

Д. Р. Коже
Д. Оукс



АНАЛИЗ ДАННЫХ
ТИПА ВРЕМЕНИ
ЖИЗНИ

Д. Р. Коже, Д. Оукс

ANALYSIS OF SURVIVAL DATA

D.R. COX

Department of Mathematics,
Imperial College, University
of London, UK

D. OAKES

Department of Statistics,
University of Rochester, USA
formerly TUC Centenary Institute
of Occupational Health
London School of Hygiene and
Tropical Medicine, UK

LONDON NEW YORK
CHAPMAN AND HALL

Д.Р.Кокс, Д.Оукс

АНАЛИЗ ДАННЫХ ТИПА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Перевод с английского О. В. СЕЛЕЗНЕВА

Под редакцией и с предисловием
проф. Ю. К. БЕЛЯЕВА



МОСКВА "ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА" 1988

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗА РУБЕЖОМ

Серия основана в 1977 году

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам.
2. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.
3. Клейсен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 1 и 2.
4. Бард И. Целочисленное оценивание параметров.
5. Болч Б. У., Хуань К. Д. Многомерные статистические методы для экономики.
6. Иберла К. Факторный анализ.
7. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии.
8. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях.
9. Пуарье Д. Эконометрия структурных изменений.
10. Драймз Ф. Распределенные лаги.
11. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. Вып. 1 и 2.
12. Бикел П., Доксам К. Математическая статистика. Вып. 1 и 2.
13. Лимер Э. Статистический анализ неэкспериментальных данных.
14. Песаран М., Слейтер Л. Динамическая регрессия: теория и алгоритмы.

15. Дидэ Э. и др. Методы анализа данных.
16. Бартоломью Д. Стохастические модели социальных процессов.
17. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн. 1 и 2.
18. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах.
19. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование. Методы наглядного представления данных.
20. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Мэйндоналд Дж. Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике.

Редколлегия: А. Г. Агаибегян, Ю. П. Адлер, С. А. Айвазян, Ю. Н. Благовещенский, Б. В. Гнеденко, Э. Б. Ершов, Е. М. Четыркин

К $\frac{0702000000-096}{010(01)-88}$ 23-88

ISBN 5-279-00059-0 (рус.)
ISBN 0-412-24490-X (англ.)

© 1984 D. R. Cox and D. Oakes
© Перевод на русский язык, предисловие, дополнительная литература, издательство «Финансы и статистика», 1988

Кокс Д. Р., Оукс Д.
К59 Анализ данных типа времени жизни / Пер. с англ.
О. В. Селезнева. — М: Финансы и статистика, 1988. — 191 с.:
ил. — (Математико-статистические методы за рубежом).
ISBN 5—279—00059—0.

Книга английских ученых является введением в математические методы анализа разнообразных моделей случайных данных, которые можно интерпретировать в терминах времени жизни. В работе обобщены и доступно представлены новые результаты в этой области математической статистики, имеющей широкий спектр приложений: в экономике, социологии, теории надежности.

Для специалистов в области математической статистики и ее приложений, студентов вузов.

К $\frac{076200000-096}{010(01)-88}$ 23—88

ББК 16.2.9

Монография

Кокс Д. Р., Оукс Д.

АНАЛИЗ ДАННЫХ ТИПА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Книга одобрена на объединенном заседании редколлегии серий «Математико-статистические методы за рубежом» и «Библиотечка иностранных книг для экономистов и статистиков» 21.02.86

Зав. редакцией *К. В. Коробов*
Редактор *О. А. Ермилина*
Мл. редактор *Р. И. Кушкина*
Техн. редактор *И. В. Завгородняя*
Худож. редактор *Ю. И. Аргюхов*
Корректоры *Т. М. Коллакова, Н. П. Сперанская,*
М. А. Сиягловская, Е. Ю. Потапкина

ИБ № 2229

Сдано в набор 5.04.88. Подписано в печать 12.07.88.
Формат 60×88^{1/16}. Бум. офсетная № 1. Гарнитура «Литературная».
Печать офсетная. Усл. п. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,76. Уч.-изд. л. 11,78.
Тираж 6700 экз. Заказ 1190. Цена 1 р. 70 к.
Издательство «Финансы и статистика», 101000, Москва,
ул. Чернышевского, 7.
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Черяславская ул., 46.

● ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга дает неформальное введение в задачи и методы существенного для многих приложений раздела статистики, связанного с анализом событий, развивающихся во времени. Статистические данные такого рода типичны для экономики, страхования, медицины, техники, демографии и многих других направлений деятельности людей. Имя крупного английского математика Д. Р. Кокса хорошо известно многим читателям. Это уже седьмая его книга, которая переводится на русский язык в нашей стране.

Основные изучаемые в данной монографии случайные величины называются временами жизни. Однако этот термин надо понимать достаточно широко. Так, в технике временам жизни соответствуют продолжительности безотказной работы устройств. Характерной особенностью реальных данных о продолжительностях жизни является возможная неполнота части данных. Например, при испытании технического устройства наблюдается лишь часть времени жизни, если прекращение наблюдения за этим устройством вызвано причинами, не связанными с отказом. Такие наблюдаемые времена жизни называются цензурированными справа. В простых задачах требуется получить статистические выводы о неизвестной функции распределения продолжительности жизни. Существенно более сложными оказываются задачи, в которых необходимо исследовать влияние различных факторов на продолжительность жизни. Эти факторы называются в книге поясняющими переменными или ковариатами. В 1972 г. один из авторов книги Д. Р. Кокс предложил математическую модель, в рамках которой можно исследовать влияние ковариат на продолжительность жизни. Эта модель, называемая моделью пропорциональных интенсивностей (рисков), а часто также моделью Кокса, широко используется при анализе медико-биологических данных.

Попытки анализировать данные с временами жизни предпринимались давно. Еще в конце XVIII в. известный математик Даниил Бернулли исследовал вопрос об увеличении продолжительности жизни при исключении эпидемий оспы. Позднее обстоятельное исследование продолжительности жизни людей было стимулировано деятельностью страховых компаний. В наше время разнообразные задачи такого типа возникают в связи с потребностями обеспечения надежности технических устройств.

Безусловно, методы анализа статистических данных с временами жизни составляют важный раздел в современном арсенале средств математической статистики. Однако этот раздел пока не включен в учебные пособия по статистике. Поэтому книга Д. Р. Кокса и Д. Оукса «Анализ данных типа времени жизни» впервые позволит советскому читателю получить достаточно широкое представление о путях решения практически значимых задач, содержащих данные о временах жизни.

Монография рассчитана на читателя, имеющего математическую подготовку в объеме программы вуза. Для более глубокого понимания содержания книги, конечно, желательно знание элементов теории вероятностей и математической статистики. Владение математическими методами получают возможность войти в область актуальных научных исследований. В то же время следует отметить, что в работе фактически отсутствуют математические доказательства. Поэтому тем, кому интересен прежде всего результат математической теории, доступен весь материал книги, после изучения которой он более сознательно сможет использовать соответствующие программы при обработке на ЭВМ статистических данных с временами жизни. Такие программы включены в состав некоторых пакетов прикладных программ статистического анализа. Например, в известном пакете BMDP (версия 1983 г.) имеются две такие программы.

Анализ данных с временами жизни продолжает развиваться, пополняясь новыми моделями и методами. В годы, предшествующие написанию книги, на основе теории мартигалов были получены существенные результаты о свойствах непараметрических оценок функций распределений времени жизни. Здесь это продуктивное направление недостаточно отражено. Существенное продвижение было достигнуто в исследованиях аналитических свойств точечных оценок функций распределения времен жизни и других характеристик при неограниченном накоплении данных. Поэтому в русском издании список литературы дополнен рядом публикаций.

При переводе по возможности была использована терминология, принятая в математической теории надежности. Например, термин *survivor function* переводился как функция надежности, *failure time* — как момент отказа или наработка до отказа в зависимости от смыслового содержания текста, *total time at risk* — суммарная наработка. Перечень соответствия таких терминов содержится в предметном указателе.

Анализ данных с временами жизни оформился в важный, быстроразвивающийся раздел прикладной и математической статистики. Потребности практики приводят к постановкам новых задач, многие из которых еще не получили окончательного решения.

Книга Д. Р. Кокса и Д. Оукса, несомненно, будет способствовать развитию этого направления.

Ю. К. Беллев

● ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистический анализ продолжительности жизни имеет долгую историю. Интерес к этой тематике, и особенно к изучению влияния поясняющих переменных, связан главным образом с медицинской статистикой, а также в некоторой степени с задачами испытаний на надежность в промышленности. В действительности же область приложений гораздо шире — сюда входят и физика, и эконометрия. Исходным требованием является наличие неотрицательного отклика с заметной дисперсией и при этом часто цензурированного справа.

Цель настоящей книги — дать сжатый обзор анализа данных типа времени жизни. Она предназначена как для прикладных статистиков, сталкивающихся с задачами такого типа, так и для статистиков, желающих познакомиться с этой областью исследований.

Чтобы сохранить объем книги достаточно небольшим, были опущены описания некоторых специальных методов, связанных с подбором конкретных распределений, а также математически интересный раздел приложения мартингалльной теории к слабой сходимости и строгому обоснованию асимптотической теории. Мы также стойко сопротивлялись искушению распространить обсуждение на статистический анализ точечных процессов, т. е. систем, в которых каждому объекту может соответствовать несколько точечных событий.

Д. Р. Кокс, Д. Оукс

Лондон, март, 1983

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В анализе данных типа времени жизни особый интерес представляют группа или группы объектов (индивидуумов), для каждого из которых определено точечное событие, часто называемое отказом. Отказ происходит после некоторого интервала времени (наработки до отказа) для каждого объекта индивидуума только один раз.

Примерами наработок до отказа могут служить: продолжительность работы механизмов машин в технике; продолжительность забастовок или периодов безработицы в экономике; время, необходимое индивидуумам для выполнения определенных задач в психологических экспериментах; длины треков на фотোগрафической пластине в физике частиц, а также продолжительность жизни больных при клинических исследованиях.

Для точного определения наработки до отказа необходимо выполнить три условия: четко установить начало отсчета времени; выбрать масштаб для измерения отсчета времени и, наконец, точным должно быть само понятие отказа (более подробно об этом см. в 1.2).

Распределения наработок до отказов в одной группе рассматриваются довольно редко. Чаще сравниваются наработки до отказов в двух или более группах. Это делается, например, для того, чтобы определить, являются ли наработки до отказов продолжительнее во второй группе, чем в первой. В других случаях для каждого объекта (индивидуума) группы известны значения некоторых поясняющих переменных, связанных с временем жизни. На время безотказной работы механизмов машины может влиять нагрузка, оказываемая на них или температура воздуха при работе машины. Известно, что количество белых кровяных телец влияет на прогноз при лейкемии. В клинической практике вполне обычна ситуация, когда текущая информация собирается по 100 и более переменным, что неизбежно ставит перед статистиком задачу обобщения воздействия всех этих переменных на время жизни.

Анализ данных типа времени жизни относится скорее к одномерным, чем к многомерным методам анализа, так как даже при наличии поясняющих переменных изучается только переменная отклика одномерного метода — наработка до отказа. Некоторые специальные задачи, связанные с многомерным откликом, обсуждаются в гл. 10.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАРАБОТОК ДО ОТКАЗА

Кратко прокомментируем требования для измерения наработки до отказа.

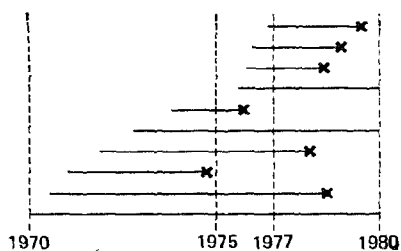
Начало отсчета времени должно быть точно установлено для каждого объекта (индивидуума). Также желательно, чтобы все объекты (индивидуумы), имеющие различающиеся значения вспомогательных переменных в начальный момент времени, были бы сравнимы между собой.

При рандомизированных клинических исследованиях проведение рандомизации удовлетворяет обоим критериям, и поэтому естественно выбрать ее в качестве такого момента. Хотя биологически более значимо было бы измерять время от момента, когда симптомы больного впервые совпали с определенным критерием степени заболевания, но трудность установления и возможность смещения этих величин обычно исключают их применение в качестве начала отсчета времени. Однако такая информация была бы полезной как поясняющая переменная.

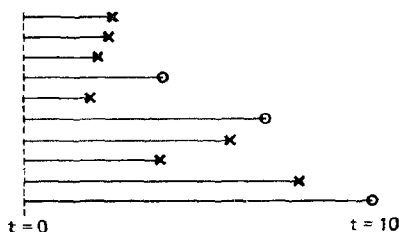
Начало отсчета времени может не совпадать (и, как правило, не совпадает) с календарным временем для каждого объекта (индивидуума). Обычно при клинических обследованиях имеются определенные моменты приема, разделенные по времени, так что больные поступают через значительные промежутки времени. Для каждого больного

его время жизни (наработка до отказа) обычно измеряется от момента его поступления в клинику. На рис. 1.1 иллюстрируются соответствующие расчеты времени.

Анализ программ профилактического обследования для обнаружения рака груди показывает, как трудно выбрать начало отсчета времени. Цель обследования — обнаружение болезни на наиболее ранней стадии ее развития. Даже при отсутствии эффективного лечения продолжительность жизни группы больных после диагноза, установленного по результатам обследования, больше по сравнению с группой больных, у которых болезнь обнаружена без обследования. Такое смещение серь-



а)



б)

Рис. 1.1. Наблюдение десяти индивидуумов с распределенными по временам моментами поступления (до 1980): \times — смерть; \circ — цензурирование; а) календарное время; б) время (t) от начала поступления больного на исследование

езно усложняет любые сопоставления времен жизни в этих двух группах. Возможно, единственный способ оценить степень влияния обследования на сокращение смертности состоит в сопоставлении общего уровня смертности популяции, в которой обследование проводилось, с таким же показателем популяции, для которой никаких программ обследования не проводится.

Началом отсчета времени не всегда считается момент, в который объект начинает изучаться. В таких случаях требуются специальные методы. Например, при эпидемиологических исследованиях влияние на смертность работы, которая непосредственно связана с такими активными веществами, как асбест, естественной мерой времени является возраст, так как именно им в значительной степени определяется смертность. Однако каждый индивидум попадает под наблюдение только тогда, когда начинает заниматься работой, связанной непосредственно с асбестом. Также и при исследованиях надежности в промышленности некоторые механизмы машин могли уже использоваться в течение некоторого времени до начала наблюдения. Такие данные будут считаться в дальнейшем «усеченными слева», а необходимые методы их анализа более детально рассматриваются в гл. 2.

Часто «шкалой» для измерения времени является обычное время (реальное), хотя, несомненно, возникают и другие возможности — использование рабочего времени системы, пробег автомобиля, или некоторая мера, учитывающая накопленную нагрузку. В самом деле, во многих приложениях надежности в технике время, в некотором смысле — наиболее подходящая мера суммарного использования. Однако отказы могут соответствовать, например, обрывам текстильной нити, тогда наработкой до отказа можно было бы считать длину нити до первого обрыва. Имеются интересные приложения геометрических вероятностей, когда под наработкой до отказа понимается длина сегмента прямой, содержащегося в выпуклом теле. Единственное общее условие для всех типов отказов состоит в их неотрицательности.

Одно из оснований для выбора масштаба времени — его непосредственная значимость для исследуемого объекта. Этому требованию удовлетворяет применение реального времени для продолжительности жизни в медицинских задачах. Другое обстоятельство связано с тем, что два объекта (индивидуума), на которые оказывается одинаковое воздействие (остальные показатели предполагаются у них идентичными), должны быть в сходном состоянии после равных промежутков «времени»; это является основанием для использования накопленной нагрузки, встречающейся в технических задачах. Если возможны два или более различных способа измерения времени, то иногда имеет смысл, выбрав наиболее подходящий масштаб времени, применять другие «времена» как значения поясняющих переменных.

Наконец, значение точки наступления события — отказа — должно быть четко определено. В медицинской практике отказом можно считать смерть больного, смерть больного от определенной причины (например,

рак легкого), первое повторное проявление болезни после лечения или случай нового заболевания.

В большинстве приложений определение отказа практически однозначно. В других (например, в ряде технических задач) — отказ вводится как первый момент, когда характеристика работы машины, измеряемая каким-либо количественным способом, падает ниже допустимого уровня, определенного некоторыми техническими условиями. В таком случае возникает нечеткость при установлении отказа и требуется решение вопроса: или сосредоточить основное внимание на наработке до отказа, или проанализировать измерения этой характеристики в целом как функцию времени.

1.3. ЦЕНЗУРИРОВАНИЕ

Особым источником затруднений при анализе данных типа времен жизни является то, что некоторые объекты могут не наблюдаться в течение полного времени до отказа. К завершению эксперимента по проверке долговечности механизмов в задачах на надежность в технике могут отказать еще не все компоненты. Некоторые больные (многие, как хотелось бы надеяться) будут жить к концу клинического исследования. Большой, умерший от болезни сердца, уже не может умереть от рака легкого. Объект, который наблюдался и не имел отказов в течение 10 дней, а затем был выключен из числа наблюдавшихся, имеет наработку до отказа, превышающую 10 дней. Такое неполное наблюдение наработки до отказа называется цензурированием. Заметим, что, как и отказ, цензурирование является точечным событием, а период наблюдения цензурированных объектов должен регистрироваться.

Предположим, что при отсутствии цензурирования i -й объект в выборке объема n имеет наработку до отказа T_i (где T_i — случайная величина). Предположим также, что имеется такой период наблюдения c_i , при котором наблюдение над этим объектом прекращается в момент c_i , если отказ не произойдет раньше. Тогда в действительности наблюдаются величины $X_i = \min(T_i, c_i)$ совместно с индикаторной переменной $V_i = 1$, если $T_i \leq c_i$ (объект нецензурирован), $V_i = 0$, если $T_i > c_i$ (объект цензурирован). Величины c_i для объектов, отказ которых действительно наблюдался, считаются нереализованными моментами цензурирования в противоположность реализованным моментам цензурирования. Термин «потенциальный момент цензурирования» обычно употребляется в том случае, когда c_i рассматриваются независимо от того, произошло ли цензурирование или отказ.

В некоторых приложениях все моменты c_i известны, например, если единственная причина цензурирования состоит в запланированном окончании испытаний через заранее определенный срок. Еще один пример — так называемое цензурирование типа I, при котором все c_i равны, $c_i = c$ (где величина c задается исследователем). При цензурировании типа II наблюдение прекращается после достижения заранее определенного числа отказов d , так что c становится случайной величиной.

Цензурирование типа II — полезный метод экономного использования средств при испытаниях на надежность в технике. Возможны и другие формы так называемого случайного цензурирования. Решающим допущением является то, что при условии заданных значений поясняющих переменных на прогноз отказа для любого объекта, действующего к моменту c_i , не должно влиять, будет ли цензурирован этот объект в момент c_i , т. е. объект, который цензурирован в момент c , является представителем класса объектов с теми же значениями поясняющих переменных, не имеющих отказов к моменту c .

Простейший способ гарантировать это состоит в том, чтобы считать величины c_i в принципе заранее определенными константами (в книге в основном принимается эта точка зрения). Заметим, однако, что часто c_i не будут известны исследователю заблаговременно, а также что нереализованные c_i , соответствующие наблюдаемым отказам, могут и не стать никогда известными. Приведенное выше условие выполняется тогда, когда потенциальные моменты цензурирования c_i — случайные величины, не зависящие от T_i . Цензурирование типа II является примером более общей схемы, в которой, грубо говоря, оно может зависеть от истории прошлого всего процесса, но не его будущего. Такое цензурирование можно назвать эволюционным.

1.4. ДРУГИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Кроме методов, обсуждаемых в настоящей книге, для анализа данных типа времени жизни использовались и другие подходы. Возможно, наиболее простой метод, чаще всего применяемый клиницистами, состоит в дихтомизации результатов в соответствии с выживанием или невыживанием в течение критического периода, например пяти лет. Сравнение пятилетних коэффициентов, равных долям выживших индивидуов в различных группах, может быть произведено на основе методов анализа бинарных данных. Хотя такой подход часто оказывается вполне удовлетворительным, он имеет два главных недостатка. При концентрации внимания на единственной точке кривой выживания обязательно теряется некоторая информация. Более серьезное замечание связано с тем, что вычисление коэффициентов выживаемости как простых отношений непосредственно возможно только в случае, если ни один индивидум не был цензурирован в течение критического периода. Это ограничение может привести в некоторых случаях к абсурдным выводам (см. упр. 1.1).

Вместе с описанными выше дихтомизированными временами жизни и количественными поясняющими переменными, иногда для выявления переменных, которые связаны со временем жизни, использовался дискриминантный анализ, хотя такое его применение лучше рассматривать как подход для бинарной логистической регрессии. Однако дискриминантный анализ может быть полезен при тщательном анализе большого набора переменных для определения нескольких переменных или комбинаций переменных, которые затем будут рассматриваться

при более детальном анализе. Сам по себе дискриминантный анализ пемного дает для понимания способа влияния поясняющих переменных на времена жизни.

Сведение времени жизни к бинарному отклику наиболее полезно, когда оно для каждого индивидуума (объекта) легко классифицируется либо как очень короткое, либо как длинное. Если потенциальные моменты цензурирования зависят от поясняющих переменных, то дискриминантный анализ даст смещенные результаты. Заметим также, что включение действительной наработки до отказа в качестве поясняющей переменной было бы серьезной ошибкой, так как наработка до отказа — часть отклика и не входит в число факторов, влияющих на него.

При отсутствии цензурирования зависимость наработки до отказа от поясняющих переменных может быть исследована с помощью множественной регрессии. Поскольку наработки до отказа никогда не бывают отрицательными и часто имеют сильно асимметричные распределения, то в этих случаях предварительно выполняют такие преобразования данных, как взятие логарифмов от исходных данных или переход к обратным величинам. Логарифмическое преобразование тесно связано с моделью ускоренных испытаний (см. гл. 5). Каждое из этих преобразований может привести к чрезмерному увеличению веса наиболее коротких наработок до отказа, имеющих большие по абсолютной величине отрицательные значения логарифмов и большие положительные обратные величины.

1.5. ПРИМЕРЫ

Опишем теперь основные особенности трех примеров, ссылки на которые будут неоднократно встречаться в этой книге. Некоторые из примеров, и особенно первый, широко использовались в литературе для иллюстрации альтернативных методов исследования.

Пример 1.1. Лейкемия: сравнение двух групп

В табл. 1.1 (Гехан, 1965) содержатся времена ремиссии (т.е. отсутствие симптомов) у больных лейкемией. Для лечения части больных применялось лекарство 6-меркапторин (6-MP), другие — образовали контрольную группу. Назначение лечения было рандомизовано. Отметим большой разброс данных, а также то, что цензурирование часто встречается в группе, проходящей лечение, и отсутствует в контрольной группе. Важно иметь методы анализа, которые эффективны при наличии такого несбалансированного цензурирования. В действительности исследование было спланировано в соответствующих парах следующим образом: один член пары исключался из наблюдения тогда, когда другой выходил из ремиссии. Этот аспект данных будет игнорироваться.

Пример 1.2. Нарботки до отказа и число белых кровяных телец (white blood count — WBC)

В табл. 1.2 для двух групп больных лейкемией приведены наработки до отказа (время до смерти больного) в неделях и число белых кровяных телец (Фейгл и Целен, 1965). Формальное отличие этого примера от

Времена ремиссии (в неделях) больных лейкемией [Гехан (1965)]

Выборка 0 (лекарство 6-МР)	6*	6	6	7	9*	10*	10	11*	13	16	17*	19*	20*	22	23	25*	30*	32*	34*	35*		
Выборка 1 (контрольная)	1	1	2	2	3	4	4	5	5	8	8	8	8	11	11	12	12	12	15	17	22	23

* Индивидуум цензурирован.

Таблица 1.2

Наработки до отказа и число белых кровяных телец [Фейгл и Целен (1965)]

	(AG положительное), N=17		(AG отрицательное), N=16		(AG положительное), N=17		(AG отрицательное), N=16		(AG положительное), N=17		(AG отрицательное), N=16	
	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях	Число белых кровяных телец, WBC	Наработка до отказа, в неделях
2300	65	4400	56	10000	121	10000	3	32000	26	26000	4	26000
750	156	3000	65	17000	4	19000	4	35000	22	21000	3	21000
4300	100	4000	17	5400	39	27000	2	100000	1	79000	30	79000
2600	134	1500	7	7000	143	28000	3	100000	1	100000	4	100000
6000	16	9000	16	9400	56	31000	8	52000	5	100000	43	100000
10500	108	5300	22					100000	65			

Таблица 1.3

Количество циклов до отказа пружин (10^8 циклов в единице)

Напряжение (Н/мм ²)												
950	225	171	198	189	189	135	162	135	117	162	189	162
900	216	162	153	216	225	216	225	216	243	225	243	189
850	324	321	432	252	279	414	396	379	351	379	351	333
800	627	1051	1434	2020	525	402	463	431	365	431	365	715
750	3402	9417	1802	4326	11520*	7152	2969	3012	1580	3012	1580	11211
700	12510*	12505*	3027	12505*	6253	8011	7795	11604*	11604*	11604*	11604*	12470*

* Объект цензурирован.

примера 1.1 состоит частично в наличии непрерывной поясняющей переменной WBC и частично в том, что деление на группы основывается больше на измерении (неконтролируемом) некоторого показателя для каждого индивидуума, чем на рандомизированном назначении лечения.

Пример 1.3. Нарботки до отказа пружин

Табл. 1.3 иллюстрирует данные испытаний пружин на надежность в технике, любезно предоставленные В. Армстронгом. Пружины испытывались циклами с повторяющейся нагрузкой. Нарботка до отказа равняется числу циклов до отказа. За единицу «времени» удобно применять 10^3 циклов. На испытания были поставлены 60 пружин, по 10 на каждой из шести различных уровней нагрузки. На более низких уровнях нагрузки, когда наработка до отказа велика, некоторые пружины цензурятся, т. е. испытание прекращается до отказа.

1.6. СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Некоторые из более простых методов, описанных в этой книге, можно применять к небольшим по объему наборам данных, используя для вычисления программируемый (или даже непрограммируемый) микрокалькулятор. Если в расчетах участвуют большие объемы данных или если рассматриваются более трудоемкие методы анализа, то использование компьютера является необходимым условием для работы статистиков. Написание специальных программ возможно только в незначительном объеме. Следовательно, решающее значение приобретает доступность пакетов программ.

Все характеристики средств вычислений меняются так быстро, что очень детальное их обсуждение мало подходит для подобных книг. Далее приведем несколько замечаний о положении с математическим обеспечением к моменту написания книги.

Пакеты GLIM (версия 4), BMDP и SAS содержат программы для многих видов анализа, описанных в этой книге. Особенности, на которые обычно обращают внимание при выборе программы, являются предоставляемые возможности для проверки модели (например, эмпирические кривые выживаемости, графики остатков и определяемые пользователем ковариаты, зависящие от времени, и та легкость, с которой вспомогательные переменные, взаимодействия и т. п. могут быть включены в модель).

Программа логистической регрессии, написанная П. Г. Смитом (см. Бреслоу и Дей, 1980), может быть использована для подбора модели мультипликативных интенсивностей с зависящими от времени ковариатами для небольших совокупностей данных. Пакет GLIM также может быть применен для подбора некоторых параметрических моделей (см., например, Эйткин и Клейтон (1980) для обсуждения распределения Вейбулла при наличии цензурирования). В общем случае для методов, основанных на функции правдоподобия, требуется программа максимизации функции. Большой набор таких программ (в некоторых из них используются производные максимизируемых функций) можно найти в

пакете NAG. Часть задач могут оказаться плохо обусловленными, особенно при выборе различных параметрических типов распределения времени жизни. Иногда требуются программы для расчета полной и неполной гамма-функции и ее производных (см., например, Мур (1982), Бернардо (1976) и Шнейдер (1978)).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

За последнее время вышло несколько книг по анализу данных типа времени жизни. Книги Мэнн и др. (1974), Гросса и Кларка (1975) и Лоулесса (1982) посвящены полностью параметрическим методам для специальных распределений. В монографии Кэлбфлейша и Прентиса (1980) детально рассматривается модель с мультипликативными интенсивностями. В книге Миллера (1981) описываются непараметрические и полупараметрические методы. Приложения в задачах надежности в промышленности см. в монографиях Барлоу и Прошана (1965, 1975), а также в работах Нельсона (1982) и Де Приест и Лонер (1983). Эландт-Джонсон и Джонсон (1980) описывают приложения в страховании и демографии. Под редакцией Мике и Стэнли (1982) вышел сборник работ по медицинской статистике, в котором содержится обсуждение данных типа времени жизни.

В книге Армитеджа (1959) сравнивается эффективность ряда простых методов, использующих долю больных, выживших к определенному моменту времени. В описательных работах Пето и др. (1976, 1977) рассматриваются приложения некоторых простых методов для анализа клинических исследований. К обзорным работам относятся работы Кэлбфлейша и Прентиса (1979), Лагакоса (1979) и Оукса (1981). Математическую теорию обследования можно найти в работах Пророка (1976), Шахани и Криза (1977) и Целена и Фейнлейба (1969). Обзор больших рандомизированных исследований для выявления рака груди содержится в работе Шапиро (1977). О применении анализа данных типа времени жизни в профессиональной эпидемиологии можно прочесть в работах Лидделла и др. (1977), Дарби и Рейслэнда (1981), Бреслоу и др. (1983).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. а) Пользуясь рис. 1.1, а), найдите моменты цензурирования для всех времен жизни индивидуумов, представленных на рис. 1.1, б). Предполагается, что моменты отказов могут быть цензурированы лишь при завершении исследования.

б) Сокращенная выборочная оценка вероятности того, что время жизни превышает пять лет, равна отношению числа объектов с наблюдаемыми наработками более пяти лет к числу объектов с временами жизни до потенциального цензурирования, превышающими пять лет. Покажите, что эта оценка является несмещенной.

в) Покажите, что для рис. 1.1 сокращенные выборочные оценки вероятностей того, что время жизни превысит три года и пять лет, равны соответственно $6/10$ и $4/6$. Прокомментируйте этот результат.

г) Покажите, что если бы третий индивидуум (см. рис. 1.1, а) начал наблюдаться на два года раньше, но умер бы в тот же момент времени, так что его продолжительность жизни увеличилась бы, то сокращенная выборочная оценка для всей группы индивидуумов стала бы меньше и равнялась бы $4/7$ вместо $4/6$.

1.2. Предположим, что T_1 , T_2 и T_3 независимые, одинаково распределенные случайные величины с непрерывным распределением и соответствующими моментами цензурирования c_1 , c_2 и c_3 . Пусть $Y_i = T_i$, если $T_i \leq c_i$, и $Y_i = \infty$ — в противном случае, так что Y_i можно считать наибольшей возможной величиной T_i , не противоречащей наблюдаемым данным. Пусть $X_i = \min(c_i, T_i)$. Тогда на основе наблюдений известно, что T_1 меньше либо равно T_2 , если и только если $Y_1 \leq X_2$. Покажите, что для любых значений c_1 , c_2 и c_3 :

а) $\text{pr}(Y_1 \leq X_2) = \text{pr}(Y_2 \leq X_1)$;

б) $\text{pr}(Y_1 \leq X_2, X_3) = \text{pr}(Y_2 \leq X_1, X_3) = \text{pr}(Y_3 \leq X_1, X_2)$;

в) $\text{pr}(Y_1, Y_2 \leq X_3) = \text{pr}(Y_1 < Y_3 \leq X_2) + \text{pr}(Y_2 < Y_3 \leq X_1)$.

[Бреслоу (1970)]

1.3. Предположим, что имеются данные для однородной группы больных с отказавшими почками. Все больные сразу ставятся на диализ. Время, с которого они начинают лечение, является началом отсчета для каждого больного. Все пациенты наблюдаются до момента смерти. В зависимости от наличия подходящих донорских почек некоторым больным в ходе курса лечения делают пересадку почек. Требуется сравнить время жизни при диализе и после трансплантации. Дайте качественный критический анализ следующих двух процедур:

а) образуем две группы больных: которым не проводилась трансплантация и которым она была сделана. Сравните два распределения времени от начала лечения до момента смерти, не учитывая момента трансплантации, т. е. время нахождения на диализе больных, перенесших трансплантацию, добавляется к времени жизни после трансплантации;

б) для трансплантированных больных выберем в качестве нового начала отсчета времени момент трансплантации. Затем сравним распределения времени смерти для больных из группы чистого диализа с временем, прошедшим от момента трансплантации до смерти для группы трансплантированных больных.

Рассмотрите другие возможные процедуры, исключаяющие недостатки процедур а) и б). Какие дополнительные трудности могут возникнуть при интерпретации таких данных?

2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе рассматривается однородная популяция объектов (индивидуумов) со своими «наработками до отказа». Иными словами, объект сопоставляется с единственной неотрицательной случайной величиной T . При этом предполагается, что заданы начало отсчета времени и масштаб на оси времени. Рассмотрим сначала общее описание распределения T и затем приведем некоторые наиболее часто используемые конкретные распределения.

Определим функцию надежности (выживания), соответствующую T , как

$$F_T(t) = \text{pr}(T \geq t), \quad (2.1)$$

опуская индекс T , если из контекста ясно, какая случайная величина подразумевается. В основном будут исследоваться непрерывные распределения, имеющие плотность вероятности

$$f_T(t) = -F_T'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{\text{pr}(t \leq T < t + \Delta)}{\Delta}, \quad (2.2)$$

и тогда

$$F_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(u) du.$$

Обычно для дискретных и смешанных дискретно-непрерывных распределений формально добавляется к плотности вероятности компонента $f_j \delta(t - a_j)$, соответствующая атому f_j в точке a_j , где $\delta(\cdot)$ обозначает дельта-функцию Дирака. В общем случае вероятность того, что наработка (время жизни) окажется больше t , определяется как правосторонний предел $F(t - 0)$. Заметим, что нестандартное соглашение, принятое в определении (2.1), приводит к непрерывности слева функции распределения в отличие от обычно требуемой непрерывности справа. Сделано это с целью упрощения встречающихся в дальнейшем формул, которые содержат функцию интенсивности.

Специальные виды распределений оказываются полезными либо когда их применение теоретически обосновано, либо когда для них существуют легко приспособляемые универсальные эмпирические представления, допускающие достаточно простой статистический анализ.

2.2. ФУНКЦИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

Функции $F_T(\cdot)$ и $f_T(\cdot)$ позволяют описывать распределение непрерывной неотрицательной случайной величины двумя математически эквивалентными способами. Конечно, существуют и другие соответствующие им в этом смысле функции. Одна из них, имеющая особое значение в дальнейшем, — функция интенсивности (отказа), зависящая от времени и определяемая соотношением

$$h_T(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{P(t \leq T < t + \Delta \mid t \leq T)}{\Delta}. \quad (2.3)$$

Из определения условной вероятности, опуская индекс T , получаем

$$h(t) = f(t)/F(t). \quad (2.4)$$

Если распределение имеет атом f_j в момент времени a_j , то функция $h(t)$ содержит компоненту $h_j \delta(t - a_j)$, где

$$h_j = f_j/F(a_j). \quad (2.5)$$

Тогда для полностью дискретного распределения с атомами $\{f_j\}$ в точках $\{a_j\}$, $a_1 < a_2 < \dots$ получаем

$$h(t) = \sum h_j \delta(t - a_j),$$

где

$$h_j = f_j/F(a_j) = f_j/(f_j + f_{j+1} + \dots). \quad (2.6)$$

Для непрерывных распределений из (2.4) и (2.2) следует, что

$$h(t) = -F'(t)/F(t) = -d \log F(t)/dt,$$

отсюда, учитывая условие $F(0) = 1$,

$$F(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right) = \exp[-H(t)], \quad (2.7)$$

где $H(t) = \int_0^t h(u) du$ называется функцией риска (integrated hazard).

Исходя из этого получаем

$$f(t) = h(t) \exp[-H(t)]. \quad (2.8)$$

Функция распределения будет экспоненциальной тогда и только тогда, когда функция $h(\cdot)$ — постоянна и равна некоторому значению ρ . В этом случае

$$F(t) = e^{-\rho t}, \quad f(t) = \rho e^{-\rho t}. \quad (2.9)$$

Для дискретных распределений, применяя последовательно соотношение (2.6) или непосредственно используя формулу произведения вероятностей, получаем, что

$$F(t) = \prod_{a_j < t} (1 - h_j). \quad (2.10)$$

Таким образом, для выполнения события $T \geq t$ необходимо и достаточно, чтобы до момента t не наступило отказа ни в одной из точек носителя функции $F(t)$.

Для дискретного распределения удобнее всего задать функцию риска в следующем виде:

$$H(t) = - \sum_{a_j < t} \log(1 - h_j), \quad (2.11)$$

что сохраняет соотношение (2.7), и тогда

$$F(t) = \exp[-H(t)].$$

Если величины h_j малы, то

$$H(t) \simeq \sum_{a_j < t} h_j \quad (2.12)$$

и правая часть равенства может быть использована как еще одно определение функции риска. Для смешанных дискретно-непрерывных распределений запишем

$$F(t) = P_0^t [1 - h(u) du],$$

где так называемый множительный интеграл в правой части определяется аналогично интегралу Римана. Разобьем интервал $[0, t]$ на большое число интервалов $[0 = x_0, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_{n-1}, t = x_n]$. Возьмем $\xi_j \in [x_j, x_{j+1})$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, $\max(x_{j+1} - x_j) \rightarrow 0$ в выражении

$$\prod [1 - h(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)],$$

где положим множитель $h(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$, равным h_h , если интервал $[x_j, x_{j+1})$ содержит точку носителя a_h .

Изучение функции интенсивности является важным по многим причинам:

(i) физическая наглядность мгновенного «риска», соответствующего отдельному объекту, работающему в момент времени t ;

(ii) различия между группами объектов иногда бывают более контрастны, если использовать функцию интенсивности;

(iii) модели, построенные с помощью функции интенсивности, часто оказываются удобными в случаях цензурирования или нескольких типов отказов;

(iv) особенно просто сравнение всех распределений с экспоненциальными в терминах функции интенсивности;

(v) функция интенсивности отказа совпадает с полной функцией интенсивности для общих точечных процессов в случае систем «с одним отказом». В таких процессах каждому объекту соответствует несколько точечных событий.

2.3. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим основные характеристики некоторых специальных распределений, полезных при исследовании данных типа времени жизни. Наиболее простые аналитические выражения этого раздела собраны в табл. 2.1. Конечно, в качестве таких распределений может быть взято произвольное распределение, сосредоточенное на неотрицательной полуоси. Более того, любое распределение, носитель которого содержит и отрицательные значения, может быть использовано как распределение для $\log T$.

Все рассматриваемые ниже распределения являются непрерывными. Их можно классифицировать различными способами, например, по отношению к экспоненциальному распределению. В частности, эти распределения могут иметь больший или меньший разброс относительно экспоненциального.

Обычно неизвестные параметры обозначаются греческими буквами. Например, ρ всегда измеряется в единицах, обратных ко времени, и обозначает интенсивность; величины k и τ — безразмерные параметры. Однако точная интерпретация параметров ρ , k и τ отличается для различных семейств.

(i) Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение с параметром ρ и средним $1/\rho$ имеет характеристики:

$$F(t) = e^{-\rho t}, \quad f(t) = \rho e^{-\rho t}, \quad h(t) = \rho, \quad H(t) = \rho t.$$

Постоянная интенсивность отражает свойство экспоненциального распределения, названное отсутствием последствия, т. е. при любом $t_0 > 0$ условное распределение $T - t_0$ при условии, что $T > t_0$, совпадает с безусловным распределением T .

Коэффициент вариации, т. е. отношение стандартного отклонения к среднему, равен 1, и его можно использовать в качестве показателя относительного разброса.

Экспоненциальное распределение широко применялось в ранних работах по надежности, например электронных элементов, и в гораздо меньшей степени в медицинских исследованиях. В связи с тем, что это распределение определяется только одним параметром, основанные на нем методы часто оказываются чувствительными даже к незначительным отклонениям «хвоста» распределения. Большое внимание в более поздних работах уделяется методам с менее ограничительными предположениями относительно формы распределения. К экспоненциальному распределению приводят различные идеализированные модели. Предположим, что экстремальные «нагрузки» возникают в некоторой среде как события пуассоновского процесса и отказ происходит в первый же момент появления такой «нагрузки». Или, допустим, что имеется много независимых типов отказов, а наблюдаемый момент отказа есть минимальное значение из большого числа независимых неотрицательных слу-

Свойства некоторых специальных распределений

Семейства распределений	Функция надежности	Плотность	Функция интенсивности	Число параметров
(i) экспоненциальное	$e^{-\rho t}$	$\frac{\rho e^{-\rho t}}{\Gamma(k)}$	ρ	1
(ii) гамма	неполная гамма-функция	$\frac{\rho(\rho t)^{k-1} e^{-\rho t}}{\Gamma(k)}$	—	2
(iii) Вейбулла	$\exp[-(\rho t)^k]$	$k\rho(\rho t)^{k-1} \exp[-(\rho t)^k]$	$k\rho(\rho t)^{k-1}$	2
(iv) Гомперца — Макегана	$\frac{(k_1/\rho_0)^k}{(k_1/\rho_0)^k + 1}$	$\frac{k(k\rho_0)^k}{(t - k/\rho_0)^{k+1}}$	$\rho_0 + \rho_1 e^{\rho_2 t}$	3
(v) сложное экспоненциальное	$\frac{(k_1/\rho_0)^k}{(k_1/\rho_0)^k + 1}$	$\frac{k(k\rho_0)^k}{(t - k/\rho_0)^{k+1}}$	$\frac{k}{t + k/\rho_0}$	2
(vi) ортогональное полиномиальное	$e^{-\rho t} [1 + k_1 \rho t + k_2 \rho t \times (\rho t - 2)]^{-1}$	$\rho e^{-\rho t} [1 + k_1 L_1(\rho t) - k_2 L_2(\rho t)]^{-1}$	—	2
(vii) логарифмически нормальное	—	—	нemoнoтoннaя	2
(viii) логарифмически логистическое	$[1 + (\rho t)^k]^{-1}$	$k\rho^k t^{k-1} [1 + (\rho t)^k]^{-2}$	$\frac{k t^{k-1} \rho^k}{[1 + (t\rho)^k]}$	2
(ix) обобщенное	—	—	—	4
(x) обратное гауссовское	—	—	—	2
(xi) с параметром сдвига	—	—	—	1 дополнительный для начала отсчета
(xii) с параметром масштаба	$G(\rho t)$	$\rho g(\rho t)$	$\rho h^{(g)}(\rho t)$	1 дополнительный для параметра масштаба
(xiii) с пропорциональными интенсивностями	$[L(t)]^\Psi$	$\Psi [L(t)]^{\Psi-1} l(t)$	$\Psi h^{(l)}(t)$	1 дополнительный для параметра пропорциональности

чайных величин. Тогда при соответствующих условиях на эти случайные величины распределение наблюдаемого момента отказа является приближенно экспоненциальным.

Отметим, что из соотношения (2.7) вытекает следующее свойство: если случайная величина T имеет произвольное непрерывное распределение, то случайная величина $H(T)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром, равным 1 (единичное экспоненциальное распределение).

Далее будет рассмотрено несколько двухпараметрических семейств, сводящихся к экспоненциальному семейству распределений при подходящем выборе одного из параметров.

(ii) Гамма-распределение

Семейство гамма-распределений имеет плотность

$$\rho(\rho t)^{k-1} e^{-\rho t} / \Gamma(k), \quad (2.13)$$

где добавочный параметр k ($k > 0$) часто называют параметром формы. Среднее значение и коэффициент вариации равны соответственно k/ρ и $1/\sqrt{k}$. Хотя для многих статистических задач семейство гамма-распределений является одним из наиболее важных среди семейств непрерывных распределений, сосредоточенных на неотрицательной полуоси, в рассматриваемых задачах возможности его применения ограничены относительной сложностью функции надежности, выражаемой неполным гамма-интегралом.

Специальный случай при $k = 2$ называется двухударной моделью, так как он соответствует распределению момента второго события в пуассоновском процессе с интенсивностью ρ . Аналогичную интерпретацию имеют и другие положительные значения k .

(iii) Распределение Вейбулла¹

Распределение Вейбулла с параметром масштаба ρ и индексом k имеет характеристики:

$$\begin{aligned} F(t) &= \exp[-(\rho t)^k], & f(t) &= k\rho(\rho t)^{k-1} \exp[-(\rho t)^k], & (2.14) \\ h(t) &= k\rho(\rho t)^{k-1}. \end{aligned}$$

Распределение случайной величины T^k является экспоненциальным с параметром ρ^k , что следует из соотношения $H(t) = (\rho t)^k$.

Распределение Вейбулла возникает как предельный закон распределения для минимума из большого числа независимых неотрицательных случайных величин. Таким образом обобщается уже отмеченный результат для экспоненциального распределения (см. упр. 2.7). Простой вид функций в соотношениях (2.14) при распределении Вейбулла удобен при решении практических задач.

¹ В литературе на русском языке это распределение часто называют распределением Вейбулла — Гнеденко. — *Примеч. ред.*

(iv) *Распределение Гомперца — Макегамы*

Функция интенсивности имеет вид

$$\rho_0 + \rho_1 e^{\rho_2 t}, \quad (2.15)$$

распределение Гомперца получается как частный случай при $\rho_0 = 0$. Соответствующие функции надежности и плотности распределения можно получить из соотношений (2.7) и (2.8).

(v) *Сложное экспоненциальное распределение*

Предположим, что время жизни каждого объекта (индивидуума) имеет экспоненциальное распределение, но параметр интенсивности принимает случайные значения для каждого объекта. Чтобы описать эту модель, введем некоторую случайную величину P с плотностью $f_P(\cdot)$ и допустим, что условная плотность T при $P = \rho$ имеет следующий вид:

$$f_{T/P}(t/\rho) = \rho e^{-\rho t}.$$

Тогда безусловную плотность T можно записать как

$$f_T(t) = \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho t} f_P(\rho) d\rho.$$

В качестве плотности $f_P(\cdot)$ удобно выбрать плотность гамма-распределения со средним ρ_0 и параметром формы k :

$$f_P(\rho) = \frac{(k/\rho_0) (k\rho/\rho_0)^{k-1} e^{-k\rho/\rho_0}}{\Gamma(k)},$$

что приводит к распределению Парето

$$f_T(t) = \frac{k (k/\rho_0)^k}{(t + k/\rho_0)^{k+1}}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что функции надежности и интенсивности равны соответственно

$$\frac{(k/\rho_0)^k}{(t + k/\rho_0)^k}, \quad \frac{k}{(t + k/\rho_0)}.$$

Как следует непосредственно из способа построения этого распределения, его дисперсия превышает дисперсию того предельного экспоненциального распределения, к которому оно сходится, при $k \rightarrow \infty$. При малых значениях k у распределения (2.16) будет длинный хвост, r -й момент существует только для $k > r$.

(vi) *Разложение распределений по ортогональным многочленам*

Один из способов представления распределений, близких к некоторому специальному простому распределению, состоит в разложении их по ортогональным многочленам, соответствующим этому виду. Такими ортогональными многочленами для экспоненциального распределения

являются многочлены Лагерра. В наиболее простое полиномиальное выражение входят только многочлены первой и второй степени:

$$L_1(x) = x - 1, \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Для плотности этого распределения получаем

$$\rho e^{-\rho t} [1 + k_1 L_1(\rho t) + k_2 L_2(\rho t)]. \quad (2.17)$$

Среднее значение и дисперсия распределения равны в этом случае соответственно $(1 + k_1)/\rho$ и $(1 + 2k_1 - k_1^2 + 4k_2)/\rho^2$.

Можно рассматривать соотношение (2.17) и просто как смесь экспоненциального и гамма-распределений с параметрами формы $k = 2, 3$ и неизменяющимся параметром интенсивности ρ . Рассмотренное разложение в основном имеет теоретическое значение; в случае, когда предельное распределение в задаче является экспоненциальным, асимптотическое разложение вида (2.17) часто оказывается полезным.

(vii) Логарифмически нормальное распределение

Как отмечалось ранее, можно получить распределения для случайной величины T , задавая для $\log T$ некоторое подходящее семейство распределений, сосредоточенное на всей действительной прямой. Простейший способ — считать $\log T$ нормально распределенным со средним значением $\log \rho^{-1}$ и дисперсией τ^2 , что приводит к логарифмически нормальному семейству распределений для T с плотностью

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left(-\frac{[\log(\rho t)]^2}{2\tau^2}\right). \quad (2.18)$$

Экспоненциальное распределение не входит в это семейство, несмотря на то, что при $\tau \simeq 0,8$ требуется значительное количество данных, чтобы различить соответствующее логарифмически нормальное распределение от экспоненциального.

Функция интенсивности, соответствующая (2.18), не монотонна, хотя наличие максимума в области, где сосредоточена существенная часть вероятности, зависит от значения параметра τ .

Недостатком данного распределения для некоторых задач является «чувствительность» методов статистического анализа, основанных на этом распределении, к небольшим наработкам до отказа.

(viii) Логарифмически логистическое распределение

Непрерывное логистическое распределение вероятностей с параметрами сдвига v и масштаба τ имеет плотность вида

$$\frac{\tau^{-1} \exp[(x-v)/\tau]}{[1 + \exp[(x-v)/\tau]]^2}.$$

Свойства этого распределения во многом подобны свойствам нормального распределения. Если полученную плотность принять в качестве плотности $\log T$, то аналогично логарифмически нормальному семейству

ву получаем логарифмически логистическое семейство. Введем следующие обозначения: $v = -\log \rho$, $k = 1/\tau$. Тогда функцию надежности, плотность и функцию интенсивности можно записать соответственно как

$$F(t) = \frac{1}{1 + \exp[(\log t - v)/\tau]} = \frac{1}{1 + (t\rho)^k}; \quad (2.19)$$

$$f(t) = \frac{kt^{k-1}\rho^k}{[1 + (t\rho)^k]^2};$$

$$h(t) = \frac{kt^{k-1}\rho^k}{1 + (t\rho)^k}. \quad (2.20)$$

Преимущество этого семейства по сравнению с логарифмически нормальным заключается в относительно простых явных представлениях для $F(t)$, $f(t)$ и $h(t)$. Если $k > 1$, то функция интенсивности имеет единственный максимум; если $k < 1$, то она убывает.

Для существования r -го момента необходимо, чтобы $k > r$.

(ix) Составное семейство распределений

Очевидны технические преимущества, возникающие от объединения различных семейств распределений в одно составное семейство. В принципе такое семейство всегда может быть построено, и даже несколькими способами, но результат может оказаться слишком сложным для применений. Иногда полезным общим семейством в нашем случае оказывается семейство, которое получается, если положить T пропорциональным k_1 -й степени случайной величины $F_{(k_1, k_2)}$, имеющей стандартное (центральное) F -распределение с (k_2, k_3) степенями свободы. Тогда

$$T = \rho^{-1} F_{(k_2, k_3)}^{k_1}. \quad (2.21)$$

При $k_3 \rightarrow \infty$ получаем обобщенное трехпараметрическое гамма-распределение. Подходящим выбором безразмерных параметров (k_1, k_2, k_3) могут быть получены многие из рассмотренных выше семейств. Уравнение (2.21) можно записать в более простой форме, если перейти к $\log T$.

(x) Обратное гауссовское распределение

В одной из приближенных стохастических моделей отказ рассматривается как момент первого достижения некоторым случайным процессом, описывающим «износ», фиксированной границы. Если таким процессом оказывается броуновское движение с положительным сносом v и дисперсией на единицу времени σ^2 , то момент первого выхода за уровень a имеет обратное гауссовское распределение с плотностью

$$\frac{a}{\sigma(2\pi t^3)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(a-vt)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (2.22)$$

Это выражение с другими параметрами можно записать как

$$\left(\frac{k/\rho}{2\pi t^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{k\rho(t-1/\rho)^2}{2t}\right),$$

со средним значением $1/\rho$ и коэффициентом вариации $1/\sqrt{k}$, или в виде

$$\left(\frac{\Psi}{\pi t^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\varphi t - \frac{\Psi}{2} + 2\sqrt{\varphi\Psi}\right),$$

выделяя экспоненциальную структуру этого распределения.

Функция надежности имеет относительно сложный вид

$$1 - \Phi\left[\left(\frac{k}{\rho t}\right)^{1/2}(-1 + \rho t)\right] - e^{2k} \Phi\left[-\left(\frac{k}{\rho t}\right)^{1/2}(1 + \rho t)\right], \quad (2.23)$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартный нормальный интеграл. Хотя свойства обратного гауссовского распределения привлекательны в теоретическом смысле и оно образует довольно универсальное двухпараметрическое семейство, сложный вид функции надежности делает его несколько неудобным для обработки цензурированных данных.

(xi) Семейство распределений с параметром сдвига

Все рассмотренные выше семейства распределений имели носители, расположенные на положительной полуоси. С помощью дополнительного параметра δ и сдвига соответствующих распределений на δ эти семейства могут быть преобразованы в распределения, сосредоточенные на (δ, ∞) . Например, сдвинутое экспоненциальное семейство имеет плотность

$$\rho e^{-\rho(t-\delta)} \quad (t > \delta).$$

Обычно требуется, чтобы $\delta \geq 0$, хотя в некотором контексте может предполагаться, что функция распределения принимает ненулевые значения до формального начала отсчета времени, используемого для определения случайной величины T .

(xii) Семейство распределений с параметром масштаба

Для некоторых из перечисленных семейств случайная величина ρT имеет фиксированное распределение или по крайней мере распределение, зависящее только от безразмерных параметров формы. Так, для экспоненциального семейства случайная величина ρT обладает плотностью с единичной интенсивностью e^{-t} . Если через $\mathbf{G}(t)$, $g(t)$ и $h^{(g)}(t)$ обозначить соответственно функцию надежности, плотность и функцию интенсивности для неотрицательных значений t , то соответствующие функции

$$\mathbf{G}(t, \rho) = \mathbf{G}(\rho t);$$

$$g(t, \rho) = \rho g(\rho t); \quad h^{(g)}(t, \rho) = \rho h^{(g)}(\rho t) \quad (2.24)$$

определяют семейство с параметром масштаба, порожденное функцией $G(\cdot)$.

Например, в случае гамма-распределения $G(\cdot)$ зависит также от k .

Заметим, что если $U = e^Z = \rho T$ является случайной величиной с плотностью $g(\cdot)$, то

$$\log T = -\log \rho + Z, \quad (2.25)$$

что соответствует некоторой регрессионной модели.

(xiii) Семейство распределений Лемана

Функция надежности, плотность и функция интенсивности, обозначенные соответственно $L(t)$, $l(t)$ и $h^{(l)}(t)$, порождают еще одно полезное общее семейство:

$$\begin{aligned} L(t; \psi) &= [L(t)]^\psi; \\ l(t; \psi) &= \psi [L(t)]^{\psi-1} l(t), \quad h^{(l)}(t; \psi) = \psi h^{(l)}(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Это семейство называется семейством распределений Лемана или семейством с пропорциональными интенсивностями, построенным по $L(t)$.

Семейства (2.24) и (2.26) эквивалентны тогда и только тогда, когда $h(t) \propto t^\gamma$ для некоторого γ , так что каждое из них является в этом случае распределением Вейбулла (см. 5.3 (ii)).

(xiv) Качественные аналитические ограничения

Семейство распределений можно построить, также ограничивая класс распределений качественными аналитическими требованиями. Например, можно потребовать, чтобы функция интенсивности была убывающей, и получить так называемое семейство распределений с возрастающей функцией интенсивности (ВФИ). Аналогичное семейство с убывающей функцией интенсивности (УФИ) имеет менее важное значение для приложений.

2.4. СРАВНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Семейства, рассмотренные выше, могут оцениваться с различных точек зрения:

- (i) техническое удобство для статистических выводов;
- (ii) наличие явных, достаточно простых выражений для функции надежности, плотности и функции интенсивности;
- (iii) возможность представления распределений как с большим, так и с меньшим разбросом по отношению к экспоненциальному распределению;
- (iv) качественные свойства (монотонность, логарифмическая выпуклость и т. д.) функции интенсивности;

¹ Функция $f(t) \propto g(t)$, если $f(t) = cg(t)$ для некоторой постоянной c , $c > 0$. — Примеч. пер.

(v) поведение функции надежности при малых значениях времени;
(vi) поведение функции надежности при больших значениях времени, что оценивается либо непосредственно, либо с помощью подходящих безразмерных отношений семинвариантов или моментов;

(vii) любая связь со специальной стохастической моделью отказов.

В табл. 2.2 приведены в сжатой форме некоторые из этих свойств. Во многих приложениях недостаточно данных для выбора одного из различных типов распределения на основе эмпирического анализа, и тогда вполне законно попытаться сделать такой выбор из соображений удобства¹; пункты (i) и (ii) тесно связаны, особенно когда анализируются цензурированные данные. Для некоторых технических приложений поведение функции распределения при малых значениях t может оказаться критическим. Так будет, когда в общее время включаются и гарантийные сроки. Однако для большинства медицинских приложений гораздо больший интерес представляет поведение функции распределения при больших t , что связано с относительно длительными временами жизни.

Существует несколько способов сравнения различных семейств для обнаружения разницы между ними и для использования их как основы эмпирического анализа. В целом непосредственное исследование плотностей не очень эффективно. Поэтому остановимся в основном на анализе графического изображения и табулировании:

а) график функции интенсивности или логарифма функции интенсивности относительно t или $\log t$;

б) график функции риска или функции надежности, или некоторых их преобразований относительно t или $\log t$;

в) график значения коэффициента вариации $\gamma = \sigma/\mu$;

г) график нормированного третьего момента $\gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$ относительно коэффициента вариации $\gamma = \sigma/\mu$, где μ , σ и μ_3 — среднее значение, стандартное отклонение и центральный третий момент случайной величины T соответственно.

Свойства, основанные на функциях интенсивности и риска, приводят непосредственно к методам анализа данных, которые применимы и при наличии цензурирования. Преимущество функции надежности или ее логарифма состоит в том, что они непосредственно показывают поведение распределения при больших значениях t и позволяют получить довольно «гладкий» график для эмпирических данных. Преимущество функции интенсивности состоит в том, что ошибки являются независимыми для различных точек на эмпирических графиках, что, как следствие, приводит к меньшей «гладкости» этих графиков по сравнению с функцией риска. Рекомендуется для графиков функции интенсивности откладывать по оси абсцисс не только t или некоторую функцию от t , а саму функцию надежности $F(t)$, определяя тем самым области на графике, представляющие наибольший интерес.

¹ Это, конечно, не освобождает от необходимости проверки соответствия с реальными данными. — *Примеч. ред.*

Свойства, применяемые при определении вида распределения

$\log h(t)$ постоянный? Экспоненциальное распределение	$H(t)$ линейна по t ? Экспоненциальное распределение	—	Коэффициент вариации $k=1$? Экспоненциальное распределение
$\log h(t)$ линейен по t ? Распределение Гомперца ($\rho_0=0$)	—	$\log H(t)$ линейен по t ? Распределение Гомперца ($\rho_0=0$)	Распределение гамма ($k>1$) и Вейбулла ($k>1$) Логарифмически нормальное распределение ($\tau<0,83$) Логарифмически логнстическое распределение ($\tau<0,118$)
$\log h(t)$ линейен по $\log t$? Распределение Вейбулла	—	$\log H(t)$ линейен по $\log t$? Распределение Вейбулла	—
$\log h(t)$ не монотонен? Логарифмически нормальное распределение Логарифмически логистическое распределение	—	$\log H(t)$ асимптотически линейен по t ? Распределение с экспоненциальным хвостом	$k>1$? Распределения гамма ($k<1$) и Вейбулла ($k<1$) Логарифмически нормальное распределение ($\tau>0,83$) Логарифмически логистическое распределение ($\tau>0,118$) Сложное экспоненциальное распределение

Если значение коэффициента вариации меньше единицы, то сразу же исключаются распределения, у которых разброс относительно экспоненциального распределения всегда больше.

График отношений моментов (τ) особенно полезен для семейства с параметром масштаба (см. 2.3 (xii)), у которого единственным неизвестным является параметр формы. Безразмерные отношения не зависят от ρ , и семейство распределения полностью характеризуется некоторой кривой. На рис. 2.1 показаны кривые для распределений гамма, Вейбулла, логарифмически нормального и логарифмически логистического. Большое значение коэффициента μ_3/σ^3 указывает на относительно длинный хвост распределения.

Для распределений с длинным хвостом третий момент оценивается с большой выборочной ошибкой, и, возможно, было бы лучше из-за этого

рассматривать графики нормированных центральных моментов, например, порядка $3/2$ или $1/2$. Обозначив $E(T^r) = \mu'_r$, можно изобразить график $\mu'_{3/2}/\sigma^{3/2}$ относительно σ/μ или $\mu'_{1/2}/\sigma^{1/2}$ относительно σ/μ ; чтобы выделить левый хвост распределения, можно рассмотреть график $\mu'_{-1/2}/\sigma^{1/2}$. Относительная чувствительность этих и многих других

подобных графиков пока остается неизученной.

Подобные количественные характеристики для выбора подходящей математической модели могут быть вычислены и для $\log T$. Для цензурированных данных наиболее полезный метод сравнения распределений основан на функции интенсивности или ее логарифме, поскольку в этом случае моменты могут быть вычислены только при сильных допущениях. Боэг (1949) предложил три варианта данных о раковых заболеваниях и показал, что логарифмически нормальное распределение описывает их несколько лучше, чем экспоненциальное. Данные сгруппированы, и цензурирование объектов практически отсутствует. Тем не менее коэффициент вариации и нормированный третий момент могут быть оценены в случае, если добавить к выборке экстраполированные значения для цензурированных наблюдений. Полученные результаты изображены на рис. 2.1

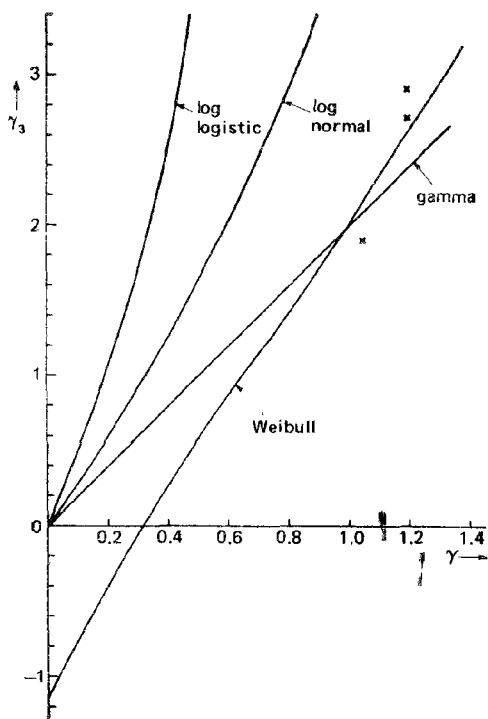


Рис. 2.1. Нормированный третий момент γ_3 относительно коэффициента вариации γ для гамма-, Вейбулла, логарифмически нормального, логарифмически логистического семейств. Экспоненциальное семейство соответствует точке 1.2 (данные по больным раком взяты из работы Боэга, 1949)

и расположены достаточно близко к кривой Вейбулла, с большим наклоном, чем гамма-распределение, и меньшим наклоном, чем логарифмически нормальное.

Наконец, напомним, как отмечалось в 2.3 (i), что одна из интерпретаций функции риска $H(\cdot)$ состоит в том, что $H(T)$ имеет единичное экспоненциальное распределение, т. е. $H(\cdot)$ определяет необходимое преобразование.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Функция интенсивности для описания распределения случайных величин типа времени жизни освещалась и ранее в литературе по страхованию. В работе Эландт-Джонсона и Джонсона (1980) представлены расчеты, связанные с данными типа времени жизни, большое внимание при этом уделяется страховым методам. Гросс и Кларк (1975), а также Лоулесс (1982) приводят расчеты, предназначенные главным образом для проверки типа специальных распределений.

По-видимому, экспоненциальное распределение впервые было исследовано в связи с кинетической теорией газов (Клаузиус, 1858). Оно занимает ведущее место среди других распределений и является одним из основных в теории точечных процессов (Кокс и Ишам, 1980; Кокс и Льюис, 1966). Распределение Вейбулла впервые упоминалось в работе Фишера и Тишетта (1928) в связи с распределениями экстремумов¹. Вейбулл (1939 а, б) изучал это распределение при исследовании сопротивления материалов. Остальные распределения весьма широко применяются в прочих статистических контекстах. Дополнительные сведения об обобщенном F -распределении можно найти в монографии Кэлбфлейша и Прентиса (1980, с. 28). В работах Фолкса, Шикара (1978) и Йоргенсена (1982) дается обзор свойств обратного гауссовского распределения. Джонсон и Котц (1970) описали свойства непрерывных функций распределений одной переменной. Ваупель и др. (1979) и Хугард (1984) исследовали неоднородность индивидуумов с помощью понятия недолговечности.

Количественный анализ распределений, характеризуемых некоторым описательным свойством функции интенсивности, содержится в монографии Барлоу и Прошана (1975).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Пусть непрерывная случайная величина T с помощью группировки отдельных значений преобразована в дискретную случайную величину. Предположим, что интервалы $[t - a, t)$, $[t, t + a)$ образуют значения двух смежных групп. Исследуйте, как лучше использовать значения функции надежности $F(t - a)$, $F(t)$ и $F(t + a)$, чтобы определить соответствующую непрерывную функцию интенсивности $h(t)$ в точке t .

2.2. Пусть T_1, \dots, T_n — независимые непрерывные неотрицательные случайные величины с функциями интенсивности $h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot)$. Докажите, что случайная величина $T = \min(T_1, \dots, T_n)$ имеет функцию интенсивности, равную $\sum h_j(t)$.

¹ Б. В. Гнеденко (см.: Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire/Ann. Math. 44, 1943, p. 423—453) исследовал все возможные типы предельных распределений экстремумов последовательности независимых случайных величин. — *Примеч. ред.*

2.3. Пусть T_1, \dots, T_n — независимые случайные величины с функцией распределения Вейбулла с параметрами интенсивности ρ_1, \dots, ρ_n и общим параметром формы k . Докажите, что случайная величина $T = \min(T_1, \dots, T_n)$ также имеет распределение Вейбулла с параметром формы k .

2.4. Предположим, что в сложном экспоненциальном распределении интенсивность задана некоторой случайной величиной P . Докажите, что

$$E(T) = E(1/P),$$

$$\text{var}(T) = 2E(1/P^2) - [E(1/P)]^2.$$

Проверьте результаты для случая, когда P имеет гамма-распределение.

2.5. Докажите, что частные случаи обобщенного F -распределения (см. 2.3 (ix)) могут быть получены следующим выбором параметров: $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 \rightarrow \infty$ — экспоненциальное; $k_1 = 1, k_2$ — произвольное; $k_3 \rightarrow \infty$ — гамма; k_1 — произвольное; $k_2 = 2, k_3 \rightarrow \infty$ — Вейбулла; k_2, k_3 — логарифмически нормальное; k_1 — произвольное; $k_2 = k_3 = 2$ — логарифмически логистическое. В последних двух случаях исследуйте производящие функции.

2.6. Докажите, что для сложного экспоненциального распределения (см. 2.3 (v)) и плотность, и функция надежности строго монотонны при любой плотности априорного распределения. Приведите некоторые следствия этого утверждения.

[Уиддер (1946, гл. 4)]

2.7. Предположим, что V_1, \dots, V_m — независимые одинаково распределенные непрерывные неотрицательные случайные величины, такие, что при $v \rightarrow 0$, плотность и функция надежности асимптотически эквивалентны соответственно av^{k-1} и $1 - av^k/k$, где $a > 0$ и $k > 0$. Докажите, что при $m \rightarrow \infty$ случайные величины $W = \min(V_1, \dots, V_m)$ и $T = (a/k)^{1/k} m^{1/k} W$ имеют в качестве предельного распределения распределение Вейбулла с параметром формы k . Как частный случай предельное распределение будет экспоненциальным при $k = 1$.

2.8. При выполнении этого упражнения пользуйтесь обозначениями из упр. 2.7. Пусть плотность случайной величины $V_i, i = 1, \dots, m$ асимптотически эквивалентна при $v \rightarrow 0$ $av^{k-1}(1 + b_1v + b_2v^2 + \dots)$. Получите разложения для асимптотических функций надежности и плотности T (когда $m \rightarrow \infty$), показывающие, в частности, что функция надежности T имеет вид:

$$\begin{cases} \exp(-t^k) \left(1 - \frac{1}{2} t^{2k}/m + \dots\right) & (k < 1), \\ \exp(-t^k) (1 - ct^{k+1}/m^{1/k} + \dots) & (k \geq 1), \end{cases}$$

$$c = b_1 k^{1+1/k} (k+1)^{-1} a^{-1/k} + \frac{1}{2} \delta_{k1},$$

где $\delta_{k1} = 1$ ($k = 1$), $\delta_{k1} = 0$ ($k \neq 1$).

Исследуйте более общие разложения для исходной плотности, например, такие, как $at^{k-1}(1 + b_1t^n + \dots)$.

2.9. Предположим, T имеет распределение Вейбулла с параметрами ρ и k . Докажите, что случайная величина $U = \log T$ имеет распределение Гумбеля с функцией надежности $\exp(-\rho^{k\rho^{ku}})$ и плотностью $k\rho^k \exp(ku - \rho^k e^{ku})$. Запишите эти выражения с помощью перепараметризации в сдвигово-масштабной форме. Получите распределение Гумбеля как предельное для случайных величин $\rho k T - k$ при $k \rightarrow \infty$.

2.10. Предположим, что объект выбирается случайным образом и имеет функцию интенсивности $\rho^2 t + V$, где V — ненаблюдаемая гамма-распределенная случайная величина. Докажите, что безусловная функция интенсивности равна $\rho^2 t + \xi/(1 + \eta t)$, где ξ и η — параметры, определяемые гамма-плотностью. Покажите, что она может иметь «возрастную» («bath-tub») форму с локальным минимумом.

[Боргефорс и Хьорс (1981)]

2.11. Покажите, что если функция интенсивности имеет вид

$$k\rho(\rho t)^{k-1} \exp[(\rho t)^k],$$

то функция надежности равна

$$\exp\{-[\exp((\rho t)^k) - 1]\}.$$

[Дхиллон (1979, 1981)]

2.12. Докажите, что квадрат коэффициента вариации логарифмически логистического распределения равен $(k/\pi)(\text{tg}(\pi/k) - 1)$ при $k > 2$.

2.13. Покажите, что распределение Гомперца — Макегама с функцией интенсивности

$$h(t) = \rho_0 + \rho_1 e^{\rho_2 t}$$

может быть получено как сложное экспоненциальное распределение при условии $\rho_2 \leq 0$, и затем определите распределение весовой случайной величины.

2.14. Покажите, что для логарифмически нормального распределения кривая на рис. 2.1 задается уравнением $y = 3x + x^3$, где y — нормированный третий момент, а x — коэффициент вариации.

3.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 были описаны некоторые параметрические семейства распределений времени жизни и приведены рекомендации по выбору подходящего семейства в прикладных задачах. Предположим теперь, что определенное семейство выбрано и функция распределения задана с точностью до некоторого вектора параметров φ , а для оценивания φ имеется единственная выборка времен отказов, возможно наличие цензурированных. Часто вектор φ можно представить в следующем виде: $\varphi^T = (\omega^T, \lambda^T)$, где ω — вектор интересующих исследователя параметров, а λ — вектор мешающих параметров.

Здесь и далее в основном будут использоваться методы, основанные на функции правдоподобия. Эти методы почти всегда связаны с итеративным численным решением уравнений правдоподобия. Как уже отмечалось в гл. 1, в этом случае не обойтись без подходящего пакета программ. В данной главе выводится общий вид функции правдоподобия для цензурированной выборки, затем дается краткий обзор методов оценивания, основанных на теории максимума правдоподобия для больших выборок. В качестве примера более подробно обсуждаются показательное распределение и распределение Вейбулла. Для показательного распределения справедливы некоторые «точные» результаты выборочной теории, что не характерно для других распределений.

3.2. ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим сначала случай непрерывной функции распределения времени жизни. Объекту, отказ которого наблюдался в момент времени t , в функции правдоподобия соответствует сомножитель $f(t, \varphi)$, равный плотности отказов в момент t . Если объект был цензурирован в момент времени c , то ему соответствует сомножитель $F(c, \varphi)$, равный вероятности того, что время жизни превысит c . Тогда полную функцию правдоподобия для n независимых объектов, помеченных индексом i , можно представить в следующем виде:

$$\text{lik} \quad \prod_i f(t_i; \varphi) \prod_c F(c_i; \varphi), \quad (3.1)$$

где два произведения соответствуют нецензурированным и цензурированным объектам. Логарифм функции правдоподобия l равен

$$l = \sum_u \log f(t_i; \varphi) + \sum_c \log F(c_i; \varphi) \quad (3.2)$$

с аналогичной интерпретацией слагаемых. Если предположить, что $x_i = \min(t_i, c_i)$, то это выражение принимает вид

$$l = \sum_u \log f(x_i; \varphi) + \sum_c \log F(x_i; \varphi).$$

Так как $f(t) = h(t) F(t)$, то

$$l = \sum_u \log h(x_i; \varphi) + \sum_c \log F(x_i; \varphi).$$

Логарифм функции надежности¹ равен функции риска со знаком минус, и поэтому

$$l = \sum_u \log h(x_i; \varphi) - \sum H(x_i; \varphi).$$

Наконец, обозначив число объектов, наблюдаемых к моменту времени u , через $r(u) = \text{card}\{i: x_i \geq u\}$, получаем

$$l = \sum_u \log h(x_i; \varphi) - \int_0^{\infty} r(u) h(u; \varphi) du. \quad (3.3)$$

Конечно, в интеграле только формально записан бесконечный предел интегрирования, так как $r(u) = 0$ для всех u , превышающих последний момент наблюдавшегося отказа или цензурирования. Подынтегральное выражение можно интерпретировать как полную интенсивность отказов в текущий момент времени. Из приведенных соотношений для l видно, насколько важно понятие функции интенсивности.

Предположим теперь, что функция распределения времени жизни является дискретной с атомами $f_j(\varphi)$ в заранее определенных точках a_j ($a_1 < a_2 < \dots$).

Допустим, что при совпадении моментов отказа и цензурирования отказ наблюдается. При этом условии вклад в функцию правдоподобия от объекта с наблюдаемым отказом в момент a_j составляет $f_j(\varphi)$, а вклад от объекта, цензурированного в момент c , равен

$$\text{pr}(T > c) = F(c^+; \varphi) = 1 - \sum_{j: a_j \leq c} f_j(\varphi).$$

Как и в соотношении (2.10), используя дискретную функцию интенсивности $h_j(\varphi)$, определенную в (2.6), получаем:

$$f_j(\varphi) = h_j(\varphi) \prod_{k < j} [1 - h_k(\varphi)];$$

$$F(c^+; \varphi) = \prod_{j: a_j \leq c} [1 - h_j(\varphi)].$$

¹ Иначе говоря, логарифм вероятности безотказной работы. — *Примеч. ред.*

В произведениях, входящих в эти выражения, сомножители соответствуют атомам $\{a_j\}$ функции распределения. Чтобы получить полную функцию правдоподобия выборки из n наблюдений, сгруппируем все сомножители, относящиеся к a_j . Если среди $r_j = r(a_j)$, наблюдаемых в момент a_j объектов, имеется d_j отказов, то вклад в полную функцию правдоподобия составит

$$[h_j(\varphi)]^{d_j} [1 - h_j(\varphi)]^{r_j - d_j}.$$

Тогда полный логарифм функции правдоподобия равен

$$\sum_j \{d_j \log h_j(\varphi) + (r_j - d_j) \log [1 - h_j(\varphi)]\}. \quad (3.4)$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с логарифмом функции правдоподобия для модели с независимыми биномиальными величинами с r_j испытаниями и вероятностью «успеха», равной $h_j(\varphi)$.

На практике полностью дискретное распределение времени жизни встречается редко. Обычно совпадения в представленных значениях вызваны группировкой данных исходного непрерывного распределения. В большинстве случаев (и особенно в задачах с одной выборкой) полученными в результате этого небольшими погрешностями в данных, как правило, можно пренебречь. Исключение составляет задача о подборе некоторого логарифмически нормального распределения для данных, содержащих много значений, близких к нулю. Как отмечалось в гл. 2, соответствующие параметры распределения чувствительны к малым значениям времени жизни.

Может быть выведена и точная функция правдоподобия для сгруппированных данных: она включает интегралы соответствующей плотности по интервалам группирования.

3.3. ТЕОРИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ: ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Возможны различные подходы для получения информации о векторе φ из функции правдоподобия (3.2) или (3.4). Если задано априорное распределение некоторого параметра, то байесовская теория приводит к апостериорному распределению параметров, интересующих исследователя. Заметим, что в случае $\varphi^T = (\omega^T, \lambda^T)$, необходимо задать априорное распределение как основного параметра ω , так и мешающего параметра λ . При использовании подхода, основанного на выборочной теории, иногда удается построить «точные» доверительные интервалы и критерии, устраняя, если это необходимо, мешающий параметр переходом к условным вероятностям.

Чаще всего применяется асимптотическая теория максимального правдоподобия. Для проверки нулевой гипотезы $\omega = \omega_0$, а следовательно, и для построения доверительного множества, как набора значений параметра ω , «неотвергающегося» при заданном уровне значимости, возможны три типа асимптотических методов, основанных на функции правдоподобия. Рассмотрим их.

а) Во-первых, это непосредственное использование статистики отношения правдоподобия

$$W(\omega_0) = W = 2[l(\hat{\omega}, \hat{\lambda}) - l(\omega_0, \hat{\lambda}_{\omega_0})], \quad (3.5)$$

где $(\hat{\omega}, \hat{\lambda})$ — совместная оценка максимального правдоподобия (ω, λ) , а $\hat{\lambda}_{\omega_0}$ — оценка максимального правдоподобия λ при условии $\omega = \omega_0$. Функция $l(\hat{\omega}, \hat{\lambda}_{\omega_0})$ иногда называется профилным логарифмом правдоподобия для ω . Если верна нулевая гипотеза $\omega = \omega_0$, то $W(\omega_0)$ приближенно имеет распределение хи-квадрат с $p_\omega = \dim(\omega)$ степенями свободы. Соответствующую $(1 - \alpha)$ доверительную область можно записать как

$$\{\omega : W(\omega) \leq c_{p_\omega, \alpha}^*\}, \quad (3.6)$$

где $c_{p, \alpha}^*$ — верхняя α -точка распределения хи-квадрат с p степенями свободы.

Если бы асимптотическое распределение было точным, то математическое ожидание статистики $W(\omega_0)$ равнялось бы $E[W(\omega_0); \omega_0] = p_\omega$. Можно найти следующее асимптотическое разложение:

$$E[W(\omega_0); \omega_0] = p_\omega \left[1 + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Тогда выражение $(1 + c/n)$ (c , если это необходимо, оценивается последовательно) называется поправочным множителем Бартлетта. И некоторые свойства критерия могут быть улучшены, если заменить W в (3.5) и (3.6) на $W' = W/(1 + c/n)$. Однако при наличии цензурирования такие расчеты, как правило, трудно выполнимы.

б) Во-вторых, можно непосредственно использовать оценку максимального правдоподобия $\hat{\omega}$. Наблюденная информационная матрица равна матрице с обратным знаком вторых производных функций l по (ω, λ) в точке $(\hat{\omega}, \hat{\lambda})$. Обозначим через $v_{\omega\omega}(\hat{\omega}, \hat{\lambda})$ соответствующую ω подматрицу матрицы, обратной к наблюдаемой информационной матрице; она может рассматриваться как оценка ковариационной матрицы $\hat{\omega}$. Тогда вместо (3.5) можно использовать статистику Вальда

$$W_e(\omega_0) = (\hat{\omega} - \omega_0)^T v_{\omega\omega}^{-1}(\hat{\omega}, \hat{\lambda})(\hat{\omega} - \omega_0), \quad (3.7)$$

также приближенно имеющую распределение хи-квадрат с p_ω степенями свободы, если верна нулевая гипотеза. Уравнение (3.7) непосредственно приводит к эллиптической доверительной области для ω с центром в $\hat{\omega}$. Существуют и другие способы оценивания ковариационной матрицы. Например, вместо наблюдаемых вторых производных логарифма функции правдоподобия можно рассматривать их математические ожи-

дания. В случае скалярного параметра получаем симметричный $(1 - 2\alpha)$ доверительный интервал

$$\widehat{\omega} - k_{\alpha}^* v_{\omega\omega}^{1/2}(\widehat{\omega}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\omega} + k_{\alpha}^* v_{\omega\omega}^{1/2}(\widehat{\omega}, \widehat{\lambda}),$$

где $\Phi(-k_{\alpha}^*) = \alpha$.

в) Третья возможность состоит в использовании градиента логарифма функции правдоподобия в точке ω_0 (при этом заменяется λ на λ_{ω_0}). Тогда необходимо вычислить

$$U_{\omega_0} = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} l(\omega, \lambda) \right]_{\omega = \omega_0, \lambda = \widehat{\lambda}_{\omega_0}}. \quad (3.8)$$

Найденный вектор размерности $p_{\omega} \times 1$ при $\omega = \omega_0$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариации $v_{\omega\omega}^{-1}(\omega_0, \lambda_{\omega_0})$. Статистикой критерия, построенного по U_{ω_0} , является

$$W_U(\omega_0) = U_{\omega_0}^T v_{\omega\omega}(\omega_0, \widehat{\lambda}_{\omega_0}) U_{\omega_0}. \quad (3.9)$$

В этом случае также есть альтернативные способы оценки ковариационной матрицы, и статистика критерия при выполнении нулевой гипотезы имеет распределение хи-квадрат с p_{ω} степенями свободы.

Отметим, что оцениваемая ковариационная матрица статистики

$$\left[\frac{\partial}{\partial \omega} l(\omega, \lambda) \right]_{\omega = \omega_0, \lambda = \widehat{\lambda}_{\omega_0}}$$

равна $I_{\omega\omega}(\omega_0, \widehat{\lambda}_{\omega_0})$ — подматрице на главной диагонали наблюдаемой информационной матрицы. В общем случае

$$I_{\omega\omega}(\omega_0, \widehat{\lambda}_{\omega_0}) \neq v_{\omega\omega}^{-1}(\omega_0, \widehat{\lambda}_{\omega_0});$$

несовпадение соответствует добавочной информации об ω , обусловленной знанием λ .

Очень часто все три процедуры (а — в) дают практически совпадающие результаты. Преимущество процедуры б) — непосредственного использования оценки максимального правдоподобия — состоит в простом представлении выводов. К недостаткам можно отнести неинвариантность процедуры б) относительно перепараметризации, что в случаях нестандартной формы функции правдоподобия (например, когда функция правдоподобия многомодальна или обращается в нуль при некоторых значениях φ) приводит к ошибочным результатам. Процедура в) более удобна с вычислительной точки зрения, поскольку в нее входит только максимизация при $\omega = \omega_0$, и поэтому соответствие основной модели, определяемой значениями λ , может быть проверено приращением по различным направлениям без повторной максимизации. В сомнительных случаях рекомендуется процедура а) — прямое использование максимизированных логарифмов функции правдоподобия. Она инвариантна

относительно перепараметризации, и форма полученной доверительной области определяется самими данными. Эти качественные аргументы подтверждаются работами по асимптотической теории высоких порядков, где применяется переход к условным вероятностям относительно приближенно-подчиненных статистик (Эфрон и Хинкли, 1978; Кокс, 1980; Барндорф-Нильсен, 1980, 1983; Барндорф-Нильсен и Кокс, 1984).

Асимптотическая теория оценивания методом максимального правдоподобия, основанная на нормальных и хи-квадрат приближениях, требует выполнения некоторых «условий регулярности», касающихся «гладкости» функции правдоподобия. В частности, она не применима для пороговых (threshold) параметров. Если наблюдения не являются независимыми или одинаково распределенными, необходимо, грубо говоря, чтобы вклад любого наблюдения в полную информацию, соответствующую выборке, стремился к нулю с ростом объема выборки. Конечно, даже если выполнены необходимые условия для асимптотической нормальности, в некоторых задачах с выборкой небольших размеров полученная математическая модель может оказаться неудовлетворительной.

При наличии серьезных сомнений в применимости теории распределений рассчитывается поправочный множитель Бартлетта или используется моделирование на ЭВМ для исследований распределения любой подходящей статистики при выполнении нулевой гипотезы.

3.4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗОВ

Экспоненциальное распределение с параметром интенсивности ρ , $F(t) = e^{-\rho t}$ имеет постоянную функцию интенсивности $h(t, \rho) = h(t, \rho) = \rho$. Логарифм функции правдоподобия для единственного неизвестного параметра ρ можно представить в виде

$$l = \sum_u \log \rho - \rho \sum x_i = d \log \rho - \rho \sum x_i, \quad (3.10)$$

где накопленное число отказов d и сумма $\sum x_i$ цензурированных и нецензурированных наработок образуют минимальную достаточную статистику для ρ . Заметим, что если d или $\sum x_i$, либо некоторая их функция не определена заранее, то тогда одномерному параметру соответствует двумерная статистика. Это один из примеров так называемого искривленного экспоненциального семейства. Часто сумму $\sum x_i$ называют суммарной наработкой.

Производные функции l равны:

$$U_\rho = \frac{\partial l}{\partial \rho} = \frac{d}{\rho} - \sum x_i, \quad (3.11)$$

$$I = -\partial^2 l / \partial \rho^2 = d / \rho^2. \quad (3.12)$$

Оценку максимального правдоподобия $\hat{\rho}$ параметра ρ можно найти из уравнения $U_\rho = 0$

$$\hat{\rho} = d / \sum x_i, \quad (3.13)$$

т. е. она равна отношению накопленного числа отказов к суммарной наработке. Заметим, что цензурированные наработки входят только в знаменатель выражения (3.13). Если цензурирование отсутствует, то логарифм функции правдоподобия можно представить в виде

$$l = n \log \rho - \rho \sum x_i,$$

и тогда искривленное экспоненциальное семейство преобразуется в одномерное семейство с одной минимальной достаточной статистикой $\sum x_i$ для параметра ρ . В этом случае возможны точные статистические выводы относительно ρ , так как $\sum x_i$ — сумма независимых одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин с параметром ρ имеет гамма-распределение с параметром формы n и параметром масштаба ρ . Следовательно, случайная величина $2n\rho/\hat{\rho}$ имеет хи-квадрат распределение с $2n$ степенями свободы. Отсюда сразу же получаем доверительные интервалы и критерии для проверки гипотез. В частности, $(1 - \alpha)$ доверительный интервал для ρ можно записать как

$$\frac{\hat{\rho} c_{2n, 1-1/2\alpha}^*}{2n} < \rho < \frac{\hat{\rho} c_{2n, 1/2\alpha}^*}{2n},$$

где $c_{p,\alpha}^*$ — верхняя α -точка хи-квадрат распределения с p степенями свободы.

Пример 3.1.

Рассмотрим данные по лейкемии (см. работу Фрейриха и др.), представленные в табл. 1.1. Для контрольной группы больных, в которой цензурирование не проводилось, $n = 21$ и $\sum x_i = 182$. В предположении экспоненциальности распределения получаем оценку

$$\hat{\rho} = 21/182 = 0,115^4,$$

тогда точным 95%-ным доверительным интервалом будет интервал $(0,071; 0,170)$, так как 0,025-квантиль и 0,975-квантиль хи-квадрат распределения с 42 степенями свободы равны соответственно 26,0 и 61,8.

Существует точная теория и в случае цензурирования типа II, т. е. когда наблюдение прекращается после определенного заранее числа отказов d . Это легко можно увидеть, если заметить, что при таком алгоритме цензурирования

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^d (n - i + 1) (t_{(i)} - t_{(i-1)}),$$

где через t_i обозначена i -я упорядоченная наработка до отказа ($i = 0, 1, \dots, d; t_{(0)} = 0$), а $t_{(i)} - t_{(i-1)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $(n - i + 1)\rho$.

При других способах цензурирования точное выборочное распределение оценки $\hat{\rho}$ получить трудно. Оно табулировано для специального

⁴ Подобные равенства следует понимать как приближенные. — *Примеч. ред.*

случая цензурирования типа I, когда наблюдение за всеми объектами прекращается в определенный момент времени s . Однако хорошую аппроксимацию в общем случае дает использование статистики $2d\hat{\rho}/\rho$ как случайной величины с хи-квадрат распределением (несмотря на то, что d —случайная величина). Найденные доверительные интервалы несущественно отличаются от интервалов, полученных из отношения правдоподобия.

Пример 3.1 (продолжение)

Для группы больных, проходящих лечение (6-МР), $\sum x_i = 359$, $d = 9$. Тогда оценка максимального правдоподобия равна $\hat{\rho} = d/\sum x_i = 9/359 = 0,025$.

График логарифма функции правдоподобия изображен на рис. 3.1, где видна значительная асимметричность. Из отношения правдоподобия получаем, что интервал $(0,0120; 0,0452)$ является 95 %-ным доверительным интервалом. Интервал $(0,0115; 0,0439)$ получен с помощью верхней и нижней 0,025-квантилей хи-квадрат распределения с 18 степенями свободы. Среднеквадратическая ошибка оценки максимума правдоподобия равна

$$\left(\left[-\frac{\partial^2 l}{\partial \rho^2} \right]_{\hat{\rho}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\hat{\rho}^2}{d} \right)^{1/2} = 0,00836.$$

Отсюда получаем симметричный 95 %-ный доверительный интервал $(0,0087; 0,0414)$, основанный на нормальном приближении распределения $\hat{\rho}$. Вследствие формы логарифма функции правдоподобия (см. рис. 3.1) симметричный интервал вряд ли подойдет в этом случае.

3.5. СЕМЕЙСТВО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ

Уравнения правдоподобия имеют простой вид для семейства распределений Лемана $h(t; \rho) = \rho h_0(t)$, где функция $h_0(t)$ предполагается заданной. Действительно, если обозначить через

$$H_0(t) = \int_0^t h_0(u) du$$

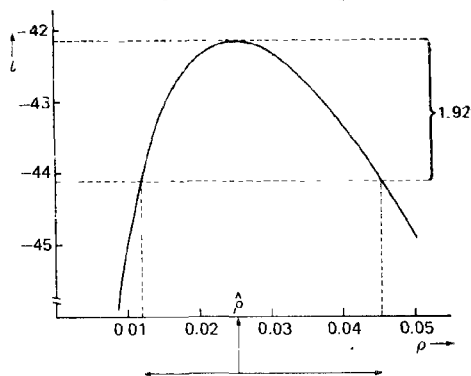


Рис. 3.1. Данные по больным лейкемией, при лечении которых использовалось 6-МР. Логарифм функции правдоподобия l для экспоненциального параметра ρ . 95 %-ный доверительный интервал, полученный из распределения хи-квадрат. Оценка максимального правдоподобия ρ

функцию риска соответствующую $h_0(t)$, то случайные величины $T'_i = H_0(T_i)$ будут иметь экспоненциальное распределение с параметром $\hat{\rho}$ и поэтому можно использовать методы, описанные в предыдущем разделе.

Альтернативный подход для изучения этого семейства распределений состоит в непосредственном исследовании логарифма функции правдоподобия. Для общей цензурированной выборки из уравнения (3.3) получаем

$$l = d \log \rho + \sum_u \log h_0(x_i) - \rho e, \quad (3.14)$$

где

$$e = \int_0^{\infty} r(u) h_0(u) du = \sum_{i=1}^n H_0(x_i).$$

Легко показать, что при любом алгоритме цензурирования математическое ожидание случайной величины ρe совпадает с математическим ожиданием накопленного числа отказов d (см. упр. 3.2). Производная l имеет следующий вид:

$$dl/d\rho = d - e. \quad (3.15)$$

Отсюда находим оценку максимального правдоподобия

$$\hat{\rho} = d/e. \quad (3.16)$$

В эпидемиологических приложениях $h_0(t)$ может представлять зависящую от времени интенсивность смертности для некоторой заданной «стандартной популяции», а наблюдаемое d — число умерших в «изучаемой популяции». Отношение d/e , иногда выраженное в процентах, называется нормированным отношением смертности.

Обычно при вычислении e необходимо, чтобы функция интенсивности зависела не только от возраста, но и от календарного времени.

Для пуассоновской случайной величины с наблюдаемым значением k ($1 - \alpha$) доверительные границы для среднего имеют вид

$$\theta_L(k) = \bar{\theta}\left(k, \frac{1}{2}\alpha\right); \quad \theta_U(k) = \bar{\theta}\left(k+1, 1 - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

где $\bar{\theta}(k, \alpha)$ — корень уравнения

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} \exp(-\theta) = \alpha. \quad (3.17)$$

С помощью этих границ можно построить $(1 - \alpha)$ доверительный интервал $\theta_L(d)/e$; $\theta_U(d)/e$ для d , т. е. считать, что имеет место пуассоновское распределение со средним ρe , где e — неслучайная величина. Можно показать, что нижняя граница найденного интервала совпадает с границей, получающейся, если учесть, что $2\rho e$ имеет хи-квадрат распределение с $2d$ степенями свободы. Однако для верхней границы нужно взять $2d+2$ степени свободы.

3.6. ОЦЕНИВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ В СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Предположим, что оба параметра (k, ρ) распределения Вейбулла с функцией интенсивности $h(t) = k\rho(\rho t)^{k-1}$ неизвестны. Рассмотрим их оценки максимального правдоподобия. Из соотношения (3.2) получаем, что логарифм функции правдоподобия для цензурированной выборки имеет вид

$$l = d \log k + kd \log \rho + (k-1) \sum_u \log x_i - \rho^k \sum x_i^k.$$

Даже без цензурирования для (ρ, k) не найдется достаточной статистики с фиксированной размерностью¹: семейство Вейбулла не является экспоненциальным. Первые производные можно записать как

$$U_\rho = \frac{\partial l}{\partial \rho} = \frac{kd}{\rho} - k\rho^{k-1} \sum x_i^k, \quad (3.18)$$

$$U_k = \frac{\partial l}{\partial k} = \frac{d}{k} + d \log \rho + \sum_u \log x_i - \rho^k \sum x_i^k \log(\rho x_i). \quad (3.19)$$

Если k задано, оценка максимального правдоподобия $\hat{\rho}_k$ параметра ρ может быть найдена из уравнения $U_\rho = 0$. Она равна

$$\hat{\rho} = (d/\sum x_i^k)^{1/k}. \quad (3.20)$$

Этот результат можно получить быстрее, если вспомнить, что T^k имеет экспоненциальное распределение с параметром ρ^k . Подставляя найденное значение в уравнение $U_k = 0$, получаем более простое выражение

$$0 = \frac{d}{k} + \sum_u \log x_i - d \frac{\sum x_i^k \log x_i}{\sum x_i^k} \quad (3.21)$$

для оценки максимального правдоподобия \hat{k} . В уравнении (3.21) не содержится параметр ρ , и нужная оценка может быть найдена одномерной итеративной процедурой по k .

Вторые производные l равны:

$$-I_{\rho\rho} = \frac{\partial^2 l}{\partial \rho^2} = -\frac{kd}{\rho^2} - k(k-1)\rho^{k-2} \sum x_i^k, \quad (3.22)$$

¹ Фиксированная размерность — размерность, не возрастающая по мере увеличения объема выборки. — *Примеч. ред.*

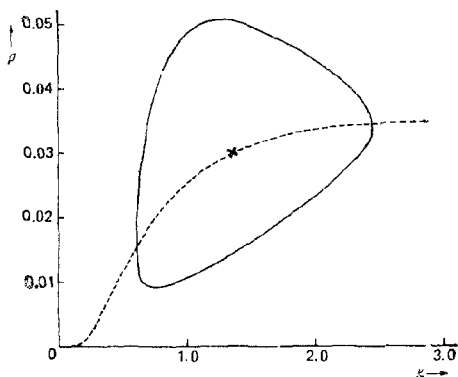


Рис. 3.2. Данные по больным лейкемией, при лечении которых использовалось 6-МР. Подбор распределения Вейбулла: ———— граница 95%-ной доверительной области, построенной по статистике отношения правдоподобия; - - - - - оценка максимального правдоподобия $\hat{\rho}_k$ параметра ρ при заданном k ; X — оценка максимального правдоподобия $(\hat{k}, \hat{\rho})$

$$-I_{\rho k} = \frac{\partial^2 l}{\partial \rho \partial k} = \frac{d}{\rho} - \rho^{k-1} (1 + k \log \rho) \sum x_i^k - k \rho^{k-1} \sum x_i^k \log x_i, \quad (3.23)$$

$$-I_{kk} = \frac{\partial^2 l}{\partial k^2} = -\frac{d}{k^2} - \rho^k \sum x_i^k [\log(\rho x_i)]^2. \quad (3.24)$$

Пример 3.2.

Для данных по лейкемии (группа больных, проходящих лечение) совместная оценка максимального правдоподобия (k, ρ) равна: $\hat{k} = 1,35$, $\hat{\rho} = 0,030$. На рис. 3.2 приводится совместная 95%-ная доверительная область для (k, ρ) , полученная из статистики \mathcal{W} отношения правдоподобия. На графике показана также зависимость от параметра k оценки максимального правдоподобия $\hat{\rho}_k$ параметра ρ , вычисленной при фиксированном значении k . На рис. 3.3 дана функция профиля правдоподобия $l(k, \hat{\rho}_k)$, а 95%-ным доверительным интервалом для k , построенным по \mathcal{W} , является интервал $(0,72; 2,20)$.

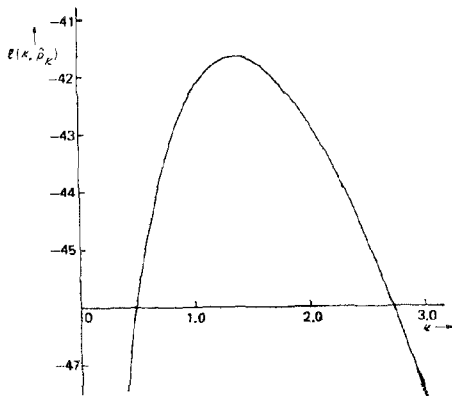


Рис. 3.3. Данные по больным лейкемией, при лечении которых использовалось 6-МР. Профиль логарифма функции правдоподобия для параметра распределения Вейбулла, k , т. е. $l(k, \hat{\rho}_k)$ относительно k

3.7. КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ

Получим теперь критерий вклада для гипотезы $k = 1$, соответствующей экспоненциальности. Это полезный критерий с альтернативными гипотезами, определяющимися монотонными функциями интенсивности.

Напомним, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\rho}_k$ параметра при $k = k_0 - 1$ равна

$$\hat{\rho}_{k_0} = d / \sum x_i.$$

Функция вклада из соотношения (3.19) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{k_0} - \left[\frac{\partial}{\partial k} l(k, \rho) \right]_{k_0, \rho = \hat{\rho}_{k_0}} &= \\ &= d + \sum_u \log x_i - d \frac{\sum x_i \log x_i}{\sum x_i}. \end{aligned}$$

Наблюденная информационная матрица состоит из элементов:

$$\begin{aligned} I_{kk} &= d + \sum (\hat{\rho}_{k_0} x_i) [\log (\hat{\rho}_{k_0} x_i)]^2, \\ I_{k\rho} &= \sum x_i \log (\hat{\rho}_{k_0}, x_i), \\ I_{\rho\rho} &= d / \hat{\rho}_{k_0}^2. \end{aligned}$$

Обратную матрицу v можно представить как

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & v_{k\rho} \\ v_{k\rho} & v_{\rho\rho} \end{pmatrix},$$

где

$$v_{hh} = (I_{hh} - I_{k\rho}^2 / I_{\rho\rho})^{-1},$$

и в соответствии с (3.9) может быть построена статистика с асимптотическим хи-квадрат распределением. В нашем случае, когда $\rho_{\omega} = 1$, предпочтительнее статистика со знаком $U_{k_0} (v_{kh})^{1/2}$, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет приближенно стандартное нормальное распределение, так как она указывает направление уклонения от нулевой гипотезы.

Пример 3.3.

Для данных по лейкемии:

$$d = 9; \quad \sum x_i = 359; \quad \sum_u \log x_i = 21,19;$$

$$\sum x_i \log x_i = 1077,3; \quad \sum x_i (\log x_i)^2 = 3334,8.$$

Таким образом, $\hat{\rho}_{k_0} = 0,02507$ и $U_{k_0} = 3,18$. Наблюденная информационная матрица состоит из следующих элементов: $I_{kk} = 15,79$; $I_{k\rho} = -246,0$; $I_{\rho\rho} = 14\,320$, откуда $v_{kh} = 0,0865$. Стандартное нормальное уклонение для критерия при $k = k_0$ равно $3,18 (0,0865)^{1/2} = 0,935$. Его значение не отвергает нулевую гипотезу экспоненциальности. Это качественно согласуется с выводами, полученными на основе статистических отношения правдоподобия.

Ввиду небольшого числа отказов не удивительно, что нулевая гипотеза не отвергается. Некоторые аргументы в пользу монотонного возрастания функции интенсивности достаточно слабые против ее монотонного убывания, вероятно, вызваны очевидным критическим значением, равным шести неделям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Оценивание по цензурированной выборке с заранее заданным числом отказов и экспоненциальным распределением рассматривалось в работах Сукхатма (1937), а также Эпштейна и Собея (1953). Бартоломью (1957) применил асимптотические методы для экспоненциального распределения с фиксированными моментами цензурирования и также (Бартоломью, 1963) получил точное распределение оценки максимума правдоподобия при цензурировании типа I. Кокс (1953) предложил использовать хи-квадрат приближение в задаче с единственным пуассоновским процессом, наблюдаемым в фиксированное время.

Вычисление и интерпретация нормированных отношений смертности обсуждаются во многих учебниках по медицинской статистике, например Брэдфорд Хилл (1977). Бреслоу (1977) дал вывод функции правдоподобия. Доверительные границы среднего пуассоновской случайной величины табулированы в работах Фишера и Йэтса (1963), Пирсона и Хартли (1966). Впервые связь этих границ с распределением хи-квадрат упоминалась Эрлангом, а более подробно описана Фишером (1935).

Оценивание максимального правдоподобия в случае распределений Вейбулла детально рассматривалось в работах Пайком (1966), Пето и Ли (1973). В литературе по надежности (Мэнни и др., 1974) освещается много альтернативных процедур. Они часто основаны на порядковых статистиках и поэтому применимы как при наличии пороговых параметров, так и при цензурировании.

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Предположим, что наработки до отказов экспоненциально распределены с параметром ρ ; ρ имеет априорное гамма-распределение вида $f_{\rho}(\rho)$ (см. 2.3). Покажите, что апостериорным распределением ρ при заданном числе наблюдаемых отказов d и суммарной наработке $\sum x_i$ также является гамма-распределение с параметрами:

$$k_1 = k + d, \quad \rho_1 = (k + d) \rho_0 / (k + \rho_0 \sum x_i).$$

Рассмотрите обобщение этого результата на семейство распределений с пропорциональными интенсивностями, где $h_0(t)$ предполагается известной величиной.

3.2. Докажите, что если T имеет непрерывную функцию распределения $F(\cdot)$ и функцию риска $H(\cdot)$ и если $X = \min(T, c)$, то

$$E[H(X)] = F(c).$$

3.3. Докажите, что если существует по крайней мере две различные нецензурированные наработки до отказа X_i (каждая $X_i > 0$), то уравнение (3.21) имеет единственный корень при $k > 0$.

3.4. Покажите, что при отсутствии цензурирования математическое ожидание информированной матрицы для распределения Вейбулла имеет элементы:

$$-E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \rho^2}\right) = \frac{nk^2}{\rho^2}, \quad -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \rho \partial k}\right) = \frac{n\psi(2)}{\rho};$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial k^2}\right) = \frac{n}{k^2} \{1 + \psi'(2) + [\psi(2)]^2\},$$

где $\psi(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Gamma(\alpha)$ — дигамма-функция (ψ -функция Гаусса).

3.5. Покажите, что при отсутствии цензурирования гамма-распределение имеет для параметров ρ и k минимальную достаточную статистику $(\sum t_i, \sum \log t_i)$, а оценка максимального правдоподобия для k при неизвестном ρ является решением уравнения

$$\psi(k) - \log k - \log R = 0,$$

где R — отношение среднего геометрического к среднему арифметическому выборки.

3.6. Исходя из: (i) числа событий; (ii) времени до k -го события для пуассоновского процесса с интенсивностью θ , наблюдаемого на единичном интервале, покажите, что

$$\bar{\theta}(k, \alpha) = \frac{1}{2} c_{2k, \alpha}^*.$$

3.7. Покажите, что для n нецензурированных объектов с экспоненциально распределенными наработками до отказа и логарифмом функции правдоподобия $n \log \rho - \rho \sum x_i$ статистика отношения правдоподобия W (3.5) для проверки нулевой гипотезы $\rho = \rho_0$ имеет вид

$$W = 2(n \log n - n \log \sum x_i - n - n \log \rho_0 + \rho_0 \sum x_i).$$

Докажите, что ее математическое ожидание при выполнении нулевой гипотезы можно представить как

$$E(W) = 1 + (6n)^{-1} + O(n^{-2}),$$

и поэтому статистика с поправочным множителем Бартлетта равна

$$W' = W / [1 + (6n)^{-1}].$$

Исследуйте численными методами связь между доверительными границами, получаемыми на основе W и W' соответственно, и с помощью «точного» решения.

4.1. ВВЕДЕНИЕ

В методах, описанных ранее, применялось распределение функционального вида, которое может иметь наработка до отказа без цензурирования. Рассмотрим теперь некоторые непараметрические методы, не требующие такого типа предположений. Они оказываются полезными не только как гибкие альтернативные методы по отношению к параметрическим, но и при применении графических методов проверки согласия для сложных моделей. Термин «таблица временн жизни (наработка)» часто используется для непараметрического оценивания функции надежности по цензурированным данным.

4.2. МНОЖИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА (PRODUCT-LIMIT ESTIMATOR)

Предположим сначала, что несобственное распределение является дискретным с атомами f_j в конечном множестве заданных точек $a_1 < a_2 < \dots < a_g$. На практике довольно часто все заданные точки равноудалены друг от друга, т. е. $a_j = j$ в подходящем масштабе времени, хотя это и не обязательное требование. Как уже описывалось в 2.2, функцию надежности $F(t)$ можно выразить через значения дискретной функции интенсивности h_j следующим образом:

$$F(t) = \prod_{a_j < t} (1 - h_j) = \Pi^{(t)}(1 - h_j),$$

где через $\Pi^{(t)}$ и позднее $\Sigma^{(t)}$ обозначены соответственно произведение и сумма по всем j , $a_j < t$. Таким образом, f_j может быть выражено через h_j как:

$$\begin{aligned} f_1 &= h_1, \quad f_2 = (1 - h_1) h_2, \dots; \\ f_j &= (1 - h_1) (1 - h_2) \dots (1 - h_{j-1}) h_j, \dots; \\ f_g &= (1 - h_1) (1 - h_2) \dots (1 - h_{g-1}) h_g. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ограничениям $f_j \geq 0$, $\Sigma f_j \leq 1$ соответствуют неравенства

$$0 \leq h_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, g.$$

Непараметрическая оценка функции надежности имеет вид

$$F(t) = \prod^{(t)} (1 - \widehat{h}_j), \quad (4.2)$$

где \widehat{h}_j — оценка максимального правдоподобия h_j . Из уравнения (3.4) получаем выражение логарифма функции правдоподобия через h_j

$$\sum_j [d_j \log h_j + (r_j - d_j) \log (1 - h_j)], \quad (4.3)$$

где r_j — число объектов, наблюдаемых в момент a_j , а d_j — число объектов, отказавших в момент a_j . Условимся, что в r_j входят все объекты цензурированные в момент a_j . Возможны и другие соглашения такого типа, которые в дальнейшем привели бы к несколько отличным от полученных результатов. В практических задачах от трудностей, которые вызывает это допущение, можно избавиться, более точно регистрируя данные на временной шкале.

Логарифм функции правдоподобия (4.3) в точности такой же, как и для g независимых биномиальных величин с r_j испытаниями, d_j неудачными исходами и с вероятностью неудачного исхода h_j . В этой задаче несложно найти максимум, рассматривая в качестве вектора параметров набор $\{h_j\}$. Тогда \widehat{h}_j является решением уравнения

$$\frac{\partial l}{\partial h_j} = \frac{d_j}{h_j} - \frac{r_j - d_j}{1 - h_j} = 0,$$

т. е. $\widehat{h}_j = d_j/r_j$. Подставив $\widehat{h}_j = d_j/r_j$ в выражение (4.2), получим соответствующую оценку \widehat{F} функции надежности:

$$\widehat{F}(t) = \prod^{(t)} \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right). \quad (4.4)$$

В произведении любой сомножитель с $d_j = 0$ может быть опущен и при этом (4.4) не изменяется. Следовательно, оценка $\widehat{F}(t)$ формально не зависит от выбора точек a_j ,¹ в которых наблюденное число отказов равно нулю. Таким образом, $\widehat{F}(t)$ является функцией только данных. В действительности может быть показано, что она максимизирует обобщенную функцию правдоподобия на пространстве всех распределений, хотя это свойство имеет только ограниченные непосредственно статистические приложения. Обычно $\widehat{F}(t)$ называют множительной оценкой или оценкой Каплана — Мейера. В табл. 4.1 иллюстрируется пример расчета такой оценки для данных по лейкемии, взятых из табл. 1.1.

¹ Если при этом сохраняется их порядок и значения не превышают t . — Примеч. ред.

Вычисление множительной оценки по данным, взятым из табл. 1.1 для группы больных лейкоемией, при лечении которых используется 6-МР

a_j	r_j	d_j	$1 - \frac{d_j}{r_j}$	$\prod_{l \leq j} \left(1 - \frac{d_l}{r_l}\right) = \widehat{F}(a_j^+)$
6	21	3	0,8571	0,8571
7	17	1	0,9412	0,8067
10	15	1	0,9333	0,7529
13	12	1	0,9167	0,6902
16	11	1	0,9091	0,6275
22	7	1	0,8571	0,5378
23	6	1	0,8333	0,4482

4.3. ФОРМУЛА ГРИНВУДА

Если возможные моменты отказов a_1, a_2, \dots, a_g фиксированы, алгоритм цензурирования допускает рост числа отказов d_j , пропорциональный размеру выборки n в каждый момент a_j , то применима стандартная теория максимального правдоподобия для больших выборок, а методы, в общих чертах описанные в гл. 3, могут быть использованы для получения статистических выводов о \widehat{h}_j или функций от них, как, например, $\widehat{F}(t)$.

Таким образом, асимптотически величина $\sqrt{n}(\widehat{h}_j - h_j)$ имеет многомерное нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариации, в качестве оценки которой можно взять матрицу, обратную наблюдаемой информационной матрице. В этом случае выражения

$$\left[\frac{\partial^2 l}{\partial h_j \partial h_k} \right]_{\widehat{h}} = \begin{cases} -\frac{r_j}{\widehat{h}_j(1-\widehat{h}_j)} & (j = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

совпадают с аналогичными выражениями для g независимых биномиальных величин. Используя соотношение

$$\log \widehat{F}(t) = \sum^{(t)} \log(1 - \widehat{h}_j)$$

и асимптотическую независимость \widehat{h}_j , можно найти асимптотическую дисперсию $\log \widehat{F}(t)$ для фиксированного значения t . Действительно,

$$\text{var} [\log \widehat{F}(t)] \approx \sum^{(t)} \text{var} [\log(1 - \widehat{h}_j)] \approx \sum^{(t)} \left(\frac{1}{1 - \widehat{h}_j} \right)^2 \text{var} (\widehat{h}_j) \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \Sigma^{(t)} \left(\frac{1}{1-\widehat{h}_j} \right)^2 \frac{\widehat{h}_j(1-\widehat{h}_j)}{r_j} \approx \\ &\approx \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j(r_j-d_j)} \end{aligned}$$

и

$$\text{var} [\widehat{\mathbf{F}}(t)] = [\widehat{\mathbf{F}}(t)]^2 \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j(r_j-d_j)}. \quad (4.5)$$

Это соотношение известно как формула Гринвуда. Доверительные границы можно получить с помощью нормальной аппроксимации, примененной или к $\widehat{\mathbf{F}}(t)$, или к $\log \widehat{\mathbf{F}}(t)$. Границы, относящиеся к назначенному моменту времени t_0 , имеют вид

$$\widehat{\mathbf{F}}(t_0) \pm k_{\alpha}^* \{\text{var} [\widehat{\mathbf{F}}(t_0)]\}^{1/2},$$

где $\Phi(-k_{\alpha}^*) = \alpha$. Чтобы получить доверительную полосу для функции $\mathbf{F}(t)$, на некотором интервале требуется больший коэффициент, чем k_{α}^* . Некоторые авторы исходя из того, что оценка (4.5) может быть неустойчивой на хвосте распределения, предложили альтернативную, более простую оценку вида

$$\text{var} [\widehat{\mathbf{F}}(t)] = \frac{[\widehat{\mathbf{F}}(t)]^2 [1-\widehat{\mathbf{F}}(t)]}{r(t)}. \quad (4.6)$$

Для оценки (4.6) имеются следующие основания. При заданных значениях, n , $r(t)$ и $\widehat{\mathbf{F}}(t)$ весьма правдоподобно, что наименее информативное расположение данных возникает, когда все цензурирования на интервале $(0, t)$ выполнены в начальный момент. Поэтому цензурированные наблюдения не вносят никакой информации в оценивание $\widehat{\mathbf{F}}(t)$. В этом случае число нецензурированных наблюдений будет равно $r(t)\widehat{\mathbf{F}}(t) = n_0$ и соотношение (4.6) получается как оценка дисперсии одной биномиальной частоты $\widehat{\mathbf{F}}(t)$, основанной на n_0 испытаниях.

Как уже объяснялось в 3.3, можно избежать зависимости от функции $\mathbf{F}(t_0)$, выбранной за основу нормальной аппроксимации, используя доверительные интервалы, построенные по функции правдоподобия. Это может быть сделано на основе соотношения (4.3) для биномиального логарифма функции правдоподобия. Максимальное значение логарифма функции правдоподобия для h_j ($j = 1, \dots, g$) из единичного куба равно

$$\Sigma \{d_j \log(d_j/r_j) + (r_j-d_j) \log[(r_j-d_j)/r_j]\}.$$

Предположим теперь, что $\theta = \mathbf{F}(t)$ рассматривается как интересующий нас параметр:

$$\Sigma^{(t)} \log(1-h_j) = \log \theta.$$

Для того чтобы проверить нулевую гипотезу $\theta = \theta_0$, введем множитель Лагранжа ζ_0 и максимизируем вместо (4.3) выражение

$$\sum d_j \log h_j + \sum (r_j - d_j) \log (1 - h_j) + \Sigma^{(t)} \zeta_0 \log (1 - h_j).$$

Значения h_j , в которых достигается максимум, равны \tilde{h}_j , где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j &= \hat{h}_j \quad (a_j \geq t), \\ \tilde{h}_j &= d_j / (r_j + \zeta_0) \quad (a_j < t). \end{aligned}$$

а значение ζ_0 определяется из соотношения

$$\Sigma^{(t)} \log (1 - \tilde{h}_j) = \log \theta_0. \quad (4.7)$$

Статистика для проверки нулевой гипотезы имеет вид

$$\begin{aligned} W(\theta_0) &= 2 \Sigma^{(t)} \{ r_j \log [(r_j + \zeta_0) / r_j] + \\ &+ (r_j - d_j) \log [(r_j - d_j) / (r_j + \zeta_0 - d_j)] \}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Откуда получаем $(1 - \alpha)$ доверительную область для $\theta = F(t)$

$$\{\theta : W(\theta) \leq c_{1-\alpha}^*\},$$

где $c_{1-\alpha}^*$ — верхняя α -квантиль хи-квадрат распределения с одной степенью свободы. Лучшее всего это сделать так: взять ζ в качестве нового (зависящего от данных) параметра, получить через W доверительную область для ζ и затем перемасштабировать шкалу ζ через θ , используя (4.7).

Связь с формулой Гринвуда становится явной из следующих разложений:

$$\begin{aligned} W(\theta_0) &= \zeta_0^2 \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} + O_p(1/\sqrt{n}) = \\ &= [\log \hat{F}(t_0) - \log \theta_0]^2 \left(-\Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right)^{-1} + O_p(1/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Различие между доверительными границами, полученными таким способом и с помощью формулы Гринвуда, наиболее значительно на хвостах распределения, где более естественны асимметричные границы. Так, например, для данных, использованных в табл. 4.1, первое значение функции надежности, оцениваемое как 0,8571, имеет стандартное отклонение по формуле Гринвуда, равное 0,0764, и расчеты на основе нормальной аппроксимации становятся очень рискованными и невозможны при экстремальных уровнях. Значения ζ , соответствующие $\alpha = 0,95$, равны 59 и $-11,9$, а получающиеся границы для $F(t)$ равны 0,9625 и 0,6703. Для последнего значения, указанного в таблице, функция надежности равна 0,4482, стандартное отклонение — 0,1346, значения ζ равны 12,3 и $-3,75$. Следовательно, границы для $F(t)$ — 0,6965 и 0,2028 — почти симметричны и близки к значениям, построенным по формуле Гринвуда.

4.4. СТРАХОВАЯ ОЦЕНКА

На практике чаще встречаются непрерывные распределения, а не дискретные, как предполагалось до сих пор в настоящей главе. В этом разделе рассматривается оценка непрерывной функции распределения с кусочно-постоянной функцией интенсивности, т. е. для $j = 1, \dots, g$

$$h_T(t) = \frac{f(t)}{F(t)} = \rho_j (a_{j-1} \leq t < a_j),$$

где значения a_j определены заранее, причем $a_0 = 0$. Это допущение не является особенно правдоподобным, но именно с его помощью оцененная функция интенсивности отражает поведение данных так, как этого нельзя было бы сделать при строгих параметрических предположениях. В то же время удается избежать аналитических сложностей полностью непараметрического описания непрерывного распределения. Использование сплайнов позволяет ввести дополнительные условия «гладкости», накладываемые на $h(t)$. Правда, это достигается при усложнении вычислительного процесса и за счет того, что $h(t)$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения на части области определения.

В дальнейшем предполагается, что цензурирование также управляется случайным механизмом со своей собственной кусочно-постоянной функцией интенсивности

$$h_c(t) = \lambda_j (a_{j-1} \leq t < a_j),$$

и обозначим через $b_j = a_j - a_{j-1}$ ширину интервала. Рассмотрим оценки максимального правдоподобия параметров ρ_j (считая λ_j мешающими параметрами) сначала, когда все времена жизни и моменты цензурирования точно известны, и затем, когда они даны в сгруппированном виде. Последний случай, когда регистрируются только числа отказов d_j и m_j цензурирований из r_{j-1} , поступивших к началу интервала $[a_{j-1}, a_j)$, встречается чаще.

В первом случае выражение для логарифма функции правдоподобия по ρ_j можно вывести, не используя λ_j на основе методов, предложенных в гл. 3. Действительно, из (3.10) получаем

$$l(\rho) = \sum_{j=1}^g (d_j \log \rho_j - u_j \rho_j),$$

где

$$u_j = \sum_{i=1}^n I(x_i; a_{j-1}, a_j),$$

и u_j является полным временем наработок на интервале (a_{j-1}, a_j) .

Функция I определяется как

$$I(x; a_{j-1}, a_j) = \begin{cases} 0 & (x < a_{j-1}), \\ x - a_{j-1} & (a_{j-1} \leq x < a_j), \\ a_j & (x \geq a_j). \end{cases}$$

Оценка максимального правдоподобия ρ_j , полученная из решения уравнения $\partial l / \partial \rho_j = 0$, имеет вид

$$\widehat{\rho}_j = \frac{d_j}{a_j}, \quad (4.9)$$

т. е. отношение полного числа отказов в интервале $[a_{j-1}, a_j]$ к полному времени наработок в этом интервале — непосредственное обобщение результата (3.13) для одного экспоненциального параметра ρ . Величины $\widehat{\rho}_j$ асимптотически независимы, так как

$$\partial^2 l / \partial \rho_j \partial \rho_k \equiv 0 \quad (j \neq k).$$

Во втором случае необходимо рассмотреть для каждого интервала (a_{j-1}, a_j) отдельно вклад в функцию правдоподобия $\text{lik}(\rho, \lambda)$:

(i) $r_{j-1} - d_j - m_j$ объектов, которые продолжали работать и не были цензурированы на этом интервале;

(ii) d_j объектов, которые отказали на этом интервале;

(iii) m_j объектов, которые были цензурированы на этом интервале, при условии, что все они действовали к началу этого интервала. Для простоты опустим пока индексы $j - 1$ и j . Условные вероятности, соответствующие этим трем типам объектов, равны:

$$(i) \exp[-b(\rho + \lambda)];$$

$$(ii) \int_0^b \rho e^{-\rho v} e^{-\lambda v} dv = \frac{\rho}{\rho + \lambda} \{1 - \exp[-b(\rho + \lambda)]\};$$

$$(iii) \int_0^b \lambda e^{-\lambda v} e^{-\rho v} dv = \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \{1 - \exp[-b(\rho + \lambda)]\}.$$

Вклад в полный логарифм функции правдоподобия от каждого интервала (a_{j-1}, a_j) имеет вид

$$l_j(\rho_j, \lambda_j) = -(r - d - m) b (\rho + \lambda) + d \log\left(\frac{\rho}{\rho + \lambda}\right) + \\ + m \log\left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda}\right) + (d + m) \log\{1 - \exp[-b(\rho + \lambda)]\},$$

где опять в правой части уравнения опущены индексы $j - 1$ и j . Как и ранее, другие интервалы не вносят вклада в логарифм функции правдоподобия по (ρ_j, λ_j) .

Явные выражения для оценок максимального правдоподобия для ρ_j и $\widehat{\lambda}_j$ могут быть найдены как решения уравнений:

$$\frac{\partial l}{\partial \rho} = -(r - d - m) b + \frac{d}{\rho} - \frac{d + m}{\rho + \lambda} + \frac{(d + m) b \exp[-b(\rho + \lambda)]}{1 - \exp[-b(\rho + \lambda)]} = 0; \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = -(r - d - m) b + \frac{m}{\lambda} - \frac{d + m}{\rho + \lambda} + \frac{(d + m) b \exp[-b(\rho + \lambda)]}{1 - \exp[-b(\rho + \lambda)]} = 0. \quad (4.10)$$

Из разности этих уравнений получаем

$$d_j \rho = m/\lambda - (d + m)/(\rho + \lambda),$$

и, подставляя в (4.10), находим

$$\widehat{\rho} = \frac{d}{b(d+m)} \log \left(\frac{r-d-m}{r} \right), \quad \lambda = -\frac{m}{b(d+m)} \log \left(\frac{r-d-m}{r} \right). \quad (4.11)$$

Если ширина интервала b мала, то отношение $(d+m)/r$ также мало и логарифм можно представить в виде ряда, откуда находим

$$\begin{aligned} b\widehat{\rho} &= \frac{d}{r} + \frac{1}{2} \frac{d(d+m)}{r^2} + O\left(\frac{d+m}{r}\right)^3 = \\ &= \frac{d}{r - \frac{1}{2}(d+m)} \left[1 + O\left(\frac{d+m}{r}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Статистика

$$\rho_j = \frac{d_j}{b_j \left[r_{j-1} - \frac{1}{2} (d_j + m_j) \right]} \quad (4.12)$$

обычно используется для оценивания величины функции интенсивности ρ_j на интервале $[a_{j-1}, a_j]$. Сравнение с (4.9) показывает: использование этой оценки в некотором смысле эквивалентно предположению о том, что отказы и цензурирования происходят равномерно на интервале, если знаменатель (4.12) равен u_j — полному времени наработки на этом интервале.

Как правило, больший интерес, чем само значение ρ_j , представляет условная вероятность $\exp(-b_j \rho_j)$ безотказной работы на интервале без цензурирования. С тем же порядком точности приближения оценка вероятности отказа на интервале имеет вид

$$1 - \exp(-b_j \rho_j) \approx d_j/r'_j = \bar{q}_j,$$

где r'_j называется числом объектов, предъявленным на испытания на $[a_{j-1}, a_j]$, и определяется соотношением

$$r'_j = r_{j-1} - \frac{1}{2} m_j.$$

Страховая оценка \widehat{F} получается комбинированием оценок \bar{q}_j и равна

$$\widehat{F}(a_j) = \prod_{k \leq j} \left(1 - \frac{d_k}{r'_k} \right). \quad (4.13)$$

Эта оценка отличается от множительной оценки из 4.2, соответствующей точке $t = a_j +$, только заменой r_j на r'_j (коррекцией на «полупери-

од»). Как правило, эти оценки мало отличаются, если распределение не имеет очень тяжелых хвостов. Формула Гринвуда для оценки дисперсии $\widehat{F}(a_j)$ в этом случае приобретает следующий вид:

$$\text{var}[\widehat{F}(a_j)] - [\widehat{F}(a_j)]^2 \sum_{k=1}^j \frac{d_k}{r'_k (r'_k - d_k)}.$$

4.5. ФУНКЦИИ РИСКА: ПРОВЕРКА СОГЛАСИЯ

Как уже упоминалось в 2.4, графики функции интенсивности или функции риска часто полезны при проверке соответствия выбранного типа параметрического семейства распределений времен жизни определенному множеству данных. Хотя в качестве оценки функции риска можно использовать логарифм со знаком минус от оценки Каплана — Мейера, обычно используется оценка

$$\widehat{H}(t) = \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j}, \quad (4.14)$$

которая вытекает из соотношения (2.12). Заметим, что при отсутствии совпадений и цензурирования, т. е. если $\{a_1, a_2, \dots, a_g\}$ обозначают упорядоченные наработки до отказов, имеем

$$\widehat{H}(a_k) = e_{nk} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n+1-j},$$

математическое ожидание k -й порядковой статистики единичной экспоненциальной выборки.

Оценка дисперсии $\widehat{H}(t) = -\log \widehat{F}(t)$ была получена при выводе формулы Гринвуда и равна

$$\text{var}[\widehat{H}(t)] = \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j (r_j - d_j)}. \quad (4.15)$$

Недостаток графика функции риска состоит в том, что сильно выделяется ее поведение на хвосте распределения, где, как видно из (4.15), оценка наиболее неустойчива. Кроме того, выборочные ошибки для $\widehat{H}(t)$ не являются независимыми. При небольших объемах данных иногда требуется визуальная оценка случайной ошибки, определить которую можно с помощью изучения разброса среди точек с независимыми ошибками и предпочтительно с постоянной известной дисперсией. Рассмотрим один из приближенных методов для этого. Выберите небольшое целое положительное число, например, $k = 4$. Пусть $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots$ — полные времена наработок до k -го отказа, между k -м и $2k$ -м отказами и т.д. Если обозначить через ρ_j средний полный риск в течение периода, определенного $S_j^{(k)}$, т.е. сумму по всем наблю-

даемым объектам в течение этого периода, то тогда $2\rho_j S_j^{(k)}$ имеет хи-квадрат распределение с $2k$ степенями свободы. Как следует из свойств логарифмически хи-квадрат распределения случайная величина

$$Z_j^{(k)} = -\log\left(\frac{S_j^{(k)}}{k}\right) - \frac{1}{2k - \frac{1}{3}}$$

имеет среднее и дисперсию, приближенно равные соответственно $\log\rho_j$ и $(k - \frac{1}{2})^{-1}$. Далее, $Z_j^{(k)}$ приближенно взаимно независимы. Естественно изобразить на графике точки $(\bar{t}_j^{(k)}, Z_j^{(k)})$ или $(\log \bar{t}_j^{(k)}, Z_j^{(k)})$, где $\bar{t}_j^{(k)}$ — центр соответствующего временного интервала.

4.6. БАЙЕСОВСКИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

При отсутствии цензурирования естественным априорным распределением, описывающим неопределенность относительно атомов f_j дискретного и, возможно, несобственного распределения времени жизни (2.6), является распределение Дирихле с плотностью пропорциональной

$$f_1^{\alpha_1-1} f_2^{\alpha_2-1} \dots f_g^{\alpha_g-1} (1-f_1-f_2-\dots-f_g)^{\alpha_{g+1}-1}, \quad (4.16)$$

$\alpha_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, g+1)$. Это распределение — сопряженное априорное распределение для полиномиальной функции правдоподобия, т. е. апостериорное распределение для $\{f_j\}$, при условии, что из общего числа n отказов d_j отказов наблюдалось в момент времени a_j ($\sum d_j \leq n$), имеет тот же вид с параметрами

$$d_j (j = 1, \dots, g), \quad \alpha'_{g+1} = \alpha_{g+1} + n - \sum d_j.$$

Однако, если некоторые наработки до отказа цензурированы, распределение f уже не сохранит вид распределения Дирихле. Как и раньше, удобно перейти к (дискретной) функции интенсивности с помощью преобразования (4.1). Якобиан этого преобразования равен

$$(1-h_1)^{g-1} (1-h_2)^{g-2} \dots (1-h_{g-1})^1$$

и, как следует непосредственно из определения f и h ,

$$1-f_1-f_2-\dots-f_g = (1-h_1)(1-h_2)\dots(1-h_g).$$

Обе части последнего выражения равны ρg ($T > a_g$). Соотношение (4.16) через величины $\{h_j\}$ можно записать с точностью до некоторого постоянного коэффициента в следующем виде:

$$\prod_{j=1}^g h_j^{\alpha_j-1} (1-h_j)^{\nu_j-1}, \quad (4.17)$$

где

$$\gamma_j = \prod_{k=j+1}^{g+1} \alpha_k. \quad (4.18)$$

Выражение (4.17) имеет вид произведения независимых бетта-распределений. «Вырожденный» вид (4.16) при $\alpha_j = 0$ для всех j соответствует «вырожденному» виду (4.17) при $\alpha_j = \gamma_j = 0$ для всех j . Однако, в общем случае, перестановочность f_j , т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_g$, не эквивалентна перестановочности h_j .

Как отмечалось ранее, функция правдоподобия для $\{h_j\}$ из цензурированных справа данных, среди которых имеется d_j наблюдаемых отказов из r_j наблюдаемых объектов к моменту a_j , пропорциональна

$$\prod_{j=1}^g h_j^{d_j} (1-h_j)^{r_j-d_j}, \quad (4.19)$$

т. е. эквивалентна соответствующей функции правдоподобия для независимых биномиальных величин. Из соотношений (4.17) и (4.19) получаем, что апостериорное распределение $\{h_j\}$ с фиксированными данными является также произведением независимых бетта-распределений с параметрами формы $\alpha'_j = \alpha_j + d_j$, $\gamma'_j = \gamma_j + r_j - d_j$. В общем случае это не соответствует распределению Дирихле для величин $\{f_j\}$. Теоретически можно получить апостериорное распределение функции надежности

$$F(a_j) = (1-h_1)(1-h_2)\dots(1-h_{j-1}),$$

но вид его достаточно сложен. Легко вычислить апостериорные моменты $F(a_j)$ (см. упр. 4.7). Для вырожденного, наиболее неопределенного априорного распределения с $\alpha_j = \gamma_j = 0$ множительная оценка совпадает с апостериорным средним относительно F .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таблицы времени жизни в течение многих лет использовались демографами и страховыми агентами для описания и сравнения моделей человеческой смертности, часто на основе так называемого ожидания времени жизни. По-видимому, впервые множительная оценка была предложена Бохмером (1912), но сама страховая оценка была получена гораздо раньше. Формула (4.5) принадлежит Гринвуду (1926). Каплан и Мейер (1958) вывели множительную оценку на основании принципа максимального правдоподобия; более детальное ее обсуждение можно найти в работе Йоханссена (1978). Обзор ключевых понятий дается Эфроном (1967); (см. гл. II настоящей книги). В работе Андерсона и Сен-силселвана (1980) описывается использование слайнов для оценивания функций интенсивностей. За счет несколько искусственных ограничений на вид распределения времен жизни можно было бы применить стандартную теорию максимального правдоподобия для больших выбо-

рок, чтобы строго обосновать предложенные методы. От большинства из этих ограничений можно освободиться, но тогда усложняется теория. Понятие слабой сходимости вероятностных мер (Биллингсли, 1968) ведет к соответствующим математическим методам. Приложения к цензурированным данным можно найти в работах Бреслоу и Кроули (1974), а также Мейера (1975). Гиллеси и Фишер (1979), Холл и Уеллер (1980) используют теорию для вывода совместных временных доверительных границ. О подходе, использующем мартигальную теорию, см. работы Аалена (1976, 1978) и Гилла (1980). В статье Рида (1981а) обсуждается функция влияния для цензурированных данных, а в работах Эфрона (1981) и Рида (1981 б) — некоторые численные методы для получения интервальных оценок медианы функции распределения времени жизни для цензурированных данных. Содержание предыдущего параграфа и подобных рассуждений относится к байесовской теории. Фергюсон (1973) ввел процессы Дирихле для нахождения непараметрических байесовских оценок функции распределения нецензурированных данных. Это позволяет избежать предварительного задания атомов распределения. Обобщения на цензурированные времена жизни обсуждались в работах Сусарла и Ван Райзина (1976), Доксама (1974), Корнфилда и Детре (1977), Кэлбфлейша и Маккэя (1978), Кэлбфлейша (1978), а также Фергюсона и Фадия (1979). В работе Барриджа описывается эмпирический байесовский подход.

График функции риска был предложен Нельсоном (1969, 1972). В работе Кокса (1979) освещаются графические методы при оценке степени согласия модели.

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Проверьте, верно ли утверждение, что при отсутствии цензурирования множительная оценка сводится к эмпирической функции распределения

$$\widehat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i, t),$$

где $I(x, t) = 1$, если $x < t$; $I(x, t) = 0$, если $x \geq t$. Покажите, что в этом случае формула Гринвуда соответствует обычной оценке биномиальной дисперсии.

4.2. Предположим, что моменты цензурирования случайны с функцией надежности $K(t)$. Пусть $Z(t) = \sqrt{n} [\widehat{F}_n(t) - F(t)]$, где $\widehat{F}_n(t)$ — множительная оценка функции интенсивности по n наблюдениям. Покажите, что при $n \rightarrow \infty$ функция ковариации $\text{cov} \{Z_n(s), Z_n(t)\}$ ($s \leq t$) сходится к

$$-F_0(s) F_0(t) \int_0^s \frac{dF(u)}{[F(u)]^2 K(u)}.$$

[Строгое доказательство см. у Бреслоу и Кроули (1974)].

4.3. Оценка усеченного среднего распределения F , полученная с помощью распределения Каплана — Мейера, имеет вид

$$\widehat{\mu}_L = \int_0^L \widehat{F}(t) dt.$$

Покажите, используя предыдущее упражнение, что оценку дисперсии $\widehat{\mu}_L$ можно представить как

$$\text{var}(\widehat{\mu}_L) = \frac{1}{n} \int_0^L \frac{1}{[F(s)]^2 K(s)} \left(\int_s^L F(u) du \right)^2 |dF(s)|.$$

Что произойдет, когда $L \rightarrow \infty$? Предложите оценки для дисперсии $\widehat{\mu}_L$ и ее предела (так называемого ожидания времени жизни). [Ирвин (1949); Каплаг и Мейер (1958); Мейер (1975); Рид (1981a)]

4.4. Пользуясь рассуждениями из 4.4., покажите, что точное условное распределение d_j при заданных r_{j-1} и $d_j + m_j$ является биномиальным с параметрами $d_j + m_j$ и $\rho/(\rho + \lambda)$.

4.5. Исследуйте обобщение рассуждений раздела 4.4 в предположении, что функции интенсивности $h_T(t)$ и $h_c(t)$ на (a_{j-1}, a_j) имеют вид $h_T(t) = \rho_j h_0(t)$, $h_c(t) = \lambda_j h_0(t)$ для некоторой неизвестной функции $h_0(t)$.

4.6. Сравните вторые производные для двух случаев, описанных в 4.4. Найдите математическое ожидание потери информации о ρ_j в результате группирования, оцените эту величину для некоторых типичных значений величин $b\rho_j$, $b\lambda_j$. [Пирс и др. (1979)]

4.7. Покажите, что если случайная величина h имеет бета-распределение с плотностью, пропорциональной $h^{\alpha-1}(1-h)^{\gamma-1}$, то ее математическое ожидание равно $\alpha/(\alpha + \gamma)$, если $\alpha > 0$, $\gamma > 0$; нулю, если $\alpha = 0$, $\gamma > 0$; и единице, если $\alpha > 0$, $\gamma = 0$. Выведите отсюда оценку апостериорного среднего для функции надежности, полученную в 4.6.

4.8. Докажите, используя рассуждения, аналогичные примененным при выводе формулы Гринвуда, что дисперсия логит-преобразования, $\log \{ \widehat{F}(t) / [1 - \widehat{F}(t)] \}$, приближенно равна

$$[1 - \widehat{F}(t)]^{-2} \Sigma^{(t)} \frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)}.$$

Предложите, как эта оценка может быть использована для анализа с помощью эмпирически взвешенных наименьших квадратов линейной логистической модели для функции надежности в одной определенной точке t_0 . Данные сгруппированы в множества с равными или почти равными значениями поясняющих переменных.

4.9. Сглаженная оценка функции интенсивности может быть получена для нецензурированных данных либо с помощью «ядерной оценки» плотности, либо:

(i) делением на выборочную функцию надежности;

(ii) делением на интеграл от сглаженной плотности или некоторую другую сглаженную оценку функции надежности.

Сравните эти способы и прокомментируйте целесообразность применения ядра с различными значениями в разных частях области определения.

Как эти процедуры и рассуждения адаптировать к цензурированным данным? Когда лучше использовать графические и численные методы, пригодные для получения гладких результатов при очень небольшом количестве данных, в противоположность процедурам, в которых изменчивость этих результатов проявляется явно?

5.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах обсуждались модели и их анализ для относительно простых задач, связанных с одним распределением. Часто бывает необходимо сравнивать несколько наборов данных. Иногда наилучший способ такого сравнения состоит в оценке функций надежности для каждого набора данных и затем уже в качественном их сравнении непосредственно или через некоторые суммарные статистики. Однако более чувствительные или более сложные сравнения моделей можно выполнить, используя расширенные модели, в которых влияние поясняющих переменных определяется значениями неизвестных параметров. В настоящей главе дается обзор лишь некоторых из многих возможных моделей, которые могут быть использованы для описания влияния поясняющих переменных на наработку до отказа. Для этого предположим, что для каждого объекта задан определенный вектор z поясняющих переменных размерности $q \times 1$. Компоненты вектора z могут соответствовать различным характеристикам, оказывающим влияние на наработку до отказа. Это:

- (i) разного типа лечения (воздействия),
- (ii) внутренние свойства объектов;
- (iii) внешние переменные.

Компоненты z могут быть также синтезированы для изучения взаимодействующих влияний способом, известным из множественного регрессионного анализа.

Поясняющие переменные можно классифицировать и другими способами, в частности как постоянные или зависящие от времени для каждого объекта. Некоторые из приводимых ниже идей не приложимы к зависящим от времени поясняющим переменным. Более того, определенные статистические методики вычисления гораздо сложнее для зависящих от времени поясняющих переменных. Тем не менее по многим причинам, которые будут ясны в дальнейшем важно включить поясняющие переменные, зависящие от времени, в это обсуждение.

Вот несколько общих примеров поясняющих переменных. В простом сравнении двух способов воздействия, например, «нового» способа воздействия с «контрольным» рассматривается бинарная поясняющая

переменная, равная 1 для объектов, которые подвергаются воздействию, и 0, для контрольного объекта. Если воздействие определяется дозой (или уровнем напряжения), то соответствующей поясняющей переменной является доза или логарифм дозы. Если же воздействие факториальное, для описания эффектов взаимодействия различных факторов, возможно, потребуются несколько поясняющих переменных, а также искусственно введенных произведений переменных. В большинстве случаев такие переменные будут постоянными для каждого объекта. Однако переменные величины, зависящие от времени, могут возникать с помощью двух существенно различающихся способов.

Во-первых, особенно в контексте, связанном с надежностью в промышленности, может применяться изменяющаяся со временем величина напряжения или некоторая другая подходящая накопленная мера общей нагрузки. В компоненты вектора z также удобно ввести функции от всей предыдущей истории процесса изменения дозы или напряжения.

Во-вторых, иногда наблюдаемое воздействие применяют не сразу после начала отсчета времени. Тогда подходящей поясняющей переменной может быть бинарная, зависящая от времени переменная, равная нулю. Но после применения воздействия она становится равной 1.

Поясняющие переменные, измеряющие внутренние свойства объектов в медицинских приложениях, включают такие демографические переменные, как пол, возраст на начальный момент изучения, а также переменные, описывающие историю болезни перед назначением на исследование. Некоторые переменные могут определять качественные группирования объектов.

Для задания таких зависящих от времени поясняющих переменных, на которые могут влиять переменные, связанные с данным воздействием при обследовании, требуется большая осторожность.

Сравним влияние на время жизни двух альтернативных методов лечения гипертонии, взяв за поясняющую переменную величину кровяного давления. Использование этой величины до назначения лечения в качестве фиксированной поясняющей переменной является стандартным способом для обнаружения действительного улучшения состояния больного и выявления влияния других факторов. Принятие же величины кровяного давления, контролируемого после назначения лечения, в качестве поясняющей переменной приводит к вопросу: не объясняется ли разница во временах выживания между данными способами лечения этим влиянием на кровяное давление? Зависящие от времени поясняющие переменные обсуждаются более подробно в гл. 8.

Наконец, внешние переменные определяют, в частности, свойства окружающей среды в данной задаче, и, кроме того, они могут потребоваться для описания группировки индивидуумов по отношению к наблюдателям, совокупности приборов и т. д.

Обычно при определении вектора z поясняющих переменных значение $z = 0$ соответствует некоторому значимому «стандартному» множеству состояний, например контрольному воздействию. Удобнее разрабатывать модели в два этапа:

- а) модель для распределения наработки до отказа, когда $z = 0$;
 б) представление изменения, вызванного ненулевым значением z , выраженное в некотором параметрическом виде.

Последующее описание некоторых частных моделей лучше начинать с простейшего сравнения двух воздействий, соответствующего бинарной поясняющей переменной. В дальнейшем через $\psi(z)$ обозначается функция, связывающая z со временем жизни: она всегда соответствует возрастающему риску, т. е. убыванию наработки до отказа. Буквой β будет обозначаться вектор параметров, характеризующий $\psi(z)$. Заметим, что в двух различных моделях функции $\psi(z)$, вообще говоря, количественно не сравнимы.

5.2. МОДЕЛЬ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ (ACCELERATED LIFE MODEL)

(i) Простая форма

Предположим, что имеется два типа воздействия, которым соответствуют значения 0 и 1 поясняющей переменной z . Пусть функция надежности для $z = 0$ равна $F_0(t)$. В модели ускоренных испытаний существует такая постоянная ψ , что функцию надежности для $z = 1$, обозначаемую $F_1(t)$ или $F(t; 1)$, можно представить в следующем виде:

$$F_1(t) = F_0(\psi t), \quad (5.1)$$

откуда следует, что

$$f_1(t) = \psi f_0(\psi t), \quad h_1(t) = \psi h_0(\psi t). \quad (5.2)$$

Другой вариант этого определения состоит в том, что любой объект со временем жизни t при $z = 0$ будет иметь при $z = 1$ время жизни t/ψ , т. е. соответствующие случайные величины связаны соотношением $T_1 = T_0/\psi$.

В более общем случае для произвольного постоянного вектора поясняющих переменных предполагается, что определена такая функция $\psi(z)$, что функция надежности, плотность и функция интенсивности соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F(t; z) &= F_0[t\psi(z)]; \\ f(t; z) &= f_0[t\psi(z)]\psi(z); \\ h(t; z) &= h_0[t\psi(z)]\psi(z). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если функция $F_0(\cdot)$ относится к стандартным условиям $z = 0$, то полагают $\psi(0) = 1$.

Соотношение (5.3) через случайные величины записывается как

$$T = T_0/\psi(z), \quad (5.4)$$

где T_0 имеет функцию надежности $F_0(\cdot)$. Если $\mu_0 = E(\log T_0)$, то можно записать соотношение (5.4) таким образом:

$$\log T = \mu_0 - \log \psi(z) + \varepsilon, \quad (5.5)$$

где ε — случайная величина с нулевым средним и распределением, не зависящим от z .

В задачах с конечным числом различных значений z , возможно, и не требуется дальнейшее уточнение вида функции $\psi(z)$. В других постановках может потребоваться параметрическое задание $\psi(z)$; тогда записываем $\psi(z; \beta)$. Так как $\psi(z, \beta) \geq 0$; $\psi(0; \beta) = 1$, то естественно предположить в качестве такой функции

$$\psi(z; \beta) = e^{\beta^T z}, \quad (5.6)$$

где вектор параметров β имеет размерность $q \times 1$. При этом (5.5) можно записать в следующем виде:

$$\log T = \mu_0 - \beta^T z + \varepsilon, \quad (5.7)$$

что соответствует линейной регрессионной модели. Заметим, что при сравнении двух групп с единственной бинарной поясняющей переменной в (5.1) можно положить $\psi = e^{\beta}$.

(ii) Некоторые результаты, полезные для проверки модели

Главное свойство модели ускоренных испытаний выражается различными способами, на основе чего можно строить критерии проверки адекватности выбранной модели. Так, из соотношения (5.5) следует, что распределения $\log T$ при различных значениях z отличаются только сдвигом. В частности, $\text{var}(\log T)$ -дисперсия постоянная. В качестве альтернативы в задаче о двух выборках можно сравнить квантили распределений. Определим $t_0^{(a)}$, $t_1^{(a)}$ для $0 < a < 1$ соотношениями:

$$a = F_0(t_0^{(a)}), \quad t_0^{(a)} = F_0^{-1}(a), \quad (5.8)$$

$$a = F_1(t_1^{(a)}), \quad t_1^{(a)} = F_1^{-1}(a),$$

так что при условии (5.1) получаем

$$t_1^{(a)} - t_0^{(a)} / \psi,$$

т. е. так называемые графики К — К (графики квантиль — квантиль) являются прямыми линиями, проходящими через начало координат. Предположив для простоты в (5.8), что $F_0(\cdot)$ — строго убывающая функция, получаем, что квантили определяются однозначно.

Очень часто простой анализ показывает неадекватность модели ускоренных испытаний. Например, для данных о пружинах (см. табл. 1.3) можно предположить, что с уменьшением нагрузки относительная

дисперсия значительно убывает, а среднее время наработок до отказа возрастает. Это подтверждается вычислением среднего и стандартного отклонения для $\log T$ при каждом уровне нагрузки. При этом самый низкий уровень нагрузки с сильным цензурованием не рассматривается, а в следующем по величине уровне нагрузки единственное цензурированное наблюдение считается отказом, тем самым здесь недооценивается среднее и стандартное отклонение $\log T$.

Таблица 5.1

Данные по пружинам, взятые из табл. 1.3;
 T — тысячи циклов до отказа.
 Среднее и стандартное отклонение $\log T$

Нагрузка (Н/мм ²)	$\log T$	
	среднее	стандартное отклонение
950	5,11	0,214
900	5,35	0,198
850	5,84	0,172
800	6,52	0,580
750	8,41	0,735

Окончательные результаты приведены в табл. 5.1.

Модель ускоренных испытаний может быть принята для трех наибольших уровней напряжения, но имеются очевидные свидетельства против нее, если считать, что она верна для всех нагрузок.

Дополнительная интерпретация возможна, если не пользоваться информацией о моде наработки до отказа

(например, не является ли она различной для самых низких уровней нагрузки). Так, при уровне 750 Н/мм² распределение близко к сдвинутому экспоненциальному.

(iii) Зависящие от времени поясняющие переменные

Предположим, что поясняющая переменная z зависит от времени. Обозначим ее $\{z(t)\}$. Лучше всего определить z так: функция интенсивности в каждый фиксированный момент времени t зависит только от значения поясняющей переменной в данный момент времени. Для этого потребуется ввести в качестве компонент $z(t)$ интегралы, суммы, производные и разности поясняющих переменных, которые регистрировались первоначально.

Сущность модели ускоренных испытаний состоит в том, что «время жизни» объекта сжимается или растягивается по отношению ко времени жизни объекта, находящегося в состоянии $z = 0$. Это предполагает, что для любого объекта, характеризуемого $z(t)$, связанное с ним время $t^{(z)}$ изменяется относительно времени объекта с $z = 0$ в соответствии с

$$dt^{(z)}/dt^{(0)} = 1/\psi [z(t^{(z)})],$$

$$\text{т. е. } t^{(0)} = \int_0^{t^{(z)}} \psi [z(u)] du = \Psi(t^{(z)}). \quad (5.9)$$

Поэтому наработки до отказов связаны вместо соотношения (5.4) следующим образом:

$$T = \psi^{-1}(T_0).$$

Однако можно заметить, что результат применения двух таких преобразований к T_0 , вообще говоря, будет зависеть от порядка, в котором они применялись. Следовательно, линейные комбинации таких зависящих от времени поясняющих переменных не обязательно подчиняются коммутативным правилам обычной арифметики.

Таким образом, функция надежности, плотность и функция интенсивности соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} F [t; \{z(\cdot)\}] &= F_0 [\Psi (t)]; \\ f [t; \{z(\cdot)\}] &= \psi [z(t)] f_0 [\Psi (t)]; \\ h [t; \{z(\cdot)\}] &= \psi [z(t)] h_0 [\Psi (t)]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

(iv) *Общий характер модели, изменяющейся со временем*

Насколько известно, модель ускоренных испытаний с меняющимися со временем поясняющими переменными до сих пор редко использовалась в приложениях, хотя она подходит для систем, зависящих от непостоянных переменных воздействия, как, например, «нагрузка». Однако существует другая интерпретация, в которой использование переменных, меняющихся со временем, превращает специальную модель в модель общего вида. Сравним две группы объектов и предположим, что вместо обычной бинарной поясняющей переменной вводится величина

$$z = \begin{cases} 0 & \text{группа 0,} \\ \xi(t) & \text{группа 1,} \end{cases}$$

где $\xi(t)$ — заданная функция и $\psi(z) = e^z$.

Тогда из соотношения (5.10) получаем, что функция надежности для группы 1 равна

$$F_0 [\Lambda_0(t)],$$

где

$$\Lambda_0(t) = \int_0^t e^{\xi(u)} du.$$

Откуда следует, что заданная функция надежности $F_1(t)$ может быть определена из соотношения

$$e^{\xi(t)} = \frac{d}{dt} F_0^{-1} F_1(t), \quad (5.11)$$

где предполагается, что носитель функции $F_0(\cdot)$ содержит носитель F_1 .

Один из способов построения весьма богатого семейства моделей для задачи с двумя группами объектов состоит в том, что можно построить вектор z следующим образом для $j = 0, \dots, p$:

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{группа 0,} \\ t^j & \text{группа 1,} \end{cases} \quad (5.12)$$

для некоторого подходящего значения p и затем положить

$$\psi(z) = e^{\beta^T z}, \quad (5.13)$$

где β — вектор размерности $q \times 1$, $q = p + 1$.

В большинстве примеров это обобщение модели ускоренных испытаний носит формальный характер (если оно не имеет непосредственного физического значения). Заметим, что в (5.12) могут использоваться и другие функции, не являющиеся степенями t , и что все сказанное выше распространяется в принципе на более сложную задачу, нежели сравнение двух групп объектов.

(v) Несколько типов отказа

Одна из причин неустойчивости модели ускоренных испытаний — наличие нескольких типов отказа, каждый из которых соответствует своей модели ускоренных испытаний, с различными по виду функциями ψ . При изменении z соотношение между типами отказов также меняется. В том случае, если наблюдаются различные типы отказа, можно построить более детальную модель (см. гл. 9). Если же различные типы отказа не наблюдаются, то тогда полезно взять в качестве гипотезы небольшое число типов отказов, и, изучая простые модели, попытаться вывести некоторые из их свойств. После этого на основе дополнительных экспериментальных данных проверить, имеют ли гипотетические типы отказа физическое содержание.

Предположим, что имеется l типов отказа и что наблюдаемая величина наработки до отказа T может быть представлена как

$$T = \min(T_1, \dots, T_l), \quad (5.14)$$

где при $z = 0$ T_j — независимые случайные величины с возможно несобственными функциями надежности $F_{0j}(\cdot)$. Рассмотрим для ясности случай единственной бинарной величины z и предположим, что при $z = 1$ функции надежности T_j равны $F_{0j}(\psi_j t)$. Тогда

$$F_0(t) = \prod_j F_{0j}(t), \quad F_1(t) = \prod_j F_{0j}(\psi_j t).$$

Отсюда легко получаем, что

$$h_0(t) = \sum_j h_{0j}(t), \quad h_1(t) = \sum_j \psi_j h_{0j}(\psi_j t). \quad (5.15)$$

(vi) Параметрические модели

До сих пор функция надежности $F_0(\cdot)$. При $z = 0$ не была точно определена. Если теперь предположить, что $F_0(\cdot)$ принадлежит одному из

параметрических семейств, обсуждавшихся в гл. 2, то получим специальное семейство моделей ускоренных испытаний. Если $\psi(\cdot)$ также задана параметрически, то модель становится полностью параметрической. Например, если функция надежности $F_0(\cdot)$ — логарифмически нормальна и $\psi(z; \beta) = e^{\beta T z}$, то при отсутствии цензурирования линейная модель (5.7) для $\log T$ будет линейной моделью с нормальными распределениями и к ней применимы обычные методы наименьших квадратов.

Важный частный случай возникает, когда $F_0(\cdot)$ является распределением Вейбулла (2.14) с параметрами (ρ_0, k) . Тогда очевидно, что для постоянных поясняющих переменных при заданном z случайная величина T также имеет распределение Вейбулла с параметрами $(\rho_0 \psi(z), k)$. Так, это верно для экспоненциального распределения, где $k = 1$.

Однако более важным частным случаем является логарифмически логистическое распределение, которое описано ниже.

(vii) Логарифмически логистическая модель ускоренных испытаний

Если сосредоточить внимание на определенном значении времени t_0 , то отказ или «не отказ» к моменту t_0 можно интерпретировать как бинарный отклик. И тогда естественно рассмотреть линейную логистическую модель, в которой

$$\log \{F(t_0; z) / [1 - F(t_0; z)]\} = \tilde{\beta}^T z + \alpha(t_0),$$

где $\alpha(t_0)$ соответствует основному уровню $z = 0$.

Теперь предположим, что такая модель выполнена для всех t_0 . Можно было бы, конечно, считать $\tilde{\beta}$, как и $\alpha(t)$, зависящим от t , но в простейшей модели будем предполагать, что $\tilde{\beta}$ от времени t не зависит. Потребуем также, чтобы $\alpha(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ и $\alpha(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это свойство выполняется, если взять, например, функцию $\alpha(t)$ пропорциональной $-\log t$. Записав $\alpha(t) = -k \log(t\rho)$ и $\tilde{\beta} = -k\beta$, получим

$$F(t; z) = \frac{1}{1 + (\rho t e^{\beta^T z})^k}. \quad (5.16)$$

Это и есть функция надежности модели ускоренных испытаний с базовой функцией надежности

$$\frac{1}{1 + (t\rho)^k}$$

логарифмически логистического распределения (см. 2.3 (viii)).

Такое представление может быть обобщено как основа для проверки согласия с типом распределения различными способами. Один из таких способов, как отмечалось выше, состоит в допуске зависимости параметров от t .

5.3. МОДЕЛЬ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

(i) Простая форма

Второе общее семейство моделей, широко использованное в анализе данных типа времени жизни, лучше всего задается через функцию интенсивности. Для постоянного вектора z поясняющих переменных предположим, что интенсивность определяется соотношением

$$h(t; z) = \psi(z) h_0(t), \quad (5.17)$$

где через $h_0(t)$ обозначена функция интенсивности некоторого объекта при стандартных условиях, $z = 0$, причем $\psi(0) = 1$. Тогда функция надежности и плотность имеют вид:

$$[F_0(t)]^{\psi(z)}, \quad \psi(z) [F_0(t)]^{\psi(z)-1} f_0(t).$$

Таким образом, функции надежности образуют семейство распределений Лемана, порожденное функцией $F_0(\cdot)$. Назовем (5.15) (простой) моделью с пропорциональными интенсивностями. Заметим, что хотя функция $\psi(z)$ выполняет ту же роль, что и функция $\psi(z)$ (см. 5.2), интерпретация их различна. Функция $\psi(z)$ может быть параметризована и определяться параметром β , т. е. $\psi(z) = \psi(z; \beta)$. Снова наиболее важным частным случаем является

$$\psi(z; \beta) = e^{\beta T z}. \quad (5.18)$$

Укажем причины, выделяющие это семейство из ряда других:

а) существует простая и доступная интерпретация основной его идеи, а именно, что влияние (или воздействие) на продолжительность времени жизни соответствует умножению интенсивности на постоянный множитель;

б) в некоторых областях исследования имеются указания, полученные из опытов и подтверждающие предположение о пропорциональности интенсивностей для различных по воздействию групп;

в) такая модель относительно легко обобщается для данных с цензурированием и несколькими типами отказа, и, в частности, технические задачи получения статистических выводов для произвольной $h_0(t)$ допускают простое решение.

(ii) Связь с моделью ускоренных испытаний

Для поясняющих переменных с постоянными значениями возникает естественный вопрос: в каких случаях модель пропорциональных интенсивностей является также моделью ускоренных испытаний? Для этого необходимо, чтобы существовала функция $\chi(z)$, такая, что

$$[F_0(t)]^{\psi(z)} = F_0[t\chi(z)]. \quad (5.19)$$

Положим

$$G_0(\tau) = \log[-\log F_0(e^\tau)].$$

Тогда

$$\log \psi(z) + G_0(\tau) = G_0[\tau + \lambda(z)],$$

где $\lambda(z) = \log \chi(z)$. Для выполнения этого соотношения для всех τ и для некоторой ненулевой функции $\lambda(z)$, т. е. неравной тождественно единице функции $\chi(z)$, необходимо, чтобы

$$G_0(\tau) = k\tau + \alpha, \quad \lambda(z) = \log \psi(z),$$

где α, k — постоянные величины. Таким образом, обозначив через $\rho = e^{\alpha/k}$, получаем

$$F_0(t) = \exp[-(\rho t)^k].$$

Следовательно, распределение Вейбулла является единственным порождающим распределением, для которого модели ускоренных испытаний и пропорциональных интенсивностей совпадают при условии постоянных поясняющих переменных.

Непосредственно из определения распределения Вейбулла следует, что модель ускоренных испытаний с «масштабными» параметрами $\psi_{AL}(z)$ имеет функции надежности и интенсивности соответственно

$$\exp\{-[\rho\psi_{AL}(z)t]^k\}, \quad k[\rho\psi_{AL}(z)]^k t^{k-1},$$

т. е. одновременно является также моделью, определяемой как

$$\psi_{PH}(z) = [\psi_{AL}(z)]^k.$$

В частности, если $\psi_{AL}(z) = \exp(\beta_{AL}^T z)$, то $\psi_{PH}(z) = \exp(\beta_{PH}^T z)$, где $\beta_{PH} = k\beta_{AL}$ (AL—accelerated life; PH—proportional hazard).

Различие между моделями пропорциональных интенсивностей и ускоренных испытаний лучше всего можно продемонстрировать на одном искусственном частном случае.

На рис. 5.1 изображены базовая функция интенсивностей (а также функция надежности и плотность) кусочно-постоянного вида и соответствующие функции для модели ускоренных испытаний с множителем 2 и затем для модели пропорциональных интенсивностей с удвоенной функцией интенсивности.

(iii) Зависящие от времени поясняющие переменные

Определение (5.17) простой модели с пропорциональными интенсивностями

$$h(t; z) = \psi(z) h_0(t)$$

можно легко обобщить на случай поясняющей переменной, зависящей от времени. Многие замечания (см. 5.2 (iii) и (iv)), касающиеся зависящих от времени переменных для модели ускоренных испытаний, также относятся и к этому случаю. Таким образом, постараемся определить $z(t)$ так, чтобы функция $h(t; z)$ зависела только от $z(t)$, но не зависела бы от $z(t')$, $t' \neq t$. К переменным, зависящим от времени $z(t)$, могут относиться также и подходящие содержательные переменные, меняющиеся со временем, и производные переменные, включенные для проверки применимости модели или для обобщения частной модели (i). Напри-

мер, при сравнении двух групп объектов соотношения (5.12) и (5.13) задают функции интенсивности в двух группах, равные соответственно

$$h_0(t), \exp\left(\sum_{j=0}^p \beta_j t^j\right) h_0(t). \quad (5.20)$$

Поэтому, по крайней мере при больших p , могут быть получены любые два распределения с общим носителем.

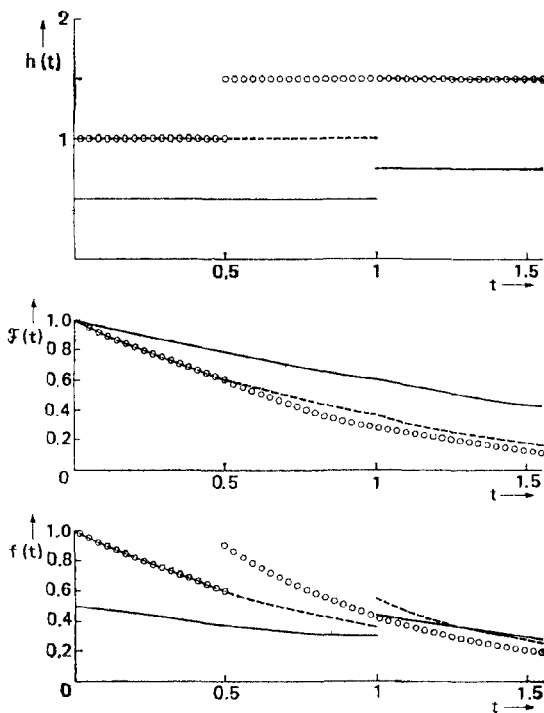


Рис. 5.1. Функции интенсивности и надежности, плотность: ————— — основное; ○○○○○○ — ускоренное множителем 2; - - - - - с удвоенной функцией интенсивности

(iv) Параметрический подход

Как вы заметили, зависимость от постоянной переменной иногда имела параметрический вид (например, в соотношении (5.18)), однако функция интенсивности $h_0(t)$ оставалась произвольной. Полностью параметрические модели можно получить, если предположить, что функция интенсивности $h_0(t)$ относится к одному из семейств распределений, обсужденных в гл. 2.

Вероятно, наиболее важными специальными случаями являются семейства Вейбулла, включающие как частный случай экспоненциальное семейство Гомпертца — Макегама и логарифмически логистическое семейство.

5.4. НЕМУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

В простой модели пропорциональных интенсивностей (5.17)

$$h(t; z) = \psi(z) h_0(t)$$

с постоянными поясняющими переменными функции интенсивности для разных уровней z пропорциональны. Однако функции интенсивности могут быть получены сдвигом на некоторую функцию, а также, в более общем случае, с помощью некоторого нелинейного преобразования h . Так, можно рассмотреть следующее представление:

$$h(t; z) = \varphi(z) + h_0(t) \quad (5.21)$$

или

$$h^{(\lambda)}(t; z) = \varphi(z) + h_0^{(\lambda)}(t),$$

где

$$h^{(\lambda)}(t; z) = \begin{cases} [h(t; z)]^\lambda & \lambda \neq 0, \\ \log h(t; z) & \lambda = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

В соотношениях (5.21) и (5.22) $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(z)$ определена таким образом, что правые части этих соотношений являются неотрицательными. Параметрические варианты модели можно получить, если положить, например, $\varphi(z) = \beta^T z$ и выбрать для $h_0(t)$ одно из параметрических семейств, приведенных в гл. 2. При $\lambda = 0$ получается модель пропорциональных интенсивностей.

Выбор между этими моделями обычно проводится эмпирически, включая как формальное оценивание λ в (5.23), так и исследование оцененных функций интенсивности (последнее более распространено).

Возможные альтернативные постановки можно увидеть из соотношения (5.14). Например, если

$$T = \min(T_1, \dots, T_l), \quad (5.24)$$

где T_1, \dots, T_l — независимые случайные величины, то

$$h(t) = \sum_{j=1}^l h_j(t), \quad (5.25)$$

где h_j — функция интенсивности T_j .

Предположим теперь, что различие между двумя воздействиями состоит в удалении некоторых T_j , т. е. источников отказов. Тогда разность между этими функциями интенсивности равнялась бы

$$\sum' h_j(t),$$

где суммирование ведется по удаленным T_j . Если бы функции интенсивности удаленных T_j были постоянными на области, представляющей интерес, то в качестве результата получилась бы аддитивная модель (5.21). Если же удаленные T_j представляли бы, грубо говоря, большую случайную выборку из l значений T_1, \dots, T_l , то в результате можно было бы получить модель пропорциональных интенсивностей.

5.5. МОДЕЛЬ С ПЕРЕНЕСЕННЫМ НАЧАЛОМ ОТСЧЕТА ВРЕМЕНИ

Возможная связь между функциями интенсивности двух групп может состоять в сдвиге по времени одной из них. Т.е. для некоторой постоянной Δ функции интенсивности равны соответственно

$$h_0(t), \quad h_0(t + \Delta)$$

с очевидным обобщением до $h_0[t + \Delta(z)]$ для интенсивности, соответствующей поясняющей переменной z .

Ясно, что $h_0(t + \Delta) = \psi h_0(t)$ для всех t тогда и только тогда, если $h_0(t)$ соответствует экспоненциальному или Гомпертца распределениям. Поэтому модель с перенесенным началом эквивалентна модели с пропорциональными интенсивностями именно в данном случае. Эту модель имеет смысл применять непосредственно только для тех значений t , когда и t , и $t + \Delta$ положительны.

5.6. МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ НАСТУПЛЕНИЯ ОТКАЗОВ (ACCELERATED ONSET MODEL)

В определенных постановках эффект воздействия может ускорить (или задержать) наступление отказов некоторых объектов. Отказы в оставшейся части не изменяются. Следовательно, при таком ускоренном наступлении части отказов объекты со значительным временем жизни будут иметь одинаковую функцию интенсивности в обеих группах.

Один из способов построения такой модели состоит в постулировании смешения двух (или большего числа) типов объектов с функциями надежности, скажем $F_{01}(t)$ и $F_{02}(t)$. Непосредственного различия между этими типами не наблюдается. Если к первому типу применима модель с пропорциональными интенсивностями, то для функции надежности получаем соотношения:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \theta F_{01}(t) + (1 - \theta) F_{02}(t); \\ F_1(t) &= \theta [F_{01}(t)]^\psi + (1 - \theta) F_{02}(t), \end{aligned} \quad (5.26)$$

а функции интенсивности соответственно равны:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= [\theta f_{01}(t) + (1 - \theta) f_{02}(t)] [\theta F_{01}(t) + (1 - \theta) F_{02}(t)]^{-1}; \\ h_1(t) &= \{ \theta \psi f_{01}(t) [F_{01}(t)]^{\psi-1} + (1 - \theta) f_{02}(t) \} \times \\ &\quad \times \{ \theta [F_{01}(t)]^\psi + (1 - \theta) F_{02}(t) \}^{-1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (5.26) предполагается, что $F_{01}(t)$ и $[F_{01}(t)]^\psi$ стремятся к нулю быстрее, чем $F_{02}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

При благоприятных обстоятельствах такая модель может быть согласована с данными (например, при некотором подборе параметров, соответствующих ее компонентным функциям надежности). Хотя вполне вероятно, что для этого потребуется большое количество высококачественных данных, если только на составляющие модель функции надежности не наложены сильные ограничения (в частности, предположение, что она или каждая из функций надежности является экспоненциальной). В последнем случае функции надежности можно представить в виде:

$$\theta e^{-\rho' t} + (1 - \theta) e^{-\rho'' t}, \quad \theta e^{-\psi \rho' t} + (1 - \theta) e^{-\rho'' t}; \quad (5.27)$$

где $0 < \theta < 1$. Если величины параметров ρ' и ρ'' сильно отличаются, то по графикам логарифмов функций надежности это легко можно установить.

Альтернативный, несколько более эмпирический подход к модели ускорения наступления отказов состоит в том, что в модель вводят такое начальное возмущение функции интенсивности $h_0(t)$ с полным интегралом, равным нулю, что при достаточно больших временах жизни функции надежности становятся идентичными. В качестве простого варианта этого подхода можно положить функции интенсивности для двух групп объектов равными

$$h_0(t), \quad h_0(t) + \alpha e^{-\gamma t} (t - 1/\gamma). \quad (5.28)$$

При $\gamma t \gg 1$ функции интенсивности и надежности для двух групп практически совпадают. Для более сложных задач одна из величин α или γ (либо каждая из них) может рассматриваться как функция от z .

Часто имеет смысл комбинировать эффект модели с ускоренным наступлением отказов с некоторым изменением основной интенсивности. Например, рассмотреть две функции интенсивности следующего вида:

$$h_0(t), \quad \psi h_0(t) + \alpha e^{-\gamma t} (t - 1/\gamma). \quad (5.29)$$

Все случаи $\psi = 1, \alpha = 0$; $\psi = 1, \alpha \neq 0$; $\psi \neq 1, \alpha = 0$ имеют прямые интерпретации.

5.7. ВОЗДЕЙСТВИЯ С КРАТКОВРЕМЕННЫМ ЭФФЕКТОМ

Ситуация, подобная описанной в 5.6, возникает, когда эффект воздействия (или в более общем случае влияние поясняющих переменных) может быть кратковременным, т. е. применимым только для небольших значений t . За неимением специальных моделей, основанных на теоретическом анализе системы, такие кратковременные эффекты воздействия могут быть выражены эмпирически несколькими способами. По-видимому, наиболее простой из них заключается в том, чтобы в случае двух групп объектов взять в качестве функций интенсивности

$$h_0(t), \quad \exp(\beta_1 + \beta_2 e^{-\gamma t}) h_0(t). \quad (5.30)$$

Случай $\beta_2 = 0$ сводится к простой модели с пропорциональными интенсивностями. Если $\beta_1 = 0$, $\gamma > 0$, то функция интенсивности, соответствующая группе 1, через некоторое время будет практически совпадать с функцией интенсивности группы 0. В конкретных ситуациях индивидуумы, время жизни которых настолько велико, что их функция интенсивности очень близка к $h_0(t)$, можно рассматривать как «полностью вылеченные».

5.8. ОБСУЖДЕНИЕ

В предыдущих разделах в общих чертах было показано, с какими трудностями можно столкнуться из-за разнообразия как общих типов модели, так и их небольших модификаций. Каждый из типов модели определяется через некоторую функцию надежности $F_0(t)$ при стандартных условиях $z = 0$ и с помощью изменяющего основную функцию надежности множителя, задаваемого различными способами. Функция $F_0(t)$ может определяться набором параметров (см. гл. 2).

Если основная задача исследования состоит в изучении качественного влияния поясняющих переменных на изработку до отказа, то выбор модели может и не иметь решающего значения. С другой стороны, если задача связана или с относительно «тонкими» вопросами зависимости от поясняющих переменных, или с различием альтернативных описаний модели, то, вероятно, может потребоваться очень много высококачественных данных. В некоторых случаях, особенно в физических науках, возможно, нужна специальная теория для выбора модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Параметрическая модель ускоренных испытаний, особенно когда $\psi(z; \beta) = e^{\beta T z}$, связана с моделями, широко используемыми в других областях приложений, так как она является логарифмически линейной моделью, т. е. линейной регрессионной моделью для $\log T$ (хотя в общем случае и с не нормально распределенными ошибками). Другим видам функции ψ соответствуют результаты нелинейной регрессионной модели. Главное предположение (5.4) для случайных величин соответствует подходу Фрэзера в работах по структурному оцениванию (1968, 1979).

K—K графики описаны Уилком и Гнанадесиканом (1968) и использовались для непараметрических выводов в задаче о двух выборках в работе Доксама и Сиверса (1976).

Различные виды регрессионных моделей в связи с экспоненциальным распределением были рассмотрены Фейглом и Целеном (1965), Коксом и Снеллом (1968), а несколько более общая логарифмически линейная модель — Глэссером (1967). Модель пропорциональных интенсивностей была предложена в работе Кокса (1972), там же рассмотрена без доказательства связь этой модели с моделью ускоренных испытаний; обзор дальнейших результатов вы найдете в работе Оукса (1981). Не-

мультипликативная модель, основанная на функции интенсивности, освещалась в работе Аранда-Ордаза (1980).

Хотя качественные идеи модели ускорения наступления отказов и кратковременных эффектов хорошо известны, явное описание моделей предложено в настоящей книге впервые.

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Найдите, используя соотношение (5.11), вариант задачи для двух выборок с функциями надежности (в случае зависящей от времени модели ускоренных испытаний $F_1(t) = F_0[(\rho t)^k]$). Предложите способ нахождения функции $\xi(t)$ «непараметрически» из двух функций надежности. Сформулируйте соответствующие варианты задач для трех выборок и в более общем случае для многих выборок.

5.2. Докажите, что две функции интенсивности $h_0(t)$ и $h_1(t)$ всегда можно представить в виде (5.15), используя для этого две функции интенсивности основных ненаблюдаемых типов, соответствующих модели ускоренных испытаний, если обе функции h_0 и h_1 имеют вид распределения Гомпертца — Макегама.

5.3. Исследуйте модель ускоренного начала испытаний (5.26) и (5.27), в которой обе компонентные функции надежности являются экспоненциальными. Как можно графически проверить непротиворечивость модели условию (5.26) и затем оценить ее параметры?

5.4. Предположим, что в задаче для двух выборок функции надежности удовлетворяют модели пропорциональных шансов

$$\frac{F_1(t)}{1 - F_1(t)} = \psi \frac{F_0(t)}{1 - F_0(t)}.$$

а) Покажите, что отношение функций интенсивностей

$$h_1(t)/h_0(t) \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

б) Предположим, что цензурирование отсутствует и времена жизни дихотомизированы в точке t_0 , так что объекты с временами жизни, большими t_0 , считаются как «положительные», а отказы до момента t_0 — как «отрицательные». Покажите, что соответствующая таблица сопряженности имеет отношение шансов, равное ψ . Как можно использовать этот результат (i) для оценки ψ , (ii) для графического подтверждения согласия?

в) Покажите, что если $F_0(t)$ имеет логарифмически логистический вид, то такой же вид имеет и $F_1(t)$.

г) Исследуйте общую постановку задачи, когда ψ является функцией поясняющей переменной, $\psi = \psi(z)$.

[Плакетт (1965); Клейтон (1974); Макгулах (1980); Беннетт (1983)]

5.5. Рассмотрите две группы объектов с функциями интенсивности $h_0(t)$, $h_1(t)$ и функциями надежности $F_0(t)$, $F_1(t)$. Изучите связь между пересечениями функций интенсивности и функций надежности, отмечая следующее:

а) если непрерывные функции надежности пересекаются один раз, то и функции интенсивности пересекаются не меньше одного раза;
 б) возможно, что $F_1(t) > F_0(t)$ для всех $t > 0$, но в то же время функции интенсивности неоднократно пересекаются;

в) если обе группы состоят из смещения объектов с «короткими» наработками с различными распределениями для каждой группы, а также объектов с «длинными» наработками с одинаковыми распределениями в двух группах, то функции интенсивности становятся равными для больших t . Для функций надежности этого в общем случае утверждать нельзя.

5.6. Предположим, что при сравнении двух групп объектов почти все наработки до отказа в одной из групп меньше некоторого t' , а в другой — почти все больше t' . Какой вывод можно сделать о функциях интенсивности? Можно ли отвергнуть модель пропорциональных интенсивностей? Есть ли особая трудность в проверке применимости модели ускоренных испытаний?

5.7. Для логарифмически логистической модели ускоренных испытаний (см. 5.2. (vii) и упр. 5.4) сравните в цензурированном случае асимптотические эффективности оценки полного максимального правдоподобия параметра β и оценки максимального правдоподобия этого параметра в модели логистического бинарного отклика, основанной на использовании только бинарной информации (есть или нет отказа в фиксированный момент времени t_0).

5.8. Предположим, что $h_0(t)$ и $h_1(t)$ — непрерывные ограниченные функции интенсивности, удовлетворяющие при некотором ψ , $0 < \psi < 1$ для всех t следующему условию:

$$h_0(t) > h_1(t) > \psi h_0(\psi(t)).$$

Покажите, что в этом случае можно найти представление вида (5.15) с $l = 2$, выраженное через неотрицательные компонентные функции интенсивности $h_{01}(t)$ и $h_{02}(t)$. Выразите эти функции через $h_0(t)$ и $h_1(t)$.

5.9. Используя рассуждение, аналогичное приведенному в 5.3 (ii), покажите, что модель пропорциональных шансов

$$\frac{F_1(t)}{1 - F_1(t)} = \psi \frac{F_0(t)}{1 - F_0(t)}$$

является моделью ускоренных испытаний тогда и только тогда, когда $F_0(t)$ имеет логарифмически логистический вид.

По аналогии укажите подобную характеризацию для логарифмически нормального распределения через пробит-модель

$$\Phi^{-1}\{F_1(t)\} = \psi + \Phi^{-1}\{F_0(t)\},$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения.

6.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 5 рассматривались некоторые модели, описывающие зависимость наработки до отказа от вектора z поясняющих переменных. Часто бывает полезно подходить к таким моделям, как к моделям, образованным из некоторого базового распределения, соответствующего определенным стандартным условиям $z = 0$, а также заданного правила изменения этого распределения, индуцированного ненулевым значением z .

В этой главе предполагается, что обе части такой модели определяются конечным числом неизвестных параметров. Назовем способ задания такой модели полностью параметрическим в отличие от полностью или частично непараметрических моделей, которые будут изучаться позднее. Пусть функция надежности, плотность и функция интенсивности имеют вид

$$F(t; z, \theta), f(t; z, \theta), h(t; z, \theta),$$

где θ является вектором параметров. Часто θ^T полезно разделить на части следующим образом: $\theta^T = (\varphi^T, \beta^T)$, где вектор φ относится к базовой функции надежности, а β — к поясняющим переменным. Обычно на каждом этапе приложений имеется небольшое количество параметров, представляющих непосредственный интерес. В дальнейшем они, как правило, будут обозначаться через ω , а оставшиеся мешающие параметры — через λ .

Не существует строгих правил, по которым можно было бы решать, когда использовать полностью параметрическую модель. Однако по этому поводу есть несколько соображений:

(i) в относительно сложных задачах некоторая параметризация необходима как основа для точных выводов;

(ii) простые сравнения, связанные с относительно большими количественными данными, часто выполняются наилучшим образом с помощью неформального сравнения эмпирических функций надежности с использованием непараметрического подхода;

(iii) для цензурированных данных при изучении относительно сложных зависимостей модель пропорциональных интенсивностей является единственной моделью, позволяющей на любом уровне общности вы-

полнить анализ данных без параметрического задания базовой функции надежности;

(iv) когда интерес сфокусирован главным образом на поясняющих переменных, точное задание базовой функции надежности не является решающим;

(v) всегда желательна некоторая формальная или неформальная проверка параметрического задания модели, проводимая часто с помощью раздельного изучения двух составляющих частей модели;

(vi) необходимо изучение чувствительности выводов к экстремальным значениям наблюдений (как наработок до отказа, так и величин в пространстве значений z); лучше всего это можно сделать с помощью тщательного анализа данных.

Для анализа полностью параметрических моделей в основном будут использоваться методы, основанные на функции правдоподобия. Это почти всегда требует итеративного численного решения уравнений максимального правдоподобия, и тогда не обойтись без подходящего универсального пакета программ. Однако для модели ускоренных испытаний без цензурирования в 6.3 (ii) будут рассмотрены более простые методы.

Для наблюдений n взаимно независимых объектов с поясняющими переменными z_i и наработкой до отказа или временем до цензурирования x_i ($i = 1, \dots, n$) при обычном предположении о неинформативности цензурирования логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} l(\theta; x) &= \sum_u \log f(x_i; z_i; \theta) + \sum_c \log F(x_i; z_i; \theta) = \\ &= \sum_u \log h(x_i; z_i; \theta) + \sum \log F(x_i; z_i; \theta), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где \sum_u , \sum_c и \sum обозначают соответственно суммирование по нецензурированным (т. е. отказавшим) объектам, по цензурированным объектам и по всем объектам.

6.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

(i) Вид функции правдоподобия

Рассмотрим сначала модели, в которых z является постоянной для каждого объекта и в которых наработка до отказа экспоненциально распределена с параметром интенсивности, зависящим от поясняющей переменной. Это частный случай модели с ускоренными испытаниями. Положим параметр интенсивности i -го объекта равным $\rho(z_i; \beta)$, где β — неизвестный параметр. Тогда при условии взаимной независимости объектов логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$\sum_u \log \rho(z_i; \beta) - \sum \rho(z_i; \beta) x_i, \quad (6.2)$$

где суммирование ведется соответственно по нецензурированным и по всем объектам.

Таким образом, можно выписать градиентный вектор, матрицу вторых производных и уравнения максимального правдоподобия. Если функция ρ является положительной только для определенных комбина-

ций z и β , то нужна особая осторожность в том случае, когда максимум достигается на границе пространства параметров. Чтобы избежать это затруднение, обычно полагают

$$\rho(z; \beta) = e^{\beta^T z_i}. \quad (6.3)$$

Здесь удобно предположить, что вектор z включает компоненту z_0 , равную единице для всех объектов, поэтому e^{β_0} является базовой интенсивностью для объекта, у которого все остальные компоненты вектора z равны нулю. В противном случае заменим (6.3) на $\rho_0 e^{\beta^T z}$.

Если допустить, что выполняется соотношение (6.3), то логарифм функции правдоподобия равен

$$\sum_u \beta^T z_i - \sum e^{\beta^T z_i} x_i. \quad (6.4)$$

Вычислив вторые производные выражения (6.4) относительно компонент вектора β , можно записать (r, s) -ю компоненту информационной матрицы Фишера для оценивания вектора β в следующем виде:

$$\sum z_{ir} z_{is} e^{\beta^T z_i} E(X_i).$$

Если цензурирование отсутствует, то $E(X_i) e^{\beta^T z_i} = 1$ и, следовательно, информационная матрица равна $z^T z$, где z — матрица порядка $n \times q$ поясняющих переменных. В случае цензурирования легко показать (см. упр. 6.1), что $E(X_i) e^{\beta^T z_i} = 1 - \pi_i$, где π_i — вероятность того, что i -й объект цензурирован. Таким образом, если $\pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_n)$, то информационная матрица равна

$$z^T (I^* - \pi) z, \quad (6.5)$$

где I^* — единичная матрица порядка $n \times n$.

(ii) Некоторые «точные» результаты

Кратко рассмотрим «точные» доверительные интервалы и критерии, хотя этот вопрос и носит в основном теоретический характер. «Точные» результаты применимы к цензурированным данным только в исключительных условиях. Поэтому мы ограничимся моделью с нецензурированными данными. Имеется две различные ситуации, в которых в принципе возможен «точный» анализ.

В первом случае предположим что выбрана линейная модель для канонического параметра экспоненциального распределения, т. е.

$$\rho(z; \beta) = \beta^T z. \quad (6.6)$$

Более точно правую часть (6.6) можно записать как

$$(\beta^T z)^+ = \max(\beta^T z, 0).$$

Для нецензурированных данных логарифм функции правдоподобия можно представить в следующем виде:

$$\sum \log(\beta^T z_i) - \beta^T \sum z_i t_i,$$

что соответствует полному экспоненциальному семейству с минимальной достаточной статистикой $\sum z_i t_i$. Для того чтобы проверить гипотезу о компоненте вектора β или линейных комбинациях компонент, воспользуемся условным распределением соответствующей компоненты $\sum z_i t_i$ относительно оставшихся компонент. Как правило, это распределение может быть аппроксимировано на основе приближения Эджворса или методом перевала.

Во втором случае предположим, что выполнено условие (6.3), и поэтому для $\log T$ справедлива линейная регрессионная модель, а именно

$$\log T_i = \mu_0 - \beta^T z_i + \varepsilon_i. \quad (6.7)$$

Иначе, как уже указывалось в замечании после (6.3), для устранения влияния μ_0 в вектор поясняющих переменных можно включить постоянную компоненту. В соотношении (6.7) случайные величины ε_i с точностью до константы являются логарифмами экспоненциально распределенных случайных величин и, таким образом, имеют распределение экстремальной величины. В силу инвариантности соотношения (6.7) относительно подходящей группы преобразований остаточные разности $\log T_i$ от регрессии наименьших квадратов имеют фиксированное распределение, не зависящее от (μ, β) , и, следовательно, являются подчиненными статистиками. Условное распределение оценок наименьших квадратов при заданных значениях подчиненных статистик составляет основу для статистических выводов о (μ, β) . Численные процедуры для реализации этого метода в практических ситуациях, по-видимому, отсутствуют.

Можно анализировать модель (6.7) с помощью стандартных процедур наименьших квадратов. Это приводит к весьма значительной потере эффективности (см. 6.3 (ii)).

Заметим, что очень небольшие значения величины T становятся экстремальными для $\log T$ и могут оказывать чрезмерное влияние на выводы, прежде всего при анализе методом наименьших квадратов. Такое влияние особенно нежелательно в случае, если при регистрации небольших значений T допускаются существенные ошибки или если исследователя интересуют в первую очередь большие наработки до отказов.

(iii) Задача о двух выборках

Простейшим частным случаем является задача о двух выборках, когда исследуется отношение параметров интенсивности. Предположим, что интенсивности в двух группах равны λ и $\lambda\omega$, тогда логарифм функции правдоподобия (6.2) или (6.4) принимает вид

$$l(\omega, \lambda) = (d_0 + d_1) \log \lambda + d_1 \log \omega - \lambda t_0 - \lambda \omega t_1,$$

где d_0, d_1 равны количеству отказов, а t_0, t_1 — наблюдаемым полным временам наработок в двух группах. При заданном ω оценку максимального правдоподобия $\hat{\lambda}$ можно записать как

$$\hat{\lambda}_\omega = (d_0 + d_1) / (t_0 + \omega t_1).$$

Безусловные оценки максимального правдоподобия равны $\hat{\lambda} = d_0/t_0$; $\hat{\omega} = (d_1/t_1) (d_0/t_0)^{-1}$.

Таким образом, статистика отношения максимального правдоподобия имеет вид

$$W(\omega_0) = 2 [l(\hat{\omega}, \hat{\lambda}) - l(\omega_0, \hat{\lambda}_{\omega_0})] = 2 \left[d_0 \log \left(\frac{d_0}{t_0} \right) + d_1 \log \left(\frac{d_1}{t_1} \right) - (d_0 + d_1) \log \left(\frac{d_0 + d_1}{t_0 + \omega_0 t_1} \right) - d_1 \log \omega_0 \right]. \quad (6.8)$$

Доверительную область для ω можно найти из (3.6).

Пусть теперь d_0 и d_1 объектов наблюдаются до наступления отказов, при этом соответствующие полные времена наработки T_0 и T_1 независимы, а случайные величины $2\lambda T_0$ и $2\lambda\omega T_1$ имеют хи-квадрат распределения с $2d_0$ и $2d_1$ степенями свободы. Тогда случайная величина

$$F = \frac{\omega T_1 / d_1}{T_0 / d_0} \quad (6.9)$$

имеет стандартное распределение Фишера с $(2d_1, 2d_0)$ степенями свободы. Исходя из этого сразу же можно построить критерий значимости и доверительные области для ω . В действительности с помощью (6.8) можно получить близкую аппроксимацию этих границ, предполагая, что критерий на основе (6.9) должен быть использован для сравнения двух интенсивностей, когда применяются цензурирование или другие «правила остановки». В этом случае нужно положить величины d_0 и d_1 , t_0 и t_1 равными наблюдаемым количествам отказов (фиксированным или случайным) и полным временам наработок (фиксированным или случайным соответственно).

(iv) Зависящие от времени поясняющие переменные

Если поясняющие переменные зависят от времени, то логарифм функции правдоподобия имеет более сложный вид. Функция надежности в соответствии с (2.7) равна

$$F(t; z) = \exp \left(- \int_0^t \rho(z(u); \beta) du \right),$$

и тогда логарифм функции правдоподобия можно записать как

$$\sum_u \log \rho[z_i(t_i); \beta] - \sum \int_0^{x_i} \rho[z_i(u); \beta] du. \quad (6.10)$$

За исключением тех случаев, когда функции z_i являются ступенчатыми, интегралы в выражении (6.10) необходимо вычислять с помощью численных методов; значения зависящих от времени поясняющих переменных часто бывают известны только в дискретные моменты времени, и тогда нужно использовать интерполированные значения.

6.3. МОДЕЛЬ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ

(i) Вид функции правдоподобия

Как отмечалось в 6.2, модель, основанная на экспоненциальном распределении с фиксированными поясняющими переменными, является частным случаем модели ускоренных испытаний. Если эта модель должна использоваться с цензурированными данными, то во многих отношениях удобнее, когда и плотность распределения, и функция надежности вычисляются по возможности в явном виде. Вероятно, по этой причине можно выделить три наиболее важных специальных распределения — Вейбулла, Гомперца — Макегама и логарифмически логистическое. В приложениях, рассматриваемых в этой книге, применялись главным образом первое и последнее из этих распределений, причем последнее отчасти из-за того, что в этой модели допускается локальный максимум функции интенсивности.

(ii) Нецензурированный случай

Если нет цензурированных наблюдений или цензурированием можно пренебречь, то полезно рассмотреть регрессионную модель для $\log T$. В случаях, когда влияние поясняющих переменных учитывается введением множителя $e^{\beta^T z}$, регрессионное уравнение можно представить как логарифмически линейное

$$\log T_i = \mu - \beta^T z_i - \varepsilon_i,$$

где наработки до отказа имеют логарифмически логистическое, Вейбулла (и, конечно, другие) распределения, а случайные величины ε_i независимы и одинаково распределены с известной дисперсией, но известным видом распределения. В отличие от 6.2 (ii) здесь необходимо учитывать неизвестное стандартное отклонение. Условной статистикой становится набор нормированных остатков, т. е. остатков, полученных при делении на корень из среднеквадратического отклонения остатков.

Для многих задач при отсутствии цензурирования обычный анализ наименьших квадратов оказывается наиболее подходящей моделью. Можно вычислить асимптотическую относительную эффективность наименьших квадратов по отношению к методу максимального правдоподобия. Если модель содержит неизвестный «постоянный» член, то эта асимптотическая относительная эффективность не зависит ни от размерности β , ни от значений поясняющих переменных. Значение эффективности находится усреднением по значениям подчиненной статистики (нормированных остатков), так как некоторые наборы значений этих остатков относительно благоприятны, а в то же время другие — относительно неблагоприятны.

Если для анализа наименьших квадратов по логарифмам используется экспоненциальное распределение, то асимптотическая относительная эффективность равна 0,61; если гамма-распределение $k = 5$, то 0,90. Значения этой величины для других распределений можно найти в

книге Кокса и Хинкли (1968), а также в статье Перейра (1978), причем в последней приводятся значения асимптотической относительной эффективности, когда используется метод максимального правдоподобия подбора модели для неправильно выбранного вида распределения.

(iii) *Подробнее о функции правдоподобия*

Рассмотрим несколько более детально логарифмы функций правдоподобия для двух распространенных случаев, обращая основное внимание на специальное представление, когда функция $\psi(z; \beta)$, связывающая наработку до отказа T с наработкой до отказа T_0 при $z = 0$, $T = T_0/\psi(z; \beta)$, имеет вид $\psi(z; \beta) = e^{\beta^T z}$.

Для распределения Вейбулла функцию надежности при $z = 0$ можно представить как

$$F_0(t) = \exp[-(\rho t)^k], \quad (6.11)$$

а для логарифмически логистического —

$$F_0(t) = [1 + (\rho t)^k]^{-1}. \quad (6.12)$$

Снова введем в вектор z поясняющих переменных компоненту z_0 , тождественно равную единице, записав $\rho = e^{\beta_0}$. В этом случае соотношения (6.11) и (6.12) для $F(t; z)$ примут соответственно следующий вид:

$$\exp(-e^{k\beta^T z} t^k), \quad (1 + t^k e^{k\beta^T z})^{-1}.$$

Следовательно, логарифм функции правдоподобия для распределения Вейбулла равен

$$-\sum e^{k\beta^T z_i} x_i^k - \sum_u [k\beta^T z_i + (k-1) \log t_i + \log k],$$

а для логарифмически логистического распределения —

$$-\sum \log(1 + x_i^k e^{k\beta^T z_i}) + \sum_u [(k-1) \log t_i + \log k + k\beta^T z_i - \log(1 + t_i^k e^{k\beta^T z_i})].$$

Дальнейшая максимизация логарифма функции правдоподобия и вычисление соответствующих величин, необходимых для асимптотических методов, в принципе не вызывают значительных затруднений.

6.4. МОДЕЛЬ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

В простейшей форме модели пропорциональных интенсивностей функция надежности, плотность и функция интенсивности соответственно равны:

$$[F_0(t)]^{\psi(z)}, \quad \psi(z) [F_0(t)]^{\psi(z)-1} f_0(t), \quad \psi(z) h_0(t),$$

где $F_0(t)$ и т.д. относятся к базовым условиям $z = 0$ и z является вектором с фиксированными поясняющими переменными. Если $\psi(z)$ можно представить параметрически как $\psi(z; \beta)$, а $F_0(t)$ — как $F_0(t; \varphi)$, то можно выписать функцию правдоподобия для n независимых объектов и снова очень удобно для приложений, если F , и f легко вычисляются.

Если поясняющие переменные зависят от времени, то функция надежности имеет вид

$$\exp\left(-\int_0^t \psi[z(u)] h_0(u; \varphi) du\right).$$

Здесь при вычислениях можно столкнуться с трудностями, которые уже обсуждались в связи с экспоненциальным случаем (6.10).

6.5. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Очень важно знать: какова чувствительность результатов, полученных при проведении анализа, по отношению к различным явным или неявным предположениям. Лучше всего такое исследование проводить отдельно для каждого множества данных (*ad hoc*), хотя могут быть сделаны и некоторые общие замечания.

Неправильное определение вида базового распределения может иметь довольно небольшое влияние на оценку относительной важности различных поясняющих переменных, хотя оцененные стандартные ошибки регрессионных коэффициентов могут оказаться либо слишком большими, либо слишком малыми, если дисперсия базового распределения меньше или больше, чем дисперсия базового распределения. Конечно, вид распределения также влияет на эффективность оценивания. Неверное описание зависимости параметров модели от поясняющих переменных, вероятно, приведет к некоторым систематическим отклонениям, включенным в базовое распределение, и, следовательно, дисперсия этого распределения будет завышенной.

Зависимость друг от друга наблюдений (откликов) для различных объектов может иметь различные формы.

а) Если предполагаемая модель является адекватным представлением маргинальной плотности распределения наработки до отказа, то методы, основанные на независимости, обычно дают чувствительные точечные оценки. В случае, если связь между объектами главным образом положительная, то стандартная ошибка оценок параметров может оказаться существенно больше, чем вычисленная в предположении независимости.

б) Если зависимость возникает из-за группировки объектов в различные множества, возможно, отсутствие независимости удастся восполнить присвоением каждому множеству новых специальных параметров, чтобы отразить различия между ними. Однако при вводе большого числа таких параметров их затем не удастся «удалить» из функции правдоподобия с помощью условного или аналогичного подхода, так как для таких моделей уже нельзя рассчитывать на обычные хорошие свойства оценок максимального правдоподобия.

в) Если наличие зависимости само по себе представляет интерес, лучше всего рассмотреть одну из специальных моделей, приведенных в гл. 10, по крайней мере в случаях с большим числом цензурированных.

г) Если зависимость является временной или пространственной, воз-

можно адаптирование некоторых обычных моделей временных рядов, однако для этого необходима небольшая работа, связанная со спецификой данных типа времени жизни.

6.6. МЕНЕЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Ранее основное внимание уделялось подбору специальных параметрических моделей. При этом остались не освещенными два важных раздела этой проблематики, связанные с точно заданными моделями. Это — методы развития соответствующих моделей и изучения адекватности моделей, которые предлагаются или уже приняты с подобранными параметрами.

Одна из достаточно общих процедур для предварительного анализа заключается в группировке объектов в подмножества с приблизительно постоянными значениями наиболее важных поясняющих переменных. После этого можно построить непараметрические оценки функций надежности либо интенсивности для каждого подмножества и затем графически или более формальным образом исследовать их для обнаружения общих свойств. Например, если графиками логарифмов функции интенсивности по отношению к логарифму времени окажутся параллельные прямые, то необходимо использовать для построения модели распределение Вейбулла с постоянным параметром формы. На втором этапе может быть исследована приближенная форма зависимости параметров модели от поясняющих переменных (если желателен формальный подбор модели).

Для действия в обратном направлении также имеется несколько возможностей. Предположим, что подобрана одна из моделей, описанных в этой главе. Ее адекватность может быть исследована следующим образом:

а) подбором более сложной модели, содержащей дополнительные параметры для проверки специальных типов отклонений в форме распределений;

б) для каждого объекта могут быть определены остаточные разности, которые, если модель адекватна, будут образовывать выборку, аналогичную выборке наблюдений с умеренными ограничениями из некоторого фиксированного и известного распределения. Часто для этой цели выбирается единичное экспоненциальное распределение;

в) особое внимание может быть сосредоточено на имеющих решающее значение наблюдениях, т. е. наблюдениях, исключение или включение которых оказывает сильное влияние на основные выводы. Такие наблюдения часто соответствуют объектам с очень длинными или очень короткими наработками до отказов либо объектам, имеющим экстремальные значения в пространстве поясняющих переменных.

Главная идея, на основе которой проверяется соответствие остатков единичному экспоненциальному распределению, состоит в следующем: если T_i имеет функцию надежности $F(t; z_i; \theta)$, то случайная величина $F(T_i; z_i; \theta)$ распределена равномерно и $\log F(T_i; z_i; \theta)$ имеет

единичное экспоненциальное распределение. Для полного вектора параметров, оцененного с помощью метода максимального правдоподобия, положим остатки равными

$$R_i = -\log F(T_i; z_i; \hat{\theta}).$$

В случае, если i -й объект оказался цензурированным, также образуется соответствующий остаток, а следовательно, в общем случае получается множество нецензурированных и множество цензурированных остатков.

Для изучения формы распределения можно анализировать остатки. Для описания зависимости от новых или уже существующих в модели поясняющих переменных может быть использовано непосредственное графическое изображение с помеченными цензурированными значениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наиболее важные ссылки уже были даны в предыдущей главе. В книге Кокса и Льюса (1966) описаны методы, связанные с экспоненциальным распределением, при анализе потоков событий (точечных процессов). Функция влияния для нескольких простых методов анализа получена Ридом (1981а), а в одной из еще не опубликованных работ им найдены соответствующие функции для комплексного анализа модели; эти функции имеют отношение, например, к диагностическим критериям для резко выделяющихся значений. В работах Целена, Дэннемиллера (1961) и Вэтса (1979) обсуждалась чувствительность анализа к предположению об экспоненциальности распределения. Кроули и Ху (1977) исследовали остатки для модели пропорциональных интенсивностей, развивающей общее определение, данное в работе Кокса и Снелла (1968) (см. также Кей (1977) и Логакос (1981)).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Докажите, что если T имеет экспоненциальное распределение с параметром ρ и цензурирование происходит в фиксированный момент времени c , то вероятность цензурирования равна $\pi = e^{-\rho c}$, и если $X = \min(T, c)$, то

$$\rho E(X) = 1 - \pi.$$

Отсюда покажите, что аналогичный результат верен и тогда, когда момент цензурирования является случайной величиной с произвольным распределением.

6.2. Рассмотрите две независимые выборки с цензурированием и с соответствующими функциями надежности $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Обобщите рассуждение, приводимое в 4.3, и получите критерий отношения правдоподобия для проверки нулевой гипотезы $F_1(t_0) = F_2(t_0)$, где t_0 — заранее указанный момент времени; в остальных отношениях функцию надежности произвольны. Изучите асимптотическую относительную эффективность этого метода, если в действительности распределения являются экспоненциальными.

7.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе рассматривается простая форма модели пропорциональных интенсивностей

$$h(t, z) = \psi(z; \beta) h_0(t), \quad (7.1)$$

в которой для любого объекта вектор z поясняющих переменных не зависит от времени. В этой главе предполагается, что времена жизни имеют непрерывные функции распределения и точно регистрируются, поэтому совпадения исключены. Возможны три параметризации функции ψ , а именно: логарифмически линейная форма $\psi(z; \beta) = e^{\beta^T z}$, которая с полным основанием стала наиболее распространенной; линейная форма $\psi(z; \beta) = 1 + \beta^T z$; логистическая форма $\psi(z; \beta) = \log(1 + e^{\beta^T z})$. Выбор одной из этих форм может быть достигнут подбором параметров в некотором расширенном семействе распределений. Например, семейство

$$\psi(z; \beta; k) = (1 + k\beta^T z)^{1/k}$$

включает как частные случаи линейную и логарифмически линейную модели при $k = 1$ и $k \rightarrow 0$ соответственно.

7.2. ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим теперь некоторые статистические выводы о β , когда функция интенсивности $h_0(t)$ полностью неизвестна. Удобно сначала разобрать случай, когда цензурирование отсутствует. Обозначим через $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ упорядоченные моменты наработок до отказов у n объектов, а через T_j — номер объекта, отказавшего в момент τ_j . При этом $T_j = i$ тогда и только тогда, когда $t_i = \tau_j$. Введем обозначения для множества риска — числа объектов, действующих непосредственно перед j -м упорядоченным отказом $R(\tau_j) = \{i : t_i \geq \tau_j\}$ и его размера r_j . Эти определения поясняются на рис. 7.1.

Основной принцип вывода функции правдоподобия состоит в следующем. Множества $\{\tau_j\}$ и $\{T_j\}$ совместно эквивалентны исходным дан-

ным, а именно неупорядоченным наработкам до отказа t_j . Если $h_0(t)$ ничего неизвестно, то моменты τ_j либо могут дать небольшую информацию о β , либо не дадут никакой информации, так как их распределение сильно зависит от $h_0(t)$. Как пример экстремального случая функция $h_0(t)$ может быть тождественно равна нулю всюду, за исключением небольших окрестностей τ_j . Следовательно, основное внимание должно быть сосредоточено на значениях T_j . В рассматриваемом случае можно вывести явно совместное распределение этих величин $p(i_1,$

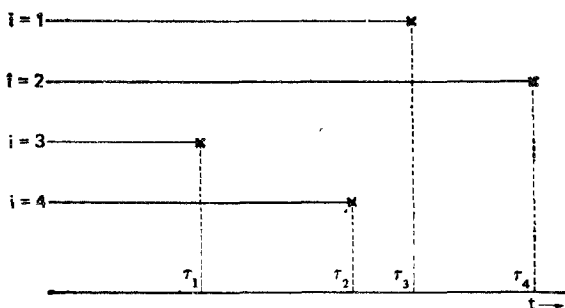


Рис. 7.1. Нарботки до отказа четырех объектов без цензурирования. Моменты отказа $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Множества риска $R(\tau_1) = \{1, 2, 3, 4\}$; $R(\tau_2) = \{1, 2, 4\}$; $R(\tau_3) = \{1, 2\}$; $R(\tau_4) = \{2\}$. Вклад в соотношение, приведенное после (7.3)

..., i_n) на множестве всех возможных перестановок $(1, 2, \dots, n)$. Легко выписать условную вероятность при заданной полной истории

$$H_j = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, i_1, i_2, \dots, i_{j-1}\}$$

до j -й упорядоченной наработки до отказа τ_j . Она равна условной вероятности того, что i -й объект отказал в момент τ_j в том случае, если один из объектов из множества риска $R(\tau_j)$ отказал в момент τ_j . Эта условная вероятность имеет вид

$$\frac{h_i(\tau_j)}{\sum_{k \in R(\tau_j)} h_k(\tau_j)} = \frac{\psi(i)}{\sum_{k \in R(\tau_j)} \psi(k)} \quad (7.2)$$

и не зависит от базовой функции интенсивности $h_0(t)$ в силу предположения мультипликативности (7.1). Для удобства обозначений полагаем здесь $\psi(k) = \psi(z_k, \beta)$, т. е. равным множителю ψ для k -го объекта.

Хотя соотношение (7.2) выводилось как условная вероятность события $T_j = i$ при заданной полной истории H_j , в действительности она как функция не зависит от $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$. Следовательно, эта вероятность равна $p_j(i/i_1, i_2, \dots, i_j)$ условному распределению T_j только, если $T_1 = i_1, T_2 = i_2, \dots, T_{j-1} = i_{j-1}$. Отсюда следует, что совместное рас-

предделение $p(i_1, i_2, \dots, i_n)$ может быть получено по обычному цепному правилу для условных вероятностей:

$$p(i_1, i_2, \dots, i_n) = \prod_{j=1}^n p_j(i_j/i_1, i_2, \dots, i_{j-1}) = \prod_{j=1}^n \frac{\psi(i_j)}{\sum_{k \in R(\tau_j)} \psi(k)}. \quad (7.3)$$

В качестве примера рассмотрим снова конфигурацию рис. 7.1. Здесь $T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $T_3 = 1$, $T_4 = 2$, поэтому искомая вероятность равна

$$p(3, 4, 1, 2) = \frac{\psi(3)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(4)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(4)} \times \\ \times \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2)} \cdot \frac{\psi(2)}{\psi(2)}.$$

При наличии цензурирования подобные рассуждения применимы лишь в случае, если можно предположить, что цензурирования происходят сразу же после отказов. Это требование несколько противоречит модели, в которой моменты цензурирования являются фиксированными постоянными, но оно может рассматриваться в качестве неплохого приближения, так как информация о β , содержащаяся в точных наблюдаемых моментах цензурирования c_i , как правило, небольшая. Модель с фиксированным цензурированием может быть построена и явно с помощью частной функции правдоподобия (см. гл. 8).

Предположим теперь, что имеются d наблюдаемых отказов из выборки размера n и упорядоченные наблюдаемые наработки до отказов $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_d$. Как и раньше, положим $T_j = i$, если объект i отказал в момент τ_j , и пусть $R(\tau_j) = \{i : t_i \geq \tau_j\}$ обозначает соответствующее множество риска размера r_j . Соотношение (7.2) выводится, как и раньше, но теперь N_j включает и цензурирования на интервале $(0, \tau_j)$, и отказы. И тот факт, что на интервале (τ_{j-1}, τ_j) не произошло цензурирования, обеспечивает независимость множества риска $R(\tau_j)$, а значит, и выражения (7.2) от значений τ_j .

Комбинация этих условных вероятностей дает функцию правдоподобия

$$\text{lik} = \prod_{j=1}^d \frac{\psi(i_j)}{\sum_{k \in R(\tau_j)} \psi(k)}. \quad (7.4)$$

Это выражение названо правдоподобием, а не вероятностью, так как в нем опущены члены, соответствующие цензурированным объектам из числа оставшихся в множестве риска. Поскольку сам механизм цензурирования не зависит от β , эти члены также не зависят функционально от β , и если интересоваться выводами на основе функции правдоподобия только о β , можно не обращать на них внимания. Механизм цензурирования, зависящий от тех же параметров, что и механизм отказов, будет обсуждаться в гл. 9.

С другой стороны, выражение (7.4) может быть получено как сумма всех вероятностей (7.3), соответствующих данной наблюдаемой схеме отказов и цензурирований. Основной принцип этого рассуждения иллюстрируется на рис. 7.2. Функция правдоподобия равна

$$lik = \frac{\psi(3)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2)} \cdot \frac{\psi(2)}{\psi(2)} \quad (7.5)$$

Ее можно представить также в виде суммы трех членов, соответствующих различным возможным положениям A, B, C для τ_4 относительно τ_1, τ_2 и τ_3 , а именно:

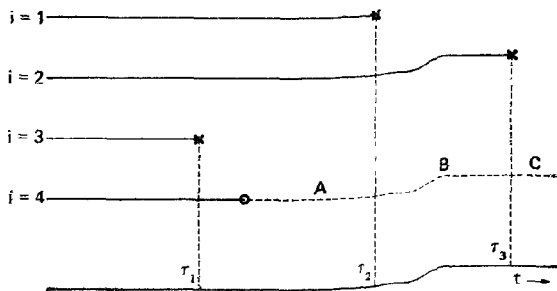


Рис. 7.2. Нарботки до отказа четырех объектов с цензурированием: X — отказ; O — цензурирование. Моменты отказов τ_1, τ_2, τ_3 . Множества риска $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$; $R_2 = \{1, 2\}$; $R_3 = \{2\}$. Вклад в правдоподобие (7.5). A, B, C — возможные положения для момента отказа цензурированного объекта

$$A: \frac{\psi(3)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(4)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2)} \cdot \frac{\psi(2)}{\psi(2)}$$

$$B: \frac{\psi(3)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(4)} \times$$

$$\times \frac{\psi(4)}{\psi(2) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(2)}{\psi(2)}$$

$$C: \frac{\psi(3)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(4)} \times$$

$$\times \frac{\psi(2)}{\psi(2) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(4)}{\psi(4)}$$

(См. упр. 7.1, которое содержит более общее рассуждение.)

7.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГАРИФМА ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ

Для вывода выражения (7.4) существенным является соотношение (7.1), определяющее модель пропорциональных интенсивностей, а не точная функциональная форма $\psi(z; \beta)$. В этом разделе будет предполагаться, что

гаться, что при каждом i функция $\psi(i)$ имеет первые и вторые производные:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_r} \psi(i) = \psi_r(i), \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta_r \partial \beta_s} \psi(i) = \psi_{rs}(i).$$

Заметим, что в действительности нет необходимости предполагать, что ψ можно явно выразить как функцию вектора ковариат, хотя почти всегда это будет так. Вполне достаточно, если для каждого объекта i множитель $\psi(i)$ будет представлен как функция параметров β . Соотношение (7.4) можно записать, применяя неупорядоченные наблюдаемые моменты наработок до отказов с соответствующими множествами риска $\mathbf{R}(i) = \mathbf{R}_i$ (хотя это и не совсем правильное использование принятых обозначений), в следующем виде:

$$\text{lik} = \prod_{i \in \mathbf{D}} \frac{\psi(i)}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi(k)}.$$

Здесь через \mathbf{D} обозначено множество отказавших объектов. Соответствующий логарифм функции правдоподобия равен

$$l = \sum_{i \in \mathbf{D}} \left[\log [\psi(i)] - \log \left(\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi(k) \right) \right] = \sum_{i \in \mathbf{D}} l_i.$$

Тогда производные вклада в l от i -го отказа и соответствующее множество риска можно записать как:

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_r} = \frac{\psi_r(i)}{\psi(i)} - \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi_r(k)}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi(k)}, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_i}{\partial \beta_r \partial \beta_s} &= \frac{\psi_{rs}(i)}{\psi(i)} - \frac{\psi_r(i) \psi_s(i)}{[\psi(i)]^2} - \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi_{rs}(k)}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi(k)} + \\ &+ \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi_r(k) \sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi_s(k)}{\left(\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \psi(k) \right)^2}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Математические ожидания этих величин, когда i выбирается с вероятностью, пропорциональной $\psi(i)$, из множества риска \mathbf{R}_i , представляют определенный интерес. Легко показать, что

$$E(\partial l_i / \partial \beta_r) = 0,$$

как это и должно быть, поскольку производная является функцией вклада. В выражениях математических ожиданий вторых производных члены, содержащие ψ_{rs} , уничтожаются, и

$$\begin{aligned} -E\left(\frac{\partial^2 l_i}{\partial\beta_r \partial\beta_s}\right) &= \frac{\Sigma\psi_r(k)\psi_s(k)/\psi(k)}{\Sigma\psi(k)} - \frac{\Sigma\psi_r(k)\psi_s(k)}{(\Sigma\psi(k))^2} = \\ &= \text{cov}\left(\frac{\psi_r(i)}{\psi(i)}, \frac{\psi_s(i)}{\psi(i)}\right) = \\ &= \text{cov}\left(\frac{\partial l_i}{\partial\beta_r}, \frac{\partial l_i}{\partial\beta_s}\right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

для такой конкретной взвешенной выборки.

Эти математические ожидания и ковариации рассматриваются на одном множестве риска и, конечно, являются условными относительно состава этого множества. Для вычисления безусловных математических ожиданий потребовалось бы более полное описание механизма цензурирования. Однако только что полученные математические ожидания можно вычислить и как условные относительно полной истории отказов и цензурирования до момента t_i . Это в свою очередь допускает прямую проверку того, что члены l_i из l действительно имеют некоторые желаемые свойства приращений логарифма функции правдоподобия. Дальнейшее обсуждение этого вопроса будет продолжено в гл. 8.

Легко заметить, что матрица $-E(\partial^2 l_i / \partial\beta_r \partial\beta_s)$ должна быть неотрицательно определенной, но для матрицы из наблюдаемых вторых производных $-\partial^2 l_i / \partial\beta_r \partial\beta_s$ — это свойство может и не выполняться.

7.4. ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

Полученные в предыдущем разделе соотношения существенно упрощаются, когда $\psi(z; \beta)$ имеет логарифмически линейный вид $e^{\beta^T z}$. В этом случае $\psi_r(i) = z_{ir} \psi(i)$ и $\psi_{rs}(i) = z_{ir} z_{is} \psi(i)$, где, как обычно, z_{ir} — значение r -й компоненты поясняющей переменной z для i -го объекта. Отсюда получаем, что производная

$$\frac{\partial l_i}{\partial\beta_r} = z_{ir} - \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} z_{kr} e^{\beta^T z_k}}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} e^{\beta^T z_k}} = z_{ir} - A_{ir}(\beta), \quad (7.9)$$

т. е. равна разности между значением поясняющей переменной для отказавшего объекта и взвешенным средним той же переменной по соответствующему множеству риска. Также находим

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial\beta_r \partial\beta_s} = -\frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} z_{kr} z_{ks} e^{\beta^T z_k}}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} e^{\beta^T z_k}} + A_{ir}(\beta) A_{is}(\beta) = -C_{irs}(\beta). \quad (7.10)$$

Здесь наблюдаемые значения и математические ожидания величин $\partial^2 l_i / \partial \beta_r \partial \beta_s$ на одном множестве риска совпадают. Матрица вторых производных, взятая со знаком минус, имеет вид ковариационной матрицы, соответствующей этой взвешенной выборочной схеме, и является положительно определенной. Суммируя (7.9) по всем множествам риска, получаем, что функция вклада $U(\beta)$ имеет r -ю компоненту

$$U_r(\beta) = \sum_{i \in D} \frac{\partial l_i}{\partial \beta_r} = \sum_{i \in D} (z_{ir} - A_{ir}(\beta)), \quad (7.11)$$

а информационная матрица $I(\beta)$ вторых производных со знаком минус имеет элементы

$$I_{rs}(\beta) = \sum_{i \in D} C_{irs}(\beta). \quad (7.12)$$

Используя рассуждения из предыдущего раздела, можно было бы показать, что $U_r(\beta)$ имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу $E[I(\beta)]$. Вычисление этого математического ожидания потребовало бы более полного описания механизма цензурирования, чем обычно. При анализе множества данных включение моментов, в которых действительно отказавшие объекты могли бы быть цензурированы, по-видимому, не повлияет на результат. Во всяком случае, недавние работы по асимптотической теории рекомендуют использование наблюдаемых информационных матриц, а также критериев и доверительных интервалов, которые, насколько это возможно, построены непосредственно по функции правдоподобия. Таким образом, применение $I(\beta)$ вместо $E[I(\beta)]$ является допустимым, исключая теоретический анализ конкурирующих процедур (см. 3.3).

В 3.3. были кратко рассмотрены три основных метода статистического анализа, основанных на логарифме функции правдоподобия, а именно: критерий отношения правдоподобия, критерий вкладов и непосредственное применение оценок максимального правдоподобия. Каждый из них применим в описываемом ниже случае.

При отсутствии цензурирования или когда механизм цензурирования не зависит от поясняющих переменных, точный критерий для проверки нулевой гипотезы $\beta = 0$ может быть получен на основе значения статистики вклада

$$U(0) = \sum_{i \in D} [z_i - A_i(0)] \quad (7.13)$$

относительно ее перестановочного распределения. Это распределение $U(0)$ возникает, когда упорядоченные наработки до отказов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$ и размеры соответствующих множеств риска r_1, r_2, \dots, r_d рассматриваются как фиксированные, а n значений z_1, z_2, \dots, z_n поясняющих переменных переставляются случайным образом среди n объектов. Так как это распределение — в точности условное распределение $U(0)$ при заданных r_1, r_2, \dots, r_d для полной модели.

Суть распределения перестановок можно прояснить, если переписать выражение (7.13) по-другому:

$$U(0) = \sum_{i=1}^n q_i z_i, \quad (7.14)$$

где

$$q_i = \delta_i - \sum_{j: \tau_j \leq t_i} 1/r_j$$

и $\delta_i = 0$ или 1 соответственно, если i -й объект цензурирован либо нецензурирован. Чтобы продемонстрировать эквивалентность (7.13) и (7.14), заметим, что

$$\sum_{i=1}^n z_i \left(\sum_{j: \tau_j \leq t_i} \frac{1}{r_j} \right) \equiv \sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j} \sum_{i \in R(\tau_j)} z_i.$$

Полагая в этом тождестве $z_i = 1$, получаем, что $\sum q_i = 0$, и поэтому $E|U(0)| = 0$ для распределения перестановок. Также находим, что ковариационная матрица $U(0)$ равна

$$\tilde{I}(0) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(z_i - \bar{z})^T \right) \left(\sum_{i=1}^n q_i^2 \right), \quad (7.15)$$

где $\bar{z} = \sum z_i/n$. Эта ковариационная матрица отличается от $I(0)$ и является действительно матрицей ковариаций, что соответствует полной теории перестановок только в том случае, если предположить, что механизм цензурирования одинаков для двух групп.

При отсутствии цензурирования упорядоченные величины $q_i = -\delta_i$ сводятся к так называемым экспоненциальным упорядоченным вкладам e_{ni} (см. 4.5).

7.5. ПРИМЕР

Рассмотрим данные о временах жизни больных лейкоемией из работы Фейгла и Целена (1965), приведенные в табл. 1.2. Используя различные методы, Фейгл и Целен пришли к двум выводам:

(i) зависимость времени жизни от сопутствующей переменной (число белых кровяных телец — WBC) является сильной для группы с положительным AG и слабой для группы с отрицательным AG;

(ii) для всех значений сопутствующих переменных кривая надежности для AG-положительной группы проходит выше, чем кривая для AG-отрицательной группы.

Подбираются модели следующего вида:

$$h_i(t) = \exp(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3) h_0(t),$$

где $z_1 = 0$ (отрицательное AG); $z_1 = 1$ (положительное AG); $z_2 = \log(\text{WBC}) - 9,531$ и $z_3 = (z_1 - 0,5152) z_2$. Компоненты z_2 и z_3 цен-

трированы для удобства вычислений и упрощения интерпретации. Дополнительно к нулевой гипотезе об отсутствии влияния ковариата на параметры модели проверялись еще четыре различные модели, а именно:

(I) $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ — соответствует существенной разнице в распределениях времени жизни для двух групп, однако отсутствует влияние количества белых кровяных телец (и в той, и в другой группе);

(II) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 = 0$ — соответствует зависимости времени жизни от числа белых кровяных телец, но отсутствует разница между группами;

(III) $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 = 0$ — модель учитывает и различие между группами, и влияние числа белых кровяных телец, но предполагает аддитивное влияние этих факторов на логарифмической шкале и соответственно их мультипликативное действие на функцию интенсивности;

(IV) $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ — наиболее общая модель, предполагает различные в двух группах уровни зависимости времени жизни от числа белых кровяных телец.

Внимательный читатель заметит несколько совпадающих времен жизни в исходных данных. Например, у четырех больных время жизни показалось равным четырем неделям. Строго говоря, модель с непрерывным временем (7.1) и функция правдоподобия (7.4) здесь не применимы. В предполагаемом анализе для преодоления этой трудности используется приближение, впервые предложенное Р. Пето. Если некоторые значения времен жизни регистрируются как равные одному и тому же числу τ , то каждому из них соответствует свой член вида (7.2) с одинаковым знаменателем, в который входят все объекты из множества риска $R(\tau)$. Это приближение использовалось во многих программах для ЭВМ и, как правило, давало вполне адекватные результаты. Более сложные приближения будут обсуждаться в 7.6.

В табл. 7.1 приведены значения логарифма функции правдоподобия для четырех моделей вместе с оцененными значениями параметров и их стандартными отклонениями. Основные последствия групповых различий, z_1 и $\log(WBC)$, являются в равной степени сильно значимыми и тогда, когда они подбираются одновременно и отдельно. Член z_3 , указывающий на взаимодействие факторов, вносит такое изменение в логарифм функции правдоподобия, что уже не дости-

Таблица 7.1
Анализ данных Фейгла и Целена (1965),
взятых из табл. 1.2

Компо- ненты	Логарифм функции правдоподобия	Оценка	Стандартная ошибка
—	— 86,00	—	—
z_1	—82,23	-1,12	0,41
z_2	—81,66	0,40	0,14
z_1	—78,68	-1,02	0,42
z_2		0,36	0,14
z_1	—77,03	-1,14	0,43
z_2		0,40	0,14
z_3		0,50	0,28

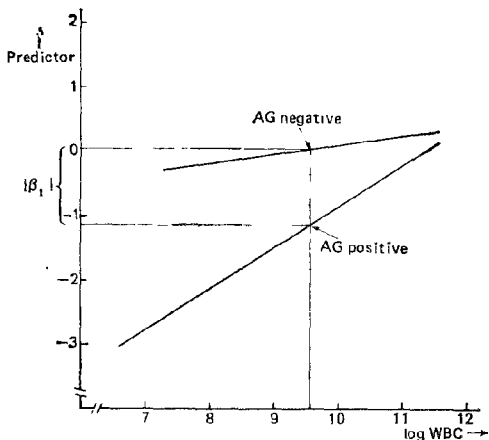


Рис. 7.3. Данные Фейгла и Целена. Логарифмически линейные прогнозы, подобранные оптимально для двух групп

коэффициент β_1 является разностью значений линейного прогноза в точке $z_2 = 0$, т. е. когда $\log(\text{WBC}) = 9,531$. Этот график подтверждает заключения Фейгла и Целена.

7.6. ДИСКРЕТНЫЕ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗОВ: СОВПАДЕНИЯ

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, правдоподобие (7.4) не строго соответствует модели с дискретными временами жизни, в которой могут возникать совпадения. В этом случае возможны два подхода.

Если шкала времени по существу дискретна, то модель (7.1) можно заменить на дискретную логистическую модель

$$\frac{h(t, z)}{1 - h(t, z)} = \psi(z; \beta) \frac{h_0(t)}{1 - h_0(t)},$$

где $h(t; z)$ — дискретная функция интенсивности

$$\text{pr}(T \leq t + 1 | T > t)$$

для объекта с поясняющей переменной z . Чтобы вывести функцию правдоподобия для β , обозначим, как и раньше, через $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_g$ различные упорядоченных наработок до отказов. Пусть дополнительно d_k обозначает число совпадающих отказов в момент τ_k . Тогда в историю \mathbf{H}_j входят эти совпадения во все моменты отказов до τ_j (включая

гается 5%-ная квантиль хи-квадрат распределения:

$$2(78,68 - 77,03) = 3,30 < 3,84.$$

Однако числовые значения коэффициентов, выражающих зависимость $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$ от $\log(\text{WBC})$, равны:

$$\widehat{\beta}_2 - 0,515 \widehat{\beta}_3 = 0,14 \text{ (AG — отрицательное);}$$

$$\widehat{\beta}_2 + 0,485 \widehat{\beta}_3 = 0,64 \text{ (AG — положительное).}$$

Зависимость линейного прогноза $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$ от $\log(\text{WBC})$ для двух групп изображена на рис. 7.3. Заметим, что коэффициент

τ_j). Условная вероятность того, что в множестве риска $R(\tau_j)$ каждый объект из набора i_1, i_2, \dots, i_d откажет при заданной истории H_j , равна

$$\frac{\psi(i_1)\psi(i_2)\dots\psi(i_d)}{\sum_{k \in S(j; d)} \psi(k_1)\psi(k_2)\dots\psi(k_d)}, \quad (7.16)$$

где $s(j; d)$ — множество всех выборов $d = d_j$ объектов из множества риска $R(\tau_j)$ размера $r_j = r$. Заметим, что (7.16) соответствует вкладу одной наработки до отказа. Произведение всех таких членов из-за зависимости от чисел совпадений d_j не является больше маргинальной функцией правдоподобия рангов. Поэтому для обоснования применимости асимптотической теории необходимо использовать частную функцию правдоподобия (гл. 8). Вычисление логарифма функции правдоподобия и его производных также становится очень громоздким. Возможно некоторое упрощение, когда функция $\psi(z; \beta)$ имеет логарифмически линейный вид $\psi(z; \beta) = e^{\beta^T z}$. Тогда полный логарифм функции правдоподобия равен

$$l = \sum_{i=1}^g \left[\beta^T s_j - \log \left(\sum_{k \in S(j; d)} e^{\beta^T s_{jk}} \right) \right], \quad (7.17)$$

где $s_j = z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_d}$ — сумма векторов z_i по всем действительно отказавшим в момент τ_j объектам; каждая s_{jk} — соответствующая сумма по всем d -мерным наборам (k_1, k_2, \dots, k_d) объектов, которые могли бы отказаться в момент τ_j . К счастью, эти суммы по $s(j; d)$ удается оценить с помощью рекурсивных алгоритмов даже тогда, когда r и d становятся слишком большими и трудно вычислить все члены.

Второй подход для обработки данных с совпадениями состоит в следующем. Рассмотрим эти данные, порождающиеся моделью с непрерывным временем как возникающие из-за группировки времен жизни. К сожалению, группировка не приводит к логистической модели, и результирующая функция правдоподобия отличается от полученной. В действительности для модели с группированными данными не существует точных методов, основанных на условных рассуждениях. Вместо этого можно суммировать все члены маргинальной функции правдоподобия рангов (7.4) для непрерывной модели, которые не противоречат полученным данным. Если отказы с номерами $i = 1, 2$ из полного набора $i =$

$1, 2, 3, 4$ наблюдались в момент τ , то вклад момента τ в функции правдоподобия будет равен

$$\frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(2)}{\psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} + \\ + \frac{\psi(2)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)} \cdot \frac{\psi(1)}{\psi(1) + \psi(3) + \psi(4)}$$

К сожалению, эта сумма дальше не упрощается. Поэтому соответствующий логарифм функции правдоподобия, равный сумме логарифмов чле-

пов такого вида, остается трудно вычисляемым при нескольких множествах риска с достаточно большими значениями r и d .

Приближенную функцию правдоподобия (см. предыдущий раздел) найдем, увеличив все суммы в знаменателях, включая номера из этого множества риска. В предыдущем примере это приводит к следующему результату:

$$\frac{2\psi(1)\psi(2)}{[\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4)]^2}$$

или в более общем случае

$$\frac{d! \psi(i_1) \psi(i_2) \dots \psi(i_d)}{\left(\sum_{k \in \mathbf{R}(\tau)} \psi(k) \right)^d}, \quad (7.18)$$

что делает логарифмы функций правдоподобия легко поддающимися обработке. Это приближение широко применяется в приложениях и приводит к вполне удовлетворительным результатам (кроме случаев, где встречаются данные со значительными числами совпадений). Правда, многократный учет отказавших объектов, проявляется затем в появлении некоторого умеренного смещения.

Для преодоления этой трудности были предложены две другие оценки, в которых знаменатель в (7.18) заменяется соответственно на:

$$\prod_{j=1}^d \left(\sum_{k \in \mathbf{R}(\tau)} \psi(k) - \frac{(j-1)}{d} \sum \psi(k) \right), \quad (7.19)$$

$$\left[\prod_{k \in \mathbf{R}(\tau)} \psi(k) - \left(\frac{d-1}{2d} \right) \sum_{k \in \mathbf{D}_j} \psi(k) \right]^d. \quad (7.20)$$

где через \mathbf{D}_j обозначено множество объектов, отказавших в момент t_j . Ни в одном из этих приближений не допускается совпадений зарегистрированных цензурированных и наработок до отказов. Обычное соглашение в таких случаях состоит в предположении, что все отказы, зарегистрированные в произвольный момент τ , предшествуют любому цензурированию, зарегистрированному в момент τ . И поэтому цензурированные объекты полностью входят в соответствующее(ие) множество(ва) риска.

Легко можно установить и все относящиеся к рассматриваемому вопросу модификации приближенных функций правдоподобия для обработки данных с группированными вместе цензурированными и нецензурированными наработками до отказа в одних и тех же интервалах.

Если совпадения отсутствуют, т. е. $d_j = 1$ для всех j , то каждое из выражений (7.17) — (7.20) сводится к одной и той же функции правдоподобия (7.4), соответствующей непрерывной модели.

Если совпадений очень много, так что времена жизни группируются в небольшое число интервалов, то можно присвоить отдельный мешаю-

щий параметр π_j каждой базовой (условной) функции надежности на каждом интервале и выполнить полную максимизацию логарифма функции правдоподобия как по π_j , так и по регрессионным параметрам β . Для того чтобы получить чувствительные к изменению параметров результаты, общее число зарегистрированных отказов d должно быть гораздо больше числа g группированных интервалов. Для справедливости асимптотических результатов требуется, чтобы размер выборки $n \rightarrow \infty$ при фиксированном числе интервалов (более подробно об этом см. в упр. 7.5).

7.7. ЗАДАЧА О ДВУХ ВЫБОРКАХ

Применим теперь дискретную логистическую регрессионную модель сравнения двух групп времени жизни с цензурированием. Тогда поясняющая переменная z будет иметь только одну компоненту, которая принимает значения 1 и 0 для групп 1 и 0 соответственно. Логарифм функции правдоподобия (7.17) равен

$$l(\beta) = \beta \sum_{j=1}^g d_{1j} - \sum_{l=1}^g \log \left(\sum_{k \in S(j;d)} e^{\beta d_{1jk}} \right),$$

где d_{1j} — число отказов в момент τ_j в группе 1, а d_{1jk} — число объектов из группы 1 в наборе $k = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ ($d = d_j$) номеров из множества риска $\mathbf{R}(\tau_j)$.

Производные логарифма функции правдоподобия имеют вид

$$U(\beta) = l'(\beta) = \sum_{j=1}^g [d_{1j} - A_j(\beta)]$$

и

$$-I(\beta) = l''(\beta) = - \sum_{j=1}^g V_j(\beta),$$

где через $A_j(\beta)$ и $V_j(\beta)$ обозначены соответственно среднее и дисперсия чисел d_{1jk} для взвешенной выборки без возвратов из множества риска $\mathbf{R}(\tau_j)$ с вероятностью выбора $i \in \mathbf{R}(\tau_j)$, пропорциональной $e^{\beta T z_i}$.

Для критерия вкладов при нулевой гипотезе отсутствия различий между двумя группами $\beta = 0$ требуются значения $U(0)$ и $I(0)$. Выборочная схема, определяющая $A_j(\beta)$ и $V_j(\beta)$, сводится к простой случайной выборке без возвращения (если $\beta = 0$), и поэтому $A_j(0)$ и $V_j(0)$ в точности равны среднему и дисперсии гипергеометрической случайной величины, а именно:

$$\begin{aligned} A_j(0) &= d_j r_{1j}/r_j; \\ V_j(0) &= d_j \frac{r_{0j} r_{1j} (r_j - d_j)}{r_j^2 (r_j - 1)}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где r_{1j} и r_{0j} равны размерам множеств риска в двух группах. Критерий вклада, сравнивающий $U(0)$ с ее оцененной дисперсией $I(0)$, из-за связи с экспоненциальными упорядоченными вкладами, указанной в 7.4, часто называют логарифмически ранговым критерием.

Этот критерий также может быть получен формально с помощью образования отдельной таблицы сопряженности 2×2 для каждого момента отказа со строками, соответствующими принадлежности группе, и столбцами, соответствующими наличию или отсутствию отказа. Затем следует построить комбинированный критерий проверки связи в соответствии с методом Мэнтела и Хансцела.

Если используется приближение функции правдоподобия Пето, то тогда множитель $(r_j - d_j)/(r_j - 1)$ в выражении для $V_j(0)$ не возникает, а результирующая оценка $I(0)$ дисперсии фактически не меняется. Иногда применяется даже более простой критерий, основанный на хи-квадрат статистике с одной степенью свободы:

$$\chi^2 = \frac{(D_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(D_0 - E_0)^2}{E_0}$$

(или некоторый уточненный вариант, учитывающий непрерывность), где $D_1 = \sum d_{1j}$ и $D_0 = \sum d_{0j}$ равны суммарным числам отказов в группах 1 и 0, а через E_1 и E_0 обозначены соответствующие математические ожидания. Таким образом, $E_1 = \sum_j d_j r_{1j} / r_j$. Так как $(D_1 - E_1) = -(D_0 - E_0) = U(0)$, этот упрощенный критерий на самом деле эквивалентен использованию в качестве приближения дисперсии следующего выражения:

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right)^{-1} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$$

вместо $I(0)$, что делает этот критерий еще более консервативным.

В табл. 7.2 записаны значения трех статистик, вычисленных для данных Фейгла и Целена. Здесь мы игнорируем зависимость от числа белых кровяных телец и просто сравниваем времена жизни в АГ-положительной и АГ-отрицательной группах. Значение 7,95 статистики вклада, построенной по приближению логарифма функции правдоподобия, можно сравнить со статистикой критерия отношения правдоподобия с таким же приближением логарифма функции правдоподобия [2 (86,00 — 82,23) = 7,54], взятой из табл. 7.1. Сильная устойчивость приближения $\sum (D - E)^2 / E$ в основном вызвана наличием шести времен жизни из АГ-положительной группы, которые превышают все времена жизни из АГ-отрицательной группы. Они не оказывают влияния на первые две статистики, но существенно увеличивают аппроксимацию дисперсии третьей статистики. Если же при вычислении дисперсии их исключить из выборки, то получаем приближенное значение хи-квадрат [6,703² (1/17,703 + 1/9,297) = 7,37].

Логарифмически ранговый критерий во всех своих вариантах был выведен как критерий проверки нулевой гипотезы $\psi = 1$ для модели с пропорциональными интенсивностями $h_1(t) = \psi h_0(t)$ или соответ-

Критерий для задач о двух выборках с исходными данными, взятыми из табл. 1.2

Время <i>i</i>	Группа 0		Группа 1		Всего		$d_j r_{1j}$	$d_j r_0 r_{1j}$	$d_j c_j r_{1j} (r_j - d_j)$
	r_{0j}	d_{0j}	r_{1j}	d_{1j}	r_j	d_j	r_j	r_j^2	$r_j^2(r_j - 1)$
1	16	0	17	2	33	2	1.030	0.500	0.484
2	16	1	15	0	31	1	0.484	0.250	0.250
3	15	3	15	0	30	3	1.500	0.750	0.698
4	12	3	15	1	27	4	2.222	0.988	0.874
5	9	0	14	1	23	1	0.609	0.238	0.238
7	9	1	13	0	22	1	0.591	0.242	0.242
8	8	1	13	0	21	1	0.619	0.236	0.236
16	7	1	13	1	20	2	1.300	0.455	0.431
17	6	1	12	0	18	1	0.667	0.222	0.222
22	5	1	12	1	17	2	1.412	0.415	0.389
26	4	0	11	1	15	1	0.733	0.196	0.196
30	4	1	10	0	14	1	0.714	0.204	0.204
39	3	0	10	1	13	1	0.769	0.178	0.178
43	3	1	9	0	12	1	0.750	0.188	0.188
56	2	1	9	1	11	2	1.636	0.298	0.268
65	1	1	8	2	9	3	2.667	0.296	0.222
100	0	0	6	1	6	1	1.000	0	0
108	0	0	5	1	5	1	1.000	0	0
121	0	0	4	1	4	1	1.000	0	0
134	0	0	3	1	3	1	1.000	0	0
143	0	0	2	1	2	1	1.000	0	0
156	0	0	1	1	1	1	1.000	0	0
		16		17		33	23.703	5.654	5.319

$U(0) = 17 - 23.703 = -6.703$;

дискретная статистика $\chi^2: 6.703^2 / 5.319 = 8.45$;

первая приближенная статистика: $6.703^2 / 5.654 = 7.95$;

вторая приближенная статистика: $6.703^2 (1/23.703 + 1/9.297) = 6.73$.

вующего аналога в дискретной логистической модели. Он не подходит для альтернатив, не принадлежащих к этому классу. Так, если $h_1(t) > h_0(t)$ для $t > t_0$ и $h_1(t) < h_0(t)$ для $t > t_0$, то вклады в $U(0)$, соответствующие τ , $\tau < t_0$, будут асимптотически положительны, а для моментов отказа $\tau > t_0$ — асимптотически отрицательны, и в результате может получиться не значимая статистика критерия, даже если два распределения времени жизни имеют резко отличающиеся формы. Для избежания таких неприятностей логарифмически ранговый критерий следует дополнять графиками функций риска двух распределений и по возможности анализом, включающим зависящие от времени ковариаты (см. гл. 8).

В гл. 8 будет также рассматриваться и много других критериев для двух выборок, отличающихся от логарифмически рангового критерия присвоением большего веса более ранним моментам отказов и меньшего — более поздним моментам, когда остается в работе только несколько объектов.

Обсуждение в конце 7.4 показывает, что для нецензурированных данных логарифмически ранговый тест сводится к критерию, построенному по экспоненциальным упорядоченным статистикам. Такой подход будет использован позднее.

7.8. ОЦЕНКА БАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ: ТОЧНОСТЬ ПОДБОРА МОДЕЛИ

До сих пор внимание было сосредоточено на регрессионных параметрах β , соответствующих функции риска

$$H_0(t) = \int_0^t h_0(u) du$$

и функции надежности

$$F_0(t) = \exp[-H_0(t)],$$

а не на функции интенсивности $h_0(t)$. В самом деле, условные рассуждения полностью удаляют эти функции из функции правдоподобия. Если требуется дать заключения анализа, выражаемые непосредственно через функции надежности определенных объектов или групп объектов, то исходным должно быть изучение именно этих базовых функций. На их основе можно построить наглядные прямые графические процедуры для оценки точности подбора модели.

Если $h_0(t)$ задается параметрически, скажем, как $h_0(t; \varphi)$, то параметр φ может быть оценен через совместную функцию правдоподобия $l(\beta; \varphi)$. Как и в гл. 6, можно выполнить одновременную максимизацию функции правдоподобия по β и φ или, что более удобно, положить $\hat{\beta} = \hat{\beta}$ равным оценке условного правдоподобия, а затем максимизировать $l(\hat{\beta}, \varphi)$ по φ . Духу этой главы больше соответствует поиск непараметрических оценок.

Просто вычисляемую непараметрическую оценку $H_0(t)$ можно получить в случае, если заметить, что полное число отказов на $(0, t)$

$$D(t) = \sum_{\tau_j < t} d_j,$$

имеет одинаковое математическое ожидание с полной функцией риска

$$H(t) = \sum_{i=1}^n I_i(y_i)$$

до момента времени t по всем изучаемым объектам. Здесь $y_i = t$, если $t_i > t$, так что этот объект по-прежнему наблюдается в момент t , иначе y_i равен моменту отказа или цензурирования. Таким образом,

$$H(t) = \int_0^t \sum_{j \in R(u)} \psi(j) h_0(u) du,$$

ведет к предполагаемой оценке

$$\widehat{H}_0(t) = \sum_{j \in I} \frac{d_j}{\sum_{l \in \mathbf{R}(\tau_j)} \widehat{\psi}(l)},$$

где $\widehat{\psi}(l)$ — оцененные значения функции $\psi(l)$. Заметим, что для единственной однородной выборки эта оценка сводится к аддитивной оценке (4.14) (см. гл. 4).

Базовую функцию надежности можно оценить, полагая $\widehat{\mathbf{F}}_0(t) = \exp[-\widehat{H}_0(t)]$. Сочетая эту оценку с оценками множителей $\widehat{\psi}(i)$, получаем оценки значений

$$\widehat{H}_i(t) = \widehat{\psi}(i) \widehat{H}_0(t), \quad \widehat{\mathbf{F}}_i(t) = [\widehat{\mathbf{F}}_0(t)]^{\widehat{\psi}(i)}$$

функции риска и функции надежности для объекта i . С помощью этих оценок можно графически проиллюстрировать оцененное влияние поясняющих переменных на время жизни, например, нарисовав график фиксированного перцентиля оцененной функции надежности $\widehat{\mathbf{F}}_i(t)$ в зависимости от значений поясняющих переменных.

Другим важным применением таких оценок является определение точности подбора модели. Если времена жизни T_i преобразовать с помощью истинных функций риска $H_i(t)$, то результирующие значения $H_i(T_i)$ образовали бы (цензурированную) выборку из единичного экспоненциального распределения. Примерно того же результата можно ожидать, когда T_i преобразованы оцененными функциями $\widehat{H}_i(t)$. Преобразованные величины $\widehat{H}_i(T_i)$ можно назвать обобщенными остатками (см. 6.6.).

С целью комплексной проверки модели упорядоченные значения $\widehat{H}_i(T_i)$, \widehat{H}_i можно нанести на график относительно их математических ожиданий для случая единичного экспоненциального распределения. Возможно, полезнее окажутся отдельные графики для подмножеств данных, определенных поясняющими переменными. Благодаря таким графикам можно увидеть, что в модель требуется включить дополнительные поясняющие переменные или комбинации поясняющих переменных. С помощью графиков эмпирических функций надежности для подмножеств данных, определенных значениями линейного прогноза, можно обнаружить отклонения от модели пропорциональных интенсивностей.

Однако детализированная выборочная теория этих обобщенных остатков еще не разработана, и поэтому при интерпретации результатов нужна осторожность. Оценивание множителей ψ и функции риска H_0 ведет к появлению корреляции между остатками, что может в результате дать ложную точность подбора теоретического типа модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Модель пропорциональных интенсивностей была впервые предложена Коксом (1972), который основное внимание уделял логарифмически линейной форме множителя ψ . Линейная форма исследована в работе Томаса (1981). Эфроном (1977) была разработана логистическая форма, а Барриджем (1981с) и Аранда-Ордазом (1980) изучены более общие семейства распределений. Коксом (1972) выведена функция правдоподобия (7.3) как произведение условных вероятностей. В книге Кэлбфлейша и Прентиса (1973) впервые указано на явную интерпретацию через маргинальную функцию правдоподобия рангов.

Описание в этой главе модели логарифмически линейных функций интенсивностей и дискретной логистической модели следует работе Кокса (1972). Более детальное изложение рекурсивной вычислительной схемы для логистического логарифма функции правдоподобия можно найти в работе Ховарда (1972), Гейла и др. (1981). Маргинальная функция правдоподобия для сгруппированных данных была выведена в книге Кэлбфлейша и Прентиса (1973), а приближения (7.18), (7.19) и (7.20) были предложены соответственно в работах Пето (1972), Эфрона (1977) и Оукса (1981). Неусловный анализ с отдельным мешающим параметром для каждого сгруппированного интервала дан Прентисом и Глоуклером (1978) (см. упр. 7.5).

Мэнтел (1966) получил логарифмически ранговый критерий для сравнения распределений времени жизни по аналогии с критерием Мэнтелла — Ханселя (1959) (см. также Кокрен, 1954), для комбинированной информации из таблиц сопряженности. Обоснование этого критерия как критерия вклада для дискретной логистической модели получено в работе Кокса (1972). В работе Брауна (1984) обсуждаются оценки дисперсии для логарифмически рангового критерия. Пето и др. (1976, 1977) продемонстрировали методы, основанные на приближенной статистике $\chi^2 = \sum (D_i - E_i)^2 / E_i$.

Оценки для функции интенсивности были предложены Коксом (1972), Бреслоу (1972, 1974, 1975), Оуксом (1972) и другими. Понятие обобщенных остатков впервые появилось в книге Кокса и Снелла (1968); о приложениях к временам жизни см. работу Кроули и Ху (1977), а также Кея (1977). В работе Лагокоса (1981) уточняется их интерпретация.

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Покажите, что соотношение (7.4) может быть получено как сумма всех вероятностей (7.3), согласующихся с наблюдаемой группой отказов и цензурированных.

Указание. Используйте для этого метод математической индукции начиная с последнего момента цензурирования.

7.2. Предположим, что имеется две группы объектов и выполнено по $n = 3$ наблюдений на группу, цензурирование отсутствует. Для

каждого из 20 возможных упорядочений моментов отказов в двух группах вычислите $U(0)$, $I(0)$ и $\bar{I}(0)$. Покажите, что $|U(0)|$ сильно коррелирует с $I(0)$. Прокомментируйте результаты.

[Браун (1984)]

7.3. Покажите, что если для функции правдоподобия используется приближение Пето, то вторая производная при $\beta = 0$ завышает оценку дисперсии первой производной (для данного множества риска) на множитель $(r-1)/(r-d)$.

7.4. Исследуйте точность приближенной функции правдоподобия, если каждый знаменатель имеет вид

$$\left(\sum_{k \in R_j} \psi(k) - \xi \sum_{k \in D_j} \psi(k) \right)^d \quad (0 < \xi < 1)$$

[Оукс (1981)]

7.5. Предположим, что выполняется требование (7.1) непрерывной временной модели с пропорциональными интенсивностями, но наблюдения сгруппированы в интервалы $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_g$. Покажите, что «сгруппированная» функция интенсивности $h_j(z) = \text{pr}(T < a_j/T \geq a_{j-1})$.

удовлетворяет соотношению $\log[1 - h_j(z)] = \psi(z; \beta) \log[1 - h_j(0)]$.

Для случая $\psi(z; \beta) = e^{\beta T z}$ найдите оценку максимального правдоподобия β , если $h_j(0)$ рассматриваются как «мешающие» параметры. Исследуйте поведение этой оценки для больших выборок ($n \rightarrow \infty$, g — фиксировано).

[Прентис и Глоуклер (1978)]

7.6. Множительная оценка «ближайшего соседа» определяется в первую очередь заданном расстоянии в множестве поясняющих переменных z . Затем для каждого объекта вычисляется множительная оценка функции надежности по этому объекту и его k ближайшим соседям с учетом переменной z . Предложите, как на основе среднего или медианы оцененной функции надежности может быть проведен графический анализ в том случае, если z — одномерная величина и при сравнении альтернативных моделей.

[Доксам и Янделл (1983)]

7.7. Для логарифмически ранговых вкладов q_i из соотношения (7.14) покажите, что

$$\sum q_i^2 = d - \sum_{j=1}^d 1/r_j.$$

С помощью этого соотношения получится несколько более простая форма для перестановочной дисперсии (7.15).

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Поясняющая переменная, зависящая от времени, называемая в дальнейшем ковариатой, — это такая переменная, значение которой для данного объекта может изменяться со временем. В настоящей главе рассматривается включение таких переменных в логарифмически линейную модель пропорциональных интенсивностей. После описания некоторых приложений обсуждается оценивание коэффициентов для поясняющих переменных, зависящих от времени, на основе частной функции правдоподобия и сравнивается асимптотическая эффективность этого метода с методом полного параметрического анализа в рамках той же модели. Показывается, как увеличивается число критериев для двух выборок, которые могут быть получены для логарифмически линейной модели с помощью введения стохастических ковариат. Эти критерии имеют неплохие свойства при альтернативах, в которых отношение интенсивностей стремится к единице при увеличении времени наблюдения. Они являются менее чувствительными к хвостам распределения, чем логарифмически ранговый критерий. Указан также другой подход, использующий модель ускоренных испытаний. Наконец, рассмотрена методика сокращения объема вычислений для подбора логарифмически линейной модели. Кроме того, эта методика имеет более широкое применение в промышленных испытаниях на надежность, где соответствующие ковариаты могут быть определены только в результате разрушительных испытаний.

8.2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ КОВАРИАТ

(i) Проверка достоверности модели пропорциональных интенсивностей

В простой модели пропорциональных интенсивностей при сравнении двух групп объектов выполняется следующее соотношение:

$$h_z(t) = \exp(\beta z) h_0(t),$$

где $z = 0$ или 1 для 0 и 1 -й групп соответственно. Отношение интенсивностей, равное e^β , конечно, не зависит от t . Как уже указывалось в гл. 5, задавая зависящую от времени ковариату

$$z_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{группа 0,} \\ \log [h_1(t)/h_2(t)] & \text{группа 1,} \end{cases}$$

можно в принципе считать функции интенсивности в двух группах произвольными.

При более реалистичном подходе с помощью подходящего выбора компонент $z_i(t)$ могут изучаться простые формы отклонения от модели пропорциональных интенсивностей. Например, если

$$z_{i1} = \begin{cases} 0 & \text{группа 0,} \\ 1 & \text{группа 1,} \end{cases} \quad z_{i2} = \begin{cases} 0 & \text{группа 0,} \\ t-t^* & \text{группа 1,} \end{cases}$$

то отношение интенсивностей будет равно

$$\exp [\beta_1 + \beta_2 (t-t^*)].$$

Здесь t^* — произвольная константа, близкая к среднему времени жизни. Она включается для улучшения интерпретируемости, а также для того, чтобы избежать неустойчивости вычислений при расчетах. При такой параметризации e^{β_1} соответствует отношению интенсивностей в двух группах в момент t^* . Ненулевое значение коэффициента β_2 с увеличением времени приводит к возрастающему ($\beta_2 > 0$) или убывающему ($\beta_2 < 0$) тренду в отношении интенсивностей.

Подобный же подход может быть приспособлен и к количественным переменным. Для произвольной компоненты z_r , зависящая от времени ковариата вида $z_r'(t) = (t-t^*)(z_r - z_r^*)$ соответствует влиянию взаимосвязи между z_r и временем на отношение интенсивностей. Часто оказывается, что точность прогноза с помощью ковариаты стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Этого можно избежать, если ввести зависящую от времени ковариату $e^{-\gamma t} z_i$, соответствующую кратковременному эффекту, как и в соотношении (5.30).

Такие зависящие от времени ковариаты определены как функции от времени для каждого объекта. Они не являются ни в каком смысле случайными величинами.

(ii) Измерения, выполненные в ходе исследования

В ходе изучения могут быть произведены повторные измерения переменных, которые предположительно связаны с продолжительностью времени жизни. Например, кровяное давление обычно более или менее регулярно измеряется у каждого наблюдаемого больного, и функция интенсивности в определенный момент времени может больше зависеть от величины кровяного давления больного в этот момент времени, чем от его значения в начале исследования. Следовательно, вместо единственного значения z_i кровяного давления получаем для каждого i -го больного функцию $z_i(t)$, которая в момент времени t равна значению последнего измерения, предшествующего моменту t . Так как на такую ковариату влияет «вид» лечения, назначаемого индивидууму, то необходима особая осторожность при интерпретации подбора таких моделей (см. 5.1).

При проведении эпидемиологических исследований смертности от профессиональных факторов (например, таких, как асбестовая пыль) общее их воздействие часто имеет тенденцию к увеличению с возрастом индивидуума. В качестве грубого приближения к соответствующей биологической дозе необходимо взять проработанные годы или их взвешенное среднее. Иногда возможно указать определенные уровни воздействия для специальных типов работ и, таким образом, получить некоторый показатель, учитывающий и степень воздействия пыли, и продолжительность работы. И в том и в другом случае воздействие при работе в момент времени будет функцией $z_i(t)$ для каждого индивидуума i .

Бывает, что в промышленных испытаниях на надежность можно оценить степень износа и разрушения компонент в ходе их функционирования и этот показатель может быть наиболее полезным показателем текущего риска отказа.

Зависящие от времени ковариаты в этих примерах являются случайными величинами. Их значения при любом исследовании объекта обычно нельзя определить заранее. Несмотря на это, помня о трудностях интерпретации, упомянутых в гл. 5, следует учитывать, что модель обычно чувствительна при условии заданных конкретных реализаций $z_i(t)$ случайных функций $Z_i(t)$.

(iii) Воздействия с переключением

Зависящие от времени ковариаты можно использовать для моделирования эффекта перемещения объекта из контрольной группы в группу, подвергающуюся воздействию, и наоборот. Это может происходить, если по некоторым причинам назначение воздействия задерживается. Примером может быть оценивание результатов лечения в палатах интенсивного наблюдения за больными, которые только что перенесли тяжелый сердечный приступ. Исходу здесь соответствует смерть больного. Риск смерти больного в период между началом первого сердечного приступа и поступлением его в такую палату может быть значительным и должен быть учтен при любой оценке влияния лечения на продолжительность жизни.

Предположим, что первый момент внезапного сердечного приступа известен, так что он может служить началом отсчета времени. Тогда в случае простой модели для функции интенсивности больного через t часов после сердечного приступа справедливы соотношения:

$$h_i(t) = h_0(t), \quad (8.1)$$

если к этому моменту больной еще не был помещен в палату интенсивного наблюдения, но

$$h_i(t) = e^{\beta} h_0(t), \quad (8.2)$$

если к моменту t он уже был туда помещен. Таким образом, предполагается, что лечение (если оно применяется) проявляется в умножении функции интенсивности на e^{β} . Влияние лечения на продолжительность жизни может быть благоприятным, если $\beta < 0$, и вредным, если $\beta > 0$.

Необходимо подчеркнуть, что в этом случае оценка β требует массива данных из определенной популяции больных, перенесших тяжелые сердечные приступы и поступивших в палату интенсивного наблюдения при условии, что их продолжительность жизни была достаточно большой. Информация о тех, кто поступил, сама по себе не является достаточной. Минимальный набор необходимых данных включает в себя для каждого больного: время начала сердечного приступа; время поступления в палату интенсивного лечения; время смерти (если эти события действительно имели место), а также полное время наблюдения и лечения больного.

Если эта информация известна, то функция-ковариата $z_i(t)$ может быть определена следующим образом:

$$z_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если больной еще не поступил к моменту } t, \\ 1, & \text{если больной поступил до момента } t. \end{cases}$$

Тогда моделям (8.1) и (8.2) соответствует интенсивность

$$h_i(t) = e^{\beta z_i(t)} h_0(t).$$

Многочратно изучавшийся пример такого рода касается исследования станфордской программы трансплантации сердца. Зависимость от возможности трансплантации подходящего донорского сердца означает, что больному могут не делать операцию в течение недели после даты решения совета врачей (если новое сердце вообще найдется). Если время t измерять от даты решения совета врачей, то функция-ковариата принимает значение нуля или единицы в соответствии с тем, пересажено или нет i -му больному новое сердце к моменту t . Этот пример будет обсуждаться в дальнейшем в 8.9.

(iv) Эволюционные ковариаты

Для некоторых целей полезно ввести новый класс зависящих от времени ковариат. Пусть через \mathbf{H}_t обозначена история отказов, цензурированных и любых других случайных характеристик задачи, рассматриваемых до момента t . Функция $Z(t)$ будет называться эволюционной ковариатой в случае, если она является функцией только истории \mathbf{H}_t . Таким образом, в качестве $Z(t)$ можно будет взять число объектов множества риска в момент t , число отказов до момента t или, при сравнении двух групп, число отказов в одной из групп до момента времени t . Логарифмически линейная модель пропорциональных интенсивностей принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{pr} \{i \text{ отказывает в интервале } (t, t + \Delta) \mid i \in \mathbf{R}(t), \mathbf{H}_t\} = \\ = h_0(t) e^{\beta z_i(t)}, \end{aligned}$$

где $z_i(t) = z_i(t, \mathbf{H}_t)$ равно значению реализации эволюционной ковариаты в момент времени t .

В математических рассуждениях недопустимо в качестве условий брать полные реализации процессов $Z_i(t)$, так как их значение в определенный момент времени, скажем t_0 , будет содержать информацию об отказах, которые произошли в момент $t < t_0$. Тем не менее в 8.4 будет показано, что эволюционные ковариаты можно применять на законных основаниях и эта возможность расширяет границы использования логарифмически линейной модели интенсивностей.

Эволюционные ковариаты являются аналогом понятия эволюционного цензурирования, введенного в гл. 1, тогда, когда решение о цензурировании объекта может зависеть от произвольного события в \mathbf{H}_j .

Следует сделать одно предостережение. Как отмечалось в гл. 1, часто для разных объектов время t измеряется от различных начал отсчета в календарном времени. Больные могут поступить на клиническое обследование в разные дни, и соответственно продолжительность жизни каждого больного измеряется от момента его собственного поступления. Тогда, если лечение назначается в зависимости от предыдущих «отказов» в календарном времени, полученная как следствие реорганизация «отказов» может нарушить эволюционные свойства ковариат. Некоторые детали такой модели еще полностью не ясны. Описанная ситуация совершенно отличается от важного практического вопроса о возможных текущих трендах зависимости отказов от ковариат. Для этого можно использовать календарное время в качестве дополнительной поясняющей переменной в логарифмически линейной модели, а также дополнительно ввести в модель произведение переменных, чтобы учесть изменения со временем в результатах лечения.

8.3. ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Вывод функции правдоподобия для параметра β в логарифмически линейной модели интенсивностей с зависящими от времени ковариатами во многом похож на вывод, описанный в предыдущей главе, для случая постоянных ковариат. Как и раньше, допустим, что имеется d упорядоченных наблюдений отказов, которые произошли в моменты $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_d$; положим $\mathbf{T}_j = i$, если объект i отказал в момент τ_j . Пусть $\mathbf{R}(\tau_j) = \{i: t_i \geq \tau_j\}$ есть соответствующее множество риска в момент τ_j , и история \mathbf{H}_j — набор всех отказов и цензурированных до момента τ_j , а также значений ковариат, в том числе эволюционных ковариат до момента времени τ_j , включая τ_j . Сам момент τ_j также включается в \mathbf{H}_j , но значение метки \mathbf{T}_j , равное номеру объекта, отказавшему в момент τ_j , не входит в \mathbf{H}_j . Тогда условная вероятность того, что $\mathbf{T}_j = i$ при заданной \mathbf{H}_j , очевидно, равна

$$p_j(i | \mathbf{H}_j) = \frac{\exp[\beta^T z_i(\tau_j)]}{\sum_{k \in \mathbf{R}(\tau_j)} \exp[\beta^T z_k(\tau_j)]}. \quad (8.3)$$

Статистические выводы о β основываются на произведении

$$\text{lik} \doteq \prod_{j=1}^d p_j(i_j | \mathbf{H}_j).$$

Чтобы избежать двойной индексации, удобно, не нарушая общего смысла понятия, обозначить через z_{hi} значение функции-ковариаты z_k k -го объекта в момент отказа t_i i -го объекта. Тогда получаем

$$\text{lik} = \prod_{i \in \mathbf{D}} \frac{\exp(\beta^T z_{ii})}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \exp(\beta^T z_{ki})}. \quad (8.4)$$

Правомерность рассмотрения выражения (8.4) как функции правдоподобия будет показана в следующем разделе.

Как и в 7.3 — 7.4, получаем следующий вид логарифма функции правдоподобия:

$$l \doteq \sum_{i \in \mathbf{D}} \left[\beta^T z_{ii} - \log \left(\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \exp(\beta^T z_{ki}) \right) \right],$$

производные которого равны:

$$U_r(\beta) = \sum_{i \in \mathbf{D}} [z_{iir} - A_{ir}(\beta)];$$

$$-I_{rs}(\beta) = - \sum_{i \in \mathbf{D}} C_{irs}(\beta),$$

где теперь

$$A_{ir}(\beta) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} z_{kir} \exp(\beta^T z_{ki})}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \exp(\beta^T z_{ki})};$$

$$C_{irs}(\beta) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} z_{kir} z_{his} \exp(\beta^T z_{ki})}{\sum_{k \in \mathbf{R}_i} \exp(\beta^T z_{ki})} - A_{ir}(\beta) A_{is}(\beta).$$

Индексы r и s указывают на соответствующие компоненты векторов z . Статистические выводы о параметре β могут проводиться, как и раньше. Если имеется много отказов и размерность β велика, может потребоваться большой объем вычислений, так как используется трехмерный массив значений ковариат.

8.4. ЧАСТНАЯ ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

В 7.2 было показано, что если ковариаты не зависят от времени, то произведение lik может быть интерпретировано через маргинальную функцию правдоподобия рангов. Для зависящих от времени ковариат это уже неверно. Однако каждый член \mathbf{H}_j включает в себя все предыдущие члены $\tau_1, \mathbf{H}_1, i_1, \tau_2, \mathbf{H}_2, i_2, \dots, \tau_j$, т. е. эти величины являются функциями \mathbf{H}_j . Отсюда легко вытекают три основных свойства производных логарифма функции правдоподобия. Эти свойства совместно с условиями регулярности позволяют вывести асимптотические свойства логарифма функции правдоподобия.

Полную функцию правдоподобия для всех данных можно записать как

$$\text{lik}_j = \prod_{i=1}^d [g_i(\tau_j, \mathbf{H}_j | \mathbf{H}_{j-1}, i_{j-1}) p_j(i_j | \mathbf{H}_j)] \times \\ \times g_{d+1}(\mathbf{H}_\infty | \mathbf{H}_d, i_d).$$

Здесь функция g_j равна условной совместной плотности или функции распределения j -го упорядоченного момента отказа τ_j , а также произвольных цензурированных в интервале (τ_{j-1}, τ_j) и эволюции произвольных случайных функций-ковариат $\{Z_j(t) : \tau_{j-t} \leq t \leq \tau_j\}$ на интервале (τ_{j-1}, τ_j) . Последний член в произведении равен единице в том случае, если после последнего наблюдаемого отказа под наблюдением не осталось объектов.

Функция правдоподобия lik получается из lik_j , если опустить все члены g_j , которые соответствуют информации, содержащейся в промежутках между последовательными отказами. По этой причине она называется частной функцией правдоподобия. Функция $p_j(i_j | \mathbf{H}_j)$ является дискретной функцией распределения на множестве риска $\mathbf{R}(\tau_j)$ и зависит от параметра β . Отсюда следует, как и для любой вероятностной плотности или распределения, что

$$E\left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \middle| \mathbf{H}_j\right) = 0; \quad (8.5) \\ E\left(\frac{\partial^2 \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} \middle| \mathbf{H}_j\right) = \\ = -E\left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \cdot \frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_s} \middle| \mathbf{H}_j\right).$$

Все математические ожидания рассматриваются при условии истории \mathbf{H}_j . Но поскольку эти соотношения выполняются при любых наблюдениях \mathbf{H}_j , то они должны быть справедливы и как безусловные. Таким образом,

$$E\left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r}\right) = 0;$$

$$E \left(\frac{\partial^2 \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} \right) = - E \left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_s} \right).$$

С помощью свойств повторных математических ожиданий получаем следующее соотношение. Так как \mathbf{H}_k и i_k включаются в \mathbf{H}_j при $k < j$, го

$$E \left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \cdot \frac{\partial \log p_k(i_k | \mathbf{H}_k)}{\partial \beta_s} \right) = \\ = E \left[E \left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \cdot \frac{\partial \log p_k(i_k | \mathbf{H}_k)}{\partial \beta_s} \mid \mathbf{H}_j \right) \right] = \\ = E \left[\frac{\partial p_k(i_k | \mathbf{H}_k)}{\partial \beta_s} E \left(\frac{\partial \log p_j(i_j | \mathbf{H}_j)}{\partial \beta_r} \mid \mathbf{H}_j \right) \right] = 0,$$

здесь учтено, что последний член тождественно равен нулю по всем \mathbf{H}_j . Заметим, что рассуждение остается верным при $r = s$, хотя очевидно, что для $j = k$ оно не выполняется.

Стандартные доказательства асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия параметра θ для независимых и одинаково распределенных величин X_j можно получить, применив центральную предельную теорему к сумме

$$U(\theta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \log p(X_j, \theta)}{\partial \theta},$$

члены которой — независимые и одинаково распределенные векторы. Далее используется, что $E[U(\theta)] = 0$ и

$$E[U_r(\theta) U_s(\theta)] = -E[\partial U_r(\theta) / \partial \theta_s],$$

а также разложение $U(\theta)$ в ряд Тейлора в окрестности истинного значения параметра. Необходимы некоторые условия на третьи производные логарифма функции правдоподобия.

Как уже было показано, приращения производной частной функции правдоподобия, вычисленные при истинном значении параметра, являются некоррелированными. Этот результат гораздо слабее, чем полная независимость при всех значениях параметра в окрестности истинного значения. Следовательно, строгие доказательства асимптотической нормальности оценок оказываются достаточно трудными и были проведены только для частных случаев. Тем не менее кажется весьма вероятным, что эти результаты справедливы в большинстве случаев, представляющих практический интерес. Безусловно, необходимы некоторые дополнительные условия для обеспечения неограниченности роста полной информации, содержащейся в выборке при увеличении ее объема, и для того, чтобы эта информация не сосредоточивалась в нескольких парабатках до отказа. В упр. 6.1 приводится простой пример случая, когда асимптотическая нормальность не имеет места.

В предыдущих рассуждениях игнорировался тот факт, что при наличии цензурирования число членов d в частной функции правдоподобия само является случайной величиной. Однако это не связано с какими-нибудь принципиально новыми идеями.

8.5. СРАВНЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ С ПОЛНОСТЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

Если основная функция интенсивности $h_0(t)$ известна с точностью до фиксированного числа параметров (пусть это будет вектор параметров γ), то члены g_i , относящиеся к промежуткам, могут содержать полезную информацию о β . Важный вопрос состоит в том, насколько теряется точность при отбрасывании этих членов из функции правдоподобия. Рассмотрим сначала вид информационной матрицы для частной функции правдоподобия.

Для каждого $t > 0$ определим

$$A(\beta, t) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}(t)} z_k(t) \exp[\beta^T z_k(t)]}{\sum_{k \in \mathbf{R}(t)} \exp[\beta^T z_k(t)]};$$

$$C(\beta, t) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{R}(t)} z_k(t) z_k^T(t) \exp[\beta^T z_k(t)]}{\sum_{k \in \mathbf{R}(t)} \exp[\beta^T z_k(t)]} - A(\beta, t) A^T(\beta, t).$$

Таким образом, $A(\beta, t)$ является взвешенным средним значений вектора ковариат $z_k(t)$ по множеству риска $\mathbf{R}(t)$ с весами, пропорциональными множителям $\exp[\beta^T z_k(t)]$, а $C(\beta, t)$ — соответствующая ковариационная матрица.

Обозначим через $F_n(t)$ несобственную эмпирическую функцию распределения наблюдаемых наработок до отказа. Тогда $nF_n(t)$ равно числу наблюдаемых наработок до отказов меньших, чем t . Первую и вторую производные логарифма функции правдоподобия можно записать в следующем виде:

$$U(\beta) = \sum_{i \in \mathbf{D}} z_{ii} - n \int_0^{\infty} A(\beta, t) dF_n(t), \quad (8.6)$$

$$-I(\beta) = -n \int_0^{\infty} C(\beta, t) dF_n(t). \quad (8.7)$$

Предположим теперь, что при $n \rightarrow \infty$ случайные величины $A(\beta, t)$ и $C(\beta, t)$ сходятся к детерминированным пределам $E(\beta, t)$ и $V(\beta, t)$. Тогда $E(\beta, t)$ можно интерпретировать как математическое ожидание вектора ковариат, вычисленное для объекта, отказ которого наблюдался

в момент t , а $V(\beta, t)$ — соответствующую матрицу ковариаций. Предположим также, что при $n \rightarrow \infty$ эмпирическая функция распределения $F_n(t)$ сходится к некоторой предельной $F(t)$. Интегрирование относительно $dF(t)$ эквивалентно вычислению математического ожидания относительно маргинального распределения наработки отказа T . Схематично это можно записать как

$$n^{-1} U(\beta) \rightarrow E\{Z(T)\} - E\{E\{Z(T) | T\}\}.$$

Правая часть полученного соотношения, как и ожидалось, равна нулю в силу свойств повторных математических ожиданий. Аналогично

$$n^{-1} I(\beta) \rightarrow E\{\text{var}\{Z(T) | T\}\}$$

сходится к математическому ожиданию условной дисперсии.

Точность оценивания по методу максимального правдоподобия для полностью параметризованной модели зависит от параметризации, принятой для $h_0(t)$. Удобным способом такой параметризации является логарифмически линейная форма

$$h_0(t) = \exp[\alpha^T y(t)].$$

Здесь α — вектор параметров размерности p , а $y(t)$ — заданное множество функций-ковариат. Таким образом, при $p = 1$, $y_1(t) = 1$ получаем экспоненциальное распределение, при $p = 2$, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \log t$ — параметризацию распределения Вейбулла.

Тогда полную функцию интенсивности для i -го объекта можно записать как

$$h_i(t) = \exp[\alpha^T y(t) + \beta^T z_i(t)].$$

Чтобы получить логарифм функции правдоподобия для полного набора данных относительно α и β , сделаем важное предположение: либо функции-ковариаты $z_i(t)$, зависящие от времени, являются детерминированными, либо их распределения не зависят от параметров α и β . Заметим, что при этом не исключаются и эволюционные ковариаты, условные распределения которых удовлетворяют тем же допущениям. Предположения о том, что значения ковариат не содержат в себе информации об интересующих исследователя параметрах, являются математическим аналогом замечания, сделанного в гл. 5, о возможной роли зависящих от времени ковариат как промежуточных исходов. Аналогичное предположение сделаем и относительно моментов цензурирования. Если эти предположения выполнены, то

$$\begin{aligned} l_f(\alpha, \beta) &= \sum_{i \in D} [\alpha^T y(t_i) + \beta^T z_i(t_i)] - \\ &- \int_0^{\infty} \sum_{k \in R}(t) \exp[\alpha^T y(t) + \beta^T z_k(t)] dt. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Пусть $p = \dim(\alpha)$, $q = \dim(\beta)$. Тогда совместная информационная матрица по α и β порядка $(p + q) \times (p + q)$ есть математическое ожида-

ние матрицы— $\partial^2 l_f / \partial \alpha \partial \beta$. Легко показать, что она равна математическому ожиданию матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{\alpha\alpha} & S_{\alpha\beta} \\ S_{\alpha\beta} & S_{\beta\beta} \end{pmatrix},$$

где

$$S_{\alpha\alpha} = \sum_{i \in D} y(t_i) y(t_i)^T;$$

$$S_{\beta\beta} = \sum_{i \in D} z_i(t_i) z_i(t_i)^T;$$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{i \in D} y(t_i) z_i(t_i)^T.$$

Обратная к S матрица S^{-1} имеет правую нижнюю подматрицу $\bar{S}_{\beta\beta}$ порядка $q \times q$, причем

$$\bar{S}_{\beta\beta}^{-1} = S_{\beta\beta} - S_{\alpha\beta}^T S_{\alpha\alpha}^{-1} S_{\alpha\beta}.$$

Отсюда вытекает оценка маргинальной информации $I_f(\beta)$ о векторе β , которая получается из полного логарифма функции правдоподобия $l_f(\beta, \alpha)$ (см. 3.3).

Поясним эти формулы на частном примере, когда $p = 1$, $y_1(t) = 1$, $q = 1$, что соответствует $h_0(t) = e^{\alpha}$ и единственной скалярной ковариате. Тогда

$$\bar{S}_{\beta\beta}^{-1} = \sum_{i \in D} z_{il}^2 - \left(\sum_{i \in D} z_{il} \right)^2 / d.$$

Из замечания, сделанного ранее, следует, что

$$n^{-1} I_f(\beta) \rightarrow \text{var} [Z(T)],$$

т. е. к безусловной дисперсии ковариаты $Z(T)$, вычисленной для наработки до отказа T , где, как и раньше, случайная величина T имеет несобственное распределение $F(t)$. Соотношение

$$\text{var} [Z(T)] = E \{ \text{var} [Z(T) | T] \} + \text{var} \{ E [Z(T) | T] \}$$

показывает, что компоненты нормализованной информации о параметре β из $l_f(\alpha, \beta)$, содержащиеся в частной функции правдоподобия $l(\beta)$, и члены, относящиеся к промежуткам $\{g_j\}$, являются главным образом внутри- и межгрупповыми компонентами $\text{var} [Z(T)]$ с группами, определяемыми наработкой до отказа T . Частная функция правдоподобия будет иметь высокую асимптотическую эффективность относительно полной функции правдоподобия в том случае, если отношение межгрупповой компоненты к внутригрупповой мало. Это условие, как правило, выполняется, если только не имеет места хотя бы один из следующих случаев:

- (i) параметр β далек от нуля;
- (ii) цензурирование сильно зависит от $Z(T)$;
- (iii) в ковариатах имеются сильные временные тренды.

Для полной асимптотической эффективности требуется, чтобы случайная величина $E [Z(T)|T]$ имела нулевую дисперсию, т. е. была постоянной. Это будет так, например, если $z_i(t)$ не зависят от времени, а являются постоянными, как в гл. 7; $\beta = 0$ и цензурирование не зависит от z .

Обобщение этих результатов на случае, когда $p > 1$ и (или) $q > 1$, не составляет труда. Так, если $p > 1$ и $q = 1$, разложение $\text{var} [Z(T)]$ заменяется разложением дисперсии относительно множественной регрессии $E [Z(T)|T]$ на $y(T)$. Полная асимптотическая эффективность имеет место, если $E [Z(T)|T]$ будет линейной комбинацией компонент $y_r(T)$.

Эти результаты являются только асимптотическими. Для конечных выборок потеря в точности при использовании частной функции правдоподобия бывает гораздо больше.

8.6. КРИТЕРИИ ДЛЯ ДВУХ ВЫБОРОК

При отсутствии совпадений, логарифмически ранговая статистика, полученная в предыдущей главе, для задачи сравнения двух распределений принимает вид

$$U(0) = \sum_{j \in \mathbf{D}} (d_{1j} - A_j), \quad (8.9)$$

где $d_{1j} = 1$ или $d_{1j} = 0$, если в момент τ_j произошел отказ соответственно в первой или во второй группе, величина $A_j = r_{1j}/r_j$ равна доле, которую составляют объекты из первой группы в полном множестве риска \mathbf{R}_j в момент τ_j . Этот критерий был построен на основе производной логарифма функции правдоподобия, вычисленной при $\beta = 0$, для модели пропорциональных интенсивностей

$$h_i(t) = \exp(\beta z_i) h_0(t),$$

где $z_i = 1$ и $z_i = 0$ для двух групп. Хотя логарифмически ранговый критерий дает неплохие результаты при альтернативных гипотезах из класса с пропорциональными интенсивностями, для альтернатив, не относящихся к этому классу, он может оказаться очень чувствительным к хвостам распределения, иными словами, к отказам, произошедшим, когда действующих объектов осталось немного. Для преодоления этой трудности можно построить взвешенную сумму

$$U(0, \omega) = \sum_{j \in \mathbf{D}} \omega_j (d_{1j} - A_j), \quad (8.10)$$

в которой более ранние наработки до отказа получают больший вес.

Применение эволюционных ковариат позволяет выводить такие критерии и вычислять оценки дисперсий в классе логарифмически линейных моделей интенсивности. Нужна, правда, существенная оговорка:

вес ω_j может зависеть от истории отказов и цензурирований до момента τ_j , но не должен зависеть от того, что происходит после τ_j . Определим

$$z_i(t) = \begin{cases} \omega(t) & i \in \text{группе } 1, \\ 0 & i \in \text{группе } 0, \end{cases}$$

где $\omega(t) = \omega(t, \mathbf{H}_t)$ — заданная функция, причем $\omega_j = \omega(\tau_j)$. Легко проверить, что первая производная логарифма функции правдоподобия в точности равна $U(0, \omega)$, а вторая производная, по которой оценивается $U(0, \omega)$, имеет вид

$$I(0, \omega) = \sum_{j \in \mathbf{D}} \omega_j^2 A_j (1 - A_j).$$

Предлагались специальные варианты весов:

$$\begin{aligned} \omega_j &= r_j && [\text{Гехан (1965)}]; \\ \omega_j &= n \widehat{\mathbf{F}}(\tau_j) && [\text{Прентис (1978)}]; \\ \omega_j(k) &= n |\widehat{\mathbf{F}}(\tau_j)|^k \quad (0 \leq k < 1) && [\text{Харрингтон и Флеминг (1982)}]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Здесь через $\widehat{\mathbf{F}}(\tau_j)$ обозначена оценка комбинированной функции надежности двух групп, обычно выбираемая в таких задачах равной

$$\widehat{\mathbf{F}}_j = \prod_{k=1}^j \left(\frac{r_k}{r_k + 1} \right).$$

Первые два критерия, как правило, называются «обобщенным критерием Вилкоксона», так как, если нет цензурирования, они сводятся к обычной статистике Вилкоксона. С современной точки зрения вариант весов Прентиса более предпочтителен по сравнению с вариантом Гехана, поскольку последний сильно зависит от способа цензурирования. Третье предложение компромиссное между логарифмически ранговым критерием ($k = 0$) и обобщенным критерием Вилкоксона ($k = 1$).

Были и другие предложения. Эфроном ранее рассматривалась статистика

$$U = - \int_0^{\infty} \widehat{\mathbf{F}}_2(t) d\widehat{\mathbf{F}}_1(t),$$

где $\widehat{\mathbf{F}}_1$ и $\widehat{\mathbf{F}}_2$ — множительные оценки соответствующих функций надежности по каждой группе. Эта статистика является важной, потому что в отличие от упомянутых выше вариантов она представляет состоятельную оценку вероятности

$$\text{pr}(T_2 > T_1) = - \int_0^{\infty} \mathbf{F}_2(t) d\mathbf{F}_1(t) \quad (8.12)$$

для произвольных исходных функций надежности F_1 и F_2 , а также для достаточно общих способов цензурирования. Однако при сильном цензурировании она может оказаться неустойчивой на хвостах распределений. Критерий Эфрона получается также при выборе в качестве весовой функции

$$\omega(t) = \frac{\widehat{F}_1(t) \widehat{F}_2(t) r(t)}{r_1(t) r_2(t)}. \quad (8.13)$$

8.7. РАНГОВЫЕ КРИТЕРИИ И МОДЕЛЬ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ

Предположим, что наблюдения описываются моделью ускоренных испытаний (см. 6.3), но со скалярной переменной z , тогда

$$Y_i = \log T_i = \mu - \beta z_i + e_i = -\beta z_i + e_i, \quad (8.14)$$

где z_i — значение ковариаты i -го объекта и случайная величина $e_i = \mu + e_i$ имеет известное распределение с плотностью f и функцией надежности F . Как и раньше, пусть $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_d$ — упорядоченные наблюдаемые моменты отказов ($\tau_0 = 0$, $\tau_{d+1} = \infty$). Обозначим через M_j ($j = 0, 1, \dots, k$) множество m_j объектов, цензурированных в интервале от τ_j до τ_{j+1} . Рассмотрим функцию правдоподобия по наблюдениям $T = \{T_j, M_j\}$. Если механизм цензурирования неизвестен, то точно ее выписать не удастся, но некоторое близкое приближение можно получить следующим образом.

Полагая $y_j = \log \tau_j$ и $z_{(j)} = z_{(T_j)}$ для значения ковариаты объекта, отказ которого наблюдался в момент τ_j , замечаем, что этому объекту соответствует множитель $f(y_j - \beta z_{(j)})$ в функции правдоподобия по наблюдениям (y, T) . Если предположить, что m_j действующих объектов в множестве M_j наблюдаются только после τ_j , то их общий вклад составит

$$\prod_{i \in M_j} F(y_j + \beta z_i).$$

Следовательно, полная функция правдоподобия имеет вид

$$E(\beta; T, y) = \prod_{i=1}^d f(y_j + \beta z_{(j)}) \prod_{i \in M_j} F(y_j + \beta z_i). \quad (8.15)$$

Чтобы получить функцию правдоподобия по наблюдениям T , необходимо проинтегрировать полученное выражение по логарифмам наработок до отказа y по допустимой области $\Gamma(d) = \{y_1 < y_2 < \dots < y_d\}$. Таким образом,

$$\text{lik}(\beta; T) = \int_{\Gamma(d)} E(\beta; T, y) dy. \quad (8.16)$$

В общем случае значение этого интеграла зависит от вида функции f , но для всех функций из семейства с параметром сдвига оно постоянно. Это значение при $\beta = 0$ не зависит от f и равно

$$\text{lik}(0; \mathbf{T}) = \int_{\Gamma'(d)} \prod_{j=1}^d (1-u_j)^{m_j} du = \prod_{j=1}^d 1/r_j,$$

где величина

$$r_j = \sum_{k=j}^d (1+m_k)$$

равна размеру множества риска в момент τ_j и $\Gamma'(d)$ обозначает преобразованную область $0 < u_1 < \dots < u_d < 1$. Полученный результат легко доказать методом математической индукции.

Локально наиболее мощный ранговый критерий проверки гипотезы $\beta = 0$ получается с помощью производной логарифма функции правдоподобия, вычисленной при $\beta = 0$. В результате дифференцирования $E(\beta; \mathbf{T}, y)$ по β получаем сумму n членов (по одному на каждое наблюдение), равных самой функции $E(\beta; \mathbf{T}, y)$, умноженной соответственно на

$$z_{(j)} f'(y_j + \beta z_{(j)}) / f(y_j + \beta z_{(j)})$$

или

$$-z_i f'(y_j + \beta z_i) / F(y_j + \beta z_i).$$

При $\beta = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \log \text{lik}(\beta; \mathbf{T})}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} &= \frac{1}{\text{lik}(0; \mathbf{T})} \int_{\Gamma'(d)} \left[\frac{\partial E(\beta; \mathbf{T}, y)}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} dy = \\ &= \sum_{j=1}^d \left(q_j^{(u)} z_{(j)} + \sum_{i \in M_j} q_i^{(c)} z_i \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

где

$$\begin{aligned} q_j^{(u)} &= \int_{\Gamma'(d)} \frac{f'(y_j)}{f(y_j)} \prod_{k=1}^d r_k E(0; \mathbf{T}, y) dy, \\ q_j^{(c)} &= \int_{\Gamma'(d)} -\frac{f(y_j)}{F(y_j)} \prod_{k=1}^d r_k E(0; \mathbf{T}, y) dy. \end{aligned}$$

С помощью преобразования $u_k = F(y_k)$ величины $q_j^{(u)}$ и $q_j^{(c)}$ можно записать как

$$q_j^{(u)} = \int_{\Gamma''(d)} \psi(u_j) \prod_{k=1}^d r_k (1-u_k)^{m_k} du, \quad (8.18)$$

$$q_j^{(c)} = \int_{\Gamma^{(d)}} \Psi(u_j) \prod_{k=1}^d r_k (1-u_k)^{m_k} du, \quad (8.19)$$

где

$$\Psi(u) = \frac{f'[G(u)]}{f[G(u)]}, \quad \Psi(u) = -\frac{f[G(u)]}{(1-u)}, \quad (8.20)$$

а $G(u)$ — функция, обратная $F(u)$. Явное вычисление коэффициентов $q_j^{(u)}$ и $q_j^{(c)}$ не вызывает затруднений только для некоторых распределений. Для логистической плотности

$$f(y) = e / (1 + e^y)^2$$

легко находится $\Psi(u) = 1 - 2u$, $\Psi(u) = -u$. Откуда получаем:

$$q_j^{(u)} = 2 \prod_{k=1}^j \left(\frac{r_k}{r_k + 1} \right) - 1, \quad q_j^{(c)} = \prod_{k=1}^j \left(\frac{r_k}{r_k + 1} \right) - 1. \quad (8.21)$$

Эти соотношения в действительности соответствуют выражениям, полученным Прентисом для обобщенного критерия Вилкоксона, который рассматривался в 8.6. В упр. 8.5 демонстрируется эквивалентность этих двух подходов.

Для распределения экстремума, $f(y) = \exp(y - e^y)$, изменение начала отсчета $y \rightarrow y - \alpha$ соответствует умножению функции интенсивности на e^α . Поэтому не удивительно, что для данной плотности получается логарифмически ранговый критерий. Можно показать:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \log(1-u) + 1, \quad \Psi(u) = \log(1-u), \\ q_j^{(u)} &= 1 - \sum_{k=1}^j \frac{1}{r_k}, \quad q_j^{(c)} = - \sum_{k=1}^j \frac{1}{r_k}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

что приводит к (7.14).

8.8. ВЫБОРКА ИЗ МНОЖЕСТВА РИСКА

В частную функцию правдоподобия (8.4) входит значение каждой поясняющей переменной, вычисленной в момент отказа для каждого объекта, действующего к этому моменту. Определение всех указанных величин может оказаться весьма трудоемким. В некоторых задачах о надежности в промышленности, когда переменной является степень накопленного износа или разрушения для некоторой компоненты, проведение таких измерений может быть выполнено только путем исследования, имеющего разрушительный характер и эффективно цензурирующего продолжительность работы данной компоненты в этот момент. Даже если определение значений поясняющих переменных не представляет труда, максимизация выражения (8.4) может оказаться дорогой с точки зрения вычислений.

Из соотношения (8.4) следует, что информация о β , которая вносится в функцию правдоподобия одним множеством риска, не возрастает в общем случае с ростом его размера. Это позволяет предположить, что можно достичь существенной экономии в затратах для достижения точности оценки, сравнивая каждый отказ только со случайной выборкой из соответствующих действующих объектов, размер которой обозначен через m .

Некоторым обоснованием этого метода могут служить следующие рассуждения. Рассмотрим конкретное множество риска $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}$ размера r . При условии заданной истории \mathbf{H}_t к моменту t подмножество \mathbf{G} из \mathbf{R} размера $m + 1$ выбирается в два этапа. Сначала выбирается объект $i \in \mathbf{R}$ с вероятностью, пропорциональной $\theta_i = \exp[\beta^T z_i(t)]$. Этот объект считается отказавшим. Затем для выбора оставшихся m элементов \mathbf{G} используется случайная выборка без возвращения из $r - 1$ содержащихся в \mathbf{R} элементов. Эти объекты в \mathbf{G} считаются действующими.

Легко показать, что (условная) вероятность данного подмножества \mathbf{G} в выборочном пространстве всех возможных подмножеств из \mathbf{R} размера $m + 1$ пропорциональна $\sum_{j \in \mathbf{G}} \theta_j$, а условная вероятность того, что отказал именно i -й объект при данном составе множества \mathbf{G} , равна $\theta_i / \sum_{j \in \mathbf{G}} \theta_j$. Таким образом, каждый член $p_j(i_j | \mathbf{H}_j)$ в lik может быть записан как произведение условной вероятности \mathbf{G} при заданных $\mathbf{R}(t)$ и \mathbf{H}_t ($t = \tau_j$) и условной вероятности события $i = i_j$ при заданном \mathbf{G} . Произведение указанных вероятностей само является частной функцией правдоподобия.

Некоторое представление о той потере точности, которая связана с отбрасыванием некоторых из (возможных) данных при таком способе измерений, дает стандартная формула для дисперсии разности средних двух независимых выборок:

$$\text{var}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2).$$

Если $n_1 = 1$, то выигрыш в точности при $n_2 > 5$ или 6 оказывается небольшим. Как показывает моделирование в более сложных приложениях, рассматривавшихся в этой главе, для получения большей части (примерно 80%) информации из полной частной функции правдоподобия, как правило, достаточно 8 или 10 контрольных измерений в каждом случае.

8.9. ПРИМЕР

В качестве иллюстрации применения зависящих от времени ковариат рассмотрим продолжительность жизни больных, проходивших лечение по станфордской программе трансплантации сердца. Эти данные, любезно предоставленные доктором Рупертом Миллером, приведены в табл. 8.1 и охватывают период с 1967 г. по февраль 1980 г. К этому времени было принято для трансплантации 240 больных, но только 184 больным действительно была произведена трансплантация. Из остав-

Таблица 81 Времена жизни (в днях) больных, проходивших лечение по станфордской программе трансплантации сердца (наблюдались до февраля 1980 г.)

Время ожидания	Указатель трансплантации*	Время жизни после трансплантации	Полное время жизни	Указатель жизненного состояния**
1	2	3	4	5
49	2			1
5	2			1
0	1	15	15	1
35	1	3	38	1
17	2			1
2	2			1
50	1	623	673	1
39	2			1
84	2			1
11	1	46	57	1
25	1	126	151	1
7	2			1
16	1	64	80	1
36	1	1350	1386	1
0	2			1
27	1	279	306	1
35	2			1
19	1	23	42	1
36	2			1
17	1	10	27	1
7	1	1024	1031	1
11	1	42	53	1
2	1	730	732	1
82	1	136	218	1
24	1	1961	1985	1
112	2			2
262	2			1
70	1	1	71	1
34	2			1
15	1	836	851	1
15	2			1
16	1	60	76	1
50	1	1996	2046	1
22	1	3694	3716	2
11	2			1
45	1	49	94	1
18	1	47	65	1
4	1	0	4	1
1	1	51	52	1
40	1	2878	2918	1
57	1	3410	3467	1
2	2			1
1	2			1
39	2			1
0	1	44	44	1
1	1	994	995	1
20	1	51	71	1
8	2			1
35	1	1478	1513	1
82	1	897	979	1
31	1	254	285	1
101	2			1
40	1	148	188	1
2	2			1
9	1	51	60	1
66	1	3021	3087	2
148	2			1
20	1	323	343	1

Продолжение

1	2	3	4	5
77	1	2984	3061	2
2	1	66	68	1
1	2			1
57	2			2
26	1	2723	2749	2
32	1	550	582	1
11	1	66	77	1
31	2			1
56	1	227	283	1
2	1	65	67	1
9	1	2805	2814	2
4	1	25	29	1
30	1	2734	2764	2
3	1	631	634	1
26	1	63	89	1
4	1	12	16	1
1	2			1
45	1	2474	2519	1
20	2			1
209	1	547	756	1
66	1	29	95	1
25	1	1384	1409	1
5	1	544	549	1
31	1	48	79	1
36	1	297	333	1
4	2			1
7	1			1
52	1	1318	1325	1
30	1	50	109	1
138	1	1352	1382	1
159	1	68	206	1
340	2	26	185	1
309	1	146	455	1
27	1	431	458	1
4	1	161	165	1
1	1	14	15	1
12	1	2313	2325	2
20	1	1634	1654	1
95	1	48	143	1
20	2			1
37	1	2127	2164	1
56	1	263	319	1
50	1	2106	2156	2
70	2			1
1	1	293	294	1
5	1	2025	2030	2
29	1	2000	2029	2
1	1	2006	2007	2
1	1	1995	1996	2
10	1	1945	1955	2
6	1	65	71	1
2	1	731	733	1
40	1	1866	1906	2
18	1	538	556	1
0	1	1846	1846	2
26	1	68	94	1
19	1	1778	1797	2
68	1	928	996	1
55	2			1

1	2	3	4	5
11	1	1722	1733	2
1	1	1718	1719	2
30	1	22	52	1
29	1	7	36	1
25	1	40	65	1
47	1	1612	1659	2
46	1	25	71	1
1	1	1638	1639	2
59	1	1547	1606	2
15	1	1534	1549	1
70	2			1
32	1	1271	1303	1
63	2			2
11	1	44	55	1
52	1	1232	1284	1
4	1	1247	1251	1
10	1	191	201	1
42	1	1393	1435	2
1	2			1
35	1	1202	1237	1
51	1	274	325	1
34	1	1373	1407	2
3	2			1
7	1	1378	1385	2
6	1	31	37	1
14	2			1
46	1	381	427	1
16	1	1341	1357	2
70	1	1262	1332	2
3	1	42	45	1
27	1	1261	1288	2
17	1	47	64	1
11	1	1264	1275	2
82	1	48	130	1
202	1	30	232	1
86	1	1150	1236	1
70	1	626	696	1
38	1	1193	1231	2
71	1	45	116	1
43	2			1
63	1	1107	1170	2
129	1	1040	1169	1
69	2			1
12	1	1116	1128	2
25	1	1102	1127	2
39	1	195	234	1
13	2			1
53	2			1
36	1	993	1029	2
59	1	950	1009	2
45	1	121	166	1
4	1	729	733	1
35	1	202	237	1
48	1	841	889	2
20	1	1	21	1
88	1	752	840	1
0	1	834	834	2
1	1	265	266	1
121	1	132	253	1

1	2	3	4	5
76	1	738	814	2
26	1	86	112	1
10	1	328	338	1
2	1	793	795	2
10	1	781	791	2
86	1	663	749	2
33	2			1
35	2			2
30	1	221	251	1
75	1	90	165	1
9	1	660	669	2
79	2			1
106	1	36	142	1
36	2			1
12	1	618	630	2
9	2			1
29	2			1
14	1	619	633	2
17	2			1
5	1	576	581	2
26	1	548	574	2
1	1	563	564	2
12	1	549	561	2
32	1	169	201	1
33	1	122	155	1
19	1	534	553	2
8	1	541	549	2
16	2			1
18	2			1
62	1	464	526	2
2	2			1
82	1	10	92	1
1	2			1
70	1	136	206	1
167	1	322	489	2
52	1	5	57	1
15	1	382	397	1
9	1	468	477	2
63	1	406	469	2
15	2			1
2	1	391	393	2
13	2			1
11	1	374	385	2
92	1	291	383	1
17	1	50	67	1
36	1	139	175	1
117	1	145	262	1
51	1	146	197	1
18	2			1
89	1	22	111	1
223	2			2
59	1	231	290	1
65	1	188	253	1
82	1	149	231	2
27	1	176	203	2
192	2			2
67	1	119	186	2
18	2			1
176	2			2

1	2	3	4	5
9	1	138	147	1
11	2			1
146	2			2
125	2			2
15	1	107	122	2
23	1	98	121	2
31	2			1
30	1	89	119	2
22	1	56	78	2
24	2			1
10	1	60	70	2
25	1	2	27	2
14	2			2
12	1	1	13	2

* 1 — сделана трансплантация; 2 — не сделана трансплантация.

** 1 — умерший; 2 — живой.

шихся 65 больных только 8 осталось в живых, остальные умерли, не дождавшись трансплантации. Всего на момент окончания сбора данных осталось в живых 65 больных, перенесших трансплантацию.

Для правильного понимания данных решающее значение имеет план программы¹. Больные принимаются на лечение по программе в том случае, когда они по решению медиков являются подходящими кандидатами для трансплантации. Если появляется донорское сердце, то выбирается кандидат, который должен его получить. Для больных с пересаженным сердцем регистрируется как время ожидания от даты поступления в клинику до даты трансплантации, так и продолжительность жизни после трансплантации с указанием их состояния на момент окончания программы. Для больных, которым пересадка не проводилась, известны их продолжительность жизни от даты поступления в клинику и указатель жизненного состояния (vital status indicator).

В первых оценках этой программы в медицинской литературе времена жизни больных, которым пересадка не проводилась, и больных с пересаженным сердцем сравнивались так, как будто они при поступлении распределялись на две группы. Как показал Гейл (1972), эта методика не является приемлемой, поскольку донорское сердце получили только те кандидаты, время жизни которых оказалось достаточно велико. Такая процедура разделения на группы дает сильное смещение по отношению к больным с большой продолжительностью жизни. Кроме того, на основе этой методики нельзя преодолеть трудность, связанную со сравнением времени жизни после пересадки для больных, перенесших трансплантацию, с временем жизни больных, которым трансплантация не проводилась. Как уже указывалось в гл. 1, в качестве начала отсчета времени важно выбрать точку, когда индивидуумы (объекты) находят-

¹ Иными словами, комплекс всех мероприятий по пересадке сердца. — Примеч. ред.

ся примерно в одном состоянии. Больных же, которые уже прожили несколько критических дней или недель от поступления в клинику до трансплантации, никак нельзя сравнивать с теми, кому в течение этого периода была выполнена операция.

Более подходящим является метод, определяющий зависящую от времени индикаторную переменную, которая принимает значения нуля или единицы в момент времени t (измеряемый от даты поступления) в соответствии с тем, было или нет пересажено больному новое сердце к этому моменту (см. гл. 5 и 8.1). Кроме того, так как первые несколько дней после трансплантации, по-видимому, являются периодом наибольшего риска для больного, то для тех, кто перенес пересадку, важно учесть в модели кратковременный эффект, рассматриваемый в 5.7. Это приводит к следующей модели:

$$h_i(t) = h_0(t)$$

— для больного, которому не было пересажено новое сердце к моменту t , и

$$h_i(t) = \psi_i(t) h_0(t),$$

где

$$\psi_i(t) = \exp(\beta_1 t - \beta_2 e^{-\gamma t})$$

— для больного, которому пересажено новое сердце к моменту $t = 0$.

В силу того, что лишь очень небольшое число времен ожидания превысило 6 месяцев, анализ был ограничен первыми 183 днями после поступления больного в клинику. Результаты подбора модели показаны в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Данные по станфордской программе трансплантации сердца. Подбор модели кратковременного эффекта

Модель	Значение параметра	Максимальное значение логарифма функции правдоподобия
Нулевая	$\gamma = .$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	-555,66
Постоянный эффект	$\gamma = .$ $\beta_1 = -0,258$ $\beta_2 = 0$	-555,07
Локальный максимум	$\gamma = 0,715$ $\beta_1 = -0,287$ $\beta_2 = 0,413$	-554,96
Локальный максимум	$\gamma = 0,0563$ $\beta_1 = -0,159$ $\beta_2 = -0,285$	-554,96
$\gamma \rightarrow 0$	$\beta_1 = -0,128$ $\beta_2 = -0,00399$	-554,76

Логарифм функции правдоподобия имеет локальный максимум при $\gamma = 0,72$, $\beta_1 = -0,29$, $\beta_2 = 0,41$, соответствующий небольшому благоприятному долговременному эффекту трансплантации, совмещенному с очень быстро убывающим вредным кратковременным эффектом. Однако, как это видно из профиля функции правдоподобия по γ , изображенного на рис. 8.1, эти значения не соответствуют глобальному мак-

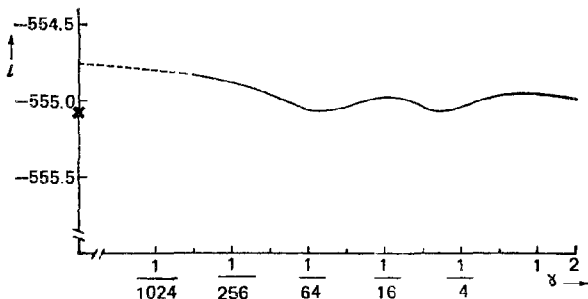


Рис. 8.1. Данные станфордской программы трансплантации сердца. Подбор модели с кратковременным эффектом, содержащей член $e^{-\gamma t}$. Логарифм функции правдоподобия для фиксированного значения γ , максимизированный по остальным параметрам. Модель без члена, соответствующего кратковременному эффекту, \times

симуму. Существует несколько локальных максимумов, один из которых достигается при $\gamma = 0,056$. Более оптимальный подбор модели получается при $\gamma \rightarrow 0$, так что $\psi_i(t)$ переходит в

$$\psi_i(t) = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \sigma,$$

где

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \tilde{\beta}_2 = \gamma \beta_2.$$

Ни один из эффектов здесь не является статистически значимым, но кое-что свидетельствует о пользе трансплантации. Кратковременных эффектов обнаружить не удастся, возможно, потому, что основной риск при трансплантации заключается не в самой операции, а в последующем отторжении или инфекции. Даже к этим весьма предварительным заключениям нужно относиться с большой осторожностью. При анализе игнорировались поясняющие переменные, из которых наиболее важной является возраст больного при поступлении. Критерий выбора больных и сами последующие медицинские методы существенно изменялись в течение периода, который охватывает все эти данные. И, что наиболее важно, достоверность этого анализа зависит от предположения, что не было определенной тенденции при выборе более или менее здоровых пациентов для трансплантации из потенциальных реципиентов к тому моменту времени, когда появлялось донорское сердце. Так как никакой рандомизации не проводилось, это предположение является спорным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Зависящие от времени ковариаты, как инструмент при испытании достоверности модели пропорциональных интенсивностей, были предложены Коксом (1972). Продолжительность жизни больных, проходивших лечение по станфордской программе по трансплантации сердца, давно интенсивно изучалась (см., например, Гейл (1972), Мэнтел и Бйар (1974), Тёрнбулл и др. (1974), Кроули и Ху (1977), Миллер и Хальперн (1982), Эйткин и др. (1983)), однако приведенный в этой главе анализ является новым.

Другие применения зависящих от времени ковариат можно найти в работе Фаррелла (1979). Использование эволюционных ковариат было предложено Ластбедером (1980) и Оуксом (1981).

Теория из 8.3 и 8.4 была разработана Коксом (1972, 1975). Результаты по эффективности, приведенные в 8.5, развивались Эфроном (1977) и Оуксом (1977). Другие, более частные результаты, включая некоторые вычисления с конечной выборкой, можно найти в работах Кэлбфлейша (1974), Кея (1979), а также Кэлбфлейша и Макинтоша (1977). Асимптотическую теорию можно найти у Люи и Кроули (1978), Тсиатиса (1981), Сила (1981), Андерсена и Гилла (1982), Селфа и Прентиса (1982).

Критерии Вилкоксона для цензурированных данных были введены Геханом (1965) и Гильбертом (1962); обстоятельное их обсуждение можно найти в книге Миллера (1981, гл. 4). Бреслоу (1970) получил обобщенный критерий Крускала — Уоллеса для сравнения нескольких групп похожими методами. Прентис (1978) предложил применять веса, пропорциональные множительной оценке Каплана — Мейера. См. работы Харрингтона и Флеминга (1982), Эфрона (1967) по поводу других упомянутых вариантов. Гилл (1980) дал тщательное обоснование свойств больших выборок, используя мартигальный подход.

Теория, приведенная в 8.7, впервые была описана в работах Пето и Пето (1972) и Прентиса (1978). Связь между взвешенным логарифмически ранговым критерием и критериями, полученными на основе модели с ускоренными испытаниями, освещается в работе Мехротра и др. (1982). Андерсен и др. (1982) дается обзор по этой тематике, в которой большое внимание уделяется мартигальному подходу в математической теории. Лидделл и др. (1977), по-видимому, были первыми, кто пропагандировал выборку из множества риска в рамках логарифмически линейной модели интенсивностей. По поводу относительной эффективности этой процедуры см. Бреслоу и Кроули (1981), а также Бреслоу и др. (1983).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Предположим, что в выборке с начальным объемом n все, за исключением m , объекты цензурятся сразу же после первого отказа. Эти m объектов являются случайной выборкой из $n - 1$ действующ-

щих объектов. Покажите, что если $n \rightarrow \infty$ при фиксированном m , то полная информация о β в общем случае остается ограниченной.

Исследуйте поведение логарифмически рангового критерия и вариантов Гехана и Прентиса для критерия Вилкоксона при этих условиях.

[Прентис и Марек (1979)]

8.2. Предположим, что объект с функцией интенсивности $h(t) = \exp[\alpha^T y(t)]$ наблюдается или в момент отказа T , или в заранее назначенный момент цензурирования c в зависимости от того, что произойдет раньше. Покажите, что логарифм функции правдоподобия имеет матрицу вторых производных со знаком минус по компонентам вектора α , математическое ожидание (r, s) -го элемента которой совпадает с математическим ожиданием случайной величины, равной $y_r(T)y_s(T)$, если $T < c$, и нулю — в противном случае.

8.3. Покажите с помощью непосредственного интегрирования по $u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_d$, что $q_j^{(u)}$ и $q_j^{(c)}$, заданные соотношениями (8.18) и (8.19), можно записать в следующем виде:

$$q_j^{(u)} = \int_{\Gamma(j)} \prod_{k=1}^{j-1} [r_k (1 - u_k)]^{m_k} \times \\ \times [\psi(u_j) r_j (1 - u_j)^{r_j - 1}] du_1 du_2 \dots du_j; \\ q_j^{(c)} = \int_{\Gamma(j)} \prod_{k=1}^{j-1} [r_k (1 - u_k)]^{m_k} \times \\ \times [\Psi(u_j) r_j (1 - u_j)^{r_j - 1}] du_1 du_2 \dots du_j.$$

8.4. (продолжение). Покажите, что для произвольной плотности f веса $q_j^{(u)}$ и $q_j^{(c)}$ удовлетворяют уравнениям

$$q_j^{(u)} + (r_j - 1) q_j^{(c)} = r_j q_{j-1}^{(c)} \quad (j = 1, 2, \dots, d + 1).$$

Указание. Используйте интегрирование по частям по переменным u_j и свойство

$$\frac{d}{du} [(1 - u) \Psi(u)] = -\psi(u).$$

8.5. Взвешенные логарифмически ранговые статистики, введенные в 8.6, имеют вид

$$T_1(w) = \sum_{j=1}^d w_j (d_{1j} - r_{1j}/r_j),$$

где веса ω_j могут быть произвольной функцией от истории отказов и цензурирований до момента τ_j . Регрессионно-ранговую статистику, описанную в 8.7, можно записать как

$$T_2(q) = \sum_{j=1}^d (q_j^{(u)} d_{1j} + q_j^{(c)} m_{1j}),$$

где m_{1j} равно числу элементов группы 1 в \mathbf{M}_j . Покажите, что любую статистику критерия вида T_2 можно представить в виде T_1 , полагая

$$\omega_j = q_j^{(u)} - q_j^{(c)} = r_j (q_{j-1}^{(c)} - q_j^{(c)}) \quad q_0^{(c)} = 0.$$

Заметим, что эти уравнения позволяют определить через ω_j также $q_j^{(u)}$ и $q_j^{(c)}$.

8.6. Исследуйте эти соотношения для логарифмически рангового критерия и для варианта Препитиса критерия Вилкоксона. Покажите прямым вычислением, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d [q_j^{(u)} + m_j q_j^{(c)}] &= 0, \quad \sum_{j=1}^d ([q_j^{(u)}]^2 + m_j [q_j^{(c)}]^2) = \\ &= \sum_{j=1}^d \omega_j^2 (1 - r_j^{-1}). \end{aligned}$$

8.7. Используйте полученные результаты и уравнение (7.15) для вычисления среднего и дисперсии статистики T_2 модели перестановок, в которой моменты отказов и цензурирований фиксированы, а каждая из $n!$ возможных разметок равновероятна. Заметим, что эта модель применима только в том случае, если цензурирование не зависит от ковариаты z . Сравните полученную дисперсию с дисперсией, найденной из статистики частной функции правдоподобия, которая не зависит от такого предположения относительно цензурирования.

8.8. Предположим, что для каждого объекта есть два способа измерения времени, обозначаемых t_1 и t_2 (например, в промышленных задачах на надежность это текущее время и время работы). Каждый объект перемещается по некоторой траектории в северо-восточном квадрате на плоскости (t_1, t_2) . Шкала времени называется «полной» (со временем, измеряемым по ней), если наработка до отказа независима от другого измерения времени. Покажите, как с помощью нового времени $t(\theta) = t_1 \cos \theta + t_2 \sin \theta$ и соответствующей поясняющей переменной $z(\theta) = t_1 \sin \theta - t_2 \cos \theta$ можно найти такие значения θ (если они существуют), при которых соответствующая шкала времени являлась бы полной, и, таким образом, можно было бы сравнить, в частности, достоинства t_1 и t_2 .

[Фареуэлл и Кокс (1979)]

9.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущем обсуждении не делалось различий между разными видами (или типами) отказов. Однако допускалась возможность цензурирования, т. е. исключения объекта из изучения по некоторой причине, не зависящей от процесса отказов, например, такой, как заранее запланированное окончание испытаний. Рассмотрим теперь анализ другой, хотя и близкой задачи — когда имеется несколько типов отказов.

Предположим, что каждому объекту соответствуют наработка до отказа T и индикаторная случайная величина V , определяющая тип отказа. В простейшем случае V принимает значения 1 и 2, соответствующие только двум различным типам отказов. Предположим также, что объект может быть цензурирован в указанном выше смысле. Удобно считать, что каждый отказ может быть только одного типа; в случае необходимости это легко достигается определением совмещенных отказов, скажем типа 1 и 2, в качестве нового типа отказа, цензурируемого отдельным значением переменной V .

Особо отметим, что для каждого объекта наблюдается только одна наработка до отказа. Задачи многомерных наработок до отказов для каждого объекта будут рассмотрены в гл. 10.

Одним из важных приложений является исследование смертности людей. Здесь может интересовать детальная классификация причин смертности, а иногда достаточно классифицировать смерти только на вызванные определенной интересующей причиной и все остальные. Однако хорошо известно, что определение и интерпретация причин смерти — трудное дело. В промышленных испытаниях на надежность может оказаться полезной классификация объектов по физическому типу отказа. Альтернативный подход в случае исследования отказа системы связан с классификацией на типы, которые определяются отказом конкретной компоненты или подсистемы.

Естественное обобщение состоит в том, что случайная величина V может быть действительно значной или векторной. Часто используется общая форма маркирования отказа. Например, метка могла бы соответствовать цене, связанной с данным типом отказа, а в медицинских задачах — измеренному в определенном смысле состоянию здоровья больных в ходе лечения.

9.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

(i) Совместное распределение

Рассмотрим совместное распределение случайной величины (T, V) , где T — наработка до отказа, а величина V , указывающая на тип отказа, принимает значения $\{1, 2, \dots, l\}$. Совместное распределение можно было бы определить различными эквивалентными способами. Например, используя отдельные функции интенсивности

$$h_v(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\text{pr}(t \leq T < t + \Delta, V = v/t \leq T)}{\Delta}, \quad (9.1)$$

и с помощью аддитивного правила вероятностей можно определить маргинальную функцию интенсивности

$$h(t) = \sum_v h_v(t) \quad (9.2)$$

и соответственно маргинальную плотность и функцию надежности T . Если считать, что отказ произошел в момент t , условная вероятность события «отказ имеет тип v » равна

$$h_v(t)/h(t),$$

откуда маргинальную вероятность этого события можно записать как

$$\text{pr}(V = v) = \int_0^{\infty} h_v(t) \exp\left(-\int_0^t h(z) dz\right) dt. \quad (9.3)$$

Укажем важный частный случай

$$h_v(t) = \pi_v h(t) \quad (9.4)$$

для всех v и t , где коэффициенты π_v не зависят от t и $\sum_v \pi_v = 1$. Условие (9.4) является предположением пропорциональных интенсивностей, хотя здесь этот термин употреблялся несколько в другом смысле, чем в гл. 5—8. Из уравнения (9.4) следует, что T и V независимы. Менее ограничительное требование состоит в условии пропорциональности только для $v \in \mathbf{V}^0$ некоторого подмножества $\{1, \dots, l\}$. Так, можно было бы предположить, что $h_2(t)/h_1(t)$ не зависит от t , тогда случайные величины T и V независимы при условии, что отказ был типа 1 или 2.

При большом числе наблюдений (T, V) совместное распределение, а значит, и функции $h_v(t)$ можно оценивать сколь угодно точно, и никакие специальные условия накладывать не будет. И наоборот, произвольный набор неотрицательных функций $\{h_v(t)\}$ определяет некоторое распределение вектора (T, V) . Правда, если

$$\int_0^{\infty} h(t) dt < \infty,$$

то распределение T является несобственным.

Если V — непрерывная случайная величина или вектор, то справедливы очевидные обобщения соотношений (9.1) — (9.4).

(ii) *Конкурирующие риски*

Очень часто все внимание фокусируется на одном типе отказа, и хотелось бы исследовать именно этот тип отказа. Такое исследование может быть направлено на изучение:

а) распределения наработки до отказа для отказов, например типа 1; другие отказы при этом исключаются;

б) сравнения отказов, например типа 1, в двух или более группах объектов, имеющих различные свойства для других типов отказов;

в) влияния исключения или сокращения отказов одного из типов на маргинальное распределение наработки до отказа.

Понятие «исключение типа отказа» может иметь вполне определенное значение, например, когда типы отказов относятся к различным подсистемам. В других случаях, например в связи с исследованием смертности людей, требуется гораздо более осторожная интерпретация.

Для достижения перечисленных целей предположим, что для каждого объекта имеется l возможных отказов $T^{(1)}, \dots, T^{(l)}$; наработкой до отказа типа v (иногда все остальные типы отказов исключаются) является $T^{(v)}$. Предположим далее, что наблюдаемая случайная величина (T, V) задается условиями:

$$T = \min(T^{(1)}, \dots, T^{(l)}), \quad V = v, \text{ если } T = T^{(v)}. \quad (9.5)$$

Такое представление называется одной из разновидностей моделей конкурирующих рисков. Точные совпадения двух или более значений $T^{(v)}$ можно исключить, если предположить, что происходит отказ только одного типа.

Тогда в новых обозначениях можно записать наблюдаемую функцию интенсивности (9.1) как

$$h_v(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{\text{pr}(t \leq T^{(v)} < t + \Delta / t \leq T^{(w)}, w = 1, \dots, l)}{\Delta} \quad (9.6)$$

в отличие от функции интенсивности $h^{(v)}(t)$, равной

$$h^{(v)}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{\text{pr}(t \leq T^{(v)} < t + \Delta / t \leq T^{(v)})}{\Delta}. \quad (9.7)$$

Вероятности в соотношениях (9.6) и (9.7) равны между собой для всех t и v , если случайные величины $T^{(1)}, \dots, T^{(l)}$ взаимонезависимы. Более общее условие состоит в том, чтобы случайные величины были квазинезависимы, т. е. вероятности при условии

$$t \leq T^{(1)}, \dots, t \leq T^{(l)} \quad (9.8)$$

были бы равны вероятностям при условии $t \leq T^{(v)}$. Полная независимость предполагает наличие неравных значений t_1, \dots, t_l в (9.8). Однако

трудно представить практический случай, когда имела бы место квазинезависимость без полной независимости, поэтому большая общность носит скорее теоретический, чем непосредственно практический характер. Представление (9.8) с независимыми (или квазинезависимыми) компонентами называется моделью с независимыми конкурирующими рисками.

Таким образом, хотя функция $h_v(t)$ может быть оценена без специальных предположений, но прямо использовать $h_v(t)$ для определения соответствующих функций риска, надежности и плотности $T^{(v)}$ можно только в предположении независимости.

Предположение независимости может быть естественным, когда различные $T^{(v)}$ относятся к отдельным подсистемам. В других примерах, в частности при исследовании смертности людей, такое предположение является подозрительным или даже неправдоподобным. К сожалению, для рассматриваемых здесь данных прямая проверка независимости невозможна. Для данных произвольного распределения (T, V) функции $h_v(t)$ определяются однозначно. При условии независимости с помощью $h_v(t)$ можно построить модель независимых конкурирующих рисков, в которой $T^{(v)}$ имеет функцию надежности

$$\exp\left(-\int_0^t h_v(z) dz\right).$$

А затем на основе (9.5) строится распределение для (T, V) , т. е. имеется единственная модель независимых конкурирующих рисков, соответствующая произвольному данному распределению (T, V) .

(iii) Границы

Рассмотрим модель независимых конкурирующих рисков, взяв для простоты только два типа отказов. Если интересует специально, скажем, отказ $T^{(1)}$, то всегда можно объединить оставшиеся другие типы отказа в один, считая его отказом $T^{(2)}$. Предположим, что желательно определить распределение $T^{(1)}$, не предполагая независимости или других специальных условий. С помощью рассуждений, приведенных в разделе (ii), лучшее, на что можно надеяться, — это границы, и они получаются из рассмотрения двух экстремальных случаев:

- а) для каждого наблюдаемого отказа типа 2, ненаблюдаемое значение $T^{(1)}$ почти не превышает наблюдаемую наработку до отказа;
- б) для каждого наблюдаемого отказа типа 2, ненаблюдаемое значение $T^{(1)}$ практически бесконечно.

Это дает две границы для функции надежности $T^{(1)}$, для функции надежности всех отказов и функции надежности наблюдаемых отказов типа 1, считая отказы других типов, соответствующими бесконечной наработке типа 1.

Конечно, эти границы часто оказываются слишком широки, чтобы иметь какое-либо прикладное значение.

(iv) *Зависимые модели*

Другой подход к модели конкурирующих рисков (9.5) состоит в ограничении совместного распределения $T^{(1)}, \dots, T^{(l)}$, например некоторой простой параметрической формой. Из (9.6) следует, что если $\mathbf{G}(t_1, \dots, t_l)$ — функция надежности $T^{(1)}, \dots, T^{(l)}$, то

$$h_v(t) = - \left[\frac{\partial \log \mathbf{G}(t_1, \dots, t_l)}{\partial t_v} \right]_{t_1 = \dots = t_l = t} \quad (9.9)$$

Если функция $\mathbf{G}(\cdot)$ определяется конечным числом неизвестных параметров, то часто по наблюдаемым функциям $h_v(t)$ можно найти все параметры \mathbf{G} , включая параметры, определяющие зависимость между компонентами. Специальным случаем (Надаш, 1971) является многомерное логарифмически нормальное распределение, для которого вектор средних и ковариационная матрица определяются совместным распределением (T, V) и могут быть оценены по случайной выборке.

(v) *Связь с цензурированием*

Формально можно цензурирование считать одним из типов отказов, и тогда модель независимых конкурирующих рисков является в точности моделью, применяемой ранее для неинформативного цензурирования. Т. е. если $T^{(0)}$ — время до цензурирования и $T^{(1)}$ — время до отказа, то из (9.5) получаем:

$$T = \min(T^{(0)}, T^{(1)}), \quad V = \begin{cases} 1 & \text{отказ,} \\ 0 & \text{цензурирование.} \end{cases}$$

Таким образом, статистические процедуры, которые разрабатываются в оставшейся части главы, подобны полученным в предыдущих главах. Однако чаще цензурирование не будет рассматриваться как отказ части из-за того, что оно не обязательно должно быть случайным.

9.3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ НЕЗАВИСИМЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ РИСКОВ

(i) *Функция правдоподобия*

Предположим, что наблюдения получены для n независимых объектов в следующем виде $(t_1, v_1; z_1), \dots, (t_n, v_n; z_n)$, где z_i — вектор поясняющих переменных для i -го объекта. Если объекты образуют однородную популяцию, то z_i можно не учитывать. Рассмотрим модель независимых конкурирующих рисков, обозначив через $F_1(t; z), \dots, F_l(t; z), h_1(t; z), \dots, h_l(t; z)$ соответствующие функции надежности и интенсивности. Логарифм функции правдоподобия равен

$$\sum_v \sum_i \log F_v(t_i; z_i) + \sum_v \sum_i \Delta_{iv} \log h_v(t_i; z_i), \quad (9.10)$$

где $\Delta_{iv} = 1$ ($v = v_i$), $\Delta_{iv} = 0$ ($v \neq v_i$). Выражение (9.10) получается в силу того, что от каждого объекта в функцию правдоподобия входят

множитель F для каждого ненаблюдённого типа отказа и множитель, равный плотности наблюдаемого типа отказа. Всем цензурированным объектам соответствует множитель только первого вида.

(ii) *Параметрический анализ*

Предположим, что l рассматриваемых распределений определяются вектором параметров $\theta_1, \dots, \theta_l$, которые изменяются независимым образом. Не обязательно считать, что распределения имеют одинаковый математический вид, а параметры $\theta_1, \dots, \theta_l$ одинаковую размерность. Тогда метод максимального правдоподобия и связанные с ним методы позволяют анализировать в выражении, равном сумме l отдельных членов (9.10), каждый член. Так, для отказа типа v имеем

$$\sum_i \log F_v(t_i; z_i) + \sum_{i:v_i=v} \log h_v(t_i; z_i). \quad (9.11)$$

Здесь могут быть использованы методы предыдущих глав. Все другие типы отказов следует рассматривать как цензурирование. Асимптотическая теория первого порядка позволяет оценить все параметры $\theta_1, \dots, \theta_l$ по отдельности.

Простейший частный случай, представляющий интерес, возникает, когда объекты образуют однородную популяцию и рассматриваемые функции надежности являются экспоненциальными с параметрами ρ_1, \dots, ρ_l . Тогда, если нет цензурирования, логарифм функции правдоподобия (9.10) имеет вид

$$\sum d_v \log \rho_v - t \cdot \sum \rho_v, \quad (9.12)$$

где d_v — число отказов типа v и t — суммарная наработка. В этом случае $\hat{\rho}_v = d_v/t$ и матрица вторых производных логарифма функции правдоподобия является диагональной. Более сложные задачи решаются аналогично.

Главная причина, по которой один и тот же параметр может входить в описание более чем одного типа отказа, вероятно, состоит в том, что для нескольких типов отказа используются близкие по виду функции распределения. Например, могут быть использованы распределения Вейбулла и рассматривается случай, когда все они имеют одинаковый параметр формы.

(iii) *Непараметрический анализ*

Для непараметрических и полупараметрических моделей результаты предыдущих глав переносятся непосредственно до тех пор, пока компоненты случайных величин в (9.5) независимы или квазинезависимы, а каждому различному типу отказа соответствуют свои отдельные параметры.

Например, множительные оценки можно построить отдельно для различных типов отказа и их статистические колебания считать асимптотически независимыми. Заметим, что результирующие статистики в действительности оценивают функцию $h_v(t)$ из (9.1) и функцию надежности, построенную по ней, притом без специальных предположений о независимости или квазинезависимости компонент. Такого типа пред-

положения необходимы, чтобы интерпретировать $h_v(t)$ весьма специальным образом для одного типа отказа. Также для изучения зависимости от поясняющих переменных, на основе модели пропорциональных интенсивностей гл. 5, для каждого типа отказа может быть построена отдельная частная функция правдоподобия. Поскольку каждый тип отказа имеет отдельный вектор регрессионных коэффициентов, результирующие векторы оценок будут асимптотически независимы.

9.4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

Основное внимание в 9.3 было сосредоточено на изучении типов отказа, происходящих по одному в некоторый момент времени. Иногда может потребоваться изучить связь между функциями интенсивности, относящимися к различным типам отказа.

К решению этой задачи можно подойти разными путями. Например, можно изобразить на графике оценочные функции надежности либо сгладить функции интенсивности и построить их графики или графики логарифмов от них, либо использовать какие-нибудь параметрические постановки. Далее рассматривается сравнение только двух типов отказа, связанных соотношением

$$h_2(t) = e^{\beta_0 + \beta_1 t} h_1(t) \quad (9.13)$$

Если $\beta_1 = 0$, то имеем пропорциональные интенсивности вида (9.4).

При заданных независимых наблюдениях $(t_1, v_1), \dots, (t_n, v_n)$ ненензурированных объектов мы можем рассматривать условные вероятности относительно t_1, \dots, t_n . Как следствие соотношения (9.13) имеем

$$\frac{\text{pr}(V_i = 2 | T_i = t_i)}{\text{pr}(V_i = 1 | T_i = t_i)} = e^{\beta_0 + \beta_1 t_i} \quad (9.14)$$

Таким образом, непосредственно применимы методы для исследования бинарной логистической регрессии (Кокс, 1970). В частности, нулевую гипотезу пропорциональных интенсивностей можно проверить, если рассмотреть статистику

$$\sum_{i: v_i=1} t_i \quad (9.15)$$

как сумму случайной выборки объема d_1 , взятую без возвращения из конечной популяции $\{t_1, \dots, t_n\}$. Здесь d_1 — число объектов, о которых известно, что они типа 1. Среднее и дисперсия статистики (9.15) при условии нулевой гипотезы соответственно равны

$$d_1 \bar{t}, d_1(n - d_1) \Sigma (t_i - \bar{t})^2 / [n(n - 1)], \quad (9.16)$$

где $\bar{t} = \Sigma t_i / n$.

Поясняющие переменные вводятся в (9.13) и (9.14) обычным способом. Если функция $h_1(t)$ считается неизвестной, то события целесообразно рассматривать при условии t_1, \dots, t_n . Если достаточно обосновано можно задать $h_1(t)$ параметрически, то следует непосредственно воспользоваться методом максимального правдоподобия.

Частотные распределения наработок до отказа для радиопередатчиков

Время, ч	Тип I (проверенные)	Тип II (непроверенные)	Всего	Время, ч	Тип I (проверенные)	Тип II (непроверенные)	Всего
0—	26	15	41	400—	12	3	15
50—	29	15	44	450—	7	4	11
100—	28	22	50	500—	6	1	7
150—	35	13	48	550—	9	2	11
200—	17	11	28	600—629	6	1	7
250—	21	8	29	Не отказавшие за 630	—	—	44
300—	11	7	18	Всего	218	107	369
350—	11	5	16				

В качестве примера рассмотрим данные из работы Менденхолла и Хадера (1958), приведенные в сгруппированном виде (см. табл. 9.1). Это данные с двумя типами отказов радиопередатчиков. На рис. 9.1 показан график доли отказов типа I в зависимости от среднего «возраста»

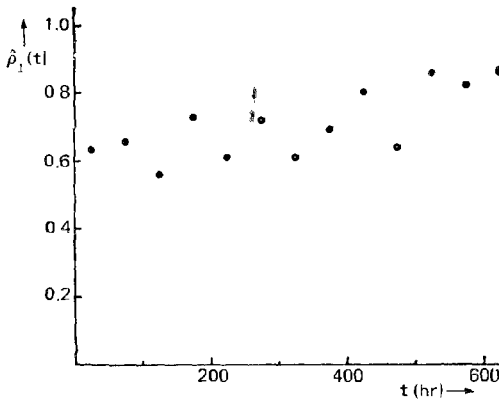


Рис. 9.1. Нарботки до отказа радиопередатчиков. Доля $\hat{p}_1(t)$ отказов типа I относительно времени t

группы. Для проверки того, что отношение интенсивностей $h_2(t)/h_1(t)$ постоянно для сгруппированных данных, исследуем сначала хи-квадрат статистику для таблицы сопряженности частот отказов размерности 2×13 (тип \times возраст группы), по которой построен рис. 9.1. Получаем значение 9,37 с 12 степенями свободы. Это позволяет заклю-

чигь, что, например, доля отказов типа $1 \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)}$ достаточно близка к постоянной. Конечно, такой критерий не чувствителен к медленным изменениям, представляющим наибольший интерес. Для критерия, основанного на (9.15) и (9.16), найдем полное время или, что то же самое, среднее для отказов типа 1. Это среднее равно 229,7. При нулевой гипотезе среднее и стандартное отклонение были бы равны 218,5 и 6,18 соответственно, так что различие составляет 1,8 стандартной ошибки. Таким образом, это свидетельствует (но ни в коей мере не окончательно), что $h_1(t)/[h_1(t) + h_2(t)]$ возрастает со временем. График 9.1 показывает, что последнее утверждение сильно зависит от значений, превышающих 500 ч.

9.5. МАРКИРОВАННЫЕ ОТКАЗЫ

Рассмотрим теперь кратко некоторые идеи, полезные в случае, когда с каждым отказом связывается некоторое дополнительное измерение. Это дополнительное измерение, являющееся в некотором смысле «откликом», интерпретируется совместно с этой наработкой до отказа. Назовем его меткой в соответствии с терминологией, принятой в теории точечных процессов. Одним из простых примеров меток, рассмотренных в 9.2, является указатель типа отказов. В промышленных задачах на надежность в качестве метки можно взять некоторую меру работы, выполненную компонентой или системой за время до отказа, или стоимость, связанную с их отказами. В некоторых задачах метки определяются для всех объектов. Однако часто для цензурированных объектов метка не наблюдается. В общем случае метку можно рассматривать как случайную величину V , вообще говоря, векториую. Обычно имеет смысл сначала изучить маргинальное распределение V и его возможную зависимость от поясняющих переменных с помощью подходящих формальных или неформальных методов в зависимости от типа V (здесь имеются в виду бинарные, дискретные, асимптотически нормальные и тому подобные величины). Однако мы основное внимание сосредоточим на взаимосвязи между V и наработкой до отказа T в случаях, когда имеются поясняющие переменные.

Можно выделить три экстремальных случая:

(i) при заданных поясняющих переменных z величины V и T независимы;

(ii) V «ведет» процесс в том смысле, что условное распределение T при $V = v$ не зависит от z ;

(iii) T «ведет» процесс в том смысле, что условное распределение V при $T = t$ не зависит от z .

Случаи (ii) и (iii) можно исследовать формальной проверкой независимости, т. е. проверяя независимость от z для: случая (ii) в модели, включающей и v , и z в качестве поясняющих переменных, от которых зависит T , и случая (iii) в модели для V с поясняющими переменными t и z . В последнем случае при обработке цензурированных наблюдений требуется особая осторожность. Если метка не присваивается цензури-

рованным объектам, то эти объекты в вычислениях не участвуют. Если же метка наблюдается, присваивается цензурированному объекту и для совместного распределения (T, V) строится явная модель, то можно вычислить соответствующий множитель функции правдоподобия. В одной довольно простой модели такого рода вектор (T, V) , возможно после преобразования, имеет двумерное логарифмически нормальное распределение, включающее линейную регрессию на поясняющие переменные.

Еще одна возможность, связанная с маркированными процессами, но все же отличающаяся от них, состоит в использовании искусственных заменителей переменных для цензурированных объектов, что фактически является прогнозом наработку до отказа. Например, в медицинских исследованиях, где цензурированными индивидуумами являются те, у которых не произошло некоторого «критического события» до конца испытания, может быть сделано наблюдение или множество наблюдений. Эти наблюдения после подходящей нормировки можно было бы использовать для прогноза наступления «критического события» и тем самым получить некоторую информацию о влиянии поясняющих переменных. В практически полезных случаях распределение заменителей переменной должно известным способом зависеть от параметра β (см. упр. 9.7).

В отдельных случаях метка, хотя бы в принципе, измеряется непрерывно в зависимости от продолжительности времени жизни объекта. Положим $V(s)$ равной значению метки в момент s . Примерами являются полученная доля конечного продукта в промышленных задачах и состояние здоровья в медицинских задачах. В некоторых исследованиях такие переменные следовало бы рассматривать в качестве зависящих от времени ковариат, но здесь они рассматриваются как отклики.

Одно из важных различий между этими двумя примерами заключается в том, что в первом — интеграл от функции $V(s)$ за время действия объекта имеет ясную физическую интерпретацию, чего нет во втором случае. Таким образом, естественной отправной точкой любого анализа должно быть исследование влияния поясняющих переменных на среднее или интеграл от $V(\cdot)$ и их связь с наработкой до отказа. Можно изучать также временную структуру (тренд и т.п.) $V(\cdot)$. Заметим, что объекты, цензурированные по времени, могут давать некоторую информацию, содержащуюся в значениях $V(\cdot)$.

Однако во втором примере интеграл от $V(\cdot)$ не имеет уже определенного смысла, и при наличии существенных колебаний даже среднее трудно интерпретировать очень осторожно. Например, пусть некоторое качество измеряется по численной шкале. Было бы опрометчиво предполагать, что две единицы времени, проведенные в состоянии качества уровня 4, лучше (или хуже), чем пять единиц времени, проведенных в состоянии 2. Вероятно, наиболее безопасная процедура — установка числа уровней качества и регистрация для каждого объекта количества единиц времени, проведенных в каждом уровне качества или около него. Тогда полное «время пребывания», определенное таким образом, может рассматриваться как «наработка до отказа», измеренная по новой

шкале. Следовательно, для выборки объектов с одними и теми же значениями поясняющих переменных множительные оценки функций распределения для различных уровней качества дают осмысленную начальную сводную информацию о цензурированных данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Идеи, изложенные в этой главе, имеют долгую историю, восходящую к исследованию Даниилом Бернулли (1760) возможных последствий прививок против оспы. Исторический обзор теории конкурирующих рисков можно найти у Сила (1977), а обзор обширной работы в страховании по множественным типам отказов см. в книге Эландт-Джонсона и Джонсона (1980, часть 3). Непроверяемость зависимости в модели конкурирующих рисков отмечалась Коксом (1959, 1962) и детально изучалась Тсиатисом (1975). Аален (1976) обратил особое внимание на прямую интерпретацию оцениваемых функций $h_v(t)$. Явное требование квазинезависимости в модели конкурирующих рисков было отмечено в диссертации (Mopash thesis) Ф. Фишера (см. также Вильямс и Лагакос (1977) и Лангберг и др. (1981)). Обзор теории конкурирующих рисков можно найти в работе Гейла (1975).

Границы для истинной функции распределения были получены в явном виде Петерсоном (1977). Модели с известным образом зависимыми основными наработками изучались Надашом (1970, 1971), Дэвидом и Моешбергером (1978), Моешбергером (1974), а также Лагакосом и Уильямсом (1978).

Формальное изучение пропорциональности интенсивностей различных типов проводилось Коксом (1959).

Общие маркированные отказы до сих пор исследовались редко; маркированные точечные процессы рассматривались лишь в монографии Кокса и Ишамы (1980, раздел 5.5).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Получите асимптотическую эффективность критерия пропорциональных интенсивностей (см. 9.4), когда основные распределения принадлежат семейству Вейбулла, так что пропорциональность интенсивностей эквивалентна равенству параметров формы распределения Вейбулла.

9.2. Обобщите критерий из 9.4 для проверки пропорциональности l функций интенсивностей, $l > 2$.

9.3. Тщательно проанализируйте, почему формально процедура, предлагаемая в п. 9.4, применима, когда:

- (i) и «время», и «тип» случайны;
- (ii) «время» фиксированы и «тип» — случайный бинарный отклик;
- (iii) выборки заранее определенного объема соответствуют двум распределениям.

Существует ли физическая интерпретация постановки, для которой и «времена», и полное количество объектов двух типов заданы априори? Прокомментируйте соответствующие задачи, возникающие при анализе таблиц сопряженности размерности 2×2 .

9.4. Пусть при отказе наблюдается одномерная непрерывно распределенная метка. Предполагая, что цензурирование отсутствует, предложите, как может быть проанализирована большая совокупность данных для улучшения простых представлений, в которых:

- а) наработка и метка рассматриваются на основе асимметрии;
- б) наработка зависит от метки;
- в) метка зависит от наработки.

Как на эти процедуры повлияло бы цензурирование с меткой, не наблюдаемой для цензурированных объектов? Как в эту модель могли бы быть включены поясняющие переменные?

9.5. Предположим, что наработка T экспоненциально распределена с параметром ρ и что, условно при $T = t$, метка V нормально распределена со средним $\xi + \eta t$ и дисперсией σ^2 . Докажите, что маргинальная плотность случайной величины V равна

$$\lambda^{-1} \Phi \left(\frac{v - \xi}{\sigma} - \frac{\sigma}{\lambda} \right) \exp \left(\frac{\sigma^2}{2\lambda^2} - \frac{v - \xi}{\lambda} \right),$$

где $\lambda = \eta/\rho$, а ее среднее и дисперсия равны $\xi + \lambda$ и $\sigma^2 + \lambda^2$.

Покажите, как параметры $(\rho, \xi, \eta, \sigma^2)$ могут быть оценены обычными методами по полному и цензурированному данным в случае, когда V не наблюдается для цензурированных объектов. Как может быть проанализирована модель, если V наблюдается для цензурированных объектов? Предложите, как можно обобщить модель, чтобы учесть влияние поясняющих переменных.

9.6. Повторите обсуждение упр. 9.5, но учитывая, что V — бинарная случайная величина с вероятностью «успеха» $\Phi(\xi + \eta t)$.

9.7. Предположим, что для i -го объекта наработка распределена экспоненциально с параметром интенсивности ρ_i , где $\rho_i = \beta^T z_i$, а z_i — вектор поясняющих переменных размерности $p \times 1$. Таким образом, из 6.2(i) следует, что при отсутствии цензурирования информационная матрица равна $z^T z$, где для n объектов z — матрица поясняющих переменных размерности $n \times p$. Предположим далее, что возможное время цензурирования для i -го объекта экспоненциально распределено с параметром k_i , так что вероятность цензурирования $\pi_i = k_i/(k_i + \rho_i)$. Докажите, что в этом случае информационная матрица для β равна $z^T (I^* - \pi) z$, где $\pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_n)$ и I^* — единичная матрица. Предположим также, что для каждого цензурированного объекта имеется дополнительная случайная величина вида $V_i = V_i/W_i$, где V_i — ненормированное оставшееся время работы объекта, а W_i — компонента независимой ошибки, имеющая гамма-распределение. Вычислите распределение V_i , а затем информационную матрицу для β и параметров гамма-

распределения. Найдите долю потерянной информации о β , которая восстанавливается при использовании V_i . Покажите, что если W_i экспоненциально распределены, эта доля приблизительно равна $1/3$.

9.8. В какой степени предложения о величине V_i из упр. 9.7 пригодны для эмпирического критерия? Допустим, что для всех объектов прогностический индекс регистрируется на довольно частых интервалах в ходе наблюдения за объектом. Обсудите, как прогностический индекс для объектов, которые на самом деле отказывают, может быть использован для измерения значений цензурированных объектов и как с помощью этого преодолеваются некоторые из явных возражений против процедуры, описанной в упр. 9.7.

{Кокс (1983)}

10.1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи идентификации в моделях данных с конкурирующими рисками возникают в связи с тем, что для каждого объекта наблюдается только первый отказ, фактически цензурируя оставшуюся наработку (или наработку) до отказа¹. В промышленных задачах на надежность это соответствует приборам, подключенным последовательно: вся система отказывает, если отказывает хотя бы один прибор. Если два прибора подключены параллельно, то вся система может функционировать, пока работает хотя бы один прибор. Тогда могут одновременно наблюдаться и исследоваться обе наработки до отказов $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$, а также все свойства их совместного распределения. Например, внимание может быть сосредоточено на том, возрастает ли риск при $t \geq t^{(1)}$ для отказов второго типа, если в момент $t^{(1)}$ произошел отказ первого типа? На этот вопрос можно ответить, используя методы, описанные в гл. 8, и рассматривая отказы первого типа для определения зависящих от времени ковариат, которые, возможно, влияют на интенсивность отказов второго типа.

Настоящая глава посвящена главным образом приложениям, не сводящимся к выделению одной из переменных в качестве отклика. Таким образом, будет изучаться скорее корреляция, чем регрессия. При такой постановке интерес приобретает полное совместное распределение $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$. Изучение процесса, протекающего во времени, приводит к исследованию функций интенсивности

$$h^{(i)}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{pr}(T^{(i)} < t + \Delta | T^{(1)} \geq t, T^{(2)} \geq t)$$

отказов типа i в момент t при условии отсутствия отказов до момента t для $i = 1, 2, i + j = 3$ и $t' \geq t$;

$$\bar{h}^{(i)}(t'/t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{pr}(T^{(i)} < t' + \Delta | T^{(i)} \geq t', T^{(j)} = t)$$

¹ Другого типа. — *Примеч. ред.*

отказа типа i в момент t' при условии предыдущего отказа другого типа j в момент t . Эти четыре функции определяют совместное распределение $(T^{(1)}, T^{(2)})$, если оно непрерывно. Совместная плотность равна

$$f_{T^{(1)}, T^{(2)}}(t^{(1)}, t^{(2)}) = \exp \left(- \int_0^{t^{(1)}} [h^{(1)}(t) + h^{(2)}(t)] dt - \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \bar{h}^{(2)}(t | t^{(1)}) dt \right) h^{(1)}(t^{(1)}) \bar{h}^{(2)}(t^{(2)} | t^{(1)}), \quad (10.1)$$

если $t^{(1)} < t^{(2)}$.

Аналогичное выражение получаем для $t^{(1)} > t^{(2)}$.

Возможность одновременного осуществления отказов двух типов, $T^{(1)} = T^{(2)}$, можно учесть, если в \bar{h} ввести в виде компоненты дельта-функцию.

10.2. «УДАРНАЯ» МОДЕЛЬ

Один из подходов к построению двумерного распределения времен жизни состоит в обобщении свойства отсутствия последействия для экспоненциального распределения. Естественным двумерным аналогом этого свойства для $s, t^{(1)}, t^{(2)} > 0$ является следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \text{pr}(T^{(1)} \geq s + t^{(1)}, T^{(2)} \geq s + t^{(2)} | T^{(1)} \geq s, T^{(2)} \geq s) = \\ = \text{pr}(T^{(1)} \geq t^{(1)}, T^{(2)} \geq t^{(2)}), \end{aligned} \quad (10.2)$$

так что совместная плотность остатков наработок до отказов $T^{(1)} - s, T^{(2)} - s$ (при условии, что отказа не было до момента s) не зависит от s . С помощью совместной функции надежности

$$\mathbf{F}(t^{(1)}, t^{(2)}) = \text{pr}(T^{(1)} \geq t^{(1)}, T^{(2)} \geq t^{(2)})$$

соотношение (10.2) приобретает вид

$$\mathbf{F}(s + t^{(1)}, s + t^{(2)}) = \mathbf{F}(s, s) \mathbf{F}(t^{(1)}, t^{(2)}). \quad (10.3)$$

Используя соотношение (10.3) при $t^{(1)} = t^{(2)}$, выводим, что функция $A(s) = \mathbf{F}(s, s)$ удовлетворяет уравнению:

$$A(s + u) = A(s) A(u),$$

из которого следует, что для некоторого ρ $A(s) = e^{-\rho s}$. Этот результат можно получить другим способом, предполагая, что $A(s)$ — функция надежности случайной величины $\min(T^{(1)}, T^{(2)})$, для которой в силу (10.2) должно выполняться одномерное свойство отсутствия последействия.

Если дополнительно к (10.2) потребовать, чтобы каждое из маргинальных распределений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ было экспоненциальным, скажем, с

параметрами $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$, то возможна дальнейшая характеристика их совместного распределения. Сразу же получаем

$$F(t^{(1)}, t^{(2)}) = \begin{cases} \exp[\rho t^{(1)} - \rho^{(2)}(t^{(2)} - t^{(1)})] & (t^{(1)} < t^{(2)}), \\ \exp[\rho t^{(2)} - \rho^{(1)}(t^{(1)} - t^{(2)})] & (t^{(1)} \geq t^{(2)}). \end{cases} \quad (10.4)$$

Введя новые параметры $\rho_1 = \rho - \rho^{(2)}$, $\rho_2 = \rho - \rho^{(1)}$ и $\rho_{12} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} - \rho$, соотношение (10.4) можно представить в виде

$$F(t^{(1)}, t^{(2)}) = \exp[-\rho_1 t^{(1)} - \rho_2 t^{(2)} - \rho_{12} \max(t^{(1)}, t^{(2)})]. \quad (10.5)$$

Так как правая часть (10.5) равна собственной функции надежности, то $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$ и $\rho_{12} \geq 0$ (см. упр. 10.2). Эта функция надежности соответствует системе, где может произойти три типа ударов, которые приводят к отказу первого, второго или сразу двух типов. Времена до каждого удара независимы и экспоненциально распределены с параметрами ρ_1 , ρ_2 и ρ_{12} соответственно.

10.3. НЕПРЕРЫВНАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Ударная модель, обсуждавшаяся в предыдущем разделе, приводит к двумерному распределению, которое не является абсолютно непрерывным. На плоскости $(t^{(1)}, t^{(2)})$ имеется сингулярность вдоль прямой $t^{(1)} = t^{(2)}$. В некоторых приложениях, когда две наработки до отказа связаны только косвенно и могут измеряться в разных единицах, такие нерегулярности недопустимы. Например, $t^{(1)}$ может быть временем до обнаружения дефекта в машине, а $t^{(2)}$ — последующим временем до ее отказа. При обследовании семей для изучения распространения болезни умер отец, а $t^{(2)}$ — возрастом, в котором от той же болезни умер его сын; другие причины смерти в этих случаях играют роль цензурирования.

Различие между этим разделом и предыдущим соответствует различию между многомерным точечным процессом, когда каждая пара времен представляет собой точку на плоскости, и многомерным процессом, когда пара образуется двумя точками различных типов на одной временной оси. Перечислим несколько желательных свойств для таких семейств двумерных непрерывных функций надежности.

(i) Зависимость между $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ определяется единственным параметром φ , имеющим простую физическую интерпретацию.

(ii) Маргинальные функции надежности $F_1(t^{(1)}) = F(t^{(1)}, 0)$ и $F_2(t^{(2)}) = F(0, t^{(2)})$ можно задавать произвольным образом и при желании параметризовать независимо от φ .

(iii) Допустимой должна быть и положительная, и отрицательная зависимость, а специальные случаи независимости и границы Фреше

$$F_U(t^{(1)}, t^{(2)}) = \min[F_1(t^{(1)}), F_2(t^{(2)})], \quad (10.6)$$

$$F_L(t^{(1)}, t^{(2)}) = \max[0, F_1(t^{(1)}) + F_2(t^{(2)}) - 1] \quad (10.7)$$

достигаются внутри семейства. Указанные границы дают совместные функции надежности, соответствующие возможным наибольшей положительной и наименьшей отрицательной взаимозависимостям между $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ с заданными маргинальными распределениями. Совместные распределения (10.6) и (10.7) сингулярны, и их массы соответственно сосредоточены вдоль кривых $F_1(t^{(1)}) = F_2(t^{(2)})$ и $F_1(t^{(1)}) + F_2(t^{(2)}) = 1$ на плоскости $(t^{(1)}, t^{(2)})$.

(iv) Применимы достаточно простые параметрические и полупараметрические процедуры для оценивания φ , даже при наличии цензурирования справа по одной или по обоим компонентам.

Семейство, которое удовлетворяет большинству из этих требований, за исключением возможности отрицательной зависимости, было предложено Клейтоном (1978). В его работе требуется выполнить соотношения следующего вида:

$$h_{T^{(1)}}(t^{(1)} | T^{(2)} = t^{(2)}) = (1 + \varphi) h_{T^{(1)}}(t^{(1)} | T^{(2)} \geq t^{(2)}) \quad (10.8)$$

между функциями интенсивности для условного распределения $T^{(1)}$ при $T^{(2)} = t^{(2)}$ и при $T^{(2)} \geq t^{(2)}$. Эти функции интенсивности отличаются от предложенных в 10.1. В частности, они не имеют нерегулярностей вдоль прямой, $t^{(1)} = t^{(2)}$. Легко показать, что условие (10.8) эквивалентно подобному условию при замене $T^{(1)}$ на $T^{(2)}$, и наоборот.

Для произвольной двумерной непрерывной функции надежности $F(t^{(1)}, t^{(2)})$ с маргинальными функциями $F_1(t^{(1)}) = F(t^{(1)}, 0)$ и $F_2(t^{(2)}) = F(0, t^{(2)})$ условная функция надежности $T^{(1)}$ при $T^{(2)} \geq t^{(2)}$ имеет вид

$$F(t^{(1)}, t^{(2)})/F_2(t^{(2)}),$$

а функция надежности $T^{(1)}$ при $T^{(2)} = t^{(2)}$ равна

$$\frac{F(t^{(1)}, t^{(2)})}{\partial t^{(2)}} \bigg/ \frac{\partial F_2(t^{(2)})}{\partial t^{(2)}}.$$

Таким образом, в силу соотношения (2.7) получаем, что

$$h_{T^{(1)}}(t^{(1)} | T^{(2)} = t^{(2)}) = -\frac{\partial}{\partial t^{(1)}} \log \left[-\frac{\partial F(t^{(1)}, t^{(2)})}{\partial t^{(2)}} \right], \quad (10.9)$$

$$h_{T^{(1)}}(t^{(1)} | T^{(2)} \geq t^{(2)}) = -\frac{\partial}{\partial t^{(1)}} \log F(t^{(1)}, t^{(2)}). \quad (10.10)$$

Подставляя в соотношение (10.8) выражения (10.9) — (10.10) и интегрируя на интервале $(0, t^{(1)})$, находим, что

$$\begin{aligned} \log \left[-\frac{\partial F(t^{(1)}, t^{(2)})}{\partial t^{(2)}} \right] - \log \left[-\frac{\partial F_2(t^{(2)})}{\partial t^{(2)}} \right] = \\ = (1 + \varphi) [\log F(t^{(1)}, t^{(2)}) - \log F_2(t^{(2)})]. \end{aligned}$$

После потенцирования имеем

$$\frac{\frac{\partial F(t^{(1)}, t^{(2)})}{\partial t^{(2)}}}{[F(t^{(1)}, t^{(2)})]^{1+\varphi}} = \frac{\frac{\partial F_2(t^{(2)})}{\partial t^{(2)}}}{[F_2(t^{(2)})]^{1+\varphi}}, \quad (10.11)$$

и, интегрируя второй раз на интервале $(0, t^{(2)})$, получаем

$$[1/F(t^{(1)}, t^{(2)})]^\varphi - [1/F_1(t^{(1)})]^\varphi = [1/F_2(t^{(2)})]^\varphi - 1.$$

Так что двумерная функция надежности имеет вид

$$F(t^{(1)}, t^{(2)}) = ([1/F_1(t^{(1)})]^\varphi + [1/F_2(t^{(2)})]^\varphi - 1)^{-1/\varphi}. \quad (10.12)$$

Отсюда при $\varphi \rightarrow 0$ следует, что $F(t^{(1)}, t^{(2)}) \rightarrow F_1(t^{(1)}) F_2(t^{(2)})$, что соответствует независимости $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$, а при $\varphi \rightarrow \infty$ получается верхняя граница Фреше (10.6).

Данное семейство допускает с помощью случайных эффектов интерпретацию, когда связь между $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ объясняется их зависимостью от некоторой ненаблюдаемой случайной величины W . В частности, предположим, что W имеет гамма-распределение

$$f_W(w) \propto w^{\varphi-1} e^{-w}, \quad (10.13)$$

и пусть $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ независимы при условии $W = w$ и имеют функции надежности

$$F_j^*(t | w) = \exp(w [1 - |F_j(t)|^{-\varphi}]) \quad (j = 1, 2), \quad (10.14)$$

так что и $T^{(1)}$, и $T^{(2)}$ удовлетворяют модели пропорциональных интенсивностей с множителем w . Тогда безусловная совместная функция надежности $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ имеет вид

$$\int_0^\infty F_1^*(t^{(1)} | w) F_2^*(t^{(2)} | w) f_W(w) dw = F(t^{(1)}, t^{(2)}) \quad (10.15)$$

и соответствует функции (10.12).

Оценивание методом максимального правдоподобия параметра φ , когда маргинальные функции надежности параметризованы (например, соответствуют экспоненциальным распределениям с параметрами ρ_1 и ρ_2), в принципе достаточно просто, хотя трудности могут возникнуть вблизи границы, $\varphi = 0$, параметрического пространства. Точность выбора модели можно было бы оценить, подбирая параметры в более общем семействе моделей, когда φ может зависеть от $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$.

10.4. ПРОВЕРКА НЕЗАВИСИМОСТИ

Критерии для проверки зависимости между двумя переменными, когда одна из них или обе могут цензурироваться, рассматривались многими авторами. Критерии, основанные на параметрических или полупараметрических моделях, подобные обсуждаемым в предыдущих гла-

вах, имеют очевидные преимущества как для интерпретируемости, так и для оценивания (в некотором содержательном смысле) степени зависимости, при которой следует отвергнуть нулевую гипотезу.

С другой стороны, критерии могут основываться на нулевом распределении меры, описывающей связь между двумя компонентами. Если имеется цензурирование, то, естественно, для построения такого коэффициента использовать коэффициент согласия Кендалла, т. е. Для цензурированной выборки $(T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, i = 1, 2, \dots, n)$, τ равен разнице между долей согласованных пар (i, j) , т. е. таких пар, что

$$(T_i^{(1)} - T_j^{(1)})(T_i^{(2)} - T_j^{(2)}) > 0,$$

и долей несогласованных пар, т. е. пар, для которых выполняется обратное неравенство. Обобщение для цензурированных данных аналогично модификации Гехана критерия Вилкоксона. В этом случае нужно учитывать только определенные согласования и рассогласования. Более мощные критерии получаются в случае, если использовать частичную информацию о тех парах (i, j) , которые не классифицированы как определенно согласованные или определенно рассогласованные.

Если механизмы цензурирования для двух компонент независимы или если цензурируется только одна компонента, то может быть получено точное перестановочное распределение статистики критерия для нулевой гипотезы. В противном случае необходимо воспользоваться асимптотической теорией. В некоторых случаях первая компонента $T^{(1)}$ двумерной наработки до отказа может определять потенциальный момент цензурирования $C^{(2)}$ для второй компоненты. Такая ситуация возникает в примере с машиной, описанном в 10.3, если фиксировано суммарное время наблюдения.

Более систематический подход к выводу критериев наличия связи возникает при рассмотрении двумерной модели ускоренных испытаний:

$$\log T^{(2)} = \beta_2 X + \varepsilon^{(2)}, \quad \log T^{(1)} = \beta_1 X + \varepsilon^{(1)}, \quad (10.16)$$

где случайные величины X , $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ взаимно независимы. В этой модели связь между $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ определяется их общей зависимостью с X . Локально наиболее мощные ранговые критерии для специальных альтернативных гипотез могут быть получены из соотношения (10.16).

10.5. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Полностью непараметрическое оценивание двумерной функции надежности, когда одна из компонент или обе могут быть цензурированы, лучше всего продемонстрировать как применение алгоритма ЕМ, который будет обсуждаться в следующей главе. В более общем случае имеются четыре возможных типа наблюдений, а именно: двойные отказы $(T^{(1)} = t^{(1)}, T^{(2)} = t^{(2)})$, соответствующие точкам на плоскости $(t^{(1)}, t^{(2)})$; единичные отказы $(T^{(1)} = t^{(1)}, T^{(2)} > c^{(2)})$ и $(T^{(1)} > c^{(1)}, T^{(2)} = t^{(2)})$, соответствующие полупрямым, параллельным осям $t^{(2)}$ и $t^{(1)}$, и двойные

цензурирования ($T^{(1)} > c^{(1)}$, $T^{(2)} > c^{(2)}$), соответствующие квадрантам. Аспекты задачи, связанные с этими понятиями, очень сложные, и оценку нужно искать путем итераций.

Некоторого упрощения можно достигнуть, если цензурируется только одна компонента или если две компоненты в любой паре всегда имеют одинаковое потенциальное время цензурирования. Последний случай, как правило, имеет место для процессов, развивающихся во времени так, как это обсуждалось в 10.1. Тогда распределение $T = \min(T^{(1)}, T^{(2)})$ оценивается с помощью обычной множительной оценки (см. гл. 4). Для каждого наблюдаемого значения $t^{(1)}$ величины T , для которого $T^{(2)} \geq T^{(1)}$, условное распределение $T^{(2)}$ при $T^{(1)} = t^{(1)}$, $T^{(2)} \geq T^{(1)}$ оценивается таким же образом. Аналогично поступают и для значений $t^{(2)}$ величины T , для которых $T^{(1)} > T^{(2)}$. Затем эти три оценки можно скомбинировать для построения одной неитеративной оценки совместного распределения.

10.6. КРИТЕРИИ РАВЕНСТВА МАРГИНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В предыдущих разделах нас главным образом интересовала сама связь между $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$. Однако часто эта связь возникает из-за парного выбора, когда основной целью является исследование взаимосвязи между маргинальными распределениями $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$. Чтобы сформулировать подходящее обобщение модели пропорциональных интенсивностей, предположим, что в i -й паре функция интенсивности первой компоненты для некоторой константы θ имеет вид: $h_{1i}(t) = \theta h_i(t)$, а второй компоненты — $h_{2i}(t) = h_i(t)$, где $h_i(t)$ — некоторая основная базовая функция интенсивности, предполагаемая неизвестной и различной для каждой пары. Условная функция правдоподобия получается в случае, если рассматриваются только те пары, для которых отказ наблюдается, когда обе компоненты действуют.

Если функции $h_i(t)$ можно определять, скажем, с точностью до множителей пропорциональности φ_i , $h_i(t) = \varphi_i h_0(t)$, для некоторой общей функции $h_0(t)$, то возможно существенное восстановление «междублочной» («interblock») информации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выражение (10.1) совместного распределения через функции интенсивности $h^{(i)}$ и $\bar{h}^{(i)}$ было дано Коксом (1972). Двумерная ударная модель, описанная в 10.2, получена Маршаллом и Олкином (1967). Клейтон (1978) ввел модель, рассмотренную в 10.3 в связи с исследованиями семей на возникновение заболеваний. Параметрическое и полупараметрическое оценивание в рамках этой модели освещается в работах Клейтона (1978) и Оукса (1982а), хотя вполне удовлетворительная непараметрическая процедура до сих пор не найдена. Критерии независимости, основанные на коэффициенте согласия Кендалла (1938), обсуждаются

Брауном и др. (1974), Вейером и Базу (1980), а также Оуксом (1982b). Теория перестановок основывается на результатах Даниэлса (1944). Кьюзик (1982) исследовал двумерные ранговые критерии, построенные на основе (10.16). Холд и Прентис (1974) получили основную функцию правдоподобия для модели с парным подбором (см. 10.6). Продолжение обсуждения можно найти в работе Уилда (1983).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Покажите, что если условие (10.2) усилить таким образом, что

$$\begin{aligned} \text{pr} (T^{(1)} \geq s^{(1)} + t^{(1)}, T^{(2)} \geq s^{(2)} + t^{(2)} | T^{(1)} \geq s^{(1)}, T^{(2)} \geq s^{(2)}) - \\ = \text{pr} (T^{(1)} \geq t^{(1)}, T^{(2)} \geq t^{(2)}) (s^{(1)}, s^{(2)}, t^{(1)}, t^{(2)} > 0), \end{aligned}$$

то без дополнительных допущений отсюда следует, что $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ независимы и экспоненциально распределены.

10.2. Покажите, что выражение (10.5) соответствует двумерной функции надежности, если и только если $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $\rho_{12} \geq 0$ со строгим неравенством или для ρ_{12} , или одновременно для ρ_1 и ρ_2 .

10.3. Исследуйте параметризацию (10.12), в которой маргинальные функции надежности F_1 и F_2 экспоненциальны с параметрами $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$. Покажите, что математическое ожидание информации о ϕ для функции правдоподобия по ϕ , $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ может быть вычислено с помощью тригамма-функции

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

[Оукс (1982b)]

10.4. Предположим, что $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ имеют абсолютно непрерывное совместное распределение и что оба условные распределения $T^{(2)}$ при заданных $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ при заданных $T^{(2)}$ имеют вид, соответствующий модели с пропорциональными интенсивностями, т. е.

$$h_{T^{(2)}}(t^{(2)} | T^{(1)} = t^{(1)}) = a_{11}(t^{(2)}) a_{12}(t^{(1)});$$

$$h_{T^{(1)}}(t^{(1)} | T^{(2)} = t^{(2)}) = a_{21}(t^{(2)}) a_{22}(t^{(1)}),$$

для некоторых функций $a_{ij}(t) \geq 0$ ($i, j = 1, 2$).

Покажите, что без потери общности эти функции можно считать удовлетворяющими условию

$$a_{11}(t) = a'_{21}(t), a_{22}(t) = a'_{12}(t), a_{21}(0) = a_{12}(0) = \eta > 0.$$

Выразите совместную плотность через $a_{11}(t)$, $a_{22}(t)$ и η .

10.5. Используйте интерпретацию случайных эффектов в (10.13) и (10.14) для распространения модели (10.12) на многомерные функции надежности, т. е. с числом компонент больше двух. Прокомментируйте общность или ее недостаток для этой модели.

11.1. ВВЕДЕНИЕ

Как отмечалось в гл. 1, цензурированные данные можно рассматривать как пример неполноты или потери части данных. Момент отказа T_i для цензурированного объекта не наблюдается. Известно только, что он превышает определенный момент цензурирования c_i . Многие из методов, описанных в этой книге, и особенно те, которые выводятся или могут быть интерпретированы как максимизация некоторой функции правдоподобия, являются частными случаями одного очень общего подхода, называемого некоторыми авторами принципом пропущенной информации, другими — самостоятельностью. Совсем недавно популярным стало название ЕМ-алгоритм, т. е. алгоритм максимизации математического ожидания (expectation — maximization). Такой термин особенно подходит к приложениям, касающимся экспоненциальных семейств, так как для них найдена итеративная процедура максимизации логарифма функции правдоподобия.

Этот принцип оказывается наиболее полезным, когда логарифм функции правдоподобия

$$l_0(\varphi) = l_0(\varphi; T) \quad (11.1)$$

данных $T = (T_1, \dots, T_n)$, которые наблюдались бы при отсутствии цензурирования, имеет более простой функциональный вид, чем логарифм функции правдоподобия

$$l(\varphi) = l(\varphi; x, v) \quad (11.2)$$

данных (x, v) , которые наблюдались в действительности. Обозначения данных T и (x, v) оставлены такими же, как и в гл. 1. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть приложение именно к анализу данных типа времен жизни, но сам принцип применим также к произвольным сгруппированным или пропущенным наблюдениям и во многих других задачах. Не требуется, чтобы наработки T_i имели одни и те же функции распределения, так что функции l_0 и l могут зависеть от поясняющих переменных z , как это описывалось в гл. 5—8. Важно отметить, что из выпуклости функции l_0 по φ , вообще говоря, не следует выпуклость функции l .

EM-алгоритм основывается на функции $Q(\varphi', \varphi)$, которая определяется выражением

$$Q(\varphi', \varphi) = E[l_0(\varphi'; T) | x, v; \varphi], \quad (11.3)$$

т. е. условным математическим ожиданием логарифма функции правдоподобия по T в случае, если заданы наблюдения (x, v) . Два аргумента функции Q существенно отличаются друг от друга. Так, φ' является аргументом полного логарифма функции правдоподобия l_0 , тогда как φ — параметр условного распределения T при заданных (x, v) , используемый для вычисления условного математического ожидания. Два шага EM-алгоритма в терминах функции Q могут быть определены следующим образом:

шаг математического ожидания¹ — для заданной оценки $\widehat{\varphi}_j$ параметра φ вычислить значения $Q(\varphi', \widehat{\varphi}_j)$ как функции формального параметра φ' ;

шаг максимизации² — положить новое значение оценки $\widehat{\varphi}_{j+1}$ равным значению параметра φ' , которое максимизирует функцию $Q(\varphi', \widehat{\varphi}_j)$.

При весьма общих условиях последовательность $\{\widehat{\varphi}_j\}$ будет сходиться к значению $\widehat{\varphi}$, которое максимизирует логарифм функции правдоподобия $l(\varphi, x, v)$, построенный по наблюдениям. Однако если у функции l несколько максимумов, нельзя гарантировать, что $\{\widehat{\varphi}_j\}$ будет сходиться к глобальному максимуму. Можно привести некоторые примеры, имеющие отчасти искусственный характер, в которых последовательность $\{\widehat{\varphi}_j\}$ сходится к седловой точке l (см. также упр. 11.5).

11.2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ EM-АЛГОРИТМА

Рассмотрим несколько примеров использования EM-алгоритма.

(i) Экспоненциально-распределенные времена жизни

Оценка максимального правдоподобия $\widehat{\rho}$ по цензурированной выборке для экспоненциального распределения с параметром ρ была найдена в гл. 3:

$$\widehat{\rho} = d / \sum x_i \quad (11.4)$$

(см. уравнение (3.13)). Следовательно, необходимости в итеративной процедуре нет. Однако интересно посмотреть, как работает EM-алгоритм в этой простой ситуации.

Логарифм функции правдоподобия для цензурированной экспоненциальной выборки $T = (T_1, \dots, T_n)$ был бы равен

$$l_0(\rho'; T) = n \log \rho' - \rho' \sum_{i=1}^n T_i.$$

¹ Далее эту часть EM-алгоритма будем называть шагом E. — *Примеч. ред.*

² Далее эту часть EM-алгоритма будем называть шагом M. — *Примеч. ред.*

Функция $Q(\rho', \rho)$, определенная в (11.3), имеет вид

$$Q(\rho', \rho) = n \log \rho' - \rho' \sum_{i=1}^n E(T_i | x_i, v_i; \rho). \quad (11.5)$$

Для нецензурированного наблюдения ($v_i = 1$) $T_i = x_i$. Для цензурированного наблюдения ($v_i = 0$) $E(T_i | x_i, v_i; \rho) = x_i + \rho^{-1}$ по свойству отсутствия последствия. Таким образом,

$$E(T_i | x_i, v_i; \rho) = x_i + (1 - v_i)/\rho.$$

Подставляя это выражение в (11.5), получаем

$$Q(\rho', \rho) = n \log \rho' - \rho' \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n-d}{\rho} \right). \quad (11.6)$$

Тем самым заканчивается шаг E EM-алгоритма. Чтобы выполнить шаг M EM-алгоритма, нужно максимизировать $Q(\rho', \rho)$ по ρ' для фиксированного ρ . Это легко сделать. В результате двух шагов находим формулу

$$\hat{\rho}_{j+1} = n \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n-d}{\hat{\rho}_j} \right)^{-1} \quad (11.7)$$

для вычисления $(j+1)$ -й аппроксимации $\hat{\rho}$ по j -й аппроксимации.

Таблица 11.1

**EM-алгоритм, примененный к данным по лейкемии
(группа больных, проходящих лечение),
в предположении экспоненциальных распределений**

Итерация	$\hat{\rho}_j$	$l(\hat{\rho})$	Итерация	$\hat{\rho}_j$	$l(\hat{\rho})$
0	0,05850	-46,5501	9	0,02516	-42,1749
1	0,03723	-42,9808	10	0,02512	-42,1749
2	0,03082	-42,3808	11	0,02510	-42,1749
3	0,02806	-42,2343	12	0,02509	-42,1749
4	0,02670	-42,1930	13	0,02508	-42,1749
5	0,02597	-42,1806	14	0,02508	-42,1749
6	0,02558	-42,1767	15	0,02507	-42,1749
7	0,02536	-42,1755	$\hat{\rho}$	0,02507	-42,1749
8	0,02523	-42,1751			

Исходная оценка $\hat{\rho}_0 = 21/359 = 0,05850$.

Полагая $\hat{\mu}_j = 1/\hat{\rho}_j$, (11.7) можно выразить в следующем виде:

$$\hat{\mu}_{j+1} = n^{-1} \sum x_i + (1 - d/n) \hat{\mu}_j,$$

откуда сразу же получаем, что $\widehat{\mu}_j \rightarrow \Sigma x_i/d = \widehat{\rho}^{-1} - \widehat{\mu}$. Действительно,

$$\widehat{\mu}_{j+1} - \widehat{\mu} = (1 - d/n)(\widehat{\mu}_j - \widehat{\mu}),$$

т. е. сходимость к $\widehat{\mu}$ является в точности геометрической, а ее скорость зависит от доли цензурированных наблюдений.

(ii) *Гамма-распределение*

В качестве более сложного примера рассмотрим оценивание параметров (k, ρ) гамма-распределения с плотностью

$$f(t; k, \rho) = \frac{\rho(\rho t)^{k-1} e^{-\rho t}}{\Gamma(k)}$$

для цензурированной выборки (x, v) . Логарифм функции правдоподобия для нецензурированной выборки был бы равен

$$l_0(\varphi; T) = nk \log \rho - n(k-1) \Sigma \log T_i - \rho \Sigma T_i - n \log \Gamma(k) \quad (11.8)$$

и зависел бы от $\{T_i\}$ только через статистики $S_1 = \Sigma T_i$ и $S_2 = \Sigma \log T_i$, которые, следовательно, являются совместно достаточными для $\varphi = (k, \rho)$. В упр. 3.5 было показано, что оценка максимального правдоподобия \widehat{k} параметра k — решение уравнения

$$\psi(k) - \log k - \log R = 0, \quad (11.9)$$

где через $\psi(k)$ обозначена дигамма-функция $\psi(k) = d \log \Gamma(k)/dk$, а

$$R = n \exp(n^{-1} S_2)/S_1 \quad (11.10)$$

равно отношению среднего геометрического к среднему арифметическому величин T_1, \dots, T_n . В данном случае оценка $\widehat{\rho} = n\widehat{k}/S_1$.

Выражение для логарифма функции правдоподобия $l(\varphi; x, v)$ в случае цензурированной выборки содержит неполную гамма-функцию, и в этом случае нет полезных достаточных статистик. Чтобы увидеть, как здесь работает EM-алгоритм, заметим, что вычисление $Q(\varphi', \varphi)$ связано с нахождением значений условных математических ожиданий

$$E(S_1 | x, v; \varphi) \text{ и } E(S_2 | x, v; \varphi) \quad (11.11)$$

достаточных статистик S_1 и S_2 при заданных наблюдениях (x, v) для текущих оценок параметра φ . Эти математические ожидания также содержат неполную гамма-функцию и ее производную по параметру формы, так что экономия в вычислениях оказывается незначительной по сравнению, например, с процедурой Ньютона—Рафсона максимизации $l(x, v; \varphi)$. Шаг максимизации EM-алгоритма более ясен, если S_1 и S_2

заменяются на их условные ожидания (11.11) и находится корень \hat{k} уравнения (11.9).

Свойства EM-алгоритма, примененного к общим экспоненциальным семействам распределений (примером которых является гамма-распределение), рассматриваются более подробно в 11.4. Проиллюстрируем предыдущие рассуждения применением метода к данным о продолжительности жизни 22 больных раком желчного протока, которые проходят лечение радиационно-лекарственной терапией (см. табл. 11.2). Коэффициент вариации 19 нецензурированных времен равен 0,66, что примерно соответствует гамма-распределению с $k \approx 1/(0,66)^2 \approx 2$. Алгоритм дает оценки максимального правдоподобия $\hat{\rho} = 0,008379$, $\hat{k} = 2,3648$.

Таблица 11.2

Использование EM-алгоритма для подбора параметров гамма-распределения. Времена жизни (в днях) 22 больных раком желчного протока, которые проходили лечение радиационно-лекарственной терапией (данные взяты из работы Флеминга и др., 1980)

а) Данные										
Нецензурированные времена	30,	67,	95,	148,	170,	171,	176,	193,	200,	221,
	243,	261,	262,	263,	399,	414,	446,	464,	777	
Цензурированные времена	79,	82,	446							

б) Вычисления					
Итерация	Оценки параметров		Логарифм функции правдоподобия	E(T T > c)*	E(log T T > c)*
	ρ	k	l		
1**	0.008670	2.2096	-123.932	280.48 282.20 590.89	5.4806 5.4900 6.3583
2	0.008508	2.3797	-123.665	300.47 301.97 599.27	5.5486 5.5566 6.3707
3	0.008403	2.3687	-123.663	302.70 304.20 601.21	5.5550 5.5629 6.3736
4	0.008383	2.3655	-123.663	303.03 304.53 601.55	5.5558 5.5637 6.3740
5	0.008379	2.3649	-123.663	303.08 304.58 601.61	5.5560 5.5639 6.3741
6	0.008379	2.3648	-123.663	303.09 304.59 601.62	5.5560 5.5639 6.3741

* Для трех цензурированных времен.

** Исходные значения, построенные по всем 22 значениям.

11.3. ПОВЕДЕНИЕ АЛГОРИТМА: САМОСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

Хотя подробное обсуждение свойств ЕМ-алгоритма выходит за рамки такой книги, как эта, но чтобы продемонстрировать, насколько полезен этот метод, далее будет получен один из важных и легко доказываемых результатов. Логарифм функции правдоподобия не убывает ни при одной итерации алгоритма.

Для того чтобы показать это, заметим сначала, что

$$l(\varphi'; x, v) - l_a(\varphi'; T) = l_1(\varphi'; T | x, v), \quad (11.12)$$

где φ' — произвольное значение параметра φ , а l_1 — логарифм функции правдоподобия для условного распределения T при заданных (x, v) . Так как функция $l(\varphi')$ зависит от T только через наблюдения (x, v) , то она равна своему математическому ожиданию по *любому* условному распределению T при заданных (x, v) . Таким образом, можно записать соотношение

$$l(\varphi') = Q(\varphi', \varphi) - R(\varphi', \varphi), \quad (11.13)$$

где

$$R(\varphi'; \varphi) = E[l_1(\varphi'; T) | x, v; \varphi]$$

Из неравенства Йенсена и выпуклости логарифмической функции следует, что если $g(u; \varphi)$ — плотность или дискретная функция вероятностей случайной величины U , то

$$E\{\log |g(U; \varphi')|; \varphi\} \leq E\{\log |g(U; \varphi)|; \varphi\}.$$

Математическое ожидание логарифма функции правдоподобия становится максимальным при истинном значении параметра. Применяя это неравенство к условному логарифму функции правдоподобия при заданных (x, v) , получаем, что $R(\varphi', \varphi) \leq R(\varphi, \varphi)$ для любых φ', φ .

Из (11.13) имеем, что

$$l(\varphi') - l(\varphi) = [Q(\varphi', \varphi) - Q(\varphi, \varphi)] - [R(\varphi', \varphi) - R(\varphi, \varphi)]. \quad (11.14)$$

Если значение параметра φ' выбрано так, чтобы максимизировать на шаге МЕМ-алгоритма $Q(\varphi', \varphi)$ по φ' для заранее заданного значения φ , то отсюда следует, что $l(\varphi') \geq l(\varphi)$. Таким образом, итерация алгоритма никогда не уменьшает логарифм функции правдоподобия.

В качестве следствия сразу же получаем, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\varphi}$ должна удовлетворять условию самостоятельности

$$Q(\varphi', \hat{\varphi}) \leq Q(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}). \quad (11.15)$$

Действительно, если начать с $\varphi = \hat{\varphi}$, то логарифм функции правдоподобия уже нельзя увеличить на очередном шаге ЕМ-алгоритма или лю-

бым другим способом. Условие (11.15) или его дифференциальный аналог, состоящий в том, что $\widehat{\varphi}$ — решение уравнения по φ ,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi'} Q(\varphi', \varphi) \right]_{\varphi' = \varphi} = 0, \quad (11.16)$$

часто оказывается более полезным, чем сам алгоритм, сходимость которого может быть медленной. Таким образом, из первого примера предыдущего раздела находим с помощью выражения (11.6)

$$\frac{\partial}{\partial \rho'} Q(\rho', \rho) = \frac{n}{\rho'} - \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n-d}{\rho} \right),$$

и, следовательно, (11.16) принимает вид

$$\frac{n}{\rho} - \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n-d}{\rho} \right) = 0.$$

Отсюда получаем $\widehat{\rho} = d / \sum x_i$ — оценку максимального правдоподобия $\widehat{\rho}$. Уравнения (11.15) и (11.16) являются условиями для неподвижной точки EM-алгоритма. Было показано, что оценка максимального правдоподобия должна быть неподвижной точкой алгоритма, но нет никакой гарантии, что она будет единственной такой точкой.

Закончим этот раздел кратким сравнением EM-алгоритма с его главным конкурентом — непосредственной максимизацией $l(\varphi; x, v)$ с помощью метода Ньютона—Рафсона. В последнем методе требуется вычисление и обращение матрицы вторых производных, на что тратится много времени, если φ имеет большую размерность. Гораздо чаще алгоритм расходится, так как полный шаг алгоритма Ньютона — Рафсона не обязательно увеличивает логарифм функции правдоподобия. И напротив, алгоритм Ньютона—Рафсона обычно сходится быстро, если сходимость имеет место, особенно когда логарифм функции правдоподобия хорошо приближается квадратичной функцией. Обратная матрица вторых производных часто нужна также для оценивания стандартных ошибок.

Важно заметить, что вторые производные логарифма функции правдоподобия $l_0(\widehat{\varphi}, T)$ или его математического ожидания $Q(\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi})$ для оценки максимального правдоподобия не позволяют получить надежных оценок стандартной ошибки.

Если для нахождения $\widehat{\varphi}$ используется EM-алгоритм, то нужно еще отдельно вычислять значения вторых производных функций $l(\varphi; x, v)$ при $\varphi = \widehat{\varphi}$. В упр. 11.3 и 11.4 указывается метод оценивания стандартных ошибок без вычисления l и метод увеличения скорости сходимости алгоритма в окрестности $\widehat{\varphi}$.

11.4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Предположим, что плотность T_i является регулярным представителем полного экспоненциального семейства в его естественной параметризации, т. е.

$$f_i(t; \varphi) = \exp \{ \varphi^T S_i(t) + A_i(t) + B_i(\varphi) \}, \quad (11.17)$$

где для каждого i $S_i(t)$ — вектор размерности $p \times 1$ линейно независимых функций t ; $A_i(t)$ — скалярная функция t и $B_i(\varphi)$ — скалярная функция вектора параметров φ . Заметим, что, записав $S_i(t) = S(t, z_i)$, можно представить (11.17) в такой форме, которая допускает зависимость от вектора z поясняющих переменных.

Важность экспоненциального семейства в общей теории статистических выводов вызвана тем, что функция правдоподобия (цензурированной) выборки размера n обладает достаточной статистикой фиксированной размерности.

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(T_i).$$

Дифференцируя под интегралом полной вероятности, получаем, что

$$E(S_i) = -\partial B_i(\varphi) / \partial \varphi, \quad (11.18)$$

где $\partial / \partial \varphi$ — градиент относительно вектора φ . Обозначая $B(\varphi) = \sum B_i(\varphi)$, уравнения правдоподобия запишем в следующем виде:

$$0 = \frac{\partial l_0(\varphi)}{\partial \varphi} = S - E(S; \varphi), \quad (11.19)$$

так что из решения уравнения правдоподобия следует равенство каждой компоненты S его математическому ожиданию. Легко показать также, что функция $l_0(\varphi)$ выпукла по φ .

Для цензурированной выборки (x, v) функция $Q(\varphi', \varphi)$, определенная соотношением (11.3), имеет вид

$$Q(\varphi', \varphi) = \varphi'^T E(S | x, v; \varphi) + B(\varphi'),$$

с точностью до аддитивной функции, не зависящей от вектора φ' . Для максимизации Q по φ' необходимо, чтобы $\partial / \partial \varphi' [Q(\varphi', \varphi)] = 0$, откуда следует, что

$$E(S | x, v; \varphi) = -\partial B(\varphi') / \partial \varphi' = E(S; \varphi') \quad (11.20)$$

есть уравнение относительно φ' при заданном φ . Отметим, что (11.20) в точности соответствует (11.19). Два шага EM-алгоритма можно записать в следующем виде:

(i) шаг E: вычислите $S' = E(S | x, v; \varphi)$;

(ii) шаг M: найдите значение φ' как решение $E(S; \varphi') = S'$

На шаге E математического ожидания имеем

$$E(S_i | x_i, v_i) = v_i S_i(x_i) + (1 - v_i) E[S_i(T_i) | T_i > x_i]$$

Таким образом, для цензурированного наблюдения $S_i(x_i)$ остается без изменения. Однако при $T_i > x_i$ заменяется на условное математическое ожидание для наблюдения, цензурированного в x_i . Вычисление математического ожидания

$$E[S_i(T_i) | T_i > x_i] = \frac{1}{F_i(x_i; \varphi)} \int_{x_i}^{\infty} S_i(t) f_i(t; \varphi) dt$$

является наиболее трудным шагом в использовании алгоритма.

Запись логарифма функции правдоподобия в другом виде позволяет пояснить сущность алгоритма. Из (11.12) следует, что

$$l(\varphi; x, v) = \sum_{i=1}^n \log f_i(T_i; \varphi) - \sum_{i=1}^n (1 - v_i) \log [f_i(T_i; \varphi) / F_i(x_i; \varphi)]. \quad (11.21)$$

Далее, $f_i(t; \varphi) / F_i(x; \varphi)$ — условная плотность T_i при $T_i > x$. Она имеет такой же вид, что и безусловная плотность T_i в соотношении (11.17). Исключение лишь в том, что область определения плотности ограничивается условием $t > x$ и нормирующая константа $B_i(\varphi, x)$ зависит от x . Как и ранее,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \log \left(\frac{f_i(T_i; \varphi)}{F_i(x_i; \varphi)} \right) = S_i(T_i) - E[S_i(T_i) | T_i > x_i]. \quad (11.22)$$

Комбинируя уравнения (11.21) и (11.22), получаем

$$\frac{\partial l(\varphi; x, v)}{\partial \varphi} = S - E(S; \varphi) - \sum_{i=1}^n (1 - v_i) [S_i(T_i) - E[S_i(T_i) | T_i > x_i]] = E(S | x, v; \varphi) - E(S; \varphi), \quad (11.23)$$

т. е. разность между условным и безусловным математическим ожиданием достаточной статистики. Таким образом, если φ — неподвижная точка алгоритма, так что $\varphi' = \varphi$ в (11.20), то φ является решением уравнения правдоподобия $\partial l / \partial \varphi = 0$.

11.5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГРУППИРОВАННЫМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим теперь довольно общую формулировку понятия устойчивости для функций правдоподобия, соответствующих группированным полиномиальным данным. Этот подход позволяет получить другим способом множительную оценку, описанную в гл. 4, а также обобщить этот результат на случай, когда времена жизни подчиняются более общим правилам цензурирования и группировки, чем те, которые до сих пор

рассматривались в книге. В рамках этого подхода можно также решать задачу, обсуждавшуюся в гл. 10, об оценивании распределения двумерных времен жизни для данных, цензурированных по одной или обоим компонентам.

Предположим, что полиномиальный эксперимент имеет p исходов с вероятностями π_j ($j = 1, \dots, p$), $\sum \pi_j = 1$, но для i -го повторения эксперимента ($i = 1, \dots, n$) известно только то, что его результат содержится в множестве $S_i \subset \{1, \dots, p\}$. Тогда полный логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$l(\pi) = \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{j \in S_i} \pi_j \right). \quad (11.24)$$

Легко показать, что функция $l(\pi)$ выпукла. Действительно, ее градиент равен

$$\frac{\partial l}{\partial \pi} = \sum_i \frac{g_i}{|S_i|}, \quad (11.25)$$

где g_i — вектор размерности $p \times 1$ с компонентами $g_{ij} = 1$, если $j \in S_i$ и $g_{ij} = 0$ — в противном случае, а

$$|S_i| = \sum_{j \in S_i} \pi_j.$$

Матрица вторых производных l равна $-I$, где

$$I = \sum_i g_i g_i^T / |S_i|^2 = J^T J \quad (11.26)$$

и J — матрица размерности $n \times p$ с i -й строкой $g_i^T / |S_i|$. Отсюда следует, что матрица I является положительно полуопределенной и что функция $l(\pi)$ выпукла. Так как симплекс $\{\pi; \sum \pi_j = 1\}$ допустимых значений параметра — замкнутое выпуклое множество, то значения π , в которых достигается максимум, также образуют выпуклое множество, и l не может иметь никаких других стационарных значений. Однако это не доказывает, что максимум должен быть единственным.

Рассмотрим теперь применение EM-алгоритма к этой задаче. Поскольку π не является так называемым «каноническим» вектором параметров для полиномиального распределения, то теория, описанная в 11.4, непосредственно неприменима. Вместо этого удобно работать, используя общую постановку из 11.3. Тогда полные данные состояли бы из полиномиальных частот K_j каждого исхода ($j = 1, \dots, p$), которые наблюдались бы при отсутствии группировки. Действительные наблюдения состоят из множеств S_i , соответствующих каждому повторению эксперимента.

Полная функция правдоподобия имеет полиномиальную форму

$$l_0(\varphi; K) = \sum_{j=1}^{p-1} K_j \log \pi_j + K_p \log(1 - \pi_1 - \dots - \pi_{p-1}), \quad (11.27)$$

где вместо π_p подставлено его выражение через $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{p-1}$, чтобы избежать ограничения $\sum \pi_j = 1$. Функция $Q(\pi', \pi)$, определенная в соотношении (11.3), имеет вид

$$Q(\pi', \pi) = \sum_{j=1}^{p-1} E(K_j | S, \pi) \log \pi'_j + \\ + E(K_p | S, \pi) \log (1 - \pi'_1 - \dots - \pi'_{p-1}),$$

где через $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ обозначены наблюдаемые данные. Оба шага алгоритма не вызывают затруднений. Для шага E получаем

$$E(K_j | S, \pi) = \sum_{i=1}^n \frac{g_{ij} \pi_j}{|S_i|}, \quad (11.28)$$

а для шага M находим

$$\pi'_j = E(K_j | S, \pi)/n. \quad (11.29)$$

Тогда уравнения самосостоятельности принимают вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{g_{ij} \pi_j}{|S_i|} = n \pi_j \quad (j = 1, \dots, p-1). \quad (11.30)$$

В общем случае сокращение на π_j не является допустимым, так как при некоторых значениях i возможно равенство $|S_i| = \pi_j$.

Несмотря на выпуклость логарифма функции правдоподобия, сходимость EM-алгоритма к оценке максимального правдоподобия не гарантируется в силу возможного аномального поведения на границах пространства параметров (см. упр. 11.5).

В качестве иллюстрации применения алгоритма снова рассмотрим оценивание распределения для одной выборки с цензурированием справа. Используя обозначения, приводимые в гл. 4, имеем d_j наблюдаемых отказов в возможный момент отказа a_j для каждого момента — $S_i = \{a_j\}$, тогда как для m_j цензурированных в a_j имеем $S_i = \{a_{j+1}, \dots, a_p\}$. Предполагается, что у объекта, цензурированного в момент a_j , мог бы наблюдаться отказ в a_j , поэтому a_j исключается из S_i .

Уравнения самосостоятельности (11.30) принимают вид

$$n \pi_j = d_j + \sum_{i < j} \frac{m_i \pi_j}{1 - \pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_i} \quad (11.31)$$

Легко показать с помощью метода математической индукции по j , что решением (11.31) является

$$\hat{\pi}_j = \left[\prod_{i=1}^{j-1} \left(1 - \frac{d_i}{r_i} \right) \right] \frac{d_j}{r_j}, \quad (11.32)$$

где, как и раньше,

$$r_j = n - \sum_{i < j} (d_i + m_i),$$

т. е. число объектов, наблюдаемых к моменту a_j . Полученная оценка соответствует множительной оценке функции надежности,

$$\widehat{F}(t) = 1 - \Sigma^{(t)} \widehat{\pi}_j = \Pi^{(t)} (1 - d_j/r_j),$$

выведенной в (4.4).

11.6. ДРУГИЕ ПЛАНЫ НАБЛЮДЕНИЯ

До сих пор в книге предполагалось возможное цензурирование справа. В самом деле, любой метод статистического анализа данных типа времени жизни, который недостаточно легко модифицируется для такого цензурирования, имеет довольно ограниченное применение. Однако возможны и другие ограничения наблюдения наработок до отказа. В заключение кратко опишем, как следует поступать в таких случаях.

Усечение слева происходит в случае, когда объекты попадают под наблюдение только через некоторый известный промежуток времени после естественного начала отсчета времени изучаемого явления. Т.е. если бы в задаче объект отказал раньше момента усечения, то такой объект не был бы зарегистрирован. Следовательно, любой вклад в функцию правдоподобия должен быть условным относительно превышения границы усечения.

Если для i -го объекта границей усечения слева является t'_i (или 0) и объект или отказывает в момент t_i , или цензурирован справа в момент c_i , то вклад в функцию правдоподобия для однородной выборки объектов равен либо

$$f(t_i; \varphi)/F(t'_i; \varphi), \text{ либо } F(c_i; \varphi)/F(t'_i; \varphi), \quad (11.33)$$

что приводит сразу же к подбору параметрической модели методом максимального правдоподобия. Можно ввести и поясняющие переменные.

В частности, из общих соображений ясно, что особенно просто решается эта задача в случае экспоненциального распределения. Тогда $F(t; \rho) = e^{-\rho t}$ и множители в (11.33) принимают вид $\rho e^{-\rho(t_i - t'_i)}$ или $e^{-\rho(c_i - t'_i)}$ соответственно. Для анализа функции правдоподобия достаточно знать только числа отказов и полное время исследования. Для других параметрических распределений в общем случае необходимо численное решение уравнений максимального правдоподобия, но новых идей и методов при этом не привлекается.

Цензурирование слева возникает, если наблюдение начинается не с самого начала и некоторые объекты могут уже отказать до того, как такое наблюдение началось. Об этих объектах известно только то, что они отказали, но не величины их наработок до отказа. Такие случаи возникают, если интересующий момент отказа равен времени до первого достижения некоторого характеристического уровня какой-либо возрастающей функцией и если этот уровень может быть достигнут некоторыми объектами до начала наблюдения. В общем случае объект, чья наработ-

ка до отказа была цензурирована слева в момент c , вносит в параметрическую функцию правдоподобия член $F(c; \varphi)$.

EM-алгоритм, описанный в предыдущем разделе, может сочетаться с непараметрическим оцениванием функции распределения для времен жизни при цензурировании как справа, так и слева. Конечно, при наличии только цензурирования слева можно применять обычные множительные оценки после соответствующего изменения знака.

Для усеченных данных требуется незначительная модификация алгоритма, но важный частный случай усечения слева в сочетании с цензурированием справа имеет простое явное решение. Действительно, уравнение (11.32) остается справедливым, если изменить определение r_j , положив его равным числу только тех объектов, наблюдение которых началось до момента a_j .

Для некоторых классов задач, в частности при изучении надежности в промышленности и в социологических исследованиях, когда имеется стационарный процесс интервалов во времени для каждой популяции объектов (индивидуумов), возможны другие планы наблюдения. Например:

(i) в определенный момент может быть сделана перекрестная выборка из популяции и найдена суммарная наработка до отказов для отказавших объектов, включенных в выборку;

(ii) выборка может быть получена, как и в случае (i), но вместо регистрации полной наработки до отказа отмечается либо оставшееся время жизни (будущее время возвращения), измеряемое от момента взятия выборки до отказа, либо соответствующее прошедшее время возвращения.

Очень часто, если $f(x; \varphi)$ и $F(x; \varphi)$ — плотность и функция надежности наработки до отказа со средним μ , эти процедуры порождают наблюдения (i) с плотностью со смещенной длиной $x f(x; \varphi)/\mu$ и (ii) с плотностью стационарного времени возвращения, $F(x; \varphi)/\mu$. Эти плотности, как правило, применяются в случае перекрестной выборки для стационарных точечных процессов с плотностью интервалов $f(x; \varphi)$. Получив данные с плотностями (i) или (ii), можно выписать функции правдоподобия для параметрического оценивания. В работе Кокса (1967) изучена асимптотическая эффективность оценивания относительно непосредственного наблюдения наработок до отказа. О параметрическом оценивании для выборок со смещенной длиной см. работу Варди (1982 а, б), а о соответствующих приложениях для геометрических вероятностей — работу Лэслетта (1982).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Методы, предложенные Йэтсом (1933), а также Хили и Уестмакотом (1956), для учета в планируемых экспериментах пропущенных значений являются, по-видимому, наиболее ранними примерами использования принципа самостоятельности. Эфрон (1967) впервые ввел этот термин и был первым, кто использовал это понятие для цензурирован-

ных данных. Термин ЕМ-алгоритм был введен Демпстером и др. (1977) в обширной работе, где давался обзор более ранних приложений и приводилось много новых. Результаты по сходимости см. в работе Ву (1983). Орчард и Вудбери (1972) ввели термин-принцип пропущенной информации.

Барридж (1981a, 1982) описал условия выуклости логарифмов функций правдоподобия для сгруппированных и цензурированных данных. В работах Тёрнбулла (1974, 1976) рассматривается непараметрическое оценивание для данных с произвольными способами группирования, цензурирования и усечения. Миллер (1976), Бакли и Джеймс (1979) прибегали к понятию самостоятельности для вывода оценок наименьших квадратов для регрессионных моделей с цензурированными данными. Миллер и Хальперн (1982) применяли эти процедуры для анализа времени жизни после трансплантации для больных, перенесших пересадку сердца (см. также 8.9).

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Предположим, что логарифмы наработок $Y_i = \log T_i$ удовлетворяют стандартной нормальной линейной модели $Y \sim N(\beta^T z, \sigma^2 I^*)$, где z — матрица плана размерности $p \times n$ и I^* — единичная матрица размерности $n \times n$. Покажите, что шаг ЕМ-алгоритма связан с вычислением математических ожиданий $E(Y_i | Y_i > \log c_i)$ и $E(Y_i^2 | Y_i > \log c_i)$, но для пересмотра регрессионных параметров β требуются значения только первого математического ожидания. Выразите оба условных математических ожидания через нормальную функцию распределения и исходя из этого покажите, как реализуется алгоритм в этом случае.

Предполагаете ли вы, что оценка максимального правдоподобия β изменится, если σ^2 задать заранее?

[Глэссер (1965); Шми и Хан (1979); Волинетц (1979); Эйткин (1981)]

11.2. Покажите, что в регулярных задачах оценивания, если ЕМ-алгоритм сходится к внутренней точке φ_0 параметрического пространства, φ_0 должна быть стационарной точкой для логарифма функции правдоподобия. *Указание.* Рассмотрите градиент $R(\varphi', \varphi)$ по φ' при $\varphi = \varphi_0$.

11.3. Пусть $U_0(\varphi)$, $U(\varphi)$, $I_0(\varphi)$ и $I(\varphi)$ обозначают градиенты и наблюдаемые информационные матрицы для $l_0(\varphi; T)$ и $l(\varphi; x, v)$ соответственно, а $\hat{\varphi}$ — оценка максимального правдоподобия l , т. е. найдена по функции правдоподобия l . Покажите, что для регулярной задачи оценивания:

$$a) U(\varphi) = E[U_0(\varphi) | x, v];$$

$$b) U(\hat{\varphi}) = 0;$$

$$в) I(\varphi) = E[I_0(\varphi) | x, v] - E[U_0(\varphi)U_0^T(\varphi) | x, v] + U(\varphi)U^T(\varphi),$$

где все математические ожидания рассматриваются для условного распределения T при заданных (x, v) .

Покажите, как эти уравнения могут быть использованы для получения оценки стандартного отклонения оценки $\widehat{\varphi}$. Имеет ли этот метод какие-либо вычислительные преимущества по сравнению с прямым вычислением $I(\widehat{\varphi})$?

[Луис (1982)]

11.4. (продолжение). Обозначая $I = I(\widehat{\varphi})$, а через $\delta^i = \varphi^{(i)} - \varphi^{(i-1)}$ разность между $(j-1)$ -й и j -й приближениями $\widehat{\varphi}$ по ЕМ-алгоритму, покажите, что, если отбросить члены второго порядка в $\varphi^{(j)} - \widehat{\varphi}$, получим

$$\delta^{(j)} = J\delta^{(j-1)},$$

где

$$(I^* - J)^{-1} = I_0 I^{-1}.$$

Докажите, что этот результат может быть использован для «ускорения» сходимости алгоритма.

[Сандберг (1974, 1976); Луис (1982)]

11.5. Пользуясь обозначениями 11.5, предположим, что в трех повторениях полиномиального эксперимента с тремя исходами наблюдались результаты: $S_1 = \{2, 3\}$, $S_2 = \{3, 1\}$, $S_3 = \{1, 2\}$.

Докажите, что существует единственная оценка максимального правдоподобия π , а именно $\widehat{\pi}_1 = \widehat{\pi}_2 = \widehat{\pi}_3 = 1/3$. Покажите, что в то же время ЕМ-алгоритм сходится к точке $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = \pi_3 = 1/2$ для любой начальной точки, такой, что $\pi_1 = 0$, $\pi_2 \neq 0$, $\pi_3 \neq 0$.

Какие еще предельные точки существуют в этом случае у ЕМ-алгоритма?

11.6. Рассмотрим ряд одинаковых систем, каждая из которых состоит из двух компонент A и B . Каждая система может функционировать, если работает хотя бы одна из компонент. Пусть π_{ij} обозначает вероятность того, что A откажет после i лет, а компонента B — после j лет ($i, j = 1, 2, 3$), и предположим для определенности, что ни одна из компонент не может проработать больше трех лет. Допустим, что первоначально испытывается 100 таких систем и получены результаты испытаний с очевидной интерпретацией $k_{11} = 10$, $k_{12} = 20$, $k_{13} = 10$, $k_{21} = 15$, $k_{22} = 8$, $k_{23} = 16$, $k_{31} = 5$, $k_{32} = 12$ и $k_{33} = 4$. Во втором эксперименте дополнительно испытывается 1000 одинаковых систем, но в этом случае наблюдение прекращается в конце первого года, когда в 110 системах отказали обе компоненты A и B , в 325 — только компонента A , в 275 — только B и 290 систем осталось в рабочем состоянии. Используйте ЕМ-алгоритм для получения оценок максимального правдоподобия π_{ij} .

[Кэмпбелл (1981)]

11.7. (аддитивные интенсивности). Предположим, что функция интенсивности для единственной однородной выборки равна $h_0(t) + \theta h_1(t)$, где $h_0(t)$ и $h_1(t)$ — заданные функции t и θ — оцениваемый параметр, $\theta > 0$. Выведите уравнение правдоподобия для θ : а) непосредственно; б) с помощью EM-алгоритма. *Указание.* Предположите, что возможны два типа отказов с (независимыми) интенсивностями отказов $h_0(t)$ и $\theta h_1(t)$, но тип отказа не наблюдается.

11.8. Говорят, что семейство функций надежности замкнуто относительно усечения, если $F(t; \varphi) / F(t'; \varphi) = F(t - t'; \varphi)$, где φ' может зависеть от φ и t' . Какие из семейств, введенных в гл. 2, замкнуты относительно усечения?

11.9. В экспериментах с животными по изучению возникновения рака опухоль называется *фатальной*, если она служит причиной смерти животного, *несущественной*, если она не является причиной смерти, но может быть обнаружена только в случае, когда животное приносится в жертву или умирает от других причин, и *видимой*, если ее наличие может быть обнаружено при жизни животного. Покажите, что продолжительности жизни при фатальной или видимой опухоли являются либо наблюдаемыми, либо цензурированными справа; при несущественных опухолях — либо цензурированными справа, либо цензурированными слева. Обсудите, какие следствия это имеет для анализа.

Пето и др. (1980)

- Aalen O. (1976). Nonparametric inference in connection with multiple decrement models. *Scand. J. Statist.*, 3, 15—27.
- Aalen O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting processes. *Ann. Statist.*, 6, 701—26.
- Aitkin M. (1981). A note on the regression analysis of censored data. *Technometrics*, 23, 161—3.
- Aitkin M. and Clayton D. (1980). The fitting of exponential, Weibull and extreme value distributions to complex censored survival data using GLIM. *Appl. Statist.*, 29, 156—63.
- Aitkin M., Laird N. and Francis B. (1983). A reanalysis of the Stanford heart transplant data (with discussion). *J. Am. Statist. Assoc.*, 78, 264—92.
- Andersen P. K., Borgan O., Gill R. D. and Keiding N. (1982). Linear nonparametric tests for comparison of counting processes with applications to censored survival data. *Int. Statist. Rev.*, 50, 219—58.
- Andersen P. K. and Gill R. D. (1982). Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *Ann. Statist.*, 10, 1100—20.
- Anderson J. A. and Senthilselvan A. (1980). Smooth estimates for the hazard function. *J. R. Statist. Soc.*, B 42, 322—7.
- Aranda-Ordaz F. J. (1980). Transformations to additivity for binary data. Unpublished Ph. D. thesis, Imperial College, London.
- Armitage P. (1959). The comparison of survival curves (with discussion). *J. R. Statist. Soc. A* 122, 279—300.
- Barlow R. E. and Proschan F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. New York: Wiley.
- Barlow R. E. and Proschan F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
Русский перевод: Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. — М.: Наука, 1984.
- Barndorff-Nielsen O. (1980). Conditionality resolutions. *Biometrika*, 67, 293—310.
- Barndorff-Nielsen O. (1983). On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator. *Biometrika*, 70, 343—65.
- Barndorff-Nielsen O. and Cox D. R. (1984). Bartlett adjustments to the likelihood ratio statistic and the distribution of the maximum likelihood estimator. *J. R. Statist. Soc.*, B 46, to appear.
- Bartholomew D. J. (1957). A problem in life testing. *J. Am. Statist. Assoc.*, 52, 350—5.
- Bartholomew D. J. (1963). The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics*, 5, 361—74.
- Bennett S. (1983). Analysis of survival data by the proportional odds model. *Statist. Med.*, 2, 273—8.
- Bernardo J. M. (1976). Psi (digamma) function. Algorithm AS103. *Appl. Statist.*, 25, 315—17.
- Bernoulli D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite Vérole, et des avantages de l'Inoculation pour la prévenir. *Mem. L' Acad. R. Sci.*, 1760, 1—45.
- Billingsley P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley.

- Русский перевод: Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
- Billingssley P. (1971). Weak Convergence of Measures. Philadelphia: SIAM.
- Boag J. W. (1949). Maximum likelihood estimates of the proportion of patients cured by cancer therapy (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, B 11, 15—53.
- Böhmér P. E. (1912). Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten Rapports. *Mémoires et Procès-verbaux de Septième Congrès International d'Actuaires*, Amsterdam, vol. 2, pp. 327—43.
- Borgefors G. and Hjorth U. (1981). Comparison of parametric models for estimating maintenance times from small samples. *IEEE Trans. Rel.*, R—30, 375—80.
- Braford Hill A. (1977). *A Short Textbook of Medical Statistics*. London: Hodder and Stoughton.
- Breslow N. E. (1970). A generalized Kruskal — Wallis test for comparing K samples subject to unequal patterns of censorship. *Biometrika*, 57, 579—94.
- Breslow N. E. (1972). Contribution to discussion of paper by D. R. Cox. *J. R. Statist. Soc.*, B 34, 216—17.
- Breslow N. E. (1974). Covariance analysis of censored survival data. *Biometrics*, 30, 89—100.
- Breslow N. E. (1975). Analysis of survival data under the proportional hazards model. *Int. Statist. Rev.*, 43, 55—8.
- Breslow N. E. (1977). Some statistical models useful in the study of occupational mortality, in *Environmental Health: Quantitative Methods* (ed. A. Whittemore). Philadelphia: SIAM, pp. 88—102.
- Breslow N. E. and Crowley J. (1974). A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. *Ann. Statist.*, 2, 437—53.
- Breslow N. E. and Crowley J. (1981). Discussion of paper by D. Oakes. *Int. Statist. Rev.*, 49, 255—7.
- Breslow N. E. and Day N. E. (1980). *Statistical Methods in Cancer Research*, vol. 1, *The Analysis of Case — Control Studies*. Lyon: IARC.
- Breslow N. E., Lubin J. H., Marek P. and Langholtz B. (1983). Multiplicative models and cohort analysis. *J. Am. Statist. Assoc.*, 78, 1—12.
- Brown B. W., Hollander M. and Korwar R. M. (1974). Nonparametric tests of independence for censored data, with applications to heart transplant studies, in *Reliability and Biometry. Statistical Analysis of Life Length* (eds F. Proschan and R. J. Serfling). Philadelphia: SIAM, pp. 327—53.
- Brown M. B. (1984). On the choice of variance for the log rank test. *Biometrika*, 71, 65—74.
- Buckley J. and James I. (1979). Linear regression with censored data. *Biometrika*, 66, 429—36.
- Burridge J. (1981a). A note on maximum likelihood estimation for regression models using grouped data. *J. R. Statist. Soc.*, B 43, 41—5.
- Burridge J. (1981b). Empirical Bayes analysis of survival time data. *J. R. Statist. Soc.*, B 43, 65—75.
- Burridge J. (1981c). *Statistical analysis of grouped lifetime data in a changing environment*. Unpublished Ph. D. thesis, Imperial College, London.
- Burridge J. (1982). Some unimodality properties of likelihoods derived from grouped data. *Biometrika*, 69, 145—51.
- Campbell G. (1981). Nonparametric bivariate estimation with randomly censored data. *Biometrika*, 68, 417—22.
- Clausius R. (1858). Über die Mittlere Länge der Wege. *Ann. Phys. Lpzg.*, 105, 239—58.
- Clayton D. G. (1974). Some odds ratio statistics for the analysis of ordered categorical data. *Biometrika*, 61, 525—31.
- Clayton D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65, 141—51.

- Cochran W. G. (1954). Some methods for strengthening the common χ^2 tests. *Biometrics*, 10, 417—51.
- Cornfield J. and Detre K. (1977). Bayesian life table analysis. *J. R. Statist. Soc.*, B 39, 86—94.
- Cox D. R. (1953). Some simple approximate tests for Poisson variates. *Biometrika*, 40, 354—60.
- Cox D. R. (1959). The analysis of exponentially distributed lifetimes with two types of failure. *J. R. Statist. Soc.*, B, 21, 411—21.
- Cox D. R. (1962). *Renewal Theory*. London: Methuen.
Русский перевод: Кокс Д. Теория восстановления//Кокс Д., Смит В. Теория восстановления.— М.: Советское радио, 1967.
- Cox D. R. (1967). Some sampling problems in technology, in *New Developments in Survey Sampling* (eds N. L. Johnson and H. Smith). New York: Wiley, pp. 506—27.
- Cox D. R. (1970). *Analysis of binary data*. London: Chapman and Hall.
- Cox D. R. (1972). Regression models and life-tables (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, B 34, 187—220.
- Cox D. R. (1975). Partial likelihood. *Biometrika*, 62, 269—76.
- Cox D. R. (1979). A note on the graphical analysis of survival data. *Biometrika*, 66, 188—90.
- Cox D. R. (1980). Local ancillarity. *Biometrika*, 67, 279—86.
- Cox D. R. (1983). A remark on censoring and surrogate response variables. *J. R. Statist. Soc.*, B 45, 391—3.
- Cox D. R. and Hinkley D. V. (1968). A note on the efficiency of least-squares estimates. *J. R. Statist. Soc.*, B, 30, 284—9.
- Cox D. R. and Hinkley D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.
Русский перевод: Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. — М.: Мир, 1978.
- Cox D. R. and Isham V. (1980). *Point Processes*. London: Chapman and Hall.
- Cox D. R. and Lewis P. A. W. (1966). *The Statistical Analysis of Series of Events*. London: Methuen.
Русский перевод: Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. — М.: Мир, 1969.
- Cox D. R. and Snell E. J. (1968). A general definition of residuals (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, B 30, 248—75.
- Crowley J. and Hu M. (1977). Covariance analysis of heart transplant survival data. *J. Am. Statist. Assoc.*, 73, 27—36.
- Cuzick J. (1982). Rank tests for association with right censored data. *Biometrika*, 69, 351—64.
- Daniels H. E. (1944). The relation between measures of correlation in the universe of sample permutations. *Biometrika*, 32, 129—35.
- Darby S. C. and Reissland J. A. (1981). Low levels of ionizing radiation and cancer — are we underestimating the risk? (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, A, 144, 298—331.
- David H. A. and Moeschberger M. L. (1978). *The Theory of Competing Risks*. London: Griffin.
- Dempster A. P., Laird N. M. and Rubin D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, B 39, 1—38.
- Dempster D. J. and Launer R. L. (eds) (1983). *Reliability in the Acquisitions Process*. Lecture Notes in Statistics, vol. 4. New York: Marcel Dekker.
- Dhillon B. S. (1979). A hazard rate model. *IEEE Trans. Rel.*, R-28, 150.
- Dhillon B. S. (1981). Life distributions. *IEEE Trans. Rel.*, R-30, 457—60.
- Doksum K. A. (1974). Tailfree and neutral random probabilities and their posterior distributions. *Ann. Prob.*, 2, 183—201.

- Doksum K. A. and Sievers G. L. (1976). Plotting with confidence: graphical comparisons of two populations. *Biometrika*, 63, 421—34.
- Doksum K. A. and Yandell B. S. (1983). Properties of regression estimates based on censored survival data, in A Festschrift for Erich L. Lehmann (eds P. J. Bickel, K. A. Doksum and J. L. Hodges). New York: Wadsworth, pp. 140—56.
- Efron B. (1967). The two sample problem with censored data. Proc. 5th Berkeley Symp., vol. 4, pp. 831—53.
- Efron B. (1977). The efficiency of Cox's likelihood function for censored data. *J. Am. Statist. Assoc.*, 72, 557—65.
- Efron B. (1981). Censored data and the bootstrap. *J. Am. Statist. Assoc.*, 68, 601—8.
- Efron B. and Hinkley D. V. (1978). Assessing the accuracy of the maximum likelihood estimator: observed versus expected Fisher information (with discussion). *Biometrika*, 65, 457—87.
- Elandt-Johnson R. C. and Johnson N. L. (1980). *Survival Models and Data Analysis*. New York: Wiley.
- Einstein B. and Sobel M. (1953). Life testing. *J. Am. Statist. Assoc.*, 48, 486—502.
- Farewell V. T. (1979). An application of Cox's proportional hazard model to multiple infection data. *Appl. Statist.*, 28, 136—43.
- Farewell V. T. and Cox D. R. (1979). A note on multiple time scales in life testing. *Appl. Statist.*, 28, 73—5.
- Feigl P. and Zelen M. (1965). Estimation of exponential survival probabilities with concomitant information. *Biometrics*, 21, 826—38.
- Ferguson T. S. (1973). A Bayesian analysis of some nonparametric problems. *Ann. Statist.*, 1, 209—30.
- Ferguson T. S. and Phadia E. G. (1979). Bayesian nonparametric estimation based on censored data. *Ann. Statist.*, 7, 163—86.
- Fisher R. A. (1935). The mathematical distributions used in the common tests of significance. *Econometrica*, 3, 353—65.
- Fisher R. A. and Tippett L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 24, 180—90.
- Fisher R. A. and Yates F. (1963). *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th edn. London: Longman.
- Fleming T. R., O'Fallon J. R., O'Brien P. C. and Harrington D. P. (1980). Modified Kolmogorov-Smirnov test procedures with application to arbitrarily right censored data. *Biometrics*, 36, 607—26.
- Folks J. L. and Chhikara R. S. (1978). The inverse Gaussian distribution and its statistical application — a review (with discussion). *J. R. Statist. Soc. B*, 40, 263—89.
- Fraser D. A. S. (1968). *The Structure of Inference*. New York: Wiley.
- Fraser D. A. S. (1979). *Inference and Linear Models*. New York: McGraw-Hill.
- Gail M. H. (1972). Does cardiac transplantation prolong life? A reassessment. *Ann. Internal Med.*, 76, 815—17.
- Gail M. H. (1975). A review and critique of some models used in competing risk analysis. *Biometrics*, 31, 209—22.
- Gail M. H., Lubin J. H. and Rubinstein L. V. (1981). Likelihood calculations for matched case — control studies and survival studies with tied death times. *Biometrika*, 68, 703—7.
- Gehan E. A. (1965). A generalized Wilcoxon test for comparing arbitrarily single-censored samples. *Biometrika*, 52, 203—23.
- Gilbert J. P. (1962). *Random censorship*. Unpublished Ph. D. dissertation, University of Chicago.
- Gill R. D. (1980). *Censoring and Stochastic Integrals*. Mathematical Centre Tracts, no. 124. Amsterdam: Mathematische Centrum.

- Gillespie M J and Fisher L (1979) Confidence bands for the Kaplan—Meier survival curve estimate *Ann Statist* 7, 920—4
- Glasser M (1965) Regression analysis with dependent variable censored *Biometrics*, 21, 300—7
- Glasser M (1967) Exponential survival with covariance *J Am Statist Assoc*, 62 561—8
- Greenwood M (1926) The errors of sampling of the survivorship tables, in *Reports on Public Health and Statistical Subjects*, no 33 London HMSO Appendix 1
- Gross A J and Clark V A (1975) *Survival Distributions Reliability Applications in the Biomedical Sciences* New York Wiley
- Hall W J and Wellner J A (1980) Confidence bands for a survival curve from censored data *Biometrika*, 67 133—43
- Harrington D P and Fleming T R (1982) A class of rank test procedures for censored survival data *Biometrika*, 69, 553—66
- Healy M J R and Westmacott M (1956) Missing values in experiments analysed on automatic computers *Appl Statist*, 5, 203—6
- Holt J D and Prentice R L (1974) Survival analysis in twin studies and matched pair experiments *Biometrika*, 61 17—30
- Hougaard P (1984) Life table methods for heterogeneous populations distributions describing the heterogeneity *Biometrika* 71, to appear
- Howard S V (1972) Contribution to discussion of paper by D R Cox *J R Statist Soc*, B 34 210—11
- Irwin J O (1949) The standard error of an estimate of expectation of life with spectral reference to expectation of tumourless life in experiments with mice *J Hyg Camb*, 47, 188—9
- Johansen S (1978) The product limit estimator as maximum likelihood estimator *Scand J Statist* 5, 195—9
- Johnson N L and Kotz S (1970) *Distributions in Statistics Continuous Univariate Distributions* (2 vols) Boston Houghton Mifflin
- Jørgensen B (1982) *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution* Lecture Notes in Statistics, vol 9 New York Springer Verlag
- Kalbfleisch J D (1974) Some efficiency calculations for survival distributions *Biometrika*, 61 31—8
- Kalbfleisch J D (1978) Non parametric Bayesian analysis of survival time data *J R Statist Soc*, B 40, 214—21
- Kalbfleisch J D and Mackay R J (1978) Remarks on a paper by Cornfield and Detre *J R Statist Soc*, B 40 175—7
- Kalbfleisch J D and McIntosh A A (1977) Efficiency in survival distributions with time—dependent covariables *Biometrika*, 64, 47—50
- Kalbfleisch J D and Prentice R L (1973) Marginal likelihoods based on Cox's regression and life model *Biometrika*, 60, 267—78
- Kalbfleisch J D and Prentice R L (1980) *The Statistical Analysis of Failure Time Data* New York Wiley
- Kaplan E L and Meier P (1958) Nonparametric estimation from incomplete observations *J Am Statist Assoc*, 53, 457—81
- Kay R (1977) Proportional hazard regression models and the analysis of censored survival data *Appl Statist*, 26, 227—37
- Kay R (1979) Some further asymptotic efficiency calculations for survival data regression models *Biometrika*, 66, 91—6
- Kendall M G (1938) A new measure of rank correlation *Biometrika*, 30, 81—93
- Lagakos S W (1979) General right censoring and its impact on the analysis of survival data *Biometrika*, 35, 139—56
- Lagakos S W (1981) The graphical evaluation of explanatory variables in proportional hazard regression models *Biometrika*, 68, 93—8
- Lagakos S W and Williams J S (1978) Models for censored survival analysis a cone class of variable-sum models *Biometrika*, 65, 181—9

- Langberg N, Proschan F and Quinzia J (1981) Estimating dependent life lengths, with applications to the theory of competing risks *Ann Statist*, 9, 157—67
- Laslett G M. (1982) The survival curve under monotone density constraints with applications to two dimensional line segment processes *Biometrika*, 69, 153—60
- Lawless J F (1982) *Statistical Models and Methods for Lifetime Data* New York Wiley
- Liddell F D K, McDonald J C and Thomas D C (1977) Methods of cohort analysis: Appraisal by application to asbestos mining (with discussion) *J R Statist Soc. A* 140, 469—91
- Liu P Y and Crowley J (1978) Large sample theory of the MLE based on Cox's regression model for survival data University of Wisconsin, Technical Report
- Louis T A (1982) Finding the observed information matrix when using the EM algorithm *J R Statist Soc B* 44, 226—33
- Lustbader E D (1980) Time dependent covariates in survival analysis *Biometrika*, 67, 697—8
- McCullagh P (1980) Regression models for ordinal data (with discussion) *J R Statist Soc. B* 42 109—42
- Mann N R, Shafer R E and Singpurwalla N D (1974) *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data* New York Wiley
- Mantel N (1966) Evaluation of survival data and two new rank order statistics arising in its consideration *Cancer Chemother Rep*, 50 163—70
- Mantel N and Byar D P (1974) Evaluation of response time data involving transient states: an illustration using heart transplant data *J Am Statist Assoc.* 69, 81—6
- Mantel N and Haenszel W (1959) Statistical aspects of the analysis of data from retrospective studies of disease *J Nat Cancer Inst* 22, 719—48
- Marshall A W and Olkin I (1967) A multivariate exponential distribution *J Am Statist Assoc* 62 30—44
- Mehrotra K C, Michalek J E and Michalko D (1982) A relationship between two forms of linear rank procedures for censored data *Biometrika* 69, 674—6
- Meier P (1975) Estimation of a distribution function from incomplete observations, in *Perspectives in Probability and Statistics* (ed J Gam) London Academic Press, pp 67—87
- Mendenhall W and Hader R J (1958) Estimation of parameters of mixed exponentially distributed failure time distributions from censored life test data *Biometrika*, 45 504—20
- Mitke V and Stanley K E (eds) (1982) *Statistics in Medical Research* New York Wiley
- Müller R G (1976) Least squares regression with censored data *Biometrika* 63, 449—64
- Müller R G and Halpern J (1982) Regression with censored data *Biometrika*, 69, 521—31
- Moeschberger M L (1974) Life tests under dependent competing causes of failure *Technometrics* 16 39—47
- Moore R J (1982) Derivatives of the incomplete gamma integral Algorithm AS187 *Appl Statist*, 31, 330—3
- Nadas A (1970) On estimating the distribution of a random vector when only the smallest coordinate is observable *Technometrics*, 12, 923—4
- Nadas A (1971) The distribution of the identified minimum of a normal pair determines the distribution of the pair *Technometrics*, 13, 201—2
- Nelson W (1969) Hazard plotting for incomplete failure data *Qual Technol* 1 27—52
- Nelson W (1972) Theory and applications of hazard plotting for censored failure data *Technometrics*, 14, 945—65

- Nelson W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. New York: Wiley.
- Oakes D. (1972). Contribution to discussion of paper by D. R. Cox. *J. R. Statist. Soc.*, B 34, 208.
- Oakes D. (1977). The asymptotic information in censored survival data. *Biometrika*, 64, 441—8.
- Oakes D. (1981). Survival times: aspects of partial likelihood (with discussion). *Int. Statist. Rev.*, 49, 199—233.
- Oakes D. (1982a). A concordance test for independence in the presence of censoring. *Biometrics*, 38, 451—5.
- Oakes D. (1982b). A model for association in bivariate survival data. *J. R. Statist. Soc.*, B 44, 414—22.
- Orchard T. and Woodbury M. A. (1972). A missing information principle: theory and applications. *Proc. 6th Berkeley Symp.*, vol. 1, p. 697—715.
- Pearson E. S. and Hartley H. O. (1966). *Biometrika Tables for Statisticians*, 3rd edn. London and Cambridge: Cambridge University Press.
- Pereira B. de B. (1978). Tests and efficiencies of separate regression models. *Biometrika*, 65, 319—27.
- Peterson A. V. (1977). Expressing the Kaplan-Meier estimate as a function of empirical sub-survival functions. *J. Am. Statist. Assoc.*, 72, 854—8.
- Peto R. (1972). Contribution to discussion of paper by D. R. Cox. *J. R. Statist. Soc.*, B 34, 205—7.
- Peto R. and Lee P. (1973). Weibull distributions for continuous carcinogenesis experiments. *Biometrics*, 29, 457—70.
- Peto R. and Peto J. (1972). Asymptotically efficient rank invariant test procedures (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, A 135, 185—206.
- Peto R., Pike M. C., Armitage P., Breslow N. E., Cox D. R., Howard S. V., Mantel N., McPherson K., Peto J. and Smith P. G. (1976). Design and analysis of randomized clinical trials requiring prolonged observation of each patient. I. Introduction and design. *Br. J. Cancer*, 34, 585—612.
- Peto R., Pike M. C., Armitage P., Breslow N. E., Cox D. R., Howard S. V., Mantel N., McPherson K., Peto J. and Smith P. G. (1977). Design and analysis of randomized clinical trials requiring prolonged observation of each patient. II. Analysis and examples. *Br. J. Cancer*, 35, 1—39.
- Peto R., Pike M. C., Day N. E., Gray R. G., Lee P. N., Parish S., Peto J., Richards S. and Wahrendorf J. (1980). Guidelines for simple, sensitive significance tests for carcinogenic effects in long-term animal experiments, in *Long-Term and Short-Term Screening Assays for Carcinogens: A Critical Appraisal*. Lyon: IARC.
- Pierce D. A., Stewart W. H. and Kopecky K. J. (1979). Distribution free regression analysis of grouped survival data. *Biometrics*, 35, 785—93.
- Pike M. C. (1966). A suggested method of analysis of a certain class of experiments in carcinogenesis. *Biometrics*, 22, 142—61.
- Plackett R. L. (1965). A class of bivariate distributions. *J. Am. Statist. Assoc.*, 60, 516—22.
- Prentice R. L. (1978). Linear rank tests with right censored data. *Biometrika*, 65, 167—79.
- Prentice R. L. and Gloeckler L. A. (1978). Regression analysis of grouped survival data with application to breast cancer data. *Biometrics*, 34, 57—67.
- Prentice R. L. and Kalbfleisch J. D. (1979). Hazard rate models with covariates. *Biometrics*, 35, 25—39.
- Prentice R. L. and Marek P. (1979). A qualitative discrepancy between censored data rank tests. *Biometrics*, 35, 861—7.
- Prorok P. C. (1976). The theory of periodic screening I: lead time and proportion detected. *Adv. Appl. Prob.*, 8, 127—43.

- Rao C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, 2nd edn. New York: Wiley.
- Русский перевод: Рао С. Р. *Линейные статистические методы и их применения*. — М.: Наука, 1968.
- Reid N. (1981a). Influence functions for censored data. *Ann. Statist.*, 9, 78—92.
- Reid N. (1981b). Estimating the median survival time. *Biometrika*, 68, 601—8.
- Schmeel J. and Hahn G. J. (1979). A simple method for regression analysis with censored data. *Technometrics*, 21, 417—32.
- Schneider B. E. (1978). Trigamma function. Algorithm AS121. *Appl. Statist.*, 27, 97—9.
- Seal H. L. (1977). Studies in the history of probability and statistics, XXXV. Multiple decrements or competing risks. *Biometrika*, 64, 429—39.
- Self S. G. and Prentice R. L. (1982). Commentary on Andersen and Gill's Cox's regression model for counting processes: a large sample study'. *Ann. Statist.*, 10, 1121—4.
- Sen P. K. (1981). The Cox regression model, invariance principles for some induced quantile processes and some repeated significance tests. *Ann. Statist.*, 9, 109—21.
- Shahani A. K. and Crease D. M. (1977). Towards models of screening for early detection of disease. *Adv. Appl. Prob.*, 9, 665—80.
- Shapiro S. (1977). Evidence on screening for breast cancer from a randomized trial. *Cancer*, 39, 2772—82.
- Sukhatme P. V. (1937). Tests of significance for samples of the χ^2 population with two degrees of freedom. *Ann. Eugen.*, 8, 52—6.
- Sundberg R. (1974). Maximum likelihood theory for incomplete data from an exponential family. *Scand. J. Statist.*, 1, 49—58.
- Sundberg R. (1976). A iterative method for solution of the likelihood equations for incomplete data from exponential families. *Comm. Statist.*, B 5, 55—64.
- Susarla V. and Van Ryzin J. (1976). Nonparametric Bayesian estimation of survival curves from incomplete observations. *J. Am. Statist. Assoc.*, 71, 897—902.
- Thomas D. C. (1981). General relative risk models for survival time and matched case — control analysis. *Biometrics*, 37, 673—86.
- Tsiatis A. A. (1975). A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 72, 20—2.
- Tsiatis A. A. (1981). A large sample study of Cox's regression model. *Ann. Statist.*, 9, 93—108.
- Turnbull B. W. (1974). Nonparametric estimation of a survivorship function with doubly censored data. *J. Am. Statist. Assoc.*, 69, 169—73.
- Turnbull B. W. (1976). The empirical distribution function with arbitrarily grouped, censored and truncated data. *J. R. Statist. Soc.*, B 38, 290—5.
- Turnbull B. W., Brown B. W. and Hu M. (1974). Survivorship analysis of heart transplant data. *J. Am. Statist. Assoc.*, 69, 74—80.
- Vaeth M. (1979). A note on the behaviour of occurrence-exposure rates when the survival distribution is not exponential. *Scand. J. Statist.*, 6, 77—80.
- Vaupel J. W., Manton K. G. and Stallard E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. *Demography*, 16, 439—54.
- Varadi Y. (1982a). Nonparametric estimation in the presence of length bias. *Ann. Statist.*, 10, 616—20.
- Varadi Y. (1982b). Nonparametric estimation in renewal processes. *Ann. Statist.*, 10, 772—85.
- Weibull M. (1939a). A Statistical Theory of the Strength of Materials. *Ingeniörs Vetenskaps Akademien Handlingar*, no. 151.
- Weibull M. (1939b). The Phenomenon of Rupture in Solids, *Ingeniörs Vetenskaps Akademien Handlingar*, no. 153.
- Weier D. R. and Basu A. P. (1980). An investigation of Kendall's tau modified for censored data with applications. *J. Statist. Plan. Infer.*, 4, 381—90.

- W i d d e r D. V. (1946). The Laplace Transform. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- W i l d C. J. (1983). Failure time models with matched data. *Biometrika*, 70, 633—41.
- W i l k M. B. and G n a n a d e s i k a n R. (1968). Probability plotting methods for the analysis of data. *Biometrika*, 55, 1—17.
- W i l l i a m s J. S. and L a g a k o s S. W. (1977). Models for censored survival analysis: constant-sum and variable-sum models. *Biometrika*, 64, 215—24.
- W o l y n e t z M. S. (1979). Maximum likelihood estimation in a linear model from confined and censored normal data. Algorithm AS139. *Appl. Statist.*, 28, 195—206.
- W u C. F. J. (1983). On the convergence properties of the EM algorithm. *Ann Statist.*, 11, 95—103.
- Y a t e s F. (1933). The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. *Empire J. Exptl Agric.*, 1, 129—42.
- Z e l e n M. and D a n n e m i l l e r M. C. (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. *Technometrics*, 3, 29—49.
- Z c l e n M. and F e i n l e i b N. (1969). On the theory of screening for chronic diseases. *Biometrika*, 56, 601—14.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Andersen P. K., Borgan O. (1984). Counting process models for life history data. A review 10-th Nordic conference on Math. Statist., Bolkesjo, Norway, 17—21 June.
- Беляев Ю. К. (1987). Nonparametric estimation of distribution functions based on incomplete data. in Proc. of the 4-th. Vilnius Conference. VNU Science Press, Utrecht, Netherlands, v. 1, 123—44.
- BMDP Statistical Software (1983), University California Press, Berkeley, 728.
- Gill R. D. (1981). Testing with replacement and the product-limit estimator// Ann. Statist. 9, 853—60.
- Jacobsen M. (1982). Statistical analysis of counting processes. Lecture notes in Statistics, vol. 12, Berlin: Springer Verlag.
- Ramlaau-Hansen H. (1983). Smoothing counting process intensities by means of kernel function. Ann. Statist., 2, 453—66.
- Robertson J. B., Uppuluri V. R. R. (1984). A generalized Kaplan—Meyer estimator. Ann. Statist., 12, 366—371.
- Tsai W.-Y., Crowly J. (1985). A large sample study of generalized maximum likely hood estimators from incomplete data via selfconsistency. Ann. Statist., 13, 1317—1334.
- Wellner J. A. (1982). Asymptotic optimality of the product-limit estimator. Ann. Statist., 10, 595—602.
- Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. и др. Вопросы математической теории надежности. — М.: Радио и связь, 1983.
- Беляев Ю. К. Непараметрические методы в задачах обработки результатов испытаний и эксплуатации. — М.: Знание, 1984. — С. 3—60.
- Беляев Ю. К. Множительные оценки вероятности безотказной работы // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1985. — № 4. — С. 45—59.
- Беляев Ю. К. Статистические методы обработки неполных данных о надежности изделий. — М.: Знание, 1987. — С. 3—55.
- Беляев Ю. К. Асимптотические свойства множительных оценок при накоплении данных // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 294. — № 1. — С. 11—14.
- Беляев Ю. К., Замятин А. А. Множительные оценки для функций распределения времен переходов полумарковского процесса // Вероятностные процессы и их приложения. — М., 1985. — С. 3—17.
- Беляев Ю. К., Замятин А. А. Множительная оценка функции распределения длительности жизни частицы в процессе Беллмана-Харриса // Вестник Московского университета. — 1987. — № 2. — С. 15—22.
- Беляев Ю. К., Чепурин Е. В. Основы математической статистики. — М.: МГУ, 1983. — Ч. II, III.
- Беляев Ю. К., Чистякова Н. В. Непараметрическая оценка распределения длины требования в системе с дисциплиной разделения процессора // Вероятностные процессы и их приложения — М.: 1987. — С. 12—17.
- Благовецкий Ю. Н. Оценки по неполным выборкам // Статистические модели и методы. — М.: ВНИИСИ, 1984. — Вып. 1. — Ч. I, II. — С. 4—31.
- Замятин А. А. Статистические выводы о надежности восстанавливаемой системы с кратными отказами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1986. — № 3. — С. 109—114.
- Назин А. Е., Скрипник В. М. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. — М.: Радио и связь, 1988.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аален 61, 147, 174
 Андерсен 134, 174, 183*¹
 Андерсон 60, 174
 Араида-Ордаз 78, 108, 174
 Армитадж 17, 108, 174, 180
 Армстронг 16

 Базу 157, 181
 Бакли 171, 175
 Барзилович Е. Ю. 183¹
 Барлоу 17, 33, 174
 Барндорф-Нильсен 41, 174
 Барридж 61, 108, 171, 175
 Бартоломью 48, 174
 Беннетт 78, 174
 Бернардо 17, 174
 Беляев Ю. К. 183*¹
 Бернулли 147, 174
 Бикел 177
 Биллингсли 61, 174, 175
 Бйар 134, 179
 Благовещенский Ю. Н. 183*¹
 Боргефорс 35, 175
 Боран 134, 174, 183*¹
 Бохмер 60, 175
 Боэг 32, 175
 Браун Б. В. 134, 157, 175, 181
 Браун М. Б. 108, 175
 Бреслоу 18, 48, 61, 62, 108, 134, 175, 180
 Брэдфорд Хилл 48, 175

 Ван Райзин 61, 181
 Варендорф 173, 180
 Варди 171, 182
 Ваупель 33, 182
 Вейбулл 33, 181
 Вейер 156, 181
 Воллинетц 171, 182
 Ву 171, 182
 Вудбери 171, 180
 Вэкс 90, 192

 Гани 173
 Гейл 131, 134, 147, 177
 Гехан 14, 15, 122, 134, 177

 Гилл 61, 134, 174, 177, 183*¹
 Гиллеспи 61, 178
 Гильберт 134, 177
 Глоуклер 108, 109, 180
 Глэссер 78, 171, 178
 Гнанадесикан 78, 182
 Грей 173, 180
 Гринвуд 60, 178
 Гросс 17, 33, 178

 Даниэлс 157, 176
 Дарби 17, 176
 Демпстер 171, 176
 Де Приест 17, 176
 Детре 61, 176
 Джеймс 171, 176
 Джонсон 17, 33, 147, 176, 177, 178
 Доксам 61, 78, 109, 177
 Дхиллон 35, 176
 Дэвид 147, 176
 Дэй 16, 173, 180
 Дэннемиллер 90, 182

 Замятин А. А. 183*¹

 Ирвин 62, 178
 Ишэм 33, 147, 176

 Йоргенсен 33, 178
 Йохансен 60, 178
 Йэкс 45, 170, 177, 182

 Каплан 60, 62, 178
 Каштанов В. А. 183*¹
 Кей 90, 108, 134, 178
 Кейдинг 134, 174
 Кендалл 157, 178
 Кларк 17, 33, 178
 Клаузнус 33, 175
 Клейтон 16, 78, 156, 174, 175
 Кокрен 108, 176
 Кокс 17, 33, 41, 48, 61, 78, 87, 90, 108, 134, 136, 147, 149, 156, 171, 174, 176, 177, 180
 Копеки 61, 180

¹ Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе

Қорвор 157, 175
Корнфильд 61, 176
Котц 33, 178
Криз 17, 181
Кроули 61, 62, 90, 108, 134, 175, 176,
179, 183*
Қуинзи 147, 179
Қыозик 157, 176
Кэлбфлейш 17, 33, 61, 108, 134, 178,
180
Кэмпбелл 172, 175

Лагакос 17, 90, 108, 147, 178, 182
Ластбедер 134, 179
Лангберг 147, 179
Лангхольц 17, 134, 175
Ли 48, 173, 180
Лидделл 17, 134, 179
Лонер 17, 176
Лоулесс 17, 33, 179
Лубин 17, 108, 134, 175, 177
Луис 172, 173, 179
Лью 134, 179
Лэйрд 134, 171, 174, 176
Лэслетт 171, 179

Маккей 61, 178
Макферсон 17, 108, 180
Марек 17, 134, 175
Маршалл 156, 179
Мейер 60, 61, 62, 178, 179
Менденхелл 144, 179
Мехротра 134, 179
Мике 17, 179
Миллер 17, 126, 139, 171, 179
Михалек 134, 179
Михалко 134, 179
Моешбергер 147, 176, 179
Мур 17, 179
Мэнн 17, 45, 179
Мэнтел 10, 108, 134, 179, 180
Мэнтон 33, 181

Надаш 141, 147, 179
Назин 183
Нельсон 17, 61, 179

О'Брайен 162, 177
Олкин 156, 179
Орчард 171, 180
Оукс 17, 78, 108, 109, 134, 156, 157,
180
О'Фаллон 162, 177

Пайк 17, 48, 108, 173, 180
Париш 173, 180
Перейра 87, 180
Петерсон 147, 180
Петто И. 17, 108, 134, 173, 180

Петто Р. 17, 48, 108, 134, 173, 180
Пирс 62, 180
Пирсон 48, 180
Плакетт 79, 180
Прейтис 17, 33, 108, 109, 122, 134,
157, 178, 180
Пророк 17, 180
Прошан 17, 33, 147, 174, 175, 179

Рамлау-Хансен 183*
Рао 48, 181
Рид 61, 62, 90, 181
Рейссленд 17, 176
Ричардс 180
Робертсон 183*
Рубин 171, 176
Рубинштейн 108, 177

Сандберг 172, 181
Селф 134, 181
Сенсилсван 60, 174
Серфлинг 175
Сиверс 78, 177
Сил 147, 181
Скрипник 183
Смит Г. 176
Смит П. Г. 17, 108, 180
Снелл 78, 90, 176
Собел 48, 177
Стэлард 33, 181
Стэнли 17, 179
Стюарт 62, 180
Сукхатме 48, 181
Сусарла 61, 181

Тёрнбулл 134, 171, 181
Типпетт 33, 177
Томас 17, 108, 134, 179, 181
Тсай 183
Тсиатис 134, 147, 181

Уилд 157, 182
Уеллнер 61, 178, 183*
Уестмакотт 170, 178
Унддер 33, 182
Уилк 78, 182
Уильямс 147, 178, 182
Уиттемор 175
Уппулури 183*

Фадиа 61, 177
Фареуэлл 136, 177
Фейгл 14, 15, 78, 98, 100, 104, 177
Фейнлейб 17, 182
Фергюсон 61, 177
Фишер Л. 61, 177
Фишер Р. 147
Фишер Р. А. 33, 48, 177
Флеминг 122, 134, 162, 177, 178

Фолкс 33, 177
Фрэйзер 78, 177
Фрэнсис 134, 174

Хадер 144, 179
Хаенсвел 108, 179
Хальперн 134, 171, 179
Хан 171, 181
Харрингтон 122, 134, 162, 177, 178
Хартли 48, 180
Хили 170, 178
Хинкли 41, 48, 87, 176, 177
Ховард 17, 108, 178, 180
Ходжес 177
Холл 61, 178
Холландер 157, 175
Хольт 157, 178
Ху 90, 108, 134, 178, 181
Хугард 33, 178
Хьорс 35, 175

Целен 14, 15, 17, 78, 90, 98, 100, 104
177, 182

Чепурин Е В 183*
Чистякова Н В 183*

Шапиро 17, 181
Шафер 17, 48, 179
Шахани 17, 181
Шикара 33, 177
Шми 171, 181
Шнейдер 17, 181

Эйткин 16, 134, 171
Эландт Джонсон 17, 33, 147, 177
Эпштейн 48, 177
Эфрон 41, 60, 108, 134, 170, 177

Якобсен 183*
Янделл 109, 177

- Алгоритм EM (см. EM-алгоритм)
 гамма-распределение 161, 162
 определение 158, 159
 полиномиальное распределение
 166—169
 примеры 159—162
 самостоятельность 163
 свойства 163, 164
 стандартная ошибка 164, 171, 172
 экспоненциальное распределение
 159—161
- Априорное распределение Дирихле
 59
- Бинарные данные
 логистическая модель 143
 сокращение данных по наработкам
 13, 14, 17
- Байесовский анализ 38, 59—61
- Библиографические замечания 17, 33,
 48, 60, 78, 90, 108, 134, 147, 156,
 170
- Влияние неправильного описания мо-
 дели (effect of misspecification) 88,
 90
- Возрастающая функция интенсивно-
 сти (ВФИ) 28, 33
- Возрастная (bath tub) функция ин-
 тенсивности 35
- Выбор моделей 91
- Выбор со смещенной длиной (length-
 biased sampling) 170
- Гамма-распределение
 EM-алгоритм 161, 162
 обобщенное 27
 определение 24
 моменты и семинварианты 32
 оценки максимального правдопо-
 добия 49, 149
 свойства, обзор 23, 31
- Гомперца-Макегема распределение
 определение 25
 свойства, обзор 23, 31, 35
 модель пропорциональных интен-
 сивностей 75
- модель ускоренных испытаний 86
- Границы
 модель конкурирующих рисков 140
 Фреше 154
- Графические методы (см. также
 К—К график) 58, 61, 89
- Двумерные данные об отказах 150—
 157
- Двухударная модель 24
- Дискриминантный анализ 13, 14
- Зависимость от поясняющих пере-
 менных
 описание модели 54—80
 функция правдоподобия 82
- Задача о двух выборках
 логарифмически ранговый крите-
 рий 103, 108, 109, 123
 критерий вкладов 103
 критерий хи-квадрат 104, 108
 ранговый критерий 121—123
 с экспоненциальным распределени-
 ем 84, 85
- Информационная матрица 39, 97
- Каплана—Мейера оценка (см. Мно-
 жительная оценка)
- Квази-независимость 140, 147
- К—К график 67, 78
- Ковариаты, зависящие от времени
 воздействия с переключением 18,
 65, 112, 113, 126—133
 проверка модели 73, 74, 110, 111
 функция правдоподобия 116—118
- Коэффициент согласия 155
- Кратковременный эффект (transient
 effect) 77, 78, 111, 169, 170
- Критерий Вальда 39
- Критерий Вилкоксона (см. также
 Критерий Гехана) 122, 123, 134,
 135, 136, 155
- Критерий вкладов (score test) 40, 97,
 103, 116, 117
- Критерий Гехана (см. также Крите-
 рий Вилкоксона) 122, 131, 155

- Критерий отношения правдоподобия
 доверительная область 39, 43, 53,
 54
 множитель Барлетта 39
 определение 43
 преимущества 40
- Критерий перестановок 95, 136
- Лечение 78
- Логарифмически линейная модель 29,
 67, 71, 78, 84, 86, 91
- Логарифмически логистическое рас-
 пределение
 модель пропорциональных интен-
 сивностей 75
 модель пропорциональных шансов
 79
 модель ускоренных испытаний 71,
 80, 86, 87
 моменты и семинварианты 32, 35
 определение 26, 27
 свойства, обзор 23, 31
- Логарифмически нормальное распре-
 деление
 моменты и семинварианты 26
 определение 26
 свойства, обзор 23, 26, 31
- Логарифмически ранговый критерий
 (см. Задача о двух выборках)
- Логистическая модель (см. также
 Логарифмически логистическое
 распределение) 91, 100, 103, 109
- Маргинальные распределения
 критерий совпадения в двумерных
 данных 156
- Маркированный отказ 137, 145, 147
- Мартингал 61, 134
- Масштаб времени, выбор 11, 136
- Метод наименьших квадратов 70, 84,
 86, 87
- Многомерные данные об отказах
 150—157
- Множество риска
 выборочный метод 125, 126
 определение 91
- Множитель Барлетта 39, 41, 49
- Множительный интеграл 21
- Множительная оценка (product-li-
 mit estimator)
 библиографические замечания 61
 дисперсия 53
 несколько типов отказа 142
 обобщенная 106, 108
 определение 50, 51
 самостоятельность 167
 функция правдоподобия 51
- Модель Маршалла—Олкина 151, 152
- Модель конкурирующих рисков
 (competing risks)
 библиографические замечания 147
 для модели пропорциональных ин-
 тенсивностей 142—145
 зависимость 141
 множительная оценка 142
 определение 139
 связь с цензурированием 141
 функция правдоподобия 141, 142
- Модель пропорциональных интенсив-
 ностей (proportional hazards)
 для распределения Вейбулла 73
 модель для зависимости 72, 79
 модель пропорциональных шансов
 79
 несколько типов отказа 137, 143—
 145
 связь с моделью ускоренных испы-
 таний 72, 73
 семейство распределений 23, 44
 функция правдоподобия 91—98
- Наблюдения с решающим значением
 (influential observations) 14, 26,
 84, 89
- Наблюденная информационная мат-
 рица 97
- Наработка до отказа (failure time)
 ограничения 9—11
 определение 9—11
- Наработка (время жизни — survival
 time; см. Наработка до отказа)
- Начало отсчета времени 10, 11, 112
- Недолговечность (frailty; см. также
 сложное экспоненциальное распре-
 деление) 33
- Независимость, критерий для дву-
 мерных наблюдений 155
- Немультипликативные модели функ-
 ции интенсивности 75, 76
- Неполная гамма-функция 17, 24, 161,
 162
- Несколько типов отказа 70, 71, 142,
 150—157
- Нормированное отношение смертно-
 сти (standardized mortality ratio)
 44, 48
- Обобщенное F-распределение
 определение 27, 33, 34
 свойства, обзор 23
- Обратное гауссовское распределение
 27, 28, 33
- Остаток обобщенный 89, 90, 107, 108
- Оценивание базовой (baseline) функ-
 ции интенсивности 106, 107
- Пакеты программ
 BMDP 6, 16, 183*
 GLIM 16

- SAS 16
NAG 17
- Перекрестные (cross-sectional) данные 170, 171
- Подчиненная статистика (ancillary statistic) 84, 86
- Поясняющая переменная (explanatory variable)
типы 64—66
зависящая от времени 65, 68—70, 75, 85, 110—136
- Приложения
испытания на надежность в промышленности 9, 11, 12, 67, 68, 144, 145
канцерогенез у животных 173
клинические исследования 9, 10, 12, 14, 17
лейкемия 9, 14, 15, 42, 43, 46, 52, 98, 160
обследование семей 151, 157
профессиональные заболевания 10—12, 17
профилактическое обследование (screening) 10, 17
психология 9
физика 9
эконометрика 9
- Принцип пропущенной информации (см. EM-алгоритм)
- Полном Латгера 23, 26
- Полиномиальное распределение 167, 168
- Пуассоновский процесс (см. Экспоненциальное распределение) 49
- Ранговый критерий 92, 93, 101, 123
- Распределение Вейбулла
модель конкурирующих рисков 142
модель наименьших квадратов 86
модель пропорциональных интенсивностей 29
модель ускоренных испытаний 71, 86, 87
моменты и семинварианты 32
несколько типов отказа 147
определение 24
подбор параметров модели 16
распределение экстремума 24, 34, 35
свойства, обзор 23, 31
связь с распределением Гумбеля 35
связь с экспоненциальным распределением 24
функция правдоподобия 36, 45, 46, 49
- Распределение параметра (см. Сложное экспоненциальное распределение)
- Распределение Пуассона
доверительные интервалы для среднего 44
- Семейство распределений Лемана (см. также Модель пропорциональных интенсивностей) 29, 43, 72
- Самостоятельность (см. EM-алгоритм) 162
- Сглаживание 60, 154
- Семейство распределений с параметром масштаба (см. также Модель ускоренных испытаний) 23, 28, 29
- Семинварианты
для различения распределений 31, 32
- Слабая сходимость 61
- Сложное (compound) распределение
двумерное 154
экспоненциальное 23, 25, 31, 34
- Смещенное начало отсчета 28, 76
- Совпадения (ties) 100—103
- Сокращенная выборочная оценка (reduced sample estimator) 12
- Составное (comprehensive) семейство распределений 27
- Состояние здоровья (quality of life) 146
- Сплайны 60
- Страховая оценка (actuarial estimator) 55—58
- Структурное оценивание 78
- Суммарная параболка (totaltime at risk) 41
- Таблица времен жизни (наработок — life table; см. также Множительная оценка) 50
- Точечные процессы 33
- Убывающая функция интенсивности (УФИ) 29, 33
- Усечение, слева 11, 170, 171
- Фреше границы (см. Границы Фреше) 154
- Функциональное уравнение 72, 151
- Функция влияния (influence function) 61, 89
- Функция интенсивности (hazard)
библиографические замечания 33
возрастная 35
двумерные моменты отказов 150, 151
логарифмически линейная модель 96—98
множительная оценка 50, 51

- несколько типов отказа 138, 139, 150, 151
 применение 21
 функция надежности 19
 функция правдоподобия 36—38
 функция риска 20, 21, 31, 37, 48, 53, 54, 61, 106
- Функция интенсивности, зависящая от времени (см. Функция интенсивности) (age-specific failure rate)
- Функция надежности, определение (survivor function) 19
- Функция правдоподобия для цензурированных данных 36, 37
 общая теория 38—41
 функция интенсивности 36, 37
- Функция риска (integrated hazard) (см. Функция интенсивности)
- Цензурирование**
 потенциальный момент 13
 отношение правдоподобия 37, 38
 слева 168
 случайное 13
 справа 12, 13
 типа I, 13
- Частная функция правдоподобия** 116—118
- Эволюционная ковариата** 113, 114
- Экспоненциальное распределение** (см. также Сложное экспоненциальное распределение)
 библиографические замечания 33
- двумерная 151, 152, 155, 156
 для изучения зависимости, основная модель 82—85
 доверительные интервалы 41—42
 задача о двух выборках 84—85
 информационная матрица 83
 критерий согласия 41
 множитель Барлетта 23
 применение EM-алгоритма 159—161
 свойства, обзор 22, 23, 24, 31
 связь с распределением Вейбулла 24
 точные результаты 83, 84
 усечение слева 169
 функция правдоподобия 37, 41—44
 функция интенсивности 20
- Экспоненциальное семейство распределений**
 EM-алгоритм 158, 165, 166
 искривленное 41
 обратное гауссовское, пример 27
- Экспоненциальные порядковые статистики**
 логарифмически ранговый критерий 106
 функция риска 58, 107
- Экстремальные значения** 24, 34, 125
- Эмпирический байесовский метод** 61
- Эффективность**
 модель наименьших квадратов 84, 86
 потери при частной функции правдоподобия 114—166
- Ядерная оценка** 63

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	8
Глава 1. Обзор анализа данных типа времени жизни	9
Глава 2. Распределения моментов отказов	19
Глава 3. Параметрический статистический анализ: одна выборка	36
Глава 4. Непараметрические методы для одной выборки	50
Глава 5. Зависимость от поясняющих переменных: описание модели	64
Глава 6. Полностью параметрический анализ зависимости	81
Глава 7. Модель пропорциональных интенсивностей	91
Глава 8. Зависящие от времени ковариаты	110
Глава 9. Несколько типов отказов	137
Глава 10. Двумерные функции надежности	150
Глава 11. Самостоятельность и EM-алгоритм	158
Литература	174
Дополнительная литература	183
Именной указатель	184
Предметный указатель	187