МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

Я. С. ДУБНОВ

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

Я. С. ДУБНОВ

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Под редакцией
и с дополнением
И. М. ЯГЛОМА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

АННОТАЦИЯ

Настоящая брошюра открывает собой серию книг «Математическая библиотечка», издаваемых под общей редакцией редакционного коллектива сборников «Математическое просвещение». Эти книги рассчитаны на тот же круг читателей, что и указанные сборники: на учащихся старших классов средней школы и студентов университетов и пединститутов, преподавателей средней и высшей школы, любителей математики, не имеющих специального математического образования; разные книги серии будут посвящены самой математике и ее приложениям (в частности, новым приложениям, возникшим в последние годы), преподаванию математики или ее истории.

Эта книжка, принадлежащая перу умершего в 1957 г. Я. С. Дубнова, видного советского математика и выдающегося педагога, представляет собой первую часть задуманного им большого сочинения об измерении геометрических величин. Она посвящена вопросу об измерении длин отрезков и имеет совершенно законченный характер Брошюра отличается большой тщательностью и обстоятельностью изложения и в то же время доступностью. Каждый параграф заканчивается «задачами и темами для самостоятельной работы». Краткое дополнение редактора содержит изложение вопросов измерения площадей многоугольников, следующее схеме, принятой Я. С. Дубновым в теории измерения длин отрезков.

Яков Семенович Дубнов

Измерение отрезков

М., Физматгиз, 1962 г., 100 стр. с илл.
(Серия «Математическая библиотечка»)

Редактор *Ф. Л. Варпаховский*

Техн. редактор *Э. И. Михлин* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 25/VII 1962 г. Подписано к печати 27/IX 1962 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 3,125. Условн. печ. л. 5,13. Уч.-изд. л. 5,54. Тираж 30 000 экз.
Т-10948. Цена книги 17 коп. Заказ № 3203

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза Москва, Ж-54, Валовая, 28.
Отпечатано с матриц в типографии «Вайздас», Вильнюс, Страздялио 1, Зак. № 3060.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Эта книжка принадлежит перу крупного математика и замечательного педагога Якова Семеновича Дубнова (1887—1957). Видный деятель на поприще математической науки, профессор Московского университета, воспитавший не одно поколение геометров, Яков Семенович Дубнов принадлежал к той (к сожалению, весьма немногочисленной) группе ученых, которых глубоко волнуют и практические вопросы школьного преподавания. Педагогическая деятельность в самом широком смысле этого слова — лекции и занятия со студентами, научно-популярные лекции для учащихся средней школы, устные и письменные выступления по вопросам преподавания математики в средней и высшей школе, написание книг, рассчитанных и на студентов, и на преподавателей средней школы, и на школьников,— все это занимало очень большое и важное место в жизни Я. С. Дубнова. И в последнее десятилетие жизни центром его педагогических устремлений была работа над книгой «Длина, площадь, объем», рассчитанной на учителей и студентов педагогических институтов.

Я. С. Дубнов любил долго вынашивать свои замыслы, много раз возвращаясь к одной и той же мысли и тщательно шлифуя детали. Обнаруженная после его смерти машинописная рукопись первой главы книги «Длина, площадь, объем», составляющая основное содержание настоящей брошюры, датирована 1947 годом; по-видимому, еще более ранним является также сохранившийся текст этой главы, написанный от руки. Все последующие годы Я. С. Дубнов охотно возвращался к этой книге, снова и снова продумывая относящиеся сюда научные и методические вопросы. Следы работы над книгой, посвященной вопросам измерения величин, заметны в ряде последних выступлений

Я. С. Дубнова. Они явственно проглядывают, например, в выборе тем докладов, прочитанных им перед учительской аудиторией на секции Средней школы Московского математического общества[1]); также и в выборе примеров для небольшой брошюры «Ошибки в геометрических доказательствах», впервые увидевшей свет в 1953 году, отражается интерес к методическим вопросам, связанным с этой темой.

Книгу «Длина, площадь, объем» Я. С. Дубнов так и не успел закончить. В его бумагах удалось обнаружить кроме двух экземпляров первой главы лишь проспект всей книги, дающий представление об общем замысле (см. приложение в конце книги). Начал он также писать предисловие к книге, из которого, в частности, видна та роль, которую он отводил (единственно написанной!) первой главе.

«Приступая к привлекательной для автора задаче — беседовать с настоящим или будущим педагогом о важных вопросах преподавания,— я поставил себе за правило: не «вещать» с неких научных или методических высот, а именно беседовать. Поэтому я не останавливался перед некоторыми длиннотами и отступлениями в сторону, если мне казалось, что они могут быть полезны для моего собеседника. Конечно, основной канвой служит тема, указанная в заглавии. Однако вокруг нее вырастает множество сопоставлений и аналогий, от рассмотрения которых я не считал нужным отказываться. Менее всего меня соблазняла перспектива прибавить ко многим превосходным изложениям предмета (вспомним хотя бы книгу А. Лебега «Об измерении величин») еще одно, пусть даже вполне корректное, но ограниченное узкими рамками темы.

Мне пришлось отдать дань и формальному изложению — главным образом в §§ 3—5 гл. I. Так как эти страницы приходятся как раз на первую главу, то я прошу читателя не делать по ним заключения о характере всей книги. Тому, кто не имеет вкуса к подобного рода изложению, можно посоветовать при первом чтении ознакомиться с содержанием этих страниц лишь самым беглым образом, не опасаясь того, что это послужит препятствием к пониманию дальнейшего. То же относится к напечатанному мелким шрифтом.

В качестве специфической особенности этой книги отмечу фундаментальную роль, отводимую методу Кавальери. Думаю, что этот метод недооценивается нашей школой ни с научной, ни с педагогической стороны...»

Данная брошюра содержит лишь первую главу задуманного сочинения и, разумеется, не заменяет его.

---

[1]) См., например, тезисы докладов «Величина и число» и «Метод параллельных сечений в теории площадей и объемов», прочитанных на секции Средней школы ММО в 1955 и в 1956 гг., сборник «Математическое просвещение», вып. 5, 1960, стр. 212—214.

Однако и в настоящем своем виде нижеследующие страницы представляют достаточно большой интерес. Вопросу об измерении длин отрезков в учебниках геометрии отводится обыкновенно довольно скромное место; однако этот вопрос является одним из самых принципиальных во всем курсе геометрии и уже здесь как в зародыше заложены весьма многие важные идеи, с которыми мы сталкиваемся во всех более сложных вопросах теории измерения геометрических величин (да и не только в этой теории!). И настоящая книжка может многому научить читателя; ограниченность ее темы и объема является даже определенным достоинством, поскольку все принципиальные моменты теории измерения величин даны здесь в достаточно обнаженном виде, не затушеваны никакими техническими трудностями.

Дальнейшее развитие теории содержит много интересных фактов и изящных построений, однако лишь весьма немного новых идей. Для иллюстрации этого положения мы прибавили к книге статью «О площади многоугольника», содержащую теорию измерения площадей многоугольников и продолжающую намеченную в основном тексте линию изложения еще на один шаг; это дополнение занимает сравнительно небольшой объем и с идейной стороны содержит довольно мало нового, хотя первоначально может показаться, что решаемая в нем задача значительно превосходит по трудности задачу измерения длин отрезков. При написании дополнения редактор старался возможно ближе держаться принятого Я. С. Дубновым хода мысли; однако его изложение, в некоторых деталях соприкасающееся со сравнительно свежим построением теории объемов n-мерных многогранников, принадлежащим видному швейцарскому геометру Г. Хадвигеру [1]), вероятно, во многом отлично от того изложения этого вопроса, которое имел в виду дать Яков Семенович.

Основной текст книги разбит на семь небольших параграфов. Они содержат весьма тщательное во всех деталях обсуждение принципиальных вопросов, связанных с содержанием книги, и глубокие замечания педагогического характера, связанные с преподаванием соответствующих тем как в средней, так и в высшей школе. Особо хочется

[1]) Ср. H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957.

отметить большое внимание, уделенное Я. С. Дубновым вопросу о взаимоотношении дескриптивных и конструктивных определений, играющему в науке весьма важную роль. Несколько особняком стоит в книге напечатанный мелким шрифтом § 7, излагающий основные идеи так называемой «интегральной геометрии» — научного направления, созданного в 30-х годах нашего столетия известным немецким геометром В. Бляшке и его школой; ранее эта теория излагалась лишь в статьях и книгах, рассчитанных на специалистов, а между тем она представляет собой превосходную иллюстрацию плодотворности и даже некоторой научной актуальности изложенных в §§ 1—6 общих идей.

Рукопись Я. С. Дубнова завершилась семью задачами (три из которых относились к «интегральной геометрии»), дающими читателю дополнительную возможность обдумать содержание книги. Желая сделать настоящую брошюру более законченной, мы значительно увеличили число задач, сопроводив «задачами и темами» каждый параграф книги. При этом в подборе задач мы стремились сохранить тот стиль, который имели задачи Я. С. Дубнова: это не просто упражнения, а именно темы, с идейной стороны весьма близкие к материалу соответствующего параграфа, но по содержанию иногда выходящие довольно значительно за его пределы. Зачастую в этих задачах указывается дополнительная литература, к которой может обратиться читатель, специально заинтересовавшийся рассматриваемым в задаче вопросом. Эта литература может оказаться полезной при разборе соответствующей темы на школьном или на студенческом математическом кружке.

При редактировании книги мы старались оставить неприкосновенным весь принадлежащий Я. С. Дубнову текст: даже в тех случаях, когда редактор полагал, что он смог бы убедить автора в целесообразности того или иного изменения, в создавшейся ситуации он предпочитал оставить изложение неизменным. Почти не изменены также и литературные ссылки, относящиеся, естественно, лишь к книгам и статьям, увидевшим свет до 1947 года. Однако здесь хотелось бы указать читателю на вышедшую несколько позже первую часть «Курса элементарной геометрии» Д. И. Перепелкина (М.—Л., Гостехиздат, 1948), имеющую много точек соприкосновения с материалом настоящей книги [1]). Можно еще отметить цикл статей на тему «Введение действительных чисел в средней и высшей школе», напечатанный в вып. 2 сборников «Математическое просвещение» (М., Гостехиздат, 1957); вопросам измерения геометрических величин будет уделено также много внимания в выходящем вскоре в свет IV томе «Энциклопедии элементарной математики».

И. М. Яглом

---

[1] Известно, как высоко оценивал эту книгу сам Я. С. Дубнов (см. его рецензию «Две новые книги по геометрии для педвузов», журнал «Математика в школе», № 6, стр. 43—49, 1949),— и в первую очередь за тщательность в изложении вопросов измерения величин. Можно отметить, что вторую часть той же книги, в которой вопросы измерения поверхностей и объемов в значительной степени обойдены, Я. С. Дубнов именно по этой причине считал менее удавшейся автору.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия как наука далеко ушла от тех задач, которые дали ей это древнее название. Не только «измерение земли» стало достоянием узкоспециальной дисциплины — геодезии, но в ходе развития науки, идущей от Евклида, выросли такие ее ветви, как проективная и аффинная геометрии, как топология, где вообще ничего не измеряют, где нет речи ни о длинах, ни о площадях, ни об объемах, ни о градусной или радианной мере угла (а топологии чужды, например, даже понятия прямой или окружности). Однако эти более новые направления не отразились на содержании школьного курса геометрии. В тех редких случаях, когда там встречаются предложения характера чисто проективного (например, «через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом единственную») или аффинного (например, «три медианы треугольника пересекаются в одной точке, делящей каждую медиану в отношении 2 : 1»), у нас нет педагогически оправданного повода обращать внимание учеников на особую природу этих предложений.

Таким образом, в школе геометрия остается и по содержанию, и по изложению измерительной, или, как говорят, *метрической*. Поэтому преподаватель должен с особой тщательностью изучить научную теорию измерения, чтобы быть в состоянии разрешить основную методическую задачу: найти равнодействующую между требованиями науки и интеллектуальными ресурсами ученика.

Нередко в школе пытаются дать общую формулировку, охватывающую отдельные задачи измерения. Говорят: измерить какую-либо величину (расстояние, промежуток времени, вес и т. п.)— значит сравнить ее с какой-либо определенной величиной того же рода (расстояние с расстоянием, вес с весом), которую при этом называют единицей измерения. Здесь ненужным образом усложняют дело привлечением расплывчатого понятия «величина» (являются ли величинами доброта, храбрость, для которых ведь имеют смысл понятия «больше», «меньше»? комплексные числа, к которым эти понятия не применяются?); не лучше ли формулировать задачу измерения для каждого отдельного случая (в геометрии — для отрезков прямолинейных и криволинейных, углов, фигур плоских и неплоских, тел), отмечая общие для этих вопросов черты и оставляя обобщение до значительно более поздней ступени?

Но самое слабое место приведенного выше определения (скорее, описания) заключается в неопределенности слова «сравнить». Сравнение может преследовать самые разнообразные цели: например, если сравниваются два расстояния, то возникает ряд вопросов — какое из них больше? насколько больше? и т. п. Только одному из таких вопросов, который в простейшем случае формулируется словами «во сколько раз больше?», соответствует задача измерения. Но так как дело не ограничивается этим простейшим случаем, когда результат измерения может быть выражен целым числом, то упомянутой формулировкой нельзя удовлетвориться даже в начальном преподавании.

Более ста лет тому назад наш великий соотечественник Н. И. Лобачевский начал свои «Геометрические исследования» [1]) словами (часть цитаты выделена нами):

> «В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука... до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу **неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин**, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий...».

Как известно, Лобачевский избрал делом своей жизни заполнение «пробела в теории параллельных» и вошел в науку как творец «неевклидовой» геометрии. Однако он

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий, Изд. АН СССР, 1945.

пристально размышлял и над вопросами измерения, как о том свидетельствует его «Геометрия» [1]).

В этом раннем сочинении Лобачевский опережает свой век, обнаруживая понимание той роли, какую позже стал играть предельный переход в вопросах измерения кривых линий, неплоских фигур и некоторых тел. Конечно, построение исчерпывающей теории в то время было невозможно, этого не позволяло состояние основ анализа и, прежде всего, учения о вещественном (действительном) числе.

В наше время научное обоснование теории измерения — пройденный этап, но отражение этой теории в школьном преподавании остается еще сложной методической проблемой. На преодоление возникающих здесь трудностей и направлены последующие страницы.

---

[1]) Под этим названием была издана в 1909 г., т. е. более чем через полвека после смерти Лобачевского, рукопись (считавшаяся долгое время утерянной) составленного им в 1823 г. краткого пособия по элементарной геометрии. В настоящее время эта рукопись воспроизведена в «Полном собрании сочинений Н. И. Лобачевского», т. 2, Гостехиздат, 1949.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫЕ И ДЕСКРИПТИВНЫЕ

В математике мы имеем дело с определениями двоякого рода. В одних случаях дается правило, следуя которому мы при помощи операций, ранее известных и заведомо выполнимых, получаем определяемый объект (число, функцию, геометрическую фигуру и т. п.). Например, мы определяем куб числа a (число a^3) как произведение трех множителей, из которых каждый равен a; при этом операция умножения считается известной, и мы знаем, что она всегда выполнима. Или — формулируем обычным образом определение высоты треугольника; не важно, каким способом мы опускаем перпендикуляр (с помощью угольника или с помощью циркуля и линейки), но очень существенно, что предварительно доказана теорема: из точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и притом только один. В обоих примерах определения были конструктивными (в буквальном переводе — построительными), т. е. указывающими те построения, в широком смысле этого слова, посредством которых получается определяемый объект.

С другой стороны, встречаются, и притом на ранних ступенях изучения математики, определения другого рода — так называемые дескриптивные (буквально — описательные; иногда говорят вместо этого о неявных определениях). Здесь определяемый объект характеризуется с помощью взаимоотношений, связывающих его с другими объектами, среди которых могут быть как известные, так и неизвестные. Типичной чертой дескриптивных определений является то, что заранее мы не знаем, существует ли объект, обладающий описанными в определении свойствами, а если существует, то один или много (в последнем случае наше определение окажется недостаточным для выделения индивидуального объекта; оно будет характеризовать к л а с с объектов).

Возьмем, например, обычное определение квадратного корня из числа. Это — дескриптивное определение: корень определяется как такое число, квадрат которого равен данному («подкоренному») числу. Сейчас же возникают два вопроса: 1) о существовании, 2) о единственности (однозначности) корня. Нет надобности подробно напоминать, как разрешаются эти вопросы в зависимости от того, к какой числовой области принадлежит подкоренное число и к какой должен принадлежать корень (только после этих дополнительных указаний задача становится определенной). Достаточно вспомнить, что квадратный корень может не существовать (например, в области рациональных или в области вещественных чисел) и может иметь не одно значение (однако не более чем два). Наряду с этим можно было бы дать конструктивное определение квадратного корня (для простоты будем говорить о так называемом «арифметическом» его значении): оно состояло бы в описании обычного алгорифма (с разбивкой на грани числа, записанного в десятичной системе счисления) извлечения корня с произвольной десятичной точностью. Для применения этого алгорифма вовсе не требуется знать, как связано искомое число с данным; существенно только то, что точное описание алгорифма дает нам в руки правило, с помощью которого мы имеем возможность по заданному подкоренному числу вычислить любое число десятичных знаков некоторого нового числа, а ведь ничего другого не требуется для того, чтобы признать это число найденным. В дальнейшем можно было бы — разумеется, опираясь на полную теорию вещественного числа — д о к а з а т ь, что полученное с помощью упомянутого алгорифма новое число имеет подкоренное своим квадратом. В школьной практике (с полным основанием) никто этим путем не идет. Этапы обычного изложения таковы: 1) дается дескриптивное определение квадратного корня; 2) устанавливается, что е с л и и с к о м о е ч и с л о с у щ е с т в у е т, то оно должно заключаться между пределами, которые даются обычным алгорифмом, начинающимся с разбивки на грани. Но вопрос о существовании и единственности остается неисчерпанным из-за невозможности изложить в школе научную теорию вещественного числа.

Таким образом, установить полную эквивалентность дескриптивного и конструктивного определений здесь не удается. Рассмотрим теперь более благоприятный случай, когда эта эквивалентность может быть установлена без труда.

Всякий раз, как неизвестное число определяется из уравнения, мы имеем дело с дескриптивным определением этого числа. Например, уравнением

$$3(2x+1)=4x+13 \tag{1}$$

число x определяется путем указания связи, существующей между этим числом и данными 2, 1, 3, 4, 13 (это определение могло бы быть выражено словами: число x таково, что если его удвоить, к полученному прибавить 1 и т. д.).

Мы настаиваем на уместности здесь термина «определение». Действительно, большей частью определение имеет целью выделить из некоторого класса объектов более узкий класс (например, из всех треугольников — равнобедренные) или даже единичный объект (например, из всех вещественных чисел — число π). Обычный процесс решения уравнения (1), приводящий к результату

$$x=\frac{13-3\cdot 1}{3\cdot 2-4} \tag{2}$$

(который мы намеренно записываем сначала, не выполняя действий, а только обозначая их, т. е. так, как если бы в уравнении данные числа были заменены буквами), можно охарактеризовать как переход от дескриптивного определения к конструктивному, которое по выполнении указанных в (2) действий дает

$$x=5. \tag{2$'$}$$

Проверка полученного решения подстановкой в (1) дает нам уверенность в эквивалентности дескриптивного определения (1) с конструктивным (2) или (2′). Другими словами, для того чтобы число x обладало свойством, которое выражено уравнением (1), н е о б х о д и м о, чтобы x совпадало с числом, определяемым формулой (2); подстановка показывает, что этого и д о с т а т о ч н о [1]).

---

[1]) Впрочем, в данном случае и в ряде других мы можем избавиться от необходимости подстановки, используя так называемые теоремы об эквивалентности уравнений. Но это означает только, что для некоторого класса уравнений (к которому не относятся, например, иррациональные уравнения) эквивалентность дескриптивного и конструктивного определений может быть установлена раз навсегда.

На примере дескриптивного определения, доставляемого уравнением, можно проследить еще одну особенность такого определения. Пусть, например, вместо (1) имеем уравнение

$$3(2x+1)=6x+13.$$

Легко видеть, что это уравнение не имеет решения[1]). С другой стороны, если бы мы видоизменили уравнение (1) так:

$$3(2x+1)=6x+3,$$

то получили бы тождество, т. е. уравнение, удовлетворяющееся любым значением x. Таким образом, имея дело с дескриптивным определением, мы должны быть готовы к тому, что 1) определяемого объекта вовсе не существует или, наоборот, 2) имеется несколько или даже бесконечное множество объектов, удовлетворяющих нашему определению. Именно это мы имели в виду, когда говорили выше, что с дескриптивным определением всегда связаны вопросы о существовании и единственности.

Закончим это рассмотрение еще одним примером, который в наибольшей степени будет содействовать пониманию дальнейшего.

Условия всякой задачи на построение содержат дескриптивное определение той фигуры (точки, прямой, треугольника, окружности и т. п.), которую требуется построить. Рассмотрим для примера задачу: *построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе* (c) *и сумме катетов* (s). Воспроизводя хорошо известное решение этой задачи, мы, естественно, фиксируем внимание не на методике и графических операциях этого решения, а на его логической структуре.

Анализ. Предположим, что искомый треугольник существует; пусть это будет (рис. 1) $\triangle ABC$, так что $\angle C=90°$, $a+b=s$.

---

[1]) Типичное для старых учебников утверждение, будто в данном случае уравнение имеет корень $x=\infty$, лишено смысла. Можно было бы вложить смысл в это утверждение с помощью некоторого дополнительного соглашения (основанного, например, на равенстве $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3(2x+1)}{6x+13}=1$), но такая позиция в средней школе кажется нам неуместной.

Если продолжим катет AC на расстояние $CD=a$, то получим $\triangle ADB$, в котором $AD=s$, $AB=c$, $\angle D=45°$. Можно считать, что последними равенствами дается дескриптивное определение нового треугольника ADB, однако такое, которое непосредственно переходит в конструктивное (мы умеем строить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них). После того как $\triangle ADB$ будет построен, останется провести в нем высоту BC для того, чтобы получить $\triangle ABC$. Логическая природа этого рассуждения такова: если $\triangle ABC$, удовлетворяющий условиям задачи, существует, то он необходимо должен обладать такими-то дополнительными свойствами (позволяющими построить этот треугольник). Заметим, что вопрос о достаточности этих свойств и о выполнимости построения остается пока открытым — это дело дальнейших этапов решения. Во всяком случае роль «анализа» состоит в том, чтобы составить план перехода от дескриптивного определения (для треугольника ABC в данном случае) к конструктивному.

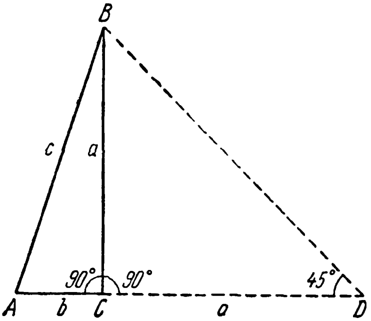


Рис. 1.

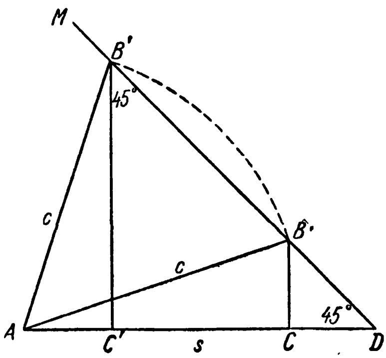


Рис. 2.

Построение. Строим отрезок $AD=s$ и $\angle ADM=45°$ (рис. 2). Из точки A как из центра радиусом c делаем засечки B и B' на луче DM. Из точек B и B' опускаем перпендикуляры BC и $B'C'$ на AD.

Таким образом, получаем конструктивное определение двух треугольников ABC и $AB'C'$. Если искомый треугольник существует, то он необходимо должен совпадать с одним из построенных треугольников (позже будет доказано, что они равны между собою). Вопрос о выполнимости проделанных операций, а значит, и о существовании и единственности искомого треугольника остается пока открытым.

Доказательство. Докажем, что $\triangle ABC$ удовлетворяет требованиям задачи. Действительно, по построению он прямоугольный, с гипотенузой c; а так как $\angle D = 45°$, то $\triangle BCD$ равнобедренный, $BC = CD$, следовательно, $AC + BC = AC + CD = s$. Совершенно так же докажем, что требованиям задачи удовлетворяет $\triangle AB'C'$. Тем самым установлена достаточность нашего построения для того, чтобы треугольник обладал свойствами, выраженными в условии задачи, т. е. в дескриптивном определении. А так как выше была доказана необходимость[1]) этого построения, то мы можем теперь утверждать, что дескриптивное определение, содержащееся в условии задачи, и конструктивное, изложенное в «построении», эквивалентны.

Исследование имеет целью выяснить условия выполнимости тех операций, которыми мы пользовались в «построении», и тем самым решить вопрос о существовании и единственности объекта (здесь — треугольника), о котором идет речь в дескриптивном определении.

В рассматриваемом случае для существования $\triangle ABC$ необходимо, чтобы было $a + b > c$, т. е. $s > c$. Кроме того, для существования засечек B и B' (рис. 2; точки B и B' могут слиться в одну точку касания) необходимо, чтобы радиус c круговой дуги был не меньше, чем расстояние точки A от прямой MD, т. е. $c \geqslant AD \sin 45° = \frac{s}{\sqrt{2}}$.

Итак, необходимо, чтобы было

$$\frac{s}{\sqrt{2}} \leqslant c < s;$$

легко видеть, что этого и достаточно для существования точек B и B' на луче DM.

---

[1]) Говоря о «необходимости», мы, конечно, не хотим сказать, что других способов построения не существует. Мы утверждаем только, что если искомый треугольник (ABC) существует, то необходимым образом существует и треугольник ABD, причем один из другого может быть получен способом, описанным выше.

В общем случае, когда точки B и B' различны, получаются на первый взгляд два решения: $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ (рис. 2). Однако нетрудно убедиться в равенстве этих треугольников. Действительно, гипотенузы AB и AB' равны по построению. Далее, $\angle BAC = \angle B'BA - \angle BDA = \angle B'BA - 45°$ (так как $\angle B'BA$ — внешний для $\triangle ABD$); $\angle AB'C' = \angle AB'B - \angle C'B'B = \angle AB'B - 45°$. Остается заметить, что $\angle B'BA = \angle AB'B$, так как $\triangle ABB'$ равнобедренный; поэтому $\angle BAC = \angle AB'C'$, и значит треугольники ABC и $AB'C'$ равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому задача имеет при $\frac{s}{\sqrt{2}} \leqslant c < s$ единственное решение.

Итак, можно следующим образом охарактеризовать этапы формулировки и решения задачи на построение.

Условие задачи — дескриптивное определение искомой фигуры.

Анализ — вывод некоторых следствий из дескриптивного определения, таких, которые дают план перехода от дескриптивного определения к конструктивному.

Построение — конструктивное определение искомого объекта (причем вопрос о существовании и единственности остается пока открытым).

Доказательство — установление эквивалентности обоих определений в тех случаях, когда построение выполнимо.

Исследование — выяснение условий выполнимости построения, решение вопроса о существовании и единственности искомой фигуры.

Вооруженные схемой перехода от дескриптивного определения к конструктивному, мы обратимся далее к основной задаче этой книжки.

Задачи и темы [1])

1. Дескриптивное определение несуществующего объекта. Предположим известными ряд первых теорем школьного курса геометрии (предшествующих учению о параллельных): теоремы о вертикальных и смежных углах, теоремы

[1]) В этом разделе, добавляемом в конце каждого параграфа, мы предлагаем читателю для самостоятельного размышления несколько вопросов, углубляющих содержание данного параграфа. Некоторыми из этих вопросов можно воспользоваться как материалом для математических кружков (студенческих и даже школьных); с этой целью иногда даются ссылки на литературу.

о свойствах равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников, теоремы о длинах сторон треугольника и о соотношениях между величинами сторон и углов, свойства биссектрисы угла и перпендикуляра, восставленного к отрезку в его середине, если угодно,— но не теоремы о внешнем угле треугольника и о единственности перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую (последняя теорема вытекает из теоремы о внешнем угле). В таком случае мы могли бы дать следующее определение (дескриптивное !): *полюсом данной прямой a называется точка A пересечения перпендикуляров, восставленных к a в двух ее (разных) точках M и N*. Это определение, вероятно, показалось бы нам спорным, и в первую очередь из-за того, что здесь заранее нет оснований ожидать единственности определяемого объекта: так как перпендикуляров к данной прямой существует очень много, то можно ожидать, что и точек пересечения этих перпендикуляров будет много (мы ведь считаем неизвестным то обстоятельство, что на самом деле этих точек вовсе нет!). Однако при дальнейшем обдумывании нашего определения мы убедимся в неосновательности этого возражения: если перпендикуляр, восставленный к a в точке P, пересекает перпендикуляры MA и NA в точках A_1 и A_2, расположенных так, как изображено на рис. 3, то, очевидно, $AM=AN$ (ибо углы при основании треугольника AMN равны) и точно так же $A_1P=A_1M$ и $A_2P=A_2N$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} AA_1 &= A_1M - AM = A_1P - AN = \\ &= (A_1A_2 + A_2P) - AN = \\ &= A_1A_2 + (A_2N - AN) = \\ &= A_1A_2 + A_2A; \end{aligned}$$

но сторона AA_1 треугольника AA_1A_2 может равняться сумме двух других сторон лишь в том случае, когда этот треугольник «вырождается в точку», т. е. когда точки A, A_1 и A_2 совпадают.

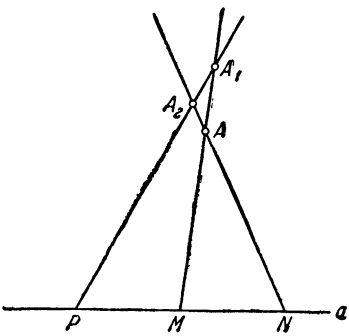


Рис. 3.

Доказав таким образом единственность полюса прямой, мы могли бы затем начать развивать «теорию полюсов». Так, ясно, что длины перпендикуляров, опущенных из полюса прямой на прямую, будут все иметь одно и то же значение α (не зависящее ни от выбора перпендикуляра, ни от выбора прямой): два перпендикуляра AM и AN, опущенные из полюса A прямой a на эту прямую, равны в силу равенства углов при основании треугольника MAN, а перпендикуляр A_1M_1, опущенный из полюса A_1 (другой!) прямой a_1 на эту прямую, равен AM в силу равенства (по стороне и двум прилежащим к ней углам) треугольников AMN и $A_1M_1N_1$, где $M_1N_1=MN$ (N и N_1— точки прямых a и a_1). Отсюда можно заключить, что если a и a_1 — две прямые, пересекающиеся в точке Q, а A и A_1 — полюсы этих прямых, то точка Q является полюсом прямой AA_1 (ибо в силу $QA=QA_1=\alpha$ треугольник QAA_1 равен изображенному на рис. 3 треугольнику AMN, выбранному так, что $MN=AA_1$); следствием этой теоремы явится «замечательная» теорема о том, что расстояние между полюсами двух прямых пропорционально углу между прямыми, влекущая за собой интересные связи между треугольником ABC и треугольником $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, вершины которого являются полюсами сторон ABC, и т. д. Однако вся эта большая теория оказывается бессодержательной из-за того, что мы опустили в ней доказательство существования определяемого объекта (полюса прямой), так что все наши теоремы должны читаться так: если полюсы прямых существуют, то они обладают такими-то и такими-то свойствами, а на самом деле, как хорошо известно, полюсов, определенных в начале этой задачи, не существует!

[Содержание этой задачи заимствовано из одной из неевклидовых геометрий (геометрий, отличающихся от обычной геометрии Евклида), называемой неевклидовой геометрией Римана или эллиптической геометрией. В этой геометрии два перпендикуляра, восставленные к одной прямой a, в самом деле пересекаются в некоторой точке A, что позволяет развить глубокое «учение о полюсах прямых», играющее большую роль во всех построениях геометрии Римана (см., например, А. С. Богомолов, Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.—М., ОНТИ, 1934, гл. II; И. М. Яглом, Геометрические преобразования II, М., Гостехиздат, 1956, стр. 337—345).

2. Конструктивное определение логарифмической и обратных тригонометрических функций. Логарифм числа a обычно определяется (дескриптивно) как такое число $\log a$, что $m^{\log a}$ (где m есть заданное «основание» системы логарифмов) равно a. Можно, однако, дать логарифмической функции и (довольно неожиданное, во всяком случае на первый взгляд) конструктивное определение, заключающееся в том, что *величина* $\log a$ *равна площади криволинейной трапеции, ограниченной дугой гиперболы* $y=\frac{1}{x}$, *осью абсцисс и прямыми* $x=1$ и $x=a$ (рис. 4,a); разумеется, для того чтобы это определение можно было считать конструктивным, необходимо располагать каким-либо конструктивным определением площади (криволинейной) области (например, определением, выражающим площадь трапеции $ABNM$ на рис. 4,a как общий предел сумм площадей изображенных там же прямоугольников AMM_1A_1, $C_1M_1M_2A_2$, ..., $C_{n-1}M_{n-1}NA_n$, соответственно $B_0MM_1C_1$, $B_1M_1M_2C_2$, ..., $B_{n-1}M_{n-1}NB$; разумеется, такое определение позволяет вычислить площадь трапеции с любой степенью точности). Из этого определения можно уже вывести все свойства функции $y=\log x$, а также найти основание построенной таким путем системы логарифмов, равное пределу выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ («неперово число» e). (См., например, А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954, стр. 72—76 и 463—469 или, в несколько иной форме, А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы, М.—Л., Гостехиздат, 1952; Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 576 и сл.).

Аналогично этому можно определить и обратные тригонометрические функции. Так, например, величину $\operatorname{arctg} a$ можно определить как площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$, осью абсцисс, осью ординат и прямой $x=a$ (рис. 4, *б*), или как интеграл $\int\limits_0^a \frac{dx}{1+x^2}$ [1]); из этого определения могут быть выведены все свойства функции $y=\operatorname{arctg} x$ (здесь проще, пожалуй, исходить из «интегрального» определения величины $\operatorname{arctg} a$, позволяющего использо-

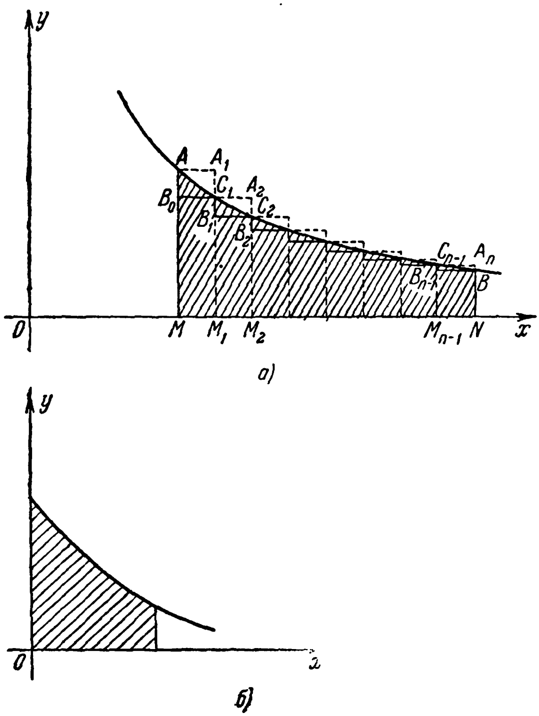


Рис. 4.

вать развитый аппарат интегрального исчисления). Близко к этому и определение функций $\arcsin x$ и $\arccos x$, которые также можно задать их интегральными представлениями (или определить как площади некоторых криволинейных трапеций).

---

[1]) Это определение сводит понятие о величине $\operatorname{arctg} a$ к понятию интеграла; его следует считать конструктивным или дескриптивным в зависимости от того, является ли конструктивным или дескриптивным определение интеграла, из которого мы будем исходить. В высшей математике широко приняты два определения интеграла: интегралом называют первообразную для подынтегральной функции (н е о п р е д е л е н н ы й   и н т е г р а л; это определе-

3. Дескриптивное определение тригонометрических функций. В то время как обратные тригонометрические функции чаще всего определяются дескриптивно через (прямые) тригонометрические функции, сами тригонометрические функции обычно определяются конструктивно как отношения сторон некоторых прямоугольных треугольников (или некоторых отрезков в круге); эти определения позволят построить величину $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ (где угол α задан) как отношение определенных отрезков и вычислить эту величину (скажем, из чертежа). Многие думают, что функции $\sin x$ и $\cos x$ органически связаны с геометрическими фигурами, например с треугольником. На самом же деле эти функции допускают чисто аналитическое определение (дескриптивное), которое достаточно для того, чтобы детально изучить их свойства. Рассмотрим функцию $f(x)$, дважды дифференцируемую и обладающую следующими свойствами:

1) вторая производная этой функции отличается только зна́ком от самой функции

$$f''(x)+f(x)=0; \tag{a}$$

2) при $x=0$ функция принимает значение 0, а ее первая производная — значение 1:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1. \tag{b}$$

Можно показать, что единственная функция, удовлетворяющая этим требованиям, есть $\sin x$. Если, сохраняя требование (а), заменить (b) другими «начальными условиями»:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0,$$

то мы придем к функции $\cos x$. Однако нет необходимости в переходе к обычным (конструктивным) определениям синуса и косинуса для того, чтобы построить графики этих функций, обнаружить их периодичность и т. д. (См., например, Э. Борель, Основные идеи алгебры и анализа, М.—Л., ГИЗ, 1927, стр. 188—200; Ф. В. Доброхотов, Очерк аналитической теории тригонометрических функций, сб. «Матем. просвещение» (старая серия), вып. 9, 1936, стр. 20—31. Ср. также М. Я. Цыркин, К вопросу об определении тригонометрических функций с помощью функциональных уравнений, сб. «Матем. просвещение» (новая серия), вып. 6, 1961, стр. 245—254).

4. Еще одно дескриптивное определение тригонометрических функций. Обычный путь определения тригонометрических и обратных тригонометрических функций таков: тригонометрические функции определяются конструктивно, геометрически; после этого обратные тригонометрические функции определяются дескриптивно через тригонометрические. Указанное в задаче 2 конструктивное (геометрическое или интег-

---

ние, очевидно, является дескриптивным) и предел интегральных сумм (определенный интеграл; конструктивное определение). Основная роль в интегральном исчислении так называемой теоремы Ньютона — Лейбница связана с тем, что эта теорема устанавливает связь между указанными двумя определениями интеграла — дескриптивным и конструктивным (и тем самым между понятиями интеграла и производной, поскольку дескриптивное определение интеграла непосредственно связано с понятием производной).

ральное) определение обратных тригонометрических функций позволяет обратить этот путь: теперь мы можем (дескриптивно!) определить тригонометрические функции как функции, обратные обратным тригонометрическим. Так, например, функцию $y=\operatorname{tg} x$ можно определить равенством $x=\int\limits_0^y \frac{dy}{1+y^2}$ (которое можно рассматривать как неявное выражение величины y через величину x); после этого функции $\sin x$ и $\cos x$ можно ввести с помощью формул $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$ Эти определения позволяют построить развернутую теорию тригонометрических функций.

Близко к этому также (дескриптивное) определение показательной функции $y=e^x$, кладущее в основу равенство $x=\int\limits_1^y \frac{dy}{y}$, связывающее эту функцию с определенной в той же задаче 2 логарифмической функцией $y=\log x=\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$.

(Такое определение тригонометрических и показательной функций развернуто в статье: В. И. Левин, Определения элементарных трансцендентных функций через интегральные представления, Ученые записки Тульского педагогического института, вып. 5, 1954, стр. 76—106.)

§ 2. ДЕСКРИПТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОТРЕЗКА[1])

Уже в начальной школе ученик сталкивается с измерением отрезков. То определение, которое при этом иногда формулируется, а иногда подразумевается, можно охарактеризовать как *неполное конструктивное*. *Конструктивное* потому, что оно описывает в абстрактной форме известный ученику из практики прием измерения расстояния: на измеряемом отрезке откладываем

---

[1]) Эпитет «прямолинейный» при слове «отрезок» мы будем в дальнейшем опускать, так как криволинейные отрезки предпочтем называть дугами.

единицу длины столько раз, сколько возможно; если получается остаток, то на нем откладываем некоторую долю единицы. Неполным это определение является в том смысле, что оно ограничивается частным случаем, когда в измеряемом отрезке укладывается целое число раз единица длины или какая-либо ее доля (к тому же обычно выражаемая дробью с небольшим знаменателем, вроде $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, ..., или даже только десятичной дробью: 0,1; 0,01; ...).

Хотя практически этот случай наиболее важный, можно даже сказать единственно важный [1]), однако теоретически он представляется исключительным, так как наудачу взятый отрезок окажется, вообще говоря, несоизмеримым с единицей длины. Поэтому на более высокой ступени изучения геометрии (у нас примерно в 8-м классе средней школы) становится необходимым дать теорию измерения, приближающуюся к научной. Последнюю можно, конечно, строить, исходя из конструктивного определения длины отрезка. От усвоенного в начальной стадии обучения такое определение отличается только указанием на возможность бесконечной длительности процесса измерения, с неизбежным появлением иррационального числа и доказательством реальности этой ситуации (пример: несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной). При этом либо предполагается, что ученик уже знаком с иррациональными числами из курса алгебры, либо иррациональное число появляется впервые именно в связи с измерением отрезков (последний вариант осуществлен, например, в статье: П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Иррациональные числа, «Математика в школе», № 3, 1941).

Вслед за этим устанавливаются важнейшие свойства длины, например: длина суммы двух отрезков равна сумме длин этих отрезков. Однако существует опасность того, что эти свойства, именно в силу своей обыденности и кажущейся очевидности, останутся незамеченными учеником. Это не случится, если упомянутые свойства предпосылаются теории измерения, как это происходит, когда за исходный пункт принимают дескриптивное определение длины отрезка. Уже этого чисто педагогического

[1]) Отметим, что физически определяемые объекты принципиально не могут быть несоизмеримыми. Утверждения вроде «метр несоизмерим с аршином» или «год несоизмерим с сутками» лишены смысла.

соображения, которое позже (§ 6) будет подкреплено другими, достаточно для того, чтобы в вопросе об измерении отрезков, равно как и в ряде аналогичных вопросов измерения (площадей, объемов и др.), предпочесть изложение, в основу которого положено дескриптивное определение.

Поставим перед собой задачу: каждому отрезку дать числовую оценку, которую будем называть **длиной** этого отрезка и от которой потребуем наличия следующих свойств.

Требование 1. *Каждому отрезку соответствует в качестве длины определенное положительное число.*

Требование 2. *Длина отрезка не зависит от его положения* (т. е. конгруэнтным отрезкам соответствуют равные длины).

Требование 3. *Если отрезок AB разбит точкой C на две части AC и CB, то длина всего отрезка равна сумме длин этих частей* (иначе: длина суммы двух отрезков равна сумме их длин) [1]).

Требование 4. *Некоторый определенно выбранный отрезок* (который мы в дальнейшем будем называть **эталоном** длины) *имеет длину, равную числу* 1.

В этих четырех требованиях и содержится дескриптивное определение нового понятия «длина отрезка» (точнее, понятия «длина отрезка при данном выборе эталона»), подобно тому как в задаче на построение некоторая фигура определяется совокупностью требований, которым она должна удовлетворять.

По поводу отдельных требований 1—4 сделаем следующие замечания. То обстоятельство, что в требовании 1 длина трактуется как **положительное** число, объясняется тем, что мы рассматриваем здесь отрезки с элементарно-геометрической точки зрения, не делая различия между началом и концом отрезка (AB и BA — один и тот же отрезок). Между тем известно, что для отрезков, лежащих на одной прямой, иногда бывает уместным приписывать им то или другое «направление», и тогда для

---

[1]) Пользуемся случаем отметить, что сложение и вычитание отрезков, равно как умножение и деление отрезков на натуральное (т. е. целое положительное) число, являются чисто геометрическими (графическими) операциями, которые выполнимы, например, с помощью циркуля и линейки, без участия измерительных инструментов и не требуют привлечения понятия длины отрезка. Только требование 3 устанавливает связь между сложением отрезков и сложением соответствующих им чисел.

«ориентированных» отрезков пользуются в качестве числовых оценок как положительными, так и отрицательными числами. Равным образом у нас нет необходимости рассматривать здесь отрезок с совпадающими началом и концом, поэтому отсутствует число 0 в качестве длины.

Требование 2 может быть охарактеризовано еще так: длина есть функция отрезка, инвариантная относительно конгруэнтных преобразований (т. е. движений и зеркальных отражений).

Требование 3 содержит так называемое «аддитивное» (от латинского additio — сложение) свойство длины: при сложении отрезков складываются также их длины. Следует только помнить, что термин «сложение» употребляется здесь в двух совершенно различных смыслах.

Наименее принципиальный характер носит требование 4. Можно было бы от него отказаться, но тогда поставленная выше задача измерения получила бы не единственное решение. Мы пришли бы к целому классу «систем измерения», отличающихся одна от другой выбором эталона длины и, как правило (§ 5), легко преобразуемых одна в другую.

Прежде чем заняться планомерным переходом от дескриптивного определения к конструктивному, сделаем несколько попыток прийти к последнему путем «догадок» [1]). Попытки эти (в том числе и неудачные) излагаются здесь с чисто педагогической целью: выяснить роль отдельных требований 1—4 в теории измерения отрезков. Впрочем, можно приписать последующим рассуждениям и более принципиальное содержание. Они имеют целью показать, хотя бы частично, взаимную независимость требований 1—4, т. е. обнаружить возможность удовлетворить одним из этих требований, отказываясь от других,— ход мысли, хорошо знакомый всякому, кто имел дело с аксиоматическими построениями.

Попытка 1-я. Вообразим себе положение (парадоксальное с точки зрения школьной практики, но логически допустимое и потому пригодное для нашей цели), при котором мы уже умеем измерять обычным способом площади, по крайней мере площади прямоугольников, но еще не знаем, как измерять отрезки. Примем за длину

[1]) Вспомним, что именно так мы поступаем нередко при решении задач на построение: минуя «анализ», пытаемся сразу угадать «построение». В простейших случаях это удается.

отрезка число, измеряющее площадь квадрата, для которого этот отрезок служит стороной. Легко видеть, что требования 1 и 2 будут при этом удовлетворены (конгруэнтным отрезкам будут соответствовать конгруэнтные квадраты, следовательно, равные меры площади). Мы удовлетворим также требование 4, если примем за эталон сторону такого квадрата, площадь которого выражается числом 1. Однако требование 3 не будет выполнено, как это сразу видно из рис. 5 $(a^2+b^2\neq(a+b)^2)$.

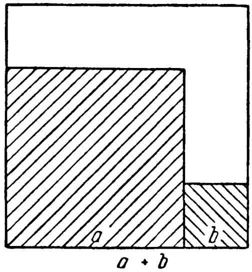


Рис. 5.

П о п ы т к а 2-я. Сузим задачу, ограничив ее измерением отрезков, лежащих на одной прямой (прямая MN на рис. 6). Представим себе, что мы уже научились измерять углы, скажем для определенности — в градусах, но еще не умеем измерять отрезки. Возьмем вне прямой MN точку O и примем за длину отрезка AB градусную меру того угла $\widehat{AOB}$, под которым этот отрезок виден из точки O. Очевидно, при этом каждый отрезок, лежащий на MN, будет иметь длиной положительное число (требование 1). Из рис. 6 усматриваем, что удовлетворено также и требование 3 аддитивности (если $AC+CB=AB$, то $\widehat{AOC}+\widehat{COB}=\widehat{AOB}$). Однако требование 2 инвариантности (здесь — относительно движений и отражений н а п р я м о й) не выполняется: конгруэнтные отрезки (например, AB и $A'B'$) видны из O, вообще говоря, под неодинаковыми углами. (Что же касается требования 4, то его легко удовлетворить: достаточно в качестве эталона взять любой отрезок прямой MN, который виден из точки O под углом в 1°.)

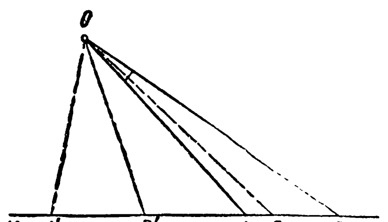


Рис. 6.

П о п ы т к а 3-я. Ограничимся снова измерением отрезков, лежащих на одной прямой, и представим себе, что мы умеем измерять площади (на этот раз — по крайней мере площади треугольников). Сохраняя обозначения предыдущего примера и рис. 6, назовем длиной отрезка AB число, измеряющее площадь треугольника AOB, построенного на данном отрезке как на основании и имеющего вершину в точке O. Условимся еще за эталон принять такой отрезок прямой MN, для которого площадь соответствующего ему треугольника выражается числом 1. Покажем, что теперь в с е требования 1—4 удовлетворены. Действительно, так как точки A, B и O никогда не лежат на одной прямой, то пл. $AOB>0$ (требование 1). Если $AB=A'B'$, то пл. $AOB =$ пл. $A'OB'$ (одинаковые основания и общая высота) — выполняется требование 2. Далее, из $AB=$ $=AC+CB$ следует пл. $AOB=$пл. $AOC+$пл. COB (требование 3). Наконец, требование 4 удовлетворено в силу описанного выше выбора эталона.

Таким образом, найдено полное решение поставленной задачи. Однако мы могли бы удовлетвориться им только в том случае, если бы предварительно была построена теория измерения площадей (треугольников), и притом независимо от теории измерения отрезков [1]). Пока этого нет, мы должны обратиться к другим рассмотрениям.

Задачи и темы

5. И с с л е д о в а н и е   н е з а в и с и м о с т и   т р е б о в а н и й,   о п р е д е л я ю щ и х   д л и н у   о т р е з к а. Указанные выше первые две попытки конструктивного определения длины отрезка полностью решают вопрос о независимости 2-го и 3-го требований, входящих в дескриптивное определение длины: можно так ввести понятие «длины», чтобы выполнялись все наши требования, кроме 2-го (попытка 2-я), соответственно кроме 3-го (попытка 1-я). [Еще проще удовлетворить всем требованиям, кроме 3-го, положив, что «длина» $AB \equiv 1$ (независимо от выбора отрезка AB!)]. Требование 4,

---

[1]) Наметим вкратце контуры одного из возможных вариантов такого построения, разумеется, без намерения рекомендовать его для школьной практики.

Известно, что всякий треугольник может быть посредством разрезывания на части «перекроен» в прямоугольник, а последний — в прямоугольник с наперед заданным основанием (см., например, Н. А. Г л а г о л е в, Элементарная геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1944, § 250), причем высота прямоугольника однозначно определяется треугольником («принцип де Цольта», А. П. К и с е л е в, Геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1940, § 243). Но совокупность всех прямоугольников с данным основанием по отношению к операциям наложения и сложения ведет себя совершенно так же, как совокупность всех отрезков. Поэтому любая теория измерения, годная для отрезков, может быть с тем же успехом развита для упомянутых прямоугольников.

как мы знаем, является малопринципиальным. Разумеется, можно задать длину отрезка таким образом, чтобы выполнялись все требования 1—3 и чтобы заранее выбранный отрезок (эталон) имел не длину 1, а любую другую (положительную) длину, например 2 или $^1/_2$; эта новая «длина» будет попросту пропорциональна обычной (ср. ниже § 5; в этом обсуждении определяющих длину требований мы считаем установленным само понятие длины, хотя в нашем изложении не был еще осуществлен переход от дескриптивного определения к конструктивному).

Таким образом, остается только установить независимость 1-го требования от других. Независимость 1-го требования от 2-го и 3-го вытекает из следующего определения «длины» отрезка: «длина» $AB=0$ независимо от выбора отрезка AB. Ясно, что при этом выполняются 2-е и 3-е требования и не выполняется 1-е; однако при этом нельзя удовлетворить также и 4-му требованию, поскольку никакой отрезок не имеет «длину» 1. Независимость же 1-го требования от всех трех последующих доказывается вовсе не просто.

Заметим, что из требований 1—4 следует, что длина отрезка характеризует класс конгруэнтных отрезков: ясно, что конгруэнтные отрезки имеют одну и ту же длину (требование 2); с другой стороны, неконгруэнтным отрезкам AB и AC отвечают разные длины (так, если точка C принадлежит отрезку AB, то в силу требований 3 и 1 имеем: $AB=AC+CB>AC$). С другой стороны, «длина» отрезка, удовлетворяющая требованиям 2—4 и не удовлетворяющая требованию 1, также должна быть одной и той же для всех конгруэнтных отрезков (то же требование 2); поэтому каждому значению x обыкновенной длины (каждому классу конгруэнтных отрезков) должна отвечать вполне определенная «длина» X в новом смысле. При этом требование 3 сводится к тому, что неизвестная нам функция $X=f(x)$ должна удовлетворять соотношению $f(x+y)=f(x)+f(y)$; если же при этом хоть для одного отрезка AB длины $x>0$ его «длина» $X=f(x)>0$, то можно будет удовлетворить и требование 4 (приняв этот отрезок AB за эталон длины и разделив «длины» всех отрезков на величину X «длины» AB).

Таким образом, вопрос о «длинах» отрезков, удовлетворяющих требованиям 2 и 3, сводится к вопросу о решениях функционального уравнения

$$f(x+y)=f(x)+f(y); \tag{$*$}$$

при этом требование 4 можно будет удовлетворить, если хоть для одного $x>0$ имеем $f(x)\neq 0$; требование 1 будет удовлетворяться, если для всех $x>0$ имеем $f(x)>0$. Заключение о том, что требования 1—4 однозначно определяют длину отрезка, равносильно утверждению, что единственным решением функционального уравнения (*), удовлетворяющим условию $f(x)>0$ при $x>0$, является решение $f(x)=cx$ (где постоянная $c>0$ произвольна; ср. ниже, стр. 50 и след.); вопрос же о независимости требования 1 от остальных требований сводится к доказательству существования знакопеременных решений уравнения (*) (т. е. таких решений, что $f(a)>0$, $f(b)\leqslant 0$, где $a>0$ и $b>0$). Такие (разрывные) решения уравнения (*) были впервые построены немецким математиком Г. Гамелем (см., например, Ю. М. Гайдук, Принцип полной математической индукции, его эквиваленты и обобщения, «Математика в школе», № 2, 1950, стр. 7—9).

6. Д е с к р и п т и в н о е о п р е д е л е н и е д л и н ы о р и е н т и р о в а н н о г о о т р е з к а. Мы уже упоминали, что в элементарной геометрии иногда оказывается удобным рассматривать о р и е н т и р о в а н н ы е отрезки прямой, т. е. отрезки с предписанным направлением обхода от начала к концу отрезка; при этом длины отрезков одного направления считаются положительными, а длины противоположно направленных отрезков — отрицательными. Длина ориентированного отрезка (причем под отрезком $\overline{AB}$ теперь понимается у п о р я д о ч е н н а я пара точек A, B прямой; точка A называется началом отрезка, а точка B — его концом) может быть определена дескриптивно требованиями, близкими нашим требованиям 1—4.

Без всякого изменения здесь остаются требования 2,3 и 4; только теперь в требовании 2 конгруэнтными следует считать равные и о д и н а к о в о н а п р а в л е н н ы е отрезки прямой, т. е. отрезки, которые могут быть получены один из другого сдвигом (параллельным переносом) вдоль прямой; в требовании 3 суммой отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ (независимо от их направления!) называется отрезок $\overline{AC}$ (требование 3 выражает так называемую «теорему Шаля—Мёбиуса» исчисления ориентированных отрезков; см., например, С. И. З е т е л ь, Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1962, стр. 5). Требование 1 для ориентированных отрезков, естественно, теряет силу; однако наличие разрывных решений уравнения

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

(см. предыдущую задачу) приводит к необходимости замены его, скажем, каким-либо требованием непрерывности длины (например, условием о том, что длина отрезка $\overline{AB}$ при закрепленном начале A непрерывно зависит от положения точки B); одними требованиями 2—4 длина ориентированного отрезка однозначно не определяется.

7. Д е с к р и п т и в н о е о п р е д е л е н и е в е л и ч и н ы у г л а. Предлагается продумать дескриптивное определение величины угла, родственное дескриптивному определению длины отрезка. При этом придется преодолеть некоторые новые затруднения, связанные с известной неопределенностью понятий «угол» и «величина угла» (под углом можно понимать просто пару лучей, выходящих из одной точки; или определенную часть плоскости, ограниченную подобными лучами; или непрерывное движение (вращение), переводящее один луч во второй; соответственно этому величина угла будет также иметь разные значения, причем здесь можно условиться ограничивать величину α угла, скажем, условиями, $0\leqslant\alpha<360^\circ$ или $0\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$; можно также считать, что величина угла определяется углом неоднозначно).

Разные понимания слов «угол» и «величина угла» приводят к разным системам требований, дескриптивно определяющих интересующее нас понятие.

Можно также поставить задачу дескриптивного описания понятия «величина направленного (ориентированного) угла» (по поводу этого понятия см., например, принадлежащие Д. И. П е р е п е л к и н у решения задач к книге: Ж. А д а м а р, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1957, стр. 488, 489).

§ 3. КОНСТРУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

Будем теперь решать задачу измерения отрезков, поставленную в § 2 (стр. 25), следуя тому же плану, что и в случае задачи на построение (см. конец § 1). В стадии «анализа» будем предполагать задачу решенной, т. е. будем считать, что для каждого отрезка уже удалось найти числовую оценку («длину») так, чтобы удовлетворялись требования 1—4. Выведем отсюда некоторые следствия относительно дополнительных свойств длины, которые подведут нас вплотную к конструктивному определению.

На протяжении нескольких ближайших страниц читателю предстоит преодолеть некоторые трудности, источником которых служит известное несовершенство нашей терминологии и символики. Мы имеем в виду привычку, укоренившуюся не только в преподавании, но и в науке, называть одинаковыми словами и обозначать одинаковыми символами разные вещи. Например, через AB обозначают и отрезок, и его длину; говоря о равенстве и неравенстве отрезков, чаще всего имеют в виду известную геометрическую операцию, состоящую в наложении сравниваемых отрезков, однако пользуются теми же знаками $=$, $>$, $<$, что и для чисел, и, что особенно вредит пониманию, переносят на эти соотношения такие свойства, которые установлены лишь для числовых равенств и неравенств. Далее, символом $a+b$ обозначают то сумму отрезков a и b, полученную последовательным откладыванием этих отрезков на прямой, то арифметическую сумму их длин. После того как теория измерения будет завершена, мы убедимся в безобидности такого рода смешений и увидим источник ее в «изоморфизме», имеющем место (по отношению к операциям сравнения, сложения и т. д.) между совокупностью всех отрезков, с одной стороны, и совокупностью всех вещественных положительных чисел — с другой (см. конец § 4). Но в процессе построения этой теории игнорирование упомянутых различий может повести к тому, что многие рассуждения покажутся читателю без нужды отягченными или даже тавтологическими. Чтобы избежать этого, мы пойдем на временное усложнение символики: именно условимся обозначать отрезки, а также знаки совершаемых над ними действий и существующих между ними соотношений (равенства и неравенства) жирным шрифтом, сохраняя обыкновенный шрифт для чисел и арифметических операций и соотношений. Как только минет в этом надобность, вернемся к обычной символике. Таким образом, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ будет обозначать отрезок, полученный из отрезков $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ путем последовательного откладывания их на прямой; запись $\mathbf{a}\geqslant\mathbf{b}$ означает, что отрезок $\mathbf{b}$ либо конгруэнтен отрезку $\mathbf{a}$, либо $\mathbf{b}$ может быть наложен на $\mathbf{a}$ так, чтобы первый составил часть последнего. Отметим еще символы $n\cdot\mathbf{a}$ и $\frac{\mathbf{a}}{n}$ (n — натуральное число; обратим внимание на жирную точку — знак умножения и жирную черту дроби), значения которых определяются равенствами:

$$n\cdot\mathbf{a}=\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\ldots+\mathbf{a}}_{n\text{ раз}}, \tag{3}$$

$$n\cdot\frac{\mathbf{a}}{n}=\mathbf{a}. \tag{4}$$

Последняя запись, выражающая, что $\frac{\mathbf{a}}{n}$ есть n-я доля отрезка $\mathbf{a}$, содержит дескриптивное определение отрезка $\frac{\mathbf{a}}{n}$; впрочем, в любом учебнике геометрии можно найти конструктивное определение (см., например, цитированную выше книгу А. П. Киселева, § 100), дающее вместе с тем доказательство существования [1]).

Перечислим теперь те свойства операций над отрезками (включая операции сравнения), на которые предстоит ссылаться в дальнейшем, присоединяя, где надо, краткие указания на ход доказательства.

Транзитивность неравенства:

$$\text{из}\quad \mathbf{a}\leqslant\mathbf{b},\quad \mathbf{b}\leqslant\mathbf{c}\quad\text{следует}\quad \mathbf{a}\leqslant\mathbf{c}; \tag{5}$$

доказательство — построением на чертеже.

Распределительность умножения отрезка на натуральное число: если m и n — натуральные числа, то

$$(m+n)\cdot\mathbf{a}=m\cdot\mathbf{a}+n\cdot\mathbf{a}; \tag{6}$$

доказательство — построением на чертеже.

---

[1]) В случае, особо важном для дальнейшего — деления отрезка на 2, 4, ..., вообще на 2^n равных частей, это построение может быть заменено другим (там же, § 67).

Сложение неравенств:

из $a>a_1$, $b>b_1$ следует $a+b>a_1+b_1$; (7)

доказательство — построением на чертеже.

Если m и n — натуральные числа, то

из $m>n$ следует $m\cdot a>n\cdot a$; (8)

доказательство: так как $m=n+(m-n)$, где $m-n$ — натуральное число, то (см. (6)) $m\cdot a=n\cdot a+(m-n)\cdot a$, откуда $m\cdot a>n\cdot a$.

Обратное предложение:

из $m\cdot a>n\cdot a$ следует $m>n$; (9)

доказательство — от противного.

Если n — натуральное число, то

из $a>b$ следует $n\cdot a>n\cdot b$; (10)

доказательство — построением на чертеже (см. рис. 7).

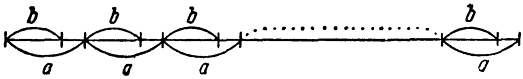


Рис. 7.

Обратное предложение:

из $n\cdot a>n\cdot b$ следует $a>b$; (11)

доказательство — от противного.

Аксиома Архимеда: *для любых двух отрезков a и b можно указать такое натуральное число n, чтобы было*

$$n\cdot b>a. \tag{12}$$

Следствие 1. Если $b<a$, то существует единственное натуральное число m такое, что

$$m\cdot b\leqslant a<(m+1)\cdot b. \tag{13}$$

Действительно, множество натуральных чисел m, удовлетворяющих неравенству $m\cdot b\leqslant a$, не пустое, так как оно во всяком случае содержит значение $m=1$. С другой стороны, это множество ограничено сверху, так как m меньше, чем число n неравенства (12) (см. (5) и (9)), существующее в силу аксиомы Архимеда. В ограниченном множестве натуральных чисел всегда существует наибольшее; достаточно взять его в качестве m для того, чтобы удовлетворить двойному неравенству (13). Докажем, что это значение m — единственное: если бы наряду с (13) имело место неравенство (m_1— натуральное, отличное от m)

$$m_1 \cdot \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a} < (m_1 + 1) \cdot \boldsymbol{b}, \qquad (13_1)$$

то из сопоставления левого неравенства (13) с правым (13_1) получили бы (см. (5)) $m \cdot \boldsymbol{b} < (m_1 + 1) \cdot \boldsymbol{b}$, откуда (см. (9)) $m < m_1 + 1$. Совершенно так же нашли бы $m_1 < m + 1$, $m > m_1 - 1$. Итак, $m_1 - 1 < m < m_1 + 1$; но единственное натуральное число, заключенное между $m_1 - 1$ и $m_1 + 1$, есть m_1, т. е. $m = m_1$ вопреки предположению.

Следствие 2. Если $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, то существует натуральное число n такое, что

$$\frac{\boldsymbol{a}}{n} < \boldsymbol{b}. \qquad (14)$$

Действительно, возьмем n таким, чтобы (см. (12)) $\boldsymbol{a} < n \cdot \boldsymbol{b}$; а так как $\boldsymbol{a} = n \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{n}$, то из $n \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{n} < n \cdot \boldsymbol{b}$ получится в силу (11) неравенство (14) [1]).

Теперь, наконец, обратимся к намеченному анализу. Предположим, что каждому отрезку $\boldsymbol{a}$ поставлено в соответствие число, которое будем называть «длина отрезка $\boldsymbol{a}$» и обозначать символом [2])

$$\text{дл. } \boldsymbol{a},$$

причем выполнены требования 1—4. Обозначим еще эталон

---

[1]) Наглядный смысл аксиомы Архимеда и двух выведенных из нее следствий состоит в следующем:

а) равными, пусть сколько угодно малыми, шагами можно покрыть любое расстояние;

b) если к измеряемому отрезку приложить шкалу большей длины со сколь угодно малыми делениями так, чтобы один из концов отрезка совпал с нулем шкалы, то другой конец отрезка либо совпадет с некоторым делением шкалы, либо ляжет между двумя соседними делениями;

с) как бы велик ни был один отрезок по сравнению с другим, всегда можно первый отрезок разделить на столь мелкие равные доли, чтобы каждая из них была меньше второго отрезка.

[2]) Важно уяснить себе, что символ дл. $\boldsymbol{a}$ означает уже не отрезок, а число. Поэтому такие соотношения, как помещенные ниже (15), (19), суть обыкновенные арифметические равенство и неравенство между числами.

длины через e; согласно требованию 4

$$\text{дл.}\, e = 1. \tag{15}$$

Обобщим теперь свойство длины, выражаемое требованием 3: именно покажем, что *длина отрезка, разбитого на любое число частей* (слагаемых), *равна сумме длин этих частей*. Действительно, если, например,

$$a = a_1 + a_2 + a_3,$$

то двукратное применение свойства, содержащегося в требовании 3 (последнее мы ведь предполагаем выполненным), дает

$$\text{дл.}\, a = \text{дл.}\,(a_1 + a_2) + \text{дл.}\, a_3 = \text{дл.}\, a_1 + \text{дл.}\, a_2 + \text{дл.}\, a_3.$$

Доказательство (переходом от n к $n+1$) для случая любого числа слагаемых очевидно и приводит к выводу:

$$\text{из } a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ следует дл.}\, a = \\ = \text{дл.}\, a_1 + \text{дл.}\, a_2 + \ldots + \text{дл.}\, a_n. \tag{16}$$

Отсюда получается с необходимостью значение длины для отрезка a, соизмеримого с эталоном e (т. е. для случая, когда отрезок e или некоторая его доля укладывается в a целое число раз). В самом деле, пусть

$$a = p \cdot \frac{e}{q} = \underbrace{\frac{e}{q} + \frac{e}{q} + \ldots + \frac{e}{q}}_{p \text{ слагаемых}} \quad (p,\ q \text{ — натуральные числа}),$$

тогда (см. (16))

$$\text{дл.}\, a = p\left(\text{дл.}\, \frac{e}{q}\right). \tag{17}$$

С другой стороны, из (см. 4)) $e = q \cdot \frac{e}{q}$ следует

$$\text{дл.}\, e = q\left(\text{дл.}\, \frac{e}{q}\right),$$

откуда (см. (15))

$$1 = q\left(\text{дл.}\, \frac{e}{q}\right), \quad \text{дл.}\, \frac{e}{q} = \frac{1}{q};$$

подставляя в (17), находим:

$$\text{из } a = p \cdot \frac{e}{q} \text{ следует дл.}\, a = \frac{p}{q}. \tag{18}$$

Докажем теперь, что при выполнении требований 1—4 *большему отрезку соответствует большая длина.* Действительно, если $a>b$, то $a=b+c$, следовательно (требование 3), дл. a=дл. b+дл. c; а так как (требование 1) дл. c есть положительное число, то

$$\text{из } a>b \text{ следует дл. } a>\text{дл. } c. \qquad (19)$$

Подведем итог пройденному этапу: если выполнены требования 1—4, то каждый отрезок, соизмеримый с эталоном, должен принудительным образом иметь длину, выражаемую рациональным числом (см. (18)). Если поэтому для некоторого отрезка удается подобрать два других, соизмеримых с эталоном и таких, что один будет меньше, а другой больше данного отрезка, то тем самым для длины последнего будут найдены (см. (19)) два приближенных значения — по недостатку и по избытку.

Пусть теперь a — произвольный отрезок. Будем откладывать на нем столько раз, сколько возможно, эталон e и его «двоичные доли»:

$$\frac{e}{2^0}=e,\ \frac{e}{2^1}=\frac{e}{2},\ \frac{e}{2^2},\ \frac{e}{2^3},\ \ldots \qquad (20)$$

Так как знаменатели здесь неограниченно возрастают (геометрическая прогрессия), то в последовательности отрезков (20), начиная с некоторого места, все отрезки будут меньше, чем a (см. (14) и относящийся сюда текст). Пусть, например, $\frac{e}{2^m}<a$. На основании (13) найдем такое (вполне определенное) натуральное число α_0, что будет выполняться двойное неравенство

$$\alpha_0\cdot\frac{e}{2^m}\leqslant a<(\alpha_0+1)\cdot\frac{e}{2^m}. \qquad (21_0)$$

Совершенно так же найдем бесконечную последовательность натуральных чисел [1]) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ таких,

---

[1]) Числовой пример: пусть e укладывается в a пять раз с остатком (так что можно принять $m=0$); в этом остатке пусть $\frac{e}{2}$ укладывается один раз с остатком; последний пусть окажется меньше, чем $\frac{e}{4}$ и $\frac{e}{8}$, но $\frac{e}{16}$ пусть укладывается в нем один раз с остатком. Тог-

что

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \cdot \frac{e}{2^{m+1}} \leqslant a < (\alpha_1 + 1) \cdot \frac{e}{2^{m+1}}, \\
&\alpha_2 \cdot \frac{e}{2^{m+2}} \leqslant a < (\alpha_2 + 1) \cdot \frac{e}{2^{m+2}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\alpha_k \cdot \frac{e}{2^{m+k}} \leqslant a < (\alpha_k + 1) \cdot \frac{e}{2^{m+k}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{21}$$

Теперь определились границы, между которыми должна заключаться длина отрезка a: в силу (18), (19) при любом $k=0, 1, 2, \dots$ должно быть

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \text{дл. } a < \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}}. \tag{22}$$

Покажем, что числовая последовательность

$$\frac{\alpha_0}{2^m}, \frac{\alpha_1}{2^{m+1}}, \dots, \frac{\alpha_k}{2^{m+k}}, \dots \tag{23}$$

имеет предел. С этой целью обнаружим, что последовательность (23) есть 1) монотонно возрастающая (во всяком случае — неубывающая), 2) ограниченная сверху, т. е. все числа этой последовательности меньше некоторого определенного числа [1]). М о н о т о н н о с т ь вытекает

да первые пять неравенств (21) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&5 \cdot e < a < 6 \cdot e, \\
&11 \cdot \frac{e}{2} < a < 12 \cdot \frac{e}{2}, \\
&22 \cdot \frac{e}{4} < a < 23 \cdot \frac{e}{4}, \\
&44 \cdot \frac{e}{8} < a < 45 \cdot \frac{e}{8}, \\
&89 \cdot \frac{e}{16} < a < 90 \cdot \frac{e}{16}.
\end{aligned}$$

Если в каком-нибудь из таких двойных неравенств левый знак $<$ заменится знаком $=$ (это произойдет, если какая-либо двоичная доля $\frac{e}{2^s}$ эталона уложится целое число раз в отрезке a), то все дальнейшие двойные соотношения типа (21) будут иметь на том же месте знак $=$ и не дадут ничего нового по сравнению с первым из них.

[1]) Таким образом, мы предполагаем здесь известными элементы теории пределов (достаточно — пределов числовых последовательностей) и ее фундамент — теорию иррациональных чисел.

из того, что если написать (22) для двух последовательных значений k:

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \text{дл.}\, a < \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}},$$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{2^{m+k+1}} \leqslant \text{дл.}\, a < \frac{\alpha_{k+1} + 1}{2^{m+k+1}},$$

и сопоставить левое неравенство из первого соотношения с правым из второго, то получится

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} < \frac{\alpha_{k+1} + 1}{2^{m+k+1}}, \text{ следовательно, } 2\alpha_k < \alpha_{k+1} + 1.$$

Но $2\alpha_k$ и α_{k+1} — числа целые, поэтому последнее неравенство равносильно такому:

$$2\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1},$$

которое по разделении на 2^{m+k+1} дает

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \frac{\alpha_{k+1}}{2^{m+k+1}}.$$

Этим доказано, что последовательность (23) есть неубывающая [1]).

В о г р а н и ч е н н о с т и чисел (23) мы убедимся, если напишем (22) для $k=0$ и для произвольного k:

$$\frac{\alpha_0}{2^m} \leqslant \text{дл.}\, a < \frac{\alpha_0 + 1}{2^m},$$

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \text{дл.}\, a < \frac{\alpha_{k+1}}{2^{m+k}}.$$

Правое неравенство первого соотношения вместе с левым второго дают

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} < \frac{\alpha_0 + 1}{2^m} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от k, то утверждение доказано.

Итак, существует предел последовательности (23); обозначая его через α, имеем:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\alpha_k}{2^{m+k}} = \alpha. \tag{24}$$

---

[1]) Более наглядным образом можно объяснить это свойство последовательности (23) так: у дробей (23) знаменатели возрастают каждый раз в д в о е, а числитель (как видно из неравенства $\alpha_{k+1} \geqslant 2\alpha_k$) — в д в о е и л и б о л ь ш е.

Но тот же предел имеет последовательность чисел, представляющих приближения к дл. a по избытку:

$$\frac{\alpha_0+1}{2^m},\ \frac{\alpha_1+1}{2^{m+1}},\ \ldots,\ \frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}},\ \ldots,$$

так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{m+k}}=\alpha+0=\alpha.$$

Поэтому искомая длина отрезка a, которая заключена между числами двух последовательностей (см. (22)), имеющих общий предел, не может отличаться от этого предела:

$$\text{дл. } a=\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}.$$

Теперь мы в состоянии сформулировать конструктивное определение длины отрезка (при данном выборе эталона длины e): *для отрезка a строим числовую последовательность* $\left\{\frac{c_n}{2^n}\right\}$, *где* c_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ *показывает наибольшее возможное число откладываний отрезка* $\frac{e}{2^n}$ *на отрезке a; предел этой последовательности принимаем за длину отрезка a.*

Перейдем теперь в стадию «доказательства», т. е. убедимся в том, что определенная только что конструктивно длина отрезка действительно удовлетворяет требованиям 1—4.

Проверка требования 1. Ранее мы доказали, что предел последовательности (23) всегда существует; будет ли он обязательно положительным числом? Да, потому что последовательность начинается с положительного члена $\frac{\alpha_0}{2^m}$ и монотонно возрастает (не убывает), а пределом такой последовательности не может быть ни нуль, ни отрицательное число [1]).

---

[1]) Формальное доказательство: если бы α в (24) было нулем или отрицательным числом, то мы имели бы

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}-\alpha\geqslant\frac{\alpha_0}{2^m}-\alpha>0,$$

т. е. разность между общим членом последовательности и ее пределом не могла бы стать меньше определенного положительного числа.

П р о в е р к а т р е б о в а н и я 2. Описывая процесс откладывания отрезка e и его долей на отрезке a, мы уже молчаливо пользовались свойствами д в и ж е н и я, в силу которых результат откладывания не может измениться от перемещения отрезка a в новое положение.

П р о в е р к а т р е б о в а н и я 3 нуждается в более пространном рассуждении. Пусть $a+b=c$; имеем (обозначения понятны сами собой — см. (21)):

$$\alpha_k\cdot\frac{e}{2^{m+k}}\leqslant a<(\alpha_k+1)\cdot\frac{e}{2^{m+k}},$$

$$\beta_k\cdot\frac{e}{2^{m+k}}\leqslant b<(\beta_k+1)\cdot\frac{e}{2^{m+k}},$$

$$\gamma_k\cdot\frac{e}{2^{m+k}}\leqslant c<(\gamma_k+1)\cdot\frac{e}{2^{m+k}}.$$

Складывая почленно первые два двойных неравенства, находим (см. (7) и (6)):

$$(\alpha_k+\beta_k)\cdot\frac{e}{2^{m+k}}\leqslant c<(\alpha_k+\beta_k+2)\cdot\frac{e}{2^{m+k}},$$

а сравнение с третьим двойным неравенством дает (см. (5))

$$(\alpha_k+\beta_k)\cdot\frac{e}{2^{m+k}}<(\gamma_k+1)\cdot\frac{e}{2^{m+k}},$$

$$\gamma_k\cdot\frac{e}{2^{m+k}}<(\alpha_k+\beta_k+2)\cdot\frac{e}{2^{m+k}}.$$

Отсюда переходим к числовым неравенствам (см. (9))

$$\alpha_k+\beta_k<\gamma_k+1 \quad \text{и} \quad \gamma_k<\alpha_k+\beta_k+2.$$

Деля на 2^{m+k} и переходя к пределу при $k\to\infty$, находим [1]):

$$\lim\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}+\lim\frac{\beta_k}{2^{m+k}}\leqslant\lim\frac{\gamma_k}{2^{m+k}}+0,$$

$$\lim\frac{\gamma_k}{2^{m+k}}\leqslant\lim\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}+\lim\frac{\beta_k}{2^{m+k}}+0,$$

следовательно,

$$\lim\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}+\lim\frac{\beta_k}{2^{m+k}}=\lim\frac{\gamma_k}{2^{m+k}},$$

т. е.

$$\text{дл. } a+\text{дл. } b=\text{дл. } c.$$

Проверка закончена.

---

[1]) Мы пользуемся здесь предложением из теории пределов: если $u_k<v_k$, то $\lim\limits_{k\to\infty} u_k\leqslant\lim\limits_{k\to\infty} v_k$.

Проверка требования 4. В случае, когда $a=e$, можно в (23) принять $m=0$; тогда $\alpha_0=1, \alpha_1=2, \alpha_2=$ $=4,\ldots,\alpha_k=2^k,\ldots$, и все члены последовательности равны 1. Такая последовательность имеет пределом 1; следовательно, дл.$e=1$.

Остается «исследование» с выяснением вопроса о существовании и единственности. В сущности, важнейшие его элементы уже получены на стадиях «анализа» и «построения», так что здесь остается их резюмировать. Было доказано, что длина отрезка a не может выражаться никаким иным числом, кроме как пределом последовательности (23). Относительно этой последовательности были доказаны (с помощью аксиомы Архимеда и ее следствий) существование и однозначная определенность всех ее элементов [1]. Была обнаружена «сходимость» последовательности (23), т. е. доказано существование (а значит, и единственность) предела (24).

Таким образом, можно считать установленной эквивалентность дескриптивного и конструктивного определений длины отрезка, что составляло основную задачу этой книжки. Остальная ее часть посвящена вопросам, естественно примыкающим либо к теории измерения, либо к практике преподавания.

Задачи и темы

8. Евклидова метрика на окружности с выключенной точкой. Рассмотрим окружность S с выделенной на ней точкой O и введем на окружности новое мероопределение следующим образом. «Длину» дуги AB (где ни точка A, ни точка B не должны совпадать с «отмеченной» точкой O) мы определим дескриптивно требованиями 1—4 из § 2; только здесь «конгруэнтность» дуг AB и CD понимается довольно своеобразно: дуга AB «конгруэнтна» дуге CD в том и лишь в том случае, если из того, что окружности S и $[OMN]$ (т. е. окружность, проходящая через три точки O, M и N; если O, M, N лежат на одной прямой, то под

[1] Строго говоря, в выборе первого члена последовательности (23) содержится некоторый произвол, поскольку мы требуем только, чтобы отрезок $\frac{e}{2^m}$ был меньше, чем a. Однако и этот выбор можно сделать однозначным, если условиться брать для m наименьшее возможное значение, т. е. начинать откладывание с наиболее крупного отрезка, содержащегося в ряду (20) и не превосходящего a. Впрочем, отказ от этого условия не повлиял бы на результат, так как предел бесконечной последовательности, как известно, не изменится, если отбросить несколько первых ее членов.

«окружностью $[OMN]$» мы будем понимать эту прямую) касаются в точке O и окружности $[OAM]$ и $[OBN]$ касаются в точке O, следует, что и окружности $[OCM]$ и $[ODN]$ касаются в точке O (рис. 8). Предлагается показать, что окружность с такой «метрикой» может быть отображена на прямую так, что равным дугам окружности будут отвечать равные отрезки прямой (при этом точка O окружности, естественно, не будет отвечать н и к а к о й точке прямой) и что «длина» дуги AB окружности S с точностью до постоянного множителя выражается формулой

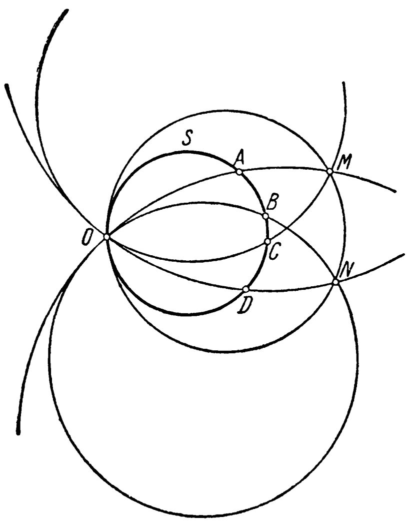


Рис. 8.

$$\text{«длина» } AB = \frac{AB}{OA \cdot OB}.$$

(См., например, И. М. Я г л о м, Геометрические преобразования, II, М., Гостехиздат, 1956, стр. 347—348).

9. М е т р и к а Л о б а ч е в с к о г о н а о т к р ы т о м о т р е з к е. Рассмотрим отрезок PQ, концы которого P и Q будем считать исключенными из рассмотрения («открытый отрезок»). Задача будет состоять в том, чтобы каждому отрезку, лежащему внутри PQ, приписать «новую длину» (именно ту, какую он имел бы на такой модели геометрии Лобачевского, где отрезок PQ изображает бесконечную прямую). «Новой» эта длина будет в том смысле, что хотя мы сохраним полностью дескриптивное определение § 2 (стр. 25), однако существенно изменим понятие конгруэнтности.

Именно, имея два отрезка AB и $A'B'$, лежащих внутри PQ, построим две пары кругов (на рис. 9 изображены полукруги):

круги I на диаметрах AA' и BB',

круги II на диаметрах AB' и BA'.

Условимся считать отрезки AB и $A'B'$ «конгруэнтными» (в новом смысле) в двух и только в двух случаях: если относительно кругов I или же относительно кругов II степени точки P пропорциональны соответствующим степеням точки Q (см., например, Ж. А д а м а р, Элементарная геометрия, ч. 1, кн. 3, гл. IV, п. 133) Предлагается показать, что $AB \equiv BA$ ($\equiv$ — знак новой «конгруэнтности») и что так определенная «конгруэнтность» обладает свойствами симметричности (из $AB \equiv A'B'$ следует $A'B \equiv AB$) и транзитивности (из $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$ следует $AB \equiv A''B''$); что с точностью до постоянного множителя

$$\text{«дл. } AB\text{»} = \left| \log \frac{PA \cdot QB}{PB \cdot QA} \right|.$$

(См., например, В. Ф. Каган, Лобачевский, М., изд. АН СССР, 1944, стр. 309—310.)

10. Логарифмическая мера длины. Предлагается продумать вопрос о «длине» отрезка, определяемой дескриптивно требованиями, подобными сформулированным в § 2, с той разницей,

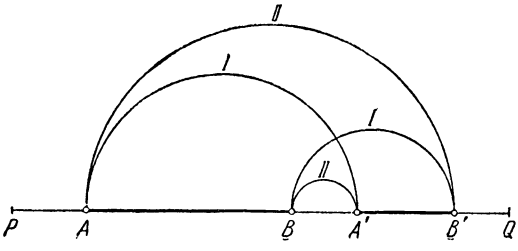


Рис. 9.

что требование аддитивности (3) заменяется «требованием мультипликативности» (3_1): *если отрезок* a *равен сумме двух отрезков* b *и* c (т. е. $a=b+c$), *то* дл. $a=$дл. $b\cdot$ дл. c. В этом случае уже нельзя настаивать на выполнении требования 1; надо ли чем нибудь заменить это требование? Как можно сформулировать при такой постановке вопроса требование 4; какую неопределенность в определении длин отрезков мы получим, если вовсе откажемся от требования типа требования 4 из § 2?

§ 4. ЧИСЛОВАЯ ПОЛУОСЬ

Согласно построению, описанному в предыдущем параграфе, каждому отрезку ставится в соответствие некоторое определенное (после того, как выбран эталон длины) положительное вещественное число — длина этого отрезка.

Рис. 10.

Можно спросить себя: используется ли при этом весь запас вещественных положительных чисел или, может быть, найдутся такие числа этого рода, которые не выражают длины никакого отрезка? Чтобы сделать картину более наглядной, прибегнем к геометрической модели, которая будет полезна и в дальнейшем.

Вообразим бесконечную полупрямую (луч) OM, от начала которой будем откладывать всевозможные отрезки (рис 10). Тогда каждая точка A луча OM получит определенную «абсциссу» — длину отрезка OA; будут ли в качестве абсцисс использованы все без исключения вещественные положительные числа? Чтобы понять, что на этот вопрос при иных обстоятельствах должен быть дан отрицательный ответ, представим себе, например, что мы откладываем на луче OM только отрезки OA, соизмеримые с эталоном. В состав этих отрезков не попадет, например, диагональ квадрата, построенного на эталоне длины, и число $\sqrt{2}$ в качестве абсциссы не появится. Точно так же не все вещественные положительные числа понадобятся, если будем откладывать только такие отрезки OA, которые могут быть получены из эталона построениями с помощью циркуля и линейки; не появится, например, в качестве абсциссы число $\sqrt[3]{2}$ (см. А. Адлер, Теория геометрических построений, Л., Учпедгиз, 1940, стр. 167). Но если не налагать на отрезки OA никаких ограничений, то таких пропусков не будет. Точнее говоря, мы утверждаем: после того как эталон выбран, *для каждого вещественного положительного числа найдется такой отрезок, который имеет это число своей длиной*. Чтобы обосновать это, понадобится привлечь еще одну геометрическую аксиому.

Аксиома Г. Кантора («о стягивающихся отрезках»): *если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков*

$$A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots,$$

«вложенных друг в друга», т. е. таких, что каждый отрезок составляет часть предыдущего, то существует по крайней мере одна точка, общая всем этим отрезкам.

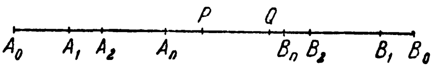


Рис. 11.

Постараемся уяснить себе более наглядным образом содержание этой аксиомы (рис. 11). Бесконечный ряд A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... состоит из точек, идущих в порядке номеров слева направо (среди этих точек могут быть и совпадающие), однако не сколь угодно далеко, так как все они остаются левее любой из точек B. Точно так же точки B_0, B_1, B_2, ..., B_n,... (среди них могут быть и совпадающие) идут в противоположном направлении, т. е.

справа налево, оставаясь при этом правее любой из точек A. При этих условиях имеются две возможности: либо 1) между двумя идущими навстречу друг другу рядами точек A и B существует «пробка» в виде некоторого отрезка PQ, внутрь которого не заходят ни точки A, ни точки B; тогда любая внутренняя точка этого отрезка принадлежит любому из отрезков A_0B_0, $A_1B_1, \ldots$, $A_nB_n, \ldots$ в согласии с утверждением аксиомы (этот случай изображен на рис. 11); либо 2) точки A неограниченно приближаются слева к некоторой точке R (не изображенной на рисунке), а точки B неограниченно приближаются к *той же* точке R справа. Тогда точка R служит рубежом между точками A и B; любая точка A лежит левее (более точно — не правее) R, любая точка B лежит правее (не левее) R; следовательно, R является общей точкой (единственной!) для всех отрезков A_nB_n. Если бы отрезок A_0B_0 был «дырявым», т. е. если бы в нем не хватало одной или многих точек, то уже нельзя было бы поручиться за существование точки, о которой говорится в аксиоме Кантора.

Пусть теперь дано произвольное вещественное положительное число α; покажем, как построить отрезок, длина которого (при данном эталоне длины) выражается *именно этим* числом α. Каким бы малым ни было число α, всегда можно за счет показателя m (натуральное число) добиться того, чтобы было $\frac{1}{2^m}<\alpha$. В таком случае мы можем приближенно (а иногда точно) представить α «по недостатку» и «по избытку» с точностью до $\frac{1}{2^m}$, т. е. найти такое натуральное число α_0, что

$$\frac{\alpha_0}{2^m} \leqslant \alpha < \frac{\alpha_0+1}{2^m}$$

(знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда α равно дроби с знаменателем 2^m; например, для $\alpha=3\frac{21}{32}$ напишем $\frac{117}{32} \leqslant \alpha < \frac{118}{32}$). Совершенно так же найдем α_1, α_2, ... такие, что

$$\frac{\alpha_1}{2^{m+1}} \leqslant \alpha < \frac{\alpha_1+1}{2^{m+1}},$$

. . . .

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \alpha < \frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}},$$

. . . .

Отсюда следует, что

$$\alpha = \lim_{k \to \infty} \frac{\alpha_k}{2^{m+k}}, \tag{25}$$

так как

$$0 \leqslant \alpha - \frac{\alpha_k}{2^{m+k}} < \frac{1}{2^{m+k}} \to 0 \qquad (\text{при } k \to \infty).$$

Имея теперь в своем распоряжении последовательность чисел α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$, начнем строить искомый отрезок.

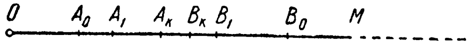


Рис. 12.

На луче OM от точки O (рис. 12) будем откладывать отрезки

$$OA_0 = \alpha_0 \cdot \frac{e}{2^m}, \quad OA_1 = \alpha_1 \cdot \frac{e}{2^{m+1}}, \ \ldots$$

$$\ldots, \ OA_k = \alpha_k \cdot \frac{e}{2^{m+k}}, \ \ldots \tag{26}$$

С другой стороны, построим на том же луче OM отрезки

$$OB_0 = (\alpha_0 + 1) \cdot \frac{e}{2^m}, \ OB_1 = (\alpha_1 + 1) \cdot \frac{e}{2^{m+1}}, \ \ldots$$

$$\ldots, \ OB_k = (\alpha_k + 1) \cdot \frac{e}{2^{m+k}}, \ \ldots \tag{27}$$

Все эти отрезки соизмеримы с масштабным, а потому последовательностям отрезков (26) и (27) соответствуют числовые последовательности их длин (см. (18)):

$$\frac{\alpha_0}{2^m}, \ \frac{\alpha_1}{2^{m+1}}, \ \ldots, \ \frac{\alpha_k}{2^{m+k}}, \ \ldots; \tag{26'}$$

$$\frac{\alpha_0 + 1}{2^m}, \ \frac{\alpha_1 + 1}{2^{m+1}}, \ \ldots, \ \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}}, \ \ldots \tag{27'}$$

Но числа (26′), будучи последовательными приближениями к α по недостатку с увеличивающейся степенью точности, монотонно возрастают (не убывают), а числа (27′) монотонно убывают (не возрастают), причем каждое из чисел (26′) меньше каждого из чисел (27′). А так как меньшей длине должен соответствовать меньший отрезок (обращение (19), легко доказываемое от противного), то можем утверждать, что отрезки (26) возрастают (не убывают), а отрезки (27) убывают (не возрастают), причем каждый из отрезков (26) меньше каждого из отрезков (27). Если перейти к точкам — концам отрезков, то это означает, что каждая точка A_{i+1} лежит правее (не левее) точки A_i, каждая точка B_{i+1} лежит левее (не правее) точки B_i, а любая точка A_j лежит левее любой точки B_k.

Другими словами, отрезки A_0B_0, A_1B_1, ..., A_kB_k,... удовлетворяют условиям аксиомы Кантора. Отсюда заключаем, что найдется точка R, принадлежащая всем этим отрезкам. Такая точка должна быть единственной, так как при наличии второй точки R', обладающей тем же свойством, весь отрезок RR' принадлежал бы всем отрезкам A_kB_k, и мы имели бы

$$\text{дл.}\, RR' \leqslant \text{дл.}\, A_kB_k = \text{дл.}\, OB_k - \text{дл.}\, OA_k =$$
$$= \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}} - \frac{\alpha_k}{2^{m+k}} = \frac{1}{2^{m+k}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

в то время как при $k \to \infty$ число $\frac{1}{2^{m+k}}$ стремится к нулю и, значит, может быть сделано меньше, чем дл.RR'. Итак, отрезок OR определился однозначно; что можно сказать о его длине? Так как по построению

$$OA_k \leqslant OR < OB_k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то

$$\text{дл.}\, OA_k \leqslant \text{дл.}\, OR < \text{дл.}\, OB_k,$$

т. е.

$$\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leqslant \text{дл.}\, OR < \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}}.$$

Но (см. (25)) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\alpha_k}{2^{m+k}} = \lim\limits_{k \to \infty} \frac{\alpha_k + 1}{2^{m+k}} = \alpha$; следовательно,

$$\text{дл.}\, OR = \alpha,$$

чем доказательство завершено.

Теперь можно сказать, что установленное в § 3 отображение совокупности всех отрезков на совокупность всех вещественных положительных чисел есть не только однозначное, но и взаимно однозначное: каждому отрезку отвечает в качестве образа определенное число (длина этого отрезка), а каждому числу — в качестве прообраза определенный отрезок [1]). Это отображение является, как уже отмечалось, «изоморфным» в том смысле, что бо́льшему отрезку отвечает бо́льшая длина (и обратно), сумме отрезков — сумма их длин (и обратно) и т. д. Мы можем теперь не бояться постоянно происходящей в речи и в символике подмены отрезков их длинами и во многих случаях отказаться от применявшегося ранее различения с помощью двух шрифтов.

Одновременно появляется возможность снабдить все точки «числового луча» OM числовыми характеристиками — абсциссами, и притом так, что на этом луче изображаются точками все без исключения вещественные положительные числа. Достаточно сделать еще один легкий шаг: дополнить луч OM противоположным ему лучом OM', приписать точке O абсциссу нуль, а каждой точке A' луча OM' абсциссу $(-\alpha)$, где α есть абсцисса точки A, симметричной с A' относительно O,— и тогда мы получим на полной «числовой прямой» $M'M$ изображение точками всех вещественных чисел, включая отрицательные и нуль. Этим создан первостепенной важности мост между миром чисел и миром геометрических фигур — вспомним графики функций и метод координат в геометрии.

Задачи и темы

11. Аксиома Кантора и аксиома Дедекинда. Предлагается установить эквивалентность аксиомы Кантора следующей аксиоме непрерывности Р. Дедекинда: *для каждого сечения в множестве точек прямой существует рубеж сечения* (сечением мы называем разбиение всех точек на два непустых, т. е. содержащих какие-то точки, класса A и B таких, что каждая точка класса A расположена левее каждой точки класса B — прямую мы здесь мыслим горизонтальной; в аксиоме утверждается существование самой правой точки класса A или самой левой точки класса B). Другими словами, требуется доказать, что если принять аксиому Дедекинда, то утверждение аксиомы Кантора может быть доказано, т. е. это утверждение становится теоремой; обратно, если принять аксиому Кантора, то можно говорить о «теореме непрерывности Дедекинда». Придется ли нам в процессе одного или другого доказательства (вывода утверждения

---

[1]) Полезно обратить внимание на значение двух аксиом: для того чтобы установить отображение в одну сторону — отрезков на числа, достаточно опереться на аксиому Архимеда; в аксиоме же Кантора появляется надобность только тогда, когда мы желаем построить обратное отображение — чисел на отрезки.

Кантора из аксиомы Дедекинда или утверждения Дедекинда из аксиомы Кантора) воспользоваться аксиомой Архимеда?

12. Аксиома Дедекинда и аксиома Архимеда. Выведите из аксиомы Дедекинда (см. предыдущую задачу) утверждение Архимеда.

(По поводу задач **11** и **12** см., например, В. Шванн, Элементарная геометрия, т. I, М., Учпедгиз, 1937, стр. 178—190.)

§ 5. ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ. УМНОЖЕНИЕ ОТРЕЗКА НА ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО. ОДНОРОДНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Тем обстоятельством, что измерение отрезков предполагает произвольный выбор эталона длины, обусловлено существование не одной, а бесчисленного множества «систем измерения». На практике это положение дел общеизвестно: можно измерять в метрах, сантиметрах, дюймах и т. д. Так же хорошо известно, что если получены результаты измерения в одной системе, то для перехода к другой системе нет надобности все заново измерять: достаточно умножить все ранее полученные числа на один и тот же множитель, например, при переходе от метра к сантиметру — на 100. Нам предстоит теперь теоретически обосновать эту зависимость между длинами одного и того же отрезка в двух разных системах измерения. Попутно появится очень важное для геометрии понятие— понятие «отношения двух отрезков».

Пусть в одной системе измерения (с эталоном $\boldsymbol{e}$) отрезкам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,... соответствуют длины α, β, γ,... (обозначенные родственными греческими буквами); в другой системе (с эталоном $\boldsymbol{e}'$)— длины α',β',γ',... Так как в обоих случаях соответствие между отрезками и числами взаимно однозначно, то через посредство отрезков $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,... возникает взаимно однозначное соответствие между числами α, β, γ,..., с одной стороны, и числами α', β', γ',..., с другой. Другими словами, наличие двух систем измерения порождает функцию $f(x)$, определенную на всей числовой полупрямой $0<x<+\infty$, такую, что $\alpha'=f(\alpha)$, $\beta'=f(\beta)$, $\gamma'=f(\gamma)$, ...; в самом деле, если по заданному вещественному положительному числу α мы хотим найти $f(\alpha)$, то достаточно 1) в первой системе измерения определить тот единственный отрезок $\boldsymbol{a}$, длина которого выражается числом α, 2) во второй системе измерения найти длину α' этого отрезка и положить

$$\alpha' = f(\alpha). \tag{28}$$

Установим некоторые свойства этой функции.

а) Функция f монотонно возрастающая. Действительно, если $\alpha > \beta$, то для соответствующих (в первой системе измерения) отрезков a и b имеем (обращение (19), доказываемое от противного) $a > b$. Но в таком случае на основании (19) можем утверждать, что (во второй системе измерения) $\alpha' > \beta'$, т. е. $f(\alpha) > f(\beta)$.

б) Функция f обладает аддитивным (иногда говорят также дистрибутивным) свойством, т. е.

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta).$$

Действительно, если $\alpha + \beta = \gamma$, то для соответствующих (в первой системе измерения) отрезков a, b, c имеем (обращение (16), легко доказываемое от противного) $a + b = c$ [1]. Но теперь, применяя (16) к длинам во второй системе измерения, находим $\alpha' + \beta' = \gamma'$, т. е.

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma) = f(\alpha + \beta).$$

Этими двумя свойствами функция f вполне определяется, как показывает следующее предложение:

Единственная монотонная аддитивная функция есть линейная однородная:

$$f(x) = cx, \qquad c - \text{const}. \tag{29}$$

Доказательство. Прежде всего распространим аддитивное свойство, выражаемое равенством $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, на случай произвольного числа слагаемых совершенно так же (переходом от n к $n+1$), как это было сделано при выводе (16):

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Так как это равенство есть тождество относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то можно положить $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, что

[1] Приводим доказательство: если допустить, что $a + b < c$, то $c = a + b + m$, откуда (см. (16)) $\gamma = \alpha + \beta + \mu$, а так как $\mu > 0$, то $\gamma > \alpha + \beta$ в противоречии с условием. Совершенно так же отвергается допущение $a + b > c$.

дает
$$f(nx)=nf(x) \quad (n \text{ — натуральное число}). \tag{30}$$

Полагая здесь $x=1$ и обозначая постоянное $f(1)$ через c, находим:
$$f(n)=cn, \tag{31}$$

доказывая тем самым справедливость (29) для натуральных (пока) значений аргумента. С другой стороны, полагая в тождестве (30) $x=\frac{1}{n}$, имеем:
$$f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{или} \quad c=nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}. \tag{32}$$

Теперь мы в состоянии установить справедливость (29) для любого положительного рационального значения $\frac{m}{n}$ аргумента. Действительно, в силу (30) и (32)
$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=m\cdot\frac{c}{n}=c\cdot\frac{m}{n}. \tag{33}$$

Для того чтобы сделать последний шаг — распространить (29) на иррациональные значения аргумента,— достаточно заметить, что всякое иррациональное число можно аппроксимировать с помощью двух монотонных последовательностей рациональных приближений по недостатку и по избытку, затем использовать монотонность функции f. Итак, пусть α — положительное иррациональное число, $\frac{\alpha_n}{n}$ и $\frac{\alpha_n+1}{n}$ — его приближения с точностью до $\frac{1}{n}$, так что
$$\frac{\alpha_n}{n}<\alpha<\frac{\alpha_n+1}{n},$$

где n пробегает все целые значения, превышающие $\frac{1}{\alpha}$, α_n — натуральные числа. В силу монотонности (здесь — монотонного возрастания) функции f
$$f\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)<f(\alpha)<f\left(\frac{\alpha_n+1}{n}\right).$$

Но $\frac{\alpha_n}{n}$ и $\frac{\alpha_n+1}{n}$ — положительные рациональные числа, следовательно (см. (33)),

$$c\frac{\alpha_n}{n} < f(\alpha) < c\frac{\alpha_n+1}{n}.$$

А так как при $n \to \infty$ дроби $\frac{\alpha_n}{n}$ и $\frac{\alpha_n+1}{n}$ стремятся к общему пределу α и, следовательно, дроби $c\frac{\alpha_n}{n}$ и $c\,\frac{\alpha_n+1}{n}$ — к общему пределу $c\alpha$, то

$$f(\alpha) = c\alpha.$$

Теперь справедливость (29) доказана для всех положительных значений x. Итак, если α и α' — длины одного и того же отрезка $\boldsymbol{a}$ в двух различных системах измерения (с эталонами соответственно $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$), то (см. (28))

$$\alpha' = c\alpha,$$

причем множитель c является постоянным в том смысле, что он не зависит от выбора отрезка $\boldsymbol{a}$ (а только от эталонов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$). Действительно, $c = f(1)$; значит, c есть число, выражающее во второй системе длину того отрезка, который в первой системе измеряется числом 1, т. е. отрезка $\boldsymbol{e}$. Короче, множитель c есть длина отрезка $\boldsymbol{e}$, измеренного с помощью отрезка $\boldsymbol{e}'$ (например, если $\boldsymbol{e}$ — метр, $\boldsymbol{e}'$ — сантиметр, то $c = 100$) [1]).

Рассмотрим теперь два отрезка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и измеряющие их числа α, β в первой системе (масштаб $\boldsymbol{e}$), α', β' — во второй системе (масштаб $\boldsymbol{e}'$). Так как $\alpha' = c\alpha$ и $\beta' = c\beta$, то числа α', β' пропорциональны числам α, β:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta},$$

---

[1]) После этого нетрудно уяснить себе, в какой связи с обычной системой измерения отрезков стоит «искусственная» система, при которой за длину отрезка AB фиксированной прямой MN принимается площадь треугольника OAB (где точка O фиксирована; ср. попытку 3-ю на стр. 27—28). Все треугольники OAB (см рис. 6) имеют общую высоту (перпендикуляр, опущенный из O на MN); следовательно, площади таких треугольников пропорциональны длинам их оснований. Если последние измерены эталоном $\boldsymbol{e}$, а площади, как обычно, квадратом со стороной $\boldsymbol{e}$, то коэффициент пропорциональности (c) есть $\frac{1}{2}h$, где h — расстояние точки O от прямой MN, измеренное эталоном $\boldsymbol{e}$.

и мы приходим к очень важному выводу: *отношение* (т. е. частное от деления) *длин двух отрезков, измеренных одним и тем же эталоном длины, не зависит от выбора эталона, а является функцией только этих двух отрезков* (разумеется, заданных в определенном порядке, в зависимости от которого мы возьмем либо $\frac{\alpha}{\beta}$, либо $\frac{\beta}{\alpha}$). Остается дать этой функции название и обозначение: *отношением отрезка* $\boldsymbol{a}$ *к отрезку* $\boldsymbol{b}$ (*обозначается символом* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$) *называется частное от деления длины первого отрезка на длину второго в предположении, что оба отрезка измерены одним и тем же* (безразлично каким!) *эталоном длины.* Именно потому, что выбор эталона при этом не играет роли, мы можем, в частности, принять за эталон отрезок $\boldsymbol{b}$; тогда длина его выразится числом 1, дробь $\frac{\text{дл. } \boldsymbol{a}}{\text{дл. } \boldsymbol{b}}$ сведется к дл. $\boldsymbol{a}$, и мы придем к новому определению, которое эквивалентно предыдущему: *отношением двух отрезков называется длина первого из них, когда второй выбран за эталон длины.* Последняя формулировка делает очевидным следующее утверждение: *каковы бы ни были отрезок* $\boldsymbol{b}$ *и вещественное положительное число* λ, *всегда можно подобрать* (и притом однозначно) *отрезок* $\boldsymbol{a}$ *так, чтобы было* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\lambda$. Действительно, вспомним, что в любой системе измерения каждому вещественному положительному числу отвечает единственный отрезок, имеющий это число своей длиной.

Мы можем теперь расширить одну из операций, производимых над отрезками, именно операцию умножения отрезка на число. До сих пор мы имели право говорить только об умножении отрезка на рациональное число (например, $\boldsymbol{a}\cdot 5$, $\boldsymbol{a}\cdot\frac{2}{3}$ и т. п.). Условимся отныне *произведением отрезка* $\boldsymbol{a}$ *на любое вещественное* (положительное) *число* λ *называть такой отрезок* (заведомо существующий и единственный), *отношение которого к* $\boldsymbol{a}$ *равно числу* λ. Обозначая это произведение символом $\boldsymbol{a}\lambda$ или $\lambda\boldsymbol{a}$, имеем по определению

$$\frac{\lambda\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=\lambda.$$

Нетрудно было бы показать (чего мы делать не будем), что так определенная операция умножения обладает свойствами, хорошо известными в случае умножения числа на число:

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b;\ \lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a;\ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

Примечание 1. До сих пор в педагогической среде нет единогласия по вопросу о том, существует ли принципиальное различие между отношением отрезков (вообще — величин одного рода, например масс, площадей и т. п.) и отношением чисел. К сожалению, спор является большей частью беспредметным, запутываясь в словах «принципиальное различие». Несомненно, отношение отрезков нуждается в особом определении. Однако с точки зрения, развитой выше, это определение сводит отношение отрезков к отношению чисел. Такое сведéние, как мы видели, дается нелегко: оно требует всей теории измерения и опирается не только на свойства длины, выраженные в дескриптивном определении, но и на существование (в каждой системе измерения) взаимно-однозначного соответствия между отрезками и числами (напомним, что доказательство использует аксиомы Архимеда и Кантора). Впрочем это не единственный путь. Уже Евклид (в 5-й книге «Начал»), стремясь к полной изоляции геометрии от арифметики, построил теорию отношения отрезков (точнее — пропорциональности отрезков), не нуждающуюся в иррациональных числах. Из новых исследований этого направления упомянем геометрическую теорию пропорций, принадлежащую Д. Гильберту [1]). Так как, однако, ни одно из этих построений не пригодно для школы, то педагогу приходится иметь дело только с отношением отрезков, рассматриваемым как отношение чисел, вследствие чего упомянутый спор теряет актуальность.

Примечание 2. Не следует смешивать доказанное выше существование произведения любого отрезка на любое положительное число с возможностью построить это произведение традиционными инструментами — циркулем и линейкой. Например, все отрезки

$$5a,\ \frac{2}{3}a,\ a\sqrt{2},\ a\sqrt[3]{2},\ \pi a$$

существуют, но из них только первые три могут быть построены циркулем и линейкой.

Закончим этот пункт важным теоретически и практически принципом «однородности геометрических формул». Ограничиваясь пока случаем, когда формула выражает связь между длинами нескольких отрезков (без участия площадей или объемов), мы приведем обычные высказывания по этому поводу, сознательно сохраняя некоторые редакционные неточности, которые будут затем исправлены (эта часть текста выделена ниже кавычками).

«Не всякая алгебраическая формула допускает геометрическое истолкование, в котором буквы означают длины

[1]) Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1948, гл. III.

отрезков. Такое истолкование невозможно, например, для формул

$$a^2+1=c^2,\ 3x^2+y=2xy^3,\ x=\frac{abc}{d},\ x=\sqrt{a+b}, \qquad (34)$$

не удовлетворяющих требованию однородности».

В такой редакции это утверждение неправильно. Первая из формул (34) может, например, появиться в результате применения теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику, в котором один из катетов принят за эталон длины (следовательно, имеет длину, равную 1), а другой катет и гипотенуза в этой системе измерения имеют длинами соответственно a и c. Равным образом второе уравнение (34) дает некоторую кривую (4-го порядка), если x и y означают декартовы координаты точки, т. е. снова длины (отвлекаясь от знаков) отрезков при определенном выборе эталона длины (который ведь составляет неотъемлемую составную часть декартовой системы координат) [1]. Совершенно так же могут быть геометрически истолкованы остальные формулы (34), как имеющие место при специальном выборе эталона. Особые требования к структуре формул появляются лишь в связи с тем, что эталон предполагается никак не специализированным, т. е. остается совершенно произвольным. Однако в элементарной геометрии как раз это положение является обычным. В самом деле, при выводе, например, формулы [2]

$$h=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}, \qquad (35)$$

выражающей высоту треугольника через три его стороны, мы молчаливо предполагаем, что a, b, c, h суть длины, полученные при измерении всех четырех отрезков одним и тем же, но произвольным эталоном длины. Достаточно учесть это обстоятельство для того, чтобы заранее предвидеть такую структуру формулы (35), которая обеспечивает сохранение этой формулы при замене a, b, c, h соответственно λa, λb, λc, λh, где $\lambda>0$ (именно такая

---

[1]) С примерами этого рода хорошо знаком ученик старших классов. Например, он уже встречался с уравнением $y=x^2$ параболы, которое также неоднородно именно в результате определенного выбора эталона.

[2]) См. цитированную книгу Киселева, § 198.

замена происходит, когда от эталона e переходят к эталону $\frac{e}{\lambda}$). И действительно, если (35) имеет место в некоторой системе измерения, то равенство

$$\lambda h = \sqrt{\lambda^2 c^2 - \left(\frac{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 c^2 - \lambda^2 b^2}{2\lambda a}\right)^2}$$

выполняется тождественно относительно $\lambda > 0$ — следствие того, что обе части (35) однородны (1-го измерения). Практическое значение принципа однородности состоит в том, что он позволяет в некоторых случаях сразу обнаруживать ошибочность формулы, не вникая в способ ее вывода. Например, если кто-нибудь утверждает, что он получил формулу $a^2 = b^2 + c^3$, где a, b, c — длины отрезков, измеренные произвольным эталоном, то проверка путем изменения эталона легко обнаруживает ошибку: $\lambda^2 a^2 = \lambda^2 b^2 + \lambda^3 c^3$ или $a^2 = b^2 + \lambda c^3$ — равенство, несовместимое с первоначальным при произвольном положительном $\lambda \neq 1$, например, равенства несовместимы при $\lambda = 2$.

Точная формулировка принципа однородности и обоснование его потребовали бы пространных разъяснений. Ограничимся поэтому частным, но важным случаем, когда длина некоторого отрезка задана как явная функция длин других отрезков (ср. (35)):

$$x = f(a, b, c, \ldots). \tag{36}$$

Начнем с определения понятия однородной функции: функция нескольких аргументов называется *однородной* (измерения k), если присоединение ко всем аргументам произвольного, но одного и того же множителя равносильно умножению функции на некоторую степень (с показателем k) этого множителя [1]):

$$f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots) = \lambda^k f(a, b, c, \ldots) \tag{37}$$

тождественно относительно λ, a, b, c. Например, функции

$$2a^3 - a^2 b + 4b^3, \quad \frac{3a^2 bc^3}{\pi (m-n)}, \quad \frac{a\sqrt{2}}{b^2 + c^2},$$
$$\sqrt{a^4 + b^4}, \quad \sqrt[3]{a^2 + \sqrt[4]{b^8 + a^3 c^5}}$$

[1]) В интересующем нас случае следовало бы говорить о так называемой «положительной однородности», так как множитель λ предполагается положительным.

суть однородные относительно аргументов a, b, c, m, n соответственно измерений 3, 5,—1, 2, $\frac{2}{3}$. Теперь утверждаем:

если в (36) x, a, b, c — *длины отрезков, измеренных произвольным, но одним и тем же эталоном, причем* a, b, c, ...— *независимые переменные, то функция* f — *однородная* 1-*го измерения.*

Доказательство. Пусть в (36) x, a, b, c,...— длины некоторых отрезков, измеренные эталоном e. Перейдем к новому эталону $\frac{e}{\lambda}$, где λ — произвольное положительное число; новые длины прежних отрезков выразятся числами λx, λa, λb, λc,... А так как зависимость между новыми длинами та же, что и между старыми, то

$$\lambda x = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots).$$

Подставляя сюда x из (36), найдем:

$$\lambda f(a, b, c, \ldots) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots),$$

т. е. тождество относительно a, b, c,..., $\lambda > 0$ (вспомним, что a, b, c независимы), выражающее, что f — (положительно-) однородная функция 1-го измерения. Читатель легко проверит доказанное предложение на примере (35) [1].

Задачи и темы

13. Роль длин отрезков в геометрических теоремах. Предыдущее изложение убеждает нас в том, что понятие длины отрезка неразрывно связано с выбором эталона длины и невозможно в отсутствие определенного эталона; в противоположность этому понятие отношения двух отрезков имеет «чисто геометрический» смысл, т. е. не зависит от выбора эталона длины. Отсюда вытекает, что *в теоремах элементарной геометрии может фигурировать понятие отношения отрезков, но не могут фигурировать длины отрезков сами по себе* (если только условие теоремы не предполагает установленным определенный эталон длины); в противоположность этому величина угла в теоремах участвовать может. Проверьте это на ряде теорем школьного курса (примеры — теорема Пифагора для треугольника со сторонами a,b, c может быть запи-

[1]) На практике для подсчета измерений оказываются полезными легко устанавливаемые правила, сходство которых с правилами логарифмирования бросается в глаза: измерение произведения (однородных функций) равно сумме измерений сомножителей, измерение корня равно измерению подкоренного выражения, деленному на показатель корня, и т. п.

сана так: $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$; теорему о равенстве треугольников со сторонами a, b, c, соответственно a_1, b_1, c_1, и углами A, B, C и A_1, B_1, C_1, имеющих равными две стороны и заключенный между ними угол, можно сформулировать так: если $\frac{a}{a_1}=1$, $\frac{b}{b_1}=1$ и $\angle C=\angle C_1$, то $\frac{c}{c_1}=1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$; теорема о свойствах прямоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c и углом в 30° утверждает: если $\angle C=90°$, $\angle A=30°$, то $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$; и т. п.).

(Ср. И. М. Яглом, Геометрические преобразования I, М., Гостехиздат, 1955, стр. 70—72.)

14. О принципе однородности. В учебной и методической литературе можно встретить утверждение: если между длинами a, b, c, ... отрезков, измеренных произвольным, но одним и тем же масштабом, существует зависимость $F(a, b, c, \ldots)=0$, то F — однородная функция. В такой формулировке это утверждение неправильно. Опровергающий пример: равенство длин a и b двух отрезков может быть записано в виде $2^a-2^b=0$; левая часть не есть однородная функция аргументов a и b. Доказать: если упомянутая выше функция F есть полином (целая рациональная функция) относительно a, b, c, ..., то либо F однородна, либо между a, b, c, ... существует несколько зависимостей типа $F_1(a, b, c, \ldots)=0$, $F_2(a, b, c, \ldots)=0, \ldots$, где F_1, F_2, ... — однородные полиномы. Пример: между катетами a, b и гипотенузой c равнобедренного прямоугольника имеет место зависимость $a^2+b^2-c^2+a-b=0$. Так как отсюда получается $c=\sqrt{a^2+b^2+a-b}$, то не находится ли этот результат в противоречии с утверждением, доказанным в конце настоящего параграфа?

15. Замечание, относящееся к теории измерения площадей многоугольников. Основное содержание этого параграфа заключается в доказательстве того, что *первые три требования* § 2 *определяют длину отрезка с точностью до постоянного множителя*. Подобное обстоятельство имеет место и для площадей многоугольников: *требования положительности, инвариантности* («равные многоугольники имеют равные площади») и *аддитивности* («если многоугольник M разбит ломаной, соединяющей две разные точки его границы, на два многоугольника M_1 и M_2, то пл. $M=$ пл. M_1+пл. M_2») *определяют площадь многоугольника с точностью до множителя* (подробнее об этом см. в книге: А. Лебег, Об измерении величин, М., Учпедгиз, 1960, гл. VI; о дескриптивном описании площади многоугольника говорится в дополнении к настоящей книге). Рассмотрим теперь так называемый «угловой избыток» многоугольника, т. е. разность между суммой углов многоугольника и величиной $180°\cdot(n-2)$ (где n — число углов многоугольника). Ясно, что эта величина удовлетворяет требованию инвариантности; несложно проверить, что она удовлетворяет также и требованию аддитивности. Отсюда можно заключить, что *угловой избыток многоугольника пропорционален площади*. В случае обычной (евклидовой) геометрии это обстоятельство не позволяет измерять площади многоугольников (ибо в этом случае коэффициент пропорциональности оказывается равным нулю); впрочем,

и здесь оно не совсем бесполезно, так как доставляет нам доказательство теоремы о том, что сумма углов любого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$ (напомним, что в школе эта теорема доказывается лишь для выпуклых многоугольников). По-иному обстоит дело, скажем, в сферической геометрии (изучающей свойство фигур, расположенных на поверхности сферы); здесь угловой избыток многоугольника всегда положителен и, следовательно, может быть использован для измерения площадей многоугольников (при соответствующем выборе единицы площади). Так же и в неевклидовой геометрии Лобачевского угловой избыток отличен от нуля, только здесь он отрицателен (т. е. отрицателен коэффициент пропорциональности между площадью и угловым избытком); поэтому в геометрии Лобачевского площадь n-угольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ может быть измерена его «угловым дефектом» $180^\circ \cdot (n-2) - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$.

(См. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 228—235; Б. Н. Делоне, Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1956, стр. 75—80.)

§ 6. ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В практике нашей школы теория измерения отрезков занимает особое положение. С чисто внешней стороны — для ученика, уже привыкшего (о чем, на наш взгляд, следует пожалеть) видеть в геометрии цепь теорем, определений и задач,— этот строй изложения сменяется повествовательным, свойственным в его (ученика) представлении арифметике и алгебре. Еще более радикальным образом меняется содержание изучаемого: геометрия переплетается с алгеброй (иррациональные числа), некоторые рассуждения проводятся не в общем виде (что сделало бы их малодоступными), а на числовых примерах; кое-что принимается без доказательства, еще чаще для ученика остается неясным, доказано ли или принято на веру то или иное утверждение. Подлинным источником трудностей при этом является невозможность обойтись без иррациональных чисел, теория которых излагается в школе с существенными пробелами, а иногда и несогласованно во времени. При таком положении дел не только ученик, но часто и учитель стремится поскорее миновать этот раздел.

С этим трудно мириться по двум мотивам: 1) теория измерения гораздо богаче идейным содержанием (достаточно назвать факт существования несоизмеримых отрезков), чем многие тщательно изучаемые частности; 2) в дальнейшем ученику предстоит усвоить ряд других вопросов метрической геометрии (площади, объемы), для которых измерение отрезков служит фундаментом.

С точки зрения узких интересов преподавания геометрии (а не математики в целом) можно было бы в вопросе об измерении отрезков ограничиться минимумом формальных определений и принимаемых без доказательства теорем, перекладывая все трудности на алгебру. Так именно поступает Ж. Адамар, в энциклопедическом трактате которого об измерении отрезков говорится совершенно поверхностно в нескольких строках [1]). Гораздо ближе к интересам школьного преподавания другой выдающийся французский математик А. Лебег [2]), настаивающий на том, чтобы измерение величин, и прежде всего отрезков, было положено в основу изучения не только иррациональных, но даже рациональных чисел. Отвлекаясь от частностей лебеговой системы, можно думать, что это и есть ближайшая ступень прогресса в школьном преподавании. Преподаватель должен на некоторое время отказаться от раздельных уроков алгебры и геометрии. Наряду с традиционной невозможностью извлечения квадратного корня из любого рационального числа, измерение отрезков становится еще одним стимулом для расширения области рациональных чисел. Так как в обоих случаях начинают с десятичных приближений, то естественно, что иррациональное число появляется как бесконечная непериодическая десятичная дробь. На такую именно позицию становятся, примыкая к Лебегу, наши новые, хотя и не вошедшие еще в обиход учебники, в частности упоминавшиеся выше статья П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [3]) и учебник Н. А. Глаголева (ч. I, §§ 160—161) [4]), а также книга С. И. Новоселова «Алгебра» (М., Учпедгиз, 1947, см. гл. IV—V).

Сопоставим эту систему с господствующей у нас (А. П. Киселев, Геометрия, ч. I, §§ 144—150 и § 155). Начинают с понятия об общей мере двух отрезков, пользуясь для нахождения общей наибольшей меры алгориф-

[1]) См. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, М., Учпедгиз, ч. I, 1936, стр. 21—22.

[2]) См. упоминавшуюся выше книгу Лебега «Об измерении величин», гл. II и VI.

[3]) Фрагмент из (до сих пор, к сожалению, не законченной) второй части учебника алгебры П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова.

[4]) В учебнике Н. А. Глаголева бесконечным десятичным дробям, появляющимся в связи с измерением отрезков, предполагалось посвятить особое дополнение в конце книги, как видно из сноски на стр. 138; это, однако, не осуществлено.

мом Евклида (последовательное откладывание). Как ни почтенен этот алгорифм (образовательная ценность которого, впрочем, сильно снижается из-за того, что в арифметике теперь не знакомят с нахождением общего наибольшего делителя способом последовательного деления), нет никаких оснований отягчать им и без того сложный раздел курса. Могут сказать, что без алгорифма Евклида трудно было бы доказать существование несоизмеримых отрезков, чем действительно ни в коем случае не следует жертвовать. Но эта трудность — мнимая: у П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова или С. И. Новоселова несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной превосходно доказывается на совершенно ином пути. То обстоятельство, что при этом выясняется связь рассматриваемого случая несоизмеримости с несуществованием (в области рациональных чисел) корня квадратного из 2, является для педагога чистым выигрышем. Ригористы будут недовольны по поводу использования в этом доказательстве понятия площади (квадрата); они даже попытаются сделать свое возражение принципиальным, указывая на неправомерность ссылки на формулу $S=a^2$ для площади квадрата, в то время как a может быть иррациональным. Однако достаточно было бы внимательно проследить за доказательством (от противного!), чтобы убедиться, что речь идет там только о площадях квадратов с целочисленными сторонами, а это известно ученику из начальной школы, и притом с обоснованием, к которому впоследствии ничего не будет прибавлено [1]). А вот по

[1]) Можно было бы даже вовсе не говорить о площадях. Сравнивая (рис. 13) квадрат I, построенный на диагонали (d), с удвоенным

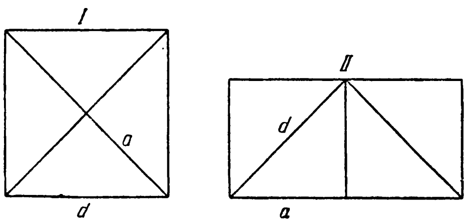


Рис. 13.

квадратом II, построенным на стороне (a), убеждаемся, что обе фигуры состоят из одинаковых частей (четырех равных треугольников). Если бы a и d были соизмеримы, например, если бы (как показыповоду «классического» доказательства, связанного с алгорифмом Евклида, можно утверждать, что для подавляющего большинства учеников оно остается недоступным, будучи воспринятым только формально. Пусть даже ученик усвоил, что процесс последовательного откладывания здесь продолжается без конца. Он склонен на этом остановиться и считать несоизмеримость доказанной на том основании, что в случае конечности процесса отрезки соизмеримы. Это серьезная логическая ошибка: подмена прямого предложения «из конечности процесса вытекает соизмеримость» противоположным ему «из бесконечности процесса вытекает несоизмеримость» (как известно, из прямой теоремы противоположная не следует). Правда в современных изданиях учебника Киселева это противоположное предложение доказывается (конец § 147), но доказательство довольно деликатно (поэтому проводится в основном на числовом примере), а главное — средний ученик не понимает его необходимости [1]). И как можно ожидать иного, если на протяжении многих лет применения старых изданий учебника отмеченный выше логический пробел оставался незаполненным, и тысячи учителей, а за ними десятки тысяч учеников этого не замечали? Еще раз спросим: во имя чего навязывают неокрепшему уму в трудный момент обучения логические тонкости, таящие в себе явную опасность чисто внешнего, формального их усвоения? Ведь вслед за этим идет (§ 150) описание

вает грубое измерение) было $d=\frac{7}{5}a$, то квадрат I можно было бы разбить на 49 ($=7\times7$) малых квадратиков со стороной $\frac{1}{5}a$, а прямоугольник II на 50($=2\times5\times5$) таких же квадратиков. Получается, что 49-ю квадратиками (разрезая их при надобности на части) можно покрыть 50 таких же квадратиков,— приходим к противоречию (невозможность такого покрытия составляет содержание уже упоминавшегося в сноске на стр. 28 «принципа де Цольта»). Не представляет труда провести это рассуждение в общем виде ($\frac{m}{n}$ вместо $\frac{7}{5}$, m^2 и $2n^2$ вместо 49 и 50).

[1]) Не можем отказать себе в удовольствии привести в связи с этим слова Лебега, сказанные им по аналогичному поводу: «Тут мы имеем дело с настоящим лицемерием, столь обычным в преподавании математики: учитель словесно принимает все нужные предосторожности, действительные, если они имеют смысл, который он им придает, но который несомненно не будет понят учениками».

десятичного измерения отрезка, нисколько не нуждающееся в понятии общей меры.

Закончим это сопоставление двух методов измерения, обращая внимание на арифметическую природу того и другого алгорифма. Если записывать результаты последовательных откладываний, составляющих алгорифм Евклида, то придем к так называемой непрерывной (или цепной) дроби, вообще говоря бесконечной. Например, измеряя диагональ квадрата его стороной, получим дробь ($=\sqrt{2}$) [1])

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}$$

В этом же случае десятичное измерение дало бы разложение $\sqrt{2}$ в десятичную (бесконечную непериодическую) дробь

$$1{,}414214\ldots$$

По своей арифметической структуре второй результат не только является более привычным для ученика, но имеет еще то преимущество, что непосредственно дает рациональные приближения с точностью до 1, до $\frac{1}{10}$, до $\frac{1}{100}$, ..., в то время как в случае непрерывной дроби вычисление рациональных приближений и оценка их степени точности требуют значительных усилий. Добавим к этому, что описанный у нас в § 3 способ измерения несущественно отличается от десятичного: вместо десятичной дроби получается «двоичная», т. е. представление числа в виде

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\ldots,$$

где a_0 — натуральное число или нуль, a_1, a_2, a_3,... могут принимать только значения 0 и 1 (единственные две цифры системы счисления с основанием 2). Так, например, при разложении длины диагонали, т. е. числа $\sqrt{2}$, в двоичную

[1]) То, что в данном случае непрерывная дробь оказывается периодической, есть обстоятельство случайное, обусловленное квадратичным характером иррациональности $\sqrt{2}$. При разложении числа $\sqrt[3]{2}$ (задача удвоения куба) получилась бы непрерывная дробь также бесконечная, но непериодическая.

дробь получается 1, 01101001... В теоретическом отношении двоичное измерение представляет известные, хотя и незначительные, преимущества перед десятичным, и не только тем, что 2 меньше 10 [1]).

Изложенная у нас в § 2—5 теория измерения отрезков, конечно, предназначена для учителя. Ученику она недоступна не только потому, что предполагает предварительное знакомство с иррациональными числами и пределами числовых последовательностей, но главным образом вследствие сложности своей логической структуры, которая будет воспринята учеником как навязанный педантизм. Тем не менее многие существенные элементы этой теории могут быть отражены в преподавании, которое представляется нам осуществимым по следующей схеме (заголовки выделены курсивом, остальное — пояснительный текст).

а) *Дескриптивное определение* [2]) *длины отрезка*; *постановка задачи измерения* [3]). *Случай соизмеримости с эталоном длины. Существование несоизмеримых отрезков* (диагональ и сторона квадрата — доказательство с помощью площадей).

У нас уже вошли в обиход дескриптивные определения площади и объема (А. П. Киселев, Геометрия, ч. I, § 243, и ч. II, § 82). Правда, изложение здесь большей частью таково, что свойства площади (объема) трактуются не как определяющие, а как присущие этим понятиям, для которых даются иллюзорные, совершенно бессодержательные определения вроде «площадью фигуры называется величина части плоскости...». Между тем концепция дескриптивного опреде-

[1]) Мы имеем в виду необходимую для нашей теории геометрическую операцию деления эталона длины на равные части, дающую доказательство существования $\frac{1}{n}$ этого отрезка. В то время как деление отрезка пополам не зависит от постулата о параллельности, следовательно, протекает одинаково в геометриях Евклида и Лобачевского, нельзя этого сказать о делении на 10 равных частей, по крайней мере, если речь идет о хорошо известном построении посредством параллельных прямых (см. сноску на стр. 32).

[2]) Термины «дескриптивный», «конструктивный» мы не решаемся рекомендовать для школьной практики. Их можно заменить переводом буквальным («описательный», «построительный») или же свободным («неявный», «явный»).

[3]) В интересах школьного преподавания требование аддитивности (§ 2) может быть усилено; *длина суммы* (не только двух, но) *любого числа слагаемых отрезков должна быть равна сумме их длин.*

ления, как содержащего формулировку некоторой з а д а ч и («установить такое соответствие..., чтобы выполнялись требования...»), вполне доступна пониманию ученика, сто́ит только фиксировать его внимание на дескриптивном характере уже знакомых определений. Более того, ученику знако́м и метод перехода от дескриптивного определения к конструктивному, как о том подробно говорилось выше, в § 2. Во многих случаях достаточно только слегка изменить принятое изложение для того, чтобы идея дескриптивного определения выступила с полной отчетливостью. Например, главу о параллельных прямых можно начать с постановки вопроса: на плоскости даны прямая и точка вне ее; можно ли через эту точку провести прямую, не пересекающую данной прямой? Здесь уже содержится дескриптивное определение параллельности. На вопрос о существовании искомой прямой ответ дается известным построением (перпендикуляр к перпендикуляру), а единственность решения утверждается постулатом о параллельности. Мы не закрываем глаза на необходимость преодолеть некоторый барьер в сознании ученика: в известных ему случаях дескриптивно определяется число или фигура, здесь же речь идет об определении «соответствия» или «системы измерения», т. е. о понятиях значительно более абстрактных. Другая трудность состоит в том, что в задачах измерения (длина, площадь, объем) мы не имеем возможности исчерпывающим образом установить эквивалентность дескриптивного определения с последующим конструктивным. Но раз признается желательным строить на дескриптивном определении теорию площадей и объемов, то не следует ли начинать с простейшего случая — измерения отрезков? Если этого не делают, то, вероятно, потому, что недооценивается о б р а з о в а т е л ь н о е з н а ч е н и е самой идеи дескриптивного определения, которое одновременно служит инструментом исследования (см. ниже, § 7) и преддверием к пониманию аксиоматического метода. Между тем этот метод является блестящим достижением современной математики, а ведь школа не может уклоняться от обязанности приобщить учеников к методологии науки нашего времени. Не много можно назвать случаев, где так явно сказывались бы схоластичность и устарелость преподавания математики, как в распространенных убеждениях, будто и в этой науке все определения построены по древнему принципу «per genus proximam et differentiam specificam» [1]).

б) *Десятичное измерение отрезка; аксиома Архимеда. Бесконечная десятичная дробь как результат измерения. Если существует длина отрезка, то она должна заключаться между любым десятичным приближением по недостатку и любым таким же приближением по избытку.*

в) *Иррациональное число* (сначала положительное) *как бесконечная десятичная непериодическая дробь. Вещественные числа положительные и отрицательные. Неравенства между вещественными числами. Четыре действия над вещественными числами.*

г) *Конструктивное определение длины отрезка. Проверка выполнения требований дескриптивного определения. Аксиома Кантора; взаимная однозначность соответствия между отрезками и вещественными положительными числами. Числовая прямая.*

При проверке аддитивного свойства длины (требование 3) следует отказаться от полного доказательства, ограничиваясь случаем, когда оба слагаемых отрезка выражаются рациональными (или даже целыми) числами; ведь и при изучении иррациональных чисел существование суммы обычно принимается без доказательства (см. у П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова § 21, мелкий шрифт).

Отметим здесь одну черту различия между научным и школьным изложением. Дело в том, что уже требование 1 дескриптивного определения, как оно формулировано в § 2, содержит некоторую (намеренную) недоговоренность, заключающуюся в слове «число». В научной теории надо было бы сразу сказать, что речь идет о вещественном числе. Именно в этой постановке задача оказывается имеющей решение, и притом единственное. Иное положение складывается при осуществлении предлагаемой здесь схемы преподавания. В момент постановки задачи мы не располагаем никакими другими числами, кроме рациональных, следовательно, требование 1 можно понимать только в том смысле, что мы желаем каждому отрезку поставить в соответствие р а ц и о н а л ь н о е число. Однако в ходе

[1]) «Через ближайший род и видовое отличие». См., например, статью: В. К. М а т ы ш у к, Определения в преподавании математики, журнал «Математика в школе», № 3, 1947. На стр. 17 этой статьи сказано: «Только эти определения и имеют место при научном изложении математики».

решения задачи выясняется неосуществимость этого требования (наличие несоизмеримых отрезков). Это служит поводом к расширению понятия о числе, в результате чего появляется совокупность вещественных (сначала положительных) чисел. Теперь мы возвращаемся к нашей задаче, и в новой постановке она оказывается разрешимой. Таким образом, в процессе решения изменяется самое содержание задачи. Этим, конечно, нарушается логическая стройность конструкции, но педагогические преимущества такой системы очевидны: ученик ощущает те мотивы, которые приводят к расширению области рациональных чисел, и даже видит естественный способ этого расширения.

д) *Отношение отрезков как отношение чисел. Независимость отношения длин от выбора эталона* (частичное доказательство — для случая, когда эталон длины уменьшается или увеличивается в целое число раз). *Умножение отрезка на вещественное положительное число. Понятие о принципе однородности* (ограничиваясь примерами формул, сохраняющихся или нарушающихся при умножении длин всех отрезков на один и тот же произвольный множитель).

Появление принципа однородности на данном этапе преподавания вполне естественно, но с педагогической точки зрения оно получит оправдание только при условии, что этот принцип будет в дальнейшем систематически применяться как при изучении теории (пропорциональные отрезки; в особенности — метрические соотношения между элементами треугольника), так и при решении задач (обнаружение неправильности формул по их внешнему виду). Тенденция отодвинуть во времени знакомство с принципом однородности, по-видимому, связана с желанием обосновать его требованием инвариантности формул относительно преобразования подобия (см. цитированный выше учебник Н. А. Глаголева, ч. I, § 246). Такое обоснование не кажется нам уместным, так как оно оставляет в тени подлинный источник однородности — инвариантность относительно изменений масштаба. Отсюда может возникнуть неправильное представление, будто в других геометриях постоянной кривизны (например, в геометрии Лобачевского), где нет подобных фигур, принцип однородности не имеет места [1]).

[1]) На самом деле в формулах этих геометрий там, где эталон длины не специализирован, участвует, как правило, длина некоторо-

16. Пример несоизмеримости. Показать, что в прямоугольном треугольнике с углом в 30° катеты несоизмеримы. Предлагается следующий план доказательства, аналогичный рекомендованному в этом параграфе (см. также сноску на стр. 61—62) для установления несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Пусть в треугольнике ABC угол A — прямой, угол C равен 30°. Дополняем треугольник ABC до прямоугольника $ABDC$, к которому прикладываем еще два таких же прямоугольника. Получаем пря-

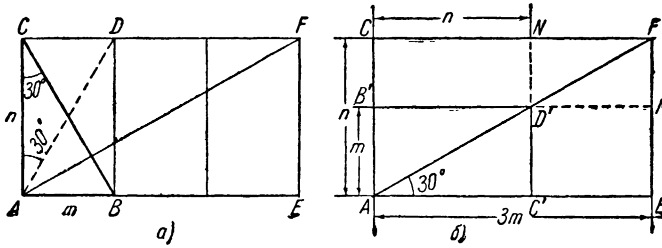


Рис. 14.

моугольник $AEFC$ (рис. 14, *а*); доказываем, что угол EAF равен 30°. Накладываем $ABDC$ на $AEFC$ так, как показано на рис. 14, *б*, где новые положения вершин B, C, D обозначены соответственно через B', C', D' (вместе с пунктирными отрезками $D'M$ и $D'N$ фигура, изображенная на рис. 14, *б*, была известна греческим геометрам под названием «гномон»). Доказываем, что прямоугольник $AEMB'$ равновелик квадрату $AC'NC$. Далее проводим доказательство от противного. Допустим, что катеты треугольника ABC соизмеримы, и пусть общая мера укладывается в меньшем катете m раз, в большем n раз. Тогда в двух сторонах прямоугольника $AEMB'$ эта общая мера укладывается соответственно m и $3m$ раз, а в стороне квадрата $AC'NC$ — n раз. В силу отмеченной равновеликости получаем (пользуясь только формулой для площади прямоугольника с целочисленными сторонами) $3m^2=n^2$, $\left(\frac{n}{m}\right)^2=3$, что невозможно.

17. Замечания к традиционному доказательству несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Предлагается установить, что если число разлагается в периодическую непрерывную дробь, то оно представляет собой квадратичную иррациональность (несколько более сложно доказывается обратное утверждение: всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую непрерывную дробь, но и это утверждение также справедливо). Таким образом, традицион-

го постоянного отрезка (параметра), подвергающаяся при изменении эталона тому же преобразованию, что и длины остальных отрезков; с учетом этого обстоятельства формулы, конечно, и здесь должны удовлетворять требованию однородности.

ное доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, базирующееся на том, что алгорифм Евклида в этом случае приводит к бесконечному процессу, поскольку в нем приходится неограниченное число раз повторять совершенно одинаковые операции, принципиально возможно лишь для отрезков, отношение которых выражается квадратичной иррациональностью,— для отношения ребра куба к ребру куба вдвое меньшего объема, например, оно непригодно (а рассуждение, связанное с отсутствием рационального корня квадратного из числа 2, переносится на этот случай без всяких затруднений).

Докажите, что алгорифм Евклида, примененный для нахождения общей меры основания равнобедренного треугольника с углом при основании в 36° и боковой стороны этого треугольника, приводит к бесконечному процессу и, следовательно, соответствующие два отрезка несоизмеримы. Такое доказательство несоизмеримости будет принципиально самым простым именно для этой задачи (как выглядит непрерывная дробь, в которую разлагается отношение рассматриваемых отрезков?); поэтому, если сохранять традиционное доказательство существования несоизмеримых отрезков, то было бы естественно в качестве иллюстрации рассматривать этот пример, а не случай диагонали и стороны квадрата[1]).

(По поводу этой задачи см. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.—Л., Физматгиз, 1961, стр. 62—65.)

§ 7. ЕЩЕ ОДИН ПРИМЕР ДЕСКРИПТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

На предыдущих страницах не раз подчеркивалось фундаментальное значение идеи дескриптивного определения. При этом у читателя могло сложиться представление, что этой идее принадлежит в математике только «организующая» роль, заключающаяся в упорядочении ранее добытых результатов. Так действительно обстоит дело в теории длины, или площади, или объема. Тем не менее такое представление было бы неправильным. Чтобы рассеять его, мы хотим закончить эту главу примером, показывающим дескриптивное определение «в действии»—уже не как метод оформления знаний, а как инструмент математического исследования. Для этой цели изберем вопрос, который большинством читателей будет воспринят как новая геометрическая задача. Не забывая об иллюстративном назначении этой задачи, мы значительно ограничим ее содержание и, прежде всего, не выйдем из пределов планиметрии.

Плоскую фигуру мы обычно мыслим как некоторое множество точек («точечное множество»), а длину отрезка или площадь многоугольника — как особого рода числовую оценку, меру соответствующего множества. С другой стороны, можно рассматривать плоскость не как совокупность заполняющих ее ∞^2 точек (запись ∞^2 означает, что мы имеем двупараметрическое множество точек — множество точек зависит от двух параметров x, y, указание значений которых определяет точку), а как носительницу всех лежащих на ней прямых (их тоже ∞^2). Чтобы оттенить эту вторую точку

[1]) Именно так и делалось в старых изданиях «Геометрии» А. П. Киселева.

зрения (привычную для проективной геометрии), будем пользоваться термином «линейчатая плоскость» (латинское «linea»; здесь в смысле «прямая»). Подобно тому как плоской (точечной) фигурой называется любое множество точек на плоскости, так плоской *линейчатой фигурой* мы будем называть любое множество прямых, выделенных по какому-нибудь признаку из всех прямых линейчатой плоскости. Элементом такого множества служит именно прямая как целое, и вовсе не обязательно рассматривать эту прямую как совокупность лежащих на ней точек. Две линейчатые фигуры будем называть *конгруэнтными*, если существует взаимно однозначное соответствие между прямыми одной фигуры и прямыми другой и такое движение или отражение, которое приводит

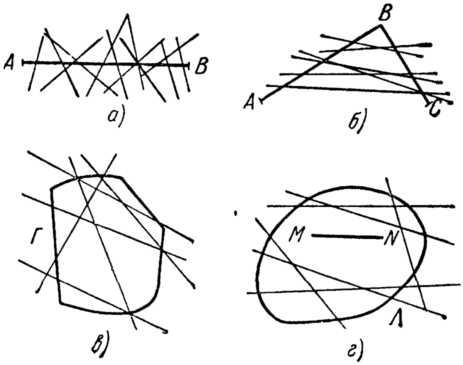


Рис. 15.

все прямые одной фигуры в совпадении с соответствующими им прямыми другой.

В дальнейшем мы сильно ограничим класс рассматриваемых линейчатых фигур. Именно допустим к рассмотрению класс (K) линейчатых фигур, из которых каждая принадлежит к одному из следующих типов: I) совокупность всех прямых, пересекающих контур ограниченной выпуклой области [1]) или же часть этого контура; II) совокупность прямых, общих двум линейчатым фигурам L и L' типа I, которую будем обозначать символом $L\times L'$; III) «сумма» $L+L'$ двух линейчатых фигур, состоящая из всех прямых, принадлежащих либо L, либо L', либо обеим фигурам одновременно; при этом, если у L и L' имеются общие прямые, то каждая из них считается входящей в $L+L'$ два раза (в двух экземплярах) [2]); сумму $L+L'$ будем обозначать также через $2L$ (все прямые — двойные); IV) «разность» $L—L'$ двух фигур L и L' (где L' входит как часть в L),

[1]) Как известно, выпуклой областью называется фигура (точечная), которая содержит целиком всякий отрезок, соединяющий какие-нибудь две ее точки.

[2]) Этим сумма $L+L'$ отличается от так называемой «теоретико-множественной суммы»

составленная из всех прямых, принадлежащих L, но не принадлежащих L' (так что $L=L'+(L-L')$).

Примеры линейчатых фигур класса K:

1) Совокупность всех прямых, пересекающих данный отрезок AB (рис. 15, *а*); будем обозначать эту фигуру через L_{AB}. Можно представлять себе L_{AB} как результат объединения всех пучков, имеющих центры на отрезке AB.

2) Совокупность прямых, пересекающих одновременно оба звена ломаной ABC (рис. 15, *б*); эту фигуру, в согласии со сказанным выше, можно обозначать символом $L_{AB}\times L_{BC}$.

3) Сумма $L_{AB}+L_{BC}$, равная сумме $L_{\triangle ABC}+(L_{AB}\times L_{BC})$, где $L_{\triangle ABC}$ означает совокупность всех прямых, пересекающих треугольник ABC; в эту сумму каждая из прямых фигуры $L_{AB}\times L_{BC}$ входит дважды.

4) Совокупность L_{Γ} всех прямых, пересекающих выпуклый контур Γ (рис. 15, *в*).

5) Совокупность всех прямых, пересекающих выпуклую гладкую замкнутую кривую Λ, но при этом не задевающих отрезок MN, лежащий внутри овала (рис. 15, *г*).

Теперь сформулируем задачу измерения линейчатых фигур класса K, аналогичную той задаче для точечных фигур, которая приводит к понятию площади; эта аналогия, как легко заметит читатель, служит руководящей и при выборе перечисленных ниже требований, входящих в дескриптивное определение.

Каждой линейчатой фигуре (L) класса K надлежит дать числовую оценку, которую будем называть м е р о й этой фигуры (символ «мера L») и от которой потребуем наличия следующих свойств:

Т р е б о в а н и е 1. *Фигура, состоящая из конечного числа или же из ∞^1 прямых, имеет меру* 0 [1]).

Т р е б о в а н и е 2. *Фигура, состоящая из ∞^2 прямых, имеет мерой положительное вещественное число.*

Т р е б о в а н и е 3 (инвариантность). *Конгруэнтные фигуры имеют равные меры.*

Требование 4 (аддитивность). *Мера суммы двух фигур равна сумме их мер.*

Т р е б о в а н и е 5 (выбор «единичной» фигуры, согласованной с измерением отрезков). *Мера совокупности всех прямых, пересекающих эталон длины, равна* 1 [2]).

Мы имеем перед собой задачу, для которой возможность и характер конструктивного решения остаются заранее неясными. Предполагая поставленные требования выполненными, выведем из них некоторые необходимые следствия.

Начнем с линейчатых областей типа I. Заметим прежде всего, что если отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$, то и линейчатая фигура L_{AB} конгруэнтна линейчатой фигуре $L_{A'B'}$, а значит (требова-

---

[1]) Подобно тому как в теории площадей точечной фигуре, состоящей из конечного числа или из ∞^1 точек, если и приписывают площадь, то всегда равную нулю.

[2]) Как и в других задачах измерения, можно было бы этого требования не выдвигать; мы получили бы тогда бесконечное множество «систем измерения», переходящих одна в другую путем умножения всех мер на общий множитель.

ние 3), мера L_{AB}=мере $L_{A'B'}$. Но конгруэнтность отрезков эквивалентна равенству их длин; отсюда следует, что мера совокупности прямых, пересекающих данный отрезок, есть функция только его длины (а не положения отрезка на плоскости!):

$$\text{мера } L_{AB} = f(\text{дл. } AB), \tag{38}$$

где f — функция, определенная для всех положительных значений аргумента. Действительно, если задано вещественное положительное число, то (при фиксированном эталоне длины) существует единственный, с точностью до положения на плоскости, отрезок, имеющий это число своей длиной, значит,— единственная, с точностью до положения, линейчатая фигура, образованная прямыми, пересекающими отрезок, и, наконец,— определенное число, мера этой фигуры. Займемся изучением свойств функции f, определяемой формулой (38).

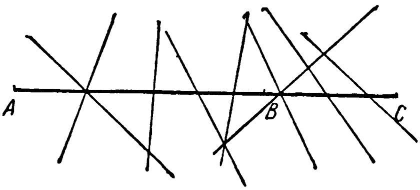


Рис. 16.

а) Ф у н к ц и я f а д д и т и в н а, т. е. при любых $\alpha>0, \beta>0$ имеем

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta).$$

Действительно, найдем два отрезка, длины которых выражаются числами α и β. Так как ни длина, ни мера не зависят от положения, то мы можем представлять себе эти два отрезка отложенными на одной прямой в виде отрезков AB и BC так, что $AB+BC=AC$ (рис. 16). Заметим теперь, что всякая прямая, пересекающая AC, либо пересекает только AB, либо пересекает только BC, либо проходит через пограничную точку B:

$$L_{AB} + L_{BC} = L_{AC} + L_{AB} \times L_{BC}.$$

Но фигура $L_{AB} \times L_{BC}$, будучи пучком прямых с центром B, содержит ∞^1 прямых, следовательно (требование 1), имеет меру 0. Поэтому предыдущее равенство, в силу требования 4, дает

$$\text{мера } L_{AB} + \text{мера } L_{BC} = \text{мера } L_{AC},$$

или (см. (38))

$$f(\text{дл. } AB) + f(\text{дл. } BC) = f(\text{дл. } AC),$$

или, наконец,

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha+\beta).$$

б) Ф у н к ц и я f м о н о т о н н а, так как из $\alpha>\beta>0$ следует $\alpha=\beta+\gamma$, где $\gamma>0$, а отсюда в силу только что доказанной аддитивности $f(\alpha)=f(\beta)+f(\gamma)$; но $f(\gamma)\geqslant 0$ (требования 1 и 2) [1]), значит, $f(\alpha)\geqslant f(\beta)$, т. е. f — функция монотонно возрастающая (не убывающая).

---

[1]) Легко было бы показать, что при $\gamma>0$ значение $f(\gamma)$ с т р о г о п о л о ж и т е л ь н о (т. е. не может быть равно 0), однако для нашей цели это излишне.

Вспоминая предложение, в свое время доказанное (см. (29) и предшествующий текст), заключаем из свойств а) и б), что $f(x)=cx$, где $c=\text{const}$, т. е. *мера линейчатой фигуры, состоящей из всех прямых, пересекающих данный отрезок, пропорциональна длине этого отрезка*:

$$\text{мера } L_{AB}=c\cdot AB; \tag{39}$$

здесь коэффициент пропорциональности c не зависит от отрезка AB. В частности, если AB есть эталон длины, то (требование 5) мера $L_{AB}=1$ и равенство (39) принимает вид

$$1=c\cdot 1, \quad \text{откуда} \quad c=1;$$

следовательно,

$$\text{мера } L_{AB}=AB. \tag{39'}$$

Итак, при сделанном нами выборе «единичной» линейчатой фигуры *мера совокупности всех прямых, пересекающих данный отрезок, выражается тем же числом, что и длина этого отрезка.*

Обратимся теперь к более сложному случаю. Рассмотрим совокупность всех прямых, пересекающих выпуклый многоугольник $ABCD\ldots M$; обозначим эту линейчатую фигуру через $L_{AB\ldots M}$. В силу выпуклости многоугольника каждая прямая фигуры $L_{AB\ldots M}$ пересекает контур многоугольника в двух точках. Составим сумму

$$L_{AB}+L_{BC}+L_{CD}+\ldots+L_{MA}; \tag{40}$$

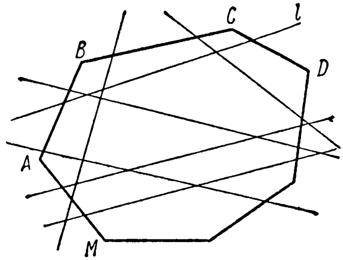


Рис. 17.

сюда войдет каждая прямая нашей фигуры, и притом, как правило, ровно два раза (например, отмеченная на рис. 17 прямая l войдет в L_{AB} и L_{CD}); исключение составят прямые, проходящие через вершины многоугольника,— каждая из них встретится в сумме (40) три или даже четыре раза. Но все эти исключительные прямые в совокупности образуют конечное число пучков с центрами $A, B, C, \ldots, M$, значит, таких прямых будет ∞^1, а потому при нахождении меры они могут быть оставлены без внимания. Итак,

$$\text{мера } L_{AB}+\text{мера } L_{BC}+\ldots+\text{мера } L_{MA}=2\cdot(\text{мера } L_{AB\ldots M}).$$

Но (см. (39')) мера $L_{AB}=AB$, мера $L_{BC}=BC$ и т. п., следовательно,

$$\text{мера } L_{AB\ldots M}=\frac{AB+BC+\ldots+MA}{2}, \tag{41}$$

и мы приходим к выводу: *мера совокупности всех прямых, пересекающих выпуклый многоугольник, равна полупериметру этого многоугольника.*

Сделаем еще один шаг в сторону обобщения полученного результата. Рассмотрим совокупность L_Γ всех прямых, пересекающих выпуклую область с контуром Г, вообще говоря, криволинейным. Впишем в кривую Г какой-нибудь выпуклый многоугольник $ABC\ldots M$ и опишем около нее какой-нибудь тоже выпуклый многоугольник $PQR\ldots V$. Сопоставим три линейчатые фигуры

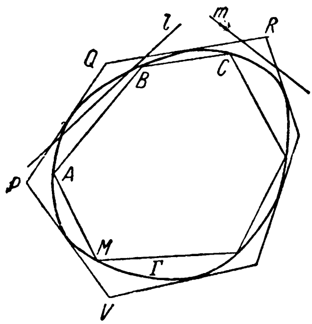


Рис. 18.

$$L_{ABC\ldots M}, \quad L_\Gamma, \quad L_{PQR\ldots V}. \qquad (42)$$

Легко видеть, что вторая фигура «больше» первой в том смысле, что любая прямая, принадлежащая $L_{ABC\ldots M}$, т. е. пересекающая многоугольник $ABC\ldots M$, входит также в состав L_Γ, т. е. пересекает кривую Г, но не наоборот (например, отмеченная на рис. 18 прямая l принадлежит L_Γ, но не $L_{ABC\ldots M}$). В таком же смысле третья фигура (42) «больше» второй (на рис. 18 прямая m принадлежит $L_{PQR\ldots V}$, но не L_Γ). Поэтому

$$\text{мера } L_{ABC\ldots M} \leqslant \text{мера } L_\Gamma \leqslant \text{мера } L_{PQR\ldots V}{}^{1)}$$

или (см. (41))

$$\frac{AB+BC+\ldots+MA}{2} \leqslant \text{мера } L_\Gamma \leqslant \frac{PQ+QR+\ldots+VA}{2}.$$

Другими словами, мера L_Γ должна выражаться таким числом, которое больше (не меньше) полупериметра любого вписанного в Г многоугольника и меньше (не больше) полупериметра любого описанного многоугольника. Единственное число, обладающее этими свойствами, есть половина длины кривой Г. Итак,

$$L_\Gamma = \frac{1}{2}\text{ дл. }\Gamma, \qquad (43)$$

т. е. *мера совокупности прямых, пересекающих данный овал, равна половине длины его контура.* Например, мера совокупности прямых, пересекающих круг радиуса R, равна πR.

На этом мы остановим наше исследование, считая, что дескриптивное определение привело уже к достаточно содержательным выводам. Читатель будет снисходителен к сжатости и незавершенности изложенного, если вспомнит то, что говорилось в начале параграфа о назначении этого примера. Быть может, сказанного достаточно, чтобы дать представление о том, насколько беспомощен был бы

---

[1]) Нетрудно было бы показать в случае криволинейного контура Г, что знаки равенства здесь излишни (так как каждая из разностей $L_\Gamma - L_{ABC\ldots M}$, $L_{PQR\ldots V} - L_\Gamma$ содержит ∞^2 прямых и, следовательно, имеет положительную меру), однако для нашей цели в этом нет надобности.

математик, если бы, желая создать теорию измерения линейчатых фигур, он не стал бы на путь дескриптивного определения.

Могут спросить: какую ценность представляет эта теория? Находит ли она себе где-нибудь применение? Обращаясь за ответом к истории и современному состоянию науки, можем указать на молодую, но уже богатую содержанием ветвь математики, известную под названием «интегральной геометрии» [1]). В основе ее лежит как раз теория меры неточечных множеств, а областью применения служат: в геометрии — свойства выпуклых фигур, вне математики — геометрическая оптика и явления распространения лучистой энергии (свето- и теплотехника). Однако исторические корни этой проблематики надо искать в XIX веке, в том цикле вопросов ранней теории вероятностей, который характеризуют словами «геометрические вероятности». Чтобы дать представление о специфике этих вопросов, рассмотрим задачу: *в круге радиуса R проводят наудачу хорду; какова вероятность того, что эта хорда пересечет отрезок MN, лежащий внутри круга* (можно воспользоваться рисунком 15, *г*, считая контур Λ за окружность)? Классическое определение вероятности как отношения числа благоприятных случаев к числу всех возможных здесь, конечно, неприменимо. Должно быть создано новое определение, и естественной представляется мысль заменять в подобных случаях «число» целесообразно определенной «мерой» [2]).

В применении к нашей задаче речь будет идти о мере множества всех возможных положений хорды (т. е. совокупности всех прямых, пересекающих окружность) и о мере множества благоприятных положений (т. е. совокупности прямых, пересекающих отрезок MN). Согласно формулам (43) и (39′) первая мера есть πR, а вторая — MN, так что искомая вероятность выразится дробью $\frac{MN}{\pi R}$. Чтобы не слишком отвлекаться в сторону, ограничимся простым указанием на связь между только что рассмотренной задачей и знаменитой задачей Бюффона «о бросании иглы», решение которой неоднократно проверялось экспериментом (см., например, А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954, стр. 45—50 и 318—334).

Задачи и темы

18. Показать, что совокупность всех прямых, пересекающих одновременно оба звена ломаной ABC (рис. 15, *б*), имеет мерой число $\frac{1}{2}\left(AB+BC-AC\right)$.

---

[1]) См. статью В. Бляшке, Лекции по интегральной геометрии, «Успехи математических наук» (старая серия), вып. V, 1938 или книгу Л. А. Сантало, Введение в интегральную геометрию, М., ИЛ, 1956.

[2]) Аддитивностью меры во всяком случае обеспечивается правило сложения вероятностей.

19. Доказать: мера совокупности всех прямых, пересекающих одновременно две противоположные стороны выпуклого четырехугольника, равна полусумме его диагоналей минус полусумма двух остальных сторон четырехугольника.

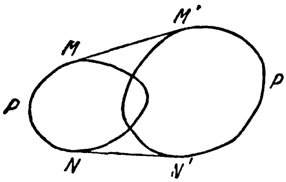


Рис. 19.

20. Доказать: если два овала пересекаются или же имеют внешнее касание, то удвоенная мера совокупности прямых, пересекающих одновременно оба овала, равна сумме длин их контуров минус длина «наименьшей выпуклой оболочки» $PMM'P'N'N$ (MM' и NN' — отрезки общих внешних касательных, рис. 19). Получить отсюда результат задачи **18** посредством предельного перехода.

(По поводу задач **18—20** см., например, цитированную статью Бляшк:)

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОСПЕКТ КНИГИ «ДЛИНА, ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ»

Книга предназначена в первую очередь для преподавателей средней школы, во вторую — для студентов-математиков педвузов и университетов. По своей тематике она близка к книге А. Лебега «Об измерении величин», но будет мало похожа на нее по содержанию: имея отправным пунктом трактовку вопросов измерения в современной науке, я намерен сделать изложение более доступным и пользоваться подходящими случаями делать выводы, касающиеся преподавания в нашей школе. Тем не менее это не методика геометрии, так как будут освещены лишь принципиальные вопросы, и притом из ограниченной области (метрической геометрии), правда, занимающей в школьном курсе центральное место.

В конце каждой главы намечается несколько вопросов и задач, имеющих целью углубить сказанное в тексте или дополнить его силами читателя.

Предполагаемое содержание

Гл. I. **Длина прямолинейного отрезка** (3 п. л.)

1. Введение. Определения конструктивные и дескриптивные.
2. Дескриптивное определение длины прямолинейного отрезка.
3. Конструктивное определение.
4. Числовая полуось. Роль аксиом Архимеда и Кантора.
5. Отношение отрезков; умножение отрезка на вещественное число. Однородность геометрических формул.
6. Педагогические замечания.
7. Еще один пример дескриптивного определения. Геометрические вероятности.

   Вопросы и задачи.

Гл. II. **Площадь плоской фигуры** (3 п. л.)

1. Дескриптивное определение площади. Площадь прямоугольника.
2. Равносоставленность и равновеликость по дополнению. Перекраивание многоугольника в прямоугольник.
3. Принцип де Цольта. Площадь многоугольника.

4. Площадь фигуры с криволинейным контуром. Квадратура с помощью интегралов.
5. Метод параллельных сечений в планиметрии (Кавальери, исторические сведения).
6. Узкая и широкая формулировка принципа Кавальери. Научное обоснование и педагогическая дискуссия вокруг метода параллельных сечений.
7. Изменение площади при преобразованиях осевого и центрального растяжения-сжатия. Площади подобных фигур. Примеры: площадь круга, эллипса, квадратура циклоиды и др.

   Вопросы и задачи.

Гл. III. **Длина дуги плоской кривой** (2 п. л.)

1. Трудности, связанные с аппроксимацией кривой ломаными. Спрямление с помощью интеграла. Критика традиционного изложения, основанного на понятии предела.
2. Конструктивное определение Буркхарта — Минковского. Длина окружности как производная от площади круга по радиусу.

   Вопросы и задачи.

Гл. IV. **Объем тела** (3 п. л.)

1. Дескриптивное определение объема. Объем прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы.
2. Равносоставленность и равновеликость по дополнению. Результаты Дена—Кагана и Зюсса (без доказательств).
3. Объем тела в общем случае; о традиционном изложении.
4. Кубатура с помощью интегралов. Метод параллельных сечений в стереометрии. Научное обоснование и педагогическая ценность.
5. Классы тел с общим законом изменения площади сечения.
6. Примеры применения метода параллельных сечений к нахождению объемов (кроме традиционных тел: клин, обелиск, цилиндрическое копыто, сегмент, параболоид вращения и др.).
7. Изменение объема при преобразованиях растяжения-сжатия. Объемы подобных тел.

   Вопросы и задачи.

Гл. V. **Площади неплоских фигур** (2 п. л.)

1. Трудности, связанные с аппроксимацией кривой поверхности многогранными. Цилиндр Шварца.
2. Конструктивное определение площади. Площадь сферы и ее частей.
3. Конструктивное определение длины неплоской дуги.

   Вопросы и задачи.

Дополнение. Метод параллельных сечений в геометрии масс (статистические моменты и центры тяжести дуг, фигур и тел). (1 п. л.)

Вопросы и задачи.

ДОПОЛНЕНИЕ

О ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА

И. М. Яглом

Основное содержание предшествующих страниц составляет исследование общего вопроса о роли в математике дескриптивных и конструктивных определений и о путях перехода от первых ко вторым; эти идеи подкреплялись затем тщательным изучением понятия длины отрезка, проведенным с изложенных ранее позиций: сначала — дескриптивное определение; затем — анализ, проведенный в предположении, что существование длины, удовлетворяющей поставленным требованиям, уже известно; наконец — построение (конструктивное определение) длины отрезка, доказательство совпадения построенной длины с определенной дескриптивно и исследование, доказывающее ее единственность. В настоящем дополнении мы проиллюстрируем тот же ход мысли на ином примере — на примере понятия площади многоугольника.

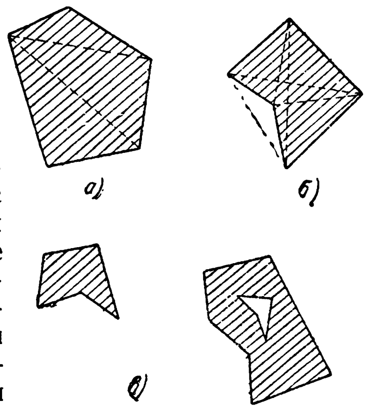


Рис. 20.

Мы не имеем в виду задерживаться на определении того, что следует понимать под словом «многоугольник». Нам будет достаточно знать, что каждый многоугольник может быть разбит на треугольники: для выпуклого многоугольника (определение которого можно найти в любом школьном учебнике геометрии) это представляется очевидным из рис. 20, *а*; невыпуклый же многоугольник совокупностью всех своих диагоналей разбивается на выпуклые многоугольники, которые затем уже могут быть подразделены на треугольники (рис. 20,*б*). Поэтому мы можем считать многоугольником *любую совокупность конечного числа неперекрывающихся* (т. е. не имеющих общих внутренних точек) *треугольников*; то обстоятельство, что при этом в число многоугольников попадут также фигуры, состоящие из нескольких изолированных частей (вроде «многоугольника», изображенного на рис. 20, *в*), не должно нас смущать: ведь для таких фигур понятие площади имеет совершенно ясный смысл (определяемый утверждением о том, что площадь фигуры, разбитой на отдельные части, равна сумме площадей всех ее частей). Многоугольники, состоящие из одного «куска» (т. е. такие, что каждые две точки многоугольника можно соединить ломаной, состоящей исключительно из принадлежащих многоугольнику точек), иногда называют *связными.*

Перейдем теперь к дескриптивному определению площади многоугольника. Это определение (подсказываемое содержанием § 2 этой книжки) доставляется следующими требованиями:

Требование 1. *Каждому многоугольнику отвечает в качестве его площади определенное положительное число.*

Требование 2 (инвариантность). *Площадь многоугольника не зависит от его положения на плоскости* (иначе — конгруэнтным многоугольникам, которые могут быть получены один из другого движением или зеркальным отражением, отвечают одинаковые площади).

Требование 3 (аддитивность). *Если многоугольник* M *состоит из двух неперекрывающихся частей* M_1 *и* M_2, *то* пл. $M=$пл. M_1+пл. M_2.

Требование 4. *«Единичный квадрат», длины сторон которого имеют длину* 1 (этот квадрат мы будем также называть **эталоном площади**), *имеет площадь* 1.

По поводу этих требований можно повторить почти все сказанное в § 2 по поводу требований, определяющих длину отрезка (ср. стр. 25—26). Несколько отлично от требований, сформулированных в § 2, лишь наше требование 4. Это различие между заданием эталона длины и эталона площади связано с тем, что при построении теории измерения отрезков мы не имели никакой возможности выделить какой-либо один из множества всех отрезков; поэтому эталон длины нам приходилось задавать совершенно произвольно. Но теорию измерения площадей естественно строить на базе уже известной теории длин; при этом следует позаботиться о том, чтобы определение площади многоугольника было «согласовано» с определением длины отрезка. Именно это согласование и достигается указанным в требовании 4 выбором эталона площади.

Перейдем теперь к анализу свойств площади многоугольника (предполагая, что эта площадь существует);

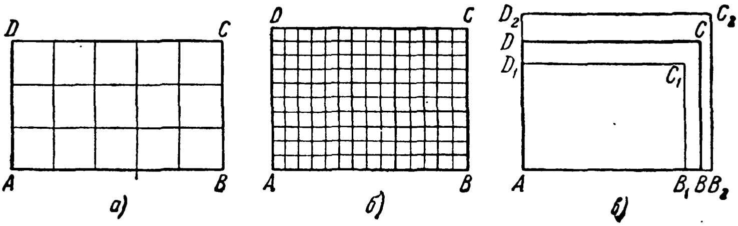


Рис. 21.

этот анализ поможет нам впоследствии дать понятию площади и конструктивное определение. Прежде всего покажем, что *если площадь многоугольника, удовлетворяющая требованиям* 1—4, *существует, то площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон*. Доказательство этого утверждения можно провести в точности так же, как это делается в школьном курсе геометрии. В самом деле, если стороны $AB=a$ и $AD=b$ прямоугольника $ABCD$ выражаются целым числом единиц длины, то прямоугольник может быть разложен на $a \cdot b$ конгруэнтных квадратов, равных эталону площади (рис. 21,*а*); в силу требований 2, 3 и 4 площадь прямоугольника будет равна ab. Если стороны прямоугольника соизмеримы с единицей длины, т. е. равны $a=\frac{m}{p}$ и $b=\frac{n}{p}$, где m, n и p — целые числа, то прямоугольник можно будет разбить на mn конгруэнтных квадратов, а эталон длины — на p^2 таких же квадратов (рис. 21,*б*); в силу тех же требований 2, 3 и 4 мы будем иметь, что площадь прямоугольника равна

(mn)-кратной площади такого квадрата, а площадь единичного квадрата (равная 1)— p^2-кратной площади квадрата, откуда следует, что площадь прямоугольника равна $m \cdot n \cdot \left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{m}{p} \cdot \frac{n}{p}$, т. е. снова равна ab. Наконец, если стороны $AB=a$ и $AD=b$ прямоугольника (хоть одна из этих сторон!) несоизмеримы с единицей длины, то мы рассмотрим соизмеримые с единицей длины отрезки $AB_1=a_1$ и $AB_2=a_2$, $AD_1=b_1$ и $AD_2=b_2$ такие, что $AB_1<AB<AB_2$ и $AD_1<AD<AD_2$. При этом прямоугольник $ABCD$ со сторонами AB и AD будет составлять часть прямоугольника $AB_2C_2D_2$ со сторонами AB_2 и AD_2; наоборот, прямоугольник $AB_1C_1D_1$ со сторонами AB_1 и AD_1 будет составлять часть исходного прямоугольника (рис. 21,*в*). Отсюда в силу требований 3 и 1 вытекает, что

$$\text{пл. } AB_1C_1D_1 < \text{пл. } ABCD < \text{пл. } AB_2C_2D_2,$$

или в силу доказанного выше

$$\text{дл. } AB_1 \cdot \text{дл. } AD_1 < \text{пл. } AB_1C_1D_1 < \text{дл. } AB_2 \cdot \text{дл. } AD_2,$$

т. е.

$$a_1b_1 < \text{пл. } ABCD < a_2b_2,$$

что возможно лишь, если пл. $ABCD=ab$ (ср. § 3).

«Традиционный» вывод формулы для площади прямоугольника можно заменить прямой ссылкой на построенную уже теорию измерения длин отрезков. Рассмотрим прежде всего семейство прямоугольников $ABCD_0$ с закрепленной стороной AD_0 (где дл.$AD_0=1$); в таком случае пл. $ABCD_0$ (рис. 22) будет служить некоторой мерой длины отрезка AB, удовлетворяющей, как легко проверить, требованиям 1—4 из § 2 (эти требования явятся непосредственными следствиями требований 1—4 для площади). Отсюда в силу доказанной в § 2 единственности длины отрезка имеем пл.$ABCD_0=$дл.AB. Закрепим теперь сторону AB_1 прямоугольника AB_1C_1D и рассмотрим величину $\frac{\text{пл. } AB_1C_1D}{\text{пл. } AB_1C_0D_0} = \frac{\text{пл. } AB_1C_1D}{\text{дл. } AB_1}$. Эта величина может служить мерой длины отрезка AD, причем она также удовлетворяет всем требованиям 1—4 из § 2 (это опять-таки следует из выполнимости для площади сформулированных выше требований 1—4; заметим, что в знаменателе дроби $\frac{\text{пл. } AB_1C_1D}{\text{дл. } AB_1}$ стоит постоянное число, поскольку

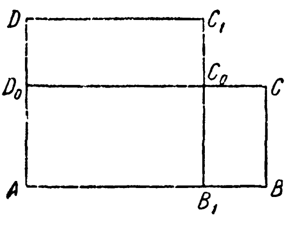


Рис. 22.

отрезок AB_1 мы закрепили). Из единственности длины отрезка следует теперь, что н е з а в и с и м о от выбора отрезка AB_1

$$\frac{\text{пл.}\,AB_1C_1D}{\text{дл.}\,AB_1} = \text{дл.}\,AD, \quad \text{или} \quad \text{пл.}\,AB_1C_1D = \text{дл.}\,AB_1 \cdot \text{дл.}\,AD,$$

т. е. если площадь многоугольника, удовлетворяющая требованиям 1—4, существует, то площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Не представляет также труда установить, что *площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению длины основания AB на длину (опущенной на AB) высоты DP*; это вытекает из рис. 23, на котором изображен параллелограмм

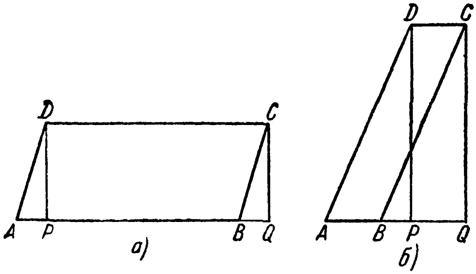


Рис. 23.

$ABCD$ и прямоугольник $CDPQ$, причем пл.$AQCD =$ $=$ пл.$ABCD +$ пл.BQC, пл.$AQCD =$ пл.$CDPQ +$ пл.APD (требование 3) и пл. $BQC = +$ $+$ пл. APD (требование 2); следовательно,

$$\text{пл.}\,ABCD = \text{пл.}\,CDPQ = \text{дл.}\,AB \cdot \text{дл.}\,DP.$$

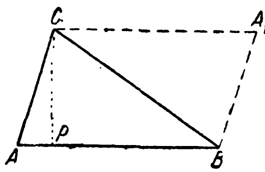


Рис. 24.

Наконец, поскольку из двух конгруэнтных треугольников ABC и A_1BC можно составить параллелограм ABA_1C, имеющий общие с треугольником ABC основание AB и высоту CP (рис. 24), в силу требований 2 и 3 выводим:

$$\text{пл.}\,ABC = \frac{1}{2}\,\text{дл.}\,AB \cdot \text{дл.}\,CP \qquad (*)$$

— *площадь треугольника равна полупроизведению длины основания на длину опущенной на это основание высоты.*

Таким образом, мы имеем здесь ту цепь предложений, которая развертывается и в школьном преподавании, составляя (правильнее было бы сказать — заменяя) теорию измерения площадей. Однако изложение учения о площадях многоугольников «по Киселеву» никак не заслуживает названия «теория» — не потому, что в школьном курсе геометрии не формулируют явно требований 1—4 (что, может быть, и следовало бы делать), а потому, что здесь игнорируется условный характер всех рассматриваемых теорем, полученных в предположении существования площади, удовлетворяющей всем перечисленным требованиям, но без всякого доказательства существования площади (вот это достаточно тонкое обстоятельство, разумеется, никак нельзя раскрыть в процессе преподавания в средней школе!). По существу, формулировки всех перечисленных результатов должны начинаться словами: «если площадь многоугольника существует, то...» — и именно по этой причине ценность их пока следует считать весьма ограниченной (ср. с задачей 1 на стр. 18 и след., в которой намечено построение внешне содержательной, но по существу бесплодной «теории»).

Изучение какого-либо математического понятия, исходящее из его дескриптивного определения, необходимо должно включать следующие этапы: *дескриптивное определение* ⟶ *анализ свойств*⟶*конструктивное определение* («построение»)⟶*доказательство существования* (интересующего нас объекта)⟶*исследование* (устанавливающее единственность или неединственность объекта). Мы пока находимся лишь в стадии анализа; отсюда до завершения теории площадей многоугольников остается еще довольно длинный путь.

Прежде всего нам надо дать конструктивное определение площади многоугольника. По существу, мы почти пришли к вполне приемлемому определению такого рода: ведь многоугольник мы определили как объединение конечного числа неперекрывающихся треугольников; отсюда и из формулы (*) — конструктивного определения площади треугольника, выведенного в процессе анализа дескриптивного определения площади,— легко получить выражение для площади любого многоугольника. Так, например, если изображенный на рис. 25 довольно сложный многоугольник M, разбивающийся на 7 треугольников ABE, AEG, BCE, ECF, FCD, AGD и

HIJ, имеет площадь, то она необходимо должна быть равна

$$\text{пл. } \mathrm{M} = \frac{1}{2}\text{ дл. } AB \cdot \text{дл. } EK + \frac{1}{2}\text{ дл. } AE \cdot \text{дл. } GL + \\ + \frac{1}{2}\text{ дл. } CB \cdot \text{дл. } EM + \frac{1}{2}\text{ дл. } EF \cdot \text{ дл. } CN + \\ + \frac{1}{2}\text{ дл. } CD \cdot \text{дл. } FP + \frac{1}{2}\text{ дл. } AD \cdot \text{дл. } GQ + \frac{1}{2}\text{ дл.} HI \cdot \text{дл.} JR$$

(требование 3 и формула (*)). Поэтому остается лишь показать, что определенная таким путем площадь

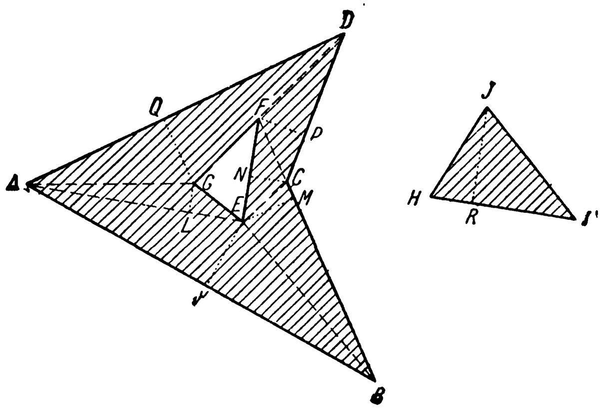


Рис. 25.

многоугольника удовлетворяет всем поставленным выше требованиям.

Это доказательство возможно провести (см., например, Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 195—204); однако оно довольно сложно. Наибольшие затруднения здесь представляет установление выполнимости требования 1, а именно доказательство того, что наше «конструктивное определение площади» сопоставляет каждому многоугольнику М единственное положительное число пл. М: ведь разбиение многоугольника на треугольники можно, разумеется, осуществить многими способами, и заранее мы не можем утверждать, что суммы, подобные стоящей в правой части последней формулы, составленные для двух разбиений на треугольники одного и того же многоугольника, будут иметь одинаковые численные значения [1]). Поэтому целесообразно видоизменить полученное конструктивное определение площади треугольника, исходя из некоторого довольно специального «разбиения многоугольника на треугольники».

Рассмотрим произвольную точку O плоскости и соединим ее со всеми вершинами A, B, C,... многоугольника М (рис. 26); при этом мы получим ряд треугольников OAB,

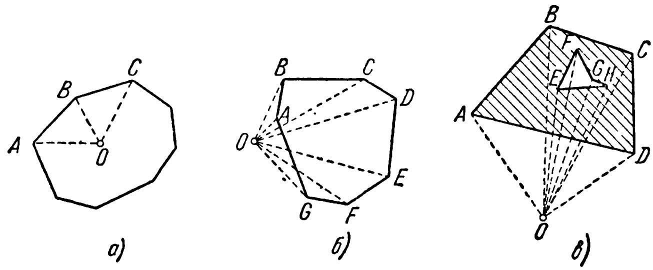


Рис. 26.

OBC, OCD и т. д. Если многоугольник М является выпуклым и O — его внутренняя точка (рис. 26,a), то М разобьется на треугольные части OAB, OBC, OCD, ... и в силу требования 3

$$\text{пл. M} = \text{пл. } OAB + \text{пл. } OBC + \text{пл. } OCD + \ldots;$$

если точка O лежит вне выпуклого многоугольника М, то для того, чтобы получить пл. М, нам придется из суммы площадей нескольких треугольников вычесть сумму площадей остальных: так, в случае, изображенном на рис. 26,$б$,

$$\text{пл. M} = \text{пл. } OBC + \text{пл. } OCD + \text{пл. } ODE + \text{пл. } OEF + \\ + \text{пл. } OFG - \text{пл. } OGA - \text{пл. } OAB.$$

Нетрудно усмотреть, что если точка O лежит вне выпуклого многоугольника $ABC...K$ (обозначим его через М), то пл. М$=\pm$пл. $OAB\pm$пл. $OBC\pm\ldots$, где, скажем, площадь треугольника OAB следует брать со знаком «+», если точка O лежит с той же стороны от AB, что и сам многоугольник, и со знаком «—», если прямая AB отделяет точку O от многоугольника М; аналогично определяются знаки и при площадях других треугольников. На рис. 26, *в* изображен

[1]) Второе (менее серьезное) затруднение связано с тем, что определение площади треугольника по формуле (*) также требует дополнительного «доказательства единственности» (ср. ниже, стр. 94).

более сложный многоугольник; и в этом случае пл. М (если только эта площадь существует, что, напоминаем, у нас еще никак не доказано) можно на основании требования 3 представить в виде алгебраической суммы площадей треугольников OAB, OBC, OCD,...:

$$\text{пл. М} = \text{пл. } OAB + \text{пл. } OBC + \text{пл. } OCD - \text{пл. } ODA - \\ - \text{пл. } OEF - \text{пл. } OFG - \text{пл. } OGH + \text{пл. } OHE.$$

При этом нетрудно выяснить, что в полной аналогии со случаем выпуклого многоугольника и в последней сумме знак «+» отвечает треугольникам OAB, OBC, OCD, OHE таким, что треугольник и многоугольник лежат по одну сторону от их общей стороны (точнее было бы говорить о треугольнике и примыкающей к его стороне области многоугольника, поскольку невыпуклый многоугольник не обязан лежать весь по одну сторону от каждой своей стороны); в остальных же случаях следует брать знак «—» (треугольники ODA, OEF, OFG и OGH).

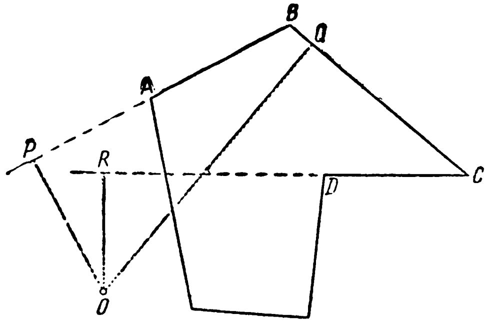


Рис. 27.

Мы не будем доказывать, что (если площадь М существует, то) этот закон образования пл. М имеет общий характер. Вместо этого мы просто примем, что *площадь многоугольника* М *со сторонами* AB, BC, CD *и т. д. определяется по формуле*

$$\text{пл. М} = \pm \frac{1}{2} \text{дл. } AB \cdot \text{дл. } OP \pm \frac{1}{2} \text{дл. } BC \cdot \text{дл. } OQ \pm \\ \pm \frac{1}{2} \text{дл. } CD \cdot \text{дл. } OR \pm \ldots, \quad (**)$$

где OP, OQ, OR, ... суть расстояния от некоторой фиксированной точки O до сторон многоугольника М (рис. 27), причем член $^1/_2$ дл.AB·дл.OP суммы, стоящий в правой части формулы (**), берется со знаком «+» или «—» в зависимости от того, расположен ли треугольник OAB по ту же сторону от AB, что и примыкающая к AB часть М, или по другую сторону, и так же определяются знаки всех остальных членов. Формула (**) и доставляет нам требуемое конструктивное определение площади многоугольника.

Перейдем теперь к доказательству того, что определенная по формуле (**) величина удовлетворяет требованиям 1—4. Нам будет удобно доказывать это не в том порядке, в каком требования перечислены на стр. 80.

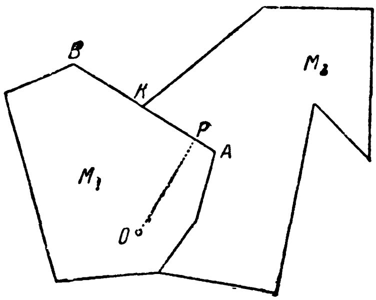


Рис. 28.

Требование 3. Доказательство того, что определенная формулой (**) величина удовлетворяет требованию 3, довольно несложно. Пусть многоугольник М представляет собой объединение двух неперекрывающихся многоугольников M_1 и M_2 (рис. 28). Заметим прежде всего, что всегда можно считать, что многоугольники M_1 и M_2 соприкасаются по некоторому числу целых сторон. В самом деле, если некоторая сторона AB многоугольника M_1 прилежит к многоугольнику M_2 своей частью AK, то мы будем считать, что отрезок AB состоит из двух сторон AK и KB многоугольника M_1, образующих между собой угол 180°; одна из этих сторон прилежит к M_2 лишь в вершине, а вторая является общей для M_1 и M_2. Такое подразделение одной стороны многоугольника на несколько меньших «сторон» законно потому, что оно не отражается на определенной по формуле (**) площади многоугольника: так, замена стороны AB многоугольника M_1 двумя «сторонами» AK и KB лишь приводит к необходимости заменить в выражающей величину пл. M_1 сумме член $\pm {}^1/_2$ дл. AB · дл. OP (где OP есть расстояние от O до AB) двумя членами $\pm {}^1/_2$ дл. AK · дл. $OP \pm {}^1/_2$ дл. KB · дл. OP, равными в совокупности $\pm {}^1/_2$ дл. AB · дл. OP.

Теперь мы можем разбить все стороны многоугольников M_1 и M_2 на три категории: 1° стороны многоугольника

M_1, не являющиеся сторонами M_2; 2° стороны M_2, не являющиеся сторонами M_1; 3° стороны, общие для M_1 и M_2. Ясно, что стороны категории 1° являются одновременно и сторонами многоугольника M (который расположен по ту же сторону от каждой такой стороны, что и M_1: ведь именно M_1 образует примыкающую к этой стороне часть M); поэтому отвечающий такой стороне член фигурирует в выражении и для пл. M_1, и для пл. M, и притом входит в эти выражения с одним и тем же знаком. Точно так же сторонам категории 2° отвечают члены выражений для пл. M_2 и для пл. M, входящие в эти выражения с одинаковыми знаками. Наконец, стороны категории 3° не являются сторонами M, и поэтому отвечающие им члены в выражении для пл. M отсутствуют; в выражения же для пл. M_1 и для пл. M_2 эти члены входят с разными знаками, поскольку неперекрывающиеся многоугольники M_1 и M_2 неизбежно располагаются по разные стороны от каждой их общей стороны. Поэтому, *сложив выражения* (**) *для* пл. M_1 *и для* пл. M_2, *мы получим выражение, в точности совпадающее с тем, которому должна равняться* пл. M.

Требование 2. Нам надо доказать, что вычисленные по формуле (**) величины для пл. M и для пл. M′, где M и M′ — два конгруэнтных многоугольника, имеют одинаковую величину. Заметим, что два конгруэнтных многоугольника могут быть получены один из другого вращением вокруг (произвольно фиксированной) точки O и параллельным переносом или симметрией относительно произвольно заданной прямой l, сопровождаемой вращением вокруг O и параллельным переносом [1]). Поэтому нам достаточно доказать, что высказанное нами утверждение верно, если

а) M′ получается из M вращением вокруг O;

б) M′ получается из M симметрией относительно прямой l (которую мы будем считать проходящей через O);

в) M′ получается из M параллельным переносом.

Рассмотрим последовательно все три случая.

а) M′ получается из M вращением вокруг O (рис. 29,*а*). Ясно, что при этом соответствующие

---

[1]) См., например, ч. I, неоднократно цитировавшейся выше «Элементарной геометрии» Ж. Адамара или книги: Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1948; И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, М, Гостехиздат, 1955.

друг другу (получающиеся одна из другой вращением вокруг O) стороны М и М′ равноудалены от O и примыкающие к этим сторонам части М и М′ обе находятся по ту же сторону от соответствующих сторон, что и точка O, или обе — по другую сторону. А так как эти стороны многоугольников М и М′ еще и равны между собой, то очевидно, что в силу определения (**) пл. М=пл. М′.

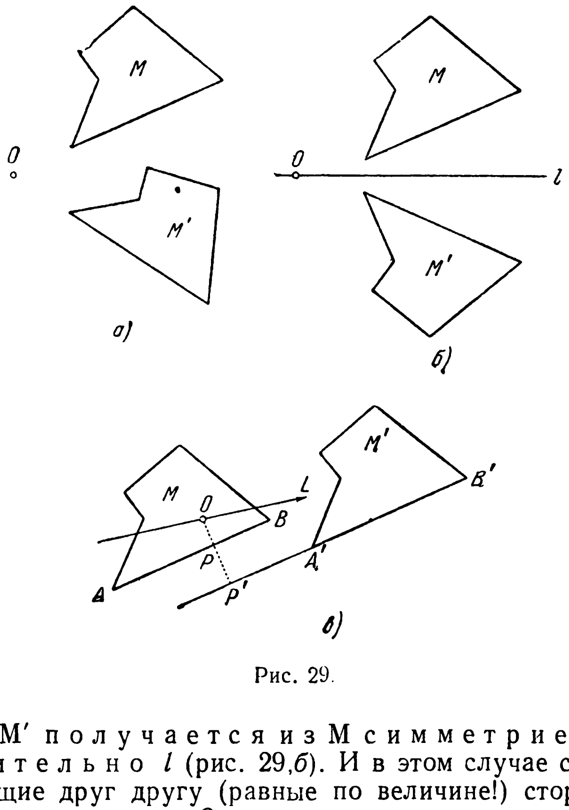


Рис. 29.

б) М′ получается из М симметрией относительно l (рис. 29,*б*). И в этом случае соответствующие друг другу (равные по величине!) стороны М и М′ равноудалены от O и отвечающие этим сторонам члены входят в выражения для пл. М и для пл. М′ с одинаковыми знаками. Таким образом, и тут пл. М=пл. М′.

в) М′ получается из М параллельным переносом в направлении луча OL на расстояние a (рис. 29,*в*). Пусть AB и $A'B'$ — две отвечающие друг другу стороны многоугольников М и М′; в образованных по формуле (**) выражениях для пл. М и для пл. М′ этим сторонам отвечают члены $\pm {}^1/_2$ дл. AB·дл. OP и $\pm {}^1/_2$ дл. $A'B'$·дл.OP', где OP и OP' — расстояния от O до AB и $A'B'$ соответственно. Нетрудно видеть, что разность этих членов

$$\pm \frac{1}{2}\text{дл. } A'B' \cdot \text{дл. } OP' \mp \frac{1}{2}\text{дл. } AB \cdot \text{дл. } OP$$

во всех случаях будет равна

$$\pm \frac{1}{2}\text{дл. } AB \cdot \text{дл. } PP',$$

где PP' есть проекция на направление OP (направление перпендикуляра к AB и $A'B'$) отрезка PP_1, имеющего направление OL и длину a; при этом знак «+» разности

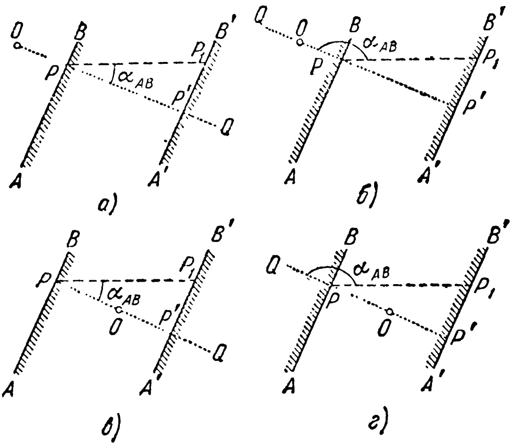


Рис. 30.

будет соответствовать тому случаю, когда угол α_{AB} между направлением луча OL и направлением перпендикуляра PQ к AB, обращенного в н у т р ь многоугольника М, острый, а знак «—» — случаю, когда угол α_{AB} между лучами AB и PQ тупой (см. рис. 30, *а*—*г*). Отсюда вытекает, что

$$\pm \frac{1}{2}\text{дл. } A'B' \cdot \text{дл. } OP' \mp \frac{1}{2}\text{дл. } AB \cdot \text{дл. } OP =$$

$$= \frac{1}{2}\text{дл.} AB \cdot \text{дл. } PP_1 \cdot \cos\alpha_{AB} = \frac{a}{2} \cdot \text{дл. } AB \cdot \cos\alpha_{AB},$$

и, следовательно,

$$\text{пл. } M' - \text{пл. } M = \frac{a}{2}\cdot(\text{дл. } AB \cdot \cos\alpha_{AB} + \text{дл. } BC\cdot\cos\alpha_{BC} + \text{дл. } CD\cdot\cos\alpha_{CD} + \ldots),$$

где AB, BC, CD, ...— стороны многоугольника М, а α_{AB}, α_{BC}, α_{CD}, ...— углы, образованные перпендикулярами к этим сторонам, направленными внутрь многоугольника, с фиксированным лучом OL. Мы утверждаем, *что независимо от выбора многоугольника* М *и луча* OL *разность, стоящая в левой части последней формулы, равна нулю.*

Для доказательства зафиксируем луч OL и условимся сопоставлять каждому многоугольнику М некоторое число, которое мы назовем «характеристикой» М и определим следующей формулой:

$$\text{хар. } M = \text{дл. } AB\cdot\cos\alpha_{AB} + \text{дл. } BC\cdot\cos\alpha_{BC} + \text{дл. } CD\cdot\cos\alpha_{CD} + \ldots \quad (***)$$

(ср. с определением величины пл. М по формуле (**)). Нам надо доказать, что, *каков бы ни был многоугольник* М *и как бы мы ни выбрали луч* OL, *всегда* хар. М=0. Но нетрудно видеть, что величина хар. М обладает следующим свойством: *если многоугольник* М *представляет собой объединение двух неперекрывающихся многоугольников* M_1 *и* M_2, *то*

$$\text{хар. } M = \text{хар. } M_1 + \text{хар. } M_2;$$

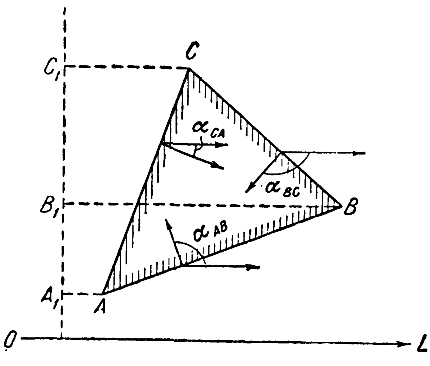


Рис. 31.

доказательство почти не отличается от доказательства того, что определенная формулой (**) величина пл. М удовлетворяет требованию 3. А так как каждый многоугольник представляет собой объединение неперекрывающихся треугольников, то достаточно доказать, что для любого т р е у г о л ь н и к а Т имеем хар. Т=0; отсюда уже будет следовать, что равна нулю характеристика любого многоугольника М (поскольку она равна сумме характеристик образующих М треугольников). Равенство же хар. Т=0 во всех случаях легко непосредственно проверить; см., например, рис. 31, где, очевидно, имеем: дл. $AB \cdot \cos\alpha_{AB} = -$дл. A_1B_1, дл. $BC \cdot \cos\alpha_{BC} = -$дл. B_1C_1, дл. $CA \cdot \cos\alpha_{CA} = +$дл. C_1A_1 и хар. $(ABC) =$ дл. $AB \cdot \cos\alpha_{AB} +$ дл. $BC \cdot \cos\alpha_{BC} +$ дл. $CA \cdot \cos\alpha_{CA} = 0$.

Этим и завершается доказательство того, что величина пл. М удовлетворяет требованию 2.

Требование 1. Так как каждый многоугольник М представляет собой объединение ряда треугольников, то нам достаточно доказать, что для любого треугольника Т имеем пл.Т>0; в силу требования 3 отсюда уже будет следовать, что пл.М>0 для любого многоугольника М. Далее, так как в силу требования 2 пл. Т$=$пл. Т$'$, где треугольники Т и Т$'$ конгруэнтны, то достаточно доказать неравенство пл. Т$'>0$, где Т$'$ есть подходящим образом выбранный треугольник, конгруэнтный произвольно заданному треугольнику Т. Но если считать, что одна из вершин треугольника Т$'$ совпадает с O, и обозначить две другие его вершины через A и B (рис. 32), то, очевидно,

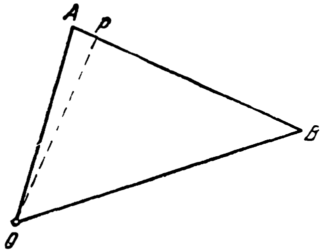


Рис. 32.

$$\text{пл. Т}' = \frac{1}{2}\,\text{дл. } AB \cdot \text{дл. } OP > 0,$$

где OP есть высота треугольника OAB, опущенная из вершины O. Это рассуждение завершает доказательство того, что определенная по формуле (**) величина пл. М удовлетворяет требованию 1.

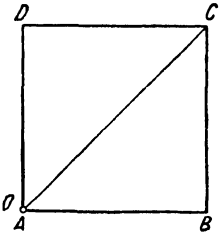


Рис. 33.

Требование 4. Нам остается доказать, что в случае квадрата К со стороной единичной длины

$$\text{пл. К} = 1;$$

при этом в силу требования 2 можно считать, что одна вершина (например, вершина A) квадрата К совпадает с точкой O (ср. с доказательством выполнимости требования 1).

Но в этом случае, очевидно, имеем (см. рис. 33):

$$\text{пл. } K = \frac{1}{2}\text{ дл. } BC \cdot \text{дл. } AB + \frac{1}{2}\text{ дл. } CD \cdot \text{дл. } AD = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Лишь теперь мы можем считать полностью доказанным существование площади многоугольника, дескриптивное определение которой было дано в начале этого дополнения. Остается еще только убедиться, что так определенная площадь является единственной. Но это следует из того, что, как мы убедились в процессе анализа дескриптивного определения, площадь треугольника T, если только она существует (а теперь мы знаем, что она действительно существует!), обязательно равна полупроизведению длины основания треугольника на длину опущенной на эту сторону высоты. Это соображение доказывает, что площадь треугольника заведомо не может иметь двух разных значений: ясно, что если CP и BQ суть высоты треугольника ABC, опущенные на две разные стороны AB и AC (рис. 34) то, как следует из подобия треугольников BAQ и CAP, $\frac{\text{дл. } AB}{\text{дл. } BQ} = \frac{\text{дл. } AC}{\text{дл. } CP}$ и, следовательно, $^1/_2$ дл. $AB \cdot$ дл. $CP = {}^1/_2$ дл. $AC \cdot$ дл. BQ. А так как каждый многоугольник можно представить как объединение ряда неперекрывающихся треугольников, то площадь многоугольника (равная сумме площадей этих треугольников) также может иметь лишь одно значение. Это рассуждение доказывает, в частности, что значение определенной по формуле (**) площади многоугольника М не может зависеть от выбора точки O (ибо в противном случае, изменив положение точки O, мы получили бы новую площадь многоугольника, также удовлетворяющую всем требованиям 1—4).

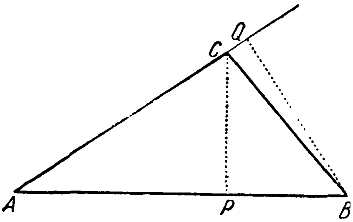


Рис. 34.

В заключение остановимся еще на вопросе о независимости определяющих площадь требований 1—4. Развернутую выше теорию можно считать *аксиоматической*; основную роль в ней играет первоначальное, неопределяемое понятие площади, косвенно определяемое списком принимаемых без доказательств предложений — аксиом, роль которых в нашей конструкции выполняют требования 1—4. Систему аксиом называют *непротиворечивой*, если в построенной на основании этой системы теории невозможно прийти к противоречию, *независимой*, если никакая из аксиом системы не является следствием остальных, и *полной*, если добавление любой аксиомы, независимой от ранее принятых аксиом, необходимо приводит к противоречивости системы[1]). Доказательства существования и единственности площади являются одновременно доказательствами непротиворечивости и полноты системы требований (аксиом) 1—4. Остается доказать независимость нашей аксиоматики.

Для того чтобы убедиться в независимости какой-либо одной из аксиом системы от остальных, достаточно показать на примере возможность выполнения всех остальных аксиом при условии несоблюдения одной лишь этой аксиомы. Таким образом, доказательство независимости каждой из аксиом 1—4 требует четырех определений «площади многоугольника», которые отличаются от данного в начале добавления дескриптивного определения площади заменой одного лишь из поставленных требований на противоположное.

Проще всего убедиться в независимости требования 4: для этого достаточно, например, принять за «площадь» удвоенную обыкновенную площадь, так что «площадь» единичного квадрата будет равна 2 (другими словами,— условиться измерять площадь в иных единицах, не совпадающих с единицами, определенными таким выбором эталона площади, который дается требованием 4; ср. со сказанным на стр. 26 по поводу роли требования 4 в дескриптивном определении длины отрезка). Более сложными являются примеры определения «площади», доказывающие независимость требований 1—3.

Для того чтобы доказать независимость требования 3, можно, считая, что понятие площади уже известно, принять за новую «площадь» многоугольника М квадрат его обыкновенной площади (т. е. положить «пл.» М=(пл. М)^2; ср. с указанной на стр. 26—27 попыткой 1-й определения длины отрезка). При этом, очевидно, будут выполняться требования 1, 2 и 4; однако требование 3 уже не будет иметь места[2]). Для того чтобы доказать независимость требования 2 от остальных, мы можем, считая построенной теорию площадей сферических фигур, принять, что «площадь» многоугольника М равна (обыкновенной) площади сферического многоугольника, высекаемой на сфере с центром в некоторой точке O (не принадлежащей плоскости рассматриваемых многоугольников!) лучами, соединяющими O со всеми точками М (ср. с попыткой 2-й определения длины отрезка на стр. 27). Иной пример такого же рода (не требующий знакомства с теорией площадей сферических фигур) можно получить следующим

[1]) По поводу затронутых здесь вопросов см., например, В. И. Костин, Основания геометрии, М., Учпедгиз, 1946, гл. III, §§ 2, 6 и 8.

[2]) Еще более простой пример, доказывающий независимость требования 3, доставляет следующее определение: «пл.» М=1 (независимо от выбора многоугольника М!).

образом: рассмотрим на плоскости систему неограниченно расширяющихся концентрических квадратов K_1, K_2, K_3, ..., первый из которых есть единичный квадрат K, второй имеет сторону длины 2, третий сторону длины 3 и т. д.; при этом каждый многоугольник М можно будет разбить на части M_1, M_2, M_3, ..., первая из которых принадлежит $K_1=K$, вторая — K_2, третья — K_3 и т. д. (рис. 35). Примем теперь, что

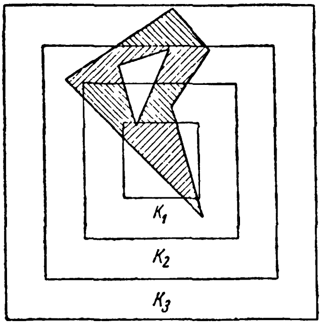


Рис. 35.

$$«\text{пл.}»\ M = \text{пл.}\ M_1 + \frac{1}{2}\,\text{пл.}\ M_2 + \frac{1}{3}\,\text{пл.}\ M_3 + \ldots;$$

для определенной таким образом «площади» будут выполняться все требования 1—4, кроме требования 2[1]).

Наиболее сложным является вопрос о независимости требования 1. Мы здесь не будем подробно останавливаться на этом вопросе; отметим лишь, что этот вопрос тесно связан с вопросом о независимости требования 1 в дескриптивном определении **длины отрезка**. В самом деле, предположим, что мы доказали независимость 1-го требования в определении длины отрезка. Это значит, что мы установили существование такой «длины» отрезка, что конгруэнтные отрезки имеют равные «длины» (т. е. равенство обыкновенных длин двух отрезков влечет за собой равенство их «длин»; отсюда следует, что «дл.» AB должна зависеть лишь от дл. AB: «дл.» $AB = f$ (дл. AB)) и что «дл.» AB=«дл.» AC+«дл.» CB (поскольку из дл. $AC=a$ и дл. $CB=b$ следует дл. $AB=a+b$, это означает, что $f(a+b)=f(a)+f(b)$); однако «длины» отрезков существенно отличаются от их обыкновенных длин и, в частности, имеют разные знаки для разных отрезков. Введем теперь новую «площадь» многоугольника при по-

---

[1]) Иногда при построении теории площадей многоугольников причисляют к числу многоугольников также и «вырожденные» многоугольники, состоящие из отдельных отрезков или точек (и даже «пустой» многоугольник, вовсе не содержащий точек); такое определение понятия «многоугольник» дает возможность утверждать, что *пересечение* любых двух многоугольников, так же как и их **объединение**, всегда является многоугольником (что позволяет заменить наше требование 3 следующим более «симметричным» требованием:

$$\text{пл. (объединения } M_1 \text{ и } M_2) + \text{пл. (пересечения } M_1 \text{ и } M_2) = \text{пл. } M_1 + \text{пл. } M_2).$$

В этом случае требование 1 приходится формулировать так: каждому многоугольнику отвечает в качестве площади определенное **неотрицательное** число; в связи с такой формой требования 1 мы получаем возможность весьма просто доказать независимость требования 2, положив «пл.» М = пл. (пересечения K и М).

мощи формулы «пл.» $M = f$(пл. M); при этом то обстоятельство, что «дл.» $AB = f$ (дл. AB) удовлетворяет требованиям 2—4 дескриптивного определения длины отрезка (см. § 2, стр. 25), обеспечит выполнение для «пл.» $M = f$ (пл. M) требований 2—4 дескриптивного определения площади многоугольника [1]).

Все сказанное, казалось бы, полностью решает вопрос о независимости аксиоматики теории измерения площадей многоугольников, доставляемой нашими требованиями 1—4. На самом деле, однако, приведенные рассуждения не исчерпывают исследование вопроса о «минимальности» этой аксиоматики, т. е. о невозможности построения полной теории измерения площадей многоугольников на более скромной базе,— мы показали лишь, что нельзя отказаться ни от одной из аксиом 1—4 целиком, но нельзя ли отказаться от части какой-либо аксиомы (т. е. ослабить одно из требований 1—4)? На самом деле это возможно,— для доказательства мы рассмотрим здесь, как видоизменится теория измерения площадей в том случае, если мы примем те же требования 1, 3 и 4, что и раньше, но требование 2 заменим следующим:

Требование 2′. *Двум многоугольникам, которые могут быть получены один из другого параллельным переносом, отвечают одинаковые площади.*

Это требование 2′ (более слабое, очевидно, чем наше прежнее требование 2) представляется довольно естественным; можно также считать, что оно некоторым образом аналогично требованию 2 из § 2, поскольку любые два конгруэнтных отрезка одной прямой могут быть получены один из другого параллельным переносом вдоль прямой. Мы покажем сейчас, что полную теорию площадей многоугольников можно построить, исходя из требований 1, 2′, 3 и 4 [2]).

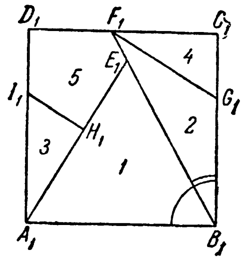
Заметим прежде всего, что новое «требование инвариантности» 2′ не дает пока оснований считать, что все «единичные квадраты» (квадраты, равные эталону площади) имеют площадь 1: теперь требование 4 должно относиться лишь к какому-то определенному квадрату К (и, следовательно, ко всем квадратам, получаемым из К параллельным переносом). *Равенство площадей любых*

[1]) По поводу вопроса о независимости требования 1, фигурирующего в дескриптивном определении длины отрезка, см. задачу 5 на стр. 28—29.

[2]) Для сравнения отметим интересный результат швейцарских геометров Г. Хадвигера и П. Глюра, согласно которому равновеликие многоугольники можно определить как такие, *которые можно разбить на соответственно равные многоугольные части, соответствующие стороны которых параллельны* (т. е. на части, получающиеся друг из друга параллельным переносом или симметрией относительно точки). Это усиление классического результата Ф. Бойяи и Б. Гервина, согласно которому два любых равновеликих многоугольника могут быть разложены на соответственно равные многоугольные части, расположенные друг относительно друга произвольным образом, направлено в ту же сторону, что и замена требования инвариантности площади относительно движений инвариантностью относительно одних лишь параллельных перенесений. (По поводу теорем Бойяи — Гервина и Хадвигера — Глюра см. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., Гостехиздат, 1956.)

двух равных квадратов при таком определении площади представляет собой содержательную теорему, нуждающуюся в специальном доказательстве.

Для того чтобы доказать эту теорему, покажем, что *любые два равных квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$* (стороны которых мы предположим не параллельными) *могут быть разложены на соответственно равные и параллельно расположенные многоугольные части*; в силу требований 2′ и 3 отсюда уже будет следовать равенство площадей квадратов. Пусть A_1B_1 — нижнее основание, а A_1D_1 — левая боковая сторона квадрата $A_1B_1C_1D_1$, стороны которого мы будем считать горизонтальными и вертикальными; A_2 — самая левая и D_2—самая верхняя вершины квадрата $A_2B_2C_2D_2$ (рис. 36). Построим отрезки $A_1E_1 \# A_2D_2$ и $A_2E_2 \# A_1B_1$; ясно, что точки E_1 и E_2 будут принадлежать 1-му, соответственно 2-му квадрату и что треугольники $A_1E_1B_1$ и $A_2D_2E_2$ (треугольники *1* на рис. 36) будут равны и



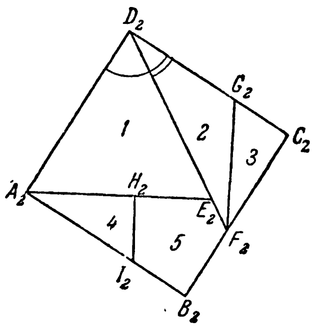


Рис. 36.

параллельно расположены. Точки пересечения B_1E_1 с D_1C_1 и D_2E_2 с B_2C_2 обозначим через F_1 и F_2; так как $\angle A_1B_1E_1 = \angle A_1E_1B_1 = \angle A_2D_2E_2$ (треугольники *1* равнобедренные!), то $\angle E_1B_1C_1 = \angle E D C_2$ и $B_1F_1 = D_2F_2$ (в силу равенства треугольников $B_1F_1C_1$ и $D_2F_2C_2$). Поэтому если мы проведем прямые $F_1G_1 \| D_2C_2$ и $F_2G_2 \| B_1C_1$ (G_1 и G_2 — точки сторон B_1C_1 и D_2C_2 квадратов), то получим еще два равных и параллельно расположенных треугольника $B_1F_1G_1$ и $F_2D_2G_2$ (треугольники *2* на рис. 36). Еще две пары равных и параллельно расположенных треугольников (треугольники *3* и *4*) мы получим, отложив на сторонах угла $D_1A_1E_1$ отрезки $A_1H_1 = F_2C_2$ и $A_1I_1 = F_2G_2$, а на сторонах угла $B_2A_2E_2$ отрезки $A_2H_2 = F_1C_1$ и $A_2I_2 = F_1G_1$. После этого от квадратов $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ останутся лишь пятиугольники $D_1F_1E_1H_1I_1$ и $H_2E_2F_2B_2I_2$ (пятиугольники *5*), которые также будут, как нетрудно видеть, равны между собой и параллельно расположены: это вытекает из того, что соответствующие стороны пятиугольников *5* параллельны по построению и

$$D_1F_1 = D_1C_1 - F_1C_1 = A_2E_2 - A_2H_2 = H_2E_2,$$

$$F_1E_1 = F_1B_1 - E_1B_1 = D_2F_2 - D_2E_2 = E_2F_2,$$

$$E_1H_1 = E_1A_1 - H_1A_1 = C_2B_2 - C_2F_2 = F_2B_2.$$

Теперь мы можем обычным образом установить, что *площадь любого прямоугольника равна произведению длин его сторон и площадь параллелограмма равна произведению длины стороны на длину опущенной на эту сторону высоты* (ср. выше, стр. 81—83; заметим, что фигурирующие на рис. 23 треугольники APD и BQC получаются один из другого параллельным переносом). Но обычное (школьное) доказательство теоремы о площади треугольника здесь не годится, поскольку оно использует разбиение параллелограмма на два симметричных треугольника, равенство площадей которых не следует из требования 2. Впрочем, формулу

$$\text{пл.}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\,\text{дл.}\,AB\cdot\text{дл.}\,CP,$$

где CP есть высота, опущенная на сторону AB треугольника, легко усмотреть из рис. 37, на котором изображены два многоугольника M_1 и M_2, один из которых содержит треугольник ABC, а второй

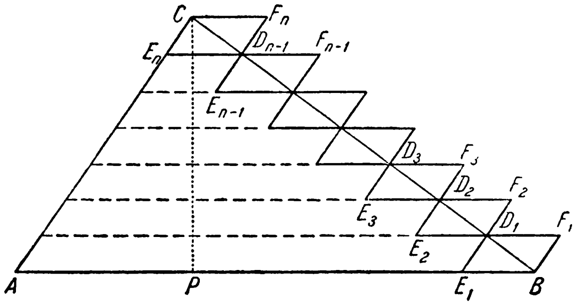


Рис. 37.

содержится в нем; эти многоугольники состоят соответственно из n и из $n-1$ параллелограммов одной и той же высоты $\frac{1}{n}CP$. Из требований 3 и 1 мы можем заключить:

$$\text{пл.}AE_1D_1\ \dots\ E_{n-1}D_{n-1}E_n < \text{пл.}ABC < \text{пл.}ABF_1D_1\dots\ F_{n-1}D_{n-1}F_nC,$$

а из требования 3 и из выведенной ранее формулы для площади параллелограмма:

$$\text{пл.}\ AE_1D_1E_2D_2\dots E_{n-1}D_{n-1}E_n = \left(\frac{1}{n}\,\text{дл.}\,CP\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\,\text{дл.}\,AB + \frac{2}{n}\,\text{дл.}\,AB + \dots + \frac{n-1}{n}\,\text{дл.}\,AB\right) = \frac{1}{n}\,\text{дл.}\,CP\cdot\frac{n(n-1)}{2n}\,\text{дл.}\,AB;$$

$$\text{пл.}\ ABF_1D_1F_2D_2\dots F_{n-1}D_{n-1}F_nC = \left(\frac{1}{n}\,\text{дл.}\,CP\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\,\text{дл.}\,AB + \frac{2}{n}\,\text{дл.}\,AB + \dots + \frac{n}{n}\,\text{дл.}\,AB\right) = \frac{1}{n}\,\text{дл.}\,CP\cdot\frac{n(n+1)}{2n}\,\text{дл.}\,AB.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n}\right) \text{дл. } AB\cdot\text{дл. } CP < \text{пл. } ABC < \left(\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\right) \text{дл. } AB\cdot\text{дл. } CP;$$

но в силу произвольности n это возможно, лишь если

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2}\,\text{дл. } AB\cdot\text{дл. } CP.$$

Теперь мы пришли к тому положению, которое подсказало нам выше конструктивное определение (**) площади любого многоугольника; сейчас мы имеем не меньшие, чем раньше, основания принять то же определение. После этого выполнение всех требований 1—4 (где только требование 2 заменено требованием 2′) доказывается в точности, как на стр. 88—94; мы можем только при таком построении теории площадей игнорировать случаи а) и б) в доказательстве выполнимости требования 2 и ограничиться (правда, самым сложным) случаем в). Таким образом, замена требования 2 заметно более слабым требованием 2′ даже не очень сильно усложняет построение полной теории площадей многоугольников.

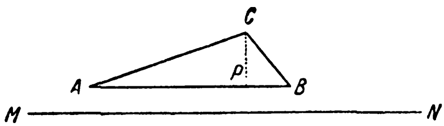


Рис. 38.

Отметим еще, что замена требования 2 более слабым требованием 2′ упрощает доказательство независимости отдельных требований. При таком построении теории площадей для доказательства независимости требования 1 нет необходимости привлекать знакопеременные решения функционального уравнения $f(a+b)=f(a)+f(b)$. Такое доказательство мы можем теперь получить, выбрав одно определенное направление MN плоскости (это направление мы назовем «горизонтальным») и объявив, что *«площадь» многоугольника* M *равна его обыкновенной площади, увеличенной на сумму длин всех «верхних» сторон* (горизонтальных сторон, для которых примыкающая к стороне часть многоугольника расположена п о д этой стороной) *и уменьшенной на сумму длин всех «нижних» сторон* (горизонтальных сторон, для которых примыкающая к стороне часть M расположена н а д ней). Читатель без труда проверит, что для такой «площади» сохраняют силу требования 2′, 3 и 4; что же касается требования 1, то оно не выполняется, поскольку является отрицательной, например, площадь изображенного на рис. 38 треугольника ABC, высота CP которого имеет длину, меньшую 2 (так что дл. $AB >$ пл. ABC).