Математика для техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 2

Математика
для
техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 2

Издание третье, переработанное

Под редакцией Г. Н. ЯКОВЛЕВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.1
М34
УДК 51 (075.3)

Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: Учебник. Ч. 2/Каченовский М. И., Колягин Ю. М., Кутасов А. Д., Луканкин Г. Л. и др.; Под ред. Г. Н. Яковлева.— 3-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 272 с.— ISBN 5-02-013743-X.

Является второй частью учебника «Алгебра и начала анализа», написанного в соответствии с действующей программой по математике для техникумов на базе неполной средней школы. (Первая часть вышла в 1987 г.)

Книга существенно переработана и сокращена: упрощено изложение, приведена в порядок система упражнений, ряд обязательных тем из второй части перенесен в первую, а именно: неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения.

2-е издание вышло в 1981 г.

Для учащихся техникумов на базе неполной средней школы.

Рецензент

преподаватель Ленинградского радиоаппаратостроительного техникума кандидат педагогических наук *Л. Ю. Сергиенко*

М $\frac{1702010000—121}{053(02)\text{-}88}$ св. пл. 107-88

ISBN 5-02-013743-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью учебника «Алгебра и начала анализа», написанного в соответствии с программой по математике для средних специальных учебных заведений, ведущих подготовку специалистов на базе неполной средней школы. В этой части учебника содержится материал, который является обязательным не для всех специальностей.

Значительная часть материала существенно переработана. Добавлена новая глава «Элементы математической статистики». В конце каждого параграфа приводятся вопросы для контроля и упражнения для самостоятельной работы учащихся. В изложении учебного материала, в терминологии и обозначениях выдерживается преемственность с курсом математики неполной средней школы.

Авторы выражают благодарность преподавателю математики Ленинградского радиоаппаратостроительного техникума кандидату педагогических наук Л. Ю. Сергиенко за советы и замечания.

Глава 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение комплексных чисел

1. Предварительные замечания. Во многих разделах математики и ее приложений невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел. Это заставляет обобщить понятие числа и ввести в рассмотрение множество комплексных чисел, включающее множество действительных чисел.

С расширением множества рассматриваемых чисел мы неоднократно встречались. Наше представление о числе изменялось по мере расширения круга задач, которые необходимо решать.

Если для счета отдельных предметов достаточно натуральных чисел, то, например, для решения уравнений $px+q=0$, где $p \in N$ и $q \in N$, натуральных чисел мало — нужны рациональные числа. В свою очередь, рациональных чисел оказывается недостаточно для измерения длин отрезков. Чтобы любому отрезку можно было приписать длину, необходимо добавить к рациональным числам числа иррациональные, т. е. под числом понимать действительное число. Ограничившись рассмотрением только рациональных чисел, невозможно было бы решить уравнение $x^2-2=0$, так как в множестве рациональных чисел это уравнение не имеет решений.

Но и действительных чисел оказывается недостаточно для решения алгебраических уравнений. Ведь в множестве действительных чисел не имеют решений квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, в том числе простейшие квадратные уравнения с натуральными коэффициентами, например: $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$.

Для решения алгебраических уравнений требуется дальнейшее обобщение понятия числа, введение комплексных чисел. Оказывается, что в множестве комплексных чисел содержатся не только все решения каждого квадратного уравнения, но и все решения алгебраических уравнений любой степени с действительными или комплексными коэффициентами.

Комплексные числа часто называют мнимыми. Это название не вполне удачно, так как оно может создать представление о комплексных числах как о чем-то нереальном. Оно объясняется тем, что, хотя комплексные числа стали употребляться еще в XVI веке, они долго продолжали казаться даже выдающимся математикам чем-то реально не существующим, мнимыми в буквальном смысле этого слова. Одному из создателей дифференциального и интегрального исчислений, немецкому математику Г. Лейбницу (1646—1716), принадлежат, например, такие слова: «Комплексное число—это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием». Сейчас от всей этой мистики не осталось ничего, кроме, пожалуй, названия «мнимые числа». Уже во времена К. Гаусса (1777—1855) было дано геометрическое истолкование комплексных чисел как точек плоскости. Трудами выдающихся математиков XIX века О. Коши, Б. Римана и К. Вейерштрасса на базе комплексных чисел была построена одна из самых красивых математических дисциплин—теория функций комплексной переменной.

Прежде чем давать определение комплексных чисел, обсудим следующие вопросы: какими свойствами должны обладать новые числа, какие операции желательно ввести для них, каким законам должны подчиняться введенные операции?

Для новых чисел необходимо ввести понятие равенства. Должны быть определены операции сложения и умножения новых чисел, причем так, чтобы для этих операций имели место переместительное, сочетательное и распределительное свойства. В том случае, когда комплексные числа совпадают с действительными, новые операции сложения и умножения должны превращаться в известные операции сложения и умножения действительных чисел.

Поскольку мы хотим, чтобы в множестве комплексных чисел уравнение $x^2+1=0$ имело решение, нужно ввести некоторое новое число и считать его решением этого уравнения. Будем обозначать это новое число символом (буквой) i. Таким образом, для числа i справедливо равенство $i^2+1=0$ или, поскольку мы хотим, чтобы для новых чисел правила преобразования равенств оставались прежними,

$$i^2=-1.$$

Далее, следует пополнить множество действительных чисел новыми числами bi, их называют мнимыми или чисто мнимыми и считают произведениями действительных чисел b на число i. Наконец, сумму действительного числа a и мнимого числа bi будем записывать в виде $a+bi$.

Для обозначения сложения употребляют знак «$+$», при записи произведения сомножители пишут рядом, опуская точку — знак умножения. Равные комплексные числа соединяют обычным знаком равенства «$=$».

Сумму чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i естественно определить следующим образом:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i.$$

Умножение двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i желательно определить так, чтобы его можно было выполнить по обычному правилу умножения двучленов.

Применяя это правило, получаем

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$$

или, в силу равенства $i^2=-1$,

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,i.$$

Итак, множество комплексных чисел должно включать в себя множество действительных чисел; в этом множестве должны быть определены операции сложения и умножения, подчиняющиеся обычным алгебраическим законам; введенные операции не должны противоречить операциям сложения и умножения действительных чисел.

2. Определение комплексного числа. Свойства операций над комплексными числами. *Комплексными числами* называются выражения вида $a+bi$ (a и b — действительные числа, i — некоторый символ), для которых следующим образом вводятся понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i называются *равными*, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$; в противном случае они называются *неравными*;

б) *суммой* чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i;$$

в) *произведением* чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производятся по следующим правилам:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i, \qquad (1)$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,i. \qquad (2)$$

Комплексные числа часто обозначают одной буквой, обычно используя для этого буквы z или w, иногда буквами с индексами, например: z_1, z_2, w_0. Равенство $z=a+bi$ как раз и означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z.

Введенные операции сложения и умножения обладают следующими свойствами.

1. *Переместительное* свойство сложения:

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

2. *Сочетательное* свойство сложения:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается

$$z_2-z_1.$$

4. *Переместительное* свойство умножения:

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

5. *Сочетательное* свойство умножения:

$$(z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3).$$

6. Для любых комплексных чисел $z_1\neq 0+0i$ и z_2 существует число z такое, что $z_1z=z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$. Деление на комплексное число $0+0i$, которое называется *нулем*, невозможно.

7. *Распределительное* свойство:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Все перечисленные свойства операций сложения и умножения вытекают из определений этих операций и равенства комплексных чисел. Докажем свойства 3, 6, 7; проверку остальных свойств рекомендуется провести самостоятельно.

Доказательство свойства 3.

□ Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ и $z=x+yi$. Тогда равенство $z_1+z=z_2$ запишется так:

$$(a_1+b_1i)+(x+yi)=a_2+b_2i.$$

Согласно формуле (1) получаем

$$(a_1+x)+(b_1+y)\,i=a_2+b_2i,$$

откуда следует, что x и y обязаны удовлетворять системе двух уравнений

$$\begin{cases} a_1+x=a_2, \\ b_1+y=b_2. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x=a_2-a_1$, $y=b_2-b_1$.

Итак, разность комплексных чисел z_2 и z_1 всегда существует, причем

$$z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)\,i. \blacksquare \qquad (3)$$

Формула (3) дает правило вычитания комплексных чисел.

Доказательство свойства 6.

□ Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ и $z=x+yi$. Тогда равенство $z_1z=z_2$ запишется так:

$$(a_1+b_1i)(x+yi)=a_2+b_2i.$$

Согласно формуле (2) получаем

$$(a_1x-b_1y)+(a_1y+b_1x)\,i=a_2+b_2i,$$

откуда следует, что x и y удовлетворяют системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a_2, \\ b_1x+a_1y=b_2. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}=a_1^2+b_1^2$$

не равен нулю, так как по предположению $a_1+b_1i\neq 0+0i$. Поэтому система имеет единственное решение, которое легко находится:

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}, \quad y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Таким образом, частное двух комплексных чисел при условии, что делитель отличен от нуля, всегда существует, причем

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i. \blacksquare \qquad (4)$$

Формула (4) дает правило деления комплексных чисел.

Положив в формуле (4) $a_1=c$, $b_1=0$, $a_2=a$, $b_2=b$, получаем правило деления комплексного числа на действительное число

$$\frac{a+bi}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}i.$$

Положив в формуле (4) $a_1=0$, $b_1=d$, $a_2=a$, $b_2=b$, получаем правило деления комплексного числа на чисто мнимое число

$$\frac{a+bi}{di}=\frac{b}{d}-\frac{a}{d}i.$$

Доказательство свойства 7.

$\square$ Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_3=a_3+b_3i$. Вычисляем левую часть равенства:

$$z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)(a_2+a_3+(b_2+b_3)i)=$$
$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+(b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3))i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Вычисляем правую часть:

$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+a_1a_3-b_1b_3+(a_1b_3+b_1a_3)i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Следовательно, $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$. $\blacksquare$

Из сказанного выше следует, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняются тем же законам, что и сложение и умножение действительных чисел.

Легко усматривается, что в результате сложения, умножения, вычитания и деления комплексных чисел вида $a+0i$ всегда получаются числа такого же вида. Кроме того, видно, что правила действий с такими числами полностью совпадают с соответствующими правилами действий с действительными числами. Эти два обстоятельства позволяют отождествить комплексное число $a+0i$ с действительным числом a и считать, что $a+0i=a$. Например, $0+0i=0$, $1+0i=1$, $-1+0i=-1$.

Таким образом, множество действительных чисел является частью множества комплексных чисел.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a+bi$. Действительное число b называется *мнимой частью* комплексного числа $a+bi$.

Комплексные числа вида $0+bi$ называют *чисто мнимыми* и обозначают просто bi. Например, $0-2i=-2i$, $0+1i=i$.

Комплексное число i принято называть *мнимой единицей*.

Согласно определению комплексных чисел два числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, т. е. когда равны и действительные, и мнимые части комплексных чисел. Обратим внимание на то, что одно равенство $z_1=z_2$ комплексных чисел равносильно двум равенствам $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ действительных чисел. Заметим еще, что понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел не определяются. Записи $z>0$, $1+i<2$ и им подобные лишены всякого смысла.

Вернемся к формуле (2), определяющей умножение комплексных чисел. Положив в ней $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$, получим важное соотношение

$$ii=-1,$$

или, применяя для произведения ii сокращенное обозначение $ii=i^2$,

$$i^2=-1. \tag{5}$$

Таким образом, определение умножения, даваемое формулой (2), обеспечивает существование решения уравнения $x^2+1=0$.

Отметим еще, что формула (2) не нуждается в запоминании, так как получается автоматически, если формально перемножить двучлены a_1+b_1i и a_2+b_2i по обычному правилу умножения двучленов и затем в соответствии с формулой (5) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=2+5i$ и $z_2=-1+7i$.

△ По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=(2+5i)+(-1+7i)=1+12i.$$

Произведение находим формальным перемножением двучленов $2+5i$ и $-1+7i$ с последующим учетом соотношения (5):

$$z_1z_2=(2+5i)(-1+7i)=$$
$$=-2+14i-5i+35i^2=-37+9i. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = x + yi$ и $z_2 = x - yi$.

△ Сумму находим по формуле (1):

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

Произведение находим по правилу умножения двучленов:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2. \ ▲$$

Числа $x + yi$ и $x - yi$ называются *сопряженными комплексными числами*. Число, сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Пример 2 показывает, что сумма $z + \bar{z}$ сопряженных чисел есть всегда число действительное, а произведение $z\bar{z}$ — число действительное и, более того, неотрицательное.

Пример 3. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 6i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное $\frac{z_2}{z_1}$.

△ По формуле (3) находим

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i.$$

Частное находим по формуле (4):

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)\cdot 2 + 6\cdot 5}{(-1)^2 + 6^2} + \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + 6^2} i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37} i. \ ▲$$

Пример 4. Найти комплексное число

$$z = \frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}.$$

△ Перемножив числа, стоящие в числителе, получим

$$z = \frac{1 - 2i + i - 2i^2}{3+i} = \frac{3-i}{3+i}.$$

Далее можно воспользоваться формулой (4), но удобнее поступить иначе. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{3-i}{3+i}$ на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $3 - i$. Тогда получим

$$z = \frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9 - 3i - 3i + i^2}{9+1} = \frac{8-6i}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} i. \ ▲$$

3. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. В курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами a, b, c. Там было показано, что если дискриминант $D=b^2-4ac$ уравнения (1) неотрицателен, то решения такого уравнения находятся по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \qquad (2)$$

В случае, если $D<0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Покажем, что в множестве комплексных чисел уравнение (1) имеет решение и тогда, когда дискриминант уравнения отрицателен.

□ В учебнике алгебры доказывалось, что уравнение (1) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}, \qquad (3)$$

из которого при $D\geqslant 0$ и получалась формула (2) для корней квадратного уравнения.

Пусть $D<0$. Преобразуем уравнение (3) следующим образом:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{i^2|D|}{4a^2},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\right)=0,$$

и получим

$$x=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{|D|}}{2a},\quad x=-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Следовательно, если дискриминант D отрицателен, квадратное уравнение (1) имеет два сопряженных комплексных корня:

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}. \ ■$$

Для единообразия записи формулы для корней квадратного уравнения удобно в случае $D<0$ комплексное число $i\sqrt{|D|}$ обозначать через $\sqrt{D}$. Например, $i\sqrt{5}=\sqrt{-5}$. Тогда во всех случаях формула для корней квадратного уравнения будет записываться в виде (2).

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$ax^2+bx+c=0,\qquad a,\ b,\ c\in R,\qquad a\neq 0,$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0$, то уравнение имеет один корень; если $D\neq 0$, то уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \tag{4}$$

в которой в случае $D<0$ под символом $\sqrt{D}$ понимается число $i\sqrt{|D|}$.

Если квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2+2px+c=0,$$

то для нахождения корней удобнее пользоваться упрощенной формулой

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-ac}}{a}. \tag{5}$$

Пример 1. Решить уравнение $5x^2+6x+5=0$.

△ По формуле (5) находим

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-25}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{-16}}{5}=\frac{-3\pm i\sqrt{|-16|}}{5}.$$

Следовательно,

$$x_1=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i,\quad x_2=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i. \ ▲$$

Пример 2. Решить уравнение $2z^2+3z+3=0$.

△ По формуле (4) получаем

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-24}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{-15}}{4}.$$

Так как $\sqrt{-15}=i\sqrt{15}$, то

$$z_1=-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{15}}{4},\quad z_2=-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{15}}{4}. \ ▲$$

Вопросы для контроля

1. Как определяется равенство комплексных чисел?
2. Как производится сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел?
3. Какими свойствами обладают сложение и умножение комплексных чисел?
4. Всякие ли два комплексных числа можно перемножить? Всегда ли одно комплексное число можно разделить на другое?
5. Укажите числа, квадрат которых равен отрицательному числу —4.

6. Какие числа называют чисто мнимыми?

7. Какое число, 1 или i, является мнимой частью числа $1+i$?

8. Какие числа называются сопряженными комплексными числами?

9. Какие числа удовлетворяют равенству $z=\bar{z}$?

10. Укажите сопряженные числа для чисел $1-i$, $2i$, 2.

11. Могут ли числа 1 и i быть корнями какого-нибудь квадратного уравнения с действительными коэффициентами?

Упражнения

1.1. Найдите сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если:

1) $z_1=5+4i,\ z_2=-2+3i$;
2) $z_1=0{,}5-3{,}2i,\ z_2=1{,}5-0{,}8i$;
3) $z_1=-8-7i,\ z_2=-3i$;
4) $z_1=5+\sqrt{3}\,i,\ z_2=5-\sqrt{3}\,i$.

1.2. Найдите разность z_2-z_1 и частное $\frac{z_2}{z_1}$, если:

1) $z_1=1+i,\ z_2=1-i$;
2) $z_1=1+2i,\ z_2=5$;
3) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i,\ z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$;
4) $z_1=a-\sqrt{b}\,i,\ z_2=a+\sqrt{b}\,i$.

1.3. Вычислите:

1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;

2) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

3) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

4) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2$; 5) $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}$.

1.4. Найдите действительную часть комплексного числа:

1) $z=\frac{(1+2i)^3}{i}+i^{19}$;

2) $z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}+\frac{1}{i}$.

1.5. Найдите мнимую часть комплексного числа:

1) $z=(2-i)^3(2+11i)$; 2) $z=\frac{2-3i}{1+4i}+i^6$.

1.6. Найдите комплексные числа:

1) $z=i+\frac{6i+1}{1-7i}$; 2) $z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

3) $z=(2+i)^5$; 4) $z=\frac{5+12i}{8-6i}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}$.

1.7. Решите уравнения:

1) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$;
2) $z^2+\bar{z}=0$.

1.8. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=x^2-7x+9yi$ и $z_2=y^2i+20i-12$ равны?

1.9. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi$ и $z_2=8y^2+20i^7$ являются сопряженными?

1.10. Докажите равенства:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; 2) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

1.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

1.12. Решите уравнения:

1) $x^2+25=0$; 2) $t^2-2t+5=0$;

3) $36z^2+36z+13=0$; 4) $5x^2+2x+2=0$;

5) $x^2-6x+16=0$; 6) $3x^2-14x+\frac{218}{3}=0$;

7) $z^3+8=0$; 8) $z^4-3z^2-4=0$.

1.13. Составьте приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень:

1) $2i$; 2) $1-3i$; 3) $-4-i\sqrt{2}$.

§ 2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Как известно, между множеством действительных чисел и множеством точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Существование такого соответствия позволяет использовать в алгебре и анализе геометрические соображения, которые часто оказываются весьма полезными. Геометрическая терминология и геометрические соображения с успехом используются и при изучении комплексных чисел.

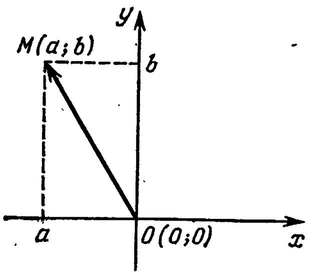


Рис. 1

Каждому комплексному числу $a+bi$ поставим в соответствие точку $M(a;\ b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна действительной части комплексного числа, а ордината — мнимой части. Каждой точке $M(a;\ b)$ координатной плоскости поставим в соответствие комплексное число $a+bi$ (рис. 1). Установленное соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность интерпретировать (истолковывать) комплексные числа как точки некоторой плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a+0i$, т. е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* — на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0+bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a+bi$ как вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1), т. е. вектора, исходящего из начала координат $O(0;\ 0)$ и идущего в точку $M(a;\ b)$. Разумеется, вместо вектора $\overrightarrow{OM}$ можно взять любой равный ему вектор. Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0;\ 0)$, концом в точке $M(a;\ b)$ соответствует комплексное число $a+bi$, и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0+0i$.

Соответствие, установленное между множеством комплексных чисел, с одной стороны, и множествами точек или векторов плоскости, с другой, позволяет комплексные числа называть точками или векторами и говорить, например, о векторе $a+bi$ или точке $a+bi$.

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование операциям над комплексными числами. Остановимся пока только на сложении и вычитании комплексных чисел. Геометрический смысл умножения будет выяснен позже.

При сложении чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ складываются их действительные и мнимые части (рис. 2). При

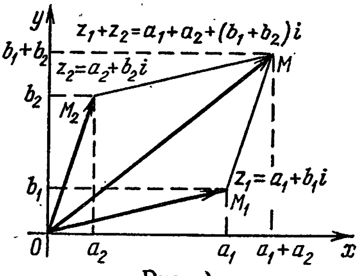


Рис. 2

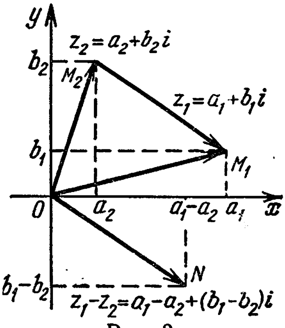


Рис. 3

сложении соответствующих им векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ складываются их координаты. Поэтому сумме z_1+z_2 чисел z_1 и z_2 будет соответствовать вектор $\overrightarrow{OM}$, равный сумме векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$. Совершенно аналогично устанавливается, что разность чисел z_1-z_2 соответствует вектору $\overrightarrow{M_2M_1}$ (или $\overrightarrow{ON}$), равному разности $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$ векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 3).

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к рассмотрению понятия модуля комплексного числа.

Определение. *Модулем комплексного числа* называется длина вектора, соответствующего этому числу.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Часто модуль обозначают также буквой r. По теореме Пифагора (см. рис. 1) для модуля комплексного числа $z=a+bi$ легко получается следующая важная формула:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

выражающая модуль числа через его действительную и мнимую части.

Для действительного числа $z=a+0i$ модуль совпадает с абсолютной величиной числа:

$$|z|=|a+0i|=\sqrt{a^2}=|a|.$$

Сопряженные числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ имеют, очевидно, одинаковые модули.

Результат, полученный в примере 2 § 1, теперь можно записать так:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2,$$

т. е. *произведение сопряженных чисел равно квадрату их модуля.*

Отметим теперь, что для деления комплексных чисел можно не запоминать формулу (4) из § 1.

Соотношение

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}$$

дает возможность свести деление чисел z_2 и z_1 к умножению чисел z_2 и $\bar{z}_1$ и к делению произведения $z_2\bar{z}_1$ на действительное положительное число $|z_1|^2$. В примере 4 § 1 мы уже пользовались этим приемом. Продемонстрируем этот прием еще на одном примере.

Пример 1. Найти частное $\frac{i-1}{4-5i}$.

△ Умножив числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{i-1}{4-5i}=\frac{(i-1)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{4i+5i^2-4-5i}{16+25}=-\frac{9}{41}-\frac{1}{41}i. \ ▲$$

В заключение этого пункта остановимся еще на геометрическом смысле модуля разности двух комплексных чисел.

Согласно определению модуля $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $z_1 - z_2$. Вектор $z_1 - z_2$ изображен на рис. 3. Это вектор $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{M_2M_1}$, и его длина равна расстоянию между точками M_1 и M_2. Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.* Это полезное геометрическое истолкование модуля разности двух комплексных чисел позволяет при решении некоторых задач использовать простые геометрические факты.

Пример 2. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$,

б) $|z + i| = 1$,

в) $1 \leqslant |z + 2| \leqslant 2$?

$\triangle$ а) Условию

$$|z - (1 + i)| = |z - (-1 - i)|$$

удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые одинаково удалены от точек $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 - i$. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, представляет собой прямую,

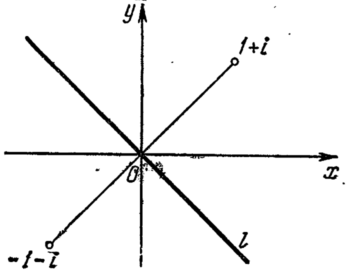


Рис. 4

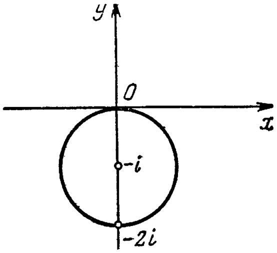


Рис. 5

перпендикулярную отрезку, соединяющему данные точки, и проходящую через его середину. На рис. 4 изображена прямая l, являющаяся искомым множеством.

б) Соотношению

$$|z + i| = 1$$

удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $z_1 = -i$ на расстояние, равное единице. Такие точки лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке $z_1 = -i$ (рис. 5).

в) Из геометрического истолкования модуля разности двух комплексных чисел следует, что комплексные числа z, удовлетворяющие условию

$$1 \leqslant |z+2| \leqslant 2,$$

расположены внутри и на границе кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке

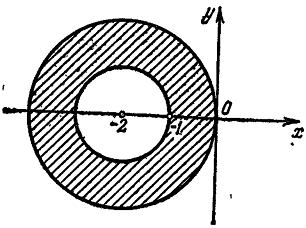


Рис. 6

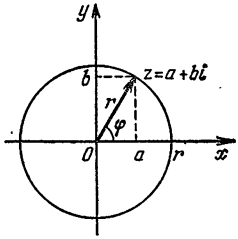


Рис. 7

$z_1 = -2$ и с радиусами, равными 1 и 2. На рис. 6 искомое множество точек заштриховано.

3. Аргументы комплексного числа. Комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль $|z| = r$, соответствуют, очевидно, точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в точке $z = 0$ (рис. 7). Следовательно, если $r \neq 0$, то существует бесконечно много комплексных чисел с данным модулем r. Модуль, равный нулю, имеет только одно комплексное число, а именно $z = 0$.

Геометрически очевидно, что для того, чтобы из множества комплексных чисел с данным модулем $r \neq 0$ выделить какое-либо конкретное число z, достаточно задать направление вектора z (например, задать угол φ, см. рис. 7).

Определение. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения аргументов комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$ или $\arg(a+bi)$. Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $-1+i$ являются следующие углы: $\varphi_1=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{3\pi}{4}+2\pi$,

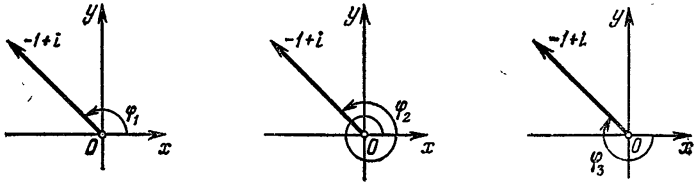


Рис. 8

$\varphi_3=\frac{3\pi}{4}-2\pi$ (рис. 8) и, вообще, каждый из углов $\varphi_k=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга слагаемым, кратным 2π.

Вопросы для контроля

1. Как геометрически интерпретируются (истолковываются) комплексные числа?

2. Как геометрически истолковываются сумма и разность комплексных чисел?

3. Как располагаются на комплексной плоскости числа: а) z и $\bar{z}$; б) z и $(-z)$?

4. Что называется модулем комплексного числа? Как вычисляется модуль числа $a+bi$?

5. В чем состоит геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел?

6. Что называется аргументом комплексного числа?

7. Всякое ли комплексное число имеет аргумент?

8. Может ли разность аргументов комплексного числа быть равной 99π, 100π?

Упражнения

1.14. Постройте векторы: $z=3+2i$, $z=5-4i$, $z=-6+3i$, $z=-1-i$, $z=\cos 30°-i\sin 30°$, $z=\cos 150°+i\sin 150°$, $z=-2$, $z=i$.

1.15. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найдите четвертую вершину этого параллелограмма.

1.16. На комплексной плоскости даны точки $z_1=6+8i$, $z_2=4-3i$. Найдите комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

1.17. Найдите модуль комплексного числа:

1) $z=-3$; 2) $z=-i$; 3) $z=7$;
4) $z=1-i$; 5) $z=\cos\pi+i\sin\pi$;
6) $z=-5-2\sqrt{6}\,i$.

1.18. Решите уравнения:
1) $|z|-iz=1-2i$; 2) $z^2+3|z|=0$;
3) $z^2+|z|^2=0$.

1.19. Решите систему уравнений

$$|z+1-i|=|3+2i-z|=|z+i|.$$

1.20. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:
1) $|z|\leqslant 1$; 2) $|z|=2$; 3) $|z-i|\leqslant 0$;
4) $|z+2|<|z-2|$; 5) $|z+1|<|z-i|$;
6) $|z+2i-1|\leqslant 2$; 7) $2\leqslant|z-1+2i|<3$;
8) $\sin|z|>0$; 9) $\lg|z-10i|<1$;
10) $|z|^2+3z+3\bar{z}=0$?

1.21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |z+1|=|z+2|, \\ |3z+9|=|5z+10i|. \end{cases}$$

1.22. Найдите аргументы комплексного числа:
1) $z=i$; 2) $z=1+i$; 3) $z=-1$;
4) $z=8$; 5) $z=-3i$; 6) $z=2-2i$.

1.23. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием.
1) один из аргументов числа z равен нулю;
2) один из аргументов равен $\frac{\pi}{2}$;
3) один из аргументов равен $\frac{5\pi}{2}$;
4) один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $2\pi<\varphi<3\pi$;
5) один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\varphi<2\pi$?

1.24. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

$$\arg z=(2n+1)\pi, \qquad n\in Z?$$

1.25. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z+1-i|\leqslant 1$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

1.26. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-5i|\leqslant 3$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Помимо алгебраической формы используются и другие формы записи комплексных чисел — тригонометрическая форма и показательная форма.

Рассмотрим тригонометрическую форму записи комплексных чисел. О показательной форме записи будет рассказано в п. 5.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z=a+bi$ выражаются через его модуль $|z|=r$ и аргумент φ следующим образом:

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi, \\ b=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Эта связь легко устанавливается при рассмотрении рис. 7. Комплексное число z может быть, следовательно, записано в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Здесь r — модуль комплексного числа, а φ — аргумент.

Запись комплексного числа в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется *тригонометрической формой записи*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z=a+bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Модуль определяется по формуле

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Зная модуль r, аргумент находим из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}. \end{cases} \qquad (1)$$

Пример 1. Записать число $z=1-i$ в тригонометрической форме.

$\triangle$ Находим модуль

$$|z|=r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Для аргумента φ получаем систему

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы будет, например, $\varphi=\frac{7\pi}{4}$, и, следовательно, данное комплексное число в тригонометрической форме запишется так:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right). \blacktriangle$$

Замечание 1. Для решения системы (1) во многих случаях удобно перейти к уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Это уравнение является следствием системы (1). Оно получается в результате почленного деления второго уравнения системы на первое. Каждое решение системы (1) является решением уравнения (2). Обратное утверждение неверно, и, следовательно, уравнение (2) не равносильно системе (1). Но если решения уравнения (2) найдены, то выбрать из них те, которые удовлетворяют системе (1), очень просто. Для этого надо посмотреть, в какой четверти комплексной плоскости находится точка $z=a+bi$. Из алгебраической формы записи комплексного числа это всегда легко усматривается. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 2. Записать число $z=-1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

$\triangle$ Находим модуль данного числа

$$r=|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$$

Аргументы числа z удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}.$$

Решения этого уравнения:

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}.$$

Так как число $z=-1-\sqrt{3}i$ расположено в третьей четверти комплексной плоскости, то значения

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in \mathbf{Z},$$

следует отбросить: они не удовлетворяют системе (1). В качестве аргумента числа $z=-1-\sqrt{3}i$ можно взять, например, $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi$.

Итак,

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right). \blacktriangle$$

Замечание 2. Разумеется, переходить от системы (1) к уравнению (2) следует не всегда. Например, при $a=0$ это не только не нужно, но и невозможно. В этом случае очевидно, что аргументом числа будет либо $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (если $b>0$), либо $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ (если $b<0$).

2. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной при умножении и делении чисел. Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

— два числа, записанных в тригонометрической форме. Тогда

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+$$
$$+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2),$$

или

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \quad (1)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.*

Для частного, умножая числитель и знаменатель на число $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$, получаем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \quad (2)$$

Следовательно, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.*

Пример. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}+i)}{i-1}.$$

△ Число $z_1=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, аргумент $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$; $z_2=\sqrt{3}+i$ имеет модуль 2, аргумент

$\varphi_2=\frac{\pi}{6}$; $z_3=i-1$ имеет модуль $\sqrt{2}$, аргумент $\varphi_3=\frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z|=\frac{|z_1|\cdot|z_2|}{|z_3|}=\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, аргумент

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{11}{12}\pi.$$

Следовательно,

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right). \blacktriangle$$

Формула (1) позволяет дать геометрическое истолкование операции умножения комплексного числа z на комплексное число z_0. Произведение чисел z и z_0 есть вектор, который может быть получен поворотом вектора z на угол, равный аргументу числа z_0, и растяжением (сжатием) его в $|z_0|$ раз (рис. 9).

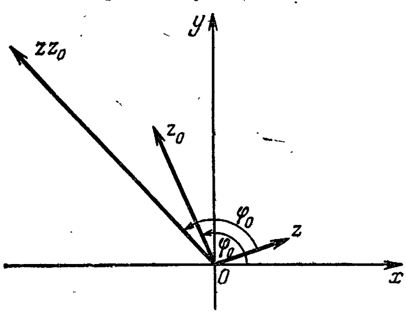


Рис. 9

Частный случай — умножение числа z на мнимую единицу i — означает поворот вектора z против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (1) п. 2 для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, легко получить следующий результат:

модуль произведения n комплексных чисел равен произведению модулей всех сомножителей, сумма аргументов всех сомножителей является аргументом произведения комплексных чисел.

Отсюда как частный случай получается формула

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad (1)$$

дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 1. Возвести в девятую степень комплексное число

$$z=\sqrt{3}-i.$$

△ Модуль числа z равен 2, а одним из аргументов является $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, поэтому модуль числа z^9 равен 2^9, а аргумент числа z^9 равен $9\varphi=-\frac{3}{2}\pi$. Следовательно,

$$(\sqrt{3}-i)^9=2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=512i. \ ▲$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n из числа w* (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n=w$.

Из данного определения вытекает, что каждое решение уравнения $z^n=w$ является корнем степени n из числа w. Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени n из числа w, достаточно решить уравнение $z^n=w$.

Если $w=0$, то при любом n уравнение $z^n=w$ имеет одно и только одно решение $z=0$. Если $w\neq 0$, то и $z\neq 0$, а следовательно, и z, и w можно представить в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad w=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Уравнение $z^n=w$ примет вид

$$r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемым, кратным 2π. Следовательно,

$$r^n=s \quad \text{и} \quad n\varphi=\psi+2\pi k,$$

или

$$r=\sqrt[n]{s} \ \text{и} \ \varphi=\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k,\quad k\in Z.$$

Итак, все решения уравнения $z^n=w$ могут быть записаны следующим образом:

$$z_k=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right), \tag{2}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

При других целых значениях k мы не получим других комплексных чисел.

Например, при $k=n$ получаем

$$z_n=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt[n]{s}\left(\cos\frac{\psi}{n}+i\sin\frac{\psi}{n}\right)=z_0.$$

Таким образом, если $w\neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа w; все они находятся по формуле (2). Все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{s}$, но разные аргументы, отличающиеся слагаемым, кратным числу $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{s}$ с центром в точке $z=0$.

Сделаем еще одно замечание относительно обозначения $\sqrt[n]{w}$. Символ $\sqrt[n]{w}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$ или одно, и если одно, то какое именно.

Заметим, что в п. 3 § 1 при решении квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом под символом $\sqrt{D}$ понималось, как теперь должно быть ясно, одно из значений квадратного корня из отрицательного числа D, равное $i\sqrt{|D|}$.

Пример 2. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

$\triangle$ Запишем число $w=-16$ в тригонометрической форме:

$$w=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Формула (2) в нашем случае дает

$$z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},$$
$$z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

На рис. 10 изображены все четыре значения $\sqrt[4]{-16}$. Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, z_3, находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z=0$. ▲

4. Комплексная степень числа e. Введем понятие комплексной степени числа e. Операция возведения числа e в комплексную степень $z=x+yi$ определяется формулой

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (1)$$

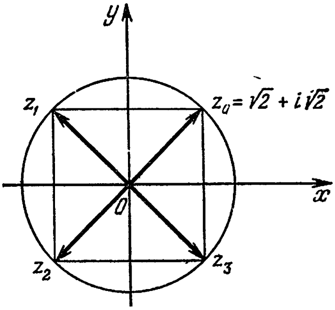


Рис. 10

Пример 1. Возвести число e в степень z, если:

а) $z=1+i$, б) $z=\frac{\pi}{2}i$,

в) $z=\pi i$.

△ По формуле (1) находим:

а) $e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$,

б) $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$,

в) $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$. ▲

Пример 2. Найти модуль и аргументы числа $e^z=e^{x+yi}$.

△ Действительная и мнимая части комплексного числа e^z соответственно равны $e^x\cos y$ и $e^x\sin y$. Следовательно,

$$|e^z|=\sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}=\sqrt{e^{2x}}=e^x.$$

Аргументы находим из системы

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$$

Эта система в рассматриваемом случае принимает вид

$$\cos\varphi=\frac{e^x\cos y}{e^x}=\cos y,$$

$$\sin\varphi=\frac{e^x\sin y}{e^x}=\sin y.$$

Ее решения $\varphi=y+2\pi n$, $n\in Z$.

Итак,

$$|e^z|=e^x,$$

$$\arg e^z=y+2\pi n, \qquad n\in Z. \text{ ▲}$$

Отметим **основные свойства** комплексной степени числа e.

1. а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, б) $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$, т. е. для e^z сохраняются обычные свойства степени.

Докажем свойство а).

□ Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, тогда

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)&=\\
=e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2&+\\
+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2))&=\\
=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))&=\\
=e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}=e^{x_1+y_1i+x_2+y_2i}&=e^{z_1+z_2}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Свойство б) доказывается аналогично.

2. Для действительных значений $z=x+0i$

$$e^z=e^x,$$

т. е. комплексная степень числа e в этом случае совпадает с ранее изученной действительной степенью числа e.

□ По формуле (1) имеем

$$e^z=e^{x+0i}=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x. \blacksquare$$

3. Для каждого $n\in Z$ справедливо равенство

$$e^{2\pi ni}=1.$$

□ В самом деле, по формуле (1) получаем

$$e^{2\pi ni}=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n=1. \blacksquare$$

4. Для любого комплексного числа z справедливо равенство

$$e^{z+2\pi ni}=e^z, \qquad n\in Z.$$

□ Действительно, по свойству 1 можем записать

$$e^{z+2\pi ni}=e^ze^{2\pi ni}.$$

Теперь, учитывая свойство 3, получаем

$$e^{z+2\pi ni}=e^z. \blacksquare$$

5. Показательная форма записи комплексного числа. Положим в формуле (1) п. 4 $z=i\varphi$, $\varphi\in R$. Тогда получим

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Эта важная формула называется *формулой Эйлера*.

Ранее было показано, что каждое комплексное число $z\neq 0$ можно представить в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Отсюда и из формулы Эйлера следует, что каждое комплексное число $z \neq 0$ можно записать и в такой форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Запись комплексного числа в виде $z = re^{i\varphi}$ называется *показательной формой записи*. Здесь r — модуль комплексного числа, а φ — его аргумент.

Пример 1. Представить в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

△ Находим модуль числа

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

и один из его аргументов

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

(так как z находится в четвертой четверти). Следовательно,

$$z = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}. \ ▲$$

Показательная форма записи комплексного числа является более компактной по сравнению с тригонометрической.

Умножение и деление комплексных чисел, а также возведение в натуральную степень и извлечение корня, как правило, удобно проводить, предварительно записав комплексные числа в показательной форме.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (1)$$

Здесь мы воспользовались доказанным выше свойством 1а) комплексной степени числа e.

Используя свойство 1б), легко получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (2)$$

Пример 2. Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1 - i}.$$

$\triangle$ Каждое из чисел $-\sqrt{3}+i$, $\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$, $1-i$ представим в показательной форме:

$$-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

$$1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Используя формулы (1) и (2), получаем

$$z=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\pi}. \blacktriangle$$

Зная формулу Эйлера, можно переписать формулу для возведения комплексного числа в натуральную степень следующим образом:

$$(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}. \qquad (3)$$

Формула, дающая все решения уравнения $z^n=w$, благодаря формуле Эйлера также может быть переписана в более компактном виде:

$$z_k=\sqrt[n]{se^{i\psi}}=\sqrt[n]{s}\,e^{i\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (4)$$

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z=(-1+i)^5$.

$\triangle$ Записываем в показательной форме основание степени и применяем формулу (3):

$$(-1+i)^5=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}\,e^{i\frac{15\pi}{4}}=4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}. \blacktriangle$$

Пример 4. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

$\triangle$ Представляем число $\sqrt{3}+i$ в показательной форме и применяем формулу (4):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)},\quad k=0,1,2,3. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Как записываются комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах?

2. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме?

3. Что называется корнем степени $n > 1$ из комплексного числа?

4. Сформулируйте правила умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня для комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

5. Как определяется комплексная степень числа e? Каковы ее свойства? Укажите на комплексной плоскости точки, соответствующие числам $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $3e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $5e^{i\frac{9\pi}{2}}$.

6. Запишите формулу Эйлера.

7. Как записываются комплексные числа в показательной форме?

8. В чем заключаются правила умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня для чисел, записанных в показательной форме?

9. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Как записывается в показательной форме число $\bar{z}$?

Упражнения

1.27. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z=\sqrt{3}-i$; 2) $z=-2$; 3) $z=1$;

4) $z=i^{17}$; 5) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;

6) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 7) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

1.28. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах комплексное число:

1) $z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$;

2) $z=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$; 3) $z=\dfrac{i}{(1+i)^2}$;

4) $z=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$;

5) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

1.29. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z=\dfrac{5(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)\,i}{3(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$;

2) $z=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

1.30. При повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке и удлинении в два раза вектор $z_1=2+5i$ переходит в вектор z_2. Найдите комплексное число, соответствующее вектору z_2.

1.31. Вектор $z=-2+3i$ повернут на 180° и удлинен в 1,5 раза. Найдите комплексное число, соответствующее получившемуся вектору.

1.32. Запишите комплексное число в алгебраической форме:

1) $z=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$; 2) $z=\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;

3) $z=(\cos 31°+i\sin 31°)^{-10}$; 4) $z=\left(\frac{i^8+\sqrt{3}\,i^5}{4}\right)^5$;

5) $z=\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$; 6) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

1.33. Запишите комплексное число в тригонометрической форме:

1) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$; 2) $z=\left(\frac{\sqrt{3}\,i+1}{i-1}\right)^6$;

3) $z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$; 4) $z=(\operatorname{tg} 1-i)^4$;

5) $z=(\operatorname{tg} 2-i)^4$; 6) $z=\left(\sin\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

1.34. При каких целых значениях n справедливо равенство

$$(1+i)^n=(1-i)^n?$$

1.35. Найдите все значения $\sqrt[n]{w}$, если:

1) $w=-i$, $n=2$; 2) $w=-1$, $n=3$;

3) $w=8i$, $n=3$; 4) $w=1$, $n=5$.

1.36. Решите уравнения:

1) $z^3-1=i$; 2) $z^4-i=1$;

3) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$; 4) $z^6+64=0$.

1.37. Запишите число

$$z=\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$$

в алгебраической форме при условии, что действительные части $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

1.38. Найдите корни уравнения

$$z^{10}-z^5-992=0,$$

действительные части которых отрицательны.

1.39. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

1) $z=e^{2-i}$; 2) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$;

3) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

1.40. Представьте в показательной форме комплексное число:

1) $z=-\sqrt{12}-2i$; 2) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.41. Запишите в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $z=5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

2) $z=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{-3}$; 3) $z=(\sqrt{3}-i)^6$;

4) $z=\frac{1}{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^5}$; 5) $z=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+\sqrt{3}\,i)^7}{i}$.

1.42. Используя формулу (4) п. 5, найдите все значения $\sqrt[n]{w}$, если:
1) $w=1,\ n=3$; 2) $w=-1,\ n=4$;
3) $w=-4+\sqrt{48}\,i,\ n=3$;
4) $w=-1-\sqrt{3}\,i,\ n=4$.

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 4. Примеры дифференциальных уравнений

1. Размножение бактерий. На опытах с бактериями установлено, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству, если, конечно, для них имеется достаточный запас пищи.

Так как сами бактерии очень малы, а их количество велико, то можно считать, что масса бактерий с течением времени меняется непрерывно. Тогда скорость прироста массы бактерий называется скоростью размножения.

Если через $x = x(t)$ обозначить массу всех бактерий в момент времени t, то $\frac{dx}{dt}$ будет скоростью размножения этих бактерий. Так как скорость размножения $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству бактерий, то существует постоянная k такая, что

$$\frac{dx}{dt} = kx. \tag{1}$$

По условию $x(t)$ и $x'(t)$ — неотрицательные, поэтому коэффициент k тоже неотрицательный. Очевидно, что интересным является лишь случай $k > 0$, так как при $k = 0$ никакого размножения не происходит.

Уравнение (1) является простейшим примером *дифференциального уравнения*. Оно называется *дифференциальным уравнением размножения*. Искомым неизвестным уравнения (1) является функция $x = x(t)$, которая в уравнение входит вместе со своей производной $x'(t)$.

Легко проверить, что любая функция вида

$$x = Ce^{kt}, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная, является решением уравнения (1). Действительно,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{kt}) = C\frac{d}{dt}e^{kt} = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kx.$$

В § 6 будет доказано, что все решения уравнения (1) задаются формулой (2). Поэтому функция (2), где C — произвольная постоянная, называется *общим решением уравнения* (1).

Сделаем несколько замечаний о том, как используются дифференциальное уравнение (1) и его общее решение (2) при исследовании процесса размножения.

Очевидно, что коэффициент k зависит от вида бактерий и от внешних условий.

Если мы знаем значение коэффициента k и массу m_0 бактерий в некоторый момент времени t_0, то по формуле (2) получим массу бактерий в любой момент времени t. Действительно, пусть

$$x(t_0) = m_0. \tag{3}$$

Тогда

$$m_0 = Ce^{kt_0}, \quad C = m_0e^{-kt_0},$$

и, следовательно,

$$x(t) = m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Функция (4) является решением уравнения (1) и, кроме того, удовлетворяет условию (3).

Условие (3) называется *начальным условием.*

Таким образом, уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, а задание начального условия выделяет единственное решение из этого множества.

На практике часто возникает следующая ситуация. Известно, что размножение некоторого вида бактерий при данных условиях идет по закону $x = x(t)$, удовлетворяющему уравнению вида (1), но неизвестно значение коэффициента k. Требуется определить коэффициент k и найти закон размножения данного вида бактерий при данных условиях.

В этом случае общее решение (2) уравнения (1) содержит две неизвестные постоянные C и k.

Как и выше, из начального условия (3) найдем постоянную C и получим

$$x(t) = m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{5}$$

Для нахождения неизвестного k подсчитаем массу бактерий в некоторый момент времени $t_1 > t_0$; пусть эта масса равна m_1. Тогда

$$m_1 = m_0e^{k(t_1-t_0)}, \quad k(t_1 - t_0) = \ln\frac{m_1}{m_0}$$

и, следовательно,

$$k=\frac{1}{t_1-t_0}\ln\frac{m_1}{m_0}=\frac{\ln m_1-\ln m_0}{t_1-t_0}.$$

Подставив найденное значение коэффициента k в формулу (5), получим

$$x(t)=m_0e^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ln\frac{m_1}{m_0}},$$

или

$$x(t)=m_0\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}.$$

2. Радиоактивный распад. Из эксперимента известно, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна имеющемуся количеству вещества.

Таким образом, если через $x=x(t)$ обозначить массу вещества, еще не распавшегося к моменту времени t, то скорость распада $\frac{dx}{dt}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dx}{dt}=-kx(t), \tag{1}$$

где k — некоторая положительная постоянная.

В уравнении (1) перед k поставлен знак минус, так как $x(t)>0$, а $\frac{dx}{dt}<0$.

Уравнение (1) называется *дифференциальным уравнением радиоактивного распада.*

Можно показать (см. § 6), что любая функция вида

$$x=Ce^{-kt}, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная, является решением уравнения (1) и других решений это уравнение не имеет. Другими словами, формула (2), где C — произвольная постоянная, задает общее решение уравнения (1).

Коэффициент k определяется лишь видом радиоактивного вещества. Постоянная C может быть найдена из начального условия в некоторый момент времени t_0. Действительно, пусть

$$x(t_0)=m_0. \tag{3}$$

Тогда из формулы (2) при $t=t_0$ получаем

$$C=m_0e^{kt_0}.$$

Следовательно, решение

$$x = m_0 e^{-k(t-t_0)} \qquad (4)$$

будет удовлетворять начальному условию (3).

На практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется так называемым *периодом полураспада*, т. е. временем, за которое распадается половина имеющегося вещества. Обозначим период полураспада через T и выразим k через T.

Из (4) при $t = t_0 + T$ имеем

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT},$$

и поэтому

$$kT = \ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Таким образом,

$$x = m_0 e^{-\frac{t-t_0}{T}\ln 2},$$

или

$$x = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

В частности, если $t_0 = 0$, то

$$x = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

3. Общие замечания об уравнениях образования и распада вещества. Многие процессы образования или распада вещества (см. предыдущие пункты) удовлетворяют следующему условию: скорость изменения количества вещества пропорциональна некоторой функции от имеющегося количества вещества в рассматриваемый момент времени.

Пусть $x(t)$ — количество вещества в момент времени t. Тогда для рассматриваемого процесса справедливо уравнение

$$x' = kf(x),$$

где f — некоторая функция от x, характеризующая данный процесс, а k — коэффициент пропорциональности. Коэффициент k может быть постоянным, т. е. не зависеть от времени t, а может и зависеть от t. Например, в уравнении размножения бактерий коэффициент k не будет постоянным, если условия (температура, освещение и т. д.), при которых происходит размножение, меняются во время эксперимента.

Таким образом, в общем случае имеем уравнение

$$x' = k(t) f(x).$$

Такие дифференциальные уравнения будут изучаться в § 6.

4. Дифференциальное уравнение кривой, которая в каждой своей точке имеет заданную касательную. Пусть G — некоторое множество точек M плоскости, на которой введена прямоугольная система координат, и пусть x, y — координаты точки M. Так как между точками плоскости и парами чисел $(x; y)$ имеется взаимно однозначное соответствие, то говорят, что G — множество точек $(x; y)$.

Если каждой точке $(x; y)$ из множества G ставится в соответствие некоторое действительное число $f(x; y)$, то f называется *функцией точки* $(x; y)$ или *функцией двух переменных* x, y, определенной на множестве G, и обозначается $f(x; y)$, $(x; y) \in G$.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Найти уравнение кривой, которая в каждой своей точке с координатами x, y имеет касательную с заданным угловым коэффициентом $f(x; y)$.

Другими словами, надо найти функцию $y = \varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y' = f(x; y), \tag{1}$$

где y' — производная по x от искомой функции. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением*, функция $\varphi(x)$ — его решением, а кривая, заданная уравнением $y = \varphi(x)$, — *интегральной кривой*.

Рассмотрим один частный случай.

Пусть функция f зависит только от x и определена на некотором интервале $(a; b)$. Уравнение

$$y' = f(x) \tag{2}$$

решается в теории неопределенных интегралов. Было показано, что все решения этого уравнения задаются формулой

$$y = \int f(x)\,dx.$$

Эта формула содержит неявно произвольную постоянную C. Действительно, если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$y = F(x) + C. \tag{3}$$

Таким образом, уравнение (2) имеет бесконечное множество решений. Любая кривая, заданная уравнением (3) при фиксированном C, является решением поставленной задачи.

Из теории определенных интегралов известно, что у любой непрерывной функции $f(x)$ имеется первообразная и этой первообразной является интеграл с переменным верхним пределом. Следовательно,

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Кривая, заданная этим уравнением, проходит через точку с координатами x_0, C. Следовательно, через каждую точку $(x_0;\ y_0)$, где $x_0 \in (a;\ b)$, проходит единственная интегральная кривая

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Вопросы для контроля

1. Напишите простейшее дифференциальное уравнение размножения.

2. Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения размножения?

3. Сколько решений имеет дифференциальное уравнение размножения? Что называется начальным условием?

4. Напишите дифференциальное уравнение радиоактивного распада. Сколько решений имеет это уравнение? Как выделить единственное решение?

Упражнеия

2.1. Известно, что за 1 час масса бактерий удваивается и что скорость размножения бактерий прямо пропорциональна наличному количеству бактерий. Для данного вида бактерий напишите дифференциальное уравнение размножения и найдите его общее решение.

2.2. Известно, что за 1 час масса радиоактивного вещества уменьшается на 1%. Напишите дифференциальное уравнение распада и найдите его общее решение.

2.3. Найдите период полураспада радиоактивного вещества, описанного в упр. 2.2.

2.4. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 3 л в минуту подается вода, и одновременно со скоростью 2 л в минуту раствор выливается из бака, причем концентрация раствора остается все время равномерной благодаря перемешиванию. Сколько соли в баке останется через час?

2.5. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству еще не преобразовавшегося вещества. Через час после начала процесса оставалось 31,4 г вещества, через 3 часа — 9,7 г. Сколько вещества было в начале процесса?

2.6. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку M (0; 4), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен ординате этой точки.

2.7. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости (коэффициент пропорциональности равен k). В начальный момент времени $t=0$ угловая скорость была равна ω_0. Определите угловую скорость в произвольный момент времени $t > 0$.

2.8. Согласно закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. За 20 минут при температуре воздуха 20 °C тело охладилось от 100 °C до 60 °C. Определите зависимость температуры тела от времени. Через сколько минут температура тела понизится до 30 °C?

§ 5. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные, называются *дифференциальными уравнениями.*

Если в уравнение входит первая производная и не входят производные более высокого порядка, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* Если же в уравнение входит вторая производная и не входят производные более высокого порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* Аналогично определяются дифференциальные уравнения третьего порядка, четвертого порядка и т. д.

Вообще, *порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной (искомой функции), входящей в это уравнение.

Во многих примерах (см. предыдущий параграф) искомые функции являются функциями времени t. В этом случае искомые функции обозначаются через $x=x(t)$, $y=y(t)$ и т. п. В общем случае независимая переменная, как и обычно, будет обозначаться через x, а искомые функции — через $y=y(x)$, $z=z(x)$ и т. п. Возможны и другие обозначения.

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x;\ y;\ y')=0, \tag{1}$$

где $y=y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y'=y'(x)$ — ее производная по x, а F — заданная функция переменных x, y, y'.

Дифференциальные уравнения, рассмотренные в предыдущем параграфе, имеют вид

$$y' = f(x;\ y). \tag{2}$$

Такие уравнения называются *разрешенными относительно производной*.

Функция $\varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется *решением дифференциального уравнения* (2), если она имеет производную $\varphi'(x)$ *на* $(a;\ b)$ и если для любого $x \in (a;\ b)$ справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x;\ \varphi(x)).$$

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется решением дифференциального уравнения (2), если уравнение (2) при подстановке ее вместо y обращается в тождество по x на интервале $(a;\ b)$.

Аналогично определяется решение дифференциального уравнения (1).

В дальнейшем рассматриваются лишь уравнения, разрешенные относительно производной, т. е. уравнения вида (2), или уравнения, которые приводятся к уравнениям вида (2).

Задание уравнения вида (2) равносильно заданию функции $f(x;\ y)$ переменных x, y. Геометрически функция f переменных x, y — это функция, определенная на некотором множестве G точек плоскости с координатами x, y.

Любая кривая, заданная уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, где $\varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (2), называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (2).

Из этого определения следует, что интегральная кривая уравнения (2) полностью лежит в области G, в которой определена функция f, и что интегральная кривая в каждой своей точке $M(x;\ y)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен значению функции f в этой точке M.

Задача нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*. Условие (3) называется *начальным условием*. Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (3), называется *решением задачи Коши* (2), (3).

Решение задачи Коши имеет простой геометрический смысл. Действительно, согласно данным определениям, решить задачу Коши (2), (3) означает найти интегральную кривую уравнения (2), которая проходит через заданную точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Отметим без доказательства, что если функция $f(x;\ y)$ удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям, то через каждую точку области G, в которой определена функция f, проходит единственная интегральная кривая уравнения (2). Таким образом, это дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Рассмотренные примеры показывают, что множество всех решений дифференциального уравнения, как правило, задается формулой

$$y=\varphi(x;\ C), \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Функция (4), которая при каждом фиксированном значении C как функция от x является решением уравнения (2), называется *общим решением уравнения* (2).

Каждое решение уравнения (2), которое получается из общего решения (4) при конкретном значении постоянной C, называется *частным решением*.

Сделаем последнее замечание относительно уравнений вида (2).

Умножив обе части уравнения (2) на дифференциал независимой переменной dx, получим уравнение, содержащее дифференциалы:

$$dy=f(x;\ y)\,dx. \tag{5}$$

Уравнение (5) также называется дифференциальным уравнением первого порядка. Из определения дифференциала следует, что уравнение (5) равносильно уравнению (2).

Вопросы для контроля

1. Какое уравнение называется дифференциальным?

2. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка?

3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением второго порядка?

4. Что называется порядком дифференциального уравнения?

5. Напишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка.

6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной?

7. Что называется решением дифференциального уравнения $y'=f(x;\ y)$?

8. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$?

9. Как формулируется задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$?

10. Что называется общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$? Как из общего решения получить частное решение?

Упражнения

2.9. Являются ли следующие функции:

1) $y = \sin x - 1$; 2) $y = e^{-\sin x}$;

3) $y = \sin x$,

решениями уравнения

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x?$$

2.10. Являются ли функции:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = -\sqrt{1 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{C - x^2}$ (C — произвольная положительная постоянная), решениями уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0?$$

2.11. Найдите значения α, при которых заданная функция является решением уравнения:

1) $y = e^{\alpha x} + \frac{1}{3} e^x$, $y' + 2y = e^x$; 2) $y = (x^2 - x)^\alpha$, $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$;

3) $y = x^\alpha$, $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.

2.12. При каких значениях A и α функция $y = A \cos^\alpha x$ будет решением уравнения $y' = y \operatorname{tg} x$?

§ 6. Уравнения с разделяющимися переменными

1. Определения и примеры. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — заданные функции, называются *уравнениями с разделяющимися переменными.*

Очевидно, что если число a является решением уравнения $g(y) = 0$, то функция $y = a$ (постоянная) является решением уравнения (1).

Для тех y, для которых $g(y) \neq 0$, уравнение (1) равносильно уравнению

$$p(y)\, y' = f(x), \tag{2}$$

где $p(y) = \frac{1}{g(y)}$. В этом уравнении переменная y присутствует лишь в левой части, а переменная x — лишь в правой части. Поэтому вместо слов «перейдем от уравнения (1) к уравнению (2)» часто говорят «в уравнении (1) разделим переменные».

В дифференциалах уравнение (2) имеет вид

$$p(y)\,dy = f(x)\,dx. \tag{3}$$

Здесь слева стоит дифференциал некоторой функции $P(y)$, зависящей от y, а справа — дифференциал функции $F(x)$, зависящей от x.

Проинтегрировав обе части уравнения (2) по x, получим

$$P(y) = F(x) + C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, если дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, является решением уравнения (2), то она является решением уравнения (4) при некотором значении постоянной C, т. е.

$$P(\varphi(x)) = F(x) + C \tag{5}$$

для любого $x \in (a;\ b)$. И наоборот, если дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, является решением уравнения (4), то она является решением дифференциального уравнения (2). Действительно, дифференцируя по x обе части равенства (5), получаем

$$p(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(x),$$

а это и означает, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2).

Таким образом, любое решение дифференциального уравнения (2) получается из формулы (4). В этом случае будем говорить, что формула (4) *задает общее решение уравнения* (2).

Все решения уравнения (2) являются и решениями уравнения (1); других решений в области, где $g(y) \neq 0$, уравнение (1) не имеет. Если функция $g(y)$ обращается в нуль, то уравнение (1) имеет, кроме того, решения вида $y = a$, где число a таково, что $g(a) = 0$.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y' = 1 + y^2. \tag{6}$$

$\triangle$ Уравнение (6) является уравнением с разделяющимися переменными. Обе части уравнения (6) разделим на $1 + y^2$ и проинтегрируем по x обе части полученного уравнения

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1. \tag{7}$$

Так как левая часть уравнения (7) является производной по x от функции $\operatorname{arctg} y$, где $y = y(x)$, то после интегрирования получим

$$\operatorname{arctg} y = x + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$y = \operatorname{tg}(x + C).$$

Это и есть общее решение уравнения (6). Других решений уравнение (6) не имеет. Схема расположения соответствующих интегральных кривых изображена на рис. 11. Все они получаются из кривой $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом влево или вправо по оси Ox. ▲

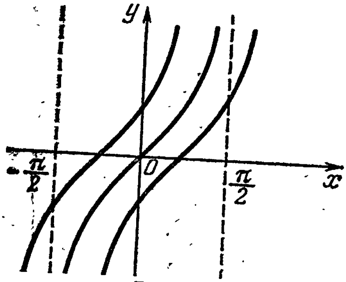


Рис. 11

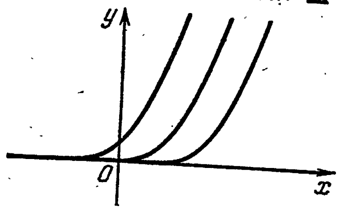


Рис. 12

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$y' = 2\sqrt{y}. \tag{8}$$

△ Уравнение (8) является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, что функция $y = 0$ является его решением.

Пусть теперь $y > 0$. В дифференциалах уравнение (8) имеет вид

$$dy = 2\sqrt{y}\,dx.$$

Разделив переменные в этом уравнении:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$\sqrt{y} = x + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что $y = (x + C)^2$, причем $x + C \geqslant 0$.

Таким образом, при каждом фиксированном значении постоянной C функция

$$y = (x + C)^2, \quad x \geqslant -C,$$

является решением уравнения (8). Других решений это уравнение в полуплоскости $y > 0$ не имеет.

Схема расположения интегральных кривых уравнения (8) изображена на рис. 12. В полуплоскости $y > 0$

каждая интегральная кривая получается из ветви параболы

$$y=x^2, \ x>0,$$

сдвигом влево или вправо по оси Ox. Прямая $y=0$, т. е. ось Ox, также является интегральной кривой.

2. **Правило нахождения общего решения.** Для нахождения общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными следует:

1) разделить переменные, т. е. преобразовать данное уравнение к виду

$$p(y)\,dy=f(x)\,dx; \tag{1}$$

2) проинтегрировать обе части полученного уравнения по y и x соответственно, т. е. найти некоторую первообразную $P(y)$ функции $p(y)$ и некоторую первообразную $F(x)$ функции $f(x)$;

3) написать уравнение

$$P(y)=F(x)+C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Решив уравнение (2) относительно y, получим общее решение дифференциального уравнения (1):

$$y=\varphi(x;\ C),$$

которое называется также *общим решением уравнения*

$$y'=f(x)\,g(y). \tag{3}$$

Заметим, что уравнение (3) может иметь и другие решения. Например, уравнение, у которого $g(y)$ обращается в нуль в точке y_0, имеет решение $y=y_0$. Это решение может не входить в общее решение, т. е. оно не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C. Поэтому, чтобы указать все решения уравнения (3), надо найти еще все решения уравнения $g(y)=0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'=xy. \tag{4}$$

$\triangle$ Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные:

$$\frac{dy}{y}=x\,dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

или

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad (5)$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Правая часть уравнения (4) обращается в нуль при $y=0$, поэтому оно имеет решение $y=0$. Это решение получается из (5) при $C=0$. Таким образом, формула (5), где C — произвольная постоянная, задает все решения уравнения (4). ▲

Пример 2. Найти все решения дифференциального уравнения

$$y' = xy^2.$$

△ Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y \neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{2}{x^2+C},$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что решение $y=0$ не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C. ▲

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

△ Разделив переменные:

$$y\,dy = -x\,dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$y^2 + x^2 = C.$$

Очевидно, что здесь $C > 0$. Положим $C = R^2$.

Полученное уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке (0; 0). Оно при каждом фиксированном $R>0$ определяет две дифференцируемые функции

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}, \qquad x\in(-R;\ R),$$

которые и являются решениями данного уравнения. Других решений это уравнение не имеет.

Интегральными кривыми данного уравнения являются полуокружности, расположенные в нижней и верхней открытых полуплоскостях (рис. 13). ▲

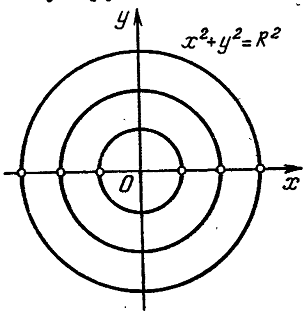


Рис. 13

Замечание. Уравнение, рассмотренное в примере 3, в дифференциалах имеет вид

$$y\,dy+x\,dx=0.$$

В такой записи переменные x и y являются равноправными: можно считать y функцией от x, а можно и наоборот. Поэтому иногда говорят, что интегральными кривыми этого уравнения являются окружности с центром в начале координат.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'=\frac{xy\cos x}{1+y}. \qquad (6)$$

△ Очевидно, что постоянная функция $y=0$ является решением.

Пусть теперь $y\neq0$. Разделим переменные:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=x\cos x\,dx.$$

Проинтегрировав левую часть этого уравнения по y, а правую по x, получим уравнение

$$y+\ln|y|=x\sin x+\cos x+C, \qquad (7)$$

где C — произвольная постоянная.

Чтобы найти общее решение уравнения (6), нужно решить уравнение (7) относительно y. К сожалению, это сделать невозможно, так как решения не выражаются через элементарные функции. Однако задача нахождения общего решения дифференциального уравнения сведена к решению уравнения, не содержащего производных. В этом случае будем говорить, что общее решение уравнения (6) определяется формулой (7). Кривые, координаты точек которых удовлетворяют уравнению (7), при некотором значении постоянной C будут интегральными кривыми уравнения (6). Прямая $y=0$ также будет интегральной кривой уравнения (6). ▲

Вопросы для контроля

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

2. Напишите формулу, задающую общее решение уравнения $p(y)\,dy=f(x)\,dx$.

3. Как найти все решения дифференциального уравнения $y'=f(x)\,g(y)$?

Упражнения

2.13. Решите уравнения:

1) $y'=x+\sin x$; 2) $y'=e^{-y}-1$; 3) $y'=\dfrac{y+1}{x-1}$;
4) $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy=0$; 5) $(\sin x)\,y'=y\ln y$;
6) $y'=e^{x+y}$; 7) $y\sin x\,dx+\cos x\,dy=0$;
8) $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0$;
9) $(1+x)\,dy=2y\,dx$; 10) $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$;
11) $(1+y^2)\,dx-x\,dy=0$.

2.14. Найдите все решения уравнений:

1) $y'=\sqrt[3]{y^2}$; 2) $y'=\sqrt{1-y^2}$;
3) $y'=4x\sqrt{y-1}$; 4) $xy'+y=y^2$;
5) $dy-xy(y+2)\,dx=0$;
6) $\sqrt{y}\sin^2 x\,dx+dy=0$.

2.15. Найдите решение задачи Коши:

1) $tx'=2x$, $x(2)=3$;
2) $(1-t)\,x'-x=0$, $x(0)=1$;
3) $x'=\dfrac{t(1-x^2)}{x(1+t^2)}$, $x(\sqrt{3})=-\dfrac{3}{2}$.

2.16. Найдите интегральные кривые уравнения, проходящие через заданную точку M:

1) $y'=\dfrac{y}{x}$, $M(1;\ 1)$; $M(1;\ 0)$;

2) $dx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0$, $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$.

2.17. Найдите все кривые, обладающие свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с осями координат, то кривая разделит полученный прямоугольник на две фигуры, площади которых относятся как 1:2.

2.18. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 с тело проходит 100 м, за 15 с — 200 м. Какой путь пройдет тело за время t?

2.19. Найдите уравнения интегральных кривых, проходящих через заданную точку M:

1) $(1+e^x)\,yy'=e^y$, $M(0;\ 0)$;

2) $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$, $M(0;\ 1)$.

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Линейные однородные уравнения. Дифференциальные уравнения вида

$$y'=f(x)\,y+g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые заданные функции, называются *линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.* Если $g(x)\equiv 0$, то линейное дифференциальное уравнение (1) называется *однородным*. Оно имеет вид

$$y'=f(x)\,y. \tag{2}$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{y'}{y}=f(x), \quad \frac{dy}{y}=f(x)\,dx.$$

Следовательно, если $y\neq 0$, то

$$\ln|y|=\int f(x)\,dx.$$

Обозначим через $F(x)$ какую-нибудь первообразную функции $f(x)$. Тогда

$$\ln|y|=F(x)+C_1, \quad |y|=e^{C_1}\cdot e^{F(x)},$$

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что общее решение уравнения (2) задается формулой

$$y=Ce^{F(x)}, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная. В частности, при $C=0$ получается решение $y=0$.

Напомним, что линейное однородное уравнение $y'=ky$, где k — некоторая постоянная, уже изучалось. Было показано, что его общее решение имеет вид

$$y=Ce^{kx}.$$

Обычно формула (3) для общего решения линейного однородного уравнения (2) записывается в следующем виде:

$$y=Ce^{\int f(x)\,dx}. \tag{4}$$

Пример. Решить уравнение $y'=y\sin x$.

△ По формуле (4) получаем

$$y = Ce^{\int \sin x\, dx} = Ce^{-\cos x}. \blacktriangle$$

2. Общее решение линейного уравнения первого порядка. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x)\, y + g(x) \tag{1}$$

называется *неоднородным*, если $g(x) \not\equiv 0$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид $y' = g(x)$. Как известно, общее решение этого уравнения задается формулой

$$y = \int g(x)\, dx \quad \text{или} \quad y = G(x) + C,$$

где $G(x)$ — некоторая первообразная функции $g(x)$, а C — произвольная постоянная.

Докажем теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения (1).

Теорема. *Если $y = \varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (1), то все решения этого уравнения задаются формулой*

$$y = Ce^{\int f(x)\, dx} + \varphi(x), \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Другими словами, общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения данного уравнения.

□ Формулу (2) запишем в следующем виде:

$$y = Ce^{F(x)} + \varphi(x), \tag{3}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$. Подстановкой функции (3) в уравнение (1) убеждаемся, что эта функция при любом значении постоянной C является решением уравнения (1). Действительно, так как $\varphi'(x) = f(x)\,\varphi(x) + g(x)$, то

$$y' = Ce^{F(x)} \cdot F'(x) + \varphi'(x) = Ce^{F(x)} \cdot f(x) + f(x)\,\varphi(x) + g(x) = f(x)\, y + g(x).$$

Пусть теперь $\psi(x)$ — некоторое решение уравнения (1). Тогда функция $y = \psi(x) - \varphi(x)$ является решением линейного однородного уравнения $y' = f(x)\, y$. Действительно,

$$y' = \psi'(x) - \varphi'(x) = f(x)\,\psi(x) + g(x) - f(x)\,\varphi(x) - g(x) = f(x)\,(\psi(x) - \varphi(x)) = f(x)\, y.$$

Поэтому существует постоянная C такая, что

$$\psi(x)-\varphi(x)=Ce^{F(x)},$$

так как любое решение уравнения $y'=f(x)y$ имеет вид $Ce^{F(x)}$. Следовательно,

$$\psi(x)=Ce^{F(x)}+\varphi(x).$$

Таким образом, любое решение уравнения (1) получается по формуле (3) (или (2)) при некотором значении постоянной C. ■

Из доказанной теоремы следует, что для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти хотя бы одно его частное решение.

Для линейного уравнения вида

$$y'=ky+b, \tag{4}$$

где k и b — некоторые числа и $k\neq 0$, частное решение легко находится. Им будет, как легко проверить, постоянная функция $y=-\frac{b}{k}$. Поэтому общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y=Ce^{kx}-\frac{b}{k}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y'+2y+3=0.$$

△ У этого уравнения $k=-2$, $b=-3$.

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y=Ce^{-2x}-\frac{3}{2},$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'+xy=4x.$$

△ Подбором находим, что функция $y=4$ является решением данного линейного неоднородного уравнения. Найдем теперь общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'+xy=0.$$

По формуле (4) из п. 1 получаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

По доказанной теореме общее решение данного линейного неоднородного уравнения задается формулой

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 4,$$

где C — произвольная постоянная. ▲

3. **Метод вариации постоянной.** Укажем метод отыскания частного решения неоднородного уравнения

$$y' = f(x)\,y + g(x). \tag{1}$$

Пусть

$$y = Ce^{F(x)} \tag{2}$$

является общим решением линейного однородного уравнения

$$y' = f(x)\,y, \tag{3}$$

тогда частное решение неоднородного уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$y = u(x)\,e^{F(x)}, \tag{4}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция. Подставив функцию (4) в уравнение (1), получим

$$u'e^F + ue^F f = fue^F + g$$

и, окончательно,

$$u' = g(x)\,e^{-F(x)}.$$

Следовательно, функция $u(x)$ является некоторой первообразной для функции $g(x)\,e^{-F(x)}$.

Таким образом, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (1), надо в общем решении (2) соответствующего однородного уравнения (3) постоянную C заменить некоторой первообразной для функции $g(x)\,e^{-F(x)}$.

Этот метод нахождения частного решения называется *методом вариации постоянной.*

Пример 1. Решить уравнение

$$y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{5}$$

△ Для этого уравнения частное решение найти подбором не удается. Найдем его методом вариации постоянной.

Так как общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2},$$

то частное решение неоднородного уравнения следует искать в следующем виде:

$$y=u(x)e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

где $u(x)$ — неизвестная функция. Подставив в уравнение, получим

$$u'=e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}=1.$$

Отсюда находим

$$u(x)=x.$$

Следовательно, частное решение уравнения (5) имеет вид

$$y=xe^{-\frac{1}{2}x^2},$$

а общее решение, согласно теореме п. 2, выражается формулой

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}+xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad (6)$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Пример 2. Найти частное решение уравнения (5), которое удовлетворяет условию $y(0)=1$.

△ Из формулы (6) для общего решения и условия $y(0)=1$ находим $C=1$, поэтому решением поставленной задачи будет

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}+xe^{-\frac{1}{2}x^2}. \ ▲$$

Вопросы для контроля

1. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?

2. Какой вид имеет однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка?

3. Напишите формулу общего решения для уравнения $y'=f(x)y$.

4. Когда линейное дифференциальное уравнение первого порядка называется неоднородным?

5. Напишите формулу для общего решения линейного неоднородного уравнения.

6. Что находится методом вариации постоянной?

7. Опишите метод вариации постоянной.

Упражнения

2.20. Решите уравнения:

1) $x'=-\frac{2x}{t}+t^2$; 2) $x'=2t-2tx$;

3) $x'+x\,\mathrm{tg}\,t=\frac{1}{\cos t}$;

4) $x' = 2tx + (t - t^3) e^{t^2}$;

5) $t(t^3+1)x' + (2t^3 - 1)x = x^2 - \frac{2}{x}$.

2.21. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию:

1) $(9 - t^2)x' + tx = 9, \quad x(3) = 3$;

2) $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}, \quad x(0) = 0$;

3) $x' = x \sin t + 2 \sin 2t, \quad x(0) = 1$;

4) $(t+1)\,dx = (2x + (t+1)^4)\,dt, \quad x(0) = 2$.

2.22. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение V, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найдите зависимость силы тока от времени.

2.23. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника тока, напряжение которого меняется по закону $E = V \sin \omega t$, сопротивления R и самоиндукции L. Найдите силу тока в цепи при установившемся режиме.

§ 8. Примеры дифференциальных уравнений второго порядка

1. Уравнение движения точки. Рассмотрим движение точки P массы m по прямой l под действием силы F. Для этого на l выберем некоторую точку O и некоторое направление, например слева направо (рис. 14). Тогда положение точки P на прямой l в момент времени t характеризуется координатой $x = x(t)$.

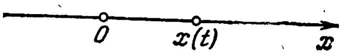


Рис. 14

Как известно, первая производная $x'(t)$ является скоростью точки P, а вторая производная $x''(t)$ — ускорением точки P в момент времени t. Поэтому в силу второго закона Ньютона справедливо следующее уравнение:

$$mx''(t) = F, \tag{1}$$

которое называется *уравнением движения точки* P.

В общем случае сила F в уравнении (1) может зависеть от времени t, от положения точки x и от скорости $x'(t)$, т. е. в общем случае уравнение (1) имеет вид

$$mx'' = F(t;\ x;\ x'), \tag{2}$$

где F — заданная функция переменных t, x, x'.

Так как уравнение (2) содержит производную второго порядка, то оно является дифференциальным уравнением второго порядка.

Функция $\varphi(t)$, $t \in (a;\ b)$, называется *решением уравнения* (2), если она имеет производные $\varphi'(t)$ и $\varphi''(t)$ на интервале $(a;\ b)$ и если для любого $t \in (a;\ b)$ справедливо равенство

$$m\varphi''(t)=F(t;\ \varphi(t);\ \varphi'(t)),$$

т. е. если уравнение обращается в тождество по t при подстановке $\varphi(t)$ вместо x.

Как известно из физики, для однозначного описания движения точки, кроме уравнения движения, необходимо задать положение и скорость точки в некоторый момент времени t_0:

$$x(t_0)=x_0,\ \ x'(t_0)=v_0. \tag{3}$$

Условия (3) называются *начальными условиями* или *условиями Коши*, а задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), называется *задачей Коши*. Доказывается, что для широкого класса уравнений (2) задача Коши имеет единственное решение.

2. Движение точки под действием постоянной силы. Рассмотрим сначала случай, когда сила F не меняется в процессе движения точки P, т. е. когда сила F постоянная. Тогда уравнение движения имеет вид

$$x''=a, \tag{1}$$

где $a=\frac{F}{m}$. Из уравнения (1) следует, что скорость $v=x'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$v'=a. \tag{2}$$

Как известно из теории неопределенных интегралов, формула

$$v=at+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, задает все решения уравнения (2). Следовательно, решение уравнения второго порядка (1) сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$x'=at+C_1. \tag{3}$$

Интегрированием по t получаем

$$x=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2, \tag{4}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, формула (4) содержит все решения уравнения (1), и поэтому она называется *общим решением уравнения* (1).

Общее решение дифференциального уравнения (1) второго порядка содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. При каждых конкретных значениях постоянных C_1 и C_2 в формуле (4) получаются решения, которые называются *частными решениями*.

Чтобы получить частное решение, зададим начальные условия:

$$x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0. \tag{5}$$

Тогда для нахождения C_1 и C_2 получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}at_0^2+C_1t_0+C_2=x_0, \\ at_0+C_1=v_0. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно C_1 и C_2 и подставив найденные значения в формулу (4), получим решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (5).

Однако на практике для нахождения решения задачи Коши (1), (5) поступают следующим образом.

Интегрируя по t от t_0 до t обе части уравнения (1):

$$\int_{t_0}^{t} x''(t)\,dt=\int_{t_0}^{t} a\,dt,$$

по формуле Ньютона—Лейбница получают дифференциальное уравнение первого порядка

$$x'(t)-x'(t_0)=a(t-t_0).$$

Снова интегрируя по t от t_0 до t, получают

$$x(t)-x(t_0)-x'(t_0)(t-t_0)=\frac{a}{2}(t-t_0)^2.$$

Следовательно,

$$x=\frac{a}{2}(t-t_0)^2+x'(t_0)(t-t_0)+x(t_0).$$

Теперь, чтобы получить решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), нужно вместо $x(t_0)$ написать x_0, а вместо $x'(t_0)$ написать v_0.

Таким образом, решение задачи Коши (1), (5) имеет вид

$$x=\frac{a}{2}(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+x_0.$$

Пример. Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести. Для этого ось Ox направим вертикально вниз и, для простоты, положим $t_0=0$. Тогда уравнение движения имеет вид $x''=g$, где $g\approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Решая это уравнение, получаем

$$x=\frac{gt^2}{2}+v_0t+x_0.$$

3. Движение точки под действием периодической силы. Пусть сила F, действующая на точку P массы m, зависит от времени t следующим образом:

$$F=A\cos(\omega t+\alpha),$$

где $A>0$ и $\omega>0$.

Тогда уравнение движения имеет вид

$$mx''=A\cos(\omega t+\alpha).$$

Найдем решения этого уравнения. Для этого обе его части проинтегрируем по t от t_0 до t. Тогда

$$mx'(t)-mx'(t_0)=A\int_{t_0}^{t}\cos(\omega t+\alpha)\,dt=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha)\Big|_{t_0}^{t}=$$
$$=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha)-\frac{A}{\omega}\sin(\omega t_0+\alpha)$$

и, следовательно,

$$x'(t)=\frac{A}{\omega m}\sin(\omega t+\alpha)+x'(t_0)-\frac{A}{\omega m}\sin(\omega t_0+\alpha).$$

Снова интегрированием по t от t_0 до t получаем

$$x(t)-x(t_0)=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t_0+\alpha)+$$
$$+\left(x'(t_0)-\frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0+\alpha)\right)(t-t_0).$$

Таким образом,

$$x=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t_0+\alpha)+$$
$$+\left(v_0-\frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0+\alpha)\right)(t-t_0)+x_0,$$

где $x_0=x(t_0)$, $v_0=x'(t_0)$. В частности, если $t_0=0$, то

$$x=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos\alpha+\left(v_0-\frac{A}{m\omega}\sin\alpha\right)t+x_0.$$

Отметим, что полученное решение содержит две произвольные постоянные — начальные данные x_0 и v_0.

4. Движение точки под действием силы, пропорциональной скорости. Пусть на точку P массы m действуют две силы: постоянная сила F, направленная в сторону движения точки, и сила, пропорциональная скорости и направленная против движения. Тогда уравнение движения точки P имеет вид

$$mx'' = F - kx', \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, причем $k > 0$.

Проинтегрировав по t обе части уравнения (1), получим

$$mx' = Ft - kx + C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение (2) является линейным уравнением. Чтобы найти его общее решение, нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$mx' = -kx \tag{3}$$

и какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (2).

Общее решение уравнения (3) задается формулой

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Найдем частное решение уравнения (2). Это частное решение будем искать в виде линейной функции

$$x = At + B \tag{4}$$

с неизвестными коэффициентами A и B.

Для определения A и B функцию (4) подставим в уравнение (2):

$$Am = Ft - kAt - kB + C.$$

Так как это равенство должно быть справедливым для любого t, то при $t = 0$ получаем уравнение

$$Am = -kB + C,$$

а при $t = 1$ — уравнение

$$F - kA = 0.$$

Таким образом,

$$A = \frac{F}{k}, \quad B = \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2},$$

а функция

$$x = \frac{F}{k}t + \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}$$

является частным решением уравнения (2).

Согласно теореме, доказанной в предыдущем параграфе, общее решение уравнения (2) задается формулой

$$x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{F}{k} t + \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}.$$

Положим

$$C_2 = \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}.$$

Очевидно, что если C — произвольная постоянная, то и C_2 — произвольная постоянная. Поэтому общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} + C_2 + \frac{F}{k} t. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что движение точки P происходит почти с постоянной скоростью, равной $\frac{F}{k}$. Этот факт широко используется на практике. Например, на этом основано применение парашюта. Когда человек спускается на парашюте, на него действует сила тяжести $F = mg$ и сила сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости и направлена против движения. Движение (спуск) человека на парашюте описывается уравнением вида (5).

Вопросы для контроля

1. Напишите уравнение движения точки массы m по прямой под действием силы F.

2. Что называется задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка?

3. Напишите общее решение уравнения движения точки под действием постоянной силы. Сколько произвольных постоянных содержит это общее решение?

4. Напишите уравнение движения точки под действием периодической силы. Сколько произвольных постоянных содержит его общее решение?

5. Напишите уравнение движения точки по прямой под действием силы, пропорциональной скорости.

Упражнения

2.24. Лодке сообщена начальная скорость $v_0 = 6$ м/с. Через 69 секунд после начала движения скорость лодки уменьшилась вдвое. Найдите закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

2.25. Тело массы m брошено вертикально вверх со скоростью v_0. На него действует сила тяжести и сила сопротивления, равная $2kmv$. Найдите расстояние тела от точки бросания в момент времени t.

2.26. Пуля входит в доску толщины h см со скоростью v_0 м/с, а вылетает из доски со скоростью v_1 м/с. Определите время движения пули через доску, если известно, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости пули.

2.27. Напишите уравнение прямолинейного движения точки массы m под действием силы $F=t^2$ и найдите общее решение полученного уравнения.

2.28. Решите уравнение

$$2x''+t^3=1.$$

2.29. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} x''=5t^2+0{,}1; \\ x(0)=1; \quad x'(0)=0. \end{cases}$$

§ 9. Гармонические колебания

1. Уравнение гармонических колебаний. Рассмотрим уравнение

$$x''+\omega^2 x=0, \tag{1}$$

где ω — некоторое положительное число.

Непосредственной подстановкой проверяется, что функция

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{2}$$

для любых постоянных A и α является решением уравнения (1). Можно показать, что других решений уравнение (1) не имеет. Это утверждение примем без доказательства.

Таким образом, формула (2) задает общее решение уравнения (1).

Функция (2) при любых заданных A, ω и α описывает *гармонический колебательный процесс*. Число $|A|$ называется *амплитудой*, а число α — *начальной фазой* или просто *фазой* колебания (2). Уравнение (1) называется *уравнением гармонических колебаний*. Положительное число ω называется *частотой* колебания. Легко подсчитать, что число колебаний в единицу времени определяется формулой

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Отметим, что общее решение (2) уравнения (1) содержит две произвольные постоянные: амплитуду A и начальную фазу α. Для их определения нужно задать два условия, например, можно задать два начальных условия задачи Коши:

$$x(t_0)=x_0, \qquad x'(t_0)=v_0. \tag{3}$$

Тогда для определения постоянных A и α получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} A\cos(\omega t_0+\alpha)=x_0, \\ -A\omega\sin(\omega t_0+\alpha)=v_0. \end{cases} \tag{4}$$

Из нее следует, что

$$A^2\cos^2(\omega t_0+\alpha)+A^2\sin^2(\omega t_0+\alpha)=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2},$$

и, следовательно,

$$A^2=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $A>0$,

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Теперь, зная амплитуду A, из системы (4) по формулам тригонометрии находится начальная фаза α.

Из формулы (2) легко получить другой вид общего решения уравнения (1). Действительно,

$$x=A(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)= \\ =A\cos\alpha\cos\omega t-A\sin\alpha\sin\omega t.$$

Положив здесь $C_1=A\cos\alpha$, $C_2=-A\sin\alpha$, получим

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t. \tag{5}$$

При решении конкретных задач следует использовать как формулу (2), так и формулу (5).

Например, если по условию задачи известны амплитуда и начальная фаза колебания, то, конечно, следует пользоваться формулой (2). Однако для решения задачи Коши с начальными условиями

$$x(0)=x_0, \qquad x'(0)=v_0 \tag{6}$$

удобнее пользоваться формулой (5).

Пример. Решить задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями (6).

Δ Согласно формуле (5) общее решение данного уравнения имеет вид

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$$

Из первого начального условия $x(0)=x_0$ получаем $C_1=x_0$. А так как

$$x' = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t,$$

то в силу второго начального условия $x'(0)=v_0$ находим $v_0=C_2\omega$, т. е. $C_2=\frac{v_0}{\omega}$. Таким образом, функция

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

является решением задачи Коши (1), (6), и других решений эта задача не имеет. ▲

2. Колебания точки под действием упругой силы. Рассмотрим движение точки P массы m под действием силы F, с которой на точку P действует некоторая упругая пружина, как это показано на рис. 15.

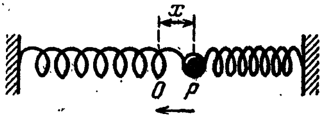


Рис. 15

Для составления уравнения движения точки P на прямой, по которой движется точка P, введем координату x, приняв за начало O положение равновесия точки P, а за положительное направление — направление слева направо. Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки имеет вид

$$mx'' = F.$$

По закону Гука упругая сила F прямо пропорциональна отклонению точки P от положения равновесия и направлена против движения. Поэтому

$$F = -kx,$$

где число $k>0$ называется *коэффициентом упругости* данной пружины.

Таким образом, уравнение движения точки P имеет вид

$$mx'' + kx = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Поэтому его общее решение имеет вид

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right),$$

или

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$$

Согласно общим формулам, решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0 \tag{2}$$

будет функция

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$$

Амплитуда этого гармонического колебания вычисляется по формуле

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}\,.$$

Заметим, что частота колебания точки P не зависит от начальных условий; она определяется лишь массой точки P и упругостью пружины. Амплитуда A существенно зависит от начальных условий, то же самое можно сказать и о начальной фазе.

Рассмотрим два частных случая решения задачи Коши (1), (2).

Пусть $v_0 = 0$ и $x_0 > 0$. Тогда

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,$$

т. е. $A = x_0$ и $\alpha = 0$. Эта функция описывает гармонические колебания точки P массы m, которая в начальный момент времени $t_0 = 0$ была выпущена из точки с координатой $x_0 > 0$ с нулевой скоростью.

Пусть теперь $x_0 = 0$ и $v_0 > 0$. Тогда

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

и, следовательно, $A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Эта функция описывает гармонические колебания точки P, которая в начальный момент времени $t_0 = 0$ была выпущена из положения равновесия со скоростью v_0.

3. Колебания математического маятника. Математический маятник представляет собой точку P массы m, которая под действием силы тяжести движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости. Радиус этой окружности называется *длиной маятника*.

На окружности движения маятника введем угловую координату φ, приняв за точку O самую нижнюю точку окружности, а за положительное направление — направление слева направо (рис. 16).

Точка P находится под действием силы тяжести $F = mg$, направленной вертикально вниз. Разложим F на две составляющие F_1 и F_2. Составляющая F_1, направленная по радиусу окружности, не производит движения: она уравновешивается другими силами. Составляющая F_2, направленная по касательной к окружности, является той силой, которая приводит в движение по окружности точку P. Величина силы F_2 равна $mg \sin \varphi$, и эта сила направлена против возрастания угла φ, поэтому уравнение движения математического маятника имеет вид

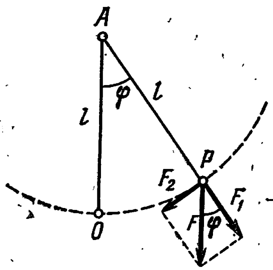


Рис. 16

$$ml\varphi'' = -mg \sin \varphi,$$

где φ'' — угловое ускорение, а $l\varphi''$ — линейное ускорение точки P.

Сократив на m, получим уравнение

$$l\varphi'' + g \sin \varphi = 0,$$

которое и называется *уравнением математического маятника.*

Решение этого уравнения представляет большие трудности.

Если рассматривать только малые колебания маятника, т. е. считать, что координата φ по модулю мала, то $\sin \varphi$ можно заменить на φ. В результате получим приближенное уравнение

$$l\varphi'' + g\varphi = 0.$$

Оно называется *уравнением малых колебаний математического маятника.* Очевидно, что это уравнение является уравнением гармонических колебаний с $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Его общее решение имеет вид

$$\varphi = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \alpha\right),$$

или

$$\varphi = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Как и в предыдущем пункте, можно рассмотреть задачу Коши с соответствующими начальными условиями и найти ее решение.

Отметим, что частота ω малых колебаний маятника зависит лишь от длины маятника и убывает с возрастанием длины.

Число малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где $g \approx 9{,}8$ м/с^2, а l — длина маятника в метрах.

Вопросы для контроля

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением гармонических колебаний?

2. Какая функция описывает гармонический колебательный процесс?

3. Что называется амплитудой, начальной фазой и частотой гармонических колебаний?

4. Что нужно задать, чтобы из общего решения выделить частное решение?

5. Напишите уравнение движения точки под действием упругой силы.

6. Напишите уравнение математического маятника.

7. Напншите уравнение малых колебаний математического маятника.

8. Как, зная длину маятника, определить число его малых колебаний в секунду?

Упражнения

2.30. Найдите уравнение гармонических колебаний, которому удовлетворяет функция $x = \sin t + \cos t$.

2.31. Какая из функций описывает гармонический колебательный процесс:

1) $x = \sin t + \cos t$; 2) $x = t \sin t$;
3) $x = \sin t + \cos 2t$; 4) $x = \cos t + 1$?

2.32. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия малым горизонтальным перемещением точки подвеса на расстояние a. Найдите отклонение маятника.

2.33. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины l лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определите движение цепочки во время ее соскальзывания со стола и найдите время соскальзывания.

§ 10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Дифференциальные уравнения второго порядка. В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'')=0, \tag{1}$$

где $y=y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y'=y'(x)$ и $y''=y''(x)$ — ее производные по x первого и второго порядков, а F — заданная функция переменных x, y, y', y''.

Функция $\varphi(x)$, $x\in(a;\ b)$, называется *решением дифференциального уравнения* (1), если она имеет производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ и если для любого $x\in(a;\ b)$ справедливо равенство

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \varphi''(x))=0.$$

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x\in(a;\ b)$, называется решением уравнения (1), если при подстановке $\varphi(x)$ вместо y это уравнение обращается в тождество по x.

Дифференциальное уравнение вида

$$y''=f(x;\ y;\ y'), \tag{2}$$

где f — заданная функция переменных x, y, y', называется *уравнением, разрешенным относительно второй производной*. При достаточно общих предположениях доказано, что для любых *начальных условий*

$$y(x_0)=y_0,\qquad y'(x_0)=y_0', \tag{3}$$

принадлежащих области определения функции f, существует, и притом единственное, решение $y=y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3).

Мы не будем давать строгой формулировки этого утверждения. Заметим лишь, что оно составляет основное содержание одной из фундаментальных теорем теории дифференциальных уравнений — *теоремы Коши*.

2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения вида

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

где p и q — некоторые числа, называются *линейными дифференциальными уравнениями второго порядка*. Функция $f(x)$ называется *свободным членом* или *правой частью* уравнения (1).

Если $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется *линейным однородным уравнением*. Оно имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (2)$$

В этом пункте будем изучать только уравнения вида (2).

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y'' - y = 0. \quad (3)$$

△ Легко проверить, что функция $y = e^x$ является решением данного уравнения. Аналогично проверяется, что и функция $y = e^{-x}$ является решением уравнения (3). Покажем, что при любых постоянных C_1 и C_2 функция

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (4)$$

является решением уравнения (3). Имеем

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x},$$
$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = y,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, любая функция вида (4) является решением уравнения (3). Более того, других решений это уравнение не имеет. Действительно, пусть $y = \varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (3) и пусть

$$\varphi(0) = y_0, \quad \varphi'(0) = y_0'. \quad (5)$$

Найдем функцию вида (4), которая удовлетворяет этим условиям. Имеем

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2, \\ y_0' = C_1 - C_2, \end{cases}$$

и поэтому

$$C_1 = \frac{y_0 + y_0'}{2}, \quad C_2 = \frac{y_0 - y_0'}{2}.$$

Следовательно, функция

$$y = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-x}$$

является решением задачи Коши (3), (5).

В силу единственности решения задачи Коши

$$\varphi(x) = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-x},$$

т. е. функция $\varphi(x)$ получается из (4) при соответствующих значениях постоянных C_1 и C_2.

Таким образом, формула (4) задает общее решение уравнения (3). ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$y''-4y=0. \tag{6}$$

△ Как и в примере 1, решение этого уравнения будем искать в виде

$$y=e^{\lambda x},$$

где λ — неизвестное число. Подставив эту функцию в уравнение, получим

$$\lambda^2 e^{\lambda x}-4e^{\lambda x}=0.$$

Следовательно, функция вида $e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (6) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2-4=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют два числа $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-2$, и поэтому функции e^{2x} и e^{-2x} являются решениями уравнения (6) (что, в частности, проверяется и непосредственно).

Теперь, как и в примере 1, можно показать, что общее решение уравнения (6) задается формулой

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

3. Характеристическое уравнение. Рассмотренные примеры наводят на мысль — попытаться и в общем случае искать решения вида $e^{\lambda x}$. Пусть задано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0. \tag{1}$$

Подставим функцию $e^{\lambda x}$ в уравнение (1):

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0.$$

Отсюда следует, что функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (1).

Заметим, что характеристическое уравнение получается из дифференциального заменой y'' на λ^2, y' на λ и y на 1.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет два действительных решения λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{3}$$

где C_1 и C_2—произвольные постоянные.

Тот факт, что функция (3) удовлетворяет уравнению (1), проверяется непосредственной подстановкой, а то, что других решений уравнение (1) не имеет, следует из теоремы Коши (для уравнения (1) все ее условия выполнены).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \tag{4}$$

△ Напишем характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. По формуле (3) получаем общее решение уравнения (4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}. \ ▲$$

4. Случай комплексных решений характеристического уравнения. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Пусть его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

не имеет действительных решений. В этом случае

$$q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Обозначим это число через ω^2. Уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных решения:

$$\lambda = \alpha + i\omega \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\omega,$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$.

Тогда

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos \omega x + i \sin \omega x).$$

Рассмотрим действительную и мнимую части этой комплекснозначной функции:

$$e^{\alpha x} \cos \omega x, \quad e^{\alpha x} \sin \omega x.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти функции являются решениями дифференциального уравнения (1). (Проверьте самостоятельно.)

Как и выше, можно показать, что в этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \omega x + C_2 e^{\alpha x} \sin \omega x, \tag{3}$$

где C_1 и C_2—произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

△ Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет два комплексно сопряженных решения: $\lambda = -1 + i$ и $\bar{\lambda} = -1 - i$.

Найдем действительную и мнимую части функции $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} = e^{-x} (\cos x + i \sin x) = e^{-x} \cos x + i e^{-x} \sin x.$$

А затем по формуле (3) находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x. \ \blacktriangle$$

Замечание. К этому типу уравнений относится уравнение гармонических колебаний

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

5. Случай, когда характеристическое уравнение имеет одно решение. Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{1}$$

соответствующее дифференциальному уравнению

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2}$$

имеет один корень $\lambda = \alpha$ кратности 2. Тогда $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2$. Как и выше, легко проверяется, что функция $e^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Покажем, что в этом случае и функция $xe^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Имеем

$$y = xe^{\alpha x}, \quad y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}, \quad y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

и, далее,

$$y''+py'+qy=2\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2xe^{\alpha x}+pe^{\alpha x}+p\alpha xe^{\alpha x}+qxe^{\alpha x}=$$
$$=e^{\alpha x}(2\alpha+p)+xe^{\alpha x}(\alpha^2+p\alpha+q)=$$
$$=e^{\alpha x}(2\alpha-2\alpha)+xe^{\alpha x}(\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2)=0.$$

Таким образом, функции $e^{\alpha x}$ и $xe^{\alpha x}$ являются решениями уравнения (2), и поэтому любая функция вида

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x} \qquad (3)$$

также является решением уравнения (2). Из теоремы Коши следует, что других решений это уравнение не имеет.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+y=0.$$

△ Характеристическое уравнение имеет одно решение $\lambda=1$. Следовательно (см. формулу (3)), общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2xe^x,$$

где C_1 и C_2—произвольные постоянные. ▲

6. Неоднородные линейные уравнения. Сделаем несколько замечаний относительно неоднородных линейных дифференциальных уравнений

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (1)$$

Как и в случае линейных дифференциальных уравнений первого порядка, общее решение уравнения (1) является суммой некоторого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0. \qquad (2)$$

Используя это замечание, рассмотрим два примера.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'-3y=1. \qquad (3)$$

△ Подбором находим, что функция $y=-\frac{1}{3}$ является частным решением уравнения (3). Найдем теперь общее решение линейного однородного уравнения

$$y''+2y'-3y=0. \qquad (4)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

имеет решения $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$. Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$$

Так как общее решение неоднородного уравнения является суммой некоторого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения, то общее решение уравнения (3) задается формулой

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'-3y=x. \qquad (5)$$

$\triangle$ Частное решение уравнения (5) будем искать в виде

$$y=Ax+B,$$

где A и B — неизвестные числа. Подставив эту функцию в уравнение (5), получим

$$2A-3Ax-3B=x.$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{cases} 2A-3B=0, \\ -3A=1, \end{cases}$$

и поэтому

$$A=-\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{2}{9}.$$

Следовательно, функция

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}$$

является частным решением уравнения (5), а его общее решение (см. пример 1) имеет вид

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}. \ \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Как записать в общем случае дифференциальное уравнение второго порядка?
2. Что называется решением дифференциального уравнения второго порядка?
3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно второй производной?

4. Запишите в общем виде линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

5. Какое дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным однородным уравнением?

6. Что называется характеристическим уравнением? Для каких дифференциальных уравнений оно определено?

7. Напишите общее решение линейного однородного уравнения в случае, когда характеристическое уравнение имеет два (различных) действительных решения.

8. Напишите общее решение линейного однородного уравнения в случае, когда характеристическое уравнение не имеет действительных решений.

9. Напишите общее решение линейного однородного уравнения в случае, когда характеристическое уравнение имеет одно решение.

10. Как получить общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка?

Упражнения

2.34. Решите уравнения:
1) $x''-2x'=0$; 2) $x''+5x'+6x=0$;
3) $3x''-2x'-8x=0$; 4) $x''+4x'+13x=0$;
5) $x''+x'+x=0$; 6) $x''-6x'+9x=0$;
7) $x''-x=2$; 8) $x''+2x'=2$;
9) $x''+9x=9$; 10) $x''-2x'-3x=e^{4t}$;
11) $x''-3x'+2x=\sin t$; 12) $x''+x=4\sin t$.

2.35. Найдите решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:
1) $x''-3x'+2x=0$, $x(0)=2$, $x'(0)=3$;
2) $x''+2x'+5x=0$, $x(0)=x'(0)=1$;
3) $x''+6x'+9x=0$, $x(0)=2$, $x'(0)=1$;
4) $x''+2x'+2x=0$, $x(0)=a$, $x'(0)=b$;
5) $x''-x'-6x=2$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$;
6) $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;
7) $x''+4x=2\cos 2t$, $x(0)=0$, $x(0)=4$.

2.36. При каких значениях α и β все решения уравнения

$$x''+\alpha x'+\beta x=0$$

являются периодическими функциями?

2.37. При каких значениях α уравнение

$$x''+\alpha x=0$$

имеет решения, удовлетворяющие условиям $x(0)=x(\pi)=0$?

Глава 3

КОМБИНАТОРИКА И ФОРМУЛА НЬЮТОНА ДЛЯ СТЕПЕНИ БИНОМА

§ 11. Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания

1. Примеры простейших комбинаторных задач. Понятие выборки. В математике и других науках, в повседневной жизни часто приходится решать задачи, в которых требуется из элементов некоторого конечного множества составлять различные комбинации, удовлетворяющие каким-либо условиям, и подсчитывать число всех таких комбинаций. Такие задачи получили название *комбинаторных*. Раздел математики, занимающийся решением таких задач, называют *комбинаторикой*. Методы комбинаторики находят широкое применение в теории вероятностей, в теории управляющих систем, в разработке и эксплуатации вычислительных машин. Хотя отдельными комбинаторными задачами занимались еще древнегреческие математики, основания комбинаторики как науки были заложены математиками XVII и XVIII веков, прежде всего Паскалем (1623—1662), Лейбницем (1646—1716) и Бернулли (1654—1705).

В этом параграфе будут рассмотрены основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания. Начнем с решения трех типичных для комбинаторики задач.

Пример 1. В группе 20 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны комсорг и профорг при условии, что каждый учащийся может быть избран только на одну из этих должностей?

△ Пусть сначала избирается комсорг. Поскольку каждый член группы может быть избран комсоргом, то, очевидно, есть 20 способов его выбора. Тогда профоргом может стать каждый из оставшихся 19 человек. Любой из 20 способов выбора комсорга может осуществиться вместе с любым из 19 способов выбора профорга. Поэтому всего существует $20\cdot 19=380$ способов выбора комсорга и профорга. ▲

Пример 2. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый учащийся дежурит один раз?

△ В понедельник может дежурить любой из выделенных шести человек. Во вторник может дежурить каждый из еще не дежуривших пяти учащихся. Следовательно, расписание дежурств на первые два дня недели можно составить $6 \cdot 5 = 30$ способами. К среде остаются четыре человека, которые еще не дежурили, и поэтому на среду дежурного можно будет назначить 4 способами. Каждый из этих способов может комбинироваться с любым из 30 способов выбора дежурных на понедельник и вторник. Таким образом, существует $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов установления очередности дежурств на первую половину недели. В четверг сможет дежурить любой из трех еще не дежуривших учащихся, в пятницу — любой из двух еще не дежуривших. К субботе выбора не будет, так как останется один человек, который еще не дежурил. Он и будет дежурным в субботу. Ясно, что число способов, которыми можно установить очередность дежурств учащихся, равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. ▲

Пример 3. Группу учащихся техникума должна экзаменовать по математике комиссия из двух преподавателей. Сколькими способами может быть составлена такая комиссия, если в техникуме пять преподавателей математики?

△ Обозначив преподавателей буквами A, B, C, D, E, можно выписать все возможные экзаменационные комиссии, а именно:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,$$
$$BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE,$$

и увидеть, что их число равно десяти. ▲

Замечание. Конечно, такое решение примера 3 должно вызывать чувство неудовлетворения. Ведь если бы преподавателей было не пять человек, а, например, четырнадцать и составить комиссию требовалось бы не из двух человек, а, допустим, из семи, то попытка получить результат тем же способом окончилась бы полным провалом, так как в этом случае можно образовать (как это будет показано ниже) более трех тысяч различных экзаменационных комиссий.

Прежде чем переходить к введению новых понятий и к выводу общих формул, позволяющих решать подобные задачи, посмотрим, что общего в этих примерах и есть ли какое-нибудь существенное различие между ними. Прежде всего отметим, что во всех трех примерах рассматривается некоторое конечное множество, состоящее из тех или иных элементов. В примере 1 это множество учащихся, содержащее 20 элементов, в примере 2—шестиэлементное множество дежурных, в примере 3—пятиэлементное множество преподавателей. Во всех случаях из рассматриваемого множества выбиралось определенное число элементов. Задача же каждый раз состояла в том, чтобы подсчитать, сколькими различными способами можно осуществить такую выборку: сколькими способами можно выбрать комсорга и профорга, распределить дежурных по дням недели, выделить преподавателей для проведения экзамена.

Наряду с отмеченным сходством, при рассмотрении примеров 1—3 выявляется одно очень важное различие, существующее между ними. Оно заключается в том, что в примерах 1, 2 и в примере 3 совершенно по-разному понимаются слова «различные способы». В примере 3 порядок выбора элементов был не важен и не принимался во внимание. Назначение в комиссию сначала преподавателя Петрова, а затем Иванова или наоборот—это один способ выбора, а не два. В примере 1, напротив, выбор учащегося Иванова комсоргом, Петрова старостой и выбор Петрова комсоргом, а Иванова старостой—это два различных способа выбора. В примере 2 различные способы распределения дежурных могли отличаться друг от друга только порядком следования дежурств.

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом отобраны k элементов ($k \leqslant n$), то говорят, что из этого множества произведена *выборка объема* k.

Если порядок расположения элементов выборки принимают во внимание, то выборки называют *упорядоченными*. Таким образом, две упорядоченные выборки считают различными, если они отличаются либо составом элементов, либо их расположением.

В том случае, когда порядок расположения элементов не учитывают, выборки называют *неупорядоченными*. Следовательно, две неупорядоченные выборки считают различными, если в одной из них есть хотя бы один элемент, которого нет в другой.

Например, для множества, состоящего из трех элементов a, b, c, существуют три различные неупорядоченные выборки объема 2 (ab, bc, ac) и шесть различных упорядоченных выборок того же объема (ab, bc, ac, ba, cb, ca).

2. Размещения и перестановки.

Определение 1. Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, содержащего n элементов ($n \geqslant k$), называется *размещением из n элементов по k элементов.*

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из n элементов по k элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «a из n по k») *). Теперь видно, что в примере 1 предыдущего пункта требовалось найти число размещений из 20 элементов по 2 элемента, и из решения этого примера следует, что $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

В общем случае на вопрос о числе размещений из n элементов по k элементов дает ответ следующая

Теорема 1. *Число размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, т. е.*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \qquad k > 0. \tag{1}$$

□ Число размещений из n элементов по k элементов равно числу всех упорядоченных выборок объема k из множества, содержащего n элементов. В качестве первого элемента выборки можно взять любой элемент множества, и так как в множестве n элементов, то существует n способов выбора первого элемента. Вторым элементом в выборке может быть любой из оставшихся (после выбора первого) элементов. Поэтому существует $n-1$ способ выбора второго элемента. Каждый из способов выбора первого элемента может объединяться с каждым из способов выбора второго, и, следовательно, существует $n(n-1)$ способов выбора первых двух элементов выборки. После выбора первых двух элементов остаются $n-2$ возможности для выбора третьего элемента, и опять-таки каждая из этих возможностей может комбинироваться с любой из возможностей выбора первых двух элементов, т. е. выбор первых трех элементов может быть осуществлен $n(n-1)(n-2)$ способами. Последний, k-й элемент может быть выбран $n-k+1$ способами, так как к моменту выбора k-го элемента $k-1$ элементов уже выбраны и осталось, следовательно, $n-(k-1)$ элементов.

Таким образом, число всех упорядоченных выборок объема k из множества, содержащего n элементов, равно

---

*) A — первая буква французского слова arrangement, что означает «размещение», «приведение в порядок».

произведению всех натуральных чисел от n до $n-(k-1)$ включительно. ■

Заметим, что приведенное доказательство является обобщением рассуждений, использованного при решении примера 1 п. 1.

Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Будем для краткости произведение $n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1$, т. е. произведение всех натуральных чисел от n до 1, обозначать символом $n!$ (читается: «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать

$$\begin{aligned}
1! &= 1,\\
2! &= 2\cdot1 = 2,\\
3! &= 3\cdot2\cdot1 = 6,\\
4! &= 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24,\\
5! &= 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120.
\end{aligned}$$

Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$ Тогда получим

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!},$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

При выводе формул (1) и (2) предполагалось, что $k>0$ и $n>0$. Для удобства принято считать, что $A_n^0=1$ и $A_0^0=1$. Отметим, что значение A_n^0 получается и из формулы (2):

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Если условиться, что $0!=1$, то и значение A_0^0 будет получаться из формулы (2):

$$A_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 1. Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть четыре различных урока?

△ Из семи учебных дисциплин нужно выбрать четыре и распределить (разместить) их по четырем урокам. Число способов, которыми это можно сделать, равно числу упорядоченных выборок объема 4 из множества, содержащего семь элементов, т. е. числу размещений из 7 элементов по 4. По формуле (1), полагая в ней $n=7$, $k=4$, получаем $A_7^4=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$. ▲

Пример 2. Вычислить $\frac{A_{19}^5+A_{20}^6}{A_{18}^4}$.

△ Применяя формулу (2), находим

$$A_{19}^5=\frac{19!}{14!}, \quad A_{20}^6=\frac{20!}{14!}, \quad A_{18}^4=\frac{18!}{14!}.$$

Следовательно,

$$\frac{A_{19}^5+A_{20}^6}{A_{18}^4}=\frac{19!+20!}{18!}=\frac{19!\,(1+20)}{18!}=19\cdot 21=399. \ ▲$$

Определение 2. Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками из n элементов*.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов (его обозначают P_n *)) равно числу всех упорядоченных выборок объема n из множества, содержащего n элементов. В примере 2 п. 1 требовалось найти число всех перестановок из шести элементов (число всех возможных перестановок дежурных). Это число оказалось равным 720, следовательно, $P_6=720$.

Теорема 2. *Число перестановок из n элементов равно $n!$.*

□ Согласно определению 2 имеем

$$P_n=A_n^n.$$

По формуле (2), положив в ней $k=n$, получаем

$$P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!. \ ■$$

Пример 3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

△ Цифра 5 должна стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$. ▲

*) P — первая буква французского слова permutation — перестановка.

3. Сочетания.

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, содержащего n элементов ($n \geqslant k$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов.*

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k»)*). В примере 3 п. 1 было найдено число сочетаний из 5 элементов по 2 элемента, причем оказалось, что $C_5^2=10$.

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k элементов равно произведению всех натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, деленному на $k!$,* т. е.

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1)$$

□ Найдем зависимость между C_n^k и A_n^k. Число размещений A_n^k, т. е. число всех упорядоченных выборок объема k из множества, содержащего n элементов, можно найти следующим образом. Сначала образовать все неупорядоченные выборки объема k. Их число равно C_n^k, а затем из каждой неупорядоченной выборки перестановкой ее элементов получить все упорядоченные выборки, при этом из каждой неупорядоченной получится $k!$ упорядоченных выборок, так как каждую выборку объема k можно упорядочить $k!$ способами. Так как упорядоченных выборок объема k в $k!$ раз больше, чем неупорядоченных, то

$$A_n^k=k!\,C_n^k, \quad \text{откуда} \quad C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}.$$

Но $A_n^k=n(n-1)\dots(n-k+1)$, следовательно, формула (1) верна. ■

Формулу (1) можно записать и в таком виде:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (2)$$

Используя формулы (1) или (2), легко можно подсчитать число всех экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, при общем числе экзаменаторов, равном 14 (см. замечание к примеру 3 п. 1). Положив, например, в формуле (1) $n=14$, $k=7$, получим

$$C_{14}^7=\frac{14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 8}{7!}=3432.$$

---

*) C — первая буква французского слова combinaison — сочетание. Заметим еще, что вместо C_n^k иногда пишут $\binom{n}{k}$.

Пример 1. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

△ Число матчей равно числу неупорядочённых выборок объема 2 из множества, содержащего 16 элементов, т. е. равно C_{16}^2. По формуле (1) находим

$$C_{16}^2=\frac{16\cdot 15}{2}=120. \blacktriangle$$

Пример 2. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

△ Вратаря можно выбрать $C_2^1=2$ способами, защитников — $C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2}=21$ способом, нападающих — $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120$ способами. Следовательно, существует $2\cdot 21\cdot 120=5040$ способов образования стартовой шестерки. ▲

Числа C_n^k обладают некоторыми интересными и важными свойствами. Отметим два таких свойства.

Первое свойство:

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \tag{3}$$

□ С помощью формулы (2) получаем

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=C_n^k. \blacksquare$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k>\frac{n}{2}$, например:

$$C_{15}^{12}=C_{15}^3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}=455.$$

Второе свойство:

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k \quad (k<n). \tag{4}$$

□ Применяя формулу (2), находим

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}((n-k)+(k+1))=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!}=C_{n+1}^{k+1}. \blacksquare$$

Вопросы для контроля

1. Что называют выборкой объема k? Какие выборки считают различными?

2. Что такое размещения, перестановки, сочетания?

3. Дайте определение символа $n!$.

4. Какие формулы существуют для подсчета числа размещений, числа перестановок, числа сочетаний?

5. Какими свойствами обладают числа C_n^k?

Упражнеиия

3.1. Вычислнте:

1) $\dfrac{P_6-P_5}{5!}$; 2) $\dfrac{20!}{5!\,16!}$; 3) $\dfrac{A_{20}^6+A_{20}^5}{A_{20}^4}$;

4) $\dfrac{P_6\left(C_7^5+C_7^4\right)}{A_{10}^7}$; 5) $\dfrac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1}P_{k-n}}$ $(k\geqslant n)$;

6) $\dfrac{A_n^k\,(n-k)!}{(n-1)!}$ $(k\leqslant n)$.

3.2. Найдите n, если:

1) $A_n^5=18A_{n-2}^4$; 2) $A_n^4P_{n-4}=42P_{n-2}$;

3) $P_{n+2}=132A_n^kP_{n-k}$;

4) $(n+5)!=240\,(n-k)!\,A_{n+3}^{k+3}$;

5) $12C_{n+3}^{n-1}=55A_{n+1}^2$; 6) $A_{n+3}^2+C_{n+2}^2=126$;

7) $C_n^3+C_n^4=11C_{n+1}^2$; 8) $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=15\,(n+2)$;

9) $\dfrac{1}{C_4^n}=\dfrac{1}{C_5^n}+\dfrac{1}{C_6^n}$; 10) $A_4^2C_{n+1}^3=n\,(n+1)\,C_{n-1}^{n-4}$.

3.3. Найдите область определения функции $f(x)$ и множество ее значений:

1) $f(x)=A_{7-x}^{x-3}$; 2) $f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$.

3.4. Решите неравенства:

1) $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^x$; 2) $8C_{105}^x<3C_{105}^{x+1}$.

3.5. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

3.6. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4?

3.7. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

3.8. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) зебра; 3) баран; 3) водород; 4) абракадабра?

3.9. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть пять уроков: алгебра, геометрия, история, география и литература, причем алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

3.10. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Шары одного цвета неотличимы друг от друга.

3.11. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим пять львов и четыре тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так, чтобы никакие два тигра не шли непосредственно друг за другом?

3.12. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:

1) все путевки различны;
2) все путевки одинаковы?

3.13. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:

1) один из них должен быть старшим;
2) старшего быть не должно?

3.14. В почтовом ящике 38 отделений. Сколькими способами можно положить в ящик 35 одинаковых открыток так, чтобы в каждом отделении было не более одной открытки?

3.15. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

3.16. В шахматном турнире, где участники встречаются между собой один раз, два шахматиста выбыли по болезни, успев сыграть только по три партии каждый. Сколько шахматистов начали турнир, если всего было сыграно 84 партии?

3.17. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник?

3.18. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определите число точек пересечения диагоналей.

3.19. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

3.20. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если:

1) буква не должна содержать более четырех знаков;
2) буква не должна содержать более пяти знаков?

§ 12. Формула Ньютона

Легко проверить, что известные формулы

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

можно записать и так:

$$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2,$$
$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3.$$

Возникает естественная гипотеза: не будут ли справедливы аналогичные формулы для четвертой, пятой и вообще любой натуральной степени бинома?

Выясним сначала, будет ли справедлива аналогичная формула для четвертой степени. Для этого обе части формулы для $(a+b)^3$ умножим на $a+b$. Тогда получим

$$(a+b)^4=(C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3)(a+b)=$$
$$=C_3^0a^4+C_3^1a^3b+C_3^2a^2b^2+C_3^3ab^3+C_3^0a^3b+C_3^1a^2b^2+C_3^2ab^3+C_3^3b^4=$$
$$=C_3^0a^4+(C_3^1+C_3^0)\,a^3b+(C_3^2+C_3^1)\,a^2b^2+(C_3^3+C_3^2)\,ab^3+C_3^3b^4.$$

Учитывая, что

$$C_3^0 = C_4^0, \quad C_3^1 + C_3^0 = C_4^1, \quad C_3^2 + C_3^1 = C_4^2,$$
$$C_3^3 + C_3^2 = C_4^3, \quad C_3^3 = C_4^4,$$

убеждаемся в справедливости формулы

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4.$$

Таким образом, нам удалось, используя формулу для третьей степени бинома, получить аналогичную формулу для четвертой степени. Проведенное рассуждение, во-первых, подтверждает гипотезу и, во-вторых, наталкивает на мысль воспользоваться для ее доказательства методом математической индукции.

Теорема. *Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (1)$$

□ Для $n = 1$ формула (1) имеет вид

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

и, так как $C_1^0 = C_1^1 = 1$, она, очевидно, верна.

Предположим, что формула справедлива для $n = m$, т. е.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1}.$$

Учитывая, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1},$$

получаем

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.$$

Таким образом, из справедливости формулы (1) для $n=m$ следует ее справедливость для $n=m+1$, и так как формула верна и при $n=1$, то на основании принципа математической индукции ее справедливость установлена для всех натуральных значений n. ■

Формула (1) носит имя великого английского физика и математика И. Ньютона. Правая часть ее называется *разложением натуральной степени бинома*. Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Формулу Ньютона используют во многих разделах математики и ее приложений. Эта формула потребуется нам в следующей главе при изучении теории вероятностей.

Отметим некоторые характерные особенности формулы Ньютона.

1. Правая часть формулы Ньютона содержит $n+1$ слагаемое.

2. Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$, стоящее на $(k+1)$-м месте, удобно считать k-м членом разложения и обозначать через T_k, т. е.

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

При этом условии $T_0 = C_n^0 a^n$ — нулевой член разложения, $T_1 = C_n^1 a^{n-1} b$ — первый член разложения, $T_n = C_n^n b^n$ — n-й член разложения.

3. Показатели степени a в каждом следующем члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, показатели степени b — на единицу больше. Сумма показателей степени a и b в каждом члене разложения равна n.

4. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от нулевого и от n-го членов разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Формулу Ньютона можно записать еще и в таком виде:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k \tag{3}$$

или, не используя знака суммы,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n. \tag{4}$$

Здесь биномиальные коэффициенты C_n^k заменены их выражениями согласно формуле для числа сочетаний.

Пример 1. Возвести в седьмую степень двучлен $x+1$.

△ Положив в формуле (1) $a=x$, $b=1$, $n=7$, получим

$$(x+1)^7=\sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{7-k}=$$
$$=C_7^0x^7+C_7^1x^6+C_7^2x^5+C_7^3x^4+C_7^4x^3+C_7^5x^2+C_7^6x+C_7^7=$$
$$=x^7+7x^6+\frac{7\cdot 6}{2}x^5+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^4+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^3+\frac{7\cdot 6}{2}x^2+7x+1=$$
$$=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1. \ ▲$$

Пример 2. Возвести в пятую степень двучлен $x-y$.

△ Воспользуемся формулой (3), положив в ней $a=x$, $b=-y$, $n=5$. Тогда

$$(x-y)^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^{5-k}(-y)^k=$$
$$=x^5+5x^4(-y)+\frac{5\cdot 4}{2}x^3(-y)^2+$$
$$+\frac{5\cdot 4}{2}x^2(-y)^3+5x(-y)^4+(-y)^5=$$
$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5. \ ▲$$

Пример 3. Вычислить $(1+i)^6$.

△ Положив в формуле (4) $a=1$, $b=i$, $n=6$, получим

$$(1+i)^6=1+6i+\frac{6\cdot 5}{2}i^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 3}i^3+\frac{6\cdot 5}{2}i^4+6i^5+i^6=$$
$$=1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i. \ ▲$$

Пример 4. Найти девятый член разложения для степени бинома $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{12}$.

△ Положив в формуле (2) $n=12$, $k=9$, $a=\frac{1}{x}$, $b=x$, найдем

$$T_9=C_{12}^9\left(\frac{1}{x}\right)^3x^9=C_{12}^3x^6=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3}x^6=220x^6. \ ▲$$

Пример 5. Найти номер члена разложения степени бинома

$$\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20},$$

который не зависит от t.

△ Запишем k-й член разложения, положив в формуле (2) $n=20$, $a=\sqrt[3]{t}$, $b=-\frac{1}{t}$:

$$T_k=C_{20}^k(\sqrt[3]{t})^{20-k}\left(-\frac{1}{t}\right)^k=(-1)^kC_{20}^k t^{\frac{20-k}{3}-k}.$$

Для независимости T_k от t необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{20-k}{3}-k=0, \quad \text{т. е.} \quad k=5.$$

Следовательно, пятый член разложения не зависит от t. ▲

Пример 6. Найти сумму всех биномиальных коэффициентов.

△ Положив в формуле (1) $a=1$, $b=1$, будем иметь

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти наибольший коэффициент многочлена

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

△ Обозначим коэффициент многочлена при x^k через a_k. Используя формулу (1), расположим данный многочлен по возрастающим степеням переменной x:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k=\sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Для отыскания наибольшего коэффициента a_k решим неравенство $a_{k-1}\leqslant a_k$, т. е.

$$C_{10}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\leqslant C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Разделив обе части неравенства на $\frac{2^{k-1}}{3^{10}}$, получим

$$C_{10}^{k-1}\leqslant 2C_{10}^k,$$

или

$$\frac{10!}{(k-1)!\,(10-k+1)!}\leqslant\frac{2\cdot 10!}{k!\,(10-k)!}.$$

После дальнейших очевидных сокращений будем иметь

$$\frac{1}{10-k+1}\leqslant\frac{2}{k}, \quad k\leqslant 20-2k+2, \quad k\leqslant\frac{22}{3}.$$

Таким образом, доказано, что

$$a_0<a_1<\ldots<a_7.$$

Очевидно, что при $k>\frac{22}{3}$ имеет место противоположное неравенство $a_{k-1}>a_k$, т. е. коэффициенты многочлена, начиная с седьмого, убывают.

Итак, коэффициент a_7 является наибольшим среди всех одиннадцати коэффициентов данного многочлена. Наибольший коэффициент равен

$$C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте теорему о разложении натуральной степени бинома по формуле Ньютона.
2. Укажите характерные особенности формулы Ньютона.
3. Запишите формулу для k-го члена разложения.
4. Чему равна сумма всех биномиальных коэффициентов?

Упражнения

3.21. Напишите формулу Ньютона для степени бинома:
1) $(x^2-y)^6$; 2) $(3a^2-2b)^5$.

3.22. Найдите разложение степени бинома:
1) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; 2) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$.

3.23. Найдите разложение степени бинома и упростите полученное выражение:
1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^5$; 2) $(1+i\sqrt{3})^6$.

3.24. Найдите:
1) седьмой член разложения $(2x-3)^{10}$;
2) четвертый член разложения $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$.

3.25. Найдите:
1) средний член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$;
2) два средних члена разложения $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^{13}$.

3.26. Найдите член разложения, не зависящий от x:
1) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$; 2) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

3.27. Найдите член разложения, не зависящий от z:
1) $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}-2\sqrt{z}\right)^{11}$; 2) $(z^{1/3}+z^{-1/2})^{15}$.

3.28. Четвертый член разложения степени бинома

$$(a^{2/3}+a^{-1})^n$$

не содержит a. Найдите показатель степени n.

3.29. Сумма биномиальных коэффициентов разложения степени бинома

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$$

равна 256. Найдите член разложения, не зависящий от x.

3.30. Найдите рациональные члены разложения:

1) $(\sqrt[6]{3}+\sqrt[5]{2})^{11}$; 2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

3.31. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}$; 2) $\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}x\right)^{12}$.

3.32. Найдите коэффициент многочлена:

1) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8;

2) $(1+3x+2x^3)^{10}$ при x^4.

3.33. Вычислите суммы:

1) $\sum\limits_{k=2}^{n-2} C_n^k$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

3.34. Найдите сумму коэффициентов многочлена:

1) $(2x-1)^{100}$; 2) $(x^3-x-1)^{99}$.

Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 13. Случайные события. Вероятность события

1. Случайные события и операции над ними. Под *случайным событием*, связанным с некоторым опытом, понимается всякое событие, которое при осуществлении этого опыта либо происходит, либо не происходит.

Если, например, опыт заключается в подбрасывании монеты, то случайным событием, связанным с этим опытом, будет «выпадение герба»: в одних случаях монета упадет так, что сверху окажется герб, т. е. событие «выпадение герба» произойдет, в других — монета ляжет гербом вниз и, следовательно, событие не осуществится. Случайными событиями являются также: «выпадение шестерки» при бросании игральной кости, выход из строя электролампы в течение определенного времени, гибель клетки под действием радиоактивного облучения. Во всех перечисленных случаях невозможно предсказать заранее, до опыта, произойдет или не произойдет соответствующее событие, так как результат зависит от слишком многих факторов, учесть которые не представляется возможным. Никакая наука, в том числе и математика, не претендует на то, чтобы делать какие-либо предсказания относительно исхода какого-либо одного подобного эксперимента. Изучать случайное событие можно только тогда, когда есть хотя бы принципиальная возможность повторить опыт многократно и каждый раз фиксировать осуществление (или неосуществление) рассматриваемого события.

При выполнении этого условия можно ввести понятие о *частоте* случайного события. Пусть при n-кратном осуществлении опыта событие наступило k раз, тогда отношение $\frac{k}{n}$ даст частоту случайного события.

Пример 1. Французский естествоиспытатель Бюффон, изучая случайные события, провел опыт с подбрасыванием монеты 4040 раз. Герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота события «выпадение герба» в данном эксперименте равна

$$\frac{2048}{4040} \approx 0{,}507 \approx 0{,}5.$$

Пример 2. По теории Менделя при скрещивании желтого гороха с желтым примерно в одном случае из четырех получается зеленый горох. Для проверки этой теории опыт по скрещиванию желтого гороха был проведен 34 153 раза. В 8506 случаях получился зеленый горох. Частота события «появление зеленого гороха» в проведенном эксперименте равна

$$\frac{8506}{34\,153} \approx 0{,}252 \approx 0{,}25.$$

Эксперименты, рассмотренные в примерах 1, 2, повторялись неоднократно, и всякий раз, когда число проводимых опытов было достаточно велико, частота события «выпадение герба» оказывалась близкой к $\frac{1}{2}$, а частота события «появление зеленого гороха» мало отличалась от $\frac{1}{4}$. Описанное явление называется *статистической устойчивостью частоты* события. Эксперименты показывают, что свойство статистической устойчивости присуще многим случайным событиям, представляющим интерес для практики. События, обладающие свойством статистической устойчивости частоты, являются предметом изучения специальной математической дисциплины — теории вероятностей.

Теория вероятностей возникла в XVII веке в работах Паскаля, Ферма и Гюйгенса, причем ее первоначальное развитие связано с исследованием азартных игр. Следует отметить, что и в настоящее время при изучении и применении теории вероятностей азартные игры «используются» довольно широко. Дело в том, что случайные события, встречающиеся в азартных играх, обладая свойством статистической устойчивости частоты, имеют к тому же и другие преимущества. Они отличаются простотой, дают возможность четко поставить задачу, не загромождая ее побочными факторами, присущими той или иной специальной области знаний. Наконец, они обеспечивают возможность неограниченной экспериментальной проверки полученных закономерностей, так как именно в азартных играх можно сколько угодно раз ставить один и тот же опыт. Случайные события, связанные с азартными играми, служат, таким образом, чрезвычайно удобными моделями при изучении более сложных и, главное, более важных практических задач.

Теория вероятностей, начав свой путь с анализа ситуаций, возникающих в азартных играх, с выдачи рекомендаций игрокам в кости, превратилась в науку, без помощи которой сейчас не обходится ни физика, ни астрономия, ни экономика, ни лингвистика. Более того, в последнее время теория вероятностей стала основой развития многих новых научных направлений, таких, как математическая статистика, теория информации, теория массового обслуживания. Выдающуюся роль в становлении теории вероятностей как математической науки сыграли Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон. Большой вклад в ее развитие внесли русские ученые П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов; ряд основополагающих результатов в различных областях теории вероятностей получен советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В теории вероятностей случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д., иногда снабжая их индексами, например: A_i, A_m. Прилагательное «случайные» для краткости часто опускают и говорят просто «события».

Событие, всегда осуществляющееся при проведении опыта, называют *достоверным событием*.

В том случае, когда событие заведомо не может произойти в результате опыта, его называют *невозможным*.

Если в урне находятся только белые шары, а опыт заключается в извлечении наудачу шара из урны, то событие «извлечен белый шар» является достоверным, а событие «извлечен черный шар» — невозможным. Достоверные события будем обозначать буквой U, невозможные — буквой V.

События A и B называются *равносильными* (*равными*), если A происходит тогда и только тогда, когда происходит B. Равносильные события соединяют знаком равенства, т. е. пишут $A=B$. В опыте с подбрасыванием игральной кости событие «выпала шестерка» и событие «выпала грань с наибольшим возможным номером» равносильны.

Для каждого события A можно рассматривать событие, заключающееся в том, что событие A не произошло.

Его называют *противоположным* к A и обозначают $\overline{A}$. Для достоверного и невозможного событий полагают $\overline{U}=V$, $\overline{V}=U$. Если опыт состоит в том, что стрелок производит выстрел по мишени, то событие «мишень поражена» и событие «стрелок не попал в мишень» являются противоположными друг к другу.

Для событий вводятся операции сложения и умножения.

Суммой (*объединением*) событий называется событие, которое осуществляется тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A \cup B$.

Произведением (*пересечением*) событий называется событие, осуществляющееся только в том случае, когда данные события происходят одновременно. Произведение событий A и B обозначают $A \cap B$.

Пример 3. Пусть опыт заключается в том, что из колоды вынимается наудачу одна карта, и пусть событие A_1 состоит в том, что карта оказалась дамой, а событие A_2 — в том, что выбрана карта пиковой масти. Тогда событие $A_1 \cup A_2$ состоит в том, что выбрана дама или карта пиковой масти, а событие $A_1 \cap A_2$ — в том, что из колоды выбрана дама пик.

Легко видеть, что операции сложения и умножения обладают следующими свойствами.

1. *Переместительное* свойство:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. *Сочетательное* свойство:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. *Распределительное* свойство:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Пример 4. Рассмотрим в опыте с подбрасыванием игральной кости события: A_1 — появление четного числа, A_2 — появление шестерки, A_3 — появление числа, большего двойки. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ — событие, состоящее в том, что выпала грань, занумерованная одним из чисел: 2, 3, 4, 5, 6; $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — событие, заключающееся в выпадении грани с шестеркой.

Пример 5. Пусть в опыте с подбрасыванием кости A_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$ — событие, состоящее в том, что кость выпала одной из своих шести граней, а событие $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6$ заключается в том, что кость выпала всеми своими гранями одновременно. Очевидно, что

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = U, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6 = V.$$

События A_1 и A_2 называются *несовместными*, если $A_1 \cap A_2 = V$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m > 2)$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют *полную систему событий*, если их сумма является достоверным событием.

События, рассмотренные в примере 4, полной системы событий не образуют. Напротив, события из примера 5 образуют полную систему, более того, они образуют полную систему попарно несовместных событий.

2. Опыт с равновероятными исходами. Классическое определение вероятности события. Рассмотрим полную систему попарно несовместных событий

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

связанную с некоторым опытом. Предположим, что в этом опыте осуществление каждого из событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ равновозможно, т. е. предположим, что не существует никаких объективных оснований считать, что одно из событий является более возможным, чем другое. Такой опыт будем называть *опытом с равновероятными исходами*. В этом случае будем говорить, что события $U_1, U_2, \ldots$ $\ldots, U_n$ *равновероятны* и что вероятность каждого из этих событий равна $1/n$.

События $U_1, U_2, \ldots, U_n$ называются *исходами* или *элементарными событиями*.

Пример 1. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i—событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то все исходы опыта естественно считать одинаково возможными. Следовательно, рассматриваемый опыт является опытом с равновероятными исходами, события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ равновероятны и вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$.

Рассмотрим теперь событие A, связанное с опытом с равновероятными исходами, и пусть A наступает тогда, когда осуществляется один из каких-то k исходов, и не наступает, если осуществляется любой из оставшихся $n-k$

исходов. Будем говорить, что исходы, приводящие к наступлению события A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $\mathsf{P}(A)$ *события* A, связанного с опытом с равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов.

Таким образом, если n — число всех исходов, а k — число исходов, благоприятствующих событию A, то

$$\mathsf{P}(A)=\frac{k}{n}.$$

Эта формула читается так: «вероятность события A равна $\frac{k}{n}$». P — первая буква английского слова «probability» — вероятность.

Пример 2. В опыте с игральной костью (см. пример 1) событию A (число выпавших очков кратно 3) благоприятствуют два элементарных события U_3 и U_6; событию B (выпало простое число) благоприятствуют U_2, U_3, U_5; событию C (выпало 7 очков) не благоприятствует ни одно из шести элементарных событий; событию D (число выпавших очков меньше 7) благоприятствуют все шесть элементарных событий. Следовательно,

$$\mathsf{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\qquad \mathsf{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(C)=\frac{0}{6}=0,\qquad \mathsf{P}(D)=\frac{6}{6}=1.$$

Приведенное определение вероятности события называется *классическим определением вероятности*.

Вероятность события удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant \mathsf{P}(A)\leqslant 1,$$

что непосредственно следует из определения, так как очевидно, что $0\leqslant k\leqslant n$.

Невозможному событию V не благоприятствует ни одно из элементарных событий, и поэтому

$$\mathsf{P}(V)=\frac{0}{n}=0.$$

Достоверное событие U осуществляется при наступлении каждого из элементарных событий, и, следовательно,

$$\mathsf{P}(U)=\frac{n}{n}=1.$$

Элементарному событию U_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ благоприятствует только одно элементарное событие (оно само), и,

следовательно,

$$\mathsf{P}(U_i)=\frac{1}{n}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

что соответствует данному ранее определению.

Пример 3. Монета бросается дважды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

$\triangle$ Здесь элементарными событиями будут следующие 4 события:

U_1 — оба раза выпал герб,

U_2 — герб появился только при первом бросании,

U_3 — герб появился только при втором бросании,

U_4 — герб не появился ни разу.

Благоприятствовать событию A (появлению герба хотя бы один раз) будут U_1, U_2, U_3. Следовательно, $\mathsf{P}(A)=\frac{3}{4}$. $\blacktriangle$

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

$\triangle$ Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию A (цифры набраны правильно) будет только один способ. Поэтому

$$\mathsf{P}(A)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

$\triangle$ Из 100 электроламп 3 лампы можно выбрать C_{100}^3 способами. Три исправных лампы из общего числа 95 исправленных ламп можно выбрать C_{95}^3 способами. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\mathsf{P}=\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}=\frac{95\cdot 94\cdot 93}{100\cdot 99\cdot 98}\approx 0{,}86. \ \blacktriangle$$

Пример 6. При игре в «Спортлото» на специальной карточке отмечаются 6 номеров из 49. Во время тиража определяются 6 выигравших («счастливых») номера. Какова при этом вероятность угадать ровно 3 «счастливых» номера?

$\triangle$ Число всех способов выбора 6 номеров из 49 равно C_{49}^6. Подсчитаем число всех благоприятных исходов. Три номера из 6 «счастливых» можно выбрать C_6^3 способами. Каждый из этих способов может осуществляться вместе с каждым из C_{43}^3 способов выбора 3 номеров из 43 «несчастливых» номеров. Поэтому число всех благоприятных исходов равно $C_6^3 \cdot C_{43}^3$, а вероятность P угадать 3 «счастливых» номера равна

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}.$$

Используя формулу $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, получаем

$$P = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{43!}{3!\,40!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{43 \cdot 41 \cdot 5}{47 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2}.$$

С помощью микрокалькулятора легко подсчитать, что

$$P \approx 0{,}0176. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Показать, что более вероятно при бросании 4 костей получить хотя бы один раз шестерку, чем при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз две шестерки. (Задача поставлена в XVII веке перед Паскалем неким де Мере и носит его имя. Де Мере, игравший в кости, ошибочно считал описанные события равновероятными.)

$\triangle$ Пусть A — событие, состоящее в том, что при бросании 4 костей по крайней мере на одной из них появится шестерка.

При бросании одной кости возможно 6 исходов, при бросании двух костей — 6^2 исходов, при бросании трех и четырех костей — соответственно 6^3 и 6^4 исходов. Среди всех этих 6^4 исходов будет, очевидно, 5^4 таких, при которых шестерка не выпадет ни разу. Следовательно, благоприятных событию A исходов будет $6^4 - 5^4$, и поэтому

$$P(A) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Пусть B — событие, состоящее в том, что при бросаниях пары костей по крайней мере один раз появятся сразу две шестерки. При бросании пары костей один раз возможно 36 исходов, при двух бросаниях пары костей возможно 36^2 исходов, при 24 бросаниях пары костей возможно 36^{24} исходов. Среди всех этих 36^{24} исходов будет 35^{24} таких, при которых ни разу не выпадут одновременно две шестерки. Следовательно, благоприятных событию B исходов будет $36^{24} - 35^{24}$, и поэтому

$$P(B) = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

С помощью микрокалькулятора легко подсчитать, что

$$P(A) \approx 0{,}52, \quad P(B) \approx 0{,}49. \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е. Классическое определение вероятности события не является универсальным, пригодным для изучения произвольных случайных событий. Оно применимо только в простейших случаях, когда удается свести дело к рассмотрению конечного множества равновозможных событий. В более сложных опытах приходится считаться и с тем, что число различных исходов может быть бесконечным, и с тем, что сами исходы не являются равновозможными. Поэтому в теории вероятностей, наряду с классическим определением, используются и другие определения вероятности события.

При так называемом статистическом определении вероятность события определяется исходя из понятия частоты события и ее статистической устойчивости. Например, при скрещивании желтого гороха с желтым (см. пример 2 п. 1) за вероятность события «появление зеленого гороха» принимается число, равное $\frac{1}{4}$, так как именно около этого числа, как показывают эксперименты, группируются частоты рассматриваемого события.

В современных математических курсах вероятность определяется аксиоматически как функция $P(A)$, определенная на множестве событий и удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1. Для произвольного события A справедливо неравенство $P(A) \geqslant 0$.

2. Вероятность достоверного события равна единице.

3. Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Вопросы для контроля

1. Какое событие называют: а) достоверным; б) невозможным?

2. Как определяются: а) противоположное событие; б) сумма событий; в) произведение событий?

3. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения событий?

4. В каком случае два события называют несовместными?

5. Что такое полная система событий?

6. Сформулируйте классическое определение вероятиости.

7. Чему равны вероятности: а) достоверного события; б) невозможного события?

8. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?

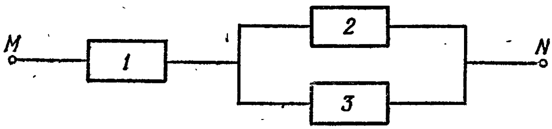
Упражнения

4.1. По мишени произведено три выстрела. Пусть событие состоит в том, что i-й выстрел удачный. В чем заключаются следующие события:

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; 2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

3) $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$?

4.2. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке.



Как выражаются события B и $\bar{B}$ через события A_i ($i = 1, 2, 3$), если событие B заключается в том, что цепь MN не проводит ток, а событие A_i состоит в том, что элемент i вышел из строя?

4.3. По мишени производится два выстрела. Образуют ли события A (мишень поражена) и B (по крайней мере один выстрел был неудачным) полную систему событий? Являются ли события A и B несовместными?

4.4. Укажите три события, которые не являются попарно несовместными, но образуют полную систему событий.

4.5. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 черных и 5 красных шаров, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется:

1) белым; 2) черным; 3) желтым; 4) красным?

4.6. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, окажется равной 8?

4.7. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

4.8. Первенство по баскетболу разыгрывают 18 команд, среди которых 2 команды экстракласса. Для уменьшения общего числа игр команды путем жеребьевки разбиваются на две равные группы. Какова вероятность того, что две команды экстракласса окажутся:

1) в разных подгруппах;

2) в одной подгруппе?

§ 14. Основные теоремы и формулы теории вероятностей

1. Теорема сложения. В рассмотренных выше примерах вероятность событий вычислялась непосредственно, исходя из определения. К сожалению, этот путь приводит к успеху только в самых простых случаях. Обычно же прямой подсчет как всех исходов, так и тех из них, которые являются благоприятствующими, оказывается неудобным, а иногда и практически невозможным из-за своей чрезмерной сложности. Вычисление вероятностей событий, как правило, можно существенно упростить, если использовать теоремы, устанавливающие связи между вероятностями событий.

Теорема 1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{1}$$

□ Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B — l исходов. События A и B несовместны, поэтому среди исходов U_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ будет благоприятствовать ровно $k + l$ исходов. По определению вероятности имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{k}{n}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{l}{n}, \quad \mathsf{P}(A \cup B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Доказанная теорема называется *теоремой сложения несовместных событий*.

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.*

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) = 1. \tag{2}$$

□ Поскольку события A и $\bar{A}$ несовместны, к ним применима теорема сложения:

$$\mathsf{P}(A \cup \bar{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}).$$

Учитывая, что событие $A \cup \bar{A}$ достоверное и что поэтому $\mathsf{P}(A \cup \bar{A}) = 1$, получаем $\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) = 1$. ■

Обобщением теоремы сложения на случай любого конечного числа событий является следующее утверждение: *вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \ldots + \mathsf{P}(A_m). \tag{3}$$

Доказательство аналогично доказательству для случая двух слагаемых.

Теорема сложения для двух событий обобщается и в другом направлении. Если отказаться от требования обязательной несовместности событий, то можно доказать более общую теорему, из которой доказанная ранее теорема 1 получается как частный случай.

Теорема 2. *Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей событий без* *вероятности их произведения, т. е.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{4}$$

□ Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B — l исходов, и пусть q исходов благоприятствуют совместному осуществлению событий A и B. Если число всех исходов равно n, то по определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{q}{n}.$$

Легко видеть, что событию $A \cup B$ будут благоприятствовать в этом случае $k+l-q$ исходов, и, следовательно,

$$P(A \cup B) = \frac{k+l-q}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{q}{n} = \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \ ■$$

В частном случае, когда события несовместны, т. е. $A \cap B = V$ и $P(A \cap B) = 0$, получается ранее доказанная теорема 1.

2. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Простейшие наблюдения показывают, что в одних случаях осуществление одного события никак не влияет на вероятность осуществления другого, в других случаях, наоборот, наступление одного события существенно изменяет вероятность наступления другого.

Например, в опыте с двукратным подбрасыванием монеты вероятность события «герб появился при вторичном подбрасывании монеты» не зависит от того, произошло или не произошло событие «герб появился при первом подбрасывании монеты». В опыте с извлечением (без возвращения) шаров из урны, содержащей один белый шар и один черный, отношение между событиями «шар, извлеченный первым, оказался белым» и «шар, извлеченный вторым, оказался белым» совсем иное: осуществление одного события в этом случае приводит к тому, что другое становится невозможным.

Рассмотрим события A и B, связанные с некоторым опытом. Пусть событию B благоприятствуют l исходов, событию $A \cap B$ — q исходов. Отношение $\frac{q}{l}$, т. е. отношение числа исходов, благоприятствующих событию $A \cap B$, к числу исходов, благоприятствующих событию B, называется *условной вероятностью события* A при условии B и обозначается $P(A \mid B)$.

Таким образом, по определению

$$P(A|B)=\frac{q}{l}.$$

Поясним данное определение примером. Пусть опыт заключается в однократном бросании игральной кости, событие B — выпадение четного числа очков, событие A — выпадение шестерки. В этом случае событию B благоприятствуют 3 исхода ($l=3$), событию $A\cap B$ благоприятствует только один исход ($q=1$). Следовательно, условная вероятность события A при условии B равна $\frac{q}{l}=\frac{1}{3}$, т. е. $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

Теорема 1. *Для условной вероятности $P(A|B)$ справедлива формула*

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

□ Пусть l — число исходов, благоприятствующих событию B; q — число исходов, благоприятствующих событию $A\cap B$. Тогда

$$P(A|B)=\frac{q}{l},$$

или

$$P(A|B)=\frac{q/n}{l/n},$$

где n — число всех исходов. Учитывая, что

$$\frac{q}{n}=P(A\cap B) \quad \text{и} \quad \frac{l}{n}=P(B),$$

получаем формулу (1). ■

Для условной вероятности события B при условии A совершенно аналогично получается формула

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \tag{2}$$

Каждая из формул (1) и (2) называется *формулой условной вероятности.*

Теорема 2. *Вероятность произведения двух произвольных событий равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло.*

□ Для доказательства достаточно переписать формулы (1) и (2) в следующем виде:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \quad ■ \tag{3}$$

Теорема 2 называется *теоремой умножения.*

Используя понятие условной вероятности, можно ввести важное понятие независимости двух событий.

Определение 1. Событие A называется *независимым* от события B, если условная вероятность события A при условии B равна вероятности события A, т. е. если

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A).$$

В противном случае, т. е. если $\mathsf{P}(A \mid B) \neq \mathsf{P}(A)$, событие A называется *зависимым* от события B.

Из формулы (3) следует, что если событие A является независимым от B, то событие B будет независимым от A. Таким образом, свойство независимости оказывается взаимным.

Пример 1. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Являются ли события A (появился туз) и B (вынута карта красной масти) независимыми?

△ Из общего числа 36 элементарных событий событию A благоприятствуют 4, поэтому $\mathsf{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Если событие B произошло, то это означает, что осуществилось одно из 18 элементарных событий, среди которых событию A благоприятствуют два, следовательно, $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Итак, $\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A)$, т. е. события A и B независимы. ▲

Из теоремы умножения как частный случай получается теорема умножения для независимых событий.

Теорема 3. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B). \tag{4}$$

□ Если A и B — независимые события, то $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B)$, и формула (3) превращается в формулу (4). ■

Обобщим теорему 3 на случай любого конечного числа событий. Дадим прежде всего следующее определение.

Определение 2. События $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m > 2)$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из этих событий и событие, являющееся произведением любого числа остальных событий, независимы.

Поясним разницу между попарной независимостью и независимостью в совокупности на примере трех событий. Для попарной независимости событий A, B, C необходимо, чтобы события A и B, B и C, C и A были независимы. Для независимости в совокупности, помимо этого, нужна независимость еще трех пар событий:

$$A \text{ и } B \cap C, \quad B \text{ и } C \cap A, \quad C \text{ и } A \cap B.$$

Теорема 4. *Вероятность произведения независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий.*

□ Докажем теорему для случая трех событий. Пусть A, B, C — независимые в совокупности события, тогда

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C). \quad (5)$$

Положим $B \cap C = D$ и, поскольку события A и D независимы, по теореме 3 можем записать

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap D) = P(A) P(D),$$

но B и C также независимы, и поэтому

$$P(D) = P(B \cap C) = P(B) P(C).$$

Подставляя $P(D)$ в первую из формул, получаем формулу (5). ■

Методом математической индукции теорема 4 легко доказывается для любого конечного числа независимых в совокупности событий.

Замечание. Теоремы сложения и умножения доказаны здесь для опытов с равновероятными исходами. Однако все полученные формулы сохраняют свою силу и в более сложных случаях, когда классическое определение вероятности оказывается недостаточным и приходится исходить из статистического или аксиоматического определений. При аксиоматическом построении теории вероятностей формула (1) п. 1, как уже отмечалось, принимается за аксиому, в связи с чем ее называют законом сложения вероятностей. Формулами (1) и (4) вводятся понятия условной вероятности и независимости событий.

В следующих примерах доказанные теоремы используются для вычисления вероятностей различных событий.

Пример 2. Из партии изделий ОТК проверяет половину и признает годной всю партию, если среди проверенных изделий бракованных не более одного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованных, будет признана годной?

△ Пусть событие A состоит в том, что среди проверяемых изделий бракованных не окажется, а событие B — в том, что среди отобранных для проверки изделий одно бракованное. Партия изделий будет признана годной, если произойдет событие $A \cup B$. События A и B несовместны и, следовательно, справедлива формула

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Подсчитаем вероятность события A. Из 20 изделий можно отобрать для проверки 10 изделий C_{20}^{10} способами. Из небракованных изделий 10 изделий отбираются C_{18}^{10} способами. Поэтому $\mathsf{P}(A)=\frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}}=\frac{18!10!}{8!20!}=\frac{10\cdot 9}{20\cdot 19}=\frac{9}{38}$.

Для события B количество благоприятных исходов равно $C_{18}^{9}\cdot C_{2}^{1}$ (число способов отбора 9 небракованных изделий и одного бракованного), и поэтому

$$\mathsf{P}(B)=\frac{C_{18}^{9}C_{2}^{1}}{C_{20}^{10}}=\frac{18!\,10!\,10!\,2}{9!\,9!\,20!}=\frac{10\cdot 10\cdot 2}{20\cdot 19}=\frac{20}{38}.$$

По теореме сложения для несовместных событий получаем $\mathsf{P}(A\cup B)=\frac{9}{38}+\frac{20}{38}=\frac{29}{38}$. ▲

Пример 3. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

△ События A (выбрана пика) и B (появился туз) не являются несовместными. Поэтому для вычисления искомой вероятности события $A\cup B$ воспользуемся формулой

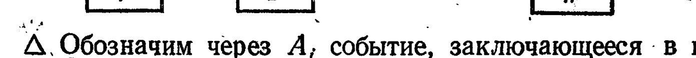
$$\mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A\cap B).$$

Вероятности событий A, B и $A\cap B$ легко подсчитываются:

$$\mathsf{P}(A)=\frac{1}{4},\quad \mathsf{P}(B)=\frac{1}{9},\quad \mathsf{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}.$$

Таким образом, $\mathsf{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$. ▲

Пример 4. Участок электрической цепи состоит из n последовательно соединенных элементов, каждый из которых работает независимо от остальных. Известна вероятность невыхода из строя за определенный промежуток времени (так называемая надежность) каждого элемента: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Найти вероятность исправной работы всего участка цепи (надежность участка).



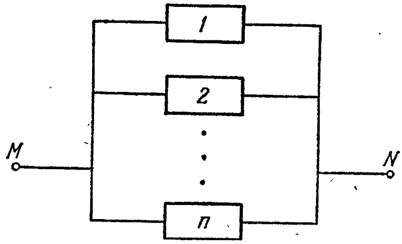
△ Обозначим через A_i событие, заключающееся в исправной работе элемента i, через A — событие, состоящее в нормальной работе всего участка. Тогда

$$A=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

и, поскольку события A_i независимы в совокупности,

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n)=p_1p_2\ldots p_n. \ ▲$$

Пример 5. Участок электрической цепи состоит из n параллельно соединенных элементов, каждый из которых работает независимо от остальных. Известна вероятность



невыхода из строя за определенный промежуток времени каждого элемента: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Определить вероятность исправной работы всего участка цепи (надежность участка).

$\triangle$ Пусть A_i и A — события, рассмотренные в примере 4. Для определения вероятности события A удобно предварительно вычислить вероятность события $\overline{A}$. Легко сообразить, что

$$\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_n,$$

так как весь участок цепи выходит из строя тогда и только тогда, когда выходят из строя все элементы цепи. По условию задачи события A_i независимы в совокупности, следовательно, события $\overline{A}_i$ также независимы в совокупности. Согласно теореме умножения для независимых в совокупности событий получаем

$$\mathrm{P}(\overline{A})=\mathrm{P}(\overline{A}_1)\,\mathrm{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathrm{P}(\overline{A}_n),$$

откуда

$$1-\mathrm{P}(A)=(1-\mathrm{P}(A_1))(1-\mathrm{P}(A_2))\ldots(1-\mathrm{P}(A_n)),$$

и, следовательно,

$$\mathrm{P}(A)=1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n). \blacktriangle$$

Пример 6. Рассматривается та же схема, что и в предыдущем примере, но $p_1=p_2=\ldots=p_n=p=0{,}7$. Сколько элементов должен содержать участок электрической цепи, чтобы его надежность превышала 0,99?

$\triangle$ Согласно результату, полученному в предыдущем примере, $\mathrm{P}(A)=1-(1-p)^n$. Для числа элементов n получаем неравенство

$$1-(1-p)^n>0{,}99,$$

решая которое находим n:

$$(1-p)^n < 0{,}01,$$

$$n \lg(1-p) < \lg 0{,}01 = -2, \quad n > -\frac{2}{\lg(1-p)}.$$

Если $p = 0{,}7$, то $n > -\frac{2}{\lg 0{,}3} \approx 3{,}8$, т. е. в этом случае участок цепи должен содержать не менее 4 элементов. ▲

3. Формула полной вероятности. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная система попарно несовместных событий, связанная с некоторым опытом, и A — произвольное событие, связанное с тем же опытом. Очевидно, что для произвольного события A справедливо равенство

$$A = A \cap U.$$

С другой стороны, по определению полной системы событий

$$U = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

и поэтому

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n).$$

Последнее соотношение, используя распределительное свойство сложения и умножения, можно переписать так:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Очевидно, если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны, то и события $A \cap H_1, A \cap H_2, \ldots, A \cap H_n$ также попарно несовместны. В самом деле,

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (A \cap A) \cap (H_i \cap H_j) = A \cap V = V$$

для любых i и j $(i \neq j)$.

По теореме сложения для попарно несовместных событий получаем

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \cap H_1) + \mathsf{P}(A \cap H_2) + \ldots + \mathsf{P}(A \cap H_n),$$

или, короче,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A \cap H_i).$$

Но по теореме умножения

$$\mathsf{P}(A \cap H_i) = \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i),$$

и, следовательно,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i). \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.* События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами.*

Формула (1) используется в тех случаях, когда непосредственно найти вероятность события A трудно, в то время как условные вероятности $\mathsf{P}(A \mid H_i)$ и вероятности гипотез $\mathsf{P}(H_i)$ вычисляются легко.

Пример 1. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 — во втором, остальные — в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех — с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

△ Пусть событие A состоит в том, что выбрана деталь отличного качества. Через H_1, H_2, H_3 обозначим события (гипотезы), заключающиеся в том, что выбранная деталь изготовлена соответственно в первом, во втором и в третьем цехах. Вероятности гипотез легко находятся:

$$\mathsf{P}(H_1)=\frac{18}{50}, \quad \mathsf{P}(H_2)=\frac{20}{50}, \quad \mathsf{P}(H_3)=\frac{12}{50}.$$

Условные вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_1, H_2 или H_3, заданы, причем

$$\mathsf{P}(A \mid H_1)=0{,}9, \quad \mathsf{P}(A \mid H_2)=0{,}6, \quad \mathsf{P}(A \mid H_3)=0{,}9.$$

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A \mid H_1)+\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A \mid H_2)+\mathsf{P}(H_3)\mathsf{P}(A \mid H_3)=$$
$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{18}{50}+\frac{6}{10}\cdot\frac{20}{50}+\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{50}=\frac{39}{50}=0{,}78. \quad ▲$$

Пример 2. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты. Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым?

△ Будем называть «хорошими» те билеты, которые Петров знает. Предположим, что число «хороших» билетов равно k при общем числе всех билетов n ($k<n$). Тогда вероятность события A (Петров взял «хороший» билет) в том случае, когда он отвечает первым, равна $\mathsf{P}(A)=\frac{k}{n}$. В случае, когда Петров отвечает вторым, для определения вероятности события A рассмотрим две гипотезы: H_1 (студенту, отвечавшему до Петрова, достался «хороший» билет) и H_2 (студент, отвечавший первым, вытащил «плохой» билет). Вероятности гипотез H_1 и H_2,

очевидно, равны

$$P(H_1)=\frac{k}{n} \text{ и } P(H_2)=\frac{n-k}{n}.$$

Условная вероятность события A при условии осуществления гипотезы H_1 равна

$$P(A \mid H_1)=\frac{k-1}{n-1}.$$

В случае, если имела место вторая гипотеза, условная вероятность события A равна

$$P(A \mid H_2)=\frac{k}{n-1}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(H_1)P(A \mid H_1)+P(H_2)P(A \mid H_2)=$$
$$=\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n-1}(k-1+n-k)=\frac{k}{n}.$$

Таким образом, вероятность получить «хороший» билет одна и та же в обоих случаях, т. е. не зависит от того, отвечает Петров первым или вторым. ▲

4. Формулы Байеса. Представим себе следующую ситуацию. Имеется урна, в которой лежат три шара. Шары могут быть либо белого цвета, либо черного, но совершенно не известно, сколько в урне белых шаров и сколько черных. В этих условиях можно выдвинуть четыре гипотезы о цвете шаров в урне, а именно: гипотезу H_0 — в урне 0 шаров белого цвета, гипотезу H_1 — в урне 1 белый шар, гипотезу H_2 — в урне 2 белых шара и, наконец, гипотезу H_3 — в урне 3 белых шара. Все эти гипотезы приходится считать равновероятными, поскольку нет никаких сведений о количестве белых шаров в урне. Допустим теперь, что из урны наудачу вынимается один шар и он оказывается белым. Ясно, что после проделанного эксперимента уже совершенно неестественно считать, что все четыре гипотезы о количестве белых шаров в урне одинаково вероятны. Поскольку случайно вынутый шар оказался белым, есть основания считать более вероятным, что белых шаров в урне больше, чем черных, а гипотезу H_0 после состоявшегося эксперимента вообще придется отбросить. Таким образом, тот факт, что случайно вынутый шар оказался белым, заставляет нас переоценить вероятности гипотез. Эта переоценка вероятностей гипотез осуществляется с помощью формул Байеса, которые легко выводятся из теоремы умножения и формулы полной вероятности.

Пусть A — произвольное событие и $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная система попарно несовместных событий, тогда по теореме умножения

$$\mathsf{P}(A \cap H_i) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(H_i \mid A) = \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i),$$

откуда

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}{\mathsf{P}(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Заменяя теперь $\mathsf{P}(A)$ ее выражением по формуле полной вероятности, получаем формулы

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Их называют *формулами Байеса.*

Формулы (1) дают выражения для условных вероятностей гипотез H_i при условии, что произошло событие A, через вероятности $\mathsf{P}(H_i)$ и условные вероятности $\mathsf{P}(A \mid H_i)$, вычисленные до того, как событие A осуществилось.

Вернемся к задаче о переоценке вероятностей гипотез в случае урны с тремя шарами. Пусть A — событие, заключающееся в том, что вынутый наудачу из урны шар оказался белым. Вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_0, H_1, H_2, H_3, легко вычисляются:

$$\mathsf{P}(A \mid H_0) = 0, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_1) = \frac{1}{3},$$

$$\mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{2}{3}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_3) = 1,$$

а так как все предположения о количестве белых шаров в урне одинаково правдоподобны, то

$$\mathsf{P}(H_0) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(H_3) = \frac{1}{4}.$$

По формуле полной вероятности вычисляется $\mathsf{P}(A)$:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формулам Байеса получаем

$$\mathsf{P}(H_0 \mid A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0}{\frac{1}{2}} = 0, \qquad \mathsf{P}(H_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

$$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \qquad \mathsf{P}(H_3 \mid A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, если до того, как из урны был вынут шар, у нас не было никаких оснований отдавать предпочтение какой-либо из четырех гипотез и вероятность каждой из них мы вынуждены были считать равной $\frac{1}{4}$, то после того, как был вынут белый шар, мы переоцениваем вероятности гипотез, причем вероятности того, что в урне было 0, 1, 2, 3 белых шара, считаем равными соответственно $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Пример. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25 % всех деталей, второй — 35 %, третий — 40 %. В продукции первого рабочего брак составляет 5 %, в продукции второго — 4 % и в продукции третьего — 2 %. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

△ Обозначим через H_1, H_2 и H_3 гипотезы, заключающиеся в том, что случайно выбранная для контроля деталь изготовлена соответственно первым, вторым и третьим рабочим. Так как первый рабочий изготовил 25 %, второй — 35 % и третий — 40 % всех деталей, то

$$\mathsf{P}(H_1)=0{,}25,\quad \mathsf{P}(H_2)=0{,}35,\quad \mathsf{P}(H_3)=0{,}4.$$

Пусть A — событие, состоящее в том, что выбранная для контроля деталь оказывается бракованной. Вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_1, H_2 и H_3, даны в условии задачи, а именно:

$$\mathsf{P}(A\mid H_1)=0{,}05,\quad \mathsf{P}(A\mid H_2)=0{,}04,\quad \mathsf{P}(A\mid H_3)=0{,}02.$$

По формуле Байеса находим

$$\mathsf{P}(H_2\mid A)=\frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A\mid H_2)}{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A\mid H_1)+\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A\mid H_2)+\mathsf{P}(H_3)\,\mathsf{P}(A\mid H_3)}=$$
$$=\frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}4\cdot 0{,}02}=\frac{35\cdot 4}{25\cdot 5+35\cdot 4+40\cdot 2}=\frac{28}{69}.\ ▲$$

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте теорему сложения: а) для несовместных событий; б) для двух произвольных событий.

2. Чему равна вероятность события A, если вероятность события $\overline{A}$ равна 0,3?

3. Запишите формулу для условной вероятности события A при условии, что событие B произошло.

4. Сформулируйте теорему умножения: а) для двух произвольных событий; б) для независимых событий.

5. Запишите формулу полной вероятности.

Упражнения

4.9. Докажите, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$ также независимы.

4.10. Докажите, что если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

4.11. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определите вероятность:

1) хотя бы одного попадания в мишень;

2) одного попадания в мишень.

4.12. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Вычислите вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором два вопроса.

4.13. Могут ли несовместные события быть попарно независимыми?

4.14. Являются ли независимыми в совокупности события, образующие полную систему событий?

4.15. Опыт состоит в двукратном подбрасывании монеты. Рассмотрим события: A (герб выпал в первый раз), B (герб выпал хотя бы один раз), C (герб выпал во второй раз). Определите, зависимы или независимы пары событий A и B, B и C; C и A.

4.16. Бросаются две игральные кости. Рассмотрите события:

A — на первой кости выпало нечетное число очков;

B — на второй кости выпало нечетное число очков;

C — сумма очков, выпавших на двух костях, нечетна.

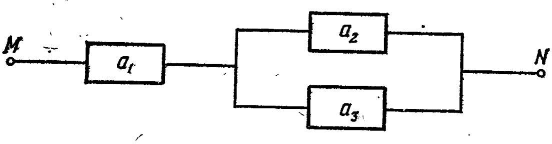
Будут ли события A, B, C попарно независимыми? Будут ли они независимыми в совокупности?

4.17. Рабочий обслуживает 3 станка, каждый из которых работает независимо от двух других. Вероятности того, что за смену станки не потребуют вмешательства рабочего равны, соответственно

$$p_1=0{,}4, \quad p_2=0{,}3, \quad p_3=0{,}2.$$

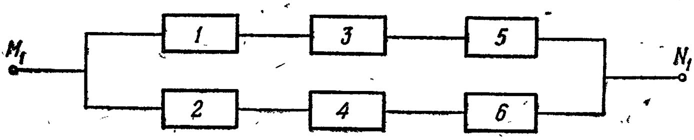
Найдите вероятность того, что за смену по крайней мере один станок потребует вмешательства рабочего.

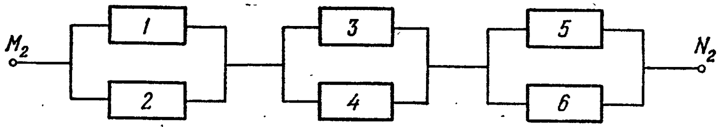
4.18. Участок электрической цепи состоит из трех элементов, каждый из которых работает независимо от двух других. Элементы



не выходят из строя за определенный промежуток времени соответственно с вероятностью $p_1=0{,}9$, $p_2=p_3=0{,}7$. Определите вероятность нормальной работы всего участка.

4.19. Два участка электрической цепи составлены по схемам, изображенным на рисунке. Каждый элемент работает независимо от





остальных и не выходит из строя в течение определенного промежутка времени с вероятностью p. Определите вероятность нормальной работы каждого участка. Какой участок цепи является более надежным?

4.20. В телевизоре 12 ламп. Каждая лампа работает независимо от остальных и не выходит из строя в течение года с вероятностью p. Какова вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя?

4.21. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы шестерка появилась хотя бы один раз с вероятностью, большей 0,9?

4.22. Из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают по одному шару. Определите для каждого участника вероятность первым извлечь белый шар.

4.23. Прибор работает в двух режимах: в благоприятном и неблагоприятном, причем в благоприятном режиме работа прибора происходит в 80 % всех случаев. Вероятность выхода прибора из строя в течение часа при благоприятном режиме работы равна 0,1, при неблагоприятном — 0,7. Определите вероятность безотказной работы прибора в течение часа.

4.24. Три станка производят соответственно 50 %, 30 % и 20 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 1 %, 2 % и 1,5 %. Какова вероятность того, что выбранное наугад изделие окажется бракованным?

4.25. Радиолампа поступила с одного из трех заводов соответственно с вероятностями 0,25; 0,50 и 0,25. Вероятность выйти из строя в течение года для ламп, изготовленных первым заводом, равна 0,1, вторым заводом — 0,2 и третьим — 0,4. Определите вероятность того, что лампа проработает год.

4.26. Два автомата производят одинаковые изделия. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат дает 60 % первосортных изделий, второй — 84 %. Наудачу выбранное изделие оказалось первосортным. Какова вероятность того, что оно изготовлено первым автоматом?

4.27. Известно, что 96 % выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенный контроль признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту?

4.28. Прибор состоит из двух узлов, причем для работы прибора необходима исправность каждого узла. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго — p_2. Прибор испытывался в течение времени t и вышел из строя. Определите вероятность того, что вышел из строя только первый узел, а второй исправен.

4.29. В урне лежат четыре шара, причем все предположения о числе белых шаров в урне одинаково вероятны. Взятый наудачу из урны шар оказался белым. Какова вероятность того, что и следующий шар, вынутый из урны, также окажется белым?

4.30. В урне лежат n шаров, причем все предположения о числе белых шаров, находящихся в урне, одинаково вероятны. Взятый наудачу из урны шар оказался белым. Какова вероятность того, что и следующий шар, извлеченный из урны, также окажется белым?

§ 15. Формула Бернулли

До сих пор мы рассматривали случайные события, связанные с некоторыми единичными опытами. Однако и для практики, и для самой теории вероятностей гораздо больший интерес представляет изучение серии одинаковых опытов, которые производятся независимо. Примерами серий независимых опытов могут служить подбрасывание монеты, стрельба по мишени, выбор изделия для контроля в тех случаях, когда все эти опыты делаются многократно и в одинаковых условиях. Задача ставится следующим образом.

Пусть случайное событие A осуществляется в некотором опыте с вероятностью p. Какова вероятность $\mathsf{P}_n(k)$ того, что при n-кратном воспроизведении опыта событие A произойдет ровно k раз?

Рассмотрим сначала серию из четырех опытов, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p, и попытаемся определить вероятность $\mathsf{P}_4(2)$ того, что в четырех опытах событие A произойдет ровно два раза.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 и A_4 события, заключающиеся в том, что событие A произошло соответственно в первом, втором, третьем и четвертом опытах. Тогда событие, состоящее в том, что A произошло ровно два раза, может быть записано как сумма следующих несовместных событий:

$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло в 1-м и 2-м опытах),
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло в 1-м и 3-м опытах),
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ (A произошло в 1-м и 4-м опытах),
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло во 2-м и 3-м опытах),
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ (A произошло во 2-м и 4-м опытах),
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$ (A произошло в 3-м и 4-м опытах).

Здесь выписано C_4^2 событий, так как существует именно столько способов двукратного осуществления события A в четырех опытах. Вероятность каждого из этих событий по теореме умножения равна $p^2(1-p)^2$, т. е. одна и та же.

По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$\mathsf{P}_4(2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2.$$

В общем случае формула для $\mathsf{P}_n(k)$ получается совершенно аналогично.

Обозначим через A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) событие, заключающееся в том, что событие A происходит в i-м опыте.

Тогда событие, состоящее в том, что A наступило ровно k раз, представляется в виде суммы следующих несовместных событий:

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \ldots \cap \overline{A}_n$ (A произошло в первых k опытах),

. . . .

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n$ (A произошло в последних k опытах).

Здесь должно быть выписано C_n^k событий, так как именно таково число способов k-кратного осуществления события A в n опытах.

По теореме умножения вероятность каждого из этих событий равна

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Применяя теорему сложения для несовместных событий, получаем

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1)$$

Эта формула называется *формулой Бернулли* для серии независимых опытов.

Пример 1. По мишени производится пять выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами?

△ По формуле Бернулли, положив $n=5$, $k=3$, $p=0{,}8$, находим

$$\mathrm{P}_5(3) = C_5^3 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048 \approx 0{,}2. \ ▲$$

Пример 2. В приборе 4 лампы. Вероятность выхода из строя в течение года для каждой лампы равна $\frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины всех ламп?

△ Применяя формулу Бернулли, находим вероятность того, что в течение года выйдут из строя две лампы: $C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$, три лампы: $C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}$, четыре лампы: $C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$.

По теореме сложения для несовместных событий искомая вероятность равна

$$C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}+C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4=$$

$$=\frac{150+20+1}{6^4}=\frac{171}{1\,296}=\frac{19}{144}\approx 0{,}13. \ \blacktriangle$$

В формуле (1) положим $1-p=q$. Тогда

$$\mathsf{P}_n(k)=C_n^k q^{n-k} p^k.$$

Эти вероятности являются коэффициентами многочлена $(q+px)^n$, так как

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k q^{n-k}p^k)\,x^k=\sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}_n(k)\,x^k. \qquad (2)$$

В связи с этим многочлен $(q+px)^n$ называют *производящим многочленом* для вероятностей k-кратного осуществления события A в серии из n независимых опытов.

В тех случаях, когда необходимо найти все вероятности $\mathsf{P}_n(k)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, удобно выписать производящий многочлен и разложить его по формуле Ньютона. Коэффициенты многочлена дадут искомые вероятности.

Отметим еще, что иногда требуется найти наивероятнейшее число наступлений события A в серии из n независимых опытов. Другими словами, требуется определить такие значения k, при которых величина $C_n^k q^{n-k} p^k$ (при постоянном n) принимает наибольшее значение. Из формулы (2) следует, что эта задача равносильна отысканию наибольшего коэффициента производящего многочлена $(q+px)^n$. В § 12 (см. пример 7) было показано, как находить наибольший коэффициент многочленов такого вида.

Пример 3. Четыре элемента вычислительного устройства работают независимо. Вероятность безотказной работы за время t для каждого элемента равна $\frac{3}{4}$. Найти вероятность того, что в течение времени t:

а) ни один элемент не будет работать безотказно;

б) только один элемент будет работать безотказно;

в) два элемента не откажут;

г) три элемента будут работать исправно;

д) все четыре будут работать исправно.

$\triangle$ Здесь опыт заключается в наблюдении за работой одного элемента в течение времени t, событие A — в безотказной работе элемента в течение заданного времени. Событие A имеет вероятность $p=\frac{3}{4}$, противоположное событие $\bar{A}$ происходит с вероятностью $q=\frac{1}{4}$. Устройство содержит четыре элемента, следовательно, опыт производится четыре раза, т. е. $n=4$.

Для решения задачи составим производящий многочлен:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}x+$$
$$+\frac{4\cdot3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3x^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4x^4.$$

Коэффициенты этого многочлена дают искомые вероятности:

а) вероятность того, что ни один элемент не будет работать безотказно, равна коэффициенту при x^0, т. е.

$$P_4(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx 0{,}004;$$

б) вероятность того, что только один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при x, т. е.

$$P_4(1)=4\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}\approx 0{,}048;$$

в) вероятность безотказной работы двух элементов равна коэффициенту при x^2, т. е.

$$P_4(2)=\frac{4\cdot3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\approx 0{,}212;$$

г) вероятность безотказной работы трех элементов равна коэффициенту при x^3, т. е.

$$P_4(3)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\approx 0{,}422;$$

д) вероятность того, что все четыре элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при x^4, т. е.

$$P_4(4)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx 0{,}314. \blacktriangle$$

Пример 4. Событие A при однократном осуществлении опыта наступает с вероятностью $\frac{2}{3}$. Опыт производится 10 раз. Какой исход этого эксперимента имеет наибольшую вероятность? Чему она равна?

$\triangle$ Производящий многочлен в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

В примере 7 § 12 было установлено, что наибольшим коэффициентом этого многочлена является коэффициент при x^7, т. е. $C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7$. Таким образом, наибольшую вероятность имеет следующий исход эксперимента: событие A произойдет 7 раз. Вероятность такого исхода

$$P_{10}(7)=C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0,26.$$

Каждый из 10 других исходов эксперимента имеет меньшую вероятность. ▲

Вопросы для контроля

1. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли? Как записывается эта формула?

2. Что такое производящий многочлен? Каков вероятностный смысл его коэффициентов?

3. Если событие A наступает в некотором опыте с вероятностью $\frac{1}{4}$ и опыт проводится 5 раз, то как в этом случае записывается производящий многочлен?

Упражнения

4.31. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет два раза?

4.32. Вероятность того, что суточный расход газа на предприятии не превысит нормы, равна 0,9. Какова вероятность того, что в течение недели предприятие трижды допустит перерасход газа?

4.33. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет не менее двух раз?

4.34. Если вероятности выигрыша и проигрыша в одной партии одинаковы и равны 0,5, то что более вероятно: 1) выиграть три партии из четырех или пять из восьми; 2) выиграть не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

4.35. Событие A при однократном осуществлении опыта наступает с вероятностью $\frac{2}{3}$. Определите вероятность того, что при пятикратном осуществлении опыта событие A произойдет: 5 раз, 4 раза, 3 раза, 2 раза, 1 раз, не произойдет ни разу.

4.36. По мишени производится 100 выстрелов. Каково наивероятнейшее число попаданий, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $\frac{5}{6}$?

4.37. Рабочий обслуживает 50 станков. Вероятность того, что в течение смены станок потребует регулировки, равна $\frac{1}{3}$. Что более вероятно: 1) регулировки потребуют 17 станков; 2) регулировки потребуют 16 станков?

4.38. В приборе шесть ламп. При повышении напряжения в цепи каждая лампа выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,3. При перегорании трех или меньшего числа ламп прибор не выходит из строя. При перегорании четырех ламп прибор выходит из строя с вероятностью 0,3, при перегорании пяти ламп — с вероятностью 0,7, при перегорании шести ламп — с вероятностью 1. Определите вероятность выхода прибора из строя при повышении напряжения.

§ 16. Случайные величины

1. Закон распределения случайной величины. Под *случайной величиной*, связанной с некоторым опытом, понимается всякая величина, которая при осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение. В предыдущих параграфах мы уже встречались с разнообразными случайными величинами. В опыте с подбрасыванием игральной кости нас интересовало число выпавших очков, т. е. величина, которая в зависимости от случая принимала одно из следующих шести значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При стрельбе по мишени пятью выстрелами мы также имели дело со случайной величиной (числом попаданий в мишень), которая могла принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Примерами случайных величин могут служить также:

а) количество бракованных изделий в определенной партии,

б) величина надоя молока от одной коровы в течение года,

в) количество солнечных пятен с площадью, большей некоторого определенного значения, зарегистрированных астрономом в течение дня на солнечном диске,

г) число лепестков в цветке сирени,

д) количество дорожно-транспортных происшествий в городе в течение суток.

Для полной характеристики случайной величины необходимо прежде всего знать те значения, которые она может принимать. Но этого, разумеется, недостаточно. Помимо этого нужно знать, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение.

Будем обозначать случайную величину буквой X, ее значения буквами

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а соответствующие вероятности, с которыми эти значения принимаются, буквами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Если для случайной величины X известны все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые она может принимать, и все вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, с которыми эти значения принимаются, то говорят, что задан *закон распределения* случайной величины X или просто *распределение* величины X.

Закон распределения удобно записывать в виде следующей таблицы:

x_1	x_2	x_3	...	x_k	...	x_n
p_1	p_2	p_3	...	p_k	...	p_n

(1)

В первой строке таблицы записываются все значения случайной величины, а под ними, во второй строке,—соответствующие вероятности.

Рассмотрим n случайных событий:

A_1—случайная величина X приняла значение x_1,
A_2—случайная величина X приняла значение x_2,
. . . .
A_n—случайная величина X приняла значение x_n.

Очевидно, что сумма событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ является достоверным событием, так как одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайная величина обязательно принимает. Поэтому $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1$.

Кроме того, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, так как случайная величина при однократном осуществлении опыта может принять только одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$\mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \ldots + \mathsf{P}(A_n) = 1,$$

т. е. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, или, короче,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{2}$$

Следовательно, сумма всех чисел, стоящих во второй строке таблицы (1), дающей закон распределения случайной величины X, должна быть равна единице.

Пример 1. Пусть случайная величина X—число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найти закон распределения.

△ Случайная величина X принимает значения

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \ldots, \quad x_6 = 6$$

с вероятностями

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Поэтому закон распределения задается таблицей

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

. ▲

Пример 2. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень. Найти ее закон распределения.

△ Случайная величина X может принимать следующие значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Для определения соответствующих вероятностей составим производящий многочлен:

$$(0{,}2 + 0{,}8x)^3 = 0{,}2^3 + 3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8x + 3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2x^2 + 0{,}8^3x^3.$$

Известно, что коэффициент при x^k дает вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное k. Поэтому

$$p_1 = 0{,}2^3 = 0{,}008,$$
$$p_2 = 3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8 = 0{,}096,$$
$$p_3 = 3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2 = 0{,}384,$$
$$p_4 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

. ▲

2. Биномиальное распределение. Рассмотрим случайную величину X — число появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p.

Случайная величина X может, очевидно, принимать одно из следующих значений:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots,\ n.$$

Вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, равное k, определяется, как мы знаем, формулой Бернулли:

$$\mathrm{P}_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где} \quad q=1-p.$$

Такое распределение случайной величины называется *биномиальным распределением* или *распределением Бернулли*. Распределение Бернулли полностью задается двумя параметрами: числом n всех опытов и вероятностью p, с которой событие происходит в каждом отдельном опыте.

Условие (2) из п. 1 для биномиального распределения принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=1.$$

Для доказательства справедливости этого равенства достаточно в тождестве

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k q^{n-k}p^k x^k$$

положить $x=1$.

3. Математическое ожидание случайной величины. Важной числовой характеристикой случайной величины является ее среднее значение или математическое ожидание.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины называется число, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений.

Математическое ожидание случайной величины X обозначается $\mathrm{M}X$. Если случайная величина X принимает значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ соответственно с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, то согласно определению

$$\mathrm{M}X=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k. \qquad (1)$$

Математическое ожидание называют средним значением случайной величины, так как оно указывает некоторое «среднее число», около которого группируются все значения случайной величины.

Пример 1. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

△ Распределение данной случайной величины X найдено в примере 1 пункта 1. По формуле (1) находим

$$MX=\sum_{k=1}^{6} x_k p_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2}=3{,}5. \ ▲$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p.

△ Вероятность того, что случайная величина X примет значение k, согласно формуле Бернулли равна $\mathrm{P}_n(k)=C_n^k q^{n-k} p^k$. Следовательно, по формуле (1)

$$MX=\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}_n(k).$$

Для упрощения полученного выражения воспользуемся тождеством

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(k)\,x^k.$$

Продифференцировав по x обе части этого тождества, получим

$$n(q+px)^{n-1}p=\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}_n(k)\,x^{k-1}.$$

Отсюда при $x=1$, учитывая, что $p+q=1$, находим

$$np=\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}_n(k).$$

Следовательно,

$$MX=np. \qquad (2)$$

Таким образом, математическое ожидание числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p, равно произведению числа n всех опытов на вероятность p наступления события в отдельном опыте.

Другими словами, математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, равно произведению np. ▲

Пример 3. Найти математическое ожидание числа бракованных изделий в партии из 10 000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,005.

△ Число бракованных изделий — это случайная величина X, распределенная по биномиальному закону. Поэтому по формуле (2) находим

$$\mathsf{M}X = 10\,000 \cdot 0{,}005 = 50. \ \blacktriangle$$

4. Дисперсия случайной величины. Другой важной числовой характеристикой случайной величины является ее дисперсия.

Определение. *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия случайной величины X обозначается $\mathsf{D}X$. Следовательно,

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)^2.$$

Пусть случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ..., x_n соответственно с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n. Тогда квадрат отклонения случайной величины X от ее математического ожидания есть случайная величина, которая принимает значения

$$(x_1 - \mathsf{M}X)^2, \ (x_2 - \mathsf{M}X)^2, \ \ldots, \ (x_k - \mathsf{M}X)^2, \ \ldots, \ (x_n - \mathsf{M}X)^2$$

соответственно с вероятностями

$$p_1, \ p_2, \ \ldots, \ p_k, \ \ldots, \ p_n.$$

Поэтому математическое ожидание так распределенной случайной величины, т. е. дисперсию X, можно записать следующим образом:

$$\mathsf{D}X = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathsf{M}X)^2 p_k. \qquad (1)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса, рассеивание случайной величины относительно ее математического ожидания (среднего значения). Само слово «дисперсия» означает «рассеивание».

Пример 1. Случайные величины X и Y такие, что каждая из них с одинаковой вероятностью принимает лишь два значения: X — значения -1 и 1, а Y — значения -2 и 2. Найти $\mathsf{D}X$ и $\mathsf{D}Y$.

△ Из условия следует, что каждое свое значение случайные величины X и Y принимают с вероятностью 0,5. Поэтому

$$\mathsf{M}X = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$\mathsf{M}Y = (-2) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Теперь, используя формулу (1), находим дисперсии:

$$\mathsf{D}X=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1,$$

$$\mathsf{D}Y=4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=4. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Законы распределения случайных величин X и Y заданы таблицами

-2	-1	1	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

и

-2	-1	1	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Найти $\mathsf{D}X$ и $\mathsf{D}Y$.

$\triangle$ Вычисляем математические ожидания:

$$\mathsf{M}X=(-2)\cdot\frac{1}{6}+(-1)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=0,$$

$$\mathsf{M}Y=(-2)\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=0.$$

По формуле (1) находим дисперсии:

$$\mathsf{D}X=4\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=2,$$

$$\mathsf{D}Y=4\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=2{,}5.$$

Случайные величины X и Y принимают здесь одни и те же значения, имеют одно и то же математическое ожидание, но разброс случайной величины Y больший, чем у случайной величины X. Значения ± 2, более удаленные от математического ожидания, случайная величина Y принимает с большей вероятностью, чем случайная величина X, а значения ± 1, менее удаленные от математического ожидания, Y принимает с меньшей вероятностью, чем X. Именно на это и указывает неравенство $\mathsf{D}X < \mathsf{D}Y$. $\blacktriangle$

В примерах 1 и 2 дисперсии случайных величин вычислялись по формуле (1). Однако, как правило, для вычисления дисперсии оказывается более удобной другая формула. Для того чтобы получить ее, преобразуем прежде всего правую часть формулы (1) следующим образом:

$$\mathsf{D}X=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathsf{M}X)^2 p_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2(\mathsf{M}X)x_k+(\mathsf{M}X)^2)p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2(\mathsf{M}X)\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+(\mathsf{M}X)^2\sum_{k=1}^{n}p_k.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \mathsf{M}X,$$

получим равенство

$$\mathsf{D}X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (\mathsf{M}X)^2.$$

Оставшаяся сумма в этом равенстве есть не что иное, как математическое ожидание случайной величины, распределенной по следующему закону:

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Такую случайную величину естественно назвать квадратом случайной величины X и обозначить X^2.

Таким образом, для дисперсии справедлива формула

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}(X^2) - (\mathsf{M}X)^2. \qquad (2)$$

Эта формула читается так: дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой величины без квадрата ее математического ожидания.

Пример 3. Найти дисперсию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

Δ В примере 2 предыдущего пункта было показано, что $\mathsf{M}X = np$. Для вычисления дисперсии по формуле (2) найдем $\mathsf{M}(X^2)$.

Заметим, что случайная величина X^2 принимает значение k^2 с вероятностью $p_k = \mathsf{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, а $q = 1 - p$. Следовательно,

$$\mathsf{M}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathsf{P}_n(k).$$

Для упрощения получившейся суммы воспользуемся тождеством

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}_n(k) x^k.$$

Продифференцировав дважды по x обе части этого тождества, получим новое тождество

$$n(n-1)(q+px)^{n-2} p^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_n(k) k(k-1) x^{k-2}.$$

Положив в нем $x=1$, придем к равенству

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)p_k.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2p_k=\mathsf{M}(X^2) \text{ и } \sum_{k=1}^{n} kp_k=\mathsf{M}(X)=np,$$

находим

$$n(n-1)p^2=\mathsf{M}(X^2)-np,$$

т. е.

$$\mathsf{M}(X^2)=n(n-1)p^2+np.$$

Следовательно,

$$\mathsf{D}X=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2$$

и, окончательно,

$$\mathsf{D}X=npq. \blacktriangle$$

5. Понятие о законе больших чисел. Рассмотрим случайную величину X, равную числу наступлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p. Случайная величина может принять значение k, где k — любое из чисел $0, 1, 2, \ldots, n$. Отклонение частоты $\frac{k}{n}$ наступлений события A в серии из n опытов от вероятности p, с которой событие A происходит в отдельном опыте, т. е.

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|,$$

также представляет собой случайную величину. Вероятность того, что случайная величина $\left|\frac{k}{n}-p\right|$ примет значение, не меньшее некоторого положительного числа ε, будем обозначать $\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)$.

Закон больших чисел утверждает: для любого положительного числа ε вероятность того, что частота наступлений события A в серии из n опытов отклоняется от вероятности p, с которой A происходит в отдельном опыте, не меньше чем на ε, с ростом n стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0. \qquad (1)$$

Это утверждение называется *законом больших чисел в форме Бернулли*. Из формулы (1) следует, что, как бы мало ни было ε, при достаточно большом n вероятность неравенства

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$$

сколь угодно близка к нулю и, следовательно, вероятность противоположного неравенства

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon$$

сколь угодно близка к единице, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Итак, *с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых опытов частота появления события как угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте.*

В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события его частоту, вычисленную при достаточно большом числе опытов. Например, в связи с тем, что частота рождений мальчиков при достаточно большом числе наблюдений за рождаемостью оказывается близкой к числу 0,511, именно это число принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать серьезные демографические прогнозы. Доказательство закона больших чисел в форме Бернулли, опирающееся на неравенство Чебышева, дается в следующем пункте.

6. Неравенство Чебышева и доказательство закона больших чисел в форме Бернулли. Рассмотрим абсолютную величину отклонения случайной величины X от ее математического ожидания, т. е. рассмотрим случайную величину $|X-\mathsf{M}X|$.

Вероятность того, что случайная величина $|X-\mathsf{M}X|$ примет значение, не меньшее некоторого положительного числа ε, будем обозначать $\mathsf{P}(|X-\mathsf{M}X|\geqslant\varepsilon)$.

Теорема. *Для произвольной случайной величины X и произвольного положительного числа ε справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(|X-\mathsf{M}X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2},$$

т. е. вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной *величине будет не меньше произвольного положительного числа ε, не превосходит дисперсии X, деленной на ε^2.*

Это и есть знаменитое неравенство П. Л. Чебышева, с помощью которого в теории вероятностей доказываются многие важные теоремы.

□ Пусть случайная величина X распределена по закону

x_1	...	x_l	x_{l+1}	...	x_n
p_1	...	p_l	p_{l+1}	...	p_n

Возьмем произвольное положительное число ε. Тогда все значения x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ случайной величины X можно разбить на два множества: к первому множеству отнесем те значения x_k, для которых выполняется неравенство

$$|x_k - \mathrm{M}X| \geqslant \varepsilon; \tag{1}$$

остальные значения, т. е. те, для которых справедливо противоположное неравенство

$$|x_k - \mathrm{M}X| < \varepsilon, \tag{2}$$

отнесем ко второму множеству. Заметим, что не исключается, что одно из этих множеств окажется пустым.

Не ограничивая общности, можно считать, что мы так занумеровали значения случайной величины, что те значения, которые удовлетворяют неравенству (1), получили номера от 1 до l, а остальные значения — номера от $l+1$ до n.

Рассмотрим теперь дисперсию случайной величины X:

$$\mathrm{D}X = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k.$$

Так как все слагаемые этой суммы неотрицательны, то, отбросив последние $n-l$ слагаемых, мы можем только уменьшить сумму, и поэтому

$$\mathrm{D}X \geqslant \sum_{k=1}^{l} (x_k - \mathrm{M}X)^2 p_k.$$

Но теперь под знаком суммы остались только значения x_k, для которых имеет место неравенство

$$|x_k - \mathrm{M}X| \geqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l}(x_k - \mathsf{M}X)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{l} p_k.$$

Последняя сумма $\sum_{k=1}^{l} p_k$ есть вероятность того, что случайная величина X примет одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_l$, и поэтому $\sum_{k=1}^{l} p_k$ есть вероятность того, что $|X - \mathsf{M}X| \geqslant \varepsilon$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{l} p_k = \mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| \geqslant \varepsilon).$$

Таким образом, для дисперсии получена оценка

$$\mathsf{D}X \geqslant \varepsilon^2 \mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| \geqslant \varepsilon),$$

из которой следует неравенство Чебышева. ■

Пример 1. Дисперсия случайной величины X равна 0,016. С помощью неравенства Чебышева оценить $\mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| \geqslant 0{,}4)$.

△ Положив в неравенстве Чебышева $\mathsf{D}X = 0{,}016$, $\varepsilon = 0{,}4$, получим

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| \geqslant 0{,}4) \leqslant \frac{0{,}016}{0{,}4^2} = 0{,}1. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Прибор собран из 10 независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя за время t каждого элемента равна $p = 0{,}05$. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение числа элементов, вышедших из строя за время t, от математического ожидания числа переставших работать за то же время элементов окажется меньше 4.

△ Пусть X — случайная величина — число вышедших из строя за время t элементов. Тогда

$$\mathsf{M}X = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5, \quad \mathsf{D}X = npq = 0{,}5 \cdot 0{,}95 = 0{,}475.$$

Следовательно, согласно неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| \geqslant 4) \leqslant \frac{0{,}475}{16} \approx 0{,}3.$$

Поэтому искомая вероятность

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{M}X| < 4) > 1 - \frac{0{,}475}{16} \approx 0{,}7. \ \blacktriangle$$

Используя неравенство Чебышева, докажем закон больших чисел в форме Бернулли.

□ Пусть случайная величина X есть число наступлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p. Случайная величина X принимает значения k ($k=0, 1, \ldots, n$). Ранее (см. пп. 3 и 4) уже были вычислены математическое ожидание и дисперсия случайной величины X:

$$\mathsf{M}X=np, \quad \mathsf{D}X=npq.$$

Зададимся произвольным положительным числом ε_1 и запишем для случайной величины X неравенство Чебышева:

$$\mathsf{P}(|k-np|\geqslant\varepsilon_1)\leqslant\frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Заметим, что поскольку неравенство

$$|k-np|\geqslant\varepsilon_1$$

равносильно неравенству

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{n},$$

то

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{n}\right)\leqslant\frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Так как ε_1 — произвольное положительное число, то $\frac{\varepsilon_1}{n}$ — также произвольное положительное число. Положив $\frac{\varepsilon_1}{n}=\varepsilon$, получим следующую оценку для вероятности того, что частота $\frac{k}{n}$ наступления события A в серии из n опытов отклоняется по абсолютной величине от вероятности p наступления A в отдельном опыте не меньше чем на произвольное положительное число ε:

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Из полученной оценки, ввиду того, что $\frac{pq}{n\varepsilon^2}\to 0$ при $n\to\infty$, сразу следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0. \blacksquare$$

Вопросы для контроля

1. Приведите пример какой-нибудь случайной величины.
2. Что называется распределением случайной величины?
3. Какое распределение называется биномиальным?
4. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
5. Что называется дисперсией случайной величины?
6. Чему равны MX и DX, если случайная величина распределена биномиально с параметрами n и p?
7. Как связаны между собой MX, $M(X^2)$, DX?
8. В чем состоит закон больших чисел в форме Бернулли?

Упражнения

4.39. Может ли распределение какой-либо случайной величины задаваться таблицей:

1)

0	$\frac{1}{2}$	10	π
0,1	0,5	0,1	0,3

; 2)

1	2	3	4
0	0,4	0,2	0,3

?

4.40. Является ли закон распределения случайных величин, рассмотренных в примерах 1 и 2 п. 1, биномиальным?

4.41. Монета подбрасывается три раза. Рассматривается случайная величина X—число выпадений герба. Найдите распределение случайной величины X.

4.42. Случайная величина X—квадрат числа очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найдите закон распределения.

4.43. Производятся три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X—частота появления события A в трех опытах. Найдите закон распределения случайной величины X.

4.44. Случайная величина X имеет следующий закон распределения:

1	2	3
0,3	0,2	0,5

Найдите MX и DX.

4.45. Случайная величина X распределена по закону

2	4	6	8	10
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найдите MX и DX.

4.46. Найдите MX и DX для случайной величины, рассмотренной: 1) в упр. 4.41; 2) в упр. 4.43.

4.47. Найдите MX для случайной величины X, рассмотренной в упр. 4.42.

4.48. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наугад вынимаются два шара. Найдите MX и DX, если X—число вынутых белых шаров.

4.49. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

4.50. Из всей выпускаемой заводом продукции 98% составляют изделия со знаком качества. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа изделий со знаком качества в партии из 5000 изделий.

4.51. Имеются 4 лампы, каждая из которых с вероятностью $\frac{1}{3}$ имеет дефект. При ввинчивании в патрон дефектная лампа сразу перегорает, и тогда ввинчивается следующая. Рассмотрите случайную величину X—число ввинченных ламп. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

4.52. При бросании трех костей игрок выигрывает 10 рублей, если на всех костях выпадет шесть очков. В случае выпадения шести очков только на двух костях игрок получает рубль. Сколько должен стоить билет, дающий право на участие в такой игре, чтобы игра была выгодной?

4.53. Мишень в тире представляет собой круг, разделенный на три одинаковых сектора, занумерованных цифрами 1, 2, 3. Во время выстрела мишень вращается, так что стрелок не различает секторов и стреляет наугад. При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает рубль, в сектор 2—два рубля, в сектор 3—три рубля. Стоимость билета, дающего право на один выстрел,—полтора рубля. Выгодна ли такая игра тому, кто попадает в мишень с вероятностью: 1) 0,7; 2) 0,8; 3) 0,75?

Глава 5

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 17. Числовые ряды

1. Определение ряда и его суммы. Пусть задана числовая последовательность a_n, $n \in N$. Тогда выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется *числовым рядом* и обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Числа a_1, a_2, ... называются *членами ряда* (1), соответственно первым, вторым и т. д.; a_n называется *n-м* или *общим членом ряда* (1).

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, ... называются *частичными суммами ряда* (1).

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

называется *n-м остатком ряда* (1). Отметим, что у ряда (2) первым членом является $(n+1)$-й член исходного ряда (1) и k-й член ряда (2) равен a_{n+k}.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется *расходящимся*. Следовательно, ряд (1) называется сходящимся, если существует предел

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Этот предел называется *суммой ряда* (1).

Если ряд (1) сходится и S — его сумма, то будем писать

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\geqslant 1$.

△ Этот ряд уже рассматривался при изучении суммы геометрической прогрессии (см. Алгебра, часть 1, § 18, п. 10). Напомним, что

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{для всех} \quad n\in N.$$

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}=0$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q}{1-q}.$$

Следовательно, если $|q|<1$, то данный ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}.$$

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$, поэтому последовательность (q^{n+1}) неограниченная и, следовательно, не имеет предела. Отсюда следует, что последовательность (S_n) тоже не имеет предела, т. е. данный ряд расходится, если $|q|>1$.

Пусть $|q|=1$. Если $q=1$, то

$$S_1=1,\ S_2=2,\ \ldots,\ S_n=n,\ \ldots$$

и, как легко видеть, данный ряд расходится.

Если $q=-1$, то

$$S_1=-1,\ S_2=-1+1=0,\ S_3=-1,\ \ldots,$$

т. е. частичные суммы с нечетными номерами равны -1, а с четными номерами равны 0. Такая последовательность не имеет предела. Следовательно, если $|q|=1$, то данный ряд расходится ▲.

Теорема 1. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то и ряд сходится.*

□ Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Для любого n имеем

$$S_{N+n}=\sum_{k=1}^{n+N} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n+N} a_k=S_N+\sum_{k=1}^{n} a_{N+k}=S_N+S_n^*,$$

где S_n^* — n-я частичная сумма N-го остатка данного ряда.

Отсюда следует, что если ряд сходится и его сумма равна S, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty}(S_{N+n}-S_N) = \\ = \lim_{n\to\infty} S_{N+n}-S_N = \lim_{n\to\infty} S_n - S_N = S - S_N$$

и, следовательно, N-й остаток ряда сходится. Наоборот, если N-й остаток ряда сходится и его сумма равна R_N, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{N+n} = \lim_{n\to\infty}(S_N+S_n^*) = \\ = S_N + \lim_{n\to\infty} S_n^* = S_N + R_N$$

и, следовательно, ряд сходится. ■

Из доказательства теоремы 1 следует, что если S — сумма данного ряда, то

$$S = S_N + R_N,$$

где S_N — N-я частичная сумма, а R_N — сумма N-го остатка данного ряда.

Теорема 2. *Если ряды с общими членами a_n и b_n сходятся и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B,$$

то для любых чисел α и β ряд с общим членом $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

□ Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \\ = \alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha A + \beta B,$$

а это и означает, что ряд с общим членом $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ сходится и его сумма равна $\alpha A + \beta B$. ■

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n} + 3\cdot 2^{1-n}).$$

△ Общий член этого ряда имеет вид

$$c_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Как показано в примере 1, ряды с общими членами $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ и $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

В силу теоремы 2 данный ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n})=2\cdot\frac{1}{2}+6=7. \ \blacktriangle$$

Теорема 3 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд с общим членом a_n сходится, то $a_n\to 0$ при $n\to\infty$.*

□ Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=S_n-S_{n-1}$$

для любого $n\geqslant 2$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0. \ \blacksquare$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

△ Для этого ряда не выполняется необходимое условие сходимости.

Действительно,

$$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1}=\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

и, следовательно (см. Алгебра, часть 1, § 18, п. 8),

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}.$$

Таким образом, данный ряд расходится. ▲

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

△ Этот ряд называется *гармоническим*. Покажем, что он расходится.

Заметим, что

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k} \quad \text{для всех } k \in N.$$

Поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} \quad \text{для всех } n \in N.$$

А так как

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{n+1} = \ln(n+1),$$

то

$$S_n > \ln(n+1) \quad \text{для всех } n \in N,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$, т. е. гармонический ряд расходится. ▲

Рассмотренный пример показывает, что из условия

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

не следует сходимость ряда с общим членом a_n. Это условие является необходимым, но не является достаточным для сходимости ряда.

2. Ряды с неотрицательными членами. Прежде всего заметим, что последовательность частичных сумм любого ряда с неотрицательными членами является неубывающей. Действительно, пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами: $a_n \geqslant 0$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1} \quad \text{для всех } n.$$

Известно (см. Алгебра, часть 1, § 18, п. 8), что если неубывающая последовательность ограничена, то она имеет конечный предел. Если же она неограниченная, то она является бесконечно большой (см. Алгебра, часть 1, § 18, п. 7); про нее говорят, что она расходится к $+\infty$. Поэтому, если ряд с неотрицательными членами расходится, то будем говорить, что он расходится к $+\infty$ и что его сумма равна $+\infty$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами ограничена, то ряд сходится. Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами неограничена, то ряд расходится к* $+\infty$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{1}$$

Δ Покажем, что если $\alpha > 1$, то ряд (1) сходится, а если $\alpha \leqslant 1$, то ряд (1) расходится.

Для любого $n \geqslant 2$ при $\alpha > 1$ имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \int_{k-1}^{k} dx < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{1}^{n} < 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

и поэтому, согласно теореме 1, при $\alpha > 1$ ряд (1) сходится.

В предыдущем пункте мы уже показали, что при $\alpha = 1$ ряд (1) расходится. Покажем, что он расходится при любом $\alpha \leqslant 1$. Имеем (см. пример 4 п. 1)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(1+n),$$

и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$.

Таким образом, ряд (1) при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится к $+\infty$. ▲

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *выполняется условие: существует* N *такое, что* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \geqslant N$.

Тогда, если ряд из b_n *сходится, то и ряд из* a_n *сходится. Если же ряд из* a_n *расходится, то и ряд из* b_n *расходится.*

□ Если ряд из b_n сходится, то сходится и любой его остаток (см. теорему 1 п. 1). Пусть $B=\sum_{k=N}^{\infty} b_k$, тогда

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} b_k = B \text{ для всех } n \geqslant N,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ ограничена. Так как, кроме того, $a_k \geqslant 0$ для всех $k \geqslant N$, то в силу теоремы 1 ряд $\sum_{k=N}^{n} a_k$ сходится. Следовательно, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (см. теорему 1 п. 1).

Если ряд из a_n расходится, то ряд из b_n не может сходиться, так как из его сходимости следует сходимость ряда из a_n. ■

Пример 2. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$, где x—некоторое действительное число?

△ Так как $0 \leqslant \frac{\sin^2 nx}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ для всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 1), то по признаку сравнения данный ряд сходится для любого $x \in R$. ▲

Пример 3. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$?

△ Так как $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ для всех $n \geqslant 3$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по признаку сравнения данный ряд расходится. ▲

Лемма. *Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Тогда если существует q такое, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \quad \text{для всех} \quad n, \tag{2}$$

то ряд сходится. Если же

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{для всех } n, \tag{3}$$

то ряд расходится.

□ Если выполняется условие (2), то

$$a_{n+1} \leqslant qa_n \leqslant q^2 a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 q^n.$$

Следовательно,

$$a_n \leqslant a_1 q^{n-1} \quad \text{для всех} \quad n.$$

А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, у которого $0 < q < 1$, сходится, то по признаку сравнения данный ряд тоже сходится.

Если выполняется условие (3), то

$$a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant a_1,$$

т. е. $a_n \geqslant a_1 > 0$ для всех n. Отсюда следует, что для ряда не выполняется необходимое условие сходимости и, следовательно, ряд расходится. ■

Теорема 3 (признак Даламбера). *Пусть для ряда с положительными членами a_n выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится.

□ Из определения предела последовательности следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N.$$

Если $q < 1$, то, выбрав $\varepsilon > 0$ так, что $q + \varepsilon < 1$, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N,$$

т. е. N-й остаток данного ряда удовлетворяет условию (2) леммы. Следовательно, ряд сходится.

Если $q > 1$, то, выбрав $\varepsilon > 0$ так, что $q - \varepsilon > 1$, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon > 1 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N,$$

т. е. N-й остаток ряда удовлетворяет условию (3) леммы. Следовательно, ряд расходится. ■

Пример 4. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$?

△ Здесь $a_n=\frac{n}{2^n}$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится. ▲

Пример 5. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$?

△ Здесь $a_n=\frac{10^n}{n!}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится. ▲

Замечание. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1, \tag{4}$$

то ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при любом α выполняется условие (4). Однако, при $\alpha>1$ ряд сходится, а при $\alpha\leqslant 1$ расходится (см. пример 1).

3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Важный класс сходящихся рядов образуют так называемые абсолютно сходящиеся ряды. Прежде чем давать соответствующее определение, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится.*

□ Положим

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\qquad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}.$$

Очевидно, что

$$0\leqslant p_n\leqslant|a_n|,\quad 0\leqslant q_n\leqslant|a_n|\ \text{для всех } n.$$

По признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ сходятся. А так как $a_n=p_n-q_n$, то (см. теорему 2 п. 1) данный ряд тоже сходится. ■

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 1 утверждает, что если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Для исследования рядов на абсолютную сходимость можно пользоваться всеми признаками сходимости для рядов с неотрицательными членами.

Теорема 2. *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q.$$

Тогда если $q<1$, *то ряд сходится абсолютно, а если* $q>1$, *то ряд расходится.*

□ Если $q<1$, то абсолютная сходимость следует из признака Даламбера для рядов с положительными членами. Если $q>1$, то для ряда не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. конец доказательства леммы из п. 2) и, следовательно, ряд расходится. ■

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, где $\alpha>1$, сходится абсолютно.

△ Этот ряд сходится и, более того, сходится абсолютно. Действительно, здесь

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \quad |a_n| = \frac{1}{n^\alpha},$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha>1$, сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и, в частности, он сходится. ▲

Пример 2. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, где $\alpha>1$, а x — произвольное действительное число? Сходится ли он абсолютно?

△ Этот ряд сходится абсолютно, так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{для всех} \quad n,$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha>1$ сходится. ▲

Пример 3. Сходится ли абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, где $0<\alpha\leqslant 1$?

△ Данный ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha\leqslant 1$, расходится. Ниже будет доказано, что данный ряд сходится при любом $\alpha>0$. ▲

Теорема 3 (признак Лейбница). *Если последовательность (a_n) из положительных чисел убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится.*

□ Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда с четными номерами:

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}a_k, \qquad m\in N.$$

Так как

$$S_{2m}=a_1-a_2+\ldots+a_{2m-1}-a_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}-a_{2k})$$

и согласно условию $a_{2k-1}-a_{2k}\geqslant 0$, то последовательность S_{2m}, $m\in N$, возрастающая. С другой стороны,

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-\ldots-a_{2m}\leqslant a_1 \text{ для всех } m,$$

т. е. рассматриваемая последовательность ограниченная. Следовательно, она имеет предел. Пусть

$$S=\lim_{m\to\infty} S_{2m}. \tag{1}$$

Для частичных сумм с нечетными номерами имеем

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}(S_{2m}-a_{2m})=\lim_{m\to\infty} S_{2m}-\lim_{m\to\infty} a_{2m}=S. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что данный ряд сходится и его сумма равна S. ■

Из признака Лейбница следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

сходится при любом $\alpha>0$. Однако он не является абсолютно сходящимся, если $0<\alpha\leqslant 1$.

Определение 2. Ряд называется *условно сходящимся*, если он является сходящимся, но не является абсолютно сходящимся.

Например, оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

сходятся. Однако если первый ряд абсолютно сходящийся, то второй ряд не является абсолютно сходящимся и, следовательно, является условно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими свойствами обычных конечных сумм. В частности, для них имеет место свойство, аналогичное свойству переместительности: сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке членов ряда.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно. Более точно это утверждение формулируется следующим образом: если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся и $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд, членами которого являются всевозможные произведения вида $a_k b_n$, абсолютно сходится и его сумма равна произведению AB.

Условно сходящиеся ряды по своим свойствам существенно отличаются от обычных конечных сумм. Например, для них справедливо следующее утверждение: в условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что полученный ряд будет сходиться к любому наперед заданному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что полученный ряд будет расходиться.

4. Последовательности и ряды с комплексными членами. Пусть задана последовательность комплексных чисел

$$z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_n, \ \ldots \tag{1}$$

Как и для действительных чисел, эту последовательность будем обозначать (z_n).

Определение. Комплексное число z называется *пределом последовательности* (z_n), если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0,$$

где $|z_n - z|$ — модуль комплексного числа $z_n - z$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если число z является пределом последовательности (z_n), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{или} \quad z_n \to z \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

и говорят, что последовательность (z_n) сходится к z.

Теорема 1. *Последовательность комплексных чисел $z_n = a_n + ib_n$, $n \in N$, сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности их действительных и мнимых частей, причем*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Покажем, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, где $z = a + ib$. Так как

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

и $|a_n - a| \to 0$, $|b_n - b| \to 0$ при $n \to \infty$, то $|z_n - z| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, где $z = a + ib$, то из неравенств

$$|a_n - a| \leqslant |z_n - z|, \quad |b_n - b| \leqslant |z_n - z|$$

следует, что $|a_n - a| \to 0$ и $|b_n - b| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. ■

Из теоремы 1 и соответствующих теорем для последовательностей действительных чисел вытекают следующие утверждения для последовательностей комплексных чисел.

Следствие 1. *Сходящая последовательность имеет единственный предел.*

Следствие 2. *Если последовательности (z_n) и (w_n) сходящиеся, то предел суммы $(z_n + w_n)$ равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n,$$

предел разности $(z_n - w_n)$ равен разности пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n,$$

и предел произведения $(z_n w_n)$ равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Если, кроме того, $z_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, то предел частного $\left(\frac{w_n}{z_n}\right)$ равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{z_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}.$$

Как и в п. 1, определяются ряды с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Для них остаются в силе все определения и теоремы из п. 1. В частности, для рядов с комплексными членами справедливо следующее *необходимое условие сходимости*:

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, где z — некоторое комплексное число.

△ Если $|z|\geqslant 1$, то для данного ряда не выполняется необходимое условие сходимости:

$$|z^n|=|z|^n\geqslant 1 \text{ для всех } n,$$

и, следовательно, ряд расходится.

Если же $|z|<1$, то ряд сходится. Действительно, для n-й частичной суммы справедлива формула

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} z^k=\frac{z-z^{n+1}}{1-z},$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{z}{1-z}-\frac{z}{1-z}\lim_{n\to\infty} z^n.$$

Так как $|z^n|=|z|^n\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z^n=0$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z^k=\frac{z}{1-z}. \blacktriangle$$

Теорема 2. *Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с комплексными членами. Тогда если ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то и данный ряд сходится.*

□ Пусть $u_n = a_n + ib_n$ и, следовательно, $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Так как $|a_n| \leqslant |u_n|$, $|b_n| \leqslant |u_n|$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то по признаку сравнения ряды из a_n и b_n абсолютно сходятся. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Тогда по теореме 1 данный ряд сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + iB. \blacksquare$$

Отметим, что, как и раньше, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Следовательно, теорема 2 утверждает, что если ряд с комплексными членами абсолютно сходится, то он и просто сходится.

П р и м е р 2. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{n} \frac{z^n}{n!}$, где z — некоторое комплексное число, сходится абсолютно.

△ Здесь

$$u_n = \frac{z^n}{n!}, \qquad |u_n| = \frac{|z|^n}{n!}.$$

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ с действительными членами сходится при любом z.

Если $z = 0$, то $u_n = 0$, а ряд из нулей сходится. Если $z \neq 0$, то $|z| > 0$ и к ряду можно применить признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

для любого комплексного $z \neq 0$, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится абсолютно при любом комплексном z. ▲

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте определение числового ряда.
2. Что называется членом ряда, частичной суммой ряда, остатком ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся? Приведите примеры сходящихся рядов.
4. Какой ряд называется расходящимся? Приведите примеры расходящихся рядов.
5. Что называется суммой ряда?
6. Как связаны сходимость ряда и сходимость его остатка?
7. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда. Является ли это условие достаточным для сходимости ряда?
8. Сформулируйте признак сходимости ряда с неотрицательными членами.
9. В чем состоит признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами?
10. Сформулируйте признак Даламбера.
11. Какой ряд называется абсолютно сходящимся? Приведите примеры абсолютно сходящихся рядов.
12. При каком условии числовой ряд сходится абсолютно?
13. Сформулируйте признак Лейбница.
14. Какой ряд называется условно сходящимся? Приведите примеры условно сходящихся рядов.
15. Что называется пределом последовательности комплексных чисел?
16. Сформулируйте признак сходимости последовательности комплексных чисел.
17. Укажите достаточный признак абсолютной сходимости ряда с комплексными членами.

Упражнения

5.1. Найдите суммы следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{10^{2n}} + \frac{50}{10^{2n+1}}\right)$.

5.2. Сходятся или расходятся следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$?

5.3. Используя признак сравнения, исследуйте на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

5.4. Используя признак Даламбера, исследуйте на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

5.5. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

§ 18. Степенные ряды

1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. В этом параграфе будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

где z_0 и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — заданные комплексные числа, а z — переменная, принимающая любое комплексное число.

Такие ряды называются *степенными рядами*. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда* (1).

Общий член ряда (1)

$$u_n = a_n (z - z_0)^n$$

является функцией от z, и при каждом фиксированном значении переменной z является некоторым комплексным числом. Следовательно, при каждом значении переменной z ряд (1) является числовым рядом.

Отметим, что у степенного ряда счет членов ведется не с единицы, а с нуля: первый член называется нулевым, второй — первым и т. д. Для степенного ряда такой счет является естественным, так как нулевой член u_0 является произведением коэффициента a_0 на многочлен нулевой степени $(z-z_0)^0 = 1$, первый член u_1 есть произведение a_1 на $z-z_0$ и, вообще, *n-й член u_n равен произведению коэффициента a_n на многочлен n-й степени* $(z-z_0)^n$.

Так как между точками координатной плоскости и комплексными числами имеется взаимно однозначное соответствие, то часто вместо «комплексное число z» говорят «точка z». Так что если ряд (1) сходится при $z = z_1$, то говорят, что данный степенной ряд сходится в точке z_1.

Множество всех точек z, в которых ряд сходится, называется его *областью сходимости*. Заметим, что любой степенной ряд вида (1) сходится в точке z_0, так что область сходимости любого степенного ряда содержит по крайней мере одну точку. Дальнейшие сведения о виде области сходимости степенного ряда получим из следующей замечательной теоремы, носящей имя норвежского математика Н. Абеля (1802—1829).

Теорема 1. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно в любой точке z такой, что $|z-z_0| < |z_1-z_0|$. Если же ряд* (1) *расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z, для которой $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.*

Другими словами, если степенной ряд (1) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно в любой точке z из круга $|z-z_0| < |z_1-z_0|$. Если же ряд (1) расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке, лежащей вне круга $|z-z_0| \leqslant |z_1-z_0|$. О поведении ряда в точках окружности $|z-z_0| = |z_1-z_0|$ теорема Абеля ничего не утверждает.

□ Очевидно, если числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1-z_0)^n$$

сходится, то общий член этого ряда ограничен.

Пусть $|a_n(z_1-z_0)^n| \leqslant M$ для всех n. Тогда, если $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, то

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n| \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n \leqslant M \cdot q^n,$$

где $q=\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}<1$. Применив признак сравнения (с геометрической прогрессией), получим, что в любой точке z из круга $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ ряд сходится.

Пусть теперь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ расходится. Тогда ряд (1) расходится в любой точке z_2, для которой $|z_2-z_0|>|z_1-z_0|$, так как если бы он сходился в точке z_2, то он по доказанному должен сходиться в точке z_1. ■

Из теоремы Абеля следует, что для степенного ряда (1) возможны три ситуации:

1) ряд (1) сходится только в точке z_0;

2) ряд (1) сходится во всех точках z;

3) существует число $R>0$ такое, что для всех z из круга $|z-z_0|<R$ ряд сходится, а для всех z, $|z-z_0|>R$, ряд расходится.

Определение 1. Число $R>0$ такое, что ряд (1) сходится для всех z, $|z-z_0|<R$, и расходится для всех z, $|z-z_0|>R$, называется *радиусом сходимости ряда* (1). Если ряд (1) сходится только в точке z_0, то $R=0$. Если ряд (1) сходится при любом z, то $R=+\infty$.

Таким образом, у любого степенного ряда есть радиус сходимости R и, согласно определению, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Определение 2. Множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<R$, где R—радиус сходимости ряда (1), называется *кругом сходимости ряда* (1).

Отметим, что если $0<R<+\infty$, то круг сходимости ряда (1)—это открытый круг радиуса R с центром в точке z_0. Если $R=+\infty$, то круг сходимости—это вся комплексная плоскость. Если $R=0$, то ряд сходится только в точке z_0.

Теорема 2. *Если у степенного ряда* (1) *последовательность* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *имеет конечный или бесконечный* *предел, то для радиуса сходимости справедлива формула*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{2}$$

☐ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = A.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < A < +\infty$. Выберем некоторое $z_1 \neq z_0$ и к числовому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n$ применим признак Даламбера. Здесь $u_n = |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |z_1 - z_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n} =$$

$$= |z_1 - z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z_1 - z_0| \cdot \frac{1}{A}.$$

Если $\frac{1}{A}|z_1 - z_0| < 1$, то ряд (1) сходится абсолютно, если $\frac{1}{A}|z_1 - z_0| > 1$, то ряд расходится. Следовательно, $R = A$.

Если $A = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ для любого $z \neq z_0$ и, следовательно, ряд сходится при любом z, т. е. $R = +\infty$.

Если $A = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ для любого $z \neq z_0$ и, следовательно, ряд расходится при любом $z \neq z_0$, а это и означает, что $R = 0$. ■

В последнем пункте предыдущего параграфа рассматривались ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Там было показано, что первый ряд сходится для всех z, $|z| < 1$, и расходится для всех z, $|z| \geqslant 1$, а второй ряд сходится при всех z. Следовательно, у первого ряда $R = 1$, а у второго ряда $R = +\infty$. Легко проверить, что то же самое получается и по формуле (2).

Пример 1. Исследовать сходимость степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

△ Здесь $a_n=\frac{1}{2^n}>0$ для всех n. По формуле (2) находим радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 1}=2.$$

Таким образом, данный ряд сходится во всех точках z, $|z|<2$, и расходится во всех точках z, $|z|>2$. Для полноты исследования заметим, что этот ряд расходится во всех точках z, $|z|=2$, так как в них не выполнено необходимое условие сходимости ряда. ▲

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}.$$

△ У этого ряда все коэффициенты положительные: $a_n=\frac{1}{n^2}>0$ для всех n. По формуле (2) получаем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Следовательно, $|z|<1$ — круг сходимости данного ряда.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то данный ряд сходится абсолютно для любого z, $|z|=1$.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно при всех z, $|z|\leqslant 1$, и расходится при других z. ▲

Замечание. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ так же, как и выше, доказывается, что его радиус сходимости равен 1. Однако на границе круга сходимости, т. е. на окружности $|z|=1$, имеются как точки, в которых ряд сходится, так и точки, в которых ряд расходится. Например, в точке $z=1$ ряд расходится, а в точке $z=-1$ по признаку Лейбница он сходится.

Пример 3. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$.

△ К этому ряду нельзя применить формулу (2), так как у него все нечетные коэффициенты равны нулю:

$$a_{2n+1}=0 \quad \text{и} \quad a_{2n}=\frac{1}{2^n} \quad \text{для всех } n.$$

Для нахождения радиуса сходимости зафиксируем некоторое значение $z \neq 0$ и применим признак Даламбера к числовому ряду с общим членом $u_n = \frac{|z|^{2n}}{2^n}$. Имеем

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{2(n+1)} \cdot 2^n}{2^{n+1}|z|^{2n}} = \frac{|z|^2}{2}.$$

Следовательно, если $|z|^2 < 2$, то ряд сходится абсолютно, а если $|z|^2 > 2$, то ряд расходится. Таким образом, $R = \sqrt{2}$. ▲

2. Степенные ряды с действительными членами. В этом пункте будем рассматривать степенные ряды с действительными членами, т. е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1}$$

где $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — заданные действительные числа и x принимает лишь действительные значения.

Заметим, что если x принимает произвольное комплексное значение z, то рассматриваемые ряды будут степенными рядами с комплексными членами, и поэтому для них остаются в силе все определения и теоремы из п. 1. Так что если R — радиус сходимости ряда (1), то ряд расходится для всех x таких, что $|x - x_0| > R$, и сходится для всех x таких, что $|x - x_0| < R$, т. е. для всех x из интервала $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, который называется *интервалом сходимости*. В частности, если $R = +\infty$, то интервалом сходимости будет все множество действительных чисел $\boldsymbol{R} = (-\infty;\ +\infty)$, а если $R = 0$, то ряд сходится только в точке x_0.

На интервале сходимости степенной ряд определяет функцию

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{2}$$

Эта функция называется *суммой степенного ряда*.

Можно доказать, что сумма степенного ряда непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка на интервале сходимости ряда. Кроме того, производная суммы $S'(x)$ является суммой ряда из производных, т. е.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{3}$$

Аналогично,

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$S'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

и т. д. В этом смысле иногда говорят, что *для степенных рядов производная суммы равна сумме производных* или что степенные ряды можно дифференцировать почленно:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)'. \qquad (4)$$

Это утверждение о почленном дифференцировании степенных рядов мы примем без доказательства. Также без доказательства примем и следующее утверждение о почленном интегрировании степенных рядов:

интеграл от суммы степенного ряда равен сумме ряда из интегралов от соответствующих членов данного ряда, т. е.

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(x-x_0)^n\,dx \qquad (5)$$

для любого отрезка $[a; b]$ *из интервала сходимости.* Другими словами, степенной ряд на интервале сходимости можно интегрировать почленно:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(x-x_0)^n\,dx. \qquad (6)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \qquad (7)$$

△ Прежде всего найдем радиус сходимости R ряда (7). У этого ряда коэффициенты задаются формулой $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, и поэтому (см. формулу (2) п. 1)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Следовательно, ряд (7) сходится на интервале $(-1; 1)$ и его сумма $S(x)$ имеет непрерывную производную $S'(x)$,

6*

причем согласно формуле (3) о почленном дифференцировании степенного ряда

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}.$$

Последний ряд на интервале (—1; 1) сходится к функции $\frac{1}{1+x}$, и поэтому

$$S'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Интегрируя, получаем $S(x)=\ln(1+x)+C$, где C—некоторая постоянная. Так как $S(0)=0$, $\ln(1+0)=0$, то и $C=0$.

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$$

для любого x из интервала (—1; 1). ▲

Пример 2. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n. \tag{8}$$

△ Здесь $a_n=n$ и

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Следовательно, ряд (8) сходится на интервале (—1; 1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'.$$

По формуле (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

для любого x из интервала (—1; 1). ▲

Вопросы для контроля

1. Какой ряд называется степенным?
2. Какой вид имеет общий член степенного ряда?
3. Что называется областью сходимости степенного ряда?
4. Сформулируйте теорему Абеля.
5. Что называется радиусом и кругом сходимости степенного ряда?
6. Напишите формулу для нахождения радиуса сходимости.
7. Что называется суммой степенного ряда?
8. Что называется интервалом сходимости степенного ряда?
9. Можно ли степенной ряд дифференцировать и интегрировать почленно?

Упражнения

5.6. Найдите радиусы сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

5.7. Найдите круги сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{2^n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n!}$.

5.8. Найдите промежутки сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

§ 19. Ряды Тейлора

1. Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Если функция $f(x)$, кроме того, имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$, то по формуле интегрирования по частям

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t) =$$

$$= -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$$

и, следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Далее, если $f(x)$ имеет третью непрерывную производную $f'''(x)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f''(t)\,d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt$$

и, следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt.$$

Аналогично, если $f(x)$ имеет четвертую непрерывную производную $f^{\mathrm{IV}}(x)$, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f^{\mathrm{IV}}(t)(x-t)^3\,dt,$$

и т. д. Вообще, если $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 с остаточным членом в интегральной форме.* Многочлен

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора*, а функция

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \qquad (2)$$

называется *остаточным членом.*

Если считать, по определению, что $f(x_0)=f^{(0)}(x_0)$ и $0!=1$, то формулу Тейлора (1) можно записать в более компактной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \qquad (3)$$

Согласно теореме о среднем, примененной к интегралу (2), существует число ξ, лежащее между x_0 и x, такое, что

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет на интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то для любого $x\in(x_0-\delta;\ x+\delta)$ существует ξ, лежащее между x_0 и x, такое, что*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.* Правая часть формулы Тейлора (1), (3) или (4) называется *разложением функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 до n-го порядка.*

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка. Тогда, если существуют числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и непрерывная функция $\varphi(x)$ такие, что*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1} \qquad (5)$$

для любого x из $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, то

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. правая часть формулы (5) является разложением функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 до n-го порядка.

□ Из (5) и формулы Тейлора (4) следует, что

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1}=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

При $x=x_0$ получаем $a_0=f(x_0)$. Следовательно,

$$a_1+a_2(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^{n-1}+\varphi(x)(x-x_0)^n=$$
$$=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n.$$

При $x=x_0$ получаем $a_1=f'(x_0)$.

Аналогично доказывается, что

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2}, \ \ldots, \ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

и, наконец, $\varphi(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. ■

Заметим, что правая часть формулы (5) называется *разложением функции по степеням $x-x_0$ до n-го порядка.* Следовательно, теорема 2 утверждает, что разложение функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$ до n-го порядка единственное—это разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)=e^x$ по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ до третьего порядка.

△ Так как $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x$, $f^{\text{IV}}(x)=e^x$ и $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=1$, то для любого $x\in\boldsymbol{R}$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^{\xi}}{24}x^4,$$

где ξ лежит между x и нулем. ▲

П р и м е р 2. Разложить функцию $\sin x$ по степеням $x-x_0$ до третьего порядка.

△ Имеем $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin x)''=-\sin x$, $(\sin x)'''=-\cos x$. Следовательно,

$$\sin x=\sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0)+ \\ +\frac{-\sin x_0}{2}(x-x_0)^2+\frac{-\cos x_0}{3!}(x-x_0)^3+R_3(x),$$

где

$$R_3(x)=\frac{1}{3!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^3\sin t\,dt=\frac{\sin\xi}{4!}(x-x_0)^4;$$

точка ξ лежит между x_0 и x.

Особенно простой вид разложения $\sin x$ по формуле Тейлора получается в точке $x_0=0$. Действительно,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin\xi}{4!}x^4.$$

Легко видеть, что формула Тейлора для $\sin x$ в точке $x_0=0$ до четвертого порядка имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\cos\xi}{5!}x^5,$$

где ξ лежит между x и нулем. ▲

П р и м е р 3. Какую погрешность имеет приближение $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ для x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$?

△ Из формулы Тейлора (см. пример 2) следует, что

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|=\left|\frac{\cos\xi}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5.$$

Самые грубые подсчеты показывают, что указанное приближение $\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$ имеет абсолютную погрешность, не превышающую 0,01. ▲

П р и м е р 4. Разложить функцию $f(x)=e^{\sin x}$ по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ до третьего порядка.

△ Рассмотрим функцию e^y. Для нее справедливо следующее разложение (см. пример 1):

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{e^\eta}{24}y^4,$$

где η лежит между y и нулем.

Положив здесь $y=\sin x$, получим

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}(\sin x)^2+\frac{1}{6}(\sin x)^3+\frac{e^\eta}{24}(\sin x)^4.$$

В примере 2 было показано, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5.$$

Следовательно,

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5\right)^2 + $$
$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^3 + \frac{e^{\eta}}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^4 =$$
$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \varphi(x)x^4 =$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(x)x^4,$$

где $\varphi(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Согласно теореме 2 это и есть нужное разложение. ▲

2. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций. В этом пункте получим разложения по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$ до n-го порядка функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^{\alpha}$.

1. Формула Тейлора для функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$. Имеем $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ и, вообще, $f^{(k)}(x) = e^x$. Поэтому формула Тейлора для функции e^x в точке $x_0 = 0$ имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Таким образом, формула Тейлора для e^x в точке $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},$$

где ξ лежит между x и 0.

2. Формула Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + x\right)$$

и т. д. Для n-й производной по индукции получаем

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Следовательно, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$, и поэтому $f^{(n)}(0)=0$ для четных n и $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ для нечетных $n=2k+1$.

Таким образом, формула Тейлора для $\sin x$ в точке $x_0=0$ с остаточным членом в интегральной форме имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^x(x-t)^{2n+2}\cos t\,dt,$$

а с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi,$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

При помощи знака суммы $\sum$ последняя формула записывается следующим образом:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi.$$

3. Формула Тейлора для функции $f(x)=\cos x$ в точке $x_0=0$. Как и для $\sin x$, доказывается формула

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Для четных $n=2k$

$$(\cos x)^{(2k)}=\cos(k\pi+x)=(-1)^k\cos x,$$

а для нечетных $n=2k+1$

$$(\cos x)^{(2k+1)}=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=(-1)^{k+1}\sin x.$$

Следовательно,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^x(x-t)^{2n+1}\cos t\,dt,$$

а формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \cos \xi,$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

4. Формула Тейлора для функции $f(x) = \ln(1+x)$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

и т. д. По индукции получаем

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

и

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \\ + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}},$$

где ξ лежит между x и 0. Короче,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Заменив x на $-x$, получим следующее разложение:

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}.$$

5. Формула Тейлора для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в точке $x_0 = 0$. Так как

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

и, вообще,

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

то

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots \\ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1},$$

где ξ лежит между x и 0.

В частности, если $\alpha=n$, то формула Тейлора является формулой Ньютона для бинома

$$(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

По аналогии в общем случае также пишут

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k+C_\alpha^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

где

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad C_\alpha^0=1.$$

При $\alpha=-1$ получаем $C_{-1}^k=(-1)^k$, и поэтому

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+(-1)^{n+1}(1+\xi)^{-n-2}x^{n+1}.$$

3. Ряды Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки x_0. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Лемма. *Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаток формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$.*

□ Из формулы Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

следует, что если $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}(f(x)-R_n(x))=f(x),$$

т. е. ряд (1) сходится к $f(x)$.

Наоборот, если ряд (1) сходится к $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)=$$

$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=0. \blacksquare$$

Теорема 1. *Ряд Тейлора функции e^x для любого $x \in R$ сходится к e^x, т. е.*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{для всех} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

☐ Прежде всего покажем, что ряд (2) сходится абсолютно при любом x. Если $x=0$, то это очевидно.

Общий член ряда (2) имеет вид $u_n = \frac{x^n}{n!}$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

для любого $x \neq 0$. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом $x \neq 0$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Теперь из формулы Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

в пределе при $n \to \infty$ следует равенство (2). ■

Теорема 2. *Ряд Тейлора функции* $\sin x$ *для любого* $x \in \boldsymbol{R}$ *сходится к* $\sin x$, *т. е.*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{для всех} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{3}$$

☐ Здесь

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

для любого $x \neq 0$. По признаку Даламбера ряд (3) сходится абсолютно при любом $x \neq 0$. Следовательно, при любом x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Теперь из формулы Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos \xi$$

и того, что

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0$$

при $n \to \infty$, следует, что ряд (3) сходится к $\sin x$. ■

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 3. *Ряд Тейлора функции* $\cos x$ *для любого* $x \in \boldsymbol{R}$ *сходится к* $\cos x$, *т. е.*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \textit{для всех} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Ряд Тейлора функции* $\ln(1+x)$ *для любого* $x \in (-1;\ 1)$ *сходится к* $\ln(1+x)$, *т. е.*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \textit{для всех} \quad x \in (-1;\ 1). \tag{5}$$

□ В примере 1 п. 2 § 18 было доказано, что степенной ряд (5) сходится для любого x из интервала $(-1;\ 1)$ и его сумма равна $\ln(1+x)$. ■

Теорема 5. *Ряд Тейлора функции* $(1+x)^\alpha$ *для любого* $x \in (-1;\ 1)$ *сходится к* $(1+x)^\alpha$, *т. е.*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \quad \textit{для всех} \quad x \in (-1;\ 1). \tag{6}$$

□ Если α равно нулю или натуральному числу, то ряд (6) является конечной суммой. В остальных случаях все коэффициенты степенного ряда (6) $a_n = C_\alpha^n$ отличны от нуля. Следовательно, радиус сходимости вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд (6) сходится для любого x из интервала $(-1;\ 1)$ и расходится для любого x, $|x| > 1$.

Пусть $f(x)$ — сумма ряда (6). Тогда, дифференцируя ряд почленно, получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots$$

Умножим это равенство на $(1+x)$:

$$(1+x)f'(x)=\alpha+\alpha x+\alpha(\alpha-1)x+\alpha(\alpha-1)x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\ldots=\alpha\left\{1+\alpha x+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+$$
$$\left.+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^n+\ldots\right\}=\alpha\left\{1+\alpha x+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots\right\}=\alpha f(x).$$

Решая дифференциальное уравнение $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$, получаем $f(x)=C(1+x)^\alpha$.

Для нахождения постоянной C положим $x=0$. Тогда $f(0)=C$, а так как $f(0)=1$, то и $C=1$. Следовательно, $f(x)=(1+x)^\alpha$. ■

4. Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Из теорем 1, 2 и 3 п. 3 и теоремы Абеля для степенных рядов следует, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

сходятся для любого комплексного z. Положим, по определению,

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$
$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$ определены для любого комплексного z, причем для действительного $z=x$ это известные функции e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Для $z=iy$, где y — действительное, имеем

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{y^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k}\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k+1}\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos y+i\sin y.$$

Таким образом,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

и аналогично

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Можно доказать, что

$$e^{z_1+z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

Из этих формул следует, что если $z=x+iy$, то справедливо равенство

$$e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Заметим, что этим равенствам ранее, в гл. 1, определялось e^z для комплексных z. Следовательно, новое определение e^z не противоречит ранее данному определению.

Вопросы для контроля

1. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

2. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Для каких функций справедлива эта формула?

3. Напишите формулы Тейлора для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точке $x_0=0$.

4. Какой ряд называется рядом Тейлора функции?

5. Напишите разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора в точке $x_0=0$. Найдите интервалы сходимости для этих рядов.

6. Дайте определения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного z.

Упражнения

5.9. Разложите по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ следующие функции:
1) $\ln\cos x$ до четвертого порядка;
2) $\sin(\sin x)$ до третьего порядка;
3) $\operatorname{tg} x$ до пятого порядка.

5.10. Какую погрешность имеют приближения:

1) $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]$;

2) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ на отрезке $[0;\ 1]$?

5.11. Разложите в ряд по степеням x следующие функции и найдите радиусы сходимости полученных рядов:

1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=2^{x/2}$;

3) $y=\ln\frac{4+x}{4-x}$; 4) $y=\cos^2 x$;

5) $y=\frac{1}{(1-x)^3}$; 6) $y=\frac{1}{1+x^3}$;

7) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $y=\frac{1}{x^2-2x-3}$;

9) $y=\frac{x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$.

5.12. Разложите в ряд по степеням x следующие функции и найдите радиусы сходимости полученных рядов:

1) $y=\operatorname{arctg} x$; 2) $y=\arcsin x$;

3) $y=\arccos x$; 4) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

5) $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$; 6) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;

7) $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

Указание. Полезно рассмотреть производные заданных функций.

Глава 6

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 20. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T=2\pi$

1. Постановка задачи и определение ряда Фурье. В предыдущей главе изучались разложения функций в степенные ряды, т. е. разложения сложных функций на простые степенные функции вида $a_n(x-x_0)^n$. Такие разложения не всегда возможны и не всегда удобны в приложениях. При изучении сложных периодических процессов естественно возникает задача о представлении функций, описывающих эти процессы, в виде суммы конечного или бесконечного числа простых периодических функций.

В качестве таких функций берутся простые гармоники, т. е. функции вида

$$A\sin(\omega x+\alpha) \tag{1}$$

или, что то же самое, функции вида

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x.$$

Если $\omega=0$, то функция (1) является постоянной, а если $\omega\neq 0$, то она является периодической с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. В частности, каждая простая гармоника с $\omega=n$, где n — целое, имеет 2π в качестве одного из своих периодов.

Рассмотрим задачу о разложении 2π-периодической функции $f(x)$ в ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$
$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots, \tag{2}$$

где $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ — некоторые числа. Такие ряды называются *тригонометрическими*, а числа $a_0, \ldots$

$\ldots, a_n, b_n, \ldots$ — их *коэффициентами*. Член $\frac{a_0}{2}$ называется *свободным членом*. Свободный член берется в виде $\frac{a_0}{2}$ ради удобства.

При условии, что тригонометрический ряд (2) сходится к функции $f(x)$, найдем формулы, выражающие коэффициенты ряда (2) через функцию $f(x)$. Для простоты будем предполагать, что функция $f(x)$ равна сумме конечного числа простых гармоник:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_N\cos Nx+b_N\sin Nx. \qquad (3)$$

Проинтегрировав равенство (3) по x от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}2\pi=a_0\pi,$$

так как интегралы от $\cos nx$ и $\sin nx$ равны нулю. Следовательно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Умножив равенство (3) на $\cos x$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx,$$

так как интегралы от других слагаемых равны нулю. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos x\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\frac{a_0}{2}\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}b_1\sin^2 x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

и, наконец, если $N > 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_N \cos Nx \cos x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} a_N \int_{-\pi}^{\pi} (\cos (N+1) x + \cos (N-1) x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} a_N \left(\frac{\sin (N+1) x}{N+1} + \frac{\sin (N-1) x}{N-1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_N \sin Nx \cos x \, dx =$$

$$= b_N \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin (N+1) x + \sin (N-1) x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} b_N \left(-\frac{\cos (N+1) x}{N+1} - \frac{\cos (N-1) x}{N-1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Вычислим теперь интеграл от $\cos^2 x$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx.$$

Аналогично, умножив равенство (3) на $\sin x$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx.$$

И вообще, умножив равенство (3) на $\cos nx$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \tag{5}$$

а умножив на $\sin nx$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \tag{6}$$

Таким образом, в простейшем случае, когда $f(x)$ есть сумма конечного числа гармоник с периодом 2π, получены формулы (4), (5), (6), выражающие коэффициенты a_0, a_n, b_n через $f(x)$.

Рассмотрим теперь произвольную 2π-периодическую функцию или просто функцию, определенную лишь на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$. Тогда тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{2}$$

коэффициенты которого определены по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \tag{5}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \tag{6}$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$, а коэффициенты a_0, a_n, b_n — *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$.

Если ряд (2) является рядом Фурье функции $f(x)$, то будем писать

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Из определения следует, что найти ряд Фурье данной функции — значит найти коэффициенты Фурье этой функции по формулам (4), (5), (6) и написать тригонометрический ряд (2) с этими коэффициентами.

Пример 1. Найти ряд Фурье функции $f(x)=\operatorname{sign}x$, $x\in[-\pi; \pi]$.

$\triangle$ Напомним, что

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ 1, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

По формулам (4), (5), (6) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}x\cos nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}=$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\cdot 2=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx.$$

Так как $b_{2k}=0$, а $b_{2k-1}=\frac{4}{(2k-1)\pi}$, то полученный ряд Фурье можно записать проще:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$

или, что то же самое,

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \ ▲$$

П р и м е р 2. Найти ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\ \pi]$.

△ По формуле (4) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx.$$

Сделав замену в последнем интеграле (заменив x на $-x$), получим

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

Аналогично, по формуле (5) находим

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

К полученному интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \int_{0}^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

т. е. $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$.

Наконец, по формуле (6) находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Ряд Фурье определен для любой интегрируемой функции, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$. Однако если этот ряд сходится, то его сумма, очевидно, будет периодической функцией с периодом $T = 2\pi$. В этом смысле этот ряд естественно считать рядом Фурье 2π-периодической функции, которая получается из данной периодическим продолжением с интервала $(-\pi; \pi)$ на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$ (в точке $x = \pi$ она может быть задана произвольным образом, ряд Фурье от этого не меняется).

2. Теорема о сходимости ряда Фурье. Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на некотором промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых она монотонна. Например, функция $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\pi]$, кусочно монотонная: она постоянна на промежутках $[-\pi; 0)$, $(0; \pi]$. Функция $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\pi]$, тоже кусочно монотонная, так как она убывающая на отрезке $[-\pi; 0]$ и возрастающая на отрезке $[0; \pi]$.

Приведем без доказательства следующую теорему о сходимости ряда Фурье.

Теорема. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье этой функции сходится во всех точках $x\in \boldsymbol{R}$. Причем в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к $f(x)$, а в точках разрыва — к* $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Другими словами, ограниченная 2π-периодическая функция, кусочно монотонная на отрезке $[-\pi;\pi]$, разлагается в ряд Фурье во всех точках непрерывности.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\pi]$, и построить график суммы ряда Фурье.

$\triangle$ В предыдущем пункте (см. пример 1) мы уже нашли ряд Фурье данной функции:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$$

Данная функция не может быть продолжена периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$,

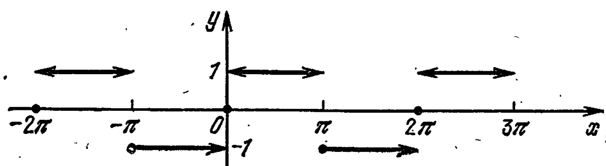


Рис. 17

так как $f(-\pi)=-1$, а $f(\pi)=1$. Однако, например, функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\pi)$, уже можно периодически с периодом 2π продолжить на $\boldsymbol{R}$. К полученной 2π-периодической функции (ее график изображен на рис. 17) применим теорему о сходимости ряда Фурье.

Из нее следует, что

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in (-\pi; \pi)$, так как на интервалах $(-\pi; 0)$ и $(0; \pi)$ данная функция непрерывна, а в точке $x=0$ предел слева равен -1, а предел справа равен $+1$. Аналогично получаем, что

$$\operatorname{sign}(x-2\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in (\pi; 3\pi)$. И вообще,

$$\operatorname{sign}(x-2p\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in ((2p-1)\pi; (2p+1)\pi)$, $p \in \mathbf{Z}$. В точках $x=(2p+1)\pi$ ряд сходится к 0. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 18.

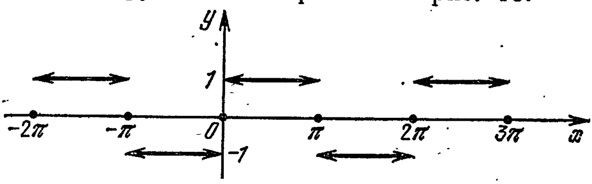


Рис. 18

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, $x \in [-\pi; \pi]$, и построить график суммы ряда Фурье.

$\triangle$ В предыдущем пункте (см. пример 2) было показано, что

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Данная функция может быть продолжена периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\mathbf{R}$, так как $f(-\pi)=f(\pi)=\pi$. К продолженной 2π-периодической функции (рис. 19) применим теорему о сходимости ряда Фурье. Из нее следует, что

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$. Следовательно, графиком суммы ряда Фурье будет график продолженной 2π-периодической функции (см. рис. 19). ▲

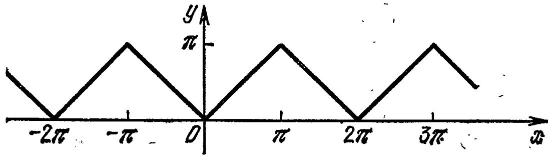


Рис. 19

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-\pi; 0], \\ \sin x, & \text{если } x \in [0; \pi], \end{cases}$$

и построить график суммы ряда Фурье.

△ По формулам для коэффициентов Фурье находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x)\,dx=0, \quad n\geqslant 2;$$

$$b_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)}, \quad n\geqslant 2;$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)} \cos nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Продолжим данную функцию на $\boldsymbol{R}$ периодически с периодом 2π. Полученная функция будет непрерывной на $\boldsymbol{R}$ и кусочно монотонной на $[-\pi; \pi]$ (рис. 20). Из

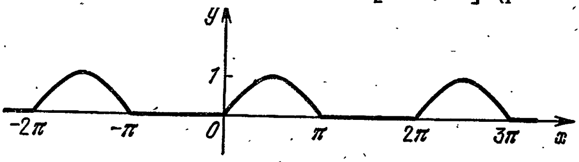


Рис. 20

теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к продолженной 2π-периодической функции для любого $x \in \boldsymbol{R}$. ▲

3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Прежде всего докажем следующее полезное утверждение.

Лемма. *Если интегрируемая функция* $f(x)$, $x \in [-l; l]$, *четная, то*

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \qquad (1)$$

а если нечетная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \qquad (2)$$

□ Имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{0} f(x)\,dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = -t$. Тогда

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int_{l}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{l} f(-t)\,dt,$$

и поэтому

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(-x)\,dx \qquad (3)$$

(в последнем интеграле переменная интегрирования снова обозначена x).

Из формулы (3) следует, что если $f(x)$ четная, то справедливо равенство (1), а если нечетная, то — равенство (2). ■

Рассмотрим теперь четную функцию $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$. Для нее, в силу доказанной леммы, имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{5}$$

$$b_n = 0,$$

так как для любого $n \in N$ функция $f(x)\cos nx$ четная, а функция $f(x)\sin nx$ нечетная. Следовательно, если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье содержит лишь свободный член и члены с $\cos nx$, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем коэффициенты Фурье a_0 и a_n вычисляются по формулам (4), (5).

Для нечетной функции $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$, получаем

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{6}$$

так как функция $f(x)\cos nx$ нечетная, а функция $f(x)\sin nx$ четная. Следовательно, ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ содержит лишь члены с $\sin nx$, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты Фурье b_n вычисляются по формуле (6).

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi; \pi]$, рассмотренная в примере 1 предыдущего пункта, является нечетной, поэтому ее ряд Фурье содержит лишь члены с $\sin nx$. Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$, рассмотренная в примере 2 п. 2, является четной, и поэтому ее ряд Фурье содержит лишь свободный член и члены с $\cos nx$.

Иногда требуется некоторую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\pi;\ 0]$ или на отрезке $[0;\ \pi]$, разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Если данную функцию продолжим на отрезок $[-\pi;\ \pi]$ четным образом, то ряд Фурье полученной четной функции не будет содержать членов с синусами. Если же данную функцию продолжим на отрезок $[-\pi;\ \pi]$ нечетным образом, то ряд Фурье полученной функции будет содержать только члены с синусами.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\ \pi]$.

△ Продолжим данную функцию на отрезок $[-\pi;\ \pi]$ четным образом и найдем коэффициенты Фурье полученной функции.

Прежде всего заметим, что получим функцию $|\sin x|$, $x\in\boldsymbol{R}$. Далее, так как эта функция четная, то $b_n=0$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$ и

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\cos x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1},\ n\geqslant 2.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

для любого $x\in\boldsymbol{R}$. ▲

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, $x\in[-\pi;\ 0]$: а) по косинусам; б) по синусам.

△ Чтобы разложить данную функцию по косинусам, необходимо ее продолжить на $[0;\ \pi]$ четным образом. Таким продолжением будет функция $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\ \pi]$. В примере 2 предыдущего пункта было найдено разложение в ряд Фурье этой функции. Именно,

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

для любого $x\in[-\pi;\ 0]$.

Нечетным продолжением данной функции будет функция $f(x)=x$, $x\in[-\pi;\ \pi]$. Для нее имеем: $a_0=0$ и $a_n=0$ для любого $n\in N$.

Найдем коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

для любого $x\in(-\pi;\ \pi)$. В точках $-\pi$ и π этот ряд сходится к 0, так как все его члены равны 0. (Это следует и из теоремы о сходимости ряда Фурье.) График суммы этого ряда изображен на рис. 21. ▲

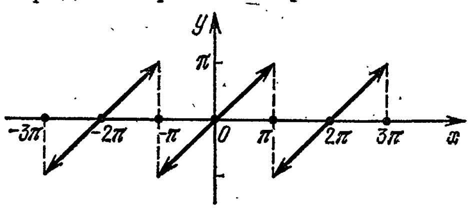


Рис. 21

4. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a;\ a+2\pi]$. Заметим, что любую 2π-периодическую функцию достаточно задать на некотором отрезке длины 2π. В остальных точках она будет определена в силу периодичности. Найдем формулы, выражающие коэффициенты Фурье этой функции через ее значения на произвольном отрезке длины 2π, т. е. на произвольном отрезке вида $[a;\ a+2\pi]$. Предварительно докажем следующее общее утверждение.

Лемма. *Если ограниченная функция $f(x)$ с периодом $T>0$ имеет конечное число точек разрыва на любом промежутке длины T, то*

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

для любого $a\in\boldsymbol{R}$.

☐ Имеем

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^{a+T} f(x)\,dx+\int_{a+T}^T f(x)\,dx.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int_{a+T}^T f(x)\,dx=-\int_T^{a+T} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x+T)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx.$$

Следовательно, интегралы от 0 до a и от $a+T$ до T в сумме дают нуль. ■

Пусть теперь $f(x)$ — 2π-периодическая функция, а a_0, a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье. Из леммы следует, что значение интеграла от $f(x)$ по любому отрезку $[a;\ a+2\pi]$ длины 2π одно и то же, поэтому

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Аналогично,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{3}$$

для любого $a\in\boldsymbol{R}$, так как функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ периодические с периодом 2π.

Пусть на отрезке $[a;\ a+2\pi]$ длины 2π задана функция $f(x)$. Продолжим ее периодически с периодом 2π на всю числовую прямую $\boldsymbol{R}$ (может быть, для этого придется изменить значение $f(x)$ в одной или обеих точках a и $a+2\pi$). Ряд Фурье полученной 2π-периодической функции называется рядом Фурье данной функции $f(x)$, $x\in[a;\ a+2\pi]$. В этом случае коэффициенты Фурье естественно вычислять по формулам (1), (2), (3).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\operatorname{sign} x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right],$$

и построить график суммы ряда Фурье.

△ По формулам (1), (2), (3) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{3\pi/2}dx=1,$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{3\pi/2}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{-\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{0}+\frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{0}^{3\pi/2}=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{3\pi/2}\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\cos nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{0}-\frac{\cos nx}{n\pi}\Big|_{0}^{3\pi/2}=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Изменим значение $f(x)$ в точке $x=\frac{3\pi}{2}$, положив $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, и продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю числовую прямую $\boldsymbol{R}$. Из теоремы

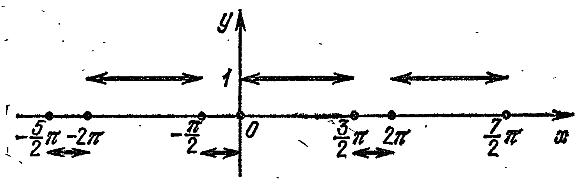


Рис. 22

о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к $\operatorname{sign} x$ для любого $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, а в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ сходится к 0. График суммы ряда Фурье изображен на рис. 22. ▲

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, $x\in[0;\ 2\pi]$.

△ По формулам (1), (2), (3) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx=\frac{1}{3\pi}(2\pi)^3=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n}.$$

Таким образом,

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

Изменим значение $f(x)$ в точке $x=2\pi$, положив $f(2\pi)=0$, и продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю числовую прямую. Продолженная функция будет разрывной в точках $x=2p\pi$, $p\in Z$, а в остальных точках — непрерывной.

Кроме того, она возрастающая на $[0;\ 2\pi)$. Следовательно, в силу теоремы о сходимости ряда Фурье

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

для любого $x\in(0;\ 2\pi)$, а в точках $x=0$ и $x=2\pi$ этот ряд сходится к $\frac{1}{2}(2\pi)^2=2\pi^2$. ▲

Вопросы для контроля

1. Какая функция называется периодической?
2. Какой ряд называется тригонометрическим рядом?
3. Какой ряд называется рядом Фурье функции? Напишите формулы для коэффициентов Фурье.
4. Сформулируйте теорему о сходимости ряда Фурье.
5. Какая функция называется четной (нечетной)?

6. Какой вид имеет ряд Фурье для четных и для нечетных функций?

7. Можно ли разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin 2x$, $x\in[0;\ \pi]$?

8. Можно ли разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\sin x+\cos x$, $x\in(-\pi;\ 0)$?

9. Можно ли разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x^2$, $x\in[-\pi;\ \pi]$?

10. Как выражаются коэффициенты Фурье функции через ее значения на произвольном промежутке длины 2π?

Упражнения

6.1. Найдите ряд Фурье следующих функций:

1) $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0), \\ 5, & \text{если } x\in[0;\ \pi]; \end{cases}$

2) $f(x)=\cos^2 x$, $x\in[-\pi;\ \pi]$;

3) $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0), \\ 0, & \text{если } x\in[0;\ \pi]. \end{cases}$

6.2. Разложите в ряд Фурье следующие функции (в каждом случае постройте график суммы полученного ряда):

1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $x\in[-\pi;\ \pi]$;

2) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$, $x\in[-\pi;\ \pi]$;

3) $f(x)=\begin{cases} \pi, & \text{если } x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right], \\ -\pi, & \text{если } x\in\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right); \end{cases}$

4) $f(x)=x^2$, $x\in[-\pi;\ \pi]$.

6.3. Разложите в ряд Фурье по косинусам следующие функции:

1) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in[0;\ 1], \\ 0, & \text{если } x\in(1;\ \pi]; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2}, & \text{если } x\in[0;\ 2), \\ 0, & \text{если } x\in[2;\ \pi); \end{cases}$

3) $f(x)=3x^2-6\pi x+2\pi^2$, $x\in[0;\ \pi]$.

6.4. Разложите в ряд Фурье по синусам следующие функции:

1) $f(x)=\cos x$, $x\in(0;\ \pi)$;

2) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $x\in[0;\ \pi)$;

3) $f(x)=x(\pi-x)$, $x\in[0;\ \pi]$.

6.5. Разложите в ряд Фурье следующие 2π-периодические функции:

1) $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{если } x\in(0;\ 2\pi), \\ 0, & \text{если } x=0; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in(1;\ 1+2\pi), \\ 1+\pi, & \text{если } x=1. \end{cases}$

§ 21. Ряды Фурье для периодических функций с произвольным периодом $T=2l$, $l>0$

1. Определение ряда Фурье. Любая периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$, $l>0$, заменой $x=\frac{l}{\pi}t$ преобразуется в функцию $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ с периодом 2π. Действительно,

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Если же функция $f(x)$ задана только на отрезке $[-l;\ l]$, $l>0$, то функция $\varphi(t)$ будет задана только на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Напишем ряд Фурье для функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

Отсюда, после замены $t=\frac{\pi}{l}x$, получаем соответствующий тригонометрический ряд для функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Этот ряд называется *рядом Фурье функции* $f(x)$. Для коэффициентов a_0, a_n, b_n, которые, как и раньше, называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, получаются следующие формулы:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

где сделана замена $t=\frac{\pi}{l}x$. Аналогично доказывается и формула (3).

Из теоремы о сходимости ряда Фурье для 2π-периодической функции следует соответствующая теорема о сходимости ряда Фурье для функции с произвольным периодом.

Теорема. *Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ ограничена и кусочно монотонна на отрезке $[-l;\ l]$, $l>0$, то ее ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в любой точке $x\in\mathbf{R}$. В частности, в точках непрерывности функции ряд сходится к $f(x)$.*

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\in[-1;\ 0),\\ 1, & \text{если}\quad x\in[0;\ 1],\end{cases}$$

и построить график суммы этого ряда.

$\triangle$ По формулам (1), (2), (3), в которых для данной функции $l=1$, получаем

$$a_0=\int_0^1 dx=1,\qquad a_n=\int_0^1 \cos n\pi x\,dx=0,$$

$$b_n=\int_0^1 \sin n\pi x\,dx=-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

Из последнего равенства следует, что если n четное, то

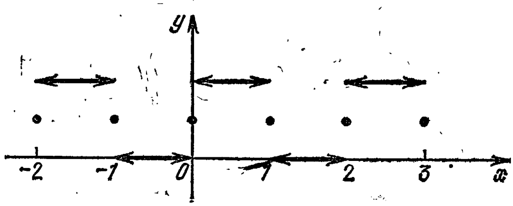


Рис. 23

$b_n=0$, т. е. $b_{2k}=0$, а если n нечетное, то $b_n=\frac{2}{n\pi}$, т. е. $b_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)\pi}$. Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что полученный ряд сходится к данной функции для любого x из интервала $(-1; 1)$, кроме $x=0$. Легко видеть, что в точках $x=0$, $x=-1$, $x=1$ он сходится к $\frac{1}{2}$. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 23. ▲

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\cos x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

и построить график суммы этого ряда.

△ По формулам (1), (2), (3), в которых для данной функции $l=\frac{\pi}{2}$, получаем

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{2\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}+\frac{1}{\pi}\,\frac{2\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos n\pi=\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Данная функция четная, и поэтому $b_n=0$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$.

Продолжим данную функцию периодически с периодом π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Продолженной

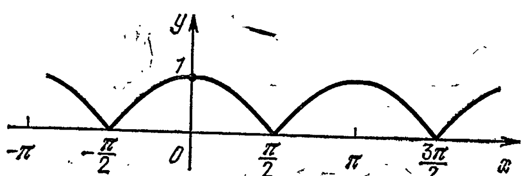


Рис. 24

функцией будет $|\cos x|$, $x\in\boldsymbol{R}$. Она, очевидно, будет непрерывной на $\boldsymbol{R}$ и кусочно монотонной на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно, в силу теоремы о сходимости ряда Фурье

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

для любого $x \in \boldsymbol{R}$. График этой функции изображен на рис. 24. ▲

2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, где $l > 0$, четная, то, очевидно, функция $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ четная, а функция $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ нечетная, и поэтому (см. лемму из п. 3 § 20)

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

и $b_n = 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Аналогично, если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, нечетная, то функция $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ нечетная, а функция $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ четная, и поэтому $a_0 = 0$, $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{3}$$

для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Следовательно, если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, четная, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты a_0 и a_n вычисляются по формулам (1), (2).

Если же $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где b_n вычисляется по формуле (3).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [-1; 1]$.

△ Данная функция является нечетной, поэтому $a_0=0$ и $a_n=0$ для любого $n\in N$. Далее,

$$b_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=$$

$$=-2x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$$

для любого $x\in(-1;\,1)$. В точках $x=-1$ и $x=1$ этот ряд сходится к 0. ▲

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x^2,\quad x\in\left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right].$$

△ Данная функция четная, поэтому $b_n=0$ для любого $n\in N$. Далее,

$$a_0=4\int_0^{1/2}x^2\,dx=4\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{6},$$

$$a_n=4\int_0^{1/2}x^2\cos 2n\pi x\,dx=$$

$$=4x^2\,\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{1/2}2x\sin 2n\pi x\,dx=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\,x\,\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}+\frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx=\frac{\cos n\pi}{(n\pi)^2}=\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x^2=\frac{1}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi x$$

для любого $x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. ▲

3. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a;\ a+2l]$. Из леммы п. 4 § 20 следует, что интеграл от периодической функции с периодом $T=2l$ по любому отрезку длины $2l$ один и тот же. Поэтому для коэффициентов Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$ справедливы формулы

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{3}$$

где a — произвольное действительное число.

Пусть на отрезке $[a;\ a+2l]$ длины $2l>0$ задана функция $f(x)$. Продолжим ее периодически с периодом $2l$ на всю числовую прямую $\boldsymbol{R}$ (может быть, для этого придется изменить значение $f(x)$ в точках a и $a+2l$). Ряд Фурье полученной периодической функции называется рядом Фурье данной функции $f(x)$, $x\in[a;\ a+2l]$. В этом случае коэффициенты Фурье следует вычислять по формулам (1), (2), (3).

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, $x\in[0;\ 1]$ и построить график суммы этого ряда.

△ По формулам (1), (2), (3), в которой для данной функции $a=0$ и $l=\frac{1}{2}$, получаем

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=1,$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx=2x\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin 2n\pi x\,dx=0,$$

и

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx =$$

$$= -2x\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos 2n\pi x\,dx = -\frac{1}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

для любого $x \in (0;\ 1)$. В точках $x=0$ и $x=1$ полученный

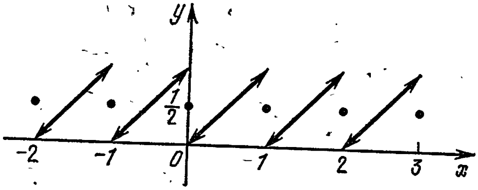


Рис. 25

ряд сходится к $\frac{1}{2}$. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 25. ▲

Вопросы для контроля

1. Какой вид имеет ряд Фурье для периодической функции с произвольным периодом?

2. По каким формулам вычисляются коэффициенты Фурье функции с произвольным периодом?

3. Сформулируйте теорему о разложении функции в ряд Фурье на отрезке $[a;\ a+2l]$.

4. Какой вид имеет ряд Фурье для четных и нечетных функций?

5. Как разложить в ряд Фурье функцию на некотором отрезке?

Упражнения

6.6. Разложите в ряд Фурье следующие функции (в каждом случае постройте график суммы полученного ряда):

1) $f(x) = |x|$, $x \in [-1;\ 1]$;

2) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1), \\ 2-x, & \text{если } x\in[1;\ 2]; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} A, & \text{если } x\in(0;\ l), \\ 0, & \text{если } x\in[l;\ 2l); \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1), \\ 1, & \text{если } x\in[1;\ 2), \\ 3-x, & \text{если } x\in[2;\ 3]. \end{cases}$

6.7. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1), \\ 2-x, & \text{если } x\in[1;\ 2]. \end{cases}$$

6.8. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=1$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{если } x\in(0;\ 1), \\ 0{,}5, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

6.9. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=10$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 10-x, & \text{если } x\in(5;\ 15), \\ 0, & \text{если } x=5. \end{cases}$$

6.10. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=4$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1), \\ 1, & \text{если } x\in[1;\ 2), \\ 3-x, & \text{если } x\in[2;\ 3), \\ 0, & \text{если } x\in[3;\ 4). \end{cases}$$

§ 22. Комплексная форма рядов Фурье

1. Ряды Фурье для функций с периодом 2π. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T=2\pi$, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Напишем ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

и преобразуем общий член этого ряда.

Из формулы Эйлера (см. гл. 1, § 3, п. 5)

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

следует, что

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Из этих равенств, как из системы двух линейных уравнений относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, находим, что

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \qquad (2)$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (3)$$

для любого $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Полученные формулы также называются *формулами Эйлера*.

Преобразуем общий член ряда Фурье (1) функции $f(x)$ с помощью формул Эйлера (2), (3):

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} =$$

$$= a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2} = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n+ib_n}{2} e^{-inx}.$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n+ib_n}{2}, \tag{4}$$

где $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда для N-й частичной суммы ряда (1) получим выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) =$$

$$= c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + \ldots + c_N e^{iNx} + c_{-N} e^{-iNx}.$$

Переставив местами слагаемые, окончательно получим

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= c_{-N} e^{-iNx} + \ldots + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + \ldots + c_N e^{iNx} =$$

$$= \sum_{p=-N}^{N} c_p e^{ipx}$$

(здесь суммирование идет по всем целым p от $-N$ до N).

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ ограничена и кусочно монотонна, а в точке x непрерывна, то

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{p=-N}^{N} c_p e^{ipx}.$$

В этом случае будем писать

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{ipx}.$$

Выразим коэффициенты c_p через функцию $f(x)$. Имеем: если $p=0$, то

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

если $p=n>0$, то

$$c_p=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ipx}\,dx;$$

если же $p=-n<0$, то

$$c_p=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ipx}\,dx.$$

Таким образом, для любого целого p справедлива формула

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ipx}\,dx. \tag{5}$$

Коэффициенты c_p, определяемые по формуле (5), называются *комплексными коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, а выражение

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{ipx}$$

называется *комплексной формой ряда Фурье функции* $f(x)$.

Заметим, что коэффициенты Фурье, а следовательно и ряд Фурье, можно написать для любой функции, определённой и интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$. Вообще, любую функцию $f(x)$, определённую на произвольном отрезке $[a; a+2\pi]$ длины 2π, после видоизменения ее значений в точках a и $a+2\pi$ так, чтобы $f(a)=f(a+2\pi)$, можно продолжить периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Ряд Фурье полученной 2π-периодической функции называется рядом Фурье данной функции. Так как интеграл от 2π-периодической функции по любому отрезку длины 2π один и тот же, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a; a+2\pi]$, естественно вычислять по формуле

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,e^{-ipx}\,dx. \tag{6}$$

Пример 1. Написать ряд Фурье в комплексной форме функции $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\pi]$.

△ Коэффициенты Фурье и ряд Фурье данной функции были найдены в примере 1 п. 1 § 20. Поэтому по формулам (4) находим

$$c_0=0,\ c_n=-\frac{i}{2}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)=\frac{-i}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

$$c_{-n}=\frac{i}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Следовательно, $c_p=0$ для четных p и $c_p=-\frac{2i}{p\pi}$ для нечетных целых p, и поэтому

$$f(x)\sim-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x},$$

где суммирование идет по всем целым k от $-\infty$ до $+\infty$. Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$\operatorname{sign}x=-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x}$$

для любого x из интервала $(-\pi;\pi)$. Отметим, что, согласно определению, это равенство означает:

$$\operatorname{sign}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{-2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x}$$

для любого $x\in(-\pi;\pi)$. ▲

Пример 2. Найти комплексные коэффициенты Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in[-\pi;0],\\ \sin x, & \text{если } x\in[0;\pi].\end{cases}$$

△ Коэффициенты Фурье данной функции были найдены в примере 3 п. 2 § 20, и поэтому для нахождения комплексных коэффициентов Фурье c_p можно воспользоваться соответствующими значениями для a_0, a_n, b_n. Однако найдем c_p непосредственно по формуле (5). Имеем

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ipx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cdot e^{-ipx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-ipx}\,dx=\frac{1}{4\pi i}\int_0^{\pi}\left(e^{i(1-p)x}-e^{-i(1+p)x}\right)dx.$$

В частности,

$$c_0=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^{\pi}(e^{ix}-e^{-ix})\,dx=\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{e^{ix}}{i}+\frac{e^{-ix}}{i}\right)\Big|_0^{\pi}.$$

Так как

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$
$$e^{-i\pi}=\cos\pi-i\sin\pi=-1,$$

то

$$c_0=\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-2}{i}-\frac{2}{i}\right)=\frac{1}{\pi}.$$

Если $p=1$, то

$$c_1=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^{\pi}(1-e^{-2ix})\,dx=\frac{1}{4i}-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^{\pi}e^{-2ix}\,dx=\frac{1}{4i}.$$

Аналогично,

$$c_{-1}=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^{\pi}(e^{2ix}-1)\,dx=\frac{-1}{4i}.$$

Пусть теперь $|p|\neq 1$; тогда

$$c_p=\frac{1}{4\pi i}\,\frac{e^{i(1-p)x}}{i(1-p)}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4\pi i}\,\frac{e^{-i(1+p)x}}{i(1+p)}\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{\cos(1-p)\pi-1}{-4\pi(1-p)}+\frac{\cos(1+p)\pi-1}{-4\pi(1+p)}=\frac{1-(-1)^{1-p}}{4\pi(1-p)}+\frac{1-(-1)^{1+p}}{4\pi(1+p)}.$$

Отсюда видно, что если p нечетное и $|p|\neq 1$, то $c_p=0$; а если p четное, то

$$c_p=\frac{2}{4\pi(1-p)}+\frac{2}{4\pi(1+p)}=\frac{1}{\pi(1-p^2)}.$$

Таким образом,

$$c_p=\frac{1}{\pi(1-p^2)},\ \text{если } p \text{ четное},$$
$$c_p=0,\ \text{если } p \text{ нечетное и } |p|\neq 1,$$
$$c_p=-\frac{pi}{4},\ \text{если } |p|=1.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию $f(x)=x^2$, $x\in[0;\,2\pi]$.

$\triangle$ По формуле (6) находим

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^2e^{-ipx}\,dx.$$

Следовательно, если $p=0$, то

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(2\pi)^3}{3}=\frac{4\pi^2}{3}.$$

Если же $p\neq 0$, то, интегрируя по частям, получаем

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\,x^2\,\frac{e^{-ipx}}{-ip}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2\pi pi}\int\limits_0^{2\pi} 2xe^{-ipx}\,dx=$$

$$=-\frac{2\pi}{ip}\,e^{-ip2\pi}+\frac{1}{p\pi i}\int\limits_0^{2\pi} xe^{-ipx}\,dx=$$

$$=\frac{2\pi i}{p}+\frac{1}{p\pi i}\,x\,\frac{e^{-ipx}}{-ip}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{p^2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ipx}\,dx=\frac{2\pi i}{p}+\frac{2}{p^2}.$$

Таким образом,

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{\substack{-\infty\\ p\neq 0}}^{+\infty}\frac{2}{p}\left(\frac{1}{p}+\pi i\right)e^{ipx}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к x^2 для любого x из интервала $(0;\ 2\pi)$. ▲

2. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом $T=2l$. Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом $T=2l$ и интегрируемая на отрезке $[-l;\ l]$. Как и для 2π-периодических функций, выражение

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{i\frac{p\pi x}{l}},$$

где коэффициенты c_p находятся формуле

$$c_p=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\frac{p\pi x}{l}}\,dx, \qquad (1)$$

называется *комплексной формой ряда Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом $T=2l$*. Коэффициенты c_p называются *комплексными коэффициентами Фурье функции $f(x)$*.

Заметим, что любую функцию $f(x)$, определенную на произвольном отрезке $[a;\ a+T]$ длины $T>0$, после видоизменения ее значений в точках a и $a+T$ так, чтобы $f(a)=f(a+T)$, можно продолжить периодически с периодом T на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Ряд Фурье полученной периодической функции с периодом T называется рядом Фурье данной функции. Коэффициенты Фурье функции $f(x)$, $x \in [a;\ a+T]$, естественно вычислять по формуле

$$c_p = \frac{1}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)\, e^{-i\frac{2p\pi x}{T}}\, dx. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти комплексные коэффициенты Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1;\ 0), \\ 1, & \text{если } x \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

△ По формуле (1) находим

$$c_0 = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx = \frac{1}{2},$$

$$c_p = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{-ip\pi x}\, dx = \frac{1}{2} \frac{e^{-ip\pi x}}{-ip\pi} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{i}{2p\pi} (e^{ip\pi} - 1) = \frac{i}{2p\pi} ((-1)^p - 1)$$

для $p \neq 0$. Следовательно, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_p = 0$ для четных $p \neq 0$ и $c_p = \frac{-i}{p\pi}$ для нечетных p. ▲

Пример 2. Разложить в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию $f(x) = x$, $x \in [0;\ 1]$.

△ По формуле (2), в которой для данной функции $a = 0$ и $T = 1$, находим

$$c_0 = \int\limits_0^1 x\, dx = \frac{1}{2},$$

$$c_p = \int\limits_0^1 x e^{-i2p\pi x}\, dx = x \frac{e^{-i2p\pi x}}{-i2p\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{i2p\pi} \int\limits_0^1 e^{-i2p\pi x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-2p\pi i}}{-2p\pi i} = \frac{1}{-2p\pi i} = \frac{i}{2p\pi}$$

для $p \neq 0$. Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{\substack{-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{2p\pi} e^{i2p\pi x}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к x для любого $x \in (0;\ 1)$. В точках $x = 0$ и $x = 1$ он сходится к $\frac{1}{2}$. ▲

Вопросы для контроля

1. Напишите формулы Эйлера.

2. По каким формулам вычисляются комплексные коэффициенты Фурье 2π-периодической функции?

3. Какое выражение называется комплексной формой ряда Фурье 2π-периодической функции?

4. По каким формулам вычисляются комплексные коэффициенты Фурье $2l$-периодической функции?

Упражнения

6.11. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию

$$f(x)=e^x, \qquad x\in(-\pi;\pi).$$

Найдите значение суммы $s(x)$ полученного ряда при $x=\pi$.

6.12. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) периодическую с периодом $T=\pi$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad x\in\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \text{если} \quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right), \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad x=\pi. \end{cases}$$

6.13. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) периодическую с периодом $T=3$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} A, & \text{если} \quad x\in(0; 1), \\ \dfrac{A}{2}, & \text{если} \quad x=0; 1, \\ 0, & \text{если} \quad x\in(1; 3). \end{cases}$$

Глава 7

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 23. Функции многих переменных

1. Определение функции многих переменных. Рассмотрим функцию $f(M)$, $M \in G$, которая каждой точке M множества G (плоскости или пространства) ставит в соответствие некоторое число $f(M)$. Если G — множество точек координатной плоскости, то вместо $f(M)$ пишут $f(x; y)$, где x, y — координаты точки $M \in G$, и говорят, что задана функция двух переменных $f(x; y)$, $(x; y) \in G$.

Таким образом, *функцией двух переменных* $f(x; y)$, $(x; y) \in G$, называется функция, которая каждой паре чисел $(x; y) \in G$ ставит в соответствие некоторое число $f(x; y)$.

Например,

$$f(x; y) = x^2 + y^2, \quad (x; y) \in \boldsymbol{R}^2,$$

— функция двух переменных x и y, определенная для всевозможных значений переменных x, y, т. е. на всей координатной плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Она каждой точке $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$ ставит в соответствие число $z = x^2 + y^2$.

Аналогично определяются функции трех и большего числа переменных.

Например,

$$f_1(x; y; z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{x^2+y^2},$$

$$f_2(x; y; z; t) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin t.$$

Функция f_1 — функция трех переменных x, y и z, определенная для всех значений x, y, z, удовлетворяющих неравенствам $x^2+y^2 \neq 0$ и $z^2 \geqslant 1$. Она каждой точке $(x; y; z)$ из указанного множества ставит в соответствие число $u = \dfrac{\sqrt{z^2-1}}{x^2+y^2}$.

Функция f_2 — функция четырех переменных x, y, z и t, определенная для всевозможных значений переменных x, y, z, t. Можно считать, что x, y, z — это координаты точки пространства, а t — время. Функция f_2 каждой четверке чисел $(x;\ y;\ z;\ t)$ ставит в соответствие число $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin t$.

В дальнейшем для краткости все определения и утверждения будем формулировать лишь для функций двух переменных. На функции трех и большего числа переменных, как это будет видно, они легко обобщаются.

2. Непрерывность функций многих переменных. Функция $f(x;\ y)$, $(x;\ y)\in G$, называется *непрерывной в точке* $(x_0;\ y_0)\in G$, если для любой последовательности точек $(x_n;\ y_n)\in G$ такой, что $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ при $n\to\infty$, числовая последовательность $(f(x_n;\ y_n))$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n)=f(x_0;\ y_0).$$

Функция $f(x;\ y)$ называется *непрерывной на множестве* G, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 1. Показать, что функция

$$f(x;\ y)=\frac{x}{x^2-y^2}$$

непрерывна в любой точке своей области определения.

$\triangle$ Данная функция определена во всех точках $(x;\ y)$, кроме точек, у которых $x^2=y^2$. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — некоторая точка из области определения функции f, т. е. $x_0^2\neq y_0^2$. Тогда для любой последовательности точек $(x_n;\ y_n)$ такой, что $x_n^2\neq y_n^2$ и $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ при $n\to\infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n^2-y_n^2}=\frac{x_0}{x_0^2-y_0^2}=f(x_0;\ y_0).$$

Следовательно, данная функция непрерывна в произвольной точке $(x_0;\ y_0)$ из области определения.

Заметим, что здесь мы воспользовались свойствами пределов последовательностей. $\blacktriangle$

Пример 2. Показать, что функция трех переменных

$$f(x;\ y;\ z)=\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

непрерывна в любой точке из области определения.

$\triangle$ Данная функция определена на множестве G точек $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих неравенствам $|z|\leqslant 1$, $x^2+y^2<1$.

Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0)\in G$. Тогда для любой последовательности точек $(x_n;\ y_n;\ z_n)\in G$ такой, что $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$,

$z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n;\ z_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-z_n^2}}{\sqrt{1-x_n^2-y_n^2}} = \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} = f(x_0;\ y_0;\ z_0),$$

что и требовалось доказать. ▲

Как и для функций одной переменной, для функций многих переменных доказываются следующие утверждения:

сумма и произведение двух непрерывных на множестве G функций являются непрерывными на G функциями;

отношение двух непрерывных на G функций является непрерывной функцией во всех точках множества G, в которых знаменатель не обращается в нуль.

3. Частные производные. Пусть функция $f(x;\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$. При фиксированном $y = y_0$ получим функцию $f(x;\ y_0)$, зависящую только от одной переменной x, а при $x = x_0$ получим функцию $f(x_0;\ y)$ только от y. Производная функции $f(x;\ y_0)$ при $x = x_0$ называется *частной производной по x* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;\ y_0) \text{ или } f'_x(x_0;\ y_0),$$

а производная функции $f(x_0;\ y)$ при $y = y_0$ называется *частной производной по y* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;\ y_0) \text{ или } f'_y(x_0;\ y_0).$$

Коротко определение частных производных можно сформулировать следующим образом: $f'_x(x;\ y)$ — это производная по x функции $f(x;\ y)$ при фиксированном y, а $f'_y(x;\ y)$ — это производная по y функции $f(x;\ y)$ при фиксированном x. Следовательно, частные производные функций находятся по обычным правилам дифференцирования: нужно лишь при дифференцировании по x переменную y считать постоянной, а при дифференцировании по y считать постоянной x.

Например, если $f(x;\ y) = x^2y^3$, то

$$f'_x(x;\ y) = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = y^3 \cdot 2x = 2xy^3,$$
$$f'_y(x;\ y) = (x^2y^3)'_y = x^2(y^3)'_y = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2.$$

Аналогично, если $z=x^2y+x\sin xy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+x\sin xy)=y\cdot 2x+\frac{\partial}{\partial x}(x\sin xy)=$$
$$=2xy+\sin xy+xy\cos xy,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+x\sin xy)=x^2+x^2\cos xy.$$

Частные производные $f'_x(x; y)$ и $f'_y(x; y)$ функции $f(x; y)$, если они существуют в каждой точке $(x; y)$ некоторой области, сами являются функциями двух переменных. Следовательно, для них также можно рассматривать частные производные.

Частные производные от частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ называются *частными производными второго порядка* функции $f(x; y)$. Очевидно, функция $f(x; y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ называются *частными производными второго порядка по x и по y* соответственно и обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Частные производные $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ называются *смешанными производными второго порядка*. Можно доказать, что если смешанные производные непрерывны, то они равны. В случае равенства их обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

Пример 1. Найти частные производные первого и второго порядков функции

$$z=e^{xy}+y\sin x.$$

△ Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x.$$

Затем найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-y\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

Для смешанных производных имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})+\cos x=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = f(x; y)$, удовлетворяющей уравнению

$$xz + y \operatorname{tg} z = xy + 1. \tag{1}$$

$\triangle$ Продифференцируем равенство (1) по x, считая переменную z функцией от x и y. В результате получим уравнение

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

из которого находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x + \frac{y}{\cos^2 z}\right) = y - z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y-z)\cos^2 z}{x\cos^2 z + y}.$$

Аналогично находим частную производную по y:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{tg} z + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos^2 z - \sin z \cos z}{y + x\cos^2 z}. \ \blacktriangle$$

4. Пределы функций многих переменных. Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$, кроме, может быть, самой точки $(x_0; y_0)$.

Число A называется *пределом функции* $f(x; y)$ *при* $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любой последовательности точек $(x_n; y_n)$ таких, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$ и $(x_n; y_n) \neq (x_0; y_0)$, числовая последовательность $z_n = f(x_n; y_n)$, $n \in \mathbf{N}$, сходится к числу A. В этом случае пишут

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$$

или $f(x; y) \to A$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Очевидно, что если $f(x; y) \to A$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, то

$$f(x; y) = A + \alpha(x; y),$$

где $\alpha(x; y) \to 0$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Так как предел функции многих переменных сводится к пределу числовой последовательности, то для функций многих переменных справедливы теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, аналогичные соответствующим теоремам для функций одной переменной.

Пример 1. Найти предел функции

$$f(x;\ y)=x\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

при $x\to 0,\ y\to 0$.

△ Данная функция определена во всех точках $(x;\ y)$ плоскости, кроме точки $(0;\ 0)$, и $|f(x;\ y)|\leqslant|x|$.

Пусть $(x_n;\ y_n)$, $n\in N$,— некоторая последовательность точек плоскости такая, что $(x_n;\ y_n)\neq(0;\ 0)$ и $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда

$$|f(x_n;\ y_n)|\leqslant|x_n|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, $f(x;\ y)\to 0$ при $x\to 0,\ y\to 0$. ▲

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x;\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

не имеет предела при $x\to 0,\ y\to 0$.

△ Рассмотрим последовательности $x_n=\frac{1}{n}$ и $y_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $n\in N$. Очевидно, что $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ при $n\to\infty$, однако $f(x_n;\ y_n)=\frac{(-1)^n}{2}$ не имеет предела при $n\to\infty$. Следовательно, данная функция не имеет предела при $x\to 0$, $y\to 0$. ▲

Из определения предела функции в точке следует, что если $f(x;\ y)\to f(x_0;\ y_0)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$, то функция $f(x;\ y)$ непрерывна в точке $(x_0;\ y_0)$. И наоборот, если функция $f(x;\ y)$, определенная в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$, непрерывна в точке $(x_0;\ y_0)$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y)=f(x_0;\ y_0).$$

5. Дифференциалы функций многих переменных. Разность

$$\Delta f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)$$

называется *полным приращением функции* $f(x;\ y)$, а разности

$$\Delta_x f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y)-f(x;\ y),$$
$$\Delta_y f(x;\ y)=f(x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)$$

называются *частными приращениями функции* $f(x;\ y)$ по x и по y соответственно.

Полное приращение функции можно представить в виде суммы частных приращений. Действительно,

$$\Delta f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y+\Delta y)+$$
$$+f(x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)=\Delta_x f(x;\ y+\Delta y)+\Delta_y f(x;\ y).$$

Если функция $f(x;\ y)$ имеет частные производные $f'_x(x;\ y)$ и $f'_y(x;\ y)$, то, очевидно,

$$\Delta_x f(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+\alpha\,\Delta x,$$
$$\Delta_y f(x;\ y)=f'_y(x;\ y)\,\Delta y+\beta\,\Delta y,$$

где $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Произведения $f'_x(x;\ y)\,\Delta x$ и $f'_y(x;\ y)\,\Delta y$ называются *частными дифференциалами функции* $f(x;\ y)$ по x и по y соответственно.

Если функция $f(x;\ y)$ имеет непрерывные частные производные $f'_x(x;\ y)$ и $f'_y(x;\ y)$, то сумма частных дифференциалов

$$df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+f'_y(x;\ y)\,\Delta y$$

называется *полным дифференциалом функции* $f(x;\ y)$ *в точке* $(x;\ y)$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy обычно обозначают dx и dy. Тогда

$$df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,dx+f'_y(x;\ y)\,dy. \qquad (1)$$

Можно показать, что

$$\Delta f(x;\ y)=df(x;\ y)+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

где $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Это утверждение можно сформулировать так:

полное приращение функции $f(x;\ y)$ *в точке* $(x;\ y)$ *приближенно равно дифференциалу этой функции в этой же точке*, т. е.

$$\Delta f(x;\ y)\approx df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+f'_y(x;\ y)\,\Delta y. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z=x\sin xy$.

△ Найдем сначала частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin xy+x\cos xy\cdot y=\sin xy+xy\cos xy,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos xy.$$

Следовательно,

$$dz=(\sin xy+xy\cos xy)\,dx+(x^2\cos xy)\,dy.$$

Это есть полный дифференциал данной функции в произвольной точке $(x;\ y)$. Чтобы найти дифференциал в конкретной точке, нужно вместо x и y подставить координаты этой точки. Например,

$$dz(0;\ 0)=0\cdot dx+0\cdot dy=0,$$
$$dz(1;\ 0)=0\cdot dx+1\cdot dy=dy,$$
$$dz(0;\ 1)=0\cdot dx+0\cdot dy=0,$$
$$dz(1;\ 1)=(\sin 1+\cos 1)\,dx+\cos 1\cdot dy. \ \blacktriangle$$

Пример 2. При помощи дифференциала вычислить приближенное значение функции $f(x;\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точках (3,1; 3,9) и (2,9; 4,1).

$\triangle$ Рассматриваемые точки лежат вблизи точки (3; 4), в которой легко вычисляется значение функции: $f(3;\ 4)=5$. Найдем дифференциал данной функции в точке (3; 4):

$$f'_x(x;\ y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_x(3;\ 4)=\frac{3}{5}=0{,}6,$$
$$f'_y(x;\ y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(3;\ 4)=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Следовательно,

$$df(3;\ 4)=f'_x(3;\ 4)\,\Delta x+f'_y(3;\ 4)\,\Delta y=0{,}6\Delta x+0{,}8\Delta y.$$

Из формулы (2) следует, что

$$f(3+\Delta x;\ 4+\Delta y)\approx f(3;\ 4)+0{,}6\Delta x+0{,}8\Delta y.$$

Для точки (3,1; 3,9) имеем $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}1$, и поэтому

$$f(3{,}1;\ 3{,}9)\approx 5+0{,}6\cdot 0{,}1-0{,}8\cdot 0{,}1=4{,}98.$$

Для точки (2,9; 4,1) имеем $\Delta x=-0{,}1$, $\Delta y=0{,}1$, и поэтому

$$f(2{,}9;\ 4{,}1)\approx 5-0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}1=5{,}02. \ \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Какая функция двух переменных называется непрерывной в точке? Приведите примеры непрерывных в точке функций.
3. Сформулируйте теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и отношения двух непрерывных функций.
4. Что называется частной производной функции?
5. Как определяются частные производные второго порядка?
6. Какие производные второго порядка называются смешанными?

7. Сформулируйте определение предела в точке функции двух переменных.

8. Что называется частным дифференциалом? Что называется полным дифференциалом?

Упражнения

7.1. Докажите, что функция $f(x;\ y)=\sin x \sin y$ непрерывна в любой точке $(x;\ y)\in R^2$.

7.2. Найдите область определения функции $z=\frac{\sqrt{1-xy}}{x^2-y^2}$ и докажите, что эта функция непрерывна в области определения.

7.3. Докажите, что функция $f(x;\ y)$, равная 0, если $xy=0$, и 1, если $xy\neq 0$, не является непрерывной в точке (0; 0).

7.4. Найдите частные производные следующих функций двух переменных:

1) $z=x\sin y+y\sin x$; 2) $z=e^{xy}\operatorname{tg}(x+y)$;

3) $y=x^2\sin(at+x)$; 4) $s=\sqrt{x^2+y^4}$.

7.5. Найдите частные производные следующих функций трех переменных:

1) $z=(x^2+y^2)\sin t$; 2) $u=xy+xz+yz+1$;

3) $z=xye^{xyt}\cos yt$; 4) $V=x\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg} xt$.

7.6. Найдите частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z=xy+x\sin y$; 2) $z=xy+x+y$;

3) $u=y\sin(x+at)$; 4) $u=xy+xz+yz+x^2+y^2+z^2$.

7.7. Найдите частные производные функции $z=f(x;\ y)$, удовлетворяющей уравнению $x^2+y^2+z^2=1$.

7.8. Найдите предел функции $f(x;\ y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ при $x\to 0$, $y\to 0$.

7.9. Найдите полные дифференциалы следующих функций:

1) $z=\cos xy$; 2) $z=x^2y+xy^2$;

3) $z=xe^y+y\operatorname{ctg} x$.

7.10. При помощи дифференциала вычислите приближенно значения функции $f(x;\ y)=e^x\sin(x+y)$ в точках (0,1; 0,2) и (0,2; 0,1).

§ 24. Кратные интегралы

1. Определение и свойства двойного интеграла (случай прямоугольника). Пусть функция $f(x;\ y)$ определена на прямоугольнике G: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ (рис. 26).

Отрезок $[a;\ b]$ оси Ox точками

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

разобьем на n отрезков $[x_{i-1},\ x_i]$, $i=1,\ \ldots,\ n$, длины $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$. Отрезок $[c;\ d]$ оси Oy точками

$$y_j=c+\frac{d-c}{n}j,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

разобьем на n отрезков $[y_{j-1}; y_j]$, $j=1, \ldots, n$, длины $\Delta y_j = \frac{d-c}{n}$. Тогда прямоугольник G разобьется на n^2 прямоугольников G_{ij}, площадь каждого из которых равна $\Delta x_i \Delta y_j$.

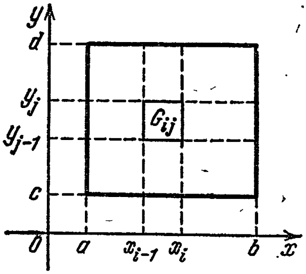


Рис. 26

Составим двойную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (1)$$

где $(\xi_i; \eta_j)$ — некоторая точка прямоугольника G_{ij}. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x; y)$.

Если предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$ существует и не зависит от выбора точек $(\xi_i; \eta_j)$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x; y)$ по G и обозначается

$$\iint\limits_G f(x; y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, согласно определению

$$\iint\limits_G f(x; y)\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_G dx\, dy = \text{пл. } G,$$

т. е. интеграл от 1 по G равен площади G.

Из определения двойного интеграла и соответствующих свойств пределов последовательностей сразу получается следующее важное утверждение:

если интегралы от функций $f(x; y)$ и $g(x; y)$ по G существуют, то для любых чисел α и β интеграл по G от функции $\alpha f(x; y) + \beta g(x; y)$ существует и

$$\iint\limits_G (\alpha f(x; y) + \beta g(x; y))\, dx\, dy =$$

$$= \alpha \iint\limits_G f(x; y)\, dx\, dy + \beta \iint\limits_G g(x; y)\, dx\, dy. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и что интег-*

рал от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

Докажем формулу (2):

$$\iint\limits_G (\alpha f(x;\ y)+\beta g(x;\ y))\,dx\,dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha f(\xi_i;\ \eta_j)+\beta g(\xi_i;\ \eta_j))\,\Delta x_i\,\Delta y_j=$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_i;\ \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j+$$

$$+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g(\xi_i;\ \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j=$$

$$=\alpha\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy+\beta\iint\limits_G g(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Здесь мы сначала воспользовались определением двойного интеграла, затем теоремой о пределе суммы двух последовательностей и теоремой о вынесении постоянного множителя за знак предела и, наконец, снова определением двойного интеграла.

2. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника). Пусть функция $f(x;\ y)$ определена и непрерывна на прямоугольнике G: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$. Покажем, что вычисление двойного интеграла от $f(x;\ y)$ по G сводится к вычислению двух однократных интегралов: интеграла по x от a до b и интеграла по y от c до d.

Отрезок $[a;\ b]$ оси Ox точками x_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, разобьем на n равных по длине отрезков $[x_{i-1};\ x_i]$. Тогда существуют такие $\xi_i\in[x_{i-1};\ x_i]$, что

$$\int_a^b f(x;\ y)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x;\ y)\,dx=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i;\ y)\,\Delta x_i \qquad (1)$$

для любого $y\in[c;\ d]$.

Далее, отрезок $[c;\ d]$ оси Oy точками y_j, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, разобьем на n равных по длине отрезков $[y_{j-1};\ y_j]$. Тогда существуют такие $\eta_j\in[y_{j-1};\ y_j]$, что

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x;\ y)\,dx\right)dy=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\int_a^b f(x;\ y)\,dx\right)dy=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f(x;\ \eta_j)\,dx\right)\Delta y_j. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем формулу

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x;\ y)\,dx\right)dy=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(\xi_i;\ \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j. \qquad (3)$$

Так как в (3) левая часть есть число, а правая при $n\to\infty$ стремится к двойному интегралу от $f(x;\ y)$ по G, то окончательно получаем следующую формулу:

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x;\ y)\,dx\right)dy, \qquad (4)$$

которая называется *формулой сведения двойного интеграла к повторному*.

Повторный интеграл, стоящий в правой части формулы (4), обычно записывают иначе, а именно так, что формула (4) принимает вид

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;\ y)\,dx. \qquad (4')$$

Аналогично этой формуле доказывается и другая формула сведения двойного интеграла к повторному:

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x;\ y)\,dy. \qquad (5)$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;\ y)=x^2+y\sin xy$ по квадрату G: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой сведения двойного интеграла к повторному. Тогда

$$\iint_G (x^2+y\sin xy)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2+y\sin xy)\,dx.$$

Сначала, считая y постоянным, вычислим интеграл по x:

$$\int_0^1 (x^2+y\sin xy)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\cos xy\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}-\cos y+1=\frac{4}{3}-\cos y.$$

Затем от полученной функции вычислим интеграл по y. Тогда

$$\iint_G (x^2+y\sin xy)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\frac{4}{3}-\cos y\right)dy=$$

$$=\frac{4}{3}-\sin y\Big|_0^1=\frac{4}{3}-\sin 1. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;\ y)=y\cos x+xe^y$ по прямоугольнику G: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой (5):

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_0^\pi dx\int_0^1(y\cos x+xe^y)\,dy=$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{y^2}{2}\cos x+xe^y\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}\cos x+ex-x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos x\,dx+(e-1)\int_0^\pi x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0+(e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}(e-1). \ \blacktriangle$$

3. Определение двойного интеграла для произвольной области. Пусть функция $f(x;\ y)$ определена на некоторой ограниченной области G точек $(x;\ y)$ координатной плоскости.

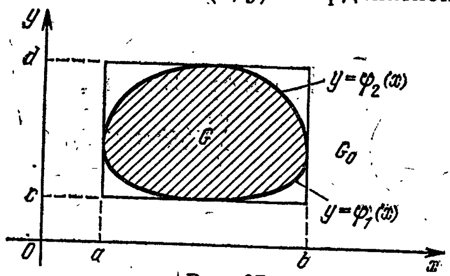


Рис. 27

Через G_0 обозначим наименьший прямоугольник, который содержит область G и стороны которого параллельны осям координат (рис. 27). Через $f_0(x;\ y)$ обозначим функцию, которая равна $f(x;\ y)$ на G и нулю вне G. Теперь по определению положим

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\iint_{G_0} f_0(x;\ y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Пусть область G ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу и сверху графиками непрерывных функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$. Тогда из (1) получаем

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f_0(x;\ y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)\,dy\right)dx,$$

так как при фиксированном x функция $f_0(x;\ y)$ равна $f(x;\ y)$ на отрезке $[\varphi_1(x);\ \varphi_2(x)]$ и нулю вне этого отрезка.

Таким образом, для двойного интеграла по области G: $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$ справедлива следующая формула:

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)\,dy. \tag{2}$$

Аналогично, если область G ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$, а слева и справа графиками непрерывных функций $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, то

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\ y)\,dx. \tag{3}$$

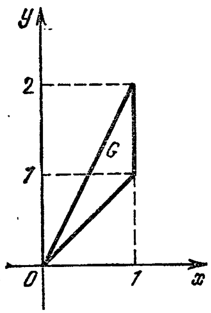


Рис. 28

Формулы (2), (3), как и формулы (4), (5) п. 2, называются *формулами сведения двойного интеграла к повторному.*

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_G (xy+y^2)\,dx\,dy,$$

где G — область, ограниченная прямыми $y=x$, $y=2x$ и $x=1$ (рис. 28).

△ Воспользуемся формулой (2):

$$\iint_G (xy+y^2)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^{2x}(xy+y^2)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2x}dx=\int_0^1\left(2x^3-\frac{x^3}{2}+\frac{8}{3}x^3-\frac{x^3}{3}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{23}{6}x^3\,dx=\frac{23}{6}\,\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{23}{24}.\ ▲$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции $z=xy$ по кругу радиуса R с центром в начале координат.

△ Через K_R обозначим круг радиуса R с центром в точке (0; 0). Тогда

$$\iint\limits_{K_R} xy\,dx\,dy=\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\,dy=\int\limits_{-R}^{R} x\cdot 0\,dx=0. \blacktriangle$$

4. Тройные интегралы. Ограничимся рассмотрением лишь интегралов от функций $f(x;\ y;\ z)$, определенных на прямоугольном параллелепипеде G: $a_1\leqslant x\leqslant b_1$, $a_2\leqslant y\leqslant b_2$, $a_3\leqslant z\leqslant b_3$. Как и при определении двойного интеграла, каждый отрезок $[a_1;\ b_1]$, $[a_2;\ b_2]$, $[a_3;\ b_3]$ соответствующей оси точками x_i, y_j и z_k разобьем на n равных по длине отрезков и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_j;\ \zeta_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k,$$

где

$$\xi_i\in[x_{i-1};\ x_i],\quad \eta_j\in[y_{j-1};\ y_j],\quad \zeta_k\in[z_{k-1};\ z_k].$$

Если интегральная сумма имеет предел при $n\to\infty$ и этот предел не зависит от выбора ξ_i, η_j, ζ_k, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x;\ y;\ z)$ по G и обозначается

$$\iiint\limits_{G} f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

Для этого интеграла, как и для двойного интеграла, доказываются следующие формулы:

$$\iiint\limits_{G} f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x;\ y;\ z)\,dz,$$

$$\iiint\limits_{G} f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x;\ y;\ z)\,dz,$$

$$\iiint\limits_{G} f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{a_3}^{b_3} dz\int\limits_{a_2}^{b_2} dy\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x;\ y;\ z)\,dx$$

и т. д. Всего, очевидно, имеется шесть формул сведения тройного интеграла по G к повторному интегралу.

Пример. Вычислить интеграл от функции $f(x;\ y;\ z)=$ $=x+xy+xyz$ по кубу G: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

△ Для вычисления интеграла воспользуемся одной из формул сведения тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + xy + xyz)\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + xy + \frac{xy}{2}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + \frac{3}{2}xy\right) dy = \int\limits_0^1 \left(x + \frac{3}{4}x\right) dx = \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8}. \ ▲$$

Упражнения

7.11. Вычислите двойной интеграл по прямоугольнику G: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ от следующих функций:

1) $f(x;\ y) = x^2y + \cos y$; 2) $f(x;\ y) = x\sin y + y\cos x$;

3) $f(x;\ y) = x^2e^{x^3+y}$; 4) $f(x;\ y) = x\sin\dfrac{1}{1+y^2}$.

7.12. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_G (x - 2y + xe^y)\,dx\,dy$, где G — множество точек $(x;\ y)$ таких, что $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

7.13. Вычислите двойной интеграл от функции $z = xy + x^2 + y^2$ по области G, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$.

7.14. Вычислите двойной интеграл от функции $f(x;\ y) = 2x + 3xy$ по треугольнику с вершинами в точках $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 0)$.

7.15. Вычислите двойной интеграл от функции $z = x^2y$ по полукругу $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$.

7.16. Вычислите тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ от следующих функций:

1) $u = xyz$; 2) $u = xy + yz + xz$;

3) $u = x^2z\cos y$.

§ 25. Приложения кратных интегралов

1. Масса плоской пластинки переменной плотности. Пусть требуется определить массу m некоторой тонкой прямоугольной пластинки G (рис. 29). Если пластинка однородная, то, как хорошо известно,

$$m = \rho ab, \qquad (1)$$

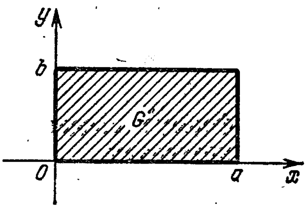


Рис. 29

где ρ — поверхностная плотность, а a, b — размеры пластинки. Если же пластинка неоднородная, т. е. плотность ρ есть функция точки:

$$\rho = \rho(x;\ y), \quad (x;\ y) \in G,$$

то для вычисления массы m поступим следующим образом. Прямыми, параллельными осям координат и заданными уравнениями

$$x = x_i = \frac{ia}{n}, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

$$y = y_j = \frac{jb}{n}, \qquad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

прямоугольник G разобьем на n^2 прямоугольников (рис. 30) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho(\xi_i;\ \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j, \tag{2}$$

где $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1};\ y_j]$. Эта сумма приближенно равна m и, очевидно, стремится к m при $n \to \infty$. Так

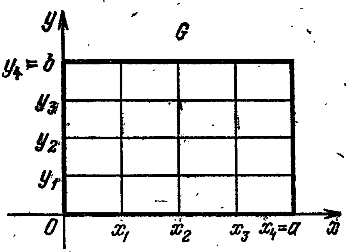


Рис. 30

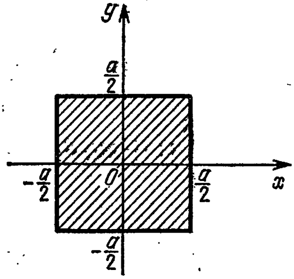


Рис. 31

как, с другой стороны, предел суммы (2) при $n \to \infty$ равен интегралу от функции $\rho(x;\ y)$ по G, то, следовательно,

$$m = \iint\limits_G \rho(x;\ y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Таким образом, масса m пластинки G с переменной поверхностной плотностью $\rho(x;\ y)$ равна двойному интегралу от $\rho(x;\ y)$ по G.

Заметим, что формула (3) справедлива для ограниченной пластинки произвольной формы.

Пример 1. Вычислить массу квадратной пластинки G со стороной длины a, поверхностная плотность которой в точке $P \in G$ равна $k(a^2 - r^2)$, где r — расстояние от точки P до центра квадрата, а k — некоторая постоянная.

$\triangle$ Выберем систему координат, связанную с рассматриваемой пластинкой, так, как это указано на рис. 31.

Тогда

$$\rho = k(a^2 - x^2 - y^2)$$

и, следовательно,

$$m = \iint\limits_G k(a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = k\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-a/2}^{a/2} (a^2 - x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= ka^4 - ka\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} - ka\,\frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= ka^4 - \frac{ka}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2 - \frac{ka}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2 = ka^4 - \frac{ka^4}{6} = \frac{5}{6}\,ka^4. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить массу треугольной пластинки G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$ с поверхностной плотностью $\rho = 1 + xy$.

$\triangle$ По формуле (3) получаем

$$m = \iint\limits_G (1 + xy)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (1 + xy)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (1 + xy)\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x + x\,\frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} \right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}. \blacktriangle$$

2. Объем тела. Пусть на прямоугольнике G: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ задана неотрицательная функция $z = f(x;\ y)$.

Рис. 32

Найдем формулу для объема V тела, координаты точек которого удовлетворяют условиям: $(x;\ y) \in G$, $0 \leqslant z \leqslant f(x;\ y)$ (рис. 32).

Для функции $f(x;\ y)$, $(x;\ y)\in G$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

Эта сумма приближенно равна объему V и, очевидно, стремится к V при $n\to\infty$. Следовательно,

$$V=\iint\limits_{G} f(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Заметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда G — произвольная область, ограниченная гладкими кривыми.

Пример. Найти объем V тела, ограниченного плоскостями $x=1$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$ и поверхностью $z=x^2+y^2$.

$\triangle$ Область G, в которой определена функция

$$z=x^2+y^2,$$

изображена на рис. 28. Следовательно,

$$V=\iint\limits_{G}(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x}(x^2+y^2)\,dy=\int\limits_0^1 x^3\,dx+\int\limits_0^1\left(\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\int\limits_0^1 7x^3\,dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{6}.\ \blacktriangle$$

3. Масса тела переменной плотности. Как для массы плоской пластинки с переменной поверхностной плотностью $\rho=\rho(x;\ y)$, так и для массы m тела G с переменной плотностью $\rho=\rho(x;\ y;\ z)$, $(x;\ y;\ z)\in G$, можно получить следующую формулу:

$$m=\iiint\limits_{G}\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

т. е. масса тела G с переменной плотностью $\rho(x;\ y;\ z)$ равна тройному интегралу по G от этой плотности.

Пример. Вычислить массу куба G: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ с переменной плотностью $\rho=x+y+z+1$.

△ По формуле (1) получаем

$$m=\iiint\limits_G (x+y+z+1)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 y\,dy+\int_0^1 z\,dz+1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}. \ ▲$$

Упражнения

7.17. Найдите массу прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3 см, если его плотность в точке P равна $(1+r)$ г/см², где r — расстояние от точки P до катета длины 2 см.

7.18. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=xy$, $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.

7.19. Найдите массу прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h, если его плотность в точке P равна $\max\{r_1; r_2\}$, где r_1, r_2 — расстояния от точки P до оснований.

Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 26. Основные понятия и задачи математической статистики

1. Предмет математической статистики. В математической статистике разрабатываются теории и методы обработки информации о массовых явлениях. Исходным материалом для всякого статистического исследования являются *статистические данные*. Под статистическими данными понимают сведения о числе объектов какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками. Статистическими данными являются, например, сведения: а) о числе отличников в каждом из техникумов данного города; б) о числе сорняков, обнаруженных во время каждой из 100 проверок зерна; в) о числе участников игры «Спортлото», угадавших 6 номеров в каждом из тиражей, состоявшихся в течение года; г) о числе военнообязанных, имеющих рост 2 м, и т. д.

На основании статистических данных часто можно делать вполне определенные научно обоснованные выводы, представляющие большую ценность для науки и практики. Для этого статистические данные должны быть предварительно определенным образом систематизированы и обработаны. Математическая статистика как раз и изучает математические методы систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и производственных целей. Одним из основных методов обработки статистических данных является *выборочный метод* (см. далее, п. 2).

Методы математической статистики широко применяются в самых различных областях знаний — в физике, звездной астрономии, экономике, геологии, гидрологии, климатологии, биологии, медицине и др. Также широко используется математическая статистика и в промышленности. Достаточно указать на вопросы организации надежного контроля за качеством выпускаемой продукции.

Основой математической статистики служит теория вероятностей, в которой изучаются математические модели реальных случайных явлений. Методы математической статистики дают возможность на основе экспериментальных данных определять вероятностные характеристики этих моделей: математические ожидания, дисперсии, законы распределения и многие другие характеристики. Можно сказать поэтому, что математическая статистика является тем звеном, которое связывает реальные случайные явления с их математическими вероятностными моделями.

Среди многих важных задач, решаемых современной математической статистикой, выделим следующие две. В прикладных задачах вероятность исследуемого события обычно неизвестна. Она определяется приближенно по статистическим данным. Дать оценку полученной на основе опытных данных вероятности события — одна из основных задач математической статистики.

В практических задачах нередко удается в результате анализа исследуемой случайной величины определить ее распределение с точностью до некоторого неизвестного параметра. Дать оценку этого параметра в виде числа (так называемое точечное оценивание, см. § 27, п. 1) или интервала, в котором с заданной вероятностью заключено значение неизвестного параметра (так называемое интервальное оценивание, см. § 27, п. 2), — еще одна основная задача математической статистики.

Математическая статистика возникла в XVII веке одновременно с теорией вероятностей. Решения первых задач математической статистики содержатся в сочинениях создателей теории вероятностей — Я. Бернулли, П. Лапласа, С. Пуассона. В России методы математической статистики в применении к демографии и страховому делу развивал В. Я. Буняковский. Решающее значение для всего дальнейшего развития математической статистики имели работы представителей русской классической школы теории вероятностей П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова. Развитие методов математической статистики связано также с именами К. Пирсона, Р. Фишера, Ю. Неймана и советских математиков А. Н. Колмогорова, Ю. В. Линника, Ю. В. Прохорова.

2. Выборки и выборочные распределения. В самых различных областях производственной и научной деятельности приходится проводить изучение (обследование, измерение, проверку) объектов, принадлежащих некоторой совокупности, по какому-либо признаку. При этом иногда приходится исследовать каждый объект совокупности, т. е. проводить сплошное исследование. Но во многих других случаях в силу различных причин исследовать каждый объект невыгодно или даже невозможно. Например, если рассматриваемая совокупность содержит слишком много объектов или если исследование требует больших затрат времени или является дорогостоящим, то проводить сплошное исследование по крайней мере нерентабельно. Следует иметь также в виду, что иногда исследование объекта связано с его уничтожением. Например, при испытании готового изделия на разрыв сплошное исследование лишено всякого смысла.

Поэтому на практике гораздо чаще применяется выборочное исследование. При выборочном исследовании из всей совокупности отбирают некоторым образом определенное число объектов и только их подвергают исследованию. При этом совокупность всех исследуемых объектов называют *генеральной совокупностью*.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Под случайным отбором при образовании выборки понимают такой отбор, при котором все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Выборка может проводиться двумя основными способами. При первом объект извлекается из генеральной совокупности, исследуется, возвращается в исходную генеральную совокупность; затем снова извлекается некоторый объект, исследуется и возвращается в генеральную совокупность и т. д. Полученную таким образом выборку называют *повторной*. При втором способе после исследования объекты в генеральную совокупность не возвращаются, и выборку в этом случае называют *бесповторной*.

Таким образом, при бесповторной выборке каждый объект исследуется только один раз, при повторной выборке один и тот же объект может подвергаться исследованию несколько раз.

Число объектов выборочной или генеральной совокупности называют *объемом выборки*. Например, если из 10 000 изделий для контроля отобрано 100 изделий, то объем генеральной совокупности $N = 10\,000$, а объем выборки $n = 100$.

Математическая статистика занимается вопросом: можно ли, установив какое-либо свойство выборки, считать, что это свойство с определенной вероятностью присуще всей генеральной совокупности?

Для того чтобы по выборке можно было с определенной уверенностью судить о всей генеральной совокупности, выборка должна достаточно полно отражать изучаемое свойство объектов генеральной совокупности, быть достаточно представительной (репрезентативной). Для того чтобы выборка была представительной, необходимо, чтобы отбор объектов в выборку осуществлялся действительно случайно. Необходимо также, чтобы изучаемому свойству была присуща статистическая устойчивость: при многократном повторении исследования должна иметь место статистическая устойчивость частот наблюдаемых событий.

Для статистической обработки результаты исследования объектов, составляющих выборку, представляют (в определенных физических единицах) в виде числовой выборки, т. е. в виде последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это могут быть, например, результаты n измерений длин деталей (в см), попавших в выборку, или результаты наблюдений за временем работы (в ч) n приборов до выхода их из строя. Числовую выборку получают также при измерениях других случайных величин.

Разность между наибольшим значением числовой выборки и ее наименьшим значением называют *размахом выборки*.

Выборку, представляющую собой неубывающую последовательность чисел, называют *вариационным рядом*. Очевидно, что любую числовую выборку можно записать в виде вариационного ряда. Например, записав значения выборки

$$1,\ 10,\ -2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 10,\ 7,\ -2,\ 10,\ 10,\ 7$$

в виде неубывающей последовательности, получим вариационный ряд

$$-2,\ -2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 7,\ 7,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10.$$

Размах выборки равен $10-(-2)=12$.

Пусть при исследовании некоторой генеральной совокупности получена числовая выборка объема n, причем значение x_1 встретилось в выборке n_1 раз, значение x_2 — n_2 раз, ..., значение x_k — n_k раз. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют *частотами*, а их отношения к объему выборки, т. е. отношения $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n}$, — *относительными частотами* соответствующих значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выборки.

Очевидно, что сумма частот равна объему выборки, а сумма относительных частот равна единице, т. е.

$$n_1+n_2+\ldots+n_k=n, \quad \frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\ldots+\frac{n_k}{n}=1.$$

Последовательность пар

$$(x_1;\ n_1),\ (x_2;\ n_2),\ \ldots,\ (x_k;\ n_k) \qquad (1)$$

называют *статистическим рядом*.

Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k
n_1	n_2	n_3	...	n_i	...	n_k

(1′)

В первой строке таблицы записывают значения выборки, во второй — их соответствующие частоты.

Рассмотрим таблицу, в которой, в отличие от таблицы (1′), во второй строке записаны не частоты, а относительные частоты соответствующих значений выборки:

x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_k
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_i}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

(2)

Этой таблицей задается так называемое *выборочное распределение*. Полезно сравнить таблицу выборочного распределения с таблицей (1) § 16, с помощью которой задавалось распределение случайной величины. Распределение случайной величины задавалось указанием всех ее значений и их соответствующих вероятностей. Для задания выборочного распределения указываются все значения выборки и их соответствующие относительные частоты.

Пример. Для выборки

$$3,\ 8,\ -1,\ 3,\ 0,\ 5,\ 3,\ -1,\ 3,\ 5$$

определить объем и размах. Записать выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найти выборочное распределение.

△ Объем выборки $n=10$, ее размах равен $8-(-1)=9$.

Записав значения выборки в виде неубывающей последовательности, получим вариационный ряд

$$-1,\ -1,\ 0,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 8.$$

Статистический ряд можно записать в виде последовательности пар чисел

$$(-1;\ 2),\ (0;\ 1),\ (3;\ 4),\ (5;\ 2),\ (8;\ 1)$$

или в виде таблицы

−1	0	3	5	8
2	1	4	2	1

Для контроля находим сумму частот

$$2+1+4+2+1=10$$

и убеждаемся в том, что она равна объему выборки.

Вычислив относительные частоты, найдем выборочное распределение

−1	0	3	5	8
$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Для контроля убеждаемся в том, что сумма относительных частот равна единице:

$$\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1. \ \blacktriangle$$

3. Графические изображения выборки. Полигон и гистограмма. Для наглядного представления о выборке часто используют различные графические изображения выборки. Простейшими изображениями выборки являются *полигон* и *гистограмма*. Пусть выборка задана статистическим рядом

$$(x_1;\ n_1),\ (x_2;\ n_2),\ \ldots,\ (x_k;\ n_k). \qquad (1)$$

Полигоном частот называют ломаную с вершинами в точках (1).

На рис. 33 построен полигон частот для выборки, рассмотренной в примере п. 2.

Полигоном относительных частот называют ломаную с вершинами в точках

$$\left(x_1;\ \frac{n_1}{n}\right),\ \left(x_2;\ \frac{n_2}{n}\right),\ \ldots,\ \left(x_k;\ \frac{n_k}{n}\right).$$

Ясно, что полигон относительных частот получается из полигона частот сжатием вдоль оси ординат в n раз, где n—объем выборки.

При большом объеме выборки более наглядное представление о ней дает гистограмма. Для построения гистограммы частот промежуток от наименьшего значения выборки до наибольшего ее значения разбивают на несколько

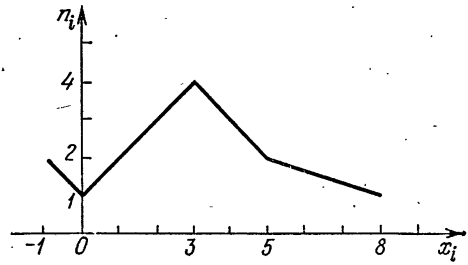


Рис. 33

частичных промежутков длины h. Для каждого частичного промежутка подсчитывают сумму s_i частот значений выборки, попавших в этот промежуток. Значение x_i выборки, совпавшее с правым концом промежутка, относят к следующему промежутку (если x_i—не наибольшее значение выборки).

Затем на каждом частичном промежутке, как на основании, строят прямоугольник с высотой $\frac{s_i}{h}$ Объединение всех построенных таким образом прямоугольников называют гистограммой частот.

Итак, *гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные промежутки длины h, а высотами—отрезки длины $\frac{s_i}{h}$, где s_i—сумма частот значений выборки, попавших в i-й промежуток.

Из определения гистограммы ясно, что ее площадь равна объему выборки.

В практических задачах в зависимости от объема выборки в большинстве случаев целесообразно брать 10—20 частичных промежутков.

Совершенно аналогично определяют и строят гистограмму относительных частот.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются частичные промежутки длины h, а высотами — отрезки длины $\frac{w_i}{h}$, где w_i — суммы относительных частот значений выборки, попавших в i-й промежуток.

Площадь гистограммы относительных частот, очевидно, равна единице.

Пример. В результате измерения напряжения (в вольтах) в электросети получена выборка

218,	221,	215,	225,	225,	217,
224,	220,	220,	219,	221,	219,
222,	227,	218,	220,	223,	230,
223,	216,	224,	227,	220,	222.

Построить гистограмму частот, если число частичных промежутков равно 5.

△ Наименьшее значение выборки равно 215, наибольшее — 230. Находим длину частичных промежутков $h = \frac{230-215}{5} = 3$. Подсчитываем с учетом кратности число значений выборки, попавших в каждый промежуток. Для

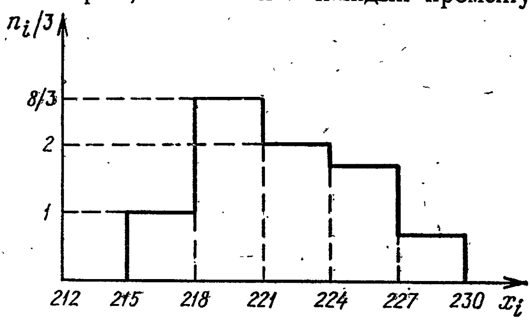


Рис. 34

первого промежутка [215; 218) это число равно 3, для второго [218; 221) оно равно 8, для третьего [221; 224) — 6, для четвертого [224; 227) — 5, для пятого [227; 230] — 2. Следовательно, высоты прямоугольников (слева направо), образующих гистограмму, равны 1, $\frac{8}{3}$, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$. По полученным данным строим гистограмму (рис. 34). Для контроля убеждаемся в том, что площадь гистограммы равна объему выборки:

$$3\left(1+\frac{8}{3}+2+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)=24. \ \blacktriangle$$

4. Выборочные характеристики. В теории вероятностей (§ 16) изучались числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия. В математической статистике аналогичные характеристики вводятся для выборки.

Пусть имеется некоторая выборка объема n:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

Выборочным математическим ожиданием или *выборочным средним* называют среднее арифметическое значений выборки.

Эту числовую характеристику выборки принято обозначать $\bar{x}$.

Таким образом, выборочное среднее для выборки (1) определяется формулой

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \quad \text{или} \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2}$$

Если выборка задана статистическим рядом (см. п. 2, табл. (1′)) или выборочным распределением (п. 2, табл. (2)), то формулу (2) естественно записать в следующем виде:

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k}{n}, \quad \text{или} \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i. \tag{3}$$

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего.

Выборочную дисперсию будем обозначать S_0.

Таким образом, выборочная дисперсия для выборки (1) определяется формулой

$$S_0=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n},$$

или

$$S_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \tag{4}$$

Если выборка задана статистическим рядом (п. 2, (1′)) или выборочным распределением (п. 2, (2)), то формулу (4) можно записать так:

$$S_0=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_k(x_k-\overline{x})^2}{n},$$

или

$$S_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x})^2. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду. Преобразуем формулу (4) (для формулы (5) преобразование проводится аналогично):

$$S_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\overline{x}x_i+(\overline{x})^2)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\frac{1}{n}(\overline{x})^2\cdot n=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2(\overline{x})^2+(\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\overline{x})^2.$$

Обозначим через $(\overline{x^2})$ выборочное среднее квадратов значений выборки:

$$(\overline{x^2})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Тогда формула (4) примет вид

$$S_0=(\overline{x^2})-(\overline{x})^2, \tag{6}$$

т. е. выборочная дисперсия равна среднему квадратов значений выборки без квадрата выборочного среднего.

Формула (6) аналогична формуле (2), § 16, п. 4 для дисперсии случайной величины.

В статистике наряду с выборочной дисперсией используется другая важная числовая характеристика выборки: *несмещенная выборочная дисперсия*. Целесообразность введения этой характеристики, а также смысл слова «несмещенная» станут понятными при изучении следующего параграфа.

Несмещенную выборочную дисперсию обозначим S и определим формулой

$$S=\frac{n}{n-1}S_0, \tag{7}$$

где S_0 — выборочная дисперсия, n — объем выборки.

Используя формулу (4), получаем

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2. \qquad (8)$$

Пример 1. Для выборки

4, 5, 3, 2, 1, 2, 0, 7, 7, 3

найти выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию S_0, несмещенную выборочную дисперсию S.

△ Объем выборки $n=10$. По формуле (2) находим выборочное среднее

$$\overline{x}=\frac{4+5+3+2+1+2+7+7+3}{10}=3{,}4.$$

Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся формулой (6). Для этого подсчитаем среднее квадратов значений выборки

$$(\overline{x^2})=\frac{4^2+5^2+3^2+2^2+1^2+2^2+7^2+7^2+3^2}{10}=16{,}6.$$

Теперь по формуле (6) находим

$$S_0=16{,}6-3{,}4^2=5{,}04.$$

По формуле (7) вычисляем несмещенную выборочную дисперсию

$$S=\frac{10}{9}\cdot 5{,}04=5{,}6. \ ▲$$

Пример 2. Для выборки

3, 8, —1, 3, 0, 5, 3, —1, 3, 5

найти выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию S_0, несмещенную выборочную дисперсию S.

△ В примере п. 2 для данной выборки был получен статистический ряд

—1	0	3	5	8
2	1	4	2	1

Объем выборки $n=10$.

Выборочное среднее найдем по формуле (3):

$$\overline{x}=\frac{2\cdot(-1)+4\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 8}{10}=2{,}8.$$

Вычислим среднее квадратов значений выборки:

$$\overline{(x^2)}=\frac{2\cdot(-1)^2+4\cdot3^2+2\cdot5^2+1\cdot8^2}{10}=15{,}2.$$

По формуле (6) получим выборочную дисперсию:

$$S_0=15{,}2-2{,}8^2=7{,}36.$$

Вычисляем несмещенную выборочную дисперсию. Для этого используем формулу (7):

$$S=\frac{10}{9}\cdot7{,}36\approx8{,}18. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Что называют: а) генеральной совокупностью; б) выборочной совокупностью; в) объемом выборки?

2. Дайте определение вариационного ряда. Что называется размахом выборки?

3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?

4. Какие графические изображения выборок Вы знаете?

5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?

6. Дайте определения выборочных характеристик: а) выборочного среднего; б) выборочной дисперсии.

7. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Упражнения

8.1. Для выборки

7, 7, 2, 7, 7, 5, 5, 7, 5, 7

определите объем выборки и ее размах. Запишите выборку в виде вариационного ряда и в виде статистического ряда. Найдите выборочное распределение.

8.2. Найдите выборочное распределение для каждой из следующих выборок:

1) 5, 2, 8, —2, 5, —2, 0, 0, 8, 5;
2) —1, 0, 10, 0, 0, 10, 10, 0, 0;
3) 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7.

8.3. Для выборки, заданной статистическим рядом

0	3	5	10
10	5	7	3

постройте: 1) полигон частот; 2) полигон относительных частот.

8.4. Постройте полигон относительных частот для выборочного распределения

—2	0	1	3	6
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$

8.5. Постройте гистограмму частот для выборки

17, 19, 20, 10, 14, 16, 21, 21, 22, 22,
35, 27, 32, 24, 24, 24, 24, 27, 27, 27,

разбив промежуток от наименьшего значения выборки до наибольшего ее значения на 5 промежутков.

8.6. В результате 100 измерений некоторой физической величины получена выборка, причем 10 значений выборки попали в промежуток [—10; —6), 20 значений — в промежуток [—6; —2), 50 значений — в промежуток [—2; 2), 12 значений — в промежуток [2; 6), 8 значений — в отрезок [6; 10]. Постройте гистограмму частот.

8.7. Для выборки, 20 значений которой попали в промежуток [—3; —1), 50 значений — в промежуток [—1; 1), 30 значений — в отрезок [1; 3], постройте гистограмму относительных частот.

8.8. Для выборки, заданной вариационным рядом

—20, —20, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 10, 10,

найдите выборочное среднее $\overline{x}$.

8.9. Для выборки, заданной статистическим рядом

125	127	130	140
2	4	3	1

найдите выборочное среднее $\overline{x}$.

8.10. Для выборки, заданной выборочным распределением

—60	—20	0	30	80
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

найдите выборочное среднее $\overline{x}$.

8.11. Для выборки

1, 1, 3, 3, —5, —5, 3, 1, 1, 1

найдите выборочную дисперсию S_0.

8.12. Для выборки, заданной статистическим рядом

10	40	80
5	3	2

найдите выборочную дисперсию S_0.

8.13. Для выборки, заданной выборочным распределением

—20	0	15	20
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{25}$

найдите выборочную дисперсию S_0.

8.14. Для выборки объема $n=100$ вычислена выборочная дисперсия $S_0=12{,}87$. Найдите несмещенную выборочную дисперсию $\tilde{S}$.

8.15. Найдите несмещенную выборочную дисперсию $\tilde{S}$ для выборки, заданной статистическим рядом:

1)

1	5	7	9
6	12	1	1

; 2)

—25	0	5	25
20	25	50	5

.

8.16. Четыре измерения длины стержня дали следующие результаты: 18, 19, 21, 22 мм. Найдите: 1) выборочную среднюю длины стержня; 2) выборочную дисперсию; 3) несмещенную выборочную дисперсию.

§ 27. Статистические оценки неизвестных параметров

1. Точечные оценки. Несмещенность и состоятельность оценки. Одной из основных задач математической статистики, как уже отмечалось, является нахождение приближенного значения некоторого неизвестного параметра a случайной величины X по выборке ее значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{1}$$

полученной в результате n измерений (наблюдений, опытов). Таким параметром может быть, например, математическое ожидание случайной величины или ее дисперсия.

Приближенное значение параметра a, вычисленное каким-либо способом по значениям выборки (1), в статистике называют *точечной оценкой* этого параметра и обозначают $\bar{a}_n$.

З а м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что значения выборки являются случайными величинами: только от случая зависит, что при k-м измерении получится число x_k, а не какое-нибудь другое значение случайной величины. Поэтому и оценка $\bar{a}_n$—тоже случайная величина. На самом деле оценка $\bar{a}_n$ представляет собой числовую функцию от результатов n измерений.

Очевидно, что оценка $\bar{a}_n$ не обязательно будет давать удовлетворительное приближение для неизвестного параметра a. Чтобы эта оценка представляла интерес для практики, она должна удовлетворять определенным требованиям, которые обеспечивают ее близость к оцениваемому параметру. Такими требованиями являются несмещенность и состоятельность.

Точечная оценка $\bar{a}_n$ параметра a называется *несмещенной*, если математическое ожидание оценки равно a, т. е. если

$$M\bar{a}_n = a. \tag{2}$$

В противном случае, т. е. если $M\bar{a}_n \neq a$, оценка называется *смещенной*. Использование несмещенных оценок позволяет избежать систематических ошибок при замене неизвестного параметра a его оценкой $\bar{a}_n$.

При большом количестве измерений требуют также, чтобы с вероятностью, близкой к единице, оценка $\bar{a}_n$ мало отличалась от параметра a.

Оценка $\bar{a}_n$ параметра a называется *состоятельной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{a}_n - a| < \varepsilon) = 1. \tag{3}$$

Использование состоятельных оценок обеспечивает сближение оценки с оцениваемым параметром при увеличении объема выборки.

Пусть для случайной величины X в результате n измерений получена выборка

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

В качестве оценки математического ожидания $a = MX$ случайной величины X, как правило, берут выборочное математическое ожидание (выборочное среднее), т. е. полагают

$$MX \approx \bar{a}_n = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для оценки дисперсии $a = \mathsf{D}X$ используется несмещенная выборочная дисперсия S:

$$\mathsf{D}X \approx \overline{a}_n = S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Можно доказать, что каждая из этих оценок является несмещенной и состоятельной.

Заметим, что выборочная дисперсия

$$S_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

является смещенной оценкой для $\mathsf{D}X$.

Доказательства этих утверждений мы не приводим, так как они опираются на понятия и теоремы из теории вероятностей, которые выходят за рамки программы по математике для техникумов.

Приведем еще один пример точечной оценки. В § 15 изучалась случайная величина X — число появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p. В п. 5 § 16 отмечалось, что в случаях, когда вероятность p неизвестна, за ее значение принимают частоту события A, вычисленную при достаточно большом числе опытов. Другими словами, в качестве оценки неизвестного параметра $a = p$ случайной величины, распределенной по биномиальному закону, предлагалось использовать частоту $\frac{k}{n}$ наступлений события A в серии из n опытов, т. е. считать, что

$$p \approx \overline{a}_n = \frac{k}{n}.$$

В § 16 (п. 3, формула (2)) доказано, что математическое ожидание числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p, равно np.

Следовательно,

$$\mathsf{M}\overline{a}_n = \mathsf{M}\,\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\mathsf{M}k = \frac{np}{n} = p.$$

Таким образом, доказано, что частота $\frac{k}{n}$ является несмещенной оценкой для неизвестной вероятности p.

Закон больших чисел в форме Бернулли (§ 16, п. 5, формула (1)) означает, что частота $\frac{k}{n}$ является состоятельной оценкой для вероятности p.

2. Интервальные оценки. Любая точечная оценка $\bar{a}_n$ неизвестного параметра a является случайной величиной. Принимая оценку $\bar{a}_n$ за значение параметра a, мы, как правило, делаем ошибку, даже в том случае, когда оценка является несмещенной и состоятельной. Поэтому важно знать, каковы точность и надежность используемой оценки. Задача состоит в том, чтобы уметь находить границы, в которых с определенной вероятностью заключено неизвестное значение параметра. Эту задачу решают следующим образом.

Пусть по сделанной выборке удалось найти два числа a_1 и a_2 такие, что при любых значениях параметра a выполняется равенство

$$\mathsf{P}(a \in (a_1;\ a_2)) = \gamma. \tag{1}$$

В этом случае числа a_1 и a_2 называют *доверительными границами*, а интервал $(a_1;\ a_2)$ — *доверительным интервалом*, соответствующими *доверительной вероятности* γ. Число γ называют также *надежностью оценки*.

Нижняя и верхняя границы a_1 и a_2 доверительного интервала находятся по сделанной выборке и, следовательно, являются случайными величинами. Доверительный интервал $(a_1;\ a_2)$ поэтому также определяется случайным образом. Если случайное событие $a \in (a_1;\ a_2)$ происходит, то говорят, что доверительный интервал $(a_1;\ a_2)$ *накрывает* неизвестный параметр a. Равенство (1) означает, что интервал $(a_1;\ a_2)$ накрывает неизвестный параметр a с вероятностью γ.

Выбор доверительной вероятности (надежности) определяется конкретными условиями. Обычно берут γ равной 0,90; 0,95; 0,99. Если конкретные условия задачи позволяют считать все события, вероятность которых меньше 0,10 (соответственно 0,05; 0,01), невозможными, то считают практически достоверным, что доверительный интервал накрывает неизвестный параметр, и за его значение принимают середину $\frac{a_1+a_2}{2}$ доверительного интервала. При этом считается практически достоверным, что ошибка не будет превосходить числа $\frac{a_2-a_1}{2}$.

В математической статистике разработаны разнообразные методы отыскания доверительных интервалов для неизвестных параметров случайных величин. В качестве примера расскажем, как можно найти доверительный интервал для неизвестного параметра p случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Рассмотрим снова случайную величину X — число наступлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Как мы уже знаем, в случае, когда p неизвестно, в качестве оценки вероятности p берется частота, причем, как доказано в предыдущем пункте, эта оценка является несмещенной и состоятельной. Можно доказать, что при большом числе опытов границы a_1 и a_2 доверительного интервала, соответствующего надежности γ, могут быть приближенно найдены по формулам

$$a_1 \approx \frac{k}{n} - \frac{x}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n}}, \quad a_2 \approx \frac{k}{n} + \frac{x}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n}}, \tag{2}$$

где k — число наступлений события A в n опытах, а x — корень уравнения

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt = \gamma/2.$$

Корень этого уравнения находится по таблице значений *функции Лапласа* $\Phi_0(x)$ (см. приложение). Формулами (2) можно пользоваться при

$$n > 50, \quad k > 5, \quad n - k > 5, \tag{3}$$

т. е. во многих практически важных случаях. Если условия (3) не выполняются, для построения доверительного интервала пользуются другими формулами.

Пример. С автоматической линии было отобрано и проверено 400 деталей, 10 деталей оказались бракованными. Найти доверительный интервал, накрывающий с надежностью 0,9 неизвестную вероятность изготовления бракованной детали.

$\triangle$ По условию имеем $n = 400$, $k = 10$, $\gamma = 0{,}9$. По заданной надежности $\gamma = 0{,}9$ получаем уравнение $\Phi_0(x) = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$. Из таблицы значений функции Лапласа $\Phi_0(x)$ видно, что $x \approx 1{,}645$. По формулам (2) находим границы доверительного интервала:

$$a_1 = \frac{10}{400} - \frac{1{,}645}{400}\sqrt{\frac{10 \cdot 390}{400}} \approx 0{,}012,$$

$$a_2 = \frac{10}{400} + \frac{1{,}645}{400}\sqrt{\frac{10 \cdot 390}{400}} \approx 0{,}038.$$

Таким образом, если считать неизвестную вероятность равной 0,025, то с вероятностью 0,9 ошибка не превзойдет 0,013. ▲

Вопросы для контроля

1. Какие требования предъявляются к точечным оценкам?

2. Дайте определения: а) несмещенной оценки; б) состоятельной оценки.

3. Приведите какой-либо пример смещенной оценки.

4. Приведите какой-либо пример несмещенной и состоятельной оценки.

5. Объясните, что значит, что доверительный интервал $(a_1;\ a_2)$ накрывает неизвестный параметр a с надежностью γ.

6. Каково определение функции Лапласа $\Phi_0(x)$? Как эта функция используется для определения границ доверительного интервала, соответствующего надежности γ?

Упражнения

8.17. Для случайной величины X получена выборка

2	5	7	10
16	12	8	14

Укажите несмещенную и состоятельную оценку для MX.

8.18. Для случайной величины X получена выборка

—2	0	4
2	3	5

Укажите несмещенную и состоятельную оценку для DX.

8.19. В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш отмечен в 400 случаях. Укажите несмещенную и состоятельную оценку для вероятности выигрыша при игре с таким автоматом.

8.20. Из большой партии изделий, изготовленных станком-автоматом, было отобрано 200 штук, при этом 70 изделий оказались первосортными. Найдите доверительный интервал, накрывающий с надежностью 0,85 неизвестную вероятность изготовления станком-автоматом первосортного изделия.

8.21. Из большой партии транзисторов случайным образом было отобрано 100 штук. При проверке оказалось, что 10 транзисторов не соответствуют стандарту. Найдите доверительный интервал, накрывающий с надежностью 0,95 долю нестандартных транзисторов во всей партии.

8.22. Найдите доверительный интервал, накрывающий с надежностью 0,99 неизвестную вероятность изготовления автоматом нестандартной детали, если среди 250 деталей оказалось только 218 стандартных.

8.23. В 1000 игр с игровым автоматом выигрыш был отмечен в 100 случаях. Найдите доверительный интервал, накрывающий с надежностью 1) 0,95; 2) 0,99 неизвестную вероятность выигрыша.

§ 28. Обработка результатов измерений методом наименьших квадратов

Пусть изучается зависимость между величинами X и Y в случае, когда имеется возможность измерять значения величины Y при различных значениях величины X. Если величина X может принимать лишь конечное множество значений и если при всех этих значениях возможно точное измерение величины Y, то после конечного числа измерений мы получим таблицу соответствующих значений X и Y. Очевидно, эта таблица описывает искомую функциональную зависимость. Однако даже в случае, когда величина X принимает конечное множество значений, не всегда имеется возможность провести измерения величины Y для всех значений величины X, так как этих значений может быть очень много или процесс измерения связан с уничтожением изучаемого объекта. Кроме того, при одном и том же значении величины X, но при разных измерениях из-за неточности измерения могут получаться разные приближенные значения величины Y. В общем случае приближенные значения величины Y при фиксированном X являются значениями некоторой случайной величины.

Из сказанного следует, что при помощи конечного числа измерений, как правило, нельзя установить точную функциональную зависимость между изучаемыми величинами.

Одной из важных задач математической статистики является установление связи между двумя величинами по известным выборкам их значений. В общем случае эта задача формулируется следующим образом.

Пусть для n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величины X после серии из n измерений получена соответствующая выборка значений величины Y: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. По этим данным требуется найти приближенный закон функциональной зависимости между величинами X и Y, причем этот приближенный закон должен быть в некотором смысле наилучшим.

Если нет никакой дополнительной информации о виде искомой функциональной зависимости, то поставленная задача является неразрешимой. Поэтому на практике задается вид функциональной зависимости с точностью до некоторых параметров. Кроме того, определяется понятие «наилучшего приближения функциональной зависимости».

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, имеющей большое прикладное значение: среди всех линейных функций $y=ax+b$, где a и b — неизвестные параметры, найти ту, которая дает наилучшее приближение функциональной зависимости между величинами X и Y.

Для решения поставленной задачи используется *метод наименьших квадратов*. В этом методе наилучшими значениями для параметров a и b считаются значения, при которых является наименьшей сумма квадратов разностей

$$y_1-ax_1-b,\quad y_2-ax_2-b,\ \ldots,\ y_n-ax_n-b,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка значений величины X, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — полученная выборка соответствующих значений величины Y. Другими словами, находят значения $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параметров a и b, при которых функция

$$F(a;\ b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

принимает свое наименьшее значение. Прямая $y=\bar{a}x+\bar{b}$ называется *прямой линией регрессии*.

□ Найдем уравнения для определения $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для этого заметим, что функция $F(a;\ \bar{b})$ как функция от a при $a=\bar{a}$ принимает наименьшее значение. Поэтому производная этой функции по a при $a=\bar{a}$ равна нулю:

$$F'_a(\bar{a};\ \bar{b})=0. \qquad (1)$$

Аналогично функция $F(\bar{a};\ b)$ как функция от b при $b=\bar{b}$ принимает наименьшее значение. Поэтому производная этой функции по b при $b=\bar{b}$ равна нулю:

$$F'_b(\bar{a};\ \bar{b})=0. \qquad (2)$$

Следовательно, значения $a=\bar{a}$ и $b=\bar{b}$, при которых функция $F(a;\ b)$ принимает свое наименьшее значение, удовлетворяют системе уравнений (1), (2). Эта система называется *нормальной системой* для определения прямой линии регрессии. Найдя производные функции $F(a;\ b)$

по a и b, видим, что эта система имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Это — система двух линейных относительно a и b уравнений. Введем обозначения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\overline{(x,\ x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \overline{(x,\ y)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

В этих обозначениях нормальная система имеет вид

$$\begin{cases} \overline{(x,\ x)}\, a + \overline{x} b = \overline{(x,\ y)}, \\ \overline{x} a + b = \overline{y}. \end{cases}$$

Она сильно упрощается, если $\overline{x} = 0$, т. е. если среднее значение выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно нулю. В этом случае

$$\overline{b} = \overline{y}, \qquad \overline{a} = \frac{\overline{(x,\ y)}}{\overline{(x,\ x)}}. \ ■$$

Замечание 1. Так как выборка $y_1, y_2, \ldots, y_n$, получаемая в результате измерений, является случайной, то и значения $\overline{a}$, $\overline{b}$ являются случайными. Во многих практически важных случаях, когда между величинами X и Y существует линейная зависимость $Y = aX + b$, значения $\overline{a}$ и $\overline{b}$ являются «хорошими», т. е. несмещенными и состоятельными оценками параметров a и b.

Замечание 2. Методом наименьших квадратов могут быть получены оценки параметров для более сложных функциональных зависимостей: квадратичной $ax^2 + bx + c$, гиперболической $a + \frac{b}{x}$, показательной $a + be^{\alpha x}$ и др.

Пример 1. Результаты пяти измерений некоторой величины Y, зависящей от величины X, приведены в таблице:

x_i	-2	$-1,5$	0	$1,5$	2
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Построить прямую линию регрессии.

△ По результатам измерений вычисляем:

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 0, \qquad \overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 1{,}63.$$

Так как среднее значение для выборки значений величины X равно нулю, то находим: $\overline{b} = \overline{y} = 1{,}63$.

Для нахождения $\overline{a}$ вычисляем:

$$\overline{(x,\ x)} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 2{,}5;$$

$$\overline{(x,\ y)} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 0{,}505.$$

Тогда $\overline{a} = \dfrac{\overline{(x,\ y)}}{\overline{(x,\ x)}} = \dfrac{0{,}505}{2{,}5} = 0{,}202.$

Следовательно, прямая линия регрессии имеет уравнение

$$y = 0{,}202x + 1{,}63.$$

Она среди всех прямых наиболее точно изображает зависимость величины X от величины Y. На рис. 35 отмечены

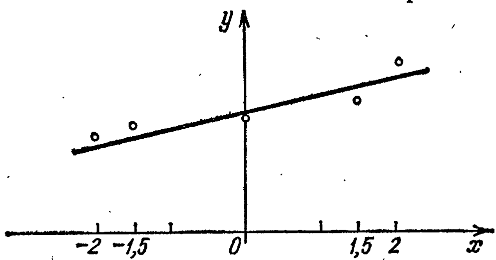


Рис. 35

точки $(x_i,\ y_i)$, полученные в результате измерений, и изображена прямая линия регрессии. ▲

Пример 2. При производстве некоторого продукта его выход Y (кг/ч) линейно зависит от температуры X (°C) реакции. Измерения выхода продукции при различных температурах дали следующие результаты:

x_i	32	73	45	93	40	75
y_i	15	95	40	138	22	100

Найти оценки параметров неизвестной линейной зависимости.

△ По результатам измерений вычисляем

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{358}{6}; \quad \bar{y}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i=\frac{410}{6};$$

$$(\overline{x,\ x})=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2=\frac{24\,252}{6};$$

$$(\overline{x,\ y})=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i=\frac{30\,429}{6}.$$

Составим нормальную систему

$$\begin{cases} 24\,252a+358b=30\,429, \\ 358a+\quad 6b=\quad 410. \end{cases}$$

Решив эту линейную систему, получим

$$a=\bar{a}\approx 2{,}1; \quad b=\bar{b}\approx -54{,}8. \ ▲$$

Пример 3. Результаты измерений некоторой величины Y, зависящей от величины X, представлены в таблице:

x_i	2	3	4	5	6	7	8
y_i	14	13	9	9	9	8	7

Найти уравнение прямой линии регрессии.

△ По результатам измерений вычисляем

$$\bar{x}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i=5; \quad \bar{y}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i=\frac{55}{7}.$$

Поместим начало координат в точку $(\bar{x};\ 0)$, т. е. вместо x будем рассматривать новую переменную $x'=x-5$. Тогда результаты измерений принимают вид

x_i'	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	14	13	9	9	9	8	7

Найдем уравнение прямой линии регрессии $y=\bar{a}'x'+\bar{b}'$.

Имеем

$$\bar{b}' = \bar{y} = \frac{55}{7} \approx 9{,}9;$$

$$\bar{a}' = \frac{\overline{(x', y)}}{\overline{(x', x')}} = \frac{-21-10}{2(9+4+1)} = -\frac{31}{28} \approx -1{,}1.$$

Следовательно,

$$y = -1{,}1x' + 9{,}9$$

или, возвращаясь к переменной x,

$$y = -1{,}1x + 15{,}4. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Минимум какой функции рассматривается в методе наименьших квадратов?
2. Что называется прямой линией регрессии?
3. Как составляется нормальная система для определения прямой линии регрессии?
4. Как находятся оценки параметров неизвестной линейной зависимости между величинами методом наименьших квадратов?

Упражнения

8.24. Результаты измерений некоторой величины Y, зависящей от температуры X, даны в таблице:

x_i	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y_i	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	2,7	3,8	5,1	6,7	8,3	10,2

Найдите прямую линию регрессии.

8.25. В таблице

x_i	50	100	140	180	240	270	40	300	210
y_i	8	14	20	23	30	36	4	37	26

приведены результаты опытов, в которых исследовалась линейная зависимость глубины Y проникновения снаряда в преграду от удельной энергии X (в соответствующих единицах). Найдите оценки параметров этой зависимости и уравнение прямой линии регрессии.

8.26. Результаты измерений величины Y, зависящей от X, приведены в таблице:

1)

x_i	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y_i	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

2)

x_i	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
y_i	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

Найдите уравнение прямой линии регрессии.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1. 1) $z_1+z_2=3+7i$, $z_1z_2=-22+7i$; 2) $z_1+z_2=2-4i$, $z_1z_2=-1{,}81-5{,}2i$; 3) $z_1+z_2=-8-10i$, $z_1z_2=21-24i$; 4) $z_1+z_2=10$, $z_1z_2=28$.

1.2. 1) $z_2-z_1=-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=-i$; 2) $z_2-z_1=4-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=1-2i$;

3) $z_2-z_1=1-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{3})\,i$, $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}$;

4) $z_2-z_1=2\sqrt{b}\,i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}\,i$.

1.3. 1) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}\,i$; 2) 0; 3) $-2i$; 4) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$; 5) 0.

1.4. 1) -2; 2) 0.

1.5. 1) 0; 2) $-\frac{11}{17}$.

1.6. 1) $-\frac{41}{50}+\frac{63}{50}\,i$; 2) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}\,i$; 3) $-38+41i$; 4) $-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}\,i$.

1.7. 1) $-1-i$; 2) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

1.8. (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5).

1.9. (-2; -2), (-2; 2).

1.11. $z_1=1-i$, $z_2=i$.

1.12. 1) $\pm 5i$; 2) $1\pm 2i$; 3) $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\,i$; 4) $-\frac{1}{5}\pm\frac{3}{5}\,i$; 5) $3\pm\sqrt{7}i$;

6) $\frac{7}{3}\pm\frac{13}{3}\,i$; 7) -2; $1\pm\sqrt{3}\,i$; 8) ± 2; $\pm i$.

1.13. 1) $x^2+4=0$; 2) $x^2-2x+10=0$; 3) $x^2+8x+18=0$.

1.15. $z_4=z_1+z_3-2z_2$.

1.16. $t\,(7+i)$, t — произвольное положительное число.

1.17. 1) 3; 2) 1; 3) 7; 4) $\sqrt{2}$; 5) 1; 6) 7.

1.18. 1) $2-\frac{3}{2}\,i$; 2) 0, $3i$, $-3i$; 3) bi, $b\in R$.

1.19. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}\,i$.

1.20. 1) Круг (вместе с границей) с центром в точке $z=0$ радиуса $R=1$; 2) окружность с центром в точке $z=0$ радиуса $R=2$; 3) точка $z=i$; 4) левая полуплоскость, ограниченная мнимой осью; 5) полуплоскость, ограниченная биссектрисами второго и четвертого координатных углов и содержащая точку $z=-1$; 6) круг (вместе с границей) с центром в точке $z=1-2i$ радиуса $R=2$; 7) множество состоит из точек, лежащих внутри окружности радиуса $R=3$ с центром в точке $z=1-2i$ и вне или на окружности радиуса $R=2$ с центром в той же точке; 8) множество представляет собой бесконечную систему концентрических колец с центром в точке $z=0$, в это множество входят кольца, содержащие интервалы $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, действительной оси; 9) в множество входят все точки круга радиуса $R=10$ с центром в точке $z=10i$, кроме центра круга; 10) окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=-3$.

1.21. $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$.

1.22. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.23. 1) Действительная положительная полуось $z=x>0$; 2) мнимая полуось $z=iy$, $y>0$; 3) мнимая полуось $z=iy$, $y>0$; 4) верхняя полуплоскость $z=x+iy$, $y>0$; 5) вся комплексная плоскость, за исключением точки $z=0$.

1.24. Действительная отрицательная полуось $z=x$, $x<0$.

1.25. i.

1.26. $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$.

1.27. 1) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$; 2) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3) $\cos 0+i\sin 0$; 4) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 5) $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; 7) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

1.28. 1) $z=1=\cos 0+i\sin 0$; 2) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; 3) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$; 4) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; 5) $z=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$.

1.29. 1) $\frac{5}{3}(\cos 230°+i\sin 230°)$; 2) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$.

1.30. $-10+4i$.

1.31. $3-\frac{9}{2}i$.

1.32. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{16}+i\frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) 1; 3) $\cos 50°+i\sin 50°$; 4) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 5) -2; 6) 2.

1.33. 1) $2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 2) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $2(\cos 0+i\sin 0)$, если n четное; $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, если n нечетное; 4) $\frac{1}{\cos^4 1}\cdot(\cos 4+i\sin 4)$; 5) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 2+i\sin 8)$; 6) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

1.34. $n=4k,\ k\in Z$.

1.35. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -1,\quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i$; 4) $1,\ \cos 72^\circ+i\sin 72^\circ,\ \cos 144^\circ+i\sin 144^\circ,\ \cos 216^\circ+i\sin 216^\circ,\ \cos 288^\circ+i\sin 288^\circ$.

1.36. 1) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; 2) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$; 3) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right),\quad \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right),\quad \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right),\quad \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right),\quad \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; 4) $\sqrt{3}+i,\quad 2i,\quad -\sqrt{3}+i,\quad -\sqrt{3}-i,\quad -2i,\quad \sqrt{3}-i$.

1.37. $-\frac{3}{2}i$.

1.38. $2(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ),\ 2(\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ),\ \sqrt[5]{31}(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ),\ -\sqrt[5]{31},\ \sqrt[5]{31}(\cos 252^\circ+i\sin 252^\circ)$.

1.39. 1) $e^2\cos 1-ie^2\sin 1$; 2) i; 3) $-e^7\sin 3+ie^7\cos 3$.

1.40. 1) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$; 2) $e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

1.41. 1) $e^{2\pi i}=1$; 2) $8e^{-i\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$; 3) $64e^{i\pi}=-64$; 4) $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $2^7e^{\frac{3}{2}\pi i}=-2^7i$.

1.42. 1) $1,\quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2e^{\frac{2\pi i}{9}},\quad 2e^{\frac{8\pi i}{9}},\quad 2e^{\frac{14\pi i}{9}}$; 4) $\sqrt[4]{1/8}+i\sqrt[4]{9/8},\quad -\sqrt[4]{9/8}+i\sqrt[4]{1/8},\quad -\sqrt[4]{1/8}-i\sqrt[4]{9/8},\quad \sqrt[4]{9/8}-i\sqrt{1/8}$.

ГЛАВА 2

2.1. $x'=x\ln 2;\ x=C\cdot 2^t$.

2.2. $x'=x\ln 0{,}99;\ x=C\cdot 0{,}99^t$.

2.3. $T=-\frac{\ln 2}{\ln 0{,}99}$.

2.4. 3,9 кг.

2.5. 56,5 г.
2.6. $y=4e^x$.
2.7. $\omega=\omega_0 e^{-kt}$.
2.8. $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; 60 мин.
2.9. 1) Да; 2) нет; 3) нет.
2.10. 1) Да; 2) да; 3) да.
2.11. 1) $\alpha=-2$; 2) $\alpha=\frac{1}{2}$; 3) $\alpha=2$, $\alpha=-3$.
2.12. $A=0$, α любое; $\alpha=-1$, A любое.
2.13. 1) $y=\frac{x^2}{2}-\cos x+C$; 2) $y=\ln(1-Ce^{-x})$; 3) $y=C(x-1)-1$; 4) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $y=e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; 6) $y=-\ln(C-e^x)$, $C>0$; 7) $y=C\cos x$; 8) $y=\ln(Cx^2+C-1)$; 9) $y=C(1+x)^2$; 10) $y=C(1+x)e^{-x}$; 11) $y=\operatorname{tg}\ln Cx$.
2.14. 1) $y=\frac{1}{27}(x+C)^3$, $y=0$; 2) $y=\sin(x+C)$, $y=1$, $y=-1$; 3) $y=(x^2+C)^2+1$, $y=1$; 4) $y=\frac{1}{1+Cx}$, $y=0$; 5) $y=\frac{2}{Ce^{-x^2}-1}$, $y=0$; 6) $y=\left(C+\frac{\sin 2x}{8}-\frac{x}{4}\right)^2$, $y=0$.
2.15. 1) $x=\frac{3}{4}t^2$; 2) $x=\frac{1}{1-t}$; 3) $x=-\sqrt{\frac{6+t^2}{1+t^2}}$.
2.16. 1) $y=x$; $y=0$; 2) $y=\arcsin x-\frac{\pi}{4}$.
2.17. $y=Cx^2$; $y^2=Cx$.
2.18. $s=25\cdot 2^{t/5}$.
2.19. 1) $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$; 2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$, $y=1$.
2.20. 1) $x=Ct^{-2}+\frac{1}{5}t^3$; 2) $x=Ce^{-t^2}+1$; 3) $x=C\cos t+\sin t$; 4) $x=\left(C+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4\right)e^{t^2}$; 5) $x=\frac{Ct}{t^3+1}+\frac{1}{t}$.
2.21. 1) $x=t$; 2) $x=\frac{t}{\cos t}$; 3) $x=8\sin^2\frac{t}{2}+e^{1-\cos t}$; 4) $x=\frac{3(t+1)^2+(t+1)^4}{2}$.
2.22. $I=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $L\frac{dI}{dt}+RI=V$ при начальном условии $I(0)=0$.
2.23. $I=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$. Указание. Задача сводится к отысканию периодического решения уравнения $L\frac{dI}{dt}+RI=V\sin\omega t$. 2.24. $x=600(1-e^{-0{,}01t})$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $mx''=-kx'$ при начальных условиях $x(0)=0$, $x'(0)=6$.

2.25. $x=\frac{2kv_0+g}{4k^2}\left(1-e^{-2kt}\right)-\frac{gt}{2k}$. Указание. Задача сводится к отысканию решения уравнения $mx''+2kmx'=-mg$, удовлетворяющего условиям $x(0)=0$, $x'(0)=v_0$.

2.26. $t=\dfrac{h(v_1-v_0)}{v_0v_1\ln\dfrac{v_1}{v_0}}$ с.

2.27. $mx''=t^2$; $x=\frac{1}{12m}t^4+C_1t+C_2$.

2.28. $x=-\frac{1}{40}t^5+\frac{1}{4}t^2+C_1t+C_2$.

2.29. $x=\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{20}t^2+1$.

2.30. $x''+x=0$.

2.31. 1) Описывает; 2), 3), 4) не описывают.

2.32. $x=a\left(1-\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $lx''+gx=ag$ при начальных условиях $x(0)=x'(0)=0$.

2.33. $x=\frac{l}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{2l}}\,t}\right)$, $\qquad T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2+\sqrt{3})$.

Указание. Удобно выбрать начало координат в точке, где в начальный момент находится середина цепочки; тогда x является решением уравнения $2lx''=gx$ при условиях $x(0)=l$, $x'(0)=0$.

2.34. 1) $x=C_1+C_2e^{2t}$; 2) $x=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$; 3) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-\frac{4}{3}t}$; 4) $x=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$; 5) $x=e^{-t/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; 6) $x=e^{3t}(C_1+C_2t)$; 7) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}-2$; 8) $x=C_1+C_2e^{-2t}+t$; 9) $x=C_1\sin 3t+C_2\cos 3t+1$; 10) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{5}e^{4t}$; 11) $x=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+\frac{1}{10}(\sin t+3\cos t)$; 12) $x=C_1\sin t+C_2\cos t-2t\cos t$.

2.35. 1) $x=e^{t}+e^{2t}$; 2) $x=e^{-t}(\sin 2t+\cos 2t)$; 3) $x=e^{-3t}(2+7t)$; 4) $x=ae^{-t}\cos t+(a+b)e^{-t}\sin t$; 5) $x=\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}-\frac{1}{3}$; 6) $x=\frac{7}{27}e^{3t}-\frac{1}{27}e^{-3t}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{9}$; 7) $x=2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$.

2.36. $\alpha=0$, $\beta>0$. **2.37.** $\alpha=k^2$, k — целое число; $x=C\sin kt$, C — произвольная постоянная.

ГЛАВА 3

3.1. 1) 5; 2) 969; 3) 256; 4) $\frac{1}{15}$; 5) $k(k+1)$; 6) n.

3.2. 1) 9 и 10; 2) 7; 3) 10; 4) 11; 5) 8; 6) 7; 7) 13; 8) 27; 9) 2; 10) 6.

3.3. 1) {3; 4; 5} и {1; 3; 2}; 2) {4; 5; 6; 7; 8; 9} и {1; 9; 14; 15; 35}.

3.4. 1) {8; 9; 10}; 2) {0; 1; 2; ...; 27}.

3.5. 12.

3.6. 16.
3.7. 18, 10.
3.8. 1) 120; 2) 60; 3) 420; 4) 83 160.
3.9. 72.
3.10. 15.
3.11. 43 200.
3.12. 1) 60; 2) 10.
3.13. 1) 870; 2) 435.
3.14. 8436.
3.15. 18.
3.16. 15.
3.17. 35.
3.18. 210.
3.19. 4060.
3.20. 1) 30; 2) 62.
3.21. 1) $(x^2-y)^6=\sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k}(-y)^k=x^{12}-6x^{10}y+15x^8y^2-20x^6y^3+$ $+15x^4y^4-6x^2y^5+y^6$; 2) $(3a^2-2b)^5=$ $=\sum_{k=0}^{5} C_5^k (3a^2)^{5-k}(-2b)^k=243a^{10}-810a^8b+1080a^6b^2-720a^4b^3+$ $+240a^2b^4-32b^5$.
3.22. 1) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^7+7\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5+21\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3+35\sqrt{\frac{a}{b}}+$ $+35\sqrt{\frac{b}{a}}+21\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3+7\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; 2) $x^{16}-16x^{13}+112x^{10}-448x^7+1120x^4-1792x+\frac{1792}{x^2}-\frac{1024}{x^5}+\frac{256}{x^8}$.
3.23. 1) $109\sqrt{2}-89\sqrt{3}$; 2) 64.
3.24. 1) $-2099\,520x^3$; 2) $126\sqrt[3]{a}$.
3.25. 1) $252\sqrt[3]{x^2}$; 2) $1726a^3b^2\sqrt{a}$, $-1716a^3b^2\sqrt[3]{b}$.
3.26. 1) 15; 2) 495.
3.27. 1) 5280; 2) 5005.
3.28. 10.
3.29. 1120.
3.30. 1) 2772; 2) 625; 7000; 7000; 1120; 16.
3.31. 1) $\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50}$; 2) $\frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$.
3.32. 1) 378; 2) 17 550.
3.33. 1) $2^n-2(n+1)$; 2) 0.
3.34. 1) 1; 2) -1.

ГЛАВА 4

4.1. 1) По крайней мере один выстрел оказался удачным; 2) все три выстрела были удачными; 3) мишень поражена одним и только одним выстрелом.
4.2. $B=A_1\cup(A_2\cap A_3)$, $\overline{B}=\overline{A}_1\cap(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)$.
4.3. $A\cup B=U$, т. е. события A и B образуют полную систему событий. События A и B не являются несовместными.

4.5. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{5}{12}$.

4.6. $\frac{5}{36}$.

4.7. $\frac{164}{1081}$.

4.8. 1) $\frac{9}{17}$; 2) $\frac{8}{17}$.

4.11. 1) 0,94; 2) 0,38.

4.12. $\frac{19}{30}$.

4.13. Не могут.

4.14. Не являются.

4.15. A и B зависимы, B и C зависимы, A и C независимы.

4.16. Попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

4.17. 0,976.

4.18. 0,819.

4.19. $p_1 = p^3(2-p^3)$, $p_2 = p^3(2-p)^3$, $p_2 > p_1$, если $0 < p < 1$.

4.20. $1-(1-p)^{12}$.

4.21. По крайней мере 13 раз.

4.22. $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$.

4.23. 0,78.

4.24. 0,014.

4.25. 0,775.

4.26. $\frac{10}{17}$.

4.27. 0,998.

4.28. $\frac{(1-p_1)\,p_2}{1-p_1p_2}$.

4.29. $\frac{2}{3}$.

4.30. $\frac{2}{3}$.

4.31. $\approx 0{,}04$.

4.32. $\approx 0{,}02$.

4.33. $\frac{13}{16}$.

4.34. 1) Вероятность выигрыша трех партий из четырех больше вероятности выигрыша пяти партий из восьми; 2) вероятность выигрыша не менее пяти партий из восьми больше вероятности выигрыша не менее трех партий из четырех.

4.35. $P_5(5) \approx 0{,}132$; $P_5(4) = P_5(3) \approx 0{,}329$; $P_5(2) \approx 0{,}165$; $P_5(1) \approx 0{,}041$; $P_5(0) \approx 0{,}004$.

4.36. 84.

4.37. Вероятность одна и та же, так как $C_{50}^{17}\left(\frac{1}{3}\right)^{17}\left(\frac{2}{3}\right)^{33} = C_{50}^{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{34}$.

4.38. 0,026.

4.39. 1) Может; 2) не может.

4.40. В примере 1 не является, в примере 2 является.

4.41.

0	1	2	3
0,125	0,375	0,375	0,125

4.42.

1	4	9	16	25	36
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

4.43.

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0,216	0,432	0,288	0,064

4.44. $MX=2{,}2$, $DX=0{,}76$.

4.45. $MX=6$, $DX=9$.

4.46. 1) $MX=\frac{3}{2}$, $DX=\frac{3}{4}$; 2) $MX=\frac{2}{5}$, $DX=\frac{2}{25}$.

4.47. $MX=\frac{91}{6}$.

4.48. $MX=\frac{4}{5}$, $DX=\frac{9}{25}$.

4.49. $MX=100$, $DX=8$.

4.50. $MX=4900$, $DX=98$.

4.51.

1	2	3	4
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

$MX=\frac{40}{27}$, $DX=\frac{452}{729}$.

4.52. Стоимость билета не должна превышать 11 копеек, так как математическое ожидание выигрыша $\approx 11{,}6$ копейки.

4.53. 1) Невыгодна; 2) выгодна; 3) игра «безобидна», так как математическое ожидание выигрыша равно нулю.

ГЛАВА 5

5.1. 1) -1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{9}$; 4) $-\frac{1}{8}$; 5) $\frac{7}{99}$.

5.2. 1) Расходится; 2) расходится; 3) расходится.

5.3. 1) Сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) сходится; 5) сходится; 6) расходится.

5.4. 1) Сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) сходится.

5.5. 1) Сходится условно; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) сходится условно; 5) сходится условно; 6) сходится абсолютно.

5.6. 1) $R=2$; 2) $R=2$; 3) $R=\sqrt[3]{3}$; 4) $R=+\infty$; 5) $R=0$.

5.7. 1) $|z-1|<3$; 2) $|z+i|<2$; 3) $|z+1-i|<\sqrt{2}$; 4) вся комплексная плоскость.

5.8. 1) $(-1;\ 1)$; 2) $(-1;\ 1)$; 3) $[-2;\ 2)$; 4) $(-e;\ e)$; 5) $[-1;\ 1)$; 6) $\mathbf{R}$.

5.9. 1) $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\ldots$; 2) $\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+\ldots$; 3) $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$

5.10. 1) 0,006; 2) 0,07.

5.11. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $R=+\infty$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{2^n n!}x^n$, $R=+\infty$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n2^{4n-1}}$, $R=4$; 4) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=+\infty$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$, $R=1$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$, $R=1$; 7) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}$, $R=1$; 8) $-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right)x^n$, $R=1$; 9) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)x^n$, $R=2$.

5.12. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; 2) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$; 3) $\frac{\pi}{2}-x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$, $R=1$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}x^n$, $R=1$.

ГЛАВА 6

6.1. 1) $\frac{7}{2}+\frac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2}-\frac{2(-1)^k\sin kx}{k}\right)$.

6.2. 1) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k\sin kx}{4k^2-1}$; 2) $1+\sin 2x$;

3) $4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$; 4) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$.

6.3. 1) $\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}\cos kx$; 2) $\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^2}\cos kx$;

3) $12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$.

6.4. 1) $\frac{8}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k\sin 2kx}{4k^2-1}$; 2) $\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k\sin kx}{4k^2-1}$;

3) $\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$.

6.5. 1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$; 2) $\pi+1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\cos kx-\frac{\cos k}{k}\sin kx\right)$.

6.6. 1) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$;

3) $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}}{2k-1}$;

4) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\cos 2k\pi x-9\cos\frac{2k\pi x}{3}\right)$.

6.7. $\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)^2}$.

6.8. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k}$.

6.9. $\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{5}$.

6.10. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}+\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$.

6.11. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^p}{1-ip}e^{ipx}$, $s(\pi)=\operatorname{ch}\pi$.

6.12. $\frac{1}{\pi i}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{2p-(-1)^p i}{4p^2-1}e^{2ipx}$.

6.13. $\dfrac{A}{3}+\dfrac{A}{2\pi i}\sum\limits_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{\infty}\dfrac{1-e^{-i\frac{2p\pi}{3}}}{p}e^{i\frac{2p\pi x}{3}}$.

ГЛАВА 7

7.2. $\{(x;\ y)\mid xy\leqslant 1,\ x^2\neq y^2\}$.

7.4. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y+y\cos x$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x\cos y+\sin x$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\operatorname{tg}(x+y)+$ $+\dfrac{e^{xy}}{\cos^2(x+y)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\operatorname{tg}(x+y)+\dfrac{e^{xy}}{\cos^2(x+y)}$;

3) $\dfrac{\partial y}{\partial x}=2x\sin(at+x)+x^2\cos(at+x)$; $\dfrac{\partial y}{\partial t}=ax^2\cos(at+x)$;

4) $\dfrac{\partial s}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}$; $\dfrac{\partial s}{\partial y}=\dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$.

7.6. 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1+\cos y$; 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$; 3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-y\sin(x+at)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$ $=-a^2y\sin(x+at)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\cos(x+at)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=-ay\sin(x+at)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}=a\cos(x+at)$; 4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=$ $=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=1$.

7.7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$.

7.8. 0.

7.9. 1) $dz=-y\sin xy\,dx-x\sin xy\,dy$; 2) $dz=(2xy+y^2)\,dx+$ $+(x^2+2xy)\,dy$; 3) $dz=\left(e^y-\dfrac{y}{\sin^2 x}\right)dx+(xe^y+\operatorname{ctg}x)\,dy$.

7.10. $f(0{,}1;\ 0{,}2)\approx 0{,}3$; $f(0{,}2;\ 0{,}1)\approx 0{,}3$.

7.11. 1) $\dfrac{1}{3}+2\sin 1$; 2) $\sin 1$; 3) $\dfrac{(e-1)^2(e+1)}{3e}$; 4) 0.

7.12. $\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^5}{5}-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}e^{a^2}-\dfrac{1}{2}$.

7.13. $\dfrac{23}{336}$.

7.14. 0.

7.15. $\dfrac{2}{15}$.

7.16. 1) 0; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\sin 1}{3}$.

7.17. 6.

7.18. $\dfrac{1}{4}$.

7.19. $\dfrac{3}{4}\pi R^2h^2$.

ГЛАВА 8

8.1. Объем равен 10, размах — 5. Вариационный ряд: 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7. Статистический ряд:

2	5	7
1	3	6

Выборочное распределение:

2	5	7
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

8.2. 1)

—2	0	2	5	8
$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

;

2)

—1	0	10
$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$

;

3)

4	5	6	7
$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$

.

8.3. 1) См. рис. 36; 2) см. рис. 37.

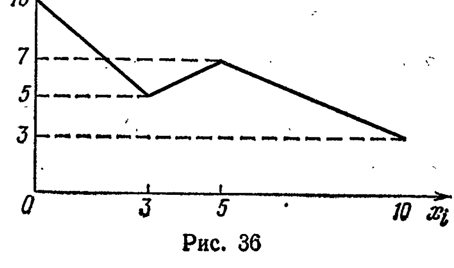


Рис. 36

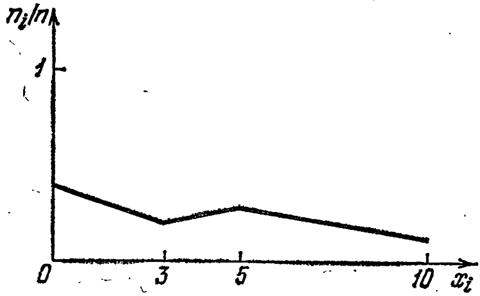


Рис. 37

8.4. См. рис. 38.

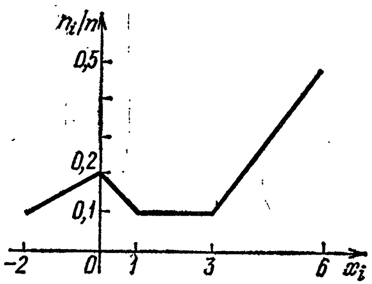


Рис. 38

8.5. См. рис. 39.

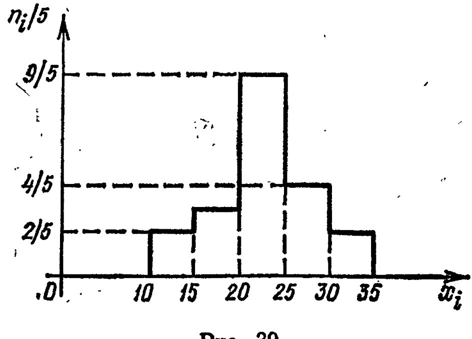


Рис. 39

8.6. См. рис. 40.

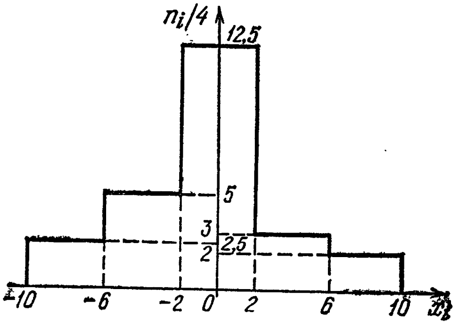


Рис. 40

8.7. См. рис. 41.

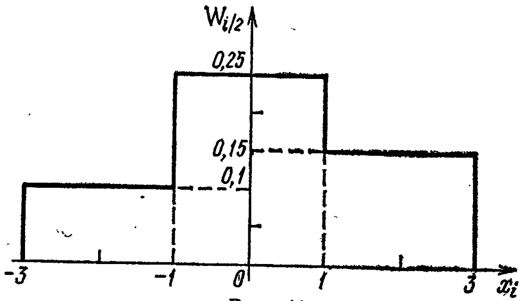


Рис. 41

8.8. $\overline{x} = -1$.
8.9. $\overline{x} = 128{,}8$.
8.10. $\overline{x} = 1$.
8.11. $S_0 = 8{,}04$.
8.12. $S_0 = 721$.
8.13. $S_0 = 167{,}29$.
8.14. $S = 13$.
8.15. 1) $S \approx 5{,}25$; 2) $S \approx 169$.
8.16. 1) $\overline{x} = 20$; 2) $S_0 = 2{,}5$; 3) $S = \frac{10}{3}$.
8.17. Несмещенной и состоятельной оценкой является выборочное среднее $\overline{x} = 5{,}76$.
8.18. Несмещенной и состоятельной оценкой является несмещенная выборочная дисперсия $S = 6{,}93$.
8.19. 0,04.
8.20. (0,302; 0,398).
8.21. (0,041; 0,159).
8.22. (0,073; 0,183).
8.23. 1) (0,083; 0,119); 2) (0,076; 0,124).
8.24. $\overline{a} \approx 1{,}0$; $\overline{b} \approx 3{,}7$.
8.25. $\overline{a} \approx 0{,}12$; $\overline{b} \approx 1{,}00$; $y = 0{,}12x + 1{,}00$.
8.26. 1) $y = 0{,}8x + 12{,}2$; 2) $y = -1{,}1x + 20{,}3$.

Приложение

ФРАГМЕНТ ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$$

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
...	...	1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861
...	...	1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868
...	...	1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875
1,38	0,4162	1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881
1,39	0,4177	1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887
1,40	0,4192	1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893
1,41	0,4207	1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898
1,42	0,4222	1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904
1,43	0,4236	1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909
1,44	0,4251	1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913
1,45	0,4265	1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918
1,46	0,4279	1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922
1,47	0,4292	1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927
1,48	0,4306	1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931
1,49	0,4319	1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934
1,50	0,4332	1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938
1,51	0,4345	1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941
1,52	0,4357	1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945
1,53	0,4370	1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948
1,54	0,4382	1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951
1,55	0,4394	1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953
1,56	0,4406	1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956
1,57	0,4418	1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959
1,58	0,4429	1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961
1,59	0,4441	1,84	0,4671	2,18	0,4854	...	...

Каченовский Мечислав Игнатьевич
Колягин Юрий Михайлович
Кутасов Александр Дмитриевич
Луканкин Геннадий Лаврович
Оганесян Вачаган Арташесович
Яковлев Геннадий Николаевич

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 2

Редактор *Т. А. Панькова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *О. М. Березина, М. Н. Дронова*

ИБ № 32326

Сдано в набор 11.11.87. Подписано к печати 16.04.88. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,28. Усл. кр.-отт. 14,49. Уч.-изд. л. 15,17. Тираж 400000 экз. (1-й завод 1—200000 экз.) Заказ № 8-175. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, Валовая, 28
Отпечатано на Киевской книжной фабрике, 252054, Киев-54, Воровского, 24.

45 к.