МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

Б. ГРЮНБАУМ

ЭТЮДЫ ПО КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

Б. ГРЮНБАУМ

ЭТЮДЫ ПО КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Перевод с английского
С. И. ЗАЛГАЛЛЕР

Под редакцией
В. А. ЗАЛГАЛЛЕРА и И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

ОТ РЕДАКТОРОВ

Последние десятилетия ознаменовались определенными сдвигами интересов в области математической науки, в значительной степени связанными с появлением новых путей применения математики. Одним из отражений этих изменений явилось повышение внимания к теории выпуклых тел и к некоторым смежным направлениям науки вроде *дискретной геометрии* или *комбинаторной геометрии*, исследующих, в первую очередь, вопросы оптимального расположения дискретных систем выпуклых тел. В последние годы на русском языке был опубликован ряд книг по теории выпуклых тел (Бляшке [2] *)), дискретной геометрии (Фейеш Тот [2]; Роджерс [1]) и комбинаторной геометрии (Хадвигер и Дебруннер [2]; Данцер, Грюнбаум, Кли [1]; Болтянский и Гохберг [1, 2]); некоторые из этих книг были ранее включены в серию «Математическая библиотечка».

Настоящая брошюра, обращенная к широкому кругу интересующихся геометрией читателей, начиная примерно со студентов-математиков младших курсов, продолжает линию, начатую выше названными книгами. По своему характеру она ближе всего к книге Данцера, Грюнбаума, Кли [1] — как и последняя, она имеет обзорный характер и почти не содержит доказательств. Это обстоятельство позволило автору на небольшом числе страниц перечислить много впечатляющих результатов; однако для ознакомления с методами, которыми эти результаты были получены, читателю придется обратиться к другим источникам.

*) Числа в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 77—94.

Содержание брошюры составляют два обзора Б. Грюнбаума, доложенных в 1961 г. на том же симпозиуме по проблемам выпуклости, на котором был оглашен и доклад Данцера, Грюнбаума и Кли [1]. Первый обзор посвящен оценкам степени симметричности (точнее было бы сказать «степени центральности») выпуклых тел. Первоначальные результаты, относящиеся к этой теме, имеются в рассчитанной на начинающих книге Яглома и Болтянского [1]; однако от этих первых оценок Грюнбаум уходит довольно далеко, поскольку в последние годы в этой области были достигнуты большие успехи. Второй обзор посвящен так называемой «проблеме Борсука», трактующей о разбиении выпуклых тел на возможно меньшее число частей, диаметр каждой из которых меньше диаметра исходного тела; он хорошо дополняет посвященные тому же кругу вопросов книги Болтянского и Гохберга [1, 2].

Обзоры Грюнбаума были опубликованы в вышедшем в 1963 г. томе докладов упомянутого выше симпозиума; таким образом, с момента их первоначальной публикации прошло уже 8 лет. Автор принял значительное участие в подготовке русского издания обзоров, дополнив его некоторыми полученными в самые последние годы результатами и значительно обновив список литературы; в пополнении списка литературы посильное участие приняли также редакторы книги. Следует только предупредить читателя, что и в настоящем своем виде собранная на стр. 77—94 библиография никак не претендует на полноту, достичь которой весьма трудно в силу обширности числа связанных с темой книги публикаций.

Подстрочные примечания переводчика и редакторов отмечены звездочками в отличие от нумерованных сносок автора.

В заключение мы хотим поблагодарить Бранко Грюнбаума за внимание, проявленное им к русскому изданию книги.

В. А. Залгаллер
И. М. Яглом

МЕРЫ СИММЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ *)

§ 1. Введение

В исследованиях по выпуклым множествам евклидовых пространств E^n термин «мера (центральной) асимметрии» (или симметрии) появляется довольно часто (см., например, Безикович [1], Эглстон [1], Штейн [1]). Хотя ни в одной из этих работ не было дано определения «меры асимметрии», интуитивно ясно, что этот термин должен обозначать определенную на выпуклых множествах функцию, значения которой являются вещественными числами, причем эта функция должна быть равна нулю на центрально симметричных множествах (и только на них) и, возможно, удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям. Одно из них состоит в пожелании, чтобы эта функция была больше для «менее симметричного» тела, чем для «более симметричного» тела. Но сам смысл взятых в кавычки слов остается неясным, разве что условиться заранее считать «самой несимметричной» плоской выпуклой фигурой треугольник (а «самым несимметричным» телом пространства E^n симплекс).

Просмотр литературы показывает, что число фактически изучаемых мер асимметрии много больше числа явных упоминаний этого термина. Так, первая, и в некотором смысле наиболее важная, мера асимметрии была без названия введена Минковским [1] (см. п. 6.1). С тех пор частные меры симметрии явно и неявно рассматривались многими авторами; многие факты открывались, забывались и переоткрывались снова и снова.

Одна из главных целей настоящей работы — суммировать эти известные результаты и дать соответствующие ссылки **). Хотя автор очень стремился к полноте, он

*) Measures of symmetry for convex sets, Proc. Simpos. Pure Math., v. 7. (Convexity), Providence (USA), 1963, 233—270.

**) Более краткий популярный обзор дал Эрхарт [6].

не переоценивает свой успех в этом направлении и будет признателен за каждое добавление и, разумеется, за каждое исправление. Ссылки в § 6 показывают, сколько усилий и времени, которым можно было бы найти и лучшее применение, было потрачено на переоткрытие уже известных доказательств старых результатов.

Другая цель — уточнить определение меры асимметрии и изучить некоторые общие процедуры для введения мер асимметрии. Дана, по крайней мере частичная, систематизация некоторых типов мер симметрии, позволяющая компактно обозреть известные результаты.

Как и во всякой другой области, здесь также обзор известных результатов выявляет пробелы в наших знаниях. Подобные лакуны столь же видны читателю, как и автору. Поэтому мы не станем явно формулировать нерешенные задачи, произнося сакраментальные слова «было бы интересно найти...».

С другой стороны, наш предмет естественным образом оказывается связанным со многими областями и задачами, лежащими вне довольно специальной области обсуждения численных мер асимметрии. Автор позволил себе несколько раз отклониться в эти области и отметить отдельные остающиеся до сих пор открытыми вопросы, которые представляются ему интересными и важными.

Некоторые меры асимметрии можно определить для всех компактных выпуклых множеств. Для простоты и единства мы сосредоточим внимание только на евклидовом пространстве E^n конечной размерности n и будем рассматривать меры асимметрии лишь на семействе $\mathfrak{K}^n$ всех *выпуклых тел*, т. е. компактных выпуклых множеств K с непустой внутренностью, $\operatorname{int} K \neq \phi$. При $n = 2$ мы называем K *выпуклой фигурой*.

Скорее по соображениям личного предпочтения мы будем говорить о мерах симметрии. В конкретных случаях всегда легко осуществить переход от меры симметрии к соответствующей мере асимметрии и обратно.

Классифицировать меры симметрии можно по группе преобразований (действующих в E^n), которая для любого тела из $\mathfrak{K}^n$ оставляет данную меру инвариантной. Без каких-либо априорных причин, кроме разве запросов смежных разделов (см. § 9), ранее рассматривались и здесь будут рассматриваться только меры, инвариантные относительно невырожденных аффинных преобразований или относительно преобразований подобия.

Дадим теперь определение мер симметрии

Вещественно-значная функция f: $\mathfrak{K}^n \to \mathrm{R}$ называется *афинно инвариантной* (аналогично — *инвариантной относительно преобразований подобия*) *мерой симметрии* выпуклых тел в E^n, если соблюдаются следующие условия:

1) $0 \leqslant f(K) \leqslant 1$ при любом $K \in \mathfrak{K}^n$;

2) $f(K) = 1$ в том и только том случае, когда K центрально симметрично;

3) $f(K) = f(T(K))$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$ и любого невырожденного аффинного преобразования T (аналогично — для любого преобразования подобия T), отображающего E^n на себя;

4) $f(K)$ непрерывно зависит от K.

Условие 4), очевидно, предполагает наличие топологической структуры в $\mathfrak{K}^n$ или, точнее, в пространстве $\mathfrak{K}^n_a$ (соответственно $\mathfrak{K}^n_s$) классов выпуклых тел, эквивалентных относительно аффинных преобразований (соответственно — преобразований подобия). Рассмотрение топологии (и метрики) в $\mathfrak{K}^n_a$ и $\mathfrak{K}^n_s$ отнесено к § 2.

Отметим, что если $h(\lambda)$ — произвольный гомеоморфизм отрезка $[0, 1]$ на себя, такой, что $h(1) = 1$, и если f — мера симметрии, то и $h \circ f$ — тоже мера симметрии.

Ввиду общности данного выше определения мер симметрии представляется необходимым принимать одну из описанных ниже процедур, чтобы получать результаты, имеющие геометрическое значение.

Один путь, по которому всегда шли в прежних исследованиях по мерам симметрии, состоит в том, чтобы, исходя из функций, определяемых геометрическими характеристиками тел семейства $\mathfrak{K}^n$, измерять (тем или иным интуитивно напрашивающимся путем) отклонение тела от центрально симметричного. Весь § 6 настоящего обзора посвящен именно такому подходу и полученным в этом направлении результатам.

Другой путь мог бы состоять в попытках подчинить меры симметрии дополнительным условиям с двумя целями: 1° чтобы иметь возможность выводить некоторые общие свойства мер симметрии, удовлетворяющих дополнительным условиям, и 2° чтобы иметь возможность различать среди обилия геометрически определяемых мер симметрии те, поведение которых более или менее одинаково. В § 4 мы обсудим одну попытку в этом направлений и некоторые возникающие при этом довольно интересные задачи. Но уже здесь стоит указать, что неизвестны дополнительные условия, которым удовлетворяли бы все рассматривавшиеся в литературе интуитивно естественные меры симметрии.

Предмет § 3 — «инвариантные точки и множества». Они полезны при рассмотрении мер симметрии, но представляют также и самостоятельный интерес.

В § 5 дан краткий обзор наиболее важных общих методов, используемых для «геометрического» определения мер симметрии. Там же мы уточняем в некоторых пунктах используемую терминологию. Это позволяет достигнуть большей компактности в § 6, где представлены известные результаты по специальным мерам симметрии. В §§ 7 и 8 рассмотрены некоторые функционалы, которые, возможно, являются мерами симметрии, а также некоторые функционалы, которые довольно неожиданно не обладают свойствами таких мер.

В дополнительном § 9 рассмотрены некоторые обобщения.

§ 2. Метрики в пространствах выпуклых множеств

В топологии и функциональном анализе уделяется достаточно внимания введению топологии и метрик в пространствах, элементами которых являются различные системы подмножеств топологического или метрического пространства. При рассмотрении линейных пространств обычно специально выделяют пространства компактных выпуклых множеств. (Кроме общих курсов см. Майкэл [1], Родстрём [1], Хёрмандер [1], Канторович и Рубинштейн [1, 2], Пинскер [1], Рабинович [1, 2, 3].)

Нас интересуют выпуклые тела в E^n и главным образом классы аффинно (или подобно) эквивалентных выпуклых тел. После первой публикации настоящего обзора возрос интерес к исследованию различных метрик для таких классов и разных соотношений эквивалентности. (См. Шепард и Уэбстер [1], Вийсман [1], Уэбстер [1], Бантени [1], Шмит [1], Эвальд [1], Шепард [4], Эвальд, Шепард, Джоффри [1], Дьедонне [1]. По тому же вопросу для пространств Минковского с несимметричной метрикой см. Сорокин [1].)

Обозначим через B^n единичный шар в E^n. Множество $\mathfrak{C}^n$ всех компактных выпуклых множеств в E^n обычно метризуется по Хаусдорфу одним из двух, топологически эквивалентных, способов:

$$d(K_1, K_2) = \min\{\lambda \geqslant 0 \mid K_1 \subset K_2 + \lambda B^n,\ K_2 \subset K_1 + \lambda B^n\} \tag{*}$$

(см., например, Бляшке [2]; ср. Яглом и Болтянский [1]), или

$$d(K_1, K_2) = \min\{\lambda \geqslant 0 \mid K_1 \subset K_2 + \lambda B^n\} + \\ + \min\{\lambda \geqslant 0 \mid K_2 \subset K_1 + \lambda B^n\} \quad (**)$$

(см., например, Эглстон [5]).

В топологии, которую порождает любая из этих метризаций, справедлива известная «теорема выбора» Бляшке [2] *), обеспечивающая компактность семейства всех множеств из $\mathfrak{C}^n$, содержащихся в любой фиксированной компактной области пространства E^n.

Другая метрика (строго говоря, заданная на пространстве всех измеримых подмножеств в E^n, имеющих конечную меру) рассматривалась Дингасом [1]. Для совокупности $\mathfrak{K}^n$ выпуклых тел в E^n она определяется равенством

$$d(K_1, K_2) = V(K_1 \cup K_2) - V(K_1 \cap K_2),$$

где $V(K)$ обозначает n-мерный объем тела K. Метрикой является также отношение

$$d(K_1, K_2) = \frac{V(K_1 \cup K_2) - V(K_1 \cap K_2)}{V(K_1 \cup K_2)}$$

(см. Марчевски и Штейнгауз [1] или Шепард и Уэбстер [1]).

В работе Шепарда и Уэбстера [1] рассматриваются эти и перечисленные ниже метрики, изучается вопрос о взаимной непрерывности метрик (т. е. о совпадении определяемых двумя метриками топологий), случаи равномерной взаимной непрерывности двух метрик и еще некоторые вопросы. О расстояниях между некомпактными выпуклыми телами см. Буземан [1], гл. 1, § 3 **).

---

*) Ср. Яглом и Болтянский [1], Дополнение 1.

**) Можно вводить много других метрик на пространстве $\mathfrak{K}^n$ (или в пространстве классов, на которые разбивается $\mathfrak{K}^n$). Выпуклое тело можно характеризовать некоторыми функциями, как, например, характеристической (индикаторной) функцией или опорной функцией; если считать эквивалентными тела, отличающиеся лишь параллельным переносом, то класс тел характеризуется так называемой «поверхностной функцией» множеств на единичной сфере. Каждая метризация соответствующего пространства функций или функций множеств даст некоторую метрику в $\mathfrak{K}^n$ (или в пространстве задаваемых в $\mathfrak{K}^n$ классов).

В теории выпуклых поверхностей нередко «теорема единственности», говорящая о характеризации тела некоторыми данными, Только четвертая метрика непосредственно является аффинно инвариантной. Нам казалось, что первые три метрики нельзя удобным образом перенести на пространства $\mathfrak{K}_a^n$ и $\mathfrak{K}_s^n$ классов аффинно (соответственно — подобно) эквивалентных тел $K \in \mathfrak{K}^n$. Однако для $\mathfrak{K}_a^n$ это удалось сделать (см. Шепард [1], Уэбстер [1], Бантени [1]).

Для пространств $\mathfrak{K}_a^n$, $\mathfrak{K}_s^n$ лучше подходят описываемые ниже метрики.

1) Пусть

$$\delta_1(K_1, K_2) = \inf\left\{\frac{V(T(K_2))}{V(K_1)} \,\middle|\, K_1 \subset T(K_2)\right\},$$

где $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^n$; T — (произвольное) невырожденное аффинное отображение пространства E^n на себя. Тогда $\ln \delta_1(K_1, K_2)$ есть асимметричная метрика, а $d_1(K_1, K_2) = \ln \delta_1(K_1, K_2) + \ln \delta_1(K_2, K_1)$ — метрика в $\mathfrak{K}_a^n$. Ее рассматривали, например, Макбит [1] (при доказательстве компактности $\mathfrak{K}_a^n$) и Леви [1].

2) Следующий путь, использовавшийся для центрально симметричных тел Асплундом [1], похож на только что описанный (см. также § 7).

Пусть

$$\delta_2(K_1, K_2) = \inf\left\{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \,\middle|\, \beta K_1 \subset \text{транслят } T(K_2), \ \alpha K_1 \supset \text{транслят } T(K_2)\right\},$$

где $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^n$; «транслят» — результат параллельного переноса; T — невырожденное аффинное отображение E^n на себя. Тогда $d_2(K_1, K_2) = \ln \delta_2(K_1, K_2)$ является метрикой в $\mathfrak{K}_a^n$. Очевидно, $d_1(K_1, K_2) \leqslant n d_2(K_1, K_2)$. Можно непосредственно проверить, что d_1 и d_2 определяют одинаковые топологии, что, впрочем, следует из приведенного неравенства и общих свойств компактных пространств.

3) Недавно Шепард [1] описал другой путь (и обобщил его на множества, являющиеся конечными объеди-

---

сопровождается «теоремой устойчивости», которая по существу утверждает, что соответствующая метрика в $\mathfrak{K}^n$ определяет ту же топологию, что и метрика Хаусдорфа. «Теоремы об оценках» (оценках искажения тела при малых изменениях данных) можно трактовать как утверждения о равномерной непрерывности одних таких метрик относительно других.

нениями тел из $\mathfrak{K}^n$). Для $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^n$ полагаем

$$\delta_3(K_1, K_2) = \inf\{\lambda \geqslant 0 \mid K_1 \subset K_2 + \lambda(K_2 + (-K_2)),\ K_2 \subset K_1 + \lambda(K_1 + (-K_1))\}$$

и

$$d_3(K_1, K_2) = \inf\{\ln(1 + 2\delta_3(K_1, T(K_2)))\},$$

где T — произвольное невырожденное аффинное отображение E^n на себя. Нетрудно проверить, что топология, индуцируемая в $\mathfrak{K}_a^n$ метрикой d_3, совпадает с топологией, индуцируемой метриками d_1 или d_2.

Нахождение диаметра пространства $\mathfrak{K}_a^n$ в любой из описанных метрик (или многих других, им подобных) представляется исключительно трудной задачей, она не решена даже для $n = 2$.

Для d_1-диаметра $\mathfrak{K}_a^n$ из результатов Макбита [1] вытекает верхняя оценка $2n \ln n$; для $n = 2$ она получена также Леви [1], Фултоном и Штейном [1]. В двумерном случае ее можно усилить до $\ln 9$, заметив, что $d_1(K, H) \leqslant \ln 3$ при всех $K \in \mathfrak{K}^2$ (здесь H — правильный шестиугольник). Неравенство очевидно, так как в каждую выпуклую фигуру $K \in \mathfrak{K}^2$ можно вписать аффинно правильный шестиугольник (рис. 1 и § 3). Аналогичным образом с помощью рассмотрения вписанных аффинно правильных восьмиугольников доказывается (Грюнбаум [1], см. также § 3), что $d_1(K_1, K_2) \leqslant \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ для всех центрально симметричных $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^2$; это улучшает оценку $\ln 4$, данную Леви [1].

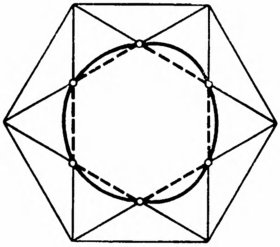

Рис. 1.

Уделялось внимание многим частным задачам, связанным с расстояниями одних конкретных геометрически интересных множеств до других. Пусть K^n — любой элемент из $\mathfrak{K}^n$; M^n — любой центрально симметричный элемент из $\mathfrak{K}^n$; C^n, Δ^n, B^n — соответственно n-мерные куб, симплекс, шар; H — правильный шестиугольник.

Тогда

$\delta_1(C^2, K^2) \leqslant \delta_1(C^2, \Delta^2) = 2,$ Ф у л т о н и Ш т е й н [1], З ю с с [4];

$\delta_1(C^3, K^3) \leqslant 9/2,$ Б е л е ц к и и Р а д з и ш е в с к и [1];

$\delta_1(C^n, K^n) \leqslant n^n,$ М а к б и т [1], Х а д в и г е р [1];

$\delta_1(K^2, C^2) \leqslant \delta_1(\Delta^2, C^2) = 2,$ Э с т е р м а н [2], Л е в и [1] [1]);

$\delta_1(M^2, C^2) \leqslant \delta_1(H, C^2) = 4/3,$ П е т и [1];

$\delta_1(K^n, C^n) \leqslant n!,$ Р а д з и ш е в с к и [1] ($n = 3$), М а к б и т [1]

(Х а д в и г е р [1] усилил последний результат, показав, что для всякого K^n существует содержащий K^n прямоугольный параллелотоп, объем которого не больше, чем $n!V(K^n)$; тот же результат получил К о с и н ь с к и [1]);

$\delta_1(K^2, \Delta^2) \leqslant \delta_1(C^2, \Delta^2) = 2,$ Г р о с с [1] (*)

(для $\delta_1(K^n, \Delta^n)$, по-видимому, известна только тривиальная оценка n^n);

$\delta_1(\Delta^n, K^n) \leqslant \delta_1(\Delta^n, B^n),$ Г р о с с [1], К н о т е [1]; (**)

$d_1(K^n, \Delta^n) \leqslant d_1(B^n, \Delta^n) = n \ln n,$ М а к б и т [1].

Поскольку не найден $\max \delta_1(K^n, \Delta^n)$, интересно отметить следующее различие между приближением выпуклых тел вписанными и описанными симплексами. Согласно (**) шар B^n при любом n хуже всех тел приближается выпуклыми симплексами. Для описанных же симплексов, очевидно,

$$\delta_1(C^n, \Delta^n) \leqslant \frac{n^n}{n!},$$

а

$$\delta_1(B^n, \Delta^n) = \frac{n^{\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}n!},$$

что при $n \geqslant 8$ больше, чем $n^n/n!$. Следовательно, хотя согласно (*) при $n = 2$ именно параллелограммы хуже

[1]) Другие доказательства и близкие результаты см. П о л и а и С ё г е [1], ср. также С о б ч и к [1].

всего приближаются описанными симплексами, для достаточно больших n уже шары в этом смысле хуже параллелотопов. Но, по-видимому, будет поспешным предполагать, что при больших n именно шары экстремальны, т. е. что $\max\limits_{K^n} \delta_1(K^n, \Delta^n) = \delta_1(B^n, \Delta^n)$. Обозначим через Q^n n-мерный октаэдр, т. е. выпуклую оболочку креста из n имеющих общую середину равных попарно ортогональных отрезков. Кажется, никто подробно не изучал $\delta_1(Q^n, \Delta^n)$. Автор не знает, как при $n \geqslant 3$ найти верхнюю границу, меньшую тривиальной оценки $\frac{(n-1)^n}{2^{n-1}(n-2)}$. Эта же величина для больших n превосходит $\delta_1(B^n, \Delta^n)$. С другой стороны, и гипотеза, что при всех n хуже всего приближается описанными симплексами Q^n, не верна:

$$\delta_1(Q^3, \Delta^3) \leqslant 2 \leqslant \delta_1(B^3, \Delta^3) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}.$$

Сходные результаты для δ_2 и d_2 см. в § 7.

Если в определениях d_1, d_2, d_3 в качестве отображений T брать только *преобразования подобия*, то мы придем к метрикам в пространстве $\mathfrak{K}_s^n$. Ими также порождаются одинаковые топологии. В отличие от $\mathfrak{K}_a^n$ пространство $\mathfrak{K}_s^n$ при $n > 1$ только локально компактно, но не компактно. ($\mathfrak{K}_s^n$ представимо как счетное объединение компактных множеств. Чтобы получить такое представление, достаточно рассмотреть множества тех элементов из $\mathfrak{K}_s^n$, для которых отношение диаметров описанной и вписанной сфер не превосходит k, где $k = 1, 2, 3, \ldots$)

Компактность $\mathfrak{K}_a^n$ обеспечивает достижение границ любым непрерывным функционалом. В частности, для каждой аффинно инвариантной меры симметрии в $\mathfrak{K}_a^n$ найдется «экстремальное тело» с минимальной мерой симметрии. Для подобно инвариантных мер симметрии дело обстоит уже не так (см. § 6).

§ 3. Инвариантные точки и множества

3.1. Примером аффинно инвариантной точки выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ (точное определение см. ниже) может служить ц е н т р т я ж е с т и $g(K)$ тела K.

Пусть каждому выпуклому телу $K \in \mathfrak{K}^n$ сопоставлена некоторая точка $p(K)$, причем так, что

1) $p(T(K)) = T(p(K))$ для любого невырожденного аффинного отображения T пространства E^n на себя;

2) $p(K)$ зависит от K непрерывно (в смысле топологии в $\mathfrak{K}^n$).

Тогда мы называем $p(K)$ *аффинно инвариантной* (а. и.) *точкой* тела K.

Аналогично, если каждому $K \in \mathfrak{K}^n$ сопоставлено замкнутое подмножество $p(K)$, удовлетворяющее условие 1) и условию

2*) $p(K)$ — полунепрерывная снизу функция от K *), то мы называем $p(K)$ *аффинно инвариантым* (а. и.) *множеством* тела K.

Ограничиваясь в 1) в качестве преобразований T подобиями (т. е. аффинными отображениями, сохраняющими ортогональность), получим определение *подобно инвариантных* (п. и.) *точек* и *множеств* тела K.

Многие экстремальные задачи приводят к а. и. или п. и. точкам и множествам тел K. Таковы, например, критические точки и множества, а также поверхности уровня, соответствующие рассматриваемым ниже мерам симметрии. Единственный шар (соответственно эллипсоид) максимального объема, содержащий K, является п. и. (а. и.) множеством для K; поэтому его центр является п. и. (а. и.) точкой тела K. Примером п. и. множества, удовлетворяющего условию 2*), но не 2), является множество центров всех шаров максимального объема, содержащихся в K **).

Прежде чем перечислять те а. и. и п. и. точки и множества, которые будут упоминаться в связи с мерами симметрии выпуклых тел, рассмотрим некоторые другие задачи, связанные с этими точками и множествами.

---

*) Множественно-значная функция $p(K)$ называется полунепрерывной снизу, если при $K_n \to K$ из представимости $x = \lim x_n$, $x_n \in p(K_n)$, следует $x \in p(K)$.

**) Вот еще один пример. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$; $x \in \operatorname{int} K$; $y \in \partial K$; $Q(y)$ — касательный конус поверхности ∂K тела K в точке y; q — выходящий из y луч конуса $Q(y)$; $\theta(x, y, q)$ — угол между лучами yx и q. Определим $\theta(x) = \min\{\theta(x, y, q) \mid y \in \partial K,\ q \subset Q(y)\}$ и пусть $p(K)$ — множество тех точек x, на которых достигается $\max\{\theta(x) \mid x \in \operatorname{int} K\}$. Множество $p(K)$ является п. и. множеством тела K; оно выпукло и удовлетворяет условию 2*), но не 2). (При $n = 2$ точки множества $p(K)$ рассматривал Лившиц [1] (стр. 85—87) в связи с чисто инженерной задачей.)

3.2. Для плоских выпуклых фигур существует п. и. точка $k(K)$, удовлетворяющая также условию аддитивности *):

3) $k(K + K') = k(K) + k(K')$.

Эта точка, впервые введенная Штейнером [1], представляет собой *центр тяжести кривизны* для контура ∂K, т. е. центр тяжести распределения масс по периметру фигуры K, когда плотность распределения масс в каждой точке контура равна кривизне контура в этой точке (угловым точкам отвечает сосредоточенная нагрузка, равная повороту контура в этой точке). Как показал Штейнер, центр тяжести кривизны связан с решением многих экстремальных задач. Другие результаты этого рода получены Су [1]. Кубота [1] доказал, что $k(K)$ можно охарактеризовать обращением в нуль коэффициентов при $\cos\theta$ и $\sin\theta$ в разложении в ряд Фурье опорной функции тела K относительно этой точки. Отсюда легко вывести аддитивность $k(K)$.

Для размерностей $n \geqslant 3$ разложение опорной функции выпуклого тела K по сферическим функциям приводит к аналогично определяемой точке $k(K)$, такой, что коэффициенты членов первого порядка обращаются в нуль, если за начало принять $k(K)$. Очевидно, что эта точка $k(K)$ является п. и. точкой тела K и обладает свойством 3). В E^3 точка $k(K)$ является *центром тяжести гауссовой кривизны поверхности тела* K (Герике [2]). Похоже, что для $n > 3$ геометрические свойства $k(K)$ долго не изучались.

Положение дела изменилось здесь кардинально начиная примерно с 1961 г.— и наши знания о точках $k(K)$ значительно пополнились. Точку $k(K)$ сейчас называют *точкой Штейнера* (n-мерного) *тела* K. Эти точки подробно изучены во многих направлениях, из которых мы упомянем здесь только некоторые. Шепард [3] показал, что $k(K)$ непрерывно зависит от K, и использовал точки Штейнера в своих исследованиях о неразложимости (n-мерных) многогранников (политопов; см. § 4, замечание 3). Различные определения и свойства точек Штейнера для разных классов множеств были

*) По поводу *суммы* $K + K'$ выпуклых фигур (в частности, суммы $k(K) + k(K')$ точек) см., например, Яглом и Болтянский [1].

даны Шепардом [3, 6], Фландерсом [1], Хадвигером [1]. Вопрос единственности этих точек рассматривали Шепард [7] и Шмит [2]. Возможно, наиболее продуктивным оказалось введение точек Штейнера для выпуклых политопов (Шепард [6]) как взвешенных сумм вершин с весами, пропорциональными $(n-1)$-мерным площадям сферических изображений вершин. (Аналогичные определения через опорную функцию даны Шепардом [6] для произвольных выпуклых тел.) При таком определении штейнеровские точки выпуклого многогранника и его граней удовлетворяют уравнениям типа уравнений Эйлера и Дена — Саммервилла (см. Грюнбаум [10], гл. 9) и имеют другие ценные свойства. О деталях и неожиданных связях с иными разделами математики см. Шепард [6, 8], Грюнбаум [8], Сэлли [1, 2].

Открытым остается вопрос о том, является ли $k(K)$ на плоскости или в пространствах размерности $n > 2$ единственной п. и. точкой, обладающей свойством 3.

Аддитивность $k(K)$ представляет интерес в связи с рядом свойств некоторых подобно инвариантных мер симметрии (см. §§ 4—6). Переходя к соответствующим свойствам аффинно инвариантных мер симметрии, естественно задаться вопросом: существуют ли а. и. точки $p(K)$, обладающие свойством аддитивности 3)? Отрицательный ответ непосредственно вытекает из следующих замечаний:

а) Единственная а. и. точка треугольника или квадрата K — его центр тяжести $g(K)$ (см. чуть ниже).

б) Пусть $T_{\alpha,\beta}$, $T_{\beta,\alpha}$, $K_{\alpha+\beta}$ — множества, изображенные на рис. 2. Очевидно, что $T_{\alpha,\beta}+T_{\beta,\alpha}=K_{\alpha+\beta}$ и

$$p(T_{\alpha,\beta})=g(T_{\alpha,\beta})=\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\beta}{3}\right),$$
$$p(T_{\beta,\alpha})=g(T_{\beta,\alpha})=\left(\frac{\beta}{3},\frac{\alpha}{3}\right),$$

поэтому, если бы функция $p(K)$ обладала свойством 3), то мы имели бы

$$p(K_{\alpha+\beta})=\left(\frac{\alpha+\beta}{3},\frac{\alpha+\beta}{3}\right).$$

Но тогда при $\alpha\to 0$

$$p(K_{\alpha+\beta})\to\left(\frac{\beta}{3},\frac{\beta}{3}\right),$$

в то время как $K_{\alpha+\beta}$ при $\alpha \to 0$ стремится к квадрату S, для которого

$$p(S) = g(S) = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Остается открытым более трудный вопрос о том, существует ли а. и. множество $p(K)$, не совпадающее

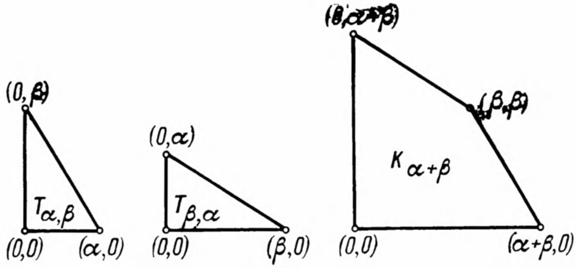

Рис. 2.

с K и удовлетворяющее условию 3) или более слабому условию:

$$p(K + K') \supset p(K) + p(K').$$

Если *аффинная группа симметрии* тела K (т. е. группа аффинных отображений тела K на себя) оставляет неподвижной единственную точку тела K, то, очевидно, все а. и. точки тела K исчерпываются этой неподвижной точкой; отсюда, в частности, вытекает сказанное выше об а. и. точках треугольника и квадрата (или, общее, то, что центрально симметричные множества, а также симплексы имеют единственную а. и. точку). Аналогичное утверждение верно и для п. и. точек. Этим замечанием можно пользоваться при вычислении значений некоторых мер симметрии для симплексов (см., например, Фари и Рэдей [1]). По-видимому, остается до сих пор открытым вопрос о том, верно ли обратное, т. е. можно ли из единственности а. и. точки сделать какое-либо заключение о группе самосовмещений тела. То же относится к следующим задачам.

Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$. Обозначим через K° множество всех точек в E^n, каждая из которых переводится в себя всеми преобразованиями из аффинной группы симметрии тела K. Достаточно ли обширно семейство всех а. и. точек $p(K)$

для того, чтобы обеспечить совпадение $K^\circ = \{p(K)\}$? В частности, если $K^\circ = E^n$, то будет ли $\{p(K)\} = E^n$?

Если имеются некоторые а. и. точки $p_i(K)$ тела K ($i = 1, \ldots, m$) и вещественные α_i, причем $\Sigma\alpha_i = 1$, то сумма $\Sigma\alpha_i p_i(K)$ снова дает а. и. точку тела K. Существует ли среди всех а.и. точек тела K конечный «базис», такой, что подобным образом всякая а. и. точка через него выражается?

Такие же вопросы возникают для п. и. точек.

Приведем пример еще одного родственного круга задач. Для всякой выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ с центром тяжести g и центром описанного эллипса c всегда $g + 2(c - g) \in K$. С другой стороны, легко проверить, что для фигуры K, изображенной на рис. 3, $g + 6(g - c) \notin K$. Каков наибольший интервал $[\alpha, \beta]$, для которого при любом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ и любом $K \in \mathfrak{K}^2$ сохраняется включение $g + \lambda(g - c) \in K$?

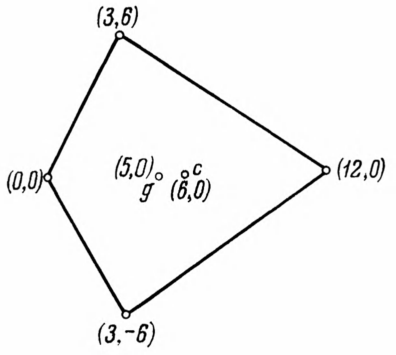

Рис. 3.

Сходную задачу ставил Фенхель (см. П а л [1]). Пусть дана выпуклая фигура $K \in \mathfrak{K}^2$ диаметра 1. Как велико может быть расстояние между ее центром тяжести и центром описанного круга? Частичный ответ был дан П а л о м [1]. О близких задачах см. М е й з л и к [1] и Э г л с т о н [6]. Главный результат М е й з л и к а [1] таков: максимальное расстояние между центром тяжести выпуклой фигуры, имеющей ось симметрии и описанный круг диаметра 1, и центром описанного круга $\approx 0{,}21392$.

3.3. Важнейшие а. и. и п. и. точки, рассматривавшиеся в литературе,— это центры тяжести различных распределений масс, и особенно связанных с геометрическими свойствами тел.

1°. *Центр тяжести $g(K)$ выпуклого тела K*, т. е. центр тяжести массы, равномерно распределенной по выпуклому телу K. Сводка результатов о свойствах $g(K)$, известных к 1934 г., имеется у Б о н н е з е н а и Ф е н х е л я [1] (стр. 53). Попытка обозреть здесь более современные результаты по этой теме завела бы нас слишком далеко (см., однако, пп. 6.1,4° и 6.5,2°, где приведены некоторые нерешенные задачи).

2°. *Центр тяжести $a(K)$ площади поверхности ∂K выпуклого тела K*, т. е. центр тяжести массы, равномерно распределеной по границе тела K. Центру тяжести площади поверхности $a(K)$ уделялось значительно меньше внимания, нежели $g(K)$. Из существенных результатов, не содержащихся у Боннезена и Фенхеля [1], следует упомянуть результаты Боуза и Роя (опубликованы в серии заметок в Bull. Calcutta Math. Soc., начиная с работы Боуза и Роя [1]). Они обобщили и унифицировали многие ранее известные результаты. Представляется вполне вероятным, что полученные ими теоремы допускают далеко идущие обобщения. Один результат такого рода имеется в работе Чакериана и Штейна [1]. Жерье и Пойа [1] рассмотрели класс полиэдров, подобных пирамидам, для которых $a(K)$ имеет некоторые специальные свойства.

Следующая задача относится к целому классу вопросов, относительно решения которых, кажется, ничего не известно. Существует ли для каждого выпуклого тела $K \subset E^n$ такое невырожденное аффинное преобразование T пространства E^n на себя, что

$$a(T(K)) = g(T(K))?$$

3°. *Центр тяжести кривизны $k(K)$ выпуклой фигуры K*, т. е. центр тяжести массы, распределенной по границе ∂K с плотностью, пропорциональной кривизне границы (см. п. 3.2). Для $K \in \mathfrak{K}^n$ имеется $n-1$ аналогов $k(K)$: центры тяжести распределений, связанных с различными симметрическими функциями от обратных величин главных радиусов кривизны поверхности ∂K. Кажется, об их свойствах известно весьма немного.

3.4. Центр $c(K)$ описанного эллипсоида и центр $i(K)$ вписанного эллипсоида. Хорошо известно, что для каждого выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ существует единственный эллипсоид наименьшего объема, содержащий тело K,— *эллипсоид Лёвнера* тела K *). Его центр $c(K)$ является для K а. и. точкой. Существование эллипсоидов Лёвнера установлено разными авторами (Беренд [1, 2]

*) Ср., например, Буземан и Келли [1], стр. 132; Буземан [1], стр. 123.

для $n = 2$, в общем случае Д ж о н [1], Д а н ц е р, Л а у г в и ц, Л е н ц [1], З а г у с к и н [1]*).

В некотором смысле двойственным к эллипсоиду Лёвнера является однозначно определенный эллипсоид наибольшего объема, содержащийся в выпуклом теле $K \in \mathfrak{K}^n$. Этот эллипсоид рассматривался теми же авторами. Его центр $i(K)$ также является для K а. и. точкой. По поводу обобщения понятий эллипсоида Лёвнера и двойственного ему см. Ф а э р и [1].

Значительный интерес представляет следующая теорема, впервые установленная Д ж о н о м [1] (см. также Л е й х т в е й с [2]): Для каждого выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ (соответственно для каждого центрально симметричного выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$) найдется такой эллипсоид $E \subset K$, что концентричный ему эллипсоид E^*, гомотетичный E с коэффициентом гомотетии n (соответственно $\sqrt{n}$) содержит K; если K — не симплекс, то наименьший допустимый коэффициент гомотетии строго меньше n. (Иными словами, расстояние d_2 — см. § 2 — от шара B^n до любого элемента $\mathfrak{K}^n$ не превосходит $\ln n$, а расстояние от B^n до любого центрально симметричного элемента $\mathfrak{K}^n$ не превосходит $\ln\sqrt{n}$; см. также § 7.)

Известно (см. Д ж о н [1] или Л е й х т в е й с [2]), что в теореме Джона в качестве E^* можно взять эллипсоид Лёвнера тела K. С другой стороны, простым упражнением по аналитической геометрии является доказательство того, что эллипсоид максимального объема, содержащийся в K, удовлетворяет теореме Джона, если принять его за E^*. Из этого замечания очевидным образом следуют утверждения п. 6.1,2° относительно F_1^c и F_1^i.

3.5. В связи с мерами симметрии выпуклых тел на плоскости нам придется рассматривать следующие два а. и. множества.

1°. *Множество* $s(K)$ *шестидольных точек.* Р. Б а к и И. Б а к [1] назвали точку s *шестидольной точкой* тела $K \in \mathfrak{K}^2$, если она обладает тем свойством, что существуют такие три проходящие через s прямые, что каждый из определяемых ими шести секторов содержит 1/6 площади фигуры K. Существование хотя бы одной шестидольной точки вытекает из простых соображений непрерыв-

*) Лёвнер сообщил свое доказательство устно; оно осталось неопубликованным.

ности, применимых не только к разбиению площади выпуклой фигуры, но и к разбиению произвольного непрерывного распределения неотрицательных масс. (При незначительном видоизменении определения: «каждый из шести замкнутых секторов содержит не менее 1/6 общей массы», его можно применять для произвольного непрерывного распределения неотрицательных масс.) Шестидольные точки и некоторые их свойства рассматривались Ягломом и Болтянским [1], Эглстоном [2, 3, 5], Ньюменом [1]; по поводу некоторых обобщений этого понятия см. Сиде [2].

У выпуклой фигуры может быть больше одной шестидольной точки (Эглстон [3], стр. 126). Кажется, неизвестно никакого критерия, который выделял бы выпуклые фигуры с единственной шестидольной точкой, равно как и те множества, которые могут служить множеством шестидольных точек некоторой выпуклой фигуры.

Не найдено обобщений понятия шестидольных точек на случай размерностей $n > 2$. О некоторых задачах в этом направлении см. Грюнбаум [3].

Заслуживает упоминания одно близкое понятие. Каково бы ни было непрерывное распределение массы на плоскости, существует хотя бы одна пара взаимно перпендикулярных прямых, для которых в каждый из четырех секторов попадает 1/4 всей массы. Обобщается ли это на распределение масс в E^n и на 2^n секторов? Кажется, эта задача не решена при $n > 3$.

Для $n = 3$ сначала Циндлером [1] был получен результат, касающийся не деления самого тела K, а деления его поверхности ∂K: для любого $K \in \mathfrak{K}^3$ и любой плоскости P_1, делящей пополам площадь поверхности ∂K, найдутся такие плоскости P_2 и P_3, что каждый из восьми «секторов» (октантов), определяемых плоскостями P_1, P_2, P_3, содержит 1/8 площади ∂K.

Для деления объема самого K задача была недавно решена Хадвигером [2]. Его основной результат таков. Пусть A и B — компактные множества в E^3 с лебеговой мерой

$$m(A) = 4\alpha > 0 \quad \text{и} \quad m(B) = 4\beta > 0.$$

Тогда существуют такие плоскости P_1, P_2, что каждый из четырех определяемых ими «клиньев» перессекает $\hat{A}$ по множеству меры α, а $\hat{B}$ — по множеству меры β. Отсюда легко выводится возможность разбиения каждого компактного множества $A \subset E^3$ тремя плоскостями на 8 частей равной меры, а также то, что для каждого компактного множества $A \subset E^3$ меры $m(A) = 4\alpha > 0$ и каждой точки $p \in E^3$ существуют две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку p, разбивающие A на четыре части меры α.

С этим кругом задач связаны вопросы, группирующиеся вокруг «задачи о трехслойном сэндвиче», поставленной Уламом. В этой задаче требуется разрезать бутерброд из хлеба с маслом и ветчиной прямолинейным разрезом так, чтобы каждая часть содержала ровно половину каждого из трех ингредиентов. По поводу известных здесь результатов и дополнительной литературы см. Штейнгауз [1], Такер [1], Стоун и Таки [1], Дьюбинс и Спенье [1], Хилтон и Уайли [1] (стр. 152), Бос [1].

2°. *Множество шестиугольных точек* $h(K)$. *Аффинно правильным шестиугольником* называют образ правильного шестиугольника при невырожденном аффинном преобразовании. Из простых соображений непрерывности следует, что всякая выпуклая фигура $K \in \mathfrak{K}^2$ имеет хотя бы один вписанный аффинно правильный шестиугольник, т. е. такой, что все его вершины принадлежат ∂K. Этот результат устанавливался очень многими авторами, обычно в качестве леммы, нужной для получения других результатов, касающихся геометрии чисел или пространств Минковского — см., например, Безикович [1], Фари [1], Лаугвиц [1], Решетняк [1], где приложения достаточно типичны. Центр всякого аффинно правильного шестиугольника, вписанного в K, называется *шестиугольной точкой* $h(K)$ фигуры K. Множество всех шестиугольных точек фигуры K является для нее а. и. множеством. У центрально симметричной выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ каждая точка границы является вершиной хотя бы одного вписанного аффинно правильного шестиугольника.

По поводу дальнейших результатов о вписанных аффинно правильных шестиугольниках и других правильных или аффинно правильных множествах см., например, Асплунд и Грюнбаум [1], Бёме [1], Эглстон [4], Грюнбаум [1], Келли [1], Пуччи [1], Шеффер [1, 2], Сиде [1], Сиде и

Грюнбаум [1], Де-Валькурт [4] *). См. также ниже, § 6, п. 4°.

Кажется, неизвестны критерии для выделения выпуклых фигур с точно одним вписанным аффинно правильным шестиугольником, равно как с единственной шестиугольной точкой. Множество всех шестиугольных точек может быть одномерным континуумом, но общая природа таких множеств еще не определена.

Другая нерешенная задача, положительное решение которой, по-видимому, представляло бы интерес для разных областей комбинаторной геометрии, такова. Аффинно правильный шестиугольник есть векторная сумма треугольника T и ему противоположного $-T$, т. е. «разностное тело» треугольника. Существует ли, по аналогии со сказанным, для всякого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ хотя бы один вписанный «гипершестиугольник», т. е. разностное тело симплекса? Вопрос остается пока открытым даже для E^3, где гипершестиугольник есть невырожденный аффинный образ архимедова кубооктаэдра.

Следует упомянуть, что для описанных аффинно правильных шестиугольников справедливы аналогичные упомянутым результаты (устное сообщение Данцера). Кажется, освещения этих результатов в литературе нет. Точно так же можно результаты Бёме [1] и Грюнбаума [1] о вписанных аффинно правильных пяти- и восьмиугольниках соответственно перефразировать для описанных.

Как будто совсем не исследованы вопросы существования аффинно правильных шестиугольников и т. п. множеств, вписанных в произвольную замкнутую кривую Жордана. Результат такого рода о существовании вписанного квадрата известен как теорема Шнирельмана (см. Шнирельман [1], Штейнгауз [2], стр. 77, Огилви [1], Жерар [1], Гугенхеймер [1]). С другой стороны, Белецки [1] показал, что существует трехмерное выпуклое тело, в которое нельзя вписать никакой прямоугольный параллелепипед так, чтобы все его вершины принадлежали границе этого тела.

*) В связи с вычислительными задачами Петеану [1, 2] рассмотрел точки, в которых взаимно делятся пополам две хорды выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$, параллельные двум наперед заданным направлениям. Для $K \in \mathfrak{K}^3$ и трех заданных направлений таких точек уже может не существовать.

§ 4. «Сверхминимальность» некоторых мер симметрии

В поисках дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция, чтобы заслужить название «меры симметрии», многими из тех, с кем мы советовались, предлагалось в качестве «разумного» следующее свойство:

Прибавление «более» симметричного множества к «менее» симметричному должно не уменьшать меры симметрии последнего.

Точнее, это условие (мы назовем его свойством *сверхминимальности*) таково: при всех $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^n$

$$f(K_1 + K_2) \geqslant \min\{f(K_1), f(K_2)\}. \qquad (*)$$

Хотя у нас нет (и, по-видимому, так будет и впредь) никаких объективных оснований обязательно налагать это условие, его интуитивного смысла вроде бы достаточно, чтобы объяснить нашу заинтересованность в нем. Однако восторги в адрес этого условия снижаются, если заметить, что такие «естественные» меры симметрии, как мера Ковнера — Безиковича (см. § 6), не обладают этим свойством.

Мы полагаем, что, несмотря на это, свойство сверхминимальности представляет не только случайный интерес. Мы останавливаемся на нем главным образом потому, что оно является достаточно ограничительным, чтобы гарантировать, что всякая мера симметрии, обладающая кроме 1) — 4) (см. § 1) также свойством (*), обладает еще одним свойством, отвечающим нашим интуитивным представлениям о мере симметрии. Именно, верна следующая теорема:

(А) *Для всякой аффинно (подобно) инвариантной меры симметрии $f(K)$ в $\mathfrak{K}^2$, удовлетворяющей (*), справедливо соотношение*

$$\min\{f(K) \mid K \in \mathfrak{K}^2\} = f(T),$$

соответственно

$$\min\{f(K) \mid K \in \mathfrak{K}^2\} = \min\{f(T) \mid T \in \mathfrak{K}^2\},$$

где T — произвольный треугольник.

Справедливость (А) непосредственно вытекает из

(В) *Всякая выпуклая фигура в E^2 является пределом (в хаусдорфовой метрике) конечных сумм треугольников.*

Последнее утверждение сразу вытекает из следующего элементарного факта (см. Бляшке [5], стр. 250, Яглом и Болтянский [1]):

(С) *Всякий выпуклый многоугольник в E^2 есть сумма конечного числа отрезков и треугольников* (рис. 4).

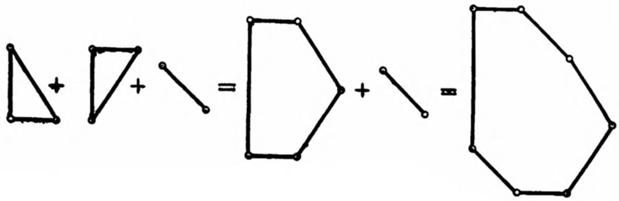

Рис. 4.

Теорема (А) позволяет нам для меры симметрии $f(K)$, удовлетворяющей условию сверхминимальности, искать нижнюю границу для всех $K \in \mathfrak{K}^2$, рассматривая одни лишь треугольники; естественно, что это во многих случаях сильно упрощает задачу (см. § 6).

По-видимому, пришло время сделать следующие замечания.

1) Для всех аффинно инвариантных мер симметрии в $\mathfrak{K}^2$, изучавшихся в литературе, единственным экстремальным телом являлся треугольник (см., впрочем, конец п. 6.5). Возникает вопрос, является ли треугольник (симплекс) единственным экстремальным телом для любой меры симметрии, удовлетворяющей условию (*) или, возможно, несколько иному условию:

$$f(K_1 + K_2) = \min\{f(K_1), f(K_2)\} \quad \text{влечет}$$
$$\{K_1 \text{ гомотетично } K_2 \text{ или } f(K_1) = f(K_2) = 1\}. \quad (**)$$

2) Вероятно, теорема (А) (с заменой треугольника симплексом) справедлива для мер в $\mathfrak{K}^n$ при любых n, но приведенный здесь метод доказательства неприменим при $n > 2$. Как указал Гейл [1], уже в E^3 существуют выпуклые многогранники K, отличные от симплекса, которые *неразложимы*, т. е. такие, что равенство $K = K_1 + K_2$, где $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^3$, возможно только в том случае, если K_1 и K_2 гомотетичны K. Такими являются, например, октаэдр, икосаэдр, тела, получаемые прикладыванием правильного симплекса к одной из граней октаэдра, и т. п.

Это приводит нас к проблеме, которая является, по видимому, весьма трудной: определить все неразложимые многогранники в E^3 (и в E^n).

С этим связана задача о неприводимых множествах. Множество $K \in \mathfrak{K}^n$ называется *неприводимым*, если оно имеет центр симметрии и равенство $2K = K^* + (-K^*)$ возможно только в том случае, когда K^* является транслятом тела K. Известно (Г р ё м е р [1]), что гиперкубы всех размерностей неприводимы, хотя они и не являются неразложимыми. В E^2 единственными неприводимыми множествами являются параллелограммы (Г р ю н б а у м [4]), но уже в E^3 дело обстоит значительно сложнее: кажется, неизвестны никакие критерии неприводимости для произвольных выпуклых тел в E^3 и даже для многогранников.

3) Хотя теорема (С) не обобщается на размерности $n > 2$, нам казалось правдоподобным следующее обобщение (В) (из него вытекала бы истинность (А) при всех n): *Не будет ли всякое выпуклое тело $K \in \mathfrak{K}^n$ пределом конечных сумм симплексов*? Ответ долго был неясен даже для октаэдра в E^3, но, окончательно, оказался отрицательным. Как независимо установили Асплунд (не опубликовано) и Ш е п а р д [3], октаэдр не является пределом семейства конечных сумм $\{\Sigma T_i C_i\}$, где T_i — аффинные преобразования, а C_i — не октаэдрические тела. Далеко идущие обобщения этого результата и многие дополнительные результаты о неразложимости или неприводимости множеств получены Ш е п а р д о м [2, 5] (см. также Г р ю н б а у м [10], гл. 15).

Относительно обобщения теоремы (С) для $n > 2$ с использованием сложения выпуклых тел, отличного от рассматривавшегося нами «векторного сложения по Минковскому», см. Ф а э р и и Г р ю н б а у м [1]. Там используется так называемое «сложение по Бляшке» *),

*) Это сложение (см. Б л я ш к е [2], конец § 23) определено для классов выпуклых тел, получающихся из одного тела всевозможными параллельными переносами. Линейной комбинацией слагаемых является класс тел, «поверхностная функция» которых есть соответствующая линейная комбинация поверхностных функций слагаемых. У самого Б л я ш к е ([2], § 23) определение такого сложения относилось к регулярным телам класса гладкости C^2, у Ф а э р и и Г р ю н б а у м а ([1], стр. 92) — к многогранникам. Понятие поверхностной функции, введенное А. Д. Александровым, Фенхелем и Иенсеном, позволяет объединить эти определения и распространить их на любые выпуклые тела.

которое было исследовано главным образом Ф а э р и [2, 3]. Среди многих установленных Фаэри интересных результатов, относящихся к сложению тел по Бляшке, отметим существование теории, параллельной теории Брунна — Минковского, и связь с телами постоянной освещенности, аналогичную связи между сложением по Минковскому и телами постоянной ширины *). Существует также аффинно инвариантная мера симметрии, основанная на сложении по Бляшке (см. Ф а э р и [3], стр. 100).

4) Возможно, представляют некоторый интерес следующие, более слабые, нежели сверхминимальность, условия:

$$f(K+M) \geqslant f(K) \text{ при всех } K,\ M \in \mathfrak{K}^n,\ M = -M; \quad (***)$$

$f((1-\lambda)K + \lambda(-K))$ при любом $K \in \mathfrak{K}^n$ — возрастающая функция на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$. (****)

Мера симметрии Ковнера — Безиковича свойством (***) не обладает (см. § 6); неизвестно, обладает ли она свойством (****).

§ 5. Разные подходы к геометрическому определению меры симметрии

Любой вещественно-значный непрерывный функционал на пространстве $\mathfrak{K}^n_a$ или $\mathfrak{K}^n_s$, принимающий одно из экстремальных значений на всех центрально симметричных выпуклых телах, и только на них, очевидным образом позволяет прийти к мерам симметрии.

В качестве примера допустим, что $\mathcal{M}^n$ — подмножество $\mathfrak{K}^n$, состоящее из всех центрально симметричных тел, а d — любая метрика в $\mathfrak{K}^n_a$ или $\mathfrak{K}^n_s$. Тогда $f(K) = \exp[-d(K, \mathcal{M}^n)]$ является мерой симметрии. Поскольку этот подход до сих пор не обсуждался в литературе, интересно заметить, что мера симметрии по Минковскому (см. п. 6.1) на $\mathfrak{K}^n_a$ может быть получена на этом пути, если использовать метрику d_2, рассмотренную в § 2. (О другом функционале, связанном с d_2 и, возможно, также являющемся мерой симметрии, см. § 7.)

---

*) Относительно связи между (векторным) сложением по Минковскому и телами постоянной ширины ср., например, Я г л о м и Б о л т я н с к и й [1], § 7; тела постоянной освещенности характеризуются постоянством площади (ортогональной) проекции тела на любую плоскость.

Больше внимания привлек иной подход. С каждым выпуклым телом можно тем или иным способом однозначно связать некоторое центрально симметричное выпуклое тело, причем так, чтобы при этом отображении $\mathfrak{K}^n \to \mathcal{M}^n$ каждое тело $M \in \mathcal{M}^n$ переходило само в себя. Тогда можно сравнивать некоторые геометрически значимые величины (например, объем) самого выпуклого тела и связанного с ним тела M. Наиболее характерный пример такого подхода дает мера симметрии, определяемая по «разностному телу», см. п. 6.8. Слегка модифицировав вышеописанную процедуру, получим в качестве другого примера меру симметрии Роджерса и Шепарда (см. п. 6.9).

По-видимому, наиболее интересен следующий метод. Для каждого выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ и произвольной точки $x \in K$ определяется (из подходящих геометрических соображений) некоторое число $f(x, K)$, где $0 \leqslant f(x, K) \leqslant 1$. Затем на $\mathfrak{K}^n$ определяется функционал

$$f(K) = \max\{f(x, K) \mid x \in K\}. \qquad (*)$$

Надлежащим выбором $f(x, K)$ функционал $f(K)$ может быть сделан аффинно или подобно инвариантным и даже мерой симметрии. Многие из обсуждаемых в § 6 мер симметрии относятся к этому типу. Если в таких функционалах вместо $(*)$ положить

$$f^p(K) = f(p(K), K),$$

где $p(K)$ — а. и. (соответственно п. и.) точка тела K, или

$$f^P(K) = \min\{f(p, K) \mid p \in P(K)\},$$

где $P(K)$ — а. и. (п. и.) множество тела K, то можно прийти к огромному количеству экстремальных задач и мер симметрии. (В некоторых случаях вместо минимума или наряду с ним удобно рассматривать максимум.) Такие, как мы их будем называть, *производные меры симметрии*, особенно в случае, когда $p(K) = g(K)$ является центром тяжести тела K, рассматривались достаточно часто. В § 6 говорится подробнее об имеющихся в литературе на этот счет результатах.

Интерес к описанному методу определения мер симметрии объясняется прежде всего тем, что он открывает путь большому числу геометрически интересных понятий и задач.

При всяком $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ множество

$$\mathscr{C}_\lambda(K, f) = \{x \in K \mid f(x, K) \geqslant \lambda f(K)\}$$

является а. и. (п. и.) множеством. Граница тела $\mathscr{C}_\lambda(K, f)$ является поверхностью уровня функции $f(x, K)$ и, следовательно, а. и. (п. и.) множеством. Для многих наиболее часто рассматриваемых мер симметрии (этого типа) множества $\mathscr{C}_\lambda(K, f)$ выпуклы (см. § 6).

Одно из *множеств уровня* $\mathscr{C}_\lambda(K, f)$, а именно множество $\mathscr{C}_1(K, f)$, называют *критическим множеством* тела K (по отношению к мере f) и обозначают $\mathscr{C}(K, f)$ или просто $\mathscr{C}(K)$. Для некоторых мер симметрии множество $\mathscr{C}(K)$ для всех K состоит из единственной точки; ее называют *критической точкой* или, точнее, *f-критической точкой* тела K. То, что известно в этом направлении, также собрано в § 6.

Очевидно, можно придумывать многие другие более или менее общие методы построения мер симметрии. Почти каждая из обсуждаемых в литературе мер симметрии дает повод для некоего «общего метода». От их формулировки мы воздержимся, ибо неизвестны никакие результаты, оправдывающие такие определения. Точно так же мы не станем приводить длинный список функционалов, являющихся, или возможно являющихся, мерами симметрии, но о которых мы не можем сообщить ничего иного. В § 7 приведены примеры функционалов, о которых мы «подозреваем», что они являются мерами симметрии; по-видимому, они обладают некоторыми необычными свойствами *).

*) Пусть выбран функционал, достигающий экстремума на симметричных множествах (по нему может строиться мера симметрии). Иногда само нахождение значений такого функционала связано с интересными задачами.

Пример 1. Пусть в E^m дано множество из $2n$ точек A_k ($k = 1, \ldots, 2n$); нас интересует мера его *центральной симметрии*. Разобъем номера $1, \ldots, 2n$ на n пар k_i, k_i', $i = 1, \ldots, n$, выберем точку $X \in E^m$ и, симметрично отразив A_{k_i} от точки X (получаем точку A'_{k_i}), образуем сумму $d = \sum_i \left(A'_{k_i} - A_{k_i'}\right)^2$. Пусть наш функционал есть $\min d$ по всем X и всем разбиениям (k_i, k_i'). Легко проверить, что минимальность по X требует $X = C$, где C — центр тяжести $\{A_k\}$. Выбор минимизирующего сумму d разбиения (k_i, k_i') при фиксированном X равносилен известной из линейного программирования «задаче о назначениях».

Пример 2. Пусть на плоскости E^2 дано множество из $2n$ точек A_k и нас интересует мера его *осевой симметрии*. Как в при-

§ 6. Что нам известно о специальных мерах симметрии

6.1. Мера симметрии Минковского. 1°. Пусть H_1 и H_2 — две опорные гиперплоскости тела $K \in \mathfrak{K}^n$, параллельные гиперплоскости H, проходящей через точку $p \in K$ (рис. 5); через $f(H, p)$ — обозначим не превосходящее 1 отношение, в котором H делит расстояние между

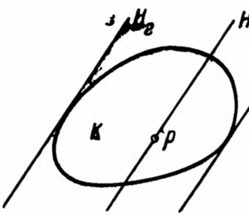

Рис. 5.

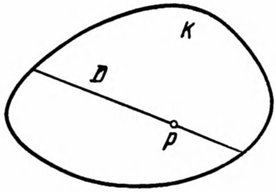

Рис. 6.

H_1 и H_2. Положим $f(p) = \min\{f(H, p) \mid H \ni p\}$ и примем за меру симметрии тела K значение

$$F_1(K) = \max\{f(p) \mid p \in K\}.$$

Первые оценки величины $F_1(K)$ для случаев $n = 2{,}3$ восходят к Минковскому [1—3]. По-видимому,

---

мере 1, фиксируем разбиение (k_i, k_i'), выбираем прямую $x \subset E^2$, отразив A_{k_i} от x, получаем A'_{k_i} и вычисляем ту же сумму d. Здесь $\min d$ требует прохождения x через C. Совместный выбор минимизирующих сумму d угла поворота x и разбиения (k_i, k_i') приводит к задаче параметрического линейного программирования.

Отметим еще, что экстремальность функционала на симметричных множествах может приводить к нетривиальным неравенствам. При этом случаи равенства получают ясный геометрический смысл. Например, при вещественных a_i, b_i, a_i', b_i', $(i = 1, \ldots, n)$ справедливо неравенсто

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + a_i'^2 + b_i^2 + b_i'^2)\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i'b_i + a_ib_i')\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i'a_i - b_ib_i')\right)^2,$$

причем равенство имеет место в том и только том случае когда на плоскости каждая пара точек (a_i, b_i) и (a_i', b_i') симметрична относительно одной и той же для всех i прямой, проходящей через начало координат. (Это легко получается из рассмотрений примера 2).

Радон [1] первым показал, что $F_1(K) \geqslant 1/n$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$. (Точнее говоря, оба автора рассматривали производную меру $F_1^g(K)$, см. п. 2°.) Позже различными авторами давались более простые доказательства (см. ниже).

Та же мера симметрии изучалась, и даже более подробно, при несколько ином ее определении. Обозначим через $g(D, p)$ не превосходящее 1 отношение, в котором точка $p \in K$ делит произвольную хорду D тела K, проходящую через точку $p \in K$ (рис. 6). Пусть $g(p) = \min\{g(D, p) \mid D \ni p\}$. Из очевидных соображений вытекает, что $g(p) = f(p)$ при всех $p \in K$. Мера симметрии

$$F_1(K) = \max\{g(p) \mid p \in K\}$$

впервые была введена Нейманом [1] для случая $n = 2$. Оценки для $F_1(K)$ при любом n, базирующиеся на этом определении, даны Зюссом [2], Хаммером [1], Кли [1], Лейхтвейсом [1], Берчем [1], Ягломом и Болтянским [1] (см. также Данцер, Грюнбаум, Кли [1]).

О другом определении $F_1(K)$ говорилось в начале § 5.

Из второго определения сразу следует, что $F_1(K) = 1$ тогда и только тогда, когда тело K центрально симметрично. Из первого определения почти непосредственно следует, что «поверхности уровня» (см. § 5), отвечающие функции $F_1(K)$, выпуклы. Следовательно, $F_1(K)$ обладает свойством «сверхминимальности» (см. § 4):

$$F_1(K_1 + K_2) \geqslant \min\{F_1(K_1), F_1(K_2)\}.$$

При $n = 2$ «критические множества» (см. § 5) состоят из одной точки (Нейман [1]; см. также Зюсс [3]). В общем случае Кли [1] установил следующее неравенство, связывающее $F_1(K)$ и размерность $\dim\mathscr{C}(K, F_1)$ критического множества $\mathscr{C}(K, F_1)$:

$$\frac{1}{F_1(K)} + \dim\mathscr{C}(K, F_1) \leqslant n.$$

Отсюда непосредственно следует, что $\dim\mathscr{C}(K, F_1) \leqslant n - 2$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$ и что всякое тело $K \in \mathfrak{K}^n$, для которого $F_1(K) > \frac{1}{n-1}$, имеет единственную критическую точку.

Единственными телами с минимальным значением $F_1(K)$ служат симплексы (Нейман [1] для $n=2$; Зюсс [2], Хаммер [1], Кли [1], Лейхтвейс [1], Берч [1] — в общем случае; см. также Хаммер и Собчик [1]). Относительно некоторых свойств поверхностей уровня, отвечающих $F_1(K)$, и некоторых родственных множеств см. Хаммер [2].

О новых результатах по этим и связанным с ними вопросам см. Замфиреску [1, 2] и Вакулеску [1], где имеются дополнительные ссылки и прослежены связи с идеями Винченцини [1].

По поводу некоторых обобщений вышеприведенных понятий и результатов см. Моцкин [1].

2°. *Аффинно инвариантные производные меры симметрии.* Рассматривалось немало мер симметрии, производных от F_1 методом, указанным в § 5.

1) Производная мера F_1^g основывалась на центре тяжести $g = g(K)$ тела K. Неравенство $F_1^g(K) \geqslant 1/n$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$ установлено Минковским [1] при $n = 2,3$ и Радоном [1] для всех n. Другие доказательства даны Эстерманом [2] ($n = 3$), Зюссом [1] ($n = 3$), Зюссом [2], Хаммером [1], Ягломом и Болтянским [1] ($n = 2,3$), Эрхартом [2], Лейхтвейсом [1], Берчем [1], Плисом и Туровичем [1]. Большинство этих авторов доказали также, что единственные экстремальные тела в E^n суть пирамиды с произвольным (выпуклым) $(n-1)$-мерным основанием.

2) Производные меры F_1^c и F_1^i основаны соответственно на центрах описанного и вписанного эллипсоидов. С учетом теоремы Джона (Джон [1], Лейхтвейс [2], см. также п. 3.4) получается, что $F_1^c(K) \geqslant 1/n$ и $F_1^i(K) \geqslant 1/n$ при всех $K \in \mathfrak{K}^n$. Единственные экстремальные тела суть симплексы.

3) Производная мера F_1^h основана на шестиугольных точках. Для $K \in \mathfrak{K}^2$ вводится функционал $F_1^h(K) = \max f(h)$, где h пробегает все шестиугольные точки фигуры K. Он является мерой симметрии и $F_1^h(K) \geqslant 1/2$ (рис. 7). Аналогично определенный функционал $F_1^{h*}(K) = \min f(h)$, где h пробегает все шестиугольные точки фигуры K, также является мерой симметрии и $F_1^{h*}(K) \geqslant 1/2$ для всех $K \in \mathfrak{K}^2$. В обоих случаях су-

ществуют экстремальные фигуры, отличные от треугольников (рис. 8).

4) Другое доказательство неравенства $F_1(K) \geqslant 1/n$ для $K \in \mathfrak{K}^n$ было дано Радо [1], который установил, что $f(t) \geqslant 1/n$, когда t — центр тяжести произвольного симплекса максимального объема, вписанного в K. Стоит

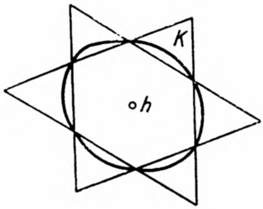

Рис. 7.

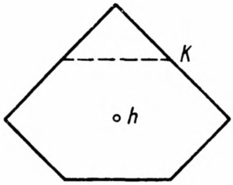

Рис. 8.

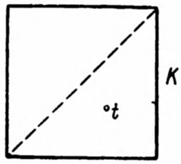

Рис. 9.

упомянуть, что функционал $\max f(t)$, где t пробегает центры тяжести всех содержащихся в K симплексов максимального объема, не является мерой симметрии: значения этого функционала могут быть меньше 1 для центрально симметричных тел; например, для квадрата (рис. 9) это значение равно 1/2. Аналогично, среди тех тел в E^n, на которых достигается нижняя граница $1/n$, существуют центрально симметричные.

3°. Рассматривались также *подобно инвариантные производные меры симметрии.*

1) Производная мера F_1^a, где $a(K)$ — центр тяжести $(n-1)$-мерной поверхности тела K. Для выпуклых тел $K \in \mathfrak{K}^n$ имеет место неравенство $F_1^a(K) > 1/(2n-1)$ (Секефальви-Надь [1] для $n = 2{,}3$; Эрхарт [4] для $n = 2$; Асплунд, Бредон, Грюнбаум [1] для всех n). Эта граница является точной: достаточно плоские пирамиды с произвольным выпуклым $(n-1)$-мерным основанием имеют меру симметрии F^a, сколь угодно близкую к $1/(2n-1)$. (Следовательно, гипотеза Эрхарта [4] решается отрицательно.)

2) Производная мера F_1^k, где $k(K)$ — центр тяжести кривизны контура фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$. Оценка $F_1^k(K) > 0$ здесь является уже точной; так, например, для треугольника T_α (рис. 10) имеем $F_1^k(T_\alpha) = \alpha/(\pi - \alpha)$

при $\alpha \leqslant \pi/3$. Интересным свойством меры F_1^k является ее сверхминимальность:

$$F_1^k(K_1 + K_2) \geqslant \min\{F_1^k(K_1),\ F_1^k(K_2)\},$$

которая сразу следует из аддитивности $k(K)$ и аддитивности опорной функции.

4°. *Замечания.* 1) На плоскости F_1-критическая точка выпуклой фигуры K делит, по крайней мере, три различные хорды в отношении $F_1(K)$ (впервые этот результат доказал Нейман [1]; по поводу его приложений см. Грюнбаум [7]). Это можно также легко вывести из теоремы Хелли о пересечениях выпуклых множеств (см., например, Яглом и Болтянский [1]). О множестве отношений, в которых точка может делить проходящие через нее хорды, см. Безикович и Замфиреску [1].

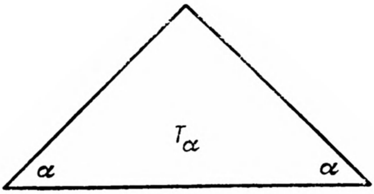

Рис. 10.

Из простых соображений непрерывности получаем, что F_1-критическая точка фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ делит пополам хотя бы три различные хорды. Как легко проверить, то же самое можно сказать о центре тяжести фигуры K (Боуз [1], Эрхарт [1], Виет [1]) и, очевидно, о каждой шестиугольной точке. (К содержащемуся у Боуза [1] утверждению, что число хорд, проходящих через центр тяжести и делящихся в нем пополам, когда оно конечно, обязательно нечетно, следует отнестись с осторожностью: могут встречаться «дважды подсчитываемые» хорды; легко построить примеры, которые показывают, что число геометрически различных хорд, разделенных центром тяжести фигуры пополам, может быть четным.)

Представляется естественным следующий вопрос: какими свойствами обладает множество всех тех точек тела $K \in \mathfrak{K}^n$, каждая из которых делит пополам хотя бы три различные хорды? Связано ли оно? Выпукло ли оно? Сиде [3] решил эту задачу, показав, что это множество связано, но не обязательно выпукло. Чакериан и Штейн [4] рассмотрели множество $M_i(K)$ всех тех точек, которые разбивают пополам ровно i различных хорд фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$. Один из их результатов таков: пусть m — лебегова мера на плоскости E^2; тогда $m(M_j(K)) = 0$ для всех четных j. Они доказали также, что функционал $\lambda(K) = m(M_1(K))/m(K)$ есть аффинно инвариантная мера симметрии, значения которой заключаются в границах $3/4 \leqslant \lambda(K) \leqslant 1$, причем равенство $\lambda(K) = 3/4$ характеризует треугольники. Эти авторы исследовали также функционал $\lambda(K)$ специально для фигур K постоянной ширины.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{K}^n$. Рассмотрим $(n-1)$-мерные гиперплоскости H, пересекающие $\operatorname{int} K$, и центры тяжести сечений $H \cap K$. Для $n = 3$ некоторые свойства этих центров тяжести изучали Асколи, Трикоми, Фенхель (см. Боннезен и Фенхель [1], стр. 13) и ближе к нашему времени — Штейнгауз [4]. Каждая точка из $\operatorname{int} K$ является центром тяжести, по крайней мере, одного такого сечения тела K. (Относительно перенесения этого результата на произвольное n см. Грюнбаум [5]; относительно связанных с этим результатов — Штейн [2]; относительно дальнейших обобщений — Косиньски [4]). Штейнгауз [4] доказал также, что при $n = 3$ во всяком теле K либо некоторая точка из $\operatorname{int} K$ является центром тяжести континуума различных сечений, либо же континуум точек служат центрами тяжести, по крайней мере, двух различных сечений каждая; с учетом результата Грюнбаума [5] и того, что при $n > 1$ в E^{n+1} не существует гомеоморфного образа n-мерного проективного пространства, доказательство Штейнгауза сохраняет свою силу и для $n > 3$.

Среди задач, связанных с этими теоремами и с обобщением результатов, очевидно, верных для E^2, упомянем некоторые вопросы, поставленные Грюнбаумом [5]. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$ и $n \geqslant 3$. Существует ли точка $x \in \operatorname{int} K$, являющаяся центром тяжести по крайней мере, для $n+1$ различных сечений тела K? (О положительном ответе на этот вопрос см. в начале п. 6.2.) Какими свойствами должно обладать множество всех таких точек? Содержит ли оно центр тяжести тела K?

Упомянутые выше результаты Штейнгауза остаются верными также в случае, если вместо центров тяжести сечений рассматривать другие непрерывные точечно-значные функции выпуклых множеств (такие, как центр тяжести их поверхности, центры минимальных описанных эллипсоидов или сфер и т. п.; см. Грюнбаум [5], Штейнгауз [4]). Предыдущие вопросы можно отнести к каждой из этих точечно-значных функций.

2) Н е й м а н [1] рассматривал также некоторые другие функционалы, связанные с F_1, которые легко видоизменить с тем, чтобы они стали мерами симметрии. Пусть p_i, q_i $(0 \leqslant i \leqslant 2m)$ — концевые точки хорд фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$, проходящие через фиксированную точку $x \in \operatorname{int} K$, причем на контуре фигуры точка p_i лежит между q_{m+i} и q_{m+i+1} и т. д. (см. рис. 11, где $m = 2$). Положим

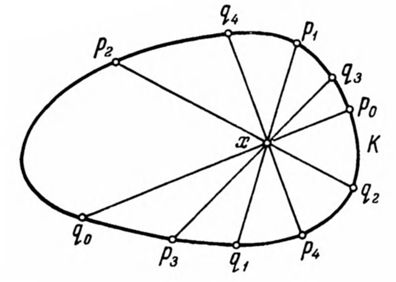

Рис. 11.

$$\rho_{2m+1}^{(x)} = \min \sum_i \frac{|p_i - x|}{|p_i - q_i|},$$

где min взят по всевозможным наборам хорд p_i, q_i, удовлетворяющих поставленным условиям, и пусть

$$\rho_{2m+1}(K) = \max \{\rho_{2m+1}^{(x)} \mid x \in \operatorname{int} K\}.$$

При этом имеет место двойное неравенство

$$m \leqslant \rho_{2m+1}(K) \leqslant \frac{m+1}{2},$$

где равенство $\rho_{2m+1}(K) = m$ характеризует треугольники, а равенство $\rho_{2m+1}(K) = (m+1)/2$ — центрально симметричные фигуры.

При $m = 1$ этот результат легко получить из свойств $F_1(K)$. (Неравенство $F_1(K) \geqslant 1/2$ Нейман выводил из $\rho_3(K) \geqslant 1$.) Возможно, из $F_1(K) \geqslant 1/2$ можно вывести оценку $\rho_{2m+1}(K) \geqslant m$.

3) Аналогично определяются следующие меры симметрии. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$ и точки x_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ принадлежат границе ∂K, а точка x лежит внутри их выпуклой оболочки $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$. Обозначим через y_i противоположный x_i конец хорды тела K, проходящей через x_i и x, и положим

$$\sigma(x) = \min \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{|x_i - x|}{|y_i - x|},$$

$$\pi(x) = \min \prod_{i=0}^{n} \frac{|x_i - x|}{|y_i - x|},$$

где min берется по всем семействам $\{x_i\}$, для которых фиксированная точка $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$. Пусть, наконец,

$$\sigma(K) = \max \{\sigma(x) \mid x \in \operatorname{int} K\},$$
$$\pi(K) = \max \{\pi(x) \mid x \in \operatorname{int} K\}.$$

Из результатов для меры F_1 следует, что $1/n \leqslant \sigma(K) \leqslant \leqslant 1$ и $1/n^{n+1} \leqslant \pi(K) \leqslant 1$. Очевидно, что $\sigma(K) = 1$ или $\pi(K) = 1$ тогда и только тогда, когда K обладает центром симметрии, и что нижняя граница достигается разве лишь для симплексов Δ^n. Для меры π недавно было доказано, что $\pi(\Delta^n) = 1/n^{n+1}$ (Беркес [1], Шопп [1]); легко также установить, что $\sigma(\Delta^n) = 1/n$.

6.2. Мера симметрии Винтерница. 1°. Пусть $f(H, p)$ есть не превосходящее 1 отношение объемов двух частей тела $K \in \mathfrak{K}^n$, на которые тело K разделено гиперплоскостью H, проходящей через точку $p \in K$. Положим

$$f(p) = \min \{f(H, p) \mid H \ni p\},$$
$$F_2(K) = \max \{f(p) \mid p \in K\}.$$

Эта мера симметрии, а точнее, производная мера $F_2^g(K)$, изучалась различными авторами (см. ниже, п. 2°). Оценки для $F_2(K)$ — те же самые, что и для $F_2^g(K)$. Единственные экстремальные тела — симплексы (Грюнбаум [3], Хаммер [4]). Легко установить, что поверхности уровня, соответствующие F_2, выпуклы, и что существует критическая точка при любом $K \in \mathfrak{K}^n$ (Хаммер [4], см. также Зюсс [3] для $n = 2$; это же было установлено для обобщения F_2 со случая фигур на случай рассматриваемых в § 9 распределений масс — см. Д. Зингмастер и Г. Зингмастер [1]). Пользуясь некоторым вариантом теоремы Хелли (см., например, Грюнбаум [6], лемма 3), получаем, что существует $n + 1$ или более гиперплоскостей H, проходящих через критическую точку $\mathscr{C}(K)$ тела K, каждая из которых делит объем тела K в отношении $F_2(K)$. Так как в каждой такой гиперплоскости H точка $\mathscr{C}(K)$ является центром тяжести для $H \cap K$ (см. Бляшке [3], где $n = 3$, но доказательство верно для всех n), то получается утвердительный ответ на один из вопросов, упомянутых в п. 6.1, 4°.

Труднее всего установить, что $F_2(K) = 1$ только в том случае, если тело K центрально симметрично. Хотя это, очевидно, верно для $n = 2$ [1]), в известных доказательствах для $n = 3$ (Функ [1] — см. Бляшке [5], стр. 250,— Боннезен и Фенхель [1], стр. 25) прибегают к интегральным уравнениям или разложениям по сферическим функциям. (Автор сожалеет об исторически неверном утверждении, сделанном им в этой связи в конце статьи Грюнбаум [3].) Хотя методы эти можно перенести и на случай $n > 3$, похоже, что ни одно такое доказательство не публиковалось. В этой связи заслуживают упоминания интересные результаты Радона [2] (стр. 275) и Унгара [1].

2° Об *аффинно инвариантных мерах симметрии, производных от* F_2, известны следующие результаты.

1) Интересна история оценок для производных мер F_2^g, основанных на центре тяжести $g = g(K)$. Случай $K \in \mathfrak{K}^2$ впервые исследовался Винтерницем, установившим неравенство $F_2^g(K) \geqslant 4/5$ и то, что единственными экстремальными телами служат треугольники. Результаты Винтерница были опубликованы в книге Бляшке [5] (1923), стр. 54—55. По-видимому, эти результаты остались незамеченными и переоткрывались другими авторами — см. например, Лаврентьев и Люстерник [1] (1935), Нейман [2] (1945), Яглом и Болтянский [1] (1951), Эрхарт [1] (1955), Ньюмен [1] (1958). (Указание на принадлежность этих результатов Винтерницу без даты или точной ссылки содержалось в немецком переводе книги Яглома и Болтянского [1], вышедшем в 1956 г.)

Неравенство $F_2^g(K) \geqslant n^n/[(n+1)^n - n^n]$ для любых $K \in \mathfrak{K}^n$ высказывалось Эрхартом [1] в виде гипотезы и было доказано им в работе [2] для $n = 3$, а Грюнбаумом [3] и Хаммером [4] для всех n. Другие дока-

---

[1]) На плоскости справедлив следующий более сильный результат: выпуклая фигура K имеет центр симметрии тогда и только тогда, когда существует единственная точка, через которую проходят три различные хорды, каждая из которых делит площадь K пополам. По поводу этого и родственных результатов см. Царанкевич [1], Мепон [1], Пьегат [1], Голдберг [1], Хоггат [1]. Далеко идущие обобщения и дополнительные ссылки имеются в работах Грюнбаума [9] и Замфиреску [3]. О связях между размером хорд, делящих пополам площадь, и другими величинами см. Белецки и Радзишевски [2], Девис [1], Эглстон [6], Эглстон и Зираквзаде [1], Радзишевски [2].

зательства см. Хуа Ло-кен и Юн Юнг-хуан [1], Митягин [1]. Крайнее значение здесь достигается тогда и только тогда, когда K является пирамидой с произвольным (выпуклым) $(n-1)$-мерным основанием.

2) Эглстон [2] (воспроизведено в [3] и [5]) доказал неравенство $F_2^s(K) \geqslant 4/5$, где s — любая шестидольная точка произвольной фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$. Отсюда и из единственности F_2-критических точек сразу следует единственность шестидольных точек для треугольников (доказано разными методами у Эглстона [2]).

3°. *Обобщения меры симметрии F_2 на распределения масс.* Если задано некоторое распределение μ положительных масс в E^n и $\mu(E^n) < \infty$, то можно определить $F_2(\mu)$ совершенно аналогично определению $F_2(K)$ с той лишь разницей, что вместо объема отсеченной от K части следует говорить о массе, содержащейся в полупространстве. Очевидно, $F_2(\mu)$ не является мерой симметрии, ибо равенство $F_2(\mu) = 1$ возможно для существенно не центрально симметричных распределений масс. С другой стороны, $F_2(\mu) \geqslant 1/n$ для всякого распределения масс в E^n. Для $n = 2$ это было доказано Нейманом [2] и повторно Ягломом и Болтянским [1], Ньюменом [1]. Для произвольного n это неравенство установили Радо [2], Берч [2], Грюнбаум [3] (в последней работе доказательство непосредственно применимо только к непрерывным распределениям масс, а общий случай получается отсюда стандартными методами); см. также Данцер, Грюнбаум, Кли [1]. Граница $1/n$, очевидно, точная. Некоторый признак распределений, на которых она достигается, дан Грюнбаумом [3]. По поводу описания свойств F_2 на плоскости и некоторых связанных с этим понятий см. Нейман [3].

6.3. Анолог меры Винтерница, основанный на рассмотрении площади поверхности тела. Пусть функционал $F_3(K)$ при $K \in \mathfrak{K}^n$ определен так же, как F_2, с той лишь разницей, что $f(H, p)$ — отношение, в котором гиперплоскость H делит $(n-1)$-мерную площадь поверхности тела K. Из результатов относительно $F_2(\mu)$ сразу следует, что $F_3(K) > 1/n$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$.

О функционале $F_3(K)$ при $n \geqslant 3$ ничего больше не известно. В частности, не известно, имеет ли место равенство $F_3(K) = 1$ только в случае, когда тело $K \in \mathfrak{K}^n$ центрально симметрично. Для $n = 2$ это устанавливается легко. Нейман [2] высказал предположение, что нижняя граница $F_3(K)$ для $K \in \mathfrak{K}^2$ равна $(\sqrt{5}-1)/2$; элементарно проверяется, что нижняя граница не может превышать $(\sqrt{5}-1)/2$, ибо $F_3(K)$ может быть сколь угодно близко к этому значению (если K — достаточно узкий равнобедренный треугольник с малым углом между равными сторонами).

Эрхарт [1] показал, что $F_3(K) > 1/3$ для всех $K \in \mathfrak{K}^2$, но его доказательство, по-видимому, не опубликовано. Другое доказательство дала Ковец [1].

6.4. Две другие меры симметрии. 1°. Пусть точка p — внутренняя для тела $K \in \mathfrak{K}^n$ (т. е. $p \in \operatorname{int} K$); H — проходящая через p гиперплоскость; H_1 и H_2 — параллельные

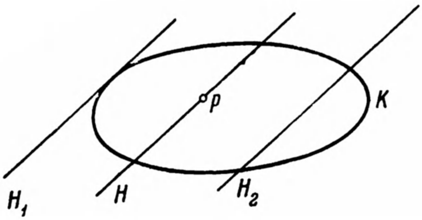

Рис. 12.

H и равноотстоящие от H гиперплоскости, причем гиперплоскость H_1 — опорная для K (рис. 12). Пусть, далее, $K'(H_1)$ — часть тела K, заключенная между H_1 и H_2. Положим

$$f(H_1, p) = V(K'(H_1))/V(K)$$

и

$$f(p) = \min\{f(H_1, p) \mid H_1 \text{ — опорные к } K\}.$$

Наконец, определим

$$F_4(K) = \max\{f(p) \mid p \in \operatorname{int} K\}.$$

Так как равенство $F_4(K) = 1$ влечет за собой $F_1(K) = 1$, то $F_4(K) = 1$ тогда и только тогда, когда тело K центрально симметрично. Из известных результатов, касающихся $F_4^g(K)$ (см. ниже) вытекает, что $F_4(K) \geqslant 8/9$ для всех $K \in \mathfrak{K}^2$, причем единственные экстремальные фигуры здесь — это треугольники. Точные оценки для $F_4(K)$ при $n \geqslant 3$ неизвестны. Мы полагаем, что

$F_4(K) \geqslant 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$, причем единственными экстремальными телами служат симплексы Δ^n.

Асплунд, Гроссвальд, Грюнбаум [1] рассматривали производную от F_4 меру F_4^g. Нижняя граница a_n для $F_4^g(K)$ при любых $K \in \mathfrak{K}^n$ не выражается явно в элементарных функциях, но ее можно вычислить с любой точностью; так, например, $a_3 \approx 0{,}8746$. Экстремальные тела суть усеченные пирамиды с произвольным $(n-1)$-мерным выпуклым основанием, причем отношение, в котором параллельная основанию гиперплоскость делит высоту пирамиды, зависит от n; так, например, это отношение $\approx 0{,}2$ при $n = 3$. В планиметрическом случае имеем $a_2 = 8/9$; здесь единственные экстремальные тела — треугольники. Интересно упомянуть, что для n-мерных симплексов Δ^n

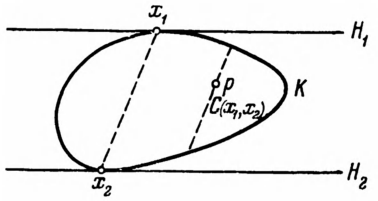

Рис. 13.

$$\lim_{n\to\infty} F_4^g(\Delta^n) = 1 - \frac{1}{e^2} = 0{,}865\ldots > \lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}857\ldots$$

2°. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$; $p \in \operatorname{int} K$; H_1 и H_2 — две параллельные опорные гиперплоскости тела K. Для каждой пары точек $x_1 \in H_1 \cap K$, $x_2 \in H_2 \cap K$ обозначим через $C(x_1, x_2)$ проходящую через p хорду тела K, параллельную хорде $[x_1, x_2]$ (рис. 13). Положим

$$f(p, H_i) = \min\left\{\frac{\text{дл. } C(x_1, x_2)}{\text{дл. } [x_1, x_2]}\,\middle|\, x_i \in H_i \cap K,\ i = 1,2;\quad H_1 \parallel H_2 \text{ — опорные к } K\right\}$$

и

$$f(p) = \min\{f(p, H_i) \mid H_1 \parallel H_2 \text{ — опорные к } K\},$$

после чего определяем

$$F_5(K) = \max\{f(p) \mid p \in \operatorname{int} K\}.$$

Утверждение, что $F_5(K) = 1$ тогда и только тогда, когда тело K центрально симметрично, равносильно теореме 1 работы Хаммера [3]; однако его доказательство, по-видимому, неточно. Полностью доказала это утверждение Ковец [1]; см. также Хаммер и Смит [4]. Нетрудно проверить, что $F_5(K)$ удовлетворяет условию сверхминимальности. Поэтому сразу ясно, что $F_5(K) \geqslant 2/3$ для $K \in \mathfrak{K}^2$, причем равенство достигается только для треугольников (по поводу деталей см. Ковец [1]). Нижние границы для $F_5(K)$ при $n \geqslant 3$, по-видимому, не определены. Можно предполагать, что симплексы являются здесь экстремальными телами; отсюда при $n = 3$ следовало бы, что $F_5(K) \geqslant 1/2$.

Для производной меры $F_5^g(K)$, пользуясь методами, сходными с использованными при доказательствах неравенства $F_2^g(K) \geqslant 4/5$ для $K \in \mathfrak{K}^2$, легко показать, что $F_5^g(K) \geqslant 2/3$ при любом $K \in \mathfrak{K}^2$. При $n \geqslant 3$ оценки для $F_5(K)$ неизвестны.

3°. *Некоторые задачи об аффинных диаметрах.* Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$. Хорда $C = [x_1, x_2]$ тела K называется его *аффинным диаметром*, если существует пара различных параллельных опорных гиперплоскостей $H_1 \parallel H_2$ тела K такая, что $x_1 \in H_1 \cap K$, $x_2 = H_2 \cap K$ (ср. рис. 13). По-видимому, хорошо известно, что всякая точка тела K принадлежит, по крайней мере, одному аффинному диаметру. Результат этот без доказательства анонсировался Хаммером [6]; его доказательство легко получить из теоремы 1 работы Грюнбаума [5] и следующего за ней замечания. (Столь же легко установить, что для любого направления есть хотя бы один аффинный диаметр, параллельный этому направлению.) Следующие ниже задачи об аффинных диаметрах похожи на задачи о центрах тяжести сечений, упомянутые в п. 6.1,4°. (По поводу некоторых обобщений указанных результатов и частичных ответов на поставленные ниже вопросы см. Косиньски [2, 3].)

Существует ли в произвольном теле $K \in \mathfrak{K}^n$ хотя бы одна точка, принадлежащая, по крайней мере, $n+1$ различным аффинным диаметрам? В частности, является ли такой точкой центр тяжести тела K? Всякое ли тело K обладает либо континуумом точек, принадлежащих каждая более чем одному аффинному диаметру, либо — точкой, принадлежащей континууму аффинных диаметров?

При $n = 2$ утвердительный ответ на последний вопрос является почти тривиальным. Ответы на первые два вопроса здесь также являются утвердительными: центр тяжести фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ и F_1-критическая точка фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ принадлежат, по краней мере, трем аффинным диаметрам.

6.5. Мера симметрии Ковнера — Безиковича. 1°. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$ — выпуклое тело и p — точка тела K; рассмотрим *максимальное центрально симметричное тело* $K(p)$, принадлежащее K, с центром p — иными словами, пересечение

$$K(p) = K \cap (2p - K)$$

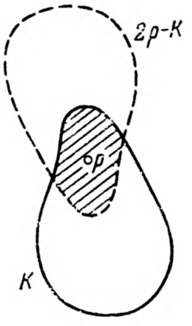

Рис. 14.

(рис. 14). Величину F_6^p мы определим как отношение объемов

$$F_6^p(K) = V(K(p)) / V(K).$$

Мера симметрии по Ковнеру и Безиковичу есть

$$F_6(K) = \max\{F_6^p \mid p \in K\}.$$

Мера F_6 являлась предметом многих исследований. Кажется, первое опубликованное доказательство неравенства $F_6(K) \geqslant 2/3$ для $K \in \mathfrak{K}^2$ содержится в книге Лаврентьева и Люстерника [1] (стр. 358—367), где было указано, что оно принадлежит С. С. Ковнеру. Независимо более простые доказательства этого неравенства были даны Безиковичем [1] (сходное доказательство см. Оцеки [1]), Фари [1] и для производной меры — другими авторами (см. ниже). Фари [1] и другие заметили также, что при $K \in \mathfrak{K}^2$ равенство $F_6(K) = 2/3$ характеризует треугольники.

Для $n \geqslant 3$ о свойствах меры F_6 известно мало. Белецки и Радзишевски [1] доказали, что всякое тело $K \in \mathfrak{K}^3$ содержит параллелепипед P объема $V(p) = \frac{2}{9} V(K)$; ясно, что отсюда вытекает неравенство $F_6(K) \geqslant 2/9$ при $n = 3$. Фари и Рэдей [1] доказали, что всякое тело $K \in \mathfrak{K}^n$ имеет единственную F_6-крититическую точку и что соответствующие F_6 поверхности уровня выпуклы. Те же результаты были независимо получены Штейном [1]; для $n = 2$ они имелись уже у Лаврентьева и Люстерника [1]. Фари и

Рэдей [1] установили также, что

$$F_6(\Delta^n) = F_6^g(\Delta^n) = \frac{1}{(n+1)^n} \sum_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^i C_{n+1}^i (n+1-2i)^n =$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} dt.$$

(Численное значение для $F_6(\Delta^8)$ подсчитано ими с ошибкой.) Штейн [1] доказал также любопытную теорему о том, что среднее значение величины $F_6^x(K)$, где x пробегает все точки тела K, равно $1/2^n$, т. е. что

$$\int_K F_6^x(K)\,dv = \frac{1}{2^n} V(K).$$

Отсюда следует, что $F_6(K) > 1/2^n$ при любом $K \in \mathfrak{K}^n$. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. Чакериан и Штейн [2].

Нижняя граница меры $F_6(K)$ специально изучалась для плоских фигур K *постоянной ширины*. Безико-

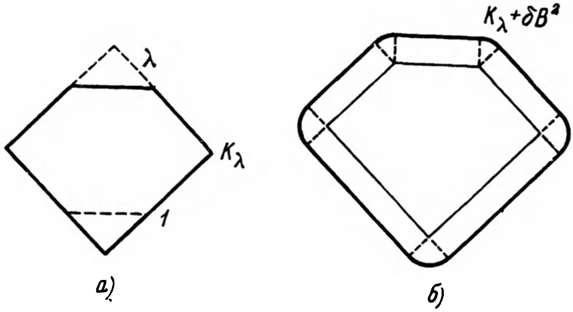

Рис. 15.

вич [2] показал, что всякая такая фигура K имеет меру симметрии $F_6 \geqslant 0{,}840\ldots$ Этот результат был обобщен Эглстоном [1].

Следующий пример, принадлежащий Фаэри, показывает, что мера симметрии Ковнера — Безиковича не удовлетворяет условию сверхминимальности (*) (и даже более слабому условию (***); см. § 4). Пусть K_λ — «усеченный» квадрат (рис. 15, *а*). Легко проверяется, что при $\lambda \leqslant 1/2$ имеет место равенство $F_6(K_\lambda) = (2-2\lambda^2)(2-\lambda^2)$. С другой стороны, если B^2 — единичный круг, то

$F_6(K_\lambda + \delta B^2)$ (см. рис. 15, *б*) при достаточно малых δ и при $\lambda < 1 - 1/\sqrt{2}$ будет меньше, чем $F_6(K_\lambda)$.

2°. В литературе рассматривалось немало мер, *производных от* F_6.

1) Производная мера F_6^g, где g — центр тяжести g тела K. Эрхартом [3] была высказана и при некоторых дополнительных предположениях о рассматриваемых фигурах $K \in \mathfrak{K}^2$ доказана оценка $F_6^g \geqslant 2/3$. Для всех $K \in \mathfrak{K}^2$ это неравенство независимо установили Козинец [1] и Стюарт [1]. Стюарт также показал на примере, что оценка эта не вытекает из оценок для F_6^s и F_6^h (см. ниже) и из выпуклости линий уровня.

Оценки $F_6^g(K)$ при $n \geqslant 3$ рассматривал Леви [1]. Им установлено, что $F_6^g(K) > 2/(n^n + 1)$ при любом $K \in \mathfrak{K}^n$.

2) Производная мера F_6^h, где h — произвольная шестиугольная точка фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$. Эта производная мера была первым изучавшимся вариантом меры F_6. Безикович [1] и Фари [1] доказали, что $F_6^h(K) \geqslant 2/3$ для каждой шестиугольной точки h фигуры K (и значит $F_6(K) \geqslant 2/3$). Та же оценка имеется у Яглома и Болтянского [1] и у Линиса [1], которые установили даже более сильный результат: всякий аффинно правильный шестиугольник, вписанный в $K \in \mathfrak{K}^2$, уже сам имеет площадь, не меньшую, чем 2/3 площади K.

3) Производная мера F_6^s, где s — произвольная шестидольная точка фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$, рассматривалась Эглстоном [2] (воспроизведено в [3, 5]). Он показал, что $F_6^s \geqslant 2/3$ для всякой шестидольной точки s.

4) Производная мера F_6^c, где c — центр описанного эллипсоида, дает, по-видимому, простейший пример геометрически «естественной» меры симметрии, относительно которой даже в E^2 симплексы (треугольники) не являются выпуклыми множествами минимальной меры симметрии. Хотя нижняя граница для F_6^c на семействе $K \in \mathfrak{K}^2$, по-видимому, неизвестна, можно показать, что изображенная на рис. 16 фигура K удовлетворяет неравенству

$$F_6^c(K) = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 2\pi} = 0{,}604\ldots < \frac{2}{3} = F_6^c(T^2).$$

6.6. Мера симметрии Эстермана. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$ — выпуклое тело в E^n и p — точка из K; обозначим через $K[p]$ *минимальное центрально симметричное выпуклое тело* с ц е н т р о м p, *содержащее* K, и положим

$$F_7^p = V(K) / V(K[p])$$

и

$$F_7(K) = \max\{F_7^p(K) \mid p \in K\}.$$

Нижняя граница $F_7 \geqslant 1/2$ для $K \in \mathfrak{K}^2$ впервые установлена, по-видимому, Э с т е р м а н о м [2], который также доказал, что единственные экстремальные фигуры здесь — это треугольники. Эти результаты были получены также Л е в и [1]. Оценку $F_7 \geqslant 1/2$ получали также Ф а р и [1], Я г л о м и Б о л т я н с к и й [1]. Ч а к е р и а н [1] исследовал F_7 специально для выпуклых фигур *постоянной ширины*. Среди других полученных им результатов имеется неравенство

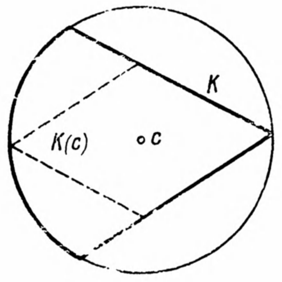

Рис. 16.

$$F_7(K) \geqslant F_7(R) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 = 0{,}81\ldots,$$

где K — произвольная фигура постоянной ширины, R — треугольник Рело.

Э с т е р м а н [2] задавался вопросом, справедливо ли неравенство $F_7(K) \geqslant 1/3$ для $K \in \mathfrak{K}^3$; эта задача до сих пор еще не решена. Оценка $F_7(K) \geqslant 1/6$ для $K \in \mathfrak{K}^3$ следует из результатов об описанных параллелотопах (см. § 2).

Оценка $F_7(K) > 1/2^n$ для $K \in \mathfrak{K}^n$ была установлена Р о д ж е р с о м и Ш е п а р д о м [1, 3] (см. также А л е к с а н д р о в [1]). Как отметили Ф а р и и Р э д е й [1], а также Р о д ж е р с и Ш е п а р д [3], F_7-критическое множество для $K \in \mathfrak{K}^n$ может быть n-мерным; так обстоит дело, например, если $K = \Delta^n$. Эти авторы нашли такие условия регулярности тела K, которые гарантируют, что критическое множество тела K состоит из единственной точки. Для n-мерного симплекса Δ^n Ф а р и и Р э д е й [1] точно подсчитали величину F_7: оказалось, что

$$F_7(\Delta^n) = 1/C_n^{[n/2]}.$$

Из производных мер для F_7 рассматривалась только мера F_7^g. Л е в и [1] доказал, что $F_7^\gamma > 1/n^n$ для любого $K \in \mathfrak{K}^n$.

О некоторых экстремальных задачах, связанных с мерой симметрии Эстермана, см. Р о д ж е р с и Ш е п а р д [2].

6.7. Некоторые аналоги мер симметрии Ковнера — Безиковича и Эстермана. Пусть для выпуклых фигур $K \in \mathfrak{K}^2$ меры F_6^* и F_7^* определены аналогично F_6 и F_7, с той лишь разницей, что вместо площадей фигур K и $K(p)$ (соответственно $K[p]$) сравниваются их п е р и м е т р ы. В силу аддитивности длин меры F_6^* и F_7^* удовлетворяют условию сверхминимальности. Поэтому, для того чтобы получить нижние границы мер F_6^* и F_7^* для всех $K \in \mathfrak{K}^2$, достаточно найти нижние границы этих мер на множестве всех т р е у г о л ь н и к о в (ср. стр. 24—25). Тривиально устанавливается неравенство $F_6^*(K) \geqslant 2/3$, где $F_6^*(K) = 2/3$ только в том случае, если K — равносторонний треугольник; сложнее доказывается, что $F_7^*(K) \geqslant \sqrt{3}/2$, причем и здесь равенство достигается только для равностороннего треугольника (это доказала К о в е ц [1]).

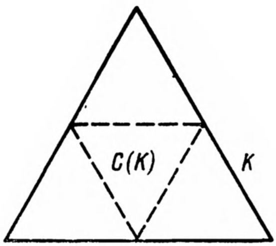

Рис. 17.

F_6^*-критические множества могут быть двумерными (рис. 17); они (и вообще все линии уровня) всегда обязательно выпуклы. Стоит отметить, что простое применение теоремы Б и б е р б а х а [1] об изопериметрах дает только $F_6^*(K) > 2/\pi$ для всех $K \in \mathfrak{K}^2$. Из известной строгой монотонности длин периметров выпуклых фигур сразу следует, что каждое из равенств $F_6^*(K) = 1$ или $F_7^*(K) = 1$ влечет наличие у K центра симметрии.

Мера F_6^* предлагалась Фаэри (устное сообщение), который поставил также соответствующие вопросы, относящиеся к случаям $n \geqslant 3$. Мы не формулируем здесь эти вопросы, так как по их поводу нет пока, кажется, никаких результатов.

6.8. Мера симметрии, определяемая по разностному телу. Для каждого выпуклого тела $K \in \mathfrak{K}^n$ определим тело $K^* = \frac{1}{2}[K + (-K)]$. (Множество $2K^*$ обычно называют *разностным телом* или иногда *векторным телом* тела K; у Яглома и Болтянского [1] фигура K^* называется *образом фигуры* $K \in \mathfrak{K}^2$ *при симметризации относительно точки* O, принятой за начало отсчета векторов.) Известно, что $V(K^*) \geqslant V(K)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда K центрально симметрично. Отсюда следует, что

$$F_8(K) = V(K)/V(K^*)$$

является аффинно инвариантной мерой симметрии.

Бляшке [4] поставил вопрос о нахождении нижней границы $F_8(K)$ для всех $K \in \mathfrak{K}^n$. Случай $n=2$ рассмотрели Радемахер [1] и Эстерман [1, 2], которые доказали, что здесь $F_8(K) \geqslant 2/3$; случай $n = 3$ был рассмотрен Эстерманом [2] и Зюссом [1], установившими, что в этом случае $F_8(K) \geqslant 4/5$. Частичные результаты, касающиеся общего случая, имеются у Боннезена и Фенхеля [1] (стр. 105), Ганапати [1], Годберзена [1]; полное решение получили Роджерс и Шепард [1], которые показали, что

$$F_8(K) \geqslant 2^n/C_{2n}^n \quad \text{при любом } K \in \mathfrak{K}^n,$$

причем значение $2^n/C_{2n}^n$ достигается только для симплексов. Модификации первоначального доказательства имеются в работах Роджерса и Шепарда [3] и Эглстона [5]; другое доказательство и обобщения в работе Чакериана [3]. Грёмер [2] доказал, что $F_8(K) \leqslant 2^{n-1}/(2^n - 1)$, если $K \in \mathfrak{K}^n$ — пирамида; равенство достигается в случае, когда основание пирамиды центрально симметрично; в случае $n = 3$ этот результат принадлежит Эстерману [2]. Дополнительные результаты, касающиеся меры симметрии F_8 для плоских фигур ($n = 2$) и пространственных тел ($n = 3$), а также и связей F_8 с F_1 см. у Чакериана [2].

6.9. Мера симметрии Роджерса и Шепарда. Пусть K — выпуклое тело в E^n, а пространство E^n вложено в E^{n+1}; пусть, далее, e — единичный вектор в E^{n+1}, ортогональный E^n. Роджерс и Шепард [3] определили *ассоциированное* $(n+1)$-мерное выпуклое тело $^*K$ тела $K \in \mathfrak{K}^n$ как выпуклую оболочку

$$^*K = \operatorname{conv}\{K \cup [e + (-K)]\};$$

при этом функционал

$$F_9(K) = V_n(K) / V_{n+1}(^*K)$$

является аффинно инвариантной мерой симметрии. Роджерс и Шепард нашли, что $F_9(K) \geqslant (n+1)/2^n$ для всех $K \in \mathfrak{K}^n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда K — симплекс.

§ 7. Некоторые экстремальные задачи, возможно, приводящие к мерам симметрии

1°. *Метрика d_2 в пространстве $\mathfrak{K}_a^n$ аффинно эквивалентных классов выпуклых тел в E^n* (см. § 2) приводит ко многим задачам, некоторые из которых используются в функциональном анализе.

Известны следующие результаты о d_2; здесь Δ обозначает симплекс, C — гиперкуб, Q — гипероктаэдр, B — шар, M — любое центрально симметричное тело, K — любое выпуклое тело, H — правильный шестиугольник, T — аффинное преобразование; верхние индексы указывают размерность:

1) $d_2(B^n, K^n) \leqslant d_2(B^n, \Delta^n) = \ln n,$

$d_2(B^n, M^n) \leqslant d_2(B^n, C^n) = d_2(B^n, Q^n) = \frac{1}{2}\ln n,$

Джон [1], Лейхтвейс [1];

2) $d_2(C^n, M^n) \leqslant \ln n$; $d_2(Q^n, M^n) \leqslant \ln n$, Дей [1], Ленц [1], Тейлор [1];

3) $d_2(C^2, M^2) \leqslant d_2(C^2, H) = \ln\frac{3}{2}$; $d_2(H, M^2) \leqslant \ln\frac{3}{2}$,

Асплунд [1];

4) $d_2(C^2, K^2) \leqslant d_2(C^2, \Delta^2) = \ln 2$;

5) $d_2(\Delta^n, K^n) \leqslant d_2(\Delta^n, M^n) = \ln n$.

Для доказательства 4) достаточно убедиться в справедливости элементарного равенства $d_2(C^2, \Delta^2) = \ln 2$ и, в случае $K^2 \neq \Delta^2$, рассмотреть четырехугольник A

максимальной площади, содержащийся в K^2. Тогда проходящие через вершины A прямые, параллельные диагоналям четырехугольника A, будут опорными для K^2; они образуют такой параллелограмм $T(C^2)$, что транслят фигуры $\frac{1}{2}T(C^2)$ содержится в $A \subset K^2$.

Для доказательства 5) достаточно рассмотреть симплекс Δ^n максимального объема, содержащийся в K^n; при этом транслят тела $-n\Delta^n$ будет содержать K^n. Для доказательства $d_2(\Delta^n, M^n) = \ln n$ заметим, что, если M^n содержит тело $T(\Delta^n)$, то оно содержит также транслят тела $-T(\Delta^n)$; но наименьшее значение $|\lambda|$, при котором тело $\lambda T(\Delta^n)$ содержит одновременно трансляты тела $T(\Delta^n)$ и тела $-T(\Delta^n)$, есть $|\lambda| = n$.

Вот некоторые из представляющихся автору интересными задач, остающихся пока открытыми. Равен ли d_2-диаметр пространства $\mathfrak{K}_a^n$ значению $\ln n$? (Чакериан и Штейн [5] показали, что $\max d_2(C^n, K^n) = \ln n$.) Чему равен d_2-диаметр подпространства $\mathfrak{M}_a^n$, образованного всеми центрально симметричными элементами пространства $\mathfrak{K}_a^n$? Верно ли, что $d_2(M^n, C^n) = \ln \frac{n+1}{2}$? (Можно показать, что $d_2(C^3, Q^3) = \ln 2$.)

Связь метрики d_2 с мерами симметрии была бы особенно простой, если бы равенство $d_2(\Delta^n, K^n) = \ln n$ имело место тогда и только тогда, когда K^n центрально симметрично: при этом функционал $f(K) = d_2(\Delta^n, K^n)/\ln n$ был бы аффинно инвариантной мерой симметрии; однако Асплунд (устное сообщение) показал, что это предположение неверно. Об одном приеме построения меры симметрии на основе d_2 см. начало § 5.

Для функционалов, подобных d_2, можно поставить великое множество задач. Упомянем две из них.

а) Определим метрику $d^*(K_1, K_2)$ так же, как была определена метрика $d_2(K_1, K_2)$ (см. § 2), но при дополнительном условии совпадения центров тяжести тел K_2 и $T(\lambda K_1)$. Границы d^* неизвестны даже для E^2. Как следует из рис. 18, значение $d^*(C^2, \Delta^2)$ не больше, чем $\ln \frac{5}{2}$; можно показать, что оно равно $\ln \frac{5}{2}$. Правдоподобно, что это точная верхняя граница для $d^*(K^2, \Delta^2)$, а возможно, и для $d^*(K_1^2, K_2^2)$.

б) Рассмотрим следующее определение, связанное с задачами о проекциях в пространствах Минковского (см. Грюнбаум [2]). (Отметим, что за счет легкого видоизменения приводимого ниже определения можно получить еще один способ введения расстояния в пространстве аффинных классов выпуклых тел в E^n; однако связанные с такой метрикой задачи, по-видимому, безнадежно трудны.) Для центрально симметричного выпуклого тела K с центром в начале координат (т. е. такого,

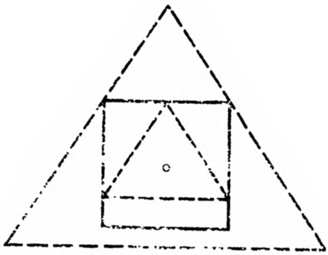

Рис. 18.

что $K = -K \subset E^n$) обозначим через $P(K)$ точную нижнюю границу тех $\lambda > 0$, при которых существуют такие аффинные преобразования T_i и вещественные $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i \alpha_i = 1$, что

$$K \subset T_i(C^n)$$

и

$$\sum_i \alpha_i T_i(C^n) \subset \lambda K.$$

Известно (Грюнбаум [2], Рутович [1]), что

$$P(Q^n) = \frac{n}{2^{n-1}} C_{n-1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}; \qquad P(B^n) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Положим $P_n = \max P(K)$, где максимум берется по всем $K = -K \subset E^n$. Справедливы ли равенства

$$P_2 = 4/3, \quad P_3 = 3/2, \quad P_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,?$$

(Из известных результатов для d_2 следует, что $P_n < n$.)

По поводу дополнительных результатов в этом направлении см. Гурарий, Кадец, Мацаев [1, 2], Гордон [1].

2°. Понятие *шестидольных точек* плоских фигур приводит ко многим экстремальным задачам. Мы упомянем следующие две, вероятно, приводящие к мерам симметрии.

а) Для выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ рассмотрим все разбиения ее тремя пересекающимися в общей точке прямыми (рис. 19), причем такие, что для площадей $S(K_i)$ получаемых шести областей K_i имеем:

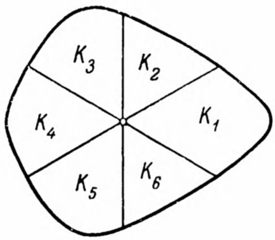

Рис. 19.

$$S(K_1) = S(K_3) = S(K_5) = a,$$
$$S(K_2) = S(K_4) = S(K_6) = b.$$

Пусть $f(K) = \min \frac{a}{b}$ при всех таких разбиениях. Мы предположили, что $1/2 \leqslant f(K) \leqslant 1$ для всех $K \in \mathfrak{K}^2$, что равенство $f(K) = 1/2$ характеризует треугольники (это все доказала Ковец [1]) и что равенство $f(K) = 1$ характеризует центрально симметричные фигуры K.

б) Три хорды выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$ делят K, вообще говоря, на семь областей. Если каждая из шести внешних областей имеет одинаковую площадь a, то площадь b внутренней области (рис. 20) удовлетворяет неравенству $b \leqslant a/8$ — эту гипотезу высказали Р. Бак и И. Бак [1]; она была доказана Шоландером [1] и Эглстоном [2, 3, 5]. Следовательно, полагая $f(K) = \min\left(1 - \frac{b}{a}\right)$, где минимум берется по всем разбиениям рассматриваемого типа, имеем $7/8 \leqslant f(K) \leqslant 1$, где равенство слева характеризует треугольники, а равенство справа заведомо выполняется для всех центрально симметричных фигур K.

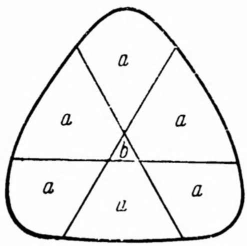

Рис. 20.

Возможно, что равенство $f(K) = 1$ характеризует центрально симметричные фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$, в таком случае $f(K)$ — мера симметрии. По поводу связанных с этим результатов и нерешенных задач см. работу Грюнбаума [7].

3°. Пусть $K \in \mathfrak{K}^n$, H — гиперплоскость, равноотстоящая от двух параллельных ей гиперплоскостей, опорных для K, $f_V(H, K)$ — не превосходящее 1 отношение объемов двух частей тела K, на которые оно рассекается гиперплоскостью H. Положим $f_V(K) = \min f(H, K)$ по всем таким H. Аналогично, рассматривая вместо отношения объемов отношение площадей двух частей границы ∂K, получаем функционал $f_S(K)$. Очевидно, $f_V(K) \geqslant 1/(2^n - 1)$ для всех $K \in \mathfrak{K}^n$, причем равенство достигается для пирамид с произвольным (выпуклым) $(n-1)$-мерным основанием, а $f_S(K) > 1/(2^n - 1)$ при всех $K \in \mathfrak{K}^n$, причем эта граница точная.

Интересно, служат ли f_V и f_S мерами симметрии, т. е. вытекает ли из $f_V(K) = 1$, соответственно из $f_S(K) = 1$, что тело K центрально симметрично? Этот вопрос остается открытым даже для случая $n = 2$.

§ 8. Один интересный функционал

Как ни удивительно, следующий функционал не приводит к мере симметрии. Пусть L — хорда выпуклой фигуры $K \in \mathfrak{K}^2$, делящая площадь $S(K)$ фигуры пополам, ρ_L — не превосходящее 1 отношение, в котором L делит периметр фигуры K, и пусть $\rho(K) = \min \rho_L$. Известно, что $\rho(K) > 1/3$ при всех $K \in \mathfrak{K}^2$, причем эта оценка точная. (См. Плейель [1], где содержится более общий результат, дающий также оценку для связанной с этим задачи об отношении, в котором площадь $S(K)$ делится хордами, делящими пополам периметр; нижняя граница в этом случае равна нулю.)

Многократно изучался вопрос о тех фигурах $K \in \mathfrak{K}^2$, для которых $\rho(K) = 1$. Матумура [1] анонсировал, что $\rho(K) = 1$ характеризует центрально симметричные тела K; но уже Циндлер [1] построил примеры, опровергающие это утверждение. Ауербах [1] определил все те $K \in \mathfrak{K}^2$, для которых $\rho(K) = 1$ (и обнаружил близкое родство между ними и фигурами постоянной ширины). Рис. 21 изображает одну из описанных Ауербахом фигур, для которой $\rho(K) = 1$, но которая не имеет центра симметрии (этот пример воспроизведен у Штейнгауза [2]).

Ауербах [1] доказал также, что для фигур K, у которых нет центра симметрии, но $\rho(K) = 1$, все хорды, делящие пополам площадь (и периметр) тела K, имеют равные длины. По поводу обобщения этого результата см. Штрубекер [1], где можно найти также дополнительную литературу и замечания; более свежий обзор этих вопросов дан в работе Мампель [1]. Эта теорема оправдывает переход к еще одной группе результатов и задач.

Хиракава [1] установил следующий результат: Если выпуклая фигура $K \in \mathfrak{K}^2$ обладает тем свойством, что любые две ее хорды, имеющие одинаковую длину, делят

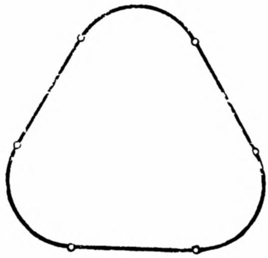

Рис. 21.

площадь (или периметр) фигуры K в одном и том же отношении, то K есть круг, более простое доказательство теоремы Хиракава дал Герике [1]. Теорема Ауербаха показывает, что (вопреки утверждению Миятаке [1]) теорема Хиракава не сохраняется в случае, если рассматривать только хорды одной произвольно фиксированной длины. С другой стороны, Сальковски [1] показал, что если выпуклая фигура K такова, что при некотором целом $k > 2$ все хорды, отсекающие $1/k$ часть ее периметра, имеют фиксированную длину, то K есть круг. Заметно сходство этой ситуации с задачами, связанными с теоремами Радона [2], Функа [1], Унгара [1] (ср. п. 6.2) и общими задачами о собственных значениях.

Для $\rho(K)$ есть очевидные аналоги в пространствах большего числа измерений, получаемые замсной сечений фигуры хордами на сечения тела $(n-1)$-мерными гиперплоскостями; однако здесь как будто не известно никаких оценок для $\rho(K)$. Наиболее интригующая задача связана с возможностью того, что при $n \geqslant 3$ равенство $\rho(K) = 1$, где $K \in \mathfrak{K}^n$, все же характеризует центрально симметричные тела. Утвердительный ответ на этот вопрос вскрыл бы еще одну «особенность» E^2, подобную существованию кривых Радона*) в E^2, не обобщаемому (кроме тривиального случая эллипсоидов) на пространства размерности $n > 2$ (Бляшке [1]).

§ 9. Добавление: некоторые обобщения

Многие аспекты определения мер симметрии для выпуклых тел, изложенные в § 1, очевидно, имеют более общую природу. Можно вводить массу понятий, логически столь же осмысленных, как и выбранное понятие «меры симметрии выпуклых тел». Автор вынес их в добавление и воздерживался от всякого упоминания о них в основной части статьи главным образом из-за скудности, чтобы не сказать больше, сколько-нибудь значимых результатов, которые оправдали бы введение таких общих понятий.

Определение мер симметрии как функционалов включает несколько требований. В целях большей конкретности мы накладывали следующие требования:

(i) непрерывность;

(ii) заданность на всех выпуклых телах в...

(iii) n-мерном евклидовом пространстве E^n;

(iv) инвариантность относительно группы $\mathcal{A}$ невырожденных аффинных преобразований или относительно ее подгруппы $\mathfrak{S}$, состоящей из всех преобразований подобия;

(v) достижение максимума в точности на классе множеств, состоящем из членов, инвариантных относительно двухэлементной подгруппы $\mathcal{R}$ группы $\mathcal{A}$ (или $\mathfrak{S}$), порожденной симметрией относительно точки (скажем, начала координат).

Каждое из этих требований (и, по-видимому, некоторые дополнительные) может быть подвержено существенным изменениям; так, например, по поводу не непрерывной аффинно инвариантной «меры симметрии» см. Теннисон [1]. В качестве другого, может быть

*) Пусть K — замкнутая выпуклая кривая. Две ее хорды называются *сопряженными*, если в концах каждой из них можно провести опорные прямые, параллельные другой. Кривые Радона — центрально симметричные выпуклые кривые, у которых любой диаметр имеет сопряженный. О свойствах сопряженных хорд и кривых Радона см. Бляшке [6], Лаугвиц [1], Штейн [3], а также ссылки в этих работах (ср. также Розенфельд и Яглом [1], п. 7.1).

наиболее простого примера, укажем на возможность замены в (iii) E^n на n-мерную сферу S^n; при этом в (iv) вместо $\mathcal{A}$ или $\mathcal{S}$ придется рассмотреть группу движений сферы S^n. Таким путем можно развить теорию, совершенно аналогичную развитой для евклидова пространства E^n: инвариантные точки, общие методы определения мер симметрии, частные меры, соответствующие описанным в § 6. Насколько известно автору, это еще никем не сделано.

Другой пример. Можно изменить только условие (v): заменить $\mathcal{R}$ на полную группу вращений вокруг точки (скажем, вокруг начала координат O). В частности, роль таких «мер эллиптичности» (соответственно «мер сферичности») для выпуклых тел $K \subset E^n$ могут играть, например, простые функции от $\delta_1(B^n, K^n)$, $\delta_1(K^n, B^n)$ или $\delta_2(K^n, B^n)$ (см. §§ 2 и 7); по этому поводу см. Фейеш Тот [1]. Глубокий результат, утверждающий существование выпуклых тел «почти сферического» сечения, принадлежит Дворецкому [1]; по поводу дополнительных результатов см. Дворецкий [2], Страус [1].

Довольно очевидно, как можно было бы определить «меры осевой симметрии» (некоторые предложения в этом направлении были сделаны Штейгаузом [4]), «меры симметрии относительно гиперплоскости», «меры трисимметричности» *), «меры пятисимметричности» или «меры симметрии относительно произвольно выбранной подгруппы группы $\mathcal{A}$»; Эрхарт [5] предлагал еще рассмотреть «меру угловой симметрии» плоских выпуклых фигур. Хотя некоторые из этих задач могут оказаться весьма интересными, известные здесь пока результаты совершенно незначительны. Впрочем, некоторые результаты все же были здесь в 60-е годы получены — в основном для симметрии относительно гиперплоскости (см. Нол [1], Де-Валькурт [1—4], Краковски [1], Чакериан и Штейн [2, 3]).

Возможно, бóльший интерес представляет замена в (ii) «выпуклых тел» на «измеримые множества конечной положительной меры» или на «распределения положительной массы». Обсуждавшийся в п. 6.2, 3° функционал можно

*) Здесь имеется в виду степень близости $K \in \mathfrak{K}^2$ к фигурам, обладающим «поворотной симметрией 3-го порядка» (т. е. переводимым в себя поворотом на угол $2\pi/3$).

рассматривать в этом свете, хотя он и не является мерой симметрии. Другой не изученный в этой связи пункт касается смысла, который надо придавать требованию (i). Нам представлялось неясным, как можно метризовать пространство аффинно эквивалентных классов компактных измеримых множеств конечной положительной меры и компактно ли оно в надлежащей метрике? Впрочем, теперь эти вопросы уже решены — см. Уэбстер [1], Бантени [1].

Можно модифицировать меру симметрии Ковнера — Безиковича (и некоторые другие меры, обсуждавшиеся в § 6) с тем, чтобы использовать ее в этом случае. Но всякий раз, когда мы пытались осуществить это, нижняя граница получавшихся мер оказывалась равной нулю. Есть ли хоть какая-нибудь «естественная» мера симметрии таких множеств, для которой нижняя граница мер положительна?

ПРОБЛЕМА БОРСУКА И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ВОПРОСЫ*)

§ 1. Введение

Диаметром множества A в метрическом пространстве называется точная верхняя граница расстояний между парами точек множества A. Если правильный симплекс T^n диаметра 1 евклидова n-мерного пространства E^n разбить на n частей:

$$T^n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

то хотя бы одна из этих частей будет иметь тот же диаметр 1, что и весь симплекс, поскольку хотя бы одна часть A_i будет содержать две разные вершины симплекса. Более тонкий результат принадлежит Борсуку [1]: *если разбить на n частей n-мерный шар B^n диаметра* 1, *то хотя бы одна часть будет иметь диаметр* 1. Это вытекает из аналогичного результата для сферы (см. Люстерник и Шнирельман [1], Борсук [1, 2]**)): *если* $(n-1)$*-мерная сфера* S^{n-1} — т. е. граница шара в E^n — *покрыта объединением n замкнутых множеств, то по крайней мере одно из этих множеств содержит пару диаметрально противоположных точек сферы* S^{n-1}.

Эти факты привели Борсука к формулировке следующей проблемы:

Можно ли любое ограниченное множество $A \subset E^n$ ненулевого диаметра $\operatorname{diam} A > 0$ *разбить на $n+1$ множеств так, чтобы диаметр каждого из этих множеств был строго меньше, чем* $\operatorname{diam} A$?

---

*) Borsuk's problem and related questions, Proc. Sympos. Pure Math., v. 7 (Convexity), Providence (USA), 1963, 271—284.

**) По поводу элементарной трактовки этой теоремы см. Дынкин и Успенский [1], Добавление к разделу 1.

Цель настоящего обзора состоит в том, чтобы просуммировать известные частичные ответы на вопрос, составляющий проблему Борсука, и обсудить некоторые вопросы, примыкающие к этой проблеме.

Одним из наиболее интересных аспектов предмета является удивительный разрыв между элементарной формулировкой проблемы и — по меньшей мере в настоящее время — непреодолимыми трудностями ее решения.

Проблема Борсука и приводящие к ней результаты могут изучаться с различных точек зрения и порождают в разных направлениях привлекательные возможности обобщения. Автор считает себя достаточно свободным в выборе тех вариантов, которые отражены в настоящем обзоре, а также в выборе задач, которые ему кажутся примыкающими к избранной им теме. Ясно, что претензия на достижение полноты в такой лишь весьма приближенно очерченной области, какая указывается заголовком этого обзора, была бы неуместной.

§ 2. Сведе́ние к множествам частного вида

Проблема Борсука относится к любым ограниченным множествам в E^n. Очевидные соображения показывают, что без потери общности можно рассматривать только замкнутые множества A диаметра 1. Более того, поскольку диаметр выпуклой оболочки множества, как известно, совпадает с диаметром самого множества, достаточно решать проблему Борсука для компактных выпуклых множеств. (Напомним, что *выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} A$ множества A — это пересечение всех содержащих A выпуклых множеств. Выпуклая оболочка в E^n ограниченного замкнутого, т. е. компактного, множества сама компактна.) При желании можно также заранее считать множество A *выпуклым телом*, т. е. компактным выпуклым множеством с непустой областью внутренних точек $\operatorname{int} A \neq \phi$.

Пусть в E^n дано выпуклое тело A диаметра 1. *Если найдется разбиение границы B тела A на $n+1$ частей, диаметр каждой из которых строго меньше* 1, *то такое разбиение существует и для A.* Действительно, пусть

$$B = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$$

— требуемое разбиение B и $x \in \operatorname{int} A$; тогда множества

$$A_i = \operatorname{conv}(\{x\} \cup B_i)$$

задают *покрытие* A, причем $\operatorname{diam} A_i < 1$. Для получения *разбиения* надо еще, чтобы точка x принадлежала лишь одному из множеств A_i. Но покрытие множества всегда легко преобразовать в его разбиение, не увеличивая диаметры интересующих нас множеств; поэтому мы в дальнейшем будем удовлетворяться нахождением покрытий A множествами с диаметрами, меньшими чем $\operatorname{diam} A$.

Теория выпуклых тел позволяет еще несколько упростить общую проблему Борсука.

Ширина выпуклого тела $K \subset E^n$ *в заданном направлении*, указываемом единичным вектором u, определяется как длина ортогональной проекции K на параллельную u прямую; иначе говоря, это минимальное расстояние между парой ортогональных u (опорных для K) гиперплоскостей, между которыми содержится K. Точная нижняя грань всех значений ширины K, определенной для всевозможных направлений (она реализуется для замкнутых выпуклых тел) называется просто *шириной* тела K. Выпуклое тело K, имеющее во всех направлениях u одинаковую ширину c, называется *телом постоянной ширины* c. Как доказал Пал [2] (для случая $n = 2$; этот результат воспроизведен у Боннезена и Фенхеля [1] и у Эглстона [5], где разобран общий случай произвольного n и указана дальнейшая литература), имеет место следующий результат, существенный для проблемы Борсука: *каждое ограниченное множество $A \subset E^n$ может быть дополнено до содержащего A выпуклого тела K постоянной ширины $c = \operatorname{diam} A$.* В силу результата Пала и сделанных выше замечаний проблема Борсука эквивалентна следующему вопросу. *Можно ли границу любого выпуклого тела постоянной ширины 1 в E^n разбить на (или покрыть с помощью) $n+1$ множеств, диаметр каждого из которых строго меньше 1?*

Нам кажется уместным указать следующие два связанных с телами постоянной ширины вопроса, остающиеся пока открытыми:

1) *Всякое ли гладкое*[1]) *выпуклое тело $K \subset E^n$ содержится в гладком выпуклом теле постоянной ширины* $\operatorname{diam} K$? (Этот

[1]) Выпуклое тело называют *гладким*, если через каждую его граничную точку проходит точно одна опорная гиперплоскость тела.

вопрос был поставлен Данцером в беседе с автором; ответ на него является утвердительным, но доказательство этого не опубликовано.)

2) *Каково наибольшее число c_n такое, что каждое выпуклое тело $K \subset E^n$ ширины $\geqslant 1$ содержит выпуклое тело постоянной ширины c_n?* Эглстон [9] показал, что $c_2 = (3 + \sqrt{3})/6$. Для $n > 2$, по-видимому, единственный относящийся сюда результат принадлежит Штейнхагену [1] (см. также Сантало [1]; относительно случая $n = 2$ см. Бляшке [7], Яглом и Болтянский [1]): *каждое выпуклое тело $K \subset E^n$ ширины 1 при четном n содержит шар диаметра $\geqslant \sqrt{n+2}/(n+1)$, а при нечетном n — шар диаметра $\geqslant 1/\sqrt{n}$.*

§ 3. Частичные решения проблемы Борсука, использующие сферическое отображение

Полное решение проблемы Борсука пока неизвестно. Следующая теорема характеризует известные в настоящее время для E^n результаты (по поводу этого результата и некоторых других, тесно с ним связанных, см. Хадвигер [7, 8, 9], Перкал [1], Ленц [2], Болтянский и Гохберг [1], Мелзак [2]):

Каждое гладкое выпуклое тело $K \subset E^n$ можно разбить на $n+1$ множеств, диаметр каждого из которых строго меньше diam K.

По поводу распространения этого результата на некоторые не обязательно гладкие тела см. Андерсон и Кли [1].

Доказательство теоремы использует так называемое *сферическое отображение* f, сопоставляющее каждой точке $x \in \partial K$ множество $f(x) \subset S^{n-1}$ (где S^{n-1} есть $(n-1)$-мерная единичная сфера) по следующему правилу: если $y \in S^{n-1}$, то $y \in f(x)$ в том и только в том случае, когда опорная к S^{n-1} гиперплоскость в точке y параллельна опорной к K гиперплоскости в точке x и внешние (относительно S^{n-1} и K) нормали этих гиперплоскостей одинаково направлены.

Положительное решение проблемы Борсука для гладких выпуклых тел K легко следует из того факта, что если $x, x^* \in K$ и расстояние $xx^* = \operatorname{diam} K$, то точки $f(x)$ и $f(x^*)$ — обязательно диаметрально противоположные точки S^{n-1}, а S^{n-1} можно покрыть $n+1$ замкнутыми множествами, ни одно из которых не содержит пары диаметрально противоположных точек.

Положительное решение проблемы Борсука без каких-либо ограничений известно для E^2 и E^3. Для случая пространства E^2 задача была решена еще Борсуком [1]. Для случая пространства E^3 первое доказательство было опубликовано Эглстоном [8] в 1955 г.; по-видимому, почти такое же доказательство еще ранее (в 1947 г.) представлялось Перкалом Польскому математическому обществу в Варшаве (Перкал [1] и устное сообщение). Это доказательство использует сферическое отображение f для произвольных выпуклых тел K постоянной ширины. Трудность, состоящую в отсутствии гладкости, удается обойти с помощью такого покрытия S^2 четырьмя замкнутыми множествами S_i, что ни одно из них не содержит пару диаметрально противоположных точек, и если $f(x) \cap S_i \neq \phi$, то $f(x) \subset S_i$. По поводу деталей этого доказательства см. Эглстон [8] (или Эглстон [3], стр. 77—92).

Обобщение этого метода на случай размерности $\geqslant 4$ упирается в трудности топологического характера.

§ 4. Универсальные покрышки

Для пространства E^n размерности $n \leqslant 3$ действует еще более элементарный подход. К тому же этот подход дает более сильный результат, чем просто утвердительное решение проблемы Борсука. Идея состоит:

1° в выборе подходящей *универсальной покрышки*, т. е. такого множества $C \subset E^n$, что для любого компактного множества A, где $\operatorname{diam} A \leqslant 1$, существует конгруентное A подмножество $B \subset C$;

2° в построении специального разбиения множества C.

Этот метод с успехом применялся к проблеме Борсука при $n = 2$ и при $n = 3$, а также к некоторым вариантам этой проблемы (см. § 5). На плоскости можно использовать результат Пала [2]: *правильный шестиугольник H ширины* 1 (т. е. диаметра $2/\sqrt{3}$) *может служить универсальной покрышкой для всех фигур диаметра* $\leqslant 1$ (см. Гейл [2], Яглом и Болтянский [1], Эглстон [5], Болтянский и Гохберг [1]); далее остается лишь заметить, что H можно разбить на три конгруентных пятиугольника P, каждый из которых имеет диаметр $\sqrt{3}/2$ (рис. 22). По поводу сходных построений на плоскости, применимых в других ситуациях, см. § 6. Иное доказательство, сохраняющее силу в абсолютной геометрии, а следовательно, применимое в случае гиперболической геометрии Лобачевского, дал Л и с о в с к и [1]).

Достойно упоминания, что приведенный только что результат, утверждающий *возможность разбиения любого плоского множества диаметра* 1 *на три части, диаметр каждой из которых* $\leqslant \sqrt{3}/2$, является н а и л у ч ш и м в о з м о ж н ы м. Уже круг диаметра 1 обладает тем свойством, что при л ю б о м разбиении его на три части хотя бы одна часть имеет диаметр $\geqslant \sqrt{3}/2$.

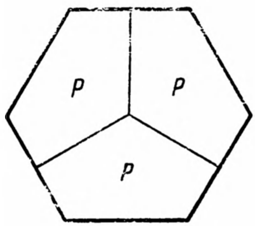

Рис. 22.

В трехмерном пространстве метод универсальных покрышек еще применим, но, по-видимому, он не приводит к «наилучшему возможному» результату. *Универсальной покрышкой для множеств диаметра* $\leqslant 1$ *в* E^3 *может служить усеченный октаэдр* T, *получаемый из правильного октаэдра ширины* 1 (т. е. диаметра $\sqrt{3}$) *отсечением трех вершин плоскостями, перпендикулярными трем большим диагоналям* (диаметрам) *октаэдра и проходящими на расстояниях* 1/2 *от центра октаэдра*. Полученный многогранник T имеет диаметр $\sqrt{2}$. В литературе описаны два несколько различных разбиения многогранника T на четыре части диаметра < 1; однако ни одно из них не является даже «наилучшим разбиением» самого T. (В разбиении Х е п п е ш а [2] части имеют диаметры $< 0{,}9977$; в разбиении Г р ю н б а у м а [12] — диаметры $< 0{,}9887$.) Это доказательство детально изложено у Б о л т я н с к о г о и Г о х б е р г а [1].

Многогранник T ни в каком смысле не является м и н и м а л ь н о й универсальной покрышкой. Возможно, кто-либо сможет несколько уменьшить приведенные выше оценки за счет дополнительного усечения T и более тщательного разбиения полученного множества. Но, по-видимому, можно с уверенностью предсказать, что на этом пути может быть получено лишь незначительное улучшение оценки, а не «самый лучший» результат. Весьма неправдоподобно также, чтобы метод универсальных покрышек привел к решению проблемы Борсука при $n > 3$ (см., однако, у Э г л с т о н а [3] замечания на стр. 78 и 91—92).

В связи с самими универсальными покрышками заслуживают упоминания лишь немногие нерешенные задачи. Одна из них является достаточно старой. В 1914 г. Лебег (см. П а л [2]) поставил вопрос об универсальной покрышке для плоских множеств диаметра 1, имеющей **м и н и м а л ь н у ю п л о щ а д ь** или **м и н и м а л ь н у ю д л и н у п е р и м е т р а**. Проблема до сих пор остается нерешенной. Как доказал П а л [2], минимальная площадь S такой покрышки лежит в пределах

$$0{,}8257 \approx \pi/8 + \sqrt{3}/4 \leqslant S \leqslant 2\,(3 - \sqrt{3})\,/3 \approx 0{,}8454,$$

а минимальный периметр L — в пределах

$$3{,}302 \approx \sqrt{3} + \pi/2 \leqslant L \leqslant 8 - 8/\sqrt{3} \approx 3{,}382.$$

Другая задача была поставлена Кли (устное сообщение). Назовем *минимальной* универсальную покрышку, *никакое замкнутое выпуклое собственное подмножество которой уже не является универсальной покрышкой*. Спрашивается, существуют ли такие числа c_n, зависящие только от размерности n, что *диаметр л ю б о г о минимального покрытия* $\leqslant c_n$? Легко видеть, что при $n = 2$ ответ на поставленный вопрос положителен, причем $c_2 < 3$; однако точное значение c_2 неизвестно. При $n \geqslant 3$, как показал Э г л с т о н [12], ответ на вопрос Кли будет отрицательным.

§ 5. Другие результаты о разбиениях

Одним из обобщений проблемы Борсука является следующий вопрос. Для произвольного выпуклого тела $K \subset E^n$ диаметра 1 и фиксированного целого числа $k > 0$ обозначим через $d\,(K,\ k)$ *точную нижнюю границу таких вещественных чисел* α, *что* K *допускает разбиение на* k *частей, диаметр каждой из которых* $\leqslant \alpha$. Пусть

$$d_n\,(k) = \sup\,\{d\,(K, k)\,|\,K \subset E^n\}.$$

Из обычных соображений компактности следует, что проблема Борсука сводится к частному вопросу о том, справедливо ли при всех n неравенство

$$d_n(n+1) < 1.$$

Задача нахождения $d\,(B^n, k)$, где B^n — шар единичного диаметра в E^n, упоминается К н а с т е р о м [1]. Но, по-видимому, остается открытым даже вопрос о значении $d\,(B^n, n+1)$. Простейшее разбиение сферы S^{n-1}, соответствующее граням правильного вписанного симплекса, показывает, что

$$d(B^n, n+1) \leqslant \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}} & \text{при четных } n, \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+3}}} & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Хадвигер [10] доказал, что при $n \leqslant 3$ соответствующие оценки точны, однако для $n \geqslant 4$ им установлено только, что

$$d(B^n, n+1) \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}.$$

О связанных с этим задачах разбиения S^{n-1} см. Сегре [1] и Демариа [1].

В связи с проблемой Борсука полезно упомянуть, что для каждой выпуклой фигуры $K \subset E^2$ единичного диаметра, отличной от B^2,

$$d(K, 3) < d(B^2, 3) = \sqrt{3}/2$$

(см. Ленц [3]). В E^3 неизвестны тела K, такие, что

$$d(K, 4) > d(B^3, 4) = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{6}.$$

Неоднократно высказывалось предположение (Хадвигер [10], Гейл [2]), что вообще

$$d_n(n+1) = d(B^n,\ n+1);$$

оно, однако, пока никем не доказано (и не опровергнуто).

На плоскости вопрос о значениях $d_n(k)$ довольно подробно исследован Ленцем [3, 4] (ср. также Яглом [1]). Ленц получил следующие точные оценки:

$$d_2(3) = \sqrt{3}/2,\ d_2(4) = \sqrt{2}/2,\ d_2(7) = 1/2.$$

Значение $d_2(3)$ было ранее найдено Гейлом [2], а значение $d_2(4)$ найдено также Сельфриджем [1]. Во всех этих случаях требуемое значение достигается только для круга B^2. В усиление результата $d_2(3) = \sqrt{3}/2$ Фаэри и Грёмер [1] (см. также Шнейдер [1]) доказали, что *каждая* (*плоская*) *выпуклая фигура* *средней ширины* *) 1 *может быть разбита на* 3 *части, диаметр каждой из которых* $\leqslant \sqrt{3}/2$. По поводу иных усилений того же результата см. Мелзак [1]. Для других значений k Ленц [3, 4] оценил величину $d_2(k)$. Им рассмотрены также некоторые близкие к этому задачи.

Вопрос о том, имеет ли место при всех k равенство $d_2(k) = d(B^2, k)$, ставился Сельфриджем [1], а для $k = 5$ и 6 — также Ленцем [3]. Нетрудно видеть, что по крайней мере для $k = 6$ ответ на этот вопрос отрицателен: пусть L есть правильный 11-угольник диаметра 1; тогда

$$d_2(6) \geqslant d(L, 6) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{22} = 0{,}505\ldots > \frac{1}{2} = d(B^2, 6).$$

Задачи, подобные задаче о значениях $d_n(k)$, можно рассматривать в метрических пространствах, отличных от E^n. Принадлежащее Шамиру рассуждение (см. Грюнбаум [13] **)) показывает, что в плоскости Минковского с «единичным кругом», отличным от параллелограмма, величина $d_2(3)$ всегда <1; другое доказательство приведено у Болтянского и Гохберга [1]. По поводу сходных проблем (двумерной) сферической геометрии см. Фейеш Тот [2], где имеются также дальнейшие ссылки.

Возвращаясь к случаю евклидова пространства, перефразируем проблему Борсука следующим образом. Пусть $k = k(n)$ есть наименьшее целое число, такое, что $d_n(k) < 1$. Всегда ли $k(n) = n + 1$? Из результата Люстерника — Шнирельмана — Борсука следует, что $k(n) \geqslant n + 1$. Наилучшая известная оценка сверху для произвольных n, по-видимому, такова:

$$k(n) < \sqrt{\frac{1}{3}(n+2)^3(2+\sqrt{2})^{n-1}}.$$

Эта оценка, принадлежащая Данцеру, получается из рассмотрения покрытий шарами (см. § 6). Интересно, что более разумная оценка неизвестна, по-видимому, даже для $n = 4$.

---

*) *Средней шириной* плоской (выпуклой) фигуры K уместно назвать выражение $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d(\alpha)\,d\alpha$, где $d(\alpha)$ — ширина K в направлении, задаваемом таким вектором u, что $\angle(e, u) = \alpha$ (e — фиксированный «начальный» вектор).

**) Ср. также Болтянский и Гохберг [2].

§ 6. Покрытие транслятами

Проблему Борсука можно сформулировать еще так: *всякое ли множество $K \subset E^n$ диаметра 1, можно покрыть объединением $n+1$ множеств, диаметр каждого из которых < 1?* От этой формулировки легко перейти к вопросам о том, можно ли осуществить покрытие, если требовать, чтобы $n+1$ множеств, образующих покрытие, были некоторым образом связаны друг с другом. Чтобы упростить изложение известных в этом направлении результатов и нерешенных задач, воспользуемся следующей терминологией.

Пусть дано выпуклое тело $K \subset E^n$. Будем говорить, что множество $A \subset E^n$ имеет *K-диаметр* $\leqslant \alpha$, если для каждых двух точек из A найдется транслят (т. е. результат параллельного переноса) тела αK, содержащий эти две точки. Очевидно, если при этом K — тело постоянной ширины 1, то K-диаметр совпадает с обычным диаметром, а если оно центрально симметрично, то K-диаметр множества A есть диаметр A в метрике Минковского с «единичным шаром» $2K$.

Величину $\delta(m, K)$ мы определим как минимальное из чисел $\delta > 0$, при которых любое множество K-диаметра $\leqslant 1$ допускает покрытие m транслятами тела δK. Далее положим

$$G(K) = \min\{m \mid \delta(m, K) \leqslant 1\}.$$

Эквивалентным этому является следующее определение: $G(K)$ — наименьшее целое m, при котором любое семейство $\mathcal{K}$ транслятов тела K, имеющих попарно непустые пересечения, можно разбить на m подсемейств $\mathcal{K}_i$, так что для каждого i пересечение всех множеств из $\mathcal{K}_i$ не пусто. Обозначим еще через $L(K)$ наименьшее целое m, при котором выпуклое тело K может быть покрыто m транслятами тела αK при хотя бы одном $\alpha < 1$, после чего положим

$$L(n) = \max\{L(K) \mid K \subset E^n\}.$$

Для круга B^2 единичного диаметра Л е н ц е м [3] доказано, что

$$\delta(3, B^2) = \sqrt{3}/2;\ \ \delta(4, B^2) = 1/\sqrt{2};$$
$$\delta(7, B^2) = 1/2;\ \ \delta(m, B^2) \leqslant 2/[\sqrt{m}].$$

Для любой центрально симметричной выпуклой фигуры $K \subset E^2$, отличной от параллелограмма, $\delta(3, K) < 1$ (Грюнбаум [13]). В этой связи возникает следующий вопрос, который остается пока открытым: всегда ли имеет место экспериментально наблюдаемое равенство $\delta(3, K) = 1/\delta(1, K)$?

Оценки для $\delta(1, K)$ впервые рассматривались Юнгом [1] для шара B^n. Им установлено, что

$$\delta(1, B^n) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Связанные с этим дополнительные сведения, результаты и ссылки имеются, например, в обзоре Данцера, Грюнбаума, Кли [1].

Для *центрально симметричных* выпуклых тел $K \subset E^n$ оценка $\delta(1, K) \leqslant \frac{2n}{n+1}$ впервые была установлена Боненблустом [1], по поводу других доказательств см. Лейхтвейс [1], Эглстон [10], Волков [1], Грюнбаум [14]. В последней работе обсуждаются также некоторые другие близкие вопросы и установлена оценка $\delta(1, K) \leqslant n$ для произвольных выпуклых тел $K \subset E^n$.

Для выпуклых тел $K^n \subset E^n$ *постоянной ширины* 1 можно рассмотреть еще постоянную $\delta^*(m, K^n)$, определяемую аналогично $\delta(m, K^n)$ с той единственной разницей, что допускаются также вращения тел δK^n. Очевидно, что для шара $\delta^*(m, B^n) = \delta(m, B^n)$; возможно также, что при $m > n$ равенство $\delta^* = \delta$ является характеристическим для шара. Мы предполагаем, что

$$\delta(n+1, K^n) < 1 \text{ и } \delta^*(n+1, K^n) \leqslant \delta(n+1, B^n)$$

для любого выпуклого тела $K^n \subset E^n$ постоянной ширины 1. (Предположение о том, что $\delta(3, K^2) < 1$, высказывалось автором на посвященном нерешенным задачам заседании Симпозиума по проблемам выпуклости *)). Неравенство $\delta^*(3, K^2) < 1$ легко доказать, используя

*) Оба входящих в настоящую книгу обзора (подобно обзору Данцера, Грюнбаума, Кли [1]) были прочитаны на проведенном Американской математической ассоциацией Симпозиуме по проблемам выпуклости, состоявшемся в Сиэттле (США) 13—15 июня 1961 г.

«универсальную покрышку» Пала, упомянутую в § 4. Действительно, выпуклая фигура K^2 постоянной ширины 1 содержит круг радиуса $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, а потому и изображенное на рис. 23 множество R, где расстояние $ab = 1$. Но R, и даже $0{,}95\ R$ содержит изображенный на рис. 22 пятиугольник P; следовательно, $\delta^*(3, K^2) < 0{,}95$. Данцер (устное сообщение) показал, что

$$\delta^*(3, K^2) < (\sqrt{21}+\sqrt{7})/8 = 0{,}904\ldots$$

С другой стороны, Чакериан и Сэлли [1] установили, что для любой выпуклой фигуры $Q \subset E^2$ диаметра 1 и любой выпуклой фигуры K постоянной

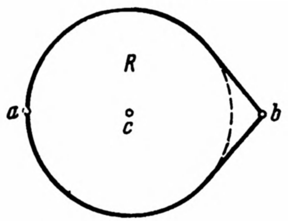

Рис. 23.

ширины λ, где $\lambda \geqslant 0{,}9101$, существует покрытие Q тремя транслятами фигуры K.

Соотношение $G(K) \leqslant 3$ для выпуклых центрально симметричных фигур $K \subset E^2$ впервые было доказано для круга $K \equiv B^2$ Хадвигером и Дебруннером [1, 2]; по поводу общего случая см. Грюнбаум [15]. Вопрос о том, будет ли $G(K) \leqslant 3$ для любых выпуклых фигур в E^2, еще не решен; то же относится и к более общему предположению о том, что $G(K) \leqslant n+1$ для всех выпуклых $K \subset E^n$ (Грюнбаум [15]). Качарова-Каранова [1] показала, что $G(B^3) = 4$; Данцер [3] установил, что $G(B^n) \geqslant 1{,}003^n$. Чакериан и Штейн [3] доказали, что $G(T^3) \geqslant 7$, где T^3 — (трехмерный) тетраэдр. Вопрос о выполнимости неравенств $G(K) \leqslant n+1$ при $K = -K \subset E^n$ пока остается открытым. По поводу близких теорем и результатов, известных для разных вариантов характеристики $G(K)$, см. § 6 обзора Данцера, Грюнбаума, Кли [1], а также Шопп [2, 3], Чакериан и Штейн [3, 5].

Соотношение $G(K) = 1$ характеризует параллелотопы, т. е. n-мерные параллелепипеды (Секефальви-Надь [2], Ханнер [1]). Иначе обстоит дело, если распространить определение $G(K)$ на невыпуклые множества. Вопрос о том, являются ли тогда параллелотопы единственными компактными множествами, для которых $G(K) = 1$, ставился Нахбином в личной переписке (см. Нахбин [1]) и упоминался Секефальви-Надем [2]. Простейший контрпример дает множество K, состоящее из двух различных точек. Представляется все же верным предположение, что равенство $G(K) = 1$ выделяет параллелотопы среди всех связных компактных множеств.

Перейдем теперь к числам L. Как показал Леви [3] (см. также Гохберг и Маркус [1], Болтянский и Гохберг [1, 2]; ср. Яглом [1]), $L(K)=3$ для всех выпуклых фигур $K \subset E^2$, отличных от параллелограммов. Для параллелограммов, очевидно, $L(K) = 4$; таким образом, $L(2) = 4$. Специально для центрально симметричных выпуклых фигур $K \subset E^2$ результат Леви усилен Грюнбаумом [13]: такое $K \subset E^2$ может быть покрыто тремя транслятами фигуры $(\delta(1, K))^{-1}K$, но не тремя транслятами αK при $\alpha\delta(1, K) < 1$. По-видимому, аналогичное обобщение неизвестно ни для центрально симметричных выпуклых $K \subset E^n$ при $n > 2$, ни для общих выпуклых $K \subset E^2$. О некоторых понятиях, связанных с $L(K)$ и $L(n)$, см. Леви [2].

Пример n-мерного куба показывает, что $L(n) \geqslant 2^n$. Есть основания предполагать, что $L(n) = 2^n$ (Хадвигер [12], Гохберг и Маркус [1], Замбицкий [1]). Вопрос остается открытым даже для $n = 3$. Роджерс (устное сообщение) доказал, что

$$L(K) \leqslant 2^n (n \ln n + n \ln \ln n + 5n)$$

для центрально симметричных выпуклых тел $K = -K \subset E^n$. Его оценка остается справедливой и для числа транслятов αK, необходимых (при соответствующем выборе $\alpha < 1$) для покрытия тела $-K$. Для *гладких* выпуклых тел $K \subset E^n$ легко показать, что $L(K) \leqslant n + 1$ (Леви [3]); в действительности для таких тел $L(K) = n + 1$ (см. § 8). С этим связано предположение Хадвигера [14] и Болтянского [1], что каждое выпуклое тело $K \subset E^n$ лежит строго внутри объединения не более чем 2^n множеств, каждое из которых есть выпуклая оболочка тела K и некоторой точки пространства E^n. О других вариантах характеристик типа $L(n)$ см. Кли [1], Солтан [1—4], Визитей [1], Грюнбаум [17] и Болтянский и Гохберг [1, 2].

Определенным доводом в пользу гипотезы о том, что $L(n) = 2^n$, является следующий результат. Назовем две точки выпуклого тела $K \leqslant E^n$ *противоположными*, если они принадлежат двум разным параллельным опорным гиперплоскостям тела K. Пусть $V(K)$ — наибольшее число точек тела K, любые две из которых противоположны. Тогда $V(K) \leqslant 2^n$ при любом $K \subset E^n$ (Данцер и Грюнбаум [1], Болтянский и Гохберг [1]). Этот результат, давший ответ на вопрос, поставленный Кли [1], доставляет ответ также и на вопрос Эрдёша [2]: каково максимальное число $E(n)$ точек пространства E^n, любые три из которых образуют треугольник с углами $\leqslant \pi/2$? Легко убедиться, что

$$E(n) \leqslant \max\{V(K) \mid K \subset E^n\},$$

откуда следует, что $E(n) = 2^n$. Остается нерешенной задача Эрдёша [2] о максимальном числе $E^*(n)$ точек в E^n, любые три из которых служат вершинами строго остроугольного треугольника (о сходных проблемах см. Эрдёш [4]). Для плоскости, очевидно, $E^*(2) = 3$; равенство $E^*(3) = 5$ было доказано Крофтом [1] и Шютте [1]; оно следует также из более общего результата Грюнбаума [16]. О некоторых связанных с этим результатах для пространства E^3 см. Крофт [2]. Для всех $n \geqslant 2$ имеем

$$E^*(n) \geqslant 2n - 1;$$

возможно, что $E^*(n) = 2n - 1$ (Грюнбаум [16]).

§ 7. Конечные множества точек

Совсем иной, тоже элементарный, подход позволяет дать положительное решение проблемы Борсука для конечных множеств в E^2 и E^3. Однако и здесь проблема остается открытой для пространств E^n, где $n > 3$.

Рассмотрим в E^n множество A из k точек, имеющее $\operatorname{diam} A = 1$. Можно поставить вопрос: как много пар точек, расстояние между которыми равно 1, содержит A? Обозначим максимально возможное число таких пар через $F(k, n)$. Очень простое доказательство равенства

$F(k, 2) = k$ дал Эрдёш [1], который поставил также вопрос о значении $F(k, 3)$ и упомянул гипотезу А. Важоньи о том, что $F(k, 3) = 2k - 2$. Через 10 лет после работы Эрдёша были опубликованы сразу три независимых доказательства гипотезы Важоньи (Грюнбаум [11], Хеппеш [1], Страцевич [1]).

Из равенств

$$F(k, 2) = k, \quad F(k, 3) = 2k - 2$$

легко получить положительное решение проблемы Борсука для конечных множеств точек в E^2 и E^3. Прямое решение проблемы Борсука для конечных множеств в E^3 предложили Хеппеш и Ревес [1].

При $n > 3$ значения $F(k, n)$ неизвестны (см. Хадвигер [11]). Для $k > n \geqslant 2$ в E^n легко построить множества, показывающие, что

$$F(k, n) \geqslant (n-1)k - \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

(см. Хадвигер [11], добавление). Обобщая более ранний неопубликованный результат Ленца, утверждающий, что $F(k, 4) \geqslant [k^2/4]$, Эрдёш [3] доказал, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^2} F(k, n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2[n/2]}$$

при всех $n \geqslant 4$. Даже если бы оценка Хадвигера оказалась точной (это, впрочем, противоречит результату Эрдёша), то все равно отсюда, видимо, нельзя было бы получить положительное решение проблемы Борсука для конечных множеств. Этот путь непосредственно дает нужный результат только при $F(k, n) \leqslant \frac{k(n+1)}{2}$, т. е. при $n \leqslant 3$.

Проблема нахождения $F(k, n)$ при $n > 3$ представляется очень трудной. Главная трудность, видимо, состоит в существенной разнице между возможной структурой графов, определяемых ребрами выпуклых многогранников в E^n при $n \leqslant 3$ и при $n > 3$. Это отмечал уже Каратеодори [1]. Обзор известных результатов о таких «полиэдральных» графах можно найти в работе Грюнбаума и Моцкина [1]. Систематическое изложение предмета имеется в книге Грюнбаума [10]; по поводу более поздних результатов см. Грюнбаум и Шепард [1].

§ 8. Другие задачи

Теорему Люстерника — Шнирельмана — Борсука можно сформулировать так: *если сфера* S^n *покрыта объединением* $n+1$ *замкнутых множеств, то хотя бы одно из них содержит пару точек, сферическое расстояние между которыми равно* π. Этот результат можно рассматривать как частный случай следующей многовариантной задачи (число альтернатив в этой задаче легко увеличить):

Каково наибольшее целое число m *такое, что в любом покрытии множества*

$$\left\{\begin{matrix} S^n \\ E^n \end{matrix}\right\} \text{ с помощью } m \left\{\begin{matrix} (1) \text{ множеств;} \\ (2) \text{ замкнутых множеств;} \\ (3) \text{ конгруентных друг} \\ \text{другу замкнутых множеств} \end{matrix}\right\} M_i,$$

хотя бы одно из M_i *содержит при*

$$\left\{\begin{matrix} (1) \text{ данном} \\ (2) \text{ любом конкретном}^{1)} \\ (3) \text{ любом} \end{matrix}\right\} \delta > 0,$$

не превосходящем диаметра рассматриваемого пространства, пару точек с расстоянием δ?

Например, в очевидно трактуемых обозначениях, которые мы используем, теорема Люстерника — Шнирельмана — Борсука может быть сформулирована так: при $\delta = \pi$ всегда $m(S^n, 2, 1) \geqslant n+1$; симплициальное разбиение S^n показывает, что в этом соотношении имеет место равенство.

Предположение о том, что $m(S^n, 2, 3) = n+1$, т. е. что в каждом покрытии S^n объединением $n+1$ замкнутого множества точки хотя бы одного множества реализуют все расстояния $0 \leqslant \rho \leqslant \pi$ и что $n+1$ — наибольшее число, обладающее таким свойством, было высказано Хадвигером [5, 13], который доказал это (Хадвигер [4]) при $n = 1, 2$. Ларман [1] показал, что $m(S^n, 2, 3) \geqslant n/2$. Кроме того, он доказал (Ларман [2]), что $m(S^n, 2, 3^*) = n+1$ и

---

1) Выбор номера множества M_i в случае (2) зависит от значения δ, а в случае (3) одно и то же M_i должно соответствовать всем δ.

$m(E^n, 2, 3^*) = n+1$, где * указывает, что из всевозможных значений расстояний реализуются *почти все* (за исключением, быть может, множества нулевой меры).

Более слабое предположение о том, что $m(S^n, 2, 2) = n+1$, доказано (в несколько более общей постановке) Хопфом [1]. Хадвигер [6] показал, что $m^*(S^n, 2, 2) \geqslant 3n+1$, где * указывает, что рассматриваются только расстояния δ, для которых $\cos\delta \geqslant -1/n$. При том же ограничении на δ Хадвигер [5] доказал, что $m^*(S^n, 2, 3) = n+1$.

Для евклидовых пространств Хадвигер [5] доказал, что $m(E^n, 2, 3) \geqslant n+1$. За исключением случая $n=1$ неизвестно, является ли здесь $n+1$ наилучшей оценкой. Для $n=2$, по-видимому, наилучшая известная верхняя оценка такова: $m(E^2, 2, 3) \leqslant m(E^2, 3, 3) \leqslant 6$ (Хадвигер и Дебруннер [2]). С этим связан результат Хадвигера [6], утверждающий, что $m(E^n, 3, 3) \geqslant 4n-3$ при $n \geqslant 2$. Равенству Лармана $m(E^n, 1, 3^*) = n+1$ была придана окончательная форма Райским [1], который показал, что $m(E^n, 1, 3) = n+1$. По поводу других вариантов задачи для случая $n=2$ см. Хадвигер и Дебруннер [2] (а также Райский [1]).

Другая нерешенная задача — определение $m(E^n, 2, 2)$. По-видимому, открытым остается даже вопрос о том, имеет ли место равенство $m(E^n, 2, 2) = m(E^n, 2, 3)$.

Задачи, подобные определению $m(E^n, 1, 1)$ и относящиеся к покрытиям произвольными можествами (или разбиениям на произвольные множества), могут быть соответственно пересказаны в терминах графов и их раскраски. Пусть *δ-граф* — это граф, вершинами которого являются некоторые точки (или все точки) пространства E^n (или S^n), причем каждые две вершины соединены ребром графа тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно δ. Вопрос, эквивалентный определению числа $m(E^n, 1, 1)$, состоит в нахождении числа $c_n = 1 + m(E^n, 1, 1)$, равного максимальному хроматическому числу δ-графов в E^n. (*Хроматическое число* графа — это наименьшее целое число k, такое, что вершины графа можно разбить на k классов так, что ни в один из классов не попадут две вершины, соединенные ребром.) В силу теоремы Брюна и Эрдёша [1] достаточно определить хроматические числа конечных δ-графов. Простой пример (см. Л. Мозер и В. Мозер

[1]) показывает, что $c_2 \geqslant 4$ (рис. 24); аналогичные примеры показывают, что при $n > 2$ имеет место неравенство $c_n \geqslant n + 2$. Точное значение c_n неизвестно даже при $n = 2$. Лучшая известная оценка сверху $c_2 \leqslant 7$ следует из

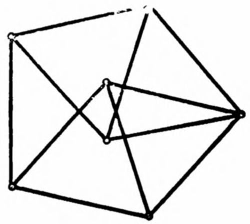

Рис. 24.

упомянутого выше результата Хадвигера и Дебруннера [2]:

$$c_2 \leqslant 1 + m(E^2, 1, 1) \leqslant m(E^2, 3, 3) + 1 \leqslant 7.$$

Дополнительные замечания относительно c_n имеются в работе Кли [2], где постановка вопроса о значении c_2 приписывается Е. Нельсену.

Число c_n^*, определенное для S^n аналогично определению числа c_n для пространства E^n, зависит от δ; так, например, $c_n^*(\pi) = 2$, тогда как $c_n^*(\delta_n) \geqslant n + 2$ при $\cos \delta_n = -1/n$. По-видимому, неизвестно даже, будет ли конечным число

$$C_n = \sup \{c_n^*(\delta) \mid 0 < \delta < \pi\},$$

кроме как в случае $n = 1$, когда тривиальным образом имеем $C_1 = 3$.

Несколько серий результатов, связанных с теоремой Люстерника — Шнирельмана — Борсука, касаются более общих, чем отражение в центре, инволюций, отображающих сферу S^n на себя (инволюция — это отображение сферы, квадрат которого равен тождественному отображению). Например, различными авторами (см. Янг [1], Яворски [1], где даны ссылки и на другие работы) доказан следующий результат: для любой непрерывной инволюции $f: S^n \to S^n$ и любого покрытия S^n объединением $n + 1$ замкнутых множеств хотя бы одно из них содержит пару точек x и $f(x)$. При $n = 2$ более сильный результат получен Ш к л я р с к и м [1]: для любого гомеоморфизма $f: S^2 \to S^2$ и любого покрытия S^2 тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит x и $f(x)$. О связанных с этим результатах см. Х а д в и г е р [15].

Мы заканчиваем задачей, которая поставлена К н а с т е р о м [1] и решена им для $n = 2, 3$: охарактеризовать класс $\mathcal{T}_n$ тех топологических пространств T, которые допускают инволюции без неподвижных точек и таковы, что для любой инволюции $f: T \to T$ без неподвижных точек и любого покрытия T объединением n замкнутых множеств хотя бы одно из них содержит пару точек x и $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

А л е к с а н д р о в А. Д.
1. О средних значениях опорной функции, ДАН СССР **172** (1967), 755—758.
А н д е р с о н, К л и (Anderson R. D., Klee V. L., младший)
1. Convex functions and upper semi-continuous collections, Duke Math. J. **19** (1952), 349—357.
А с п л у н д (Asplund E.)
1. Comparison between plane symmetric convex bodies and parallelograms, Math. Scand. **8** (1960), 171—180.
А с п л у н д, Б р е д о н, Г р ю н б а у м (Asplund E., Bredon G., Grünbaum B.)
1. A measure of asymmetry for convex surfaces, Portugal. Math. **19** (1960), 185—187.
А с п л у н д, Г р о с с в а л ь д, Г р ю н б а у м (Asplund E., Grosswald E., Grünbaum B.)
1. On a measure of asymmetry of convex bodies, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**, (1962), 217—220.
А с п л у н д, Г р ю н б а у м (Asplund E., Grünbaum B.)
1. On the geometry of Minkowski planes, Enseigement Math. **6** (1960), 299—306.
А у е р б а х, (Auerbach H.)
1. Sur un probleme de M. Ulam, concernant l'equilibre des corps flottents, Studia Math. **7** (1938), 121—142.
Б а к Р., Б а к И. (Buck R. C., Buck E. F.)
1. Equipartition of convex sets, Math. Mag. **22** (1948/49), 195—198.
Б а н т е н и (Bantegnie R.)
1. Espaces de formes affines, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 2554—2556.
Б е з и к о в и ч (Besicovitch A. S.)
1. Measure of asymmetry of convex curves, J. London Math. Soc. **23** (1945), 237—240.
2. Measure of asymmetry of convex curves; II. Curves of constant width, J. London Math. Soc. **26** (1951), 81—93.
Б е з и к о в и ч, З а м ф и р е с к у (Besicovitch A. C., Zamfiresco T.)
1. On pencils of diameters in convex bodies, Rev. Roum. Math. Pures. Appl. **11** (1966), 637—639.
Б е л е ц к и (Bielecki A.)
1. Quelques remarques sur la note précédente, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, **8** (1954), 101—103.

Б е л е ц к и, Р а д з и ш е в с к и (Bielecki A., Radziszewski K.)
1. Sur les parallélépipèdes inscrits dans les corps convexes, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1954), 97—100.
2. Sur les cordes divisant l'aire d'un ovale dans un rapport donné, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 14 (1960), 47—54.
Б ё м е (Böhme W.)
1. Ein Satz über ebene konvexe Figuren, Math.-Phys. Semesterber. 6 (1958), 153—156.
Б е р е н д (Behrend F.)
1. Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche, Math. Ann. 113 (1937), 713—747.
2. Über die kleinste umbeschriebene und die grösste einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs, Math. Ann. 115 (1938), 379—411.
Б е р к е с (Berkes J.)
1. Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreieckungleichung, Elem. Math. 12 (1957), 121—123.
Б е р ч (Birch B. J.)
1. On 3N points in a plane, Proc. Cambridge Philos. Soc. 55 (1959), 289—293.
Б и б е р б а х (Bieberbach L.)
1. Über eine Extremaleigenschaft des Kreises, Jber. Deutsch. Math. Verein. 24 (1915), 247—250.
Б л я ш к е (Blaschke W.)
1. Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. 68 (1916), 50—55.
2. Круг и шар, «Наука», 1967.
3. Über affine Geometrie IX: Verschiedene Bemerkungen und Aufgaben, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl. 69 (1917), 412—420.
4. Aufgabe 573, Arch. Math. Phys. 23 (1920), 74.
5. Vorlesungen über Differentialgeometrie. II: Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923.
6. Zur Affingeometrie der Eilinien und Eiflächen, Math. Nachr. 15 (1956), 258—264.
7. Über den grossten Kreis einer konvexen Punktmenge, Jahresber Deutsch. Math. Vereinigung 23 (1914), 369—374.
Б о б ы л е в Н. А.
1. К задаче о покрытии тел гомотетичными, сб. «Математич. исследования» (Кишинев) 3, № 3 (1969), 19—26.
Б о л т я н с к и й В. Г.
1. Задача об освещении границы выпуклого тела, Изв. АН Молдавск. ССР, № 10 (76) (1960), 77—84.
2. О разбиении плоских фигур на части меньшего диаметра, Colloq. Math. 21 (1970), 253—263.
Б о л т я н с к и й, В. Г Г о х б е р г И. Ц.
1. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, «Наука», 1965.
2. Задачи о разрезаниях фигур, «Наука», 1971.
Б о н е н б л у с т (Bohnenblust F.)
1. Convex regions and projections in Minkowski spases, Ann. Math. 39 (1938), 301—308.
Б о н н е з е н, Ф е н х е л ь (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934 (переизд. N. Y., 1948).

Б о р с у к (Borsuk K.)
1. Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen, Verh. Internat. Math. Kongr., Zürich. 2 (1932), 192.
2. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre Fundamenta Math. **20** (1933), 177—190.
3. О применении теоремы об антиподах к теории меры, Бюлл. Польск. акад. наук, Отд. III, **1**, № 3—4 (1953), 83—86.

Б о с (Bos W.)
1. Der Schinkenbrötchensatz, Math.-Phys. Semesterber. **13** (1966), 74—78.

Б о у з (Bose R. C.).
1. A note on the convex oval, Bull. Calcutta Math. Soc. **27** (1935), 55—60.

Б о у з, Р о й (Bose R. C., Roy S. N.).
1. Some properties of the convex oval with reference to its perimeter centroid, Bull. Calcutta Math. Soc. **27** (1935), 79—86.

Б р ю н, Э р д ё ш (de Bruijn N. G., Erdös P.)
1. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indag. Math. **13** (1951), 371—373.

Б у з е м а н Г.
1. Геометрия геодезических, Физматгиз, 1962.

Б у з е м а н Г., К е л л и П.
1. Проективная геометрия и проективные метрики, ИЛ, 1957.

В а к у л е с к у (Voiculescu D.)
1. O ecuaţie privind corpurile convexe şi aplicaţii la corpurile asociate unui corp convex, Stud. Cerc. Mat **18**, № 5 (1966), 741—745.

В и е т (Viet U.)
1. Umkehrung eines Satzes von H. Brunn über Mittelpunktseibereiche, Math.-Phys. Semesterber. **5** (1956), 141—142.

В и з и т е й В. Н.
1. Задачи о покрытии и освещении для неограниченных выпуклых фигур, Изв. АН Молдавск. ССР, № 10 (88) (1961), 3—9.

В и й с м а н (Wijsman R. A.)
1. Convergence of sequences of convex sets, cones and functiones, II, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 32—45.

В и н ч е н ц и н и (Vincensini P.)
1. Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels, Mémorial Sci. Math., v. 94, 1938.

В о л к о в В. И.
1. О наименьшем радиусе сферы, содержащей данное множество n непрерывных функций, Уч. зап. Калининск. пед. ин-та **16** (1953), 3—6.

Г а н а п а т и (Ganapathi P.)
1. The vector region of convex closed bodies, Math. Z. 38 (1934), 488—489.

Г е й л (Gale D.)
1. Irreducible convex sets, Proc. Internat. Congr. Math. Amsterdam 2 (1954), 217—218.
2. On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 222—225.

Г е р и к е (Gerike H.)
1. Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. Z. 40 (1936), 417—420.

2. Über stutzbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen, Math. Z. 46 (1940), 55—61.
Г о д б е р з е н (Godbersen C.)
1. Der Satz von Vektorbereich in Räumen beliebiger Dimensionen (Dissert.), Gottingen, 1938, 1—48.
Г о л д б е р г (Goldberg M.)
1. On area-bisectors of plane convex sets, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 529—531.
Г о р д о н (Gordon Y.)
1. On the projection and Macphail constants of l_n^p spaces, Israel J. Math. 6 (1968), 295—302.
Г о х б е р г И. Ц., М а р к у с А. С.
1. Одна задача о покрытии фигур подобными, Изв. АН Молдавск. ССР, № 3, (76), (1960), 87—90.
Г р ё м е р (Groemer H.)
1. Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren, Monatsh. Math. 65 (1961), 74—81.
2. Eine Bemerkung über Lagerungen konvexer Kegel, Arch. Math. 12 (1961), 78—80.
Г р о с с (Gross W.)
1. Über affine Geometrie XIII: Eine Minimumeigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. 70 (1918), 38—54.
Г р ю н б а у м (Grünbaum B.)
1. Affineregular polygons inscribed in plane convex sets, Riveon Lematematika 13 (1959), 20—24.
2. Projections constants, Trans. Amer. Math. Soc. 95, № 3 (1960), 451—465.
3. Partitions of mass-destributions and of convex bodies by hyperplans, Pacific. J. Math. 10 (1960), 1257—1261.
4. On a conjecture of H. Hadwiger, Pacific J. Math. 11 (1961), 215—219.
5. On some properties of convex sets, Colloq. Math. 8 (1961), 39—42.
6. The dimension of intersections of convex sets, Pacif. J. Math. 12 (1962), 197—202.
7. A measure of asymmetry for plane convex sets, J. London Math. Soc. 39 (1964), 95—102.
8. A proof of Rogers' conjecture of pairs of convex domains, J. London Math. Soc. 39 (1964), 697—702.
9. Continuous families of curves, Canad. J. Math. 18 (1966), 529—537.
10. Convex polytopes. Interscience, N. Y., 1967.
11. A proof of Vázsonyi's conjecture, Bull. Res. Concil. Israel 6A (1956), 77—78.
12. A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 776—778.
13. Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes, Bull. Res. Consil. Israel 7F (1957), 25—30.
14. On some covering and intersection properties in Minkowski spaces, Pacific J. Math. 9 (1959), 487—494.
15. On intersections of similar sets, Portugal, Math. 18 (1959), 155—164.
16. Strictly antipodal sets, Israel J. Math. 1 (1963), 5—10.

17. Fixing systems and inner illumination, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 15 (1964), 161—163.
Грюнбаум, Моцкин (Grünbaum B., Motzkin T. S.)
1. On polyhedral graphs, Proc. Sympos. Pure Math., v. 7 (Convexity), 1963, 285—290.
Грюнбаум, Шепард (Grünbaum B., Shephard G. C.)
1. Convex polytopes, Bull. London. Math. Soc. 1 (1969), 257—300.
Гугенхеймер (Guggenheimer H.)
1. Finite sets on curves and surfaces, Israel J. Math. 3 (1965), 104—112.
Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И.
1. О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p, Матем. сб. 70 (1966), 481—489.
2. О зависимости некоторых свойств пространств Минковского с асимметрией, Матем. сб. 71 (1966), 24—29.
Данцер (Danzer L.)
1. Über zwei Lagerungsprobleme, Thesis, München, 1959.
2. On the k-th diameter in E^d and a problem of Grünbaum, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen 1965), Copenhagen, 1967, 41.
Данцер, Грюнбаум (Danzer L., Grünbaum B.)
1. Über zwei Probleme bezuglich konvexer Körper von P. Erdös und V. L. Klee, Math. Z. 79 (1962), 95—99.
Данцер Л., Грюнбаум В., Кли В.
1. Теорема Хелли, «Мир», 1968.
Данцер, Лаугвиц, Ленц (Danzer L., Laugwitz D., Lenz H.)
1. Über des Löwnersche Ellipsoiden, Arch. Math. 8 (1957), 214—219.
Дворецкий (Dvoretzky A.)
1. Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Internat. Sympos. on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, 123—160.
2. Some near-sphericity results, Proc. Sympos. Pure Math., v. 7 (Convexity), 1963, 203—210.
Де-Валькурт (de Valcourt B. A.)
1. A study of axial symmetry of planar convex sets, Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1965.
2. Measures of axial symmetry for ovales, Israel J. Math. 4 (1966), 65—82.
3. Measures of axial symmetry for ovals, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 289—290.
4. Axially symmetric polygons inscribed in and circumscribed about convex sets, Elem. Math. 22 (1967), 121—133.
Девис (Davis C.)
1. An extremal problem for plane convex curves, Proc. Sympos. Pure Math., v. 7 (Convexity), 1963, 181—185.
Дей (Day M. M.)
1. Polygons circumscribed about closed convex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 315—319.
Демариа (Demaria D. C.)
1. Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. (8) 20 (1956), 185—192.
Джон (John F.)
1. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and essays, presented to R. Courant on his 60-th birthday, N. Y., 1948, 187—204.

Д и н г а с (Dinghas A.)
1. Über das verhalten der Enfernung zweiter Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben, Arch. Math. 8 (1957), 46—51.
Д ы н к и н Е. Б., У с п е н с к и й В. А.
1. Математические беседы, Гостехиздат, 1952.
Д ь е д о н н е (Dieudonné J.)
1. Sur la séparation des ensembles convexes, Math. Ann. 163 (1966), 1—3.
Д ь ю б и н с, С п е н ь е (Dubins L. E., Spanier E. H.)
1. How to cut a cake fairly, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 1—17.
Ж е р а р (Jerrard R. P.)
1. Inscribed squares in plane curves, Trans, Amer. Math. Soc. 98 (1961), 234—241.
Ж е р ь е, П о й а (Gerriets C. J., Pólya G.)
1. On the location of the centroid of certain solids. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 875—879.
З а г у с к и н В. Л.
1. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема, УМН 13, № 6 (1958), 89—92.
З а м б и ц к и й М. К.
1. Об одном свойстве покрытий единичного шара конечномерного пространства, Изв. вузов, Электромеханика, № 4 (1961), 77—79.
З а м ф и р е с к у (Zamfirescu T. J., также Zamfiresco T. J.)
1. Sur les corps associés à un corps convex, Revue Roum. Math. Pures Appl. 11 (1966), 727—735.
2. Familles de corps associés à une corps convexe, Bull. nat. Soc. sci. mat. RSR 10, № 4 (1966/67), 397—412.
3. Sur la réductibilité des corps convexes, Math, Z. 95 (1967), 20—33.
З и н г м а с т е р Д., З и н г м а с т е р Г. (Singmaster D., Singmaster G.)
1. Forbidden regions are convex, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 184—186.
З ю с с (Süss W.)
1. Über den Vektorenbereich eines Eikörpers, Jber. Deutsch. Math. Verein. 37 (1928), 87—90.
2. Über eine Affininvariante von Eibereichen, Arch. Math. 1 (1948), 127—128.
3. Über Eibereiche mit Mittelpunkt, Math.-Phys. Semesterber. 1 (1950), 273—287.
4. Über Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereichen einschreben lassen, Rend. Mat. e Appl. 14 (1955), 338—341.
К а й н е р (Kyner W. T.)
1. A generalization of the Borsuk and Borsuk — Ulam theorems, Pros. Amer. Math. Soc. 7, № 6 (1956), 1117—1119.
К а н т о р о в и ч Л. В., Р у б и н ш т е й н Г. Ш.
1. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах, ДАН СССР 115 (1957), 1058—1061.
2. Об одном пространстве вполне аддитивных функций, Вестн. ЛГУ, № 7 (1958), 52—59.

К а р а т е о д о р и (Carathéodory C.)
1. Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), 193—217.
К а ч а р о в а - К а р а н о в а (Katzarowa-Karanowa P.)
1. Über ein euklidisch-geometrisches Problem von B. Grünbaum, Archiv Math. 18 (1967), 663—672.
К е л л и (Kelly P. J.)
1. A property of Minkowskian circles, Amer. Math. Monthly 57 (1950), 677—678.
К и н д (Kind B.)
1. Masse für zyklische Symmetrien ebener konvexer Körpler, Manuscr. math. 2, № 4 (1970), 335—358.
К и н о ш и т а (Kinoshita S.)
1. Notes on some theorems on the sphere, Proc, Japan. Acad. 29 (1953), 548—549.
К л и (Klee V. L., младший).
1. The critical set of a convex body, Amer. J. Math. 75 (1953), 178—188.
2. Unsolved problems in intuitive geometry (Гектографированные лекции), Seattle, 1960.
К н а с т е р (Knaster B.)
1. Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua, Verh. Iuternat. Math.-Kongr. Zürich. 2 (1932), 193—194.
К н о т е (Knothe H.)
1. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse, Mate. Z. 60 (1954), 235—242.
К о в е ц (Kovetz Y.)
1. Some extremal problems on convex bodies, M. Sc. Thesis, Hebrew Univ., 1962.
К о з и н е ц Б. Н.
1. О площади ядра овала, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., вып. 33 (1958), 83—89.
К о с и н ь с к и (Kosiński A.)
1. A proof of an Auerbach — Banach — Mazur — Ulam theorem on convex bodies, Colloq. Math. 4 (1957), 216—218.
2. On involution and families of compacta, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 5 (1957), 1055—1059.
3. On a problem of Steinhaus, Fund. Math. 46 (1958), 47—59.
4. A theorem on families of acyclic sets and its applications, Pacif. J. Math. 12, № 1 (1962), 317—325.
К р а к о в с к и (Krakowski F.)
1. How asymmetric is a parallelogram? Amer. Math. Monthly 68, № 10 (1961), 998—1000.
2. Bemerkung zu einer Arbeit von W. Nohl, Elem. Math. 18 (1963), 60—61.
К р о ф т (Croft H. T.)
1. On 6-point configurations in 3-space, J. London Math. Soc. 36 (1961), 289—306.
2. 9-point and 7-point configurations in 3-space, Proc. London Math. Soc. 12 (3), (1962), 400—424. (Поправка: там же 13 (1963), 384).
К у б о т а (Kubota T.)
1. Über die Schwerpunkte der konvexen geschlossenen Kurven und Flächen, Tôhoku Math. J. 14 (1918), 20—27.

Л а в р е н т ь е в М. А., Л ю с т е р н и к Л. А.
1. Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, дополнение 1, ОНТИ, 1935.

Л а р м а н (Larman D. G.)
1. On the realization of distances within coverings of an n-sphere, Mathematika 14 (1967), 203—206.
2. On the realization of distances within decompositions of sets in R_n, J. London Math. Soc. 42 (1967), 744—749.

Л а у г в и ц (Laugwitz D.)
1. Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume, Math. Z. 61 (1958), 235—244.

Л е в и (Levi F. W.)
1. Über zwei Sätze von Herrn Besicovitch, Arch. Math. 3 (1952), 125—129.
2. Ein geometrisches Überdeckungsproblem, Arch. Math. 5 (1954), 476—478.
3. Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns, Arch. Math. 6 (1955), 369—370.

Л е й х т в е й с (Leichtweiss K.)
1. Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie, Math. Z. 62 (1955), 37—49.
2. Über die affine Exzentrizität konvexer Körper, Arch. Math. 10 (1959), 187—199.

Л е н ц (Lenz H.)
1. Eine Kennzlichnung des Ellipsoids, Arch. Math. 8 (1957), 125—129.
2. Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers, Arch. Math. 6 (1955), 413—416.
3. Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers, Arch. Math. 7 (1956), 34—40.
4. Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser, Jber. Deutsch. Math. Verein 58 (1956), 87—97.

Л и в ш и ц Б. И.
1. Технология изготовления и сборки кулачковых механизмов, Машгиз, 1963.

Л и н и с (Linis V.)
1. Problem E 1170, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 365; Solution: 1956, 63, 45—46.

Л и с о в с к и (Lisowski P.)
1. A simple proof of a theorem of Borsuk, Wiadom. Math. 6, N 2 (1962), 9—10.

Л ю с т е р н и к Л. А., Ш н и р е л ь м а н Л. Г.
1. Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

М а й к э л (Michael E.)
1. Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71, № 1 (1951), 152—182.

М а к б и т (Macbeath A. M.)
1. A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions, Canad. J. Math. 3 (1951), 54—61.

М а м п е л ь (Mampel K. L.)
1. Über Zindlerkurven, J. reine angew. Math. 234 (1969), 12—14.

М а р ч е в с к и, Ш т е й н г а у з (Marczewski E., Steinhaus H.)
1. On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions, Colloq. Math. 6 (1958), 319—327.

Матумура (Matumura S.)
1. Über Flächen und Kurven XXII: Einige Bemerkungen über die Theorie der Konvexkurven und flächen, Mem. Fac. Sci. Agr. Taihoku Univ. 28 (1940), 259—297.
Мейзлик (Meizlik S.)
1. On a maximum-problem for plane convex sets, M. Sc. Thesis, Hebrew Univ., 1964.
Мелзак (Melzak Z. A.)
1. A property of plane sets of constant width, Canad. Math. Bull. 6 (1963), 409—415.
2. A note on the Borsuk conjecture, Canad. Math. Bull. 10 (1967), 1—3.
Менон (Menon V. V.)
1. A theorem on partitions of mass-distribution, Pacific J. Math. 16 (1966), 133—137.
Минковский (Minkowski H.)
1. Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1897, 198—219 (Ges. Abh., v. 2, Berlin, 1911, 103—121).
2. Volumen und Oberfläche, Math. Ann. 57 (1903), 447—495 (Ges. Abh., v. 2, Berlin, 1911, 230—276).
3. Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begrundung ihres Oberflächenbegriffs, Ges. Abh., v. 2, Berlin, 1911, 131—229.
Митягин Б. С.
1. Две неравенства для объемов выпуклых тел, Матем. заметки 5, № 1 (1969), 99—106.
Миятаке (Miyatake O.)
1. On a characteristic proberty of the circle, Tohoku Math. J. 45 (1939), 245—248.
Мозер Л., Мозер В. (Moser L., Moser W.)
1. Problem 10, Canad. Math. Bull. 1 (1958), 192; 4 (1961), 187—189.
Моцкин (Motzkin T. S.)
1. Endovectors, Proc. Simpos. Pure Math., v. 7 (Convexity), 1963, 361—387.
Нахбин (Hachbin L.)
1. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformatios Trans. Amer. Meth. Soc. 68 (1950), 28—46.
Нейман (Neumann B. H.)
1. On some affine invariants of closed convex regions, J. London Math. Soc. 14 (1939), 262—272.
2. On an invariant of plane regions and mass distributions, J. London Math. Soc. 20 (1945), 226—237.
3. Sharing ham and eggs, Jota Manchester 1 (1959), 14—18.
Нол (Nohl W.)
1. Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der Euklidischen Ebene, Elem. Math. 17 (1962), 59—63.
Ньюмен (Newman D. J.)
1. Partitioning of areas by straight lines. Abstrect 548—108, Notices Amer. Math. Soc. 5 (1958), 510.
Огилви (Ogilvy C. S.)
1. Square inscribed in arbitrary simple closed curve, Amer. Math. Monthly 55 (1950), 423—424.
Оцеки (Ozeki N.)
1. On the largest central oval, contained in an oval, J. College Arts. Sci. Chiba Univ. 3 (1961/62), 433—434.

П а л (Pal. J. F.)
1. Om konvekse figurers tyngdepunkter, Mat. Tidsskrifts, B, 1937, 101—103.
2. Über ein elementares Variationsproblem, Danske Videnskab. Selskab. Math.-Fys. Meddel 3, № 2 (1920).
П е р к а л (Perkal J.)
1. Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur, Colloq. Math. 1 (1947), 45.
П е т е а н у (Peteanu V.)
1. Simultaneous eguations, for wich the iterative process is convergent. Mathematica (Cluj) 6 (1964), 101—105.
2. Sur l'existance du centre généralisé de symmétrie des figures planes convexes, Mathematica (Cluj) 7 (1965), 315—317.
П е т и (Petty C. M.)
1. On the geometry of the Minkowski plane, Riv. Mat. Univ. Parma 6 (1955), 269—292.
П и н с к е р А. Г.
1. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства, Тр. Ленингр. инж.-экономич. ин-та им. Тольятти 63 (1966), 13—17.
П л е й е л ь (Pleijel A.)
1. Über die Teilung von ebenen konvexen Bereichen durch Sehen, Math. Scand. 2(1954), 74—82.
П л и с Т у р о в и ч (Plis A., Turowicz A.)
1. On chords of convex bodies, Collog. Math. 12 (1964), 87—89.
П о л и а Г., С ё г е Г.
1. Изопериметрические неравенства в математической физике, Физматгиз, 1962.
П у ч ч и (Pucci C.)
1. Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insiemo convesso limitato dello spazio ordinario, Atti Acad. Naz. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 21 (1956), 61—65.
П ь е г а т (Piegat E.)
1. O srednicach figur wypuklich plaskich, Roczn. Polsk. Towarz. Mat., Ser. 2, 7 (1963), 51—56.
Р а б и н о в и ч М. Г.
1. Пространства выпуклых функций (диссертация), ЛГПИ им. Герцена, Ленинград, 1966.
2. Об одной теореме вложения пространства выпуклых множеств, Сиб. матем. журн. 8, № 2 (1967), 376—383.
3. Некоторые классы пространств выпуклых множеств и их расширения, Сиб. матем. журн. 8, № 6 (1967), 1405—1415.
Р а д е м а х е р (Rademacher H.)
1. Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches, Jber. Deutsch. Math. Verein. 34 (1925), 64—79.
Р а д з и ш е в с к и (Radziszewski K.)
1. Sur un problème extremal relatif aux figures inscrites et circonscrite aux figures convexes, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 6 (1952), 5—18.
Р а д о (Rado R.)
1. A theorem on general measure, J. London Math. Soc. 21 (1946), 291—300.
2. Some covering theorems, I, Proc. London Math. Soc. 51 (1949/50) 232—264.

Радон (Radon J.)

1. Über eine Erweiterung des Begriffs der konvexen Funktionen, mit einer Anwendung auf die Theorei der konvexen Körper, S.— B. Akad. Wiss. Wien 125 (1916), 241—258.
2. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl 69 (1917), 262—277.

Райский Д. Е.

1. Реализация всех расстояний при разбиениях пространства R^n на $n+1$ часть, Матем. заметки 7, № 3 (1970), 319—323.

Решетняк Ю. Г.

1. Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых, УМН 8, № 6 (1953), 125—126.

Роджерс К. А.

1. Укладки и покрытия, «Мир», 1969.

Роджерс, Шепард (Rogers C. A., Shephard G. C.)

1. The difference body of a convex body, Arch. Math. 8 (1957), 220—233.
2. Some extremal problems for convex bodies, Mathematika 5 (1958), 93—102.
3. Convex bodies associated with a given convex body, J. London Math. Soc. 33 (1958), 270—281.

Родстрём (Rådström H.)

1. An embedding theorem for spaces of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 165—169.

Розенфельд Б. А., Яглом И. М.

1. Неевклидовы геометрии, Энциклопедия элементарной математики, кн. V (геометрия), «Наука», 1961, 394—476.

Рутович (Rutovitz D.)

1. Parameters associated with finite dimensional Banach spaces, J. London Math. Soc. 40 (1965), 241—255.

Сальковски (Salkowski E.)

1. Eine Kennzeichnende Eigenschaft des Kreses, S.— B. Heidelberger Akad. Wiss. Math. Nat. Kl., № 14 (1934).

Сантало (Santalo L. A.)

1. Convex regions on the n-dimensional spherical surface, Ann. Math. 47 (1946), 448—459.

Сегре (Segre B.)

1. Recouvrements de sphères et correspondances entre variétés topologiques, Colloque sur les questions de réalité en geométrie. Liège, 1955, Paris, 1956, 149—175.

Секефальви-Надь (Szökefalvi-Nagy B. V.)

1. Schwerpunkt von konvexen Kurven und von konvexen Flächen, Portugal. Math. 8 (1949), 17—22.
2. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper, Acta Sci. Math. Szeged 15 (1954), 169—177.

Сельфридж (Selfridge J. L.)

1. An informal seminar on the coverings of convex sets. (Report of the Inst. in the Theory of Numbers), Colorado, 1959, 334.

Сиде (Ceder J. G.)

1. A property of planar convex bodies, Israel J. Math. 1 (1963), 248—253.
2. Generalized sixpartite problems, Bol. Soc. Mat. Mexicana 9 (1964), 28—32.

3. On a problem Grünbaum, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 188—189.

С и д е, Г р ю н б а у м (Ceder J., Crünbaum B.)

1. On isertibing and circumscribing hexagons, Collog. Math. **17** (1967), 99—101.

С о б ч и к (Sobczyk A.)

1. Convex polygons, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 438—446.

С о л т а н П. С.

1. Освещение границы выпуклого тела изнутри, Матем. сб. **57** (1962), 443—448.
2. К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел, Изв. АН Молдавск. ССР, № 1 (1963), 49—57.
3. Относительно задач о покрытии и освещении выпуклых тел, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **82** (1965), 69—74.
4. Об отношениях между задачами покрытия и освещения выпуклых тел, Изв. АН Молдавск. ССР, № 4 (1966), 91—93.
5. Решение задачи покрытия неограниченных выпуклых тел гомотетичными, сб. «Математические исследования» (Кишинев) **5**, № 1 (1970), 127—140.

С о р о к и н В. А.

1. Классы выпуклых множеств как обобщенные метрические пространства, Матем. заметки **4**, № 1 (1968), 45—52.

С т о у н, Т а к и (Stone A. H., Tukey J. W.)

1. Generalized «sandwich» theorems, Duke Math. J. **9** (1942), 356—359.

С т р а ц е в и ч (Straszewicz S.)

1. Sur un problème géometrique de P. Erdös, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5** (1957), 39—40.

С т р а у с (Straus E. G.)

1. Two comments on Dworetzky's sphericity theorem, Israel J. Math. **1** (1963), 221—223.

С т ю а р т (Stewart B. M.)

1. Asymmetry of a plane convex set with respect to its centroid, Pacific. J. Math. **8** (1958), 335—337.

С у (Su B.)

1. On Steiner's curvature-centroid, Japan J. Math. **4** (1927), 195—201.

С э л л и (Sallee G. T.)

1. A valuation property of Steiner points, Mathematika **13** (1966), 76—82.
2. Polytopes, valuations, and the Euler relation, Canad. J. Math. **20** (1968), 1412—1424.

Т а к е р (Tucker A. W.)

1. Some topological properties of disc and sphere, Proc. First Canad. Math. Congress, 1945, 285—309.

Т е н н и с о н (Tennison R. L.)

1. An almost-measure of Symmetry, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 820—823.

Т е й л о р (Taylor A. E.)

1. A geometric theorem and its application to biorthogonal systems, Bull, Amer. Math. Soc. **53** (1947), 614—616.

У н г а р (Ungar P.)

1. Freak theorem about functions on a sphere, J. London Math. Soc. **29** (1954), 100—103.

Уэбстер (Webster R. J.)
1. The space of affine-equivalence classes of compact subsets of Euclidean space, J. London Math. Soc. 40 (1965), 425—432.
Фари (Fáry J.)
1. Sur la densité des réseaux de domaines convexes, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 152—161.
Фари, Рэдей (Fáry J., Rédei L.)
1. Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern, Math. Ann. **122** (1955), 205—220.
Фаэри (Firey W. J.)
1. Some applications of means of convex bodies, Pacific J. Math. **14** (1964), 53—60.
2. The brightness of convex bodies, Techn. Report № 19. Dept of Math., Oregon State Univ. Corvallis, 1965.
3. Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen, 1965) Copenhagen, 1967, 94—101.
Фаэри, Грёмер (Firey W. J., Groemer H.)
1. Convex polyhedra which cover a convex set, J. London Math. Soc. **39** (1964), 261—266.
Фаэри, Грюнбаум (Firey W. J., Grünbaum B.)
1. Addition and decomposition of convex polytopes, Israel J. Math. **2** (1964), 91—100.
Фейеш Тот (Fejes Tóth L.)
1. On ellipsoids circumscribed and inscribed to polyhedra, Acta. Sci. Math. Szeged **11** (1948), 225—228.
2. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Физматгиз, 1958.
Фет А. И.
1. Обобщение теоремы Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем, ДАН СССР **95** (1954), 1149—1151.
Фландерс (Flanders H.)
1. The Steiner point of a closed hypersurface, Mathematika **13** (1966), 181—188.
Фултон, Штейн (Fulton C. M., Stein S. K.)
1. Parallelograms inscribed in convex curwes, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 257—258.
Функ (Funk P.)
1. Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung, Math. Ann. 77 (1915/16), 129—135.
Хадвигер (Hadwiger H.)
1. Volumschätzung für die eine Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope, Elem. Math. **10** (1955), 122—124.
2. Simultane Vierteilung zweier Körper, Arch. Math. **17** (1966), 274—278.
3. Zur axiomatischen Charakterisierung des Steinerpunktes konvexer Körper, Israel J. Math. 7, № 2 (1969), 168—176.
4. Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz, Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich **89** (1944), 211—214.
5. Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum, Portugal Math. **4** (1944), 140—144.
6. Überdeckung des Euklidischen Räumes durch kongruente Mengen, Protugal. Math. **4** (1945), 238—242.
7. Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, Comment. Math. Helv. **18** (1945/46), 73—75.

8. Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, Comment. Math. Helv. 19 (1946/47), 72—73.
9. Über die Zerstückung eines Eikörpers, Math. Z. 51 (1947) 161—165.
10. Von der Zerlegung den Kugel in kleinere Teile, Gaz. Mat. Lisboa 15 (1954), 1—3.
11. Ungelöste Probleme № 6, Elem. Math. 10 (1955), 88 and 111; 12 (1957), 110.
12. Ungelöste Probleme № 20, Elem. Math. 12 (1957), 121.
13. Ungelöste Probleme № 23, Elem. Math. 13 (1958), 58—59.
14. Ungelöste Probleme № 38, Elem. Math. 15 (1960), 130—131.
15. Überdeckung der euklidischen Sphäre mit kongruenten Punktmengen, Comment. Math. Helvet. 42 (1967), 249—258.

Хадвигер, Дебруннер (Hadwiger H., Debrunner H.)
1. Ausgewählte Einzelproblem der kombinatorischen Geometrie in der Ebene, Enseignement Math. 1 (1955), 56—89.
2. Комбинаторная геометрия на плоскости, «Наука», 1965.

Хаммер (Hammer P. C.)
1. The centroid of a convex body, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 522—525.
2. Convex bodies associated with a convex body, Proc. Amer. Mat. Soc. 2 (1951), 781—793.
3. Diameters of convex bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 304—306.
4. Volumes cut from convex bodies by planes (Неопубл. рукопись).

Хаммер, Собчик (Hammer P. C., Sobczyk A.)
1. Critical points of a convex body. Abstract 112, Bull. Amer. Math. Soc. 57 (1951), 127.

Хаммер, Смит. (Hammer P. C., Smith T. J.)
1. Conditions equivalent to central symmetry of convex curvex Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 779—785.

Ханнер (Hanner O.)
1. Intersections of translates of convex bodies, Math. Scand, 4 (1956), 65—87.

Хеппеш (Heppes A.)
1. Beweis einer Vermutung von Vázonyi, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7 (1957), 463—466.
2. On the splitting of point set in three space into the union of sets of smaller diameter, Magyr. Tud. Akad. Mat. Fis. Oszt. Közl. 7 (1957), 413—416.

Хеппеш, Ревес (Heppes A., Révész P.)
1. Zum Borsukschen Zerteilungsproblem, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 7 (1956), 159—162.

Хёрмандер (Hörmander)
1. Sur la function d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Arkiv för Matematik 3, 2, № 12 (1955), 181—186.

Хилтон П. Дж., Уайли С.
1. Теория гомологий, «Мир», 1966.

Хиракава (Hirakawa J.)
1. On a characteristic property of the circle, Tôhoku Math. J. 37 (1933), 175—178.

Хоггат (Hoggatt V. E.)
1. Forbidden area, Amer. Math. Monthly 69 (1962), 98—104.

Х о п ф (Hopf H.)
1. Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs-und Überdeckungssätze, Portugal. Math. 4 (1944), 129—139.
Х у а Л о - к е н, Ю н Ю н г - х у а н (Hua Loo-keng, Yin Yung-quan)
1. A geometrical inequality, Kexue Tongbao 17 (1966), 433—435.
Ц а р а н к е в и ч (Zarankiewicz K.)
1. O prostych połowiących pola wypukłe, Wiadom. Mat. 2, № 2 (1959), 228—234.
Ц и н д л е р (Zindler K.)
1. Über konvexe Gebilde I, II, III, Monatsh. Math. 30 (1920), 87—102; 31 (1921), 25—56; 32 (1922), 107—138.
Ч а к е р и а н (Chakerian G. D.)
1. Sets of constant width, Pacif. J. Math. 19 (1966), 13—21.
2. Sets of constant relative width and constant relative brightness, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 26—37.
3. Inequalities for the difference body of a convex body, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 879—884.
Ч а к е р и а н, С э л л и (Chakerian G. D., Sallee G. T.)
1. An intersection theorem for sets of constant width, Duke Math. J. 36, № 1 (1967), 165—170.
Ч а к е р и а н, Ш т е й н (Chakerian G. D., Stein S. K.)
1. On the centroid of a homogeneous wire, Michigan Math. J. 11 (1964), 189—192.
2. On the symmetry of convex bodies, Bull. Amer. Math. Soc. 70, № 4 (1964), 594—595.
3. On measures of symmetry of convex bodies, Canad. J. Math. 17, № 3 (1965), 497—504.
4. Bisected chords of a convex body, Arch. Math. Basel 17 (1966), 561—565.
5. Some intersection properties of convex bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 18, № 1 (1967), 109—112.
Ш е п а р д (Shephard G. C.)
1. Inequalities between mixed volumes of convex sets, Mathematika 7 (1960), 125—138.
2. Decomposable convex polyhedra, Mathematika 10 (1963), 89—95.
3. Approximation problems for convex polyhedra, Mathematika 11 (1964), 9—18.
4. A pre-Hilbert space consisting of classes of convex sets, Israel J. Math, 4 (1966), 1—10.
5. Reducible convex sets, Mathematika 13 (1966), 49—50.
6. The Steiner point of a convex polytope, Canad, J. Math. 18 (1966), 1294—1300.
7. A uniqueness theorem for the Steiner point of a convex region, J. London Math. Soc. 43 (1968), 439—444.
8. Euler-tupe relations for convex polytopes, J. London Math. Soc. 18, № 4 (1969), 597—606.
Ш е п а р д, У э б с т е р (Shephard G. C., Webster J.)
1. Metrics for sets of convex bodies, Mathematika 12 (1965), 73—88.
Ш е ф ф е р (Schäffer J. J.)
1. Inner diameter, perimeter and girth of spheres, Math. Ann. 173 (1967), 59—82.
2. Symmetric curves, hexagons and the girth of spheres in dimension 3, Israel J. Math. 6 (1968), 202—205.

Ш к л я р с к и й Д. О.
1. О разбиениях двумерной сферы, Матем. сб. **16** (1945), 125—128.

Ш м и т (Schmitt K. A.)
1. Hilbert spaces containing subspaces consisting of symmetry classes of convex bodies, Colloq. on Convexity (Copenhagen, 1965), Copenhagen, 1967, 278—280.
2. Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper, Math. Z. **105** (1968), 387—392.

Ш н е й д е р (Schneider R.)
1. Eine allgemeine Extremaleigenschaft der Kugel, Monatsh. Math. **71** (1967), 231—237.

Ш н и р е л ь м а н Л. Г.
1. О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых. Сб. работ матем. раздела Комм. акад. **1** (1929), 73—87 (воспроизв. в УМН **10** (1944), 34—44).

Ш о л а н д е р (Sholander M.)
1. Proof of a conjecture of R. S. and E. F. Buck, Math. Mag. **24** (1950), 7—10.

Ш о п п (Schopp J.)
1. Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalen, Raum, Elem. Math. **13** (1959), 106—107.
2. Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckungsproblemen von n-dimensionalen Hyperkugelbereichen, Elem. Math. **16** (1961), 35—37.
3. Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes, Elem. Math. **17** (1962), 12—14.

Ш т е й н (Stein S.)
1. The symmetry function in a convex body, Pacific. J. Math. **6** (1956), 145—148.
2. An application of topology to convex bodies, Math. Ann. **132** (1956), 148—149.
3. A continuous mapping defined by a convex curve, Math. Z. **68** (1957), 282—283.

Ш т е й н г а у з (Steinhaus H.)
1. Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles plans par les cercles, Fund. Math. **33** (1945), 245—263.
2. Математический калейдоскоп, Гостехиздат, 1949.
3. Length, shape and area, Colloq. Math. **3** (1954), 1—13.
4. Quelques applications des principes topologiques a la geometrie des corps convexes, Fund. Math. **41** (1955), 284—290.

Ш т е й н е р (Steiner J.)
1. Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven, J. Reine Angew. Math. **21** (1840), 33—63, 101—122. (Gesammelte Werke, Bd. 2, Berlin 1882, 99—159.

Ш т е й н х а г е н (Steinhagen P.)
1. Über die grösste Kugel in einer konvexen Punktmenge, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **1** (1922), 15—26.

Ш т р у б е к е р (Strubecker K.)
1. Differentialgeometrie des isotropen Räumes; V, Zur Theorie der Eilinien, Math. Z. **51** (1949), 525—573.

Ш ю т т е (Schütte K.)
1. Minimale Durchmesser endlicher Punktmengen mit vorgeschriebenem Mindestabstand, Math. Ann. **150** (1963), 91—98.

Э в а л ь д (Ewald G.)
1. Von Klassen konvexer Kõrper erzeugte Hilberträume, Math. Ann. 162 (1965/66), 140—146.
Э в а л ь д, Ш е п а р д, Д ж о ф ф р и (Ewald G., Shaphard G. C., Geoffrey C.)
1. Normed vector spaces consisting of classes of convex sets, Math. Z. 91 (1966), 1—19.
Э г л с т о н (Eggleston H. G.)
1. Measure of asymmetry of convex curves of constant width and restricted radii of curvature, Quart. J. Math. Oxford Ser. 3 (1952), 63—72.
2. Some properties of triangles as extremal convex courves, J. London Math. Soc. 28 (1953), 32—36.
3. Problems in Euclidean space: Application of convexity, London, 1957.
4. Figures insribed in convex sets, Amer. Math. Monthly 65 (1958), 76—80.
5. Convexity, Cambridge, 1958.
6. The maximal length of chords bisecting the area or perimeter length of plane convex sets, J. Jondon Math. Soc. 36 (1961), 122—128.
7. An extremal problem concerning the centrõid of a plane convex set, Proc. Colloq. on Convexity (Copenhagen, 1965), Copenhagen, 1967, 68.
8. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter J. London Math. Soc. 30 (1955), 11—24.
9. Sets of constant width contained in a set of given minimal width, Mathematika 2 (1955), 48—55.
10. Notes on Minkowski geometry (I): Relations between the circumradius, diameter, inradius and minimal width of a convex set, J. London Math. Soc. 33 (1958), 76—81.
11. Minimal universal covers in E^n, Israel J. Math. 1 (1963), 149—155.
Э г л с т о н, З и р а к з а д е (Eggleston H. G., Zirakzadeh A.)
1. A property of two chords which divide a convex curve into four arcs of equal length, Canad. J. Math. 17 (1965), 63—77.
Э р д ё ш (Erdõs P.)
1. On sets of distances of n points, Amer. Math. Monthly 53 (1946), 248—250.
2. Some unsolved problems, Michigan Math. J. 4 (1957), 291—300.
3. On sets of distances of n points in Euclidean space, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Kõzl. 5 (1960), 165—169.
4. Некоторые нерешенные проблемы, Математика (сб. переводов 7, № 4 (1963), 109—143.
Э р х а р т (Ehrhart E.)
1. Une généralisation du théorème de Minkowski, C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 483—485.
2. Sur les ovales et ovoides, C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 583—585.
3. Propriétés arithmo-geométriques des ovales, C. R. Acad. Sci. Paris 241 (1955), 274—276.
4. Sur les polygone et les ovales, C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 332—334.
5. Degré de symmétrie d'une surface plane, Enseign. Math. 9 (1963), 189—190.

6. Ovales et ovoïdes, Enseign. Math. **12** (1966), 21—32.

Эстерман (Estermann T.)

1. Zwei neue Beweise eines Satzes von Blaschke und Rademacher Jber. Deutsch. Math. Verein **36** (1927), 197—200.
2. Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers, Math. Z. **28** (1928), 471—475.

Юнг (Jung H. W. E.)

1. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschlisst, J. Reine Angew. Math. **123** (1901), 241—257.

Яворовски (Jaworowski J. W.)

1. On antipodal sets on the sphere and on continuous involutions, Funl. Math. **43** (1956), 241—257.

Яглом И. М.

1. О комбинаторной геометрии, «Знание», 1971.

Яглом И. М., Болтянский В. Г.

1. Выпуклые фигуры, Гостехиздат, 1951.

Янг (Yang C. T.)

1. On theorems of Borsuk — Ulam, Kakutani — Yamabe — Yujobo and Dyson, I, Ann. Math. **60** (1954), 262—282.

СОДЕРЖАНИЕ

517.5
Г 92
УДК 513.8

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга, рассчитанная на всех любителей геометрии, начиная со студентов младших курсов университетов и пединститутов, содержит два обзора Б. Грюнбаума, посвященных одному элементарному (но вовсе не простому) вопросу теории выпуклых тел и одной нерешенной проблеме комбинаторной геометрии. Кроме ярких результатов геометрического характера эти обзоры содержат перечень не решенных до сих пор задач; некоторые из них могут заинтересовать начинающего математика.

2-2-2
73-71