамкнутым. Замыкание множества  $N$  обозначим через  $M$ . Это и есть  $(n - q)$ -мерное ограниченное выпуклое тело, удовлетворяющее, как доказал П. С. Солтан, соотношению  $b(F) = b(M)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Болтянский В. Г., Задача об освещении границы выпуклого тела. Известия Молдавского филиала АН СССР, № 10 (76), 1960, 77—84.
- 2 Боннэзен и Фенхель (Bonnesen T. und Fenchel W.), Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934 (Springer).
- 3 Борсук (Borsuk K.), Über die Zerlegung einer Euklidischen  $n$ -dimensionalen Vollkugel in  $n$  Mengen Verh. Internat Math. Kongr., Zürich, 2 (1932), 192.
- 4 Борсук (Borsuk K.), Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale Sphäre. Fundamenta Math. 20 (1933), 177—190.
- 5 Визитей В. Н., Задачи о покрытии и освещении для неограниченных выпуклых фигур. Известия АН Молдавской ССР, № 10 (88), 1962, 3.
- 6 Гохберг И. Ц. и Маркус А. С., Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Известия Молдавского филиала АН СССР, № 10(76), 1960, 87—90.
- 7 Грюнбаум (Grünbaum V.), A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 776—778.
- 8 Грюнбаум (Grünbaum V.), Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes. Bull. research council Israel, 7F (1957), 25—30.
- 9 Грюнбаум (Grünbaum V.), On a conjecture of H. Hadwiger. Pacific J. Math. 11, № 1 (1961), 215—219.
- 10 Грюнбаум (Grünbaum V.), Borsuk's problem and related questions. Proc. Symposia Pure Math. 7 (1963), 271—284
- 11 Гэйл (Gale D.), On inscribing  $n$ -dimensional sets in a regular  $n$ -simplex. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 222—225.
- 12 Данцер (Danzer L.), Überdeckungen mit kongruenten Kugeln und Durchschnittseigenschaften von Kugelfamilien in euklidischen Räumen hoher Dimension.
- 13 Данцер и Грюнбаум (Danzer L. und Grünbaum V.), Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee Math. Zeitschrift, 79 (1962), 95—99.
- 14 Клее (Klee V. L.), Unsolved problems in intuitive geometry, Гектографированные лекции, Seattle, 1960.
- 15 Леви (Lewi F. W.), Ein geometrisches Überdeckungsproblem. Archiv Math. 5 (1954), 476—478.
- 16 Леви (Lewi F. W.), Überdeckung eines Fibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenes Kerns. Archiv Math. 6 (1955), 369—370.

17. Л е н ц (Lenz H.), Zur Zerlegung von Punktfolgen in  $s$  liche kleineren Durchmessers. Archiv Math. 6, № 5 (1955), 413—416
  18. Л ю с т е р н и к Л. А.. Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, М., 1956.
  19. Л ю с т е р н и к Л. А. и Ш н и р е л ь м а н Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.
  20. П а л (Pál J.), Über ein elementares Variationsproblem, Danske Videnskab. Selskab., Math.-Fys. Meddel 3, № 2 (1920).
  21. С о л т а н П. С., Освещение границы выпуклого тела изнутри. Матем. сборник (нов. серия), 57 (99) (1962), 443—448.
  22. С о л т а н П. С., К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел. Известия АН Молдавской ССР, № 1 (1963), 49—57.
  23. Т о т Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Физматгиз, 1958.
  24. Х а д в и г е р (Hadwiger H.), Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers. Comm. Math. Helv. 18, (1945/46), 73—75; Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers. Comm. Math. Helv. 19 (1946/47), 72—73.
  25. Х а д в и г е р (Hadwiger H.), Über die Zerstückung eines Eikörpers. Math. Zeitschrift, 51 (1947), 161—165.
  26. Х а д в и г е р (Hadwiger H.), Ungelöste Probleme, N 20. Elem. der Math. 12 (1957), 121.
  27. Х а д в и г е р (Hadwiger H.), Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern Archiv Math. 8 (1957), 212—213.
  28. Х а д в и г е р (Hadwiger H.), Altes und Neues über konvexe Körper, 1955, Basel und Stuttgart, Birkhäuser.
  29. Х а д в и г е р и Д е б р у н н е р, Комбинаторная геометрия плоскости, М., «Наука», 1965.
  30. Х е п п е ш (Heppes A.), Térbeli pontthalmazok felosztása kisebb atmérőjű részhalmazok összegére A magyar tudományos akadémia 7 (1957), 413—416.
  31. Х е п п е ш и Р е в е с (Heppes A. und Révész P.), Zum Borsukschen Zerteilungsproblem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), 159—162.
  32. Э г г л с т о н (Eggleston H. G.), Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. J. London Math. Soc. 30 (1955), 11—24.
  33. Э г г л с т о н (Eggleston H. G.), Convexity Cambridge Univ. Press., 1958.
  34. Э г г л с т о н (Eggleston H. G.), Problems in Eukclidean space, Application of convexity London, New-York. Pergamon press, 1957.
  35. Э р д е ш (Erdős P.), On sets of distances of  $n$  points. Amer. Math. Monthly 53 (1946), 248—250. Есть русский перевод — сборник «Математика».
  36. Э р д е ш (Erdős P.), Some unsolved problems Michigan Math. J. 4 (1957), 291—300.
  37. Я г л о м И. М. и Б о л т я н с к и й В. Г., Выпуклые фигуры, Гостехиздат, М., 1951.
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Разбиение фигур на части меньшего диаметра . .	5
§ 1. Диаметр фигуры . . . . .	5
§ 2. Постановка задачи . . . . .	7
§ 3. Решение задачи для плоских фигур . . . . .	9
§ 4. Разбиение шара на части меньшего диаметра . . . .	12
§ 5. Решение задачи для тел в пространстве . . . . .	20
§ 6. О гипотезе Борсука для $n$ -мерных тел. . . . .	34
Глава 2. Покрытие выпуклых тел гомотетичными телами и задача освещения . . . . .	38
§ 7. Выпуклые фигуры . . . . .	38
§ 8. Постановка задачи о покрытии фигур гомотетичными	41
§ 9. Другая формулировка задачи . . . . .	44
§ 10. Решение задачи для плоских фигур . . . . .	46
§ 11. Гипотеза Хадвигера . . . . .	47
§ 12. Формулировка задачи освещения . . . . .	49
§ 13. Решение задачи освещения для плоских фигур . . . .	52
§ 14. Эквивалентность двух задач . . . . .	57
§ 15. Некоторые оценки для величины $s(F)$ . . . . .	62
§ 16. Разбиение и освещение неограниченных выпуклых фигур . . . . .	65
Глава 3. Некоторые родственные задачи . . . . .	71
§ 17. Задача Борсука в пространстве Минковского . . . .	71
§ 18. Задачи Эрдеша и Кли . . . . .	78
§ 19. Некоторые нерешенные задачи . . . . .	83
Примечания . . . . .	95
Литература . . . . .	106

---