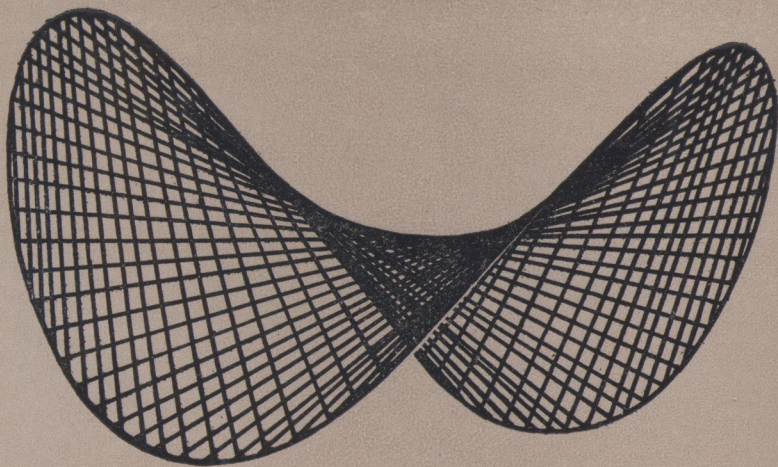




МИР
ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ
НАУКИ

А.А. Гусак, Г.М. Гусак

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ



А. А. ГУСАК, Г. М. ГУСАК

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1985

ББК 22.173
Г 96
УДК 612.644

Рецензент: *А. П. Рябушко*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского института механизации сельского хозяйства



Scan AAW

Г $\frac{1702030000-026}{М 304(05)-85}$ 116—85

© Издательство
«Вышэйшая школа», 1985

ОТ АВТОРОВ

Эта книга адресована всем любителям математики. Знакомство с ней позволит читателю значительно расширить свои знания о линиях и поверхностях, почерпнутые из школьного курса математики.

Книга состоит из семи разделов. В первом из них вводится понятие уравнения линии на плоскости, приводятся примеры составления таких уравнений в декартовых прямоугольных координатах, в полярных координатах, примеры параметрических уравнений линий.

Второй раздел посвящен алгебраическим линиям второго порядка. Эти линии вводятся как конические сечения, к которым относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола. Рассматриваются канонические (простейшие) уравнения этих линий.

В двух последующих разделах речь идет о некоторых замечательных алгебраических линиях третьего, четвертого и высших порядков. Здесь рассмотрены следующие линии: декартов лист, циссоида, строфоида, версьера, лемниската Бернулли, овалы Кассини, улитка Паскаля, кардиоида, астроида и др.

В пятом разделе читатель узнает о некоторых трансцендентных линиях: спирали Архимеда, циклоиде, алгебраических и логарифмических спиралях, квадратрисе, трактрисе, цепной линии.

Шестой раздел посвящен поверхностям и линиям в пространстве. Здесь введены понятие уравнения поверхности, рассматриваются параметрические уравнения поверхности, параметрические уравнения линии в простран-

стве. Приведены различные виды уравнений прямой в пространстве, некоторые виды уравнения плоскости, уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной координатной оси, канонические уравнения цилиндров второго порядка, уравнение поверхности вращения. Рассматриваются поверхности вращения второго порядка, поверхности второго порядка и их канонические уравнения, прямолинейные образующие этих поверхностей, а также некоторые другие поверхности.

В первых двух разделах содержатся примеры и задачи для самостоятельного решения.

В третьем-шестом разделах приведены краткие исторические сведения об ученых-математиках, изучавших свойства соответствующих линий.

В заключительном разделе сообщаются некоторые факты из истории развития учения о линиях и поверхностях, касающиеся теории конических сечений в древности, элементов аналитической геометрии в трудах Ферма и Декарта.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту книги доктору физико-математических наук, профессору А. П. Рябушко за критические замечания и полезные советы.

Все отзывы на книгу просим присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

Во многих видах практической деятельности в процессе познания явлений природы человек постоянно встречается с линиями и поверхностями самой различной формы. Траектория полета космического корабля, искусственного спутника Земли, снаряда в воздухе, след резца на металле, контуры художественного узора, форма провисшего троса и многое другое — это все примеры различных линий. Тонкие оболочки, поверхности тел, цистерны, обшивки самолетов, чехлы дают представление о разнообразии поверхностей.

Разумеется, след, оставленный резцом на металле, не есть математическая линия. Цистерна, даже с тонкими стенками, не является математической поверхностью. Однако в первом приближении, достаточном для исследования многих вопросов, реальные объекты удается изображать математическими линиями и поверхностями.

Вводя математическое понятие линии путем отвлечения от всех обстоятельств, ограничивающих возможность уменьшения толщины реальной нити, линию представляют как абсолютно тонкую нить без толщины. В абстрактном понятии линии удается отразить вполне реальные общие свойства предметов, сохраняющиеся при уменьшении их толщины и ширины по сравнению с их длиной.

Аналогично приходят к математическому понятию поверхности, отвлекаясь от ограниченности возможного уменьшения толщины оболочек и ограниченности возможного уточнения положения границы тел.

Отметим, что многие линии и поверхности имеют

важные применения в науке, технике, практической деятельности. Известно, что планеты обращаются вокруг Солнца примерно по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Искусственные спутники Земли и космические корабли движутся вокруг нашей планеты также примерно по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Земля. На одном замечательном свойстве параболы основано устройство прожекторов и автомобильных фар, которые имеют форму параболоидов вращения.

Строгие математические определения линии и поверхности не являются простыми, эти определения вводятся в курсе топологии — важной области современной математики. Мы не приводим здесь определения линии и поверхности. Будем исходить из наглядного представления о линиях и поверхностях. Линии служат геометрическими образами функций, с простейшими примерами которых знакомятся в средней школе. Линию представляет траектория движущейся точки. Можно наглядно представить, в частности, поверхность, полученную вращением линии вокруг некоторой прямой. Некоторые линии и поверхности изучаются в курсе аналитической геометрии с помощью метода координат, который предоставил возможность задания разнообразных линий и поверхностей их уравнениями.

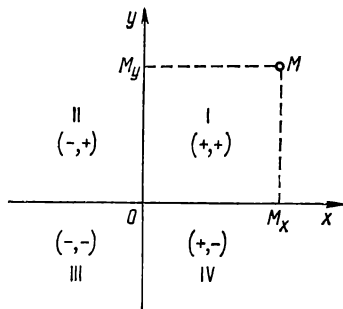
УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Будем пользоваться наглядным представлением о линии, известным из курса математики средней школы. Чтобы ввести понятие уравнения линии на плоскости, необходимо напомнить некоторые другие понятия и формулы, в частности понятие координат точки, формулу для расстояния между двумя точками.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, зафиксируем на каждой из них положительное направление, отмечая его на чертеже стрелкой (рис. 1). Точку пересечения прямых обозначим буквой O и назовем *началом координат*, а прямые — *координатными осями*: осью Ox (или осью абсцисс) и осью Oy (или осью ординат).

Каждой точке M плоскости поставим в соответствие упорядоченную пару чисел — ее координаты: абсциссу x и ординату y по следующему правилу. Через точку M



Р и с. 1

проведем прямую, параллельную оси ординат, до пересечения с осью абсцисс в некоторой точке M_x . Под абсциссой точки M будем понимать число x , по модулю равное расстоянию от O до M_x , положительное, если M_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательное, если M_x принадлежит отрицательной полуоси Ox . Если точка M_x совпадает с точкой O , то полагаем $x=0$. Аналогично определяется ордината y точки M .

Другими словами, *прямоугольными декартовыми координатами* точки M называют числа x, y , определяемые формулами

$$x = OM_x; \quad y = OM_y, \quad (1)$$

где OM_x, OM_y — величины направленных отрезков $\overline{OM_x}, \overline{OM_y}$ координатных осей. Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет координаты x, y .

Напомним, что отрезок, ограниченный точками A и B , называют *направленным отрезком* или *вектором*, если указано, какая из точек является первой, какая — второй. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначают через \overline{AB} . *Величиной направленного отрезка оси* называют его длину, взятую со знаком плюс, когда направление отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком минус — в противном случае. Величину направленного отрезка \overline{AB} обозначают через AB , а его длину — через $|AB|$.

З а м е ч а н и е. Первая из формул (1) определяет координату точки M_x на оси Ox , а вторая — координату точки M_y на оси Oy . Если на оси абсцисс даны две точки $M_1(x_1), M_2(x_2)$, то величина M_1M_2 направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ и его длина вычисляются по формулам

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \quad |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

Отметим, что для точек, лежащих на оси Oy , $x=0$; для точек, лежащих на оси Ox , $y=0$; начало координат

нат — точка O — имеет координаты $x=0$, $y=0$. Координатные оси разбивают на четыре части множество тех точек плоскости, которые не лежат на осях. Каждую из этих частей называют *четвертью* или *квадрантом*. В каждом квадранте (I, II, III, IV) знаки обеих координат сохраняются; они указаны на рис. 1.

Каждой точке M плоскости Oxy поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$, определяемая формулами (1). С другой стороны, если дана упорядоченная пара чисел $(x; y)$, то на плоскости Oxy можно построить единственную точку, для которой x и y будут прямоугольными декартовыми координатами.

Если $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ — две заданные точки плоскости, то расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

В частном случае, когда точка M_1 совпадает с началом координат,

$$\rho(0; M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \quad (4)$$

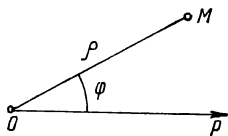
ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть дана некоторая плоскость. Фиксируем на этой плоскости точку, обозначим ее буквой O и назовем *полусом*. Луч $[OP)$, исходящий из полюса, назовем *полярной осью*. Выберем масштаб для измерения длин и условимся, какие повороты вокруг точки O будем считать положительными; обычно считают положительными те повороты, которые совершаются «против часовой стрелки».

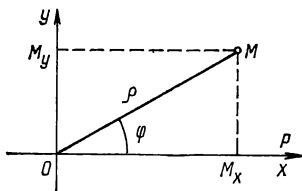
Рассмотрим произвольную точку M заданной плоскости, обозначим через ρ ее расстояние до полюса и назовем *полярным радиусом* (рис. 2); угол, на который

нужно повернуть полярную ось $[OP)$, чтобы она совпала с $[OM)$, обозначим через φ и назовем *полярным углом*.

Полярными координатами точки M называются ее полярный радиус ρ и полярный угол φ . Каждой точке плоскости соответствует вполне определенное значение



Р и с. 2



Р и с. 3

$\rho \geq 0$. Значение φ для точек, отличных от полюса, определено с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число. Для полюса $\rho=0$, а значение φ не определено. Чтобы каждая точка плоскости получила вполне определенные значения полярных координат, достаточно считать, что $0 \leq \varphi < 2\pi$, а в полюсе $\varphi=0$. Указанные значения φ назовем *главными*.

Наряду с введенной полярной системой координат рассмотрим прямоугольную декартову систему, такую, что полюс совпадает с началом, а полярная ось — с положительной полуосью Ox (рис. 3). Если M — произвольная точка плоскости, $(x; y)$ — ее декартовы, а $(\rho; \varphi)$ — полярные координаты, то, очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (5)$$

Формулы (5) выражают прямоугольные декартовы координаты точки плоскости через ее полярные координаты.

Полярные координаты точки выражаются через ее декартовы координаты формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6)$$

которые получены из формул (5). Чтобы получить первую из формул (6), достаточно возвести в квадрат обе формулы (5) и почленно сложить. Первая из формул (6) имеет простой геометрический смысл; она выражает теорему Пифагора для треугольника $ОММ_x$.

З а м е ч а н и е. Иногда рассматривают обобщенные полярные координаты ρ' , φ' , определяемые формулами $\rho' = -\rho$, $\varphi' = \varphi + \pi$. Эти формулы означают, что если полярный радиус отрицателен, то полярный угол φ отсчитывается от полярной оси до луча, имеющего направление, противоположное лучу $ОМ$. Таким образом, для любой точки $М$ плоскости можно рассматривать как обычные полярные координаты ρ и φ ($\rho > 0$), так и обобщенные ρ' , φ' . Отметим, что формулы (5) остаются справедливыми и для случая обобщенных полярных координат.

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ В ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Под *линией (кривой)* на плоскости понимают некоторое множество точек, обладающих определенным только им присущим свойством. Линия (кривая) определяется так же, как траектория точки, характер движения которой обусловлен некоторым образом.

Уравнением линии относительно фиксированной системы координат называют такое уравнение между двумя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной линии.

Уравнение линии в декартовых прямоугольных координатах в общем виде записывается так:

$$F(x; y) = 0,$$

где правая часть $F(x; y)$ — выражение с двумя переменными.

Из определения уравнения линии следует, что если при подстановке координат точки в данное уравнение получается тождество, то точка лежит на соответствующей линии, если тождество не получается, то точка не лежит на данной линии.

Чтобы составить уравнение линии как некоторого множества точек плоскости, необходимо: а) взять произвольную точку линии с текущими координатами x и y ; б) записать общее свойство точек данного множества в виде равенства; в) выразить входящие в это равенство величины через текущие координаты x , y и постоянные, характеризующие данную линию.

Примеры

1. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4; 3)$ и $M_2(2; 5)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка данного геометрического места. По условию $|M_1M| = |M_2M|$. С другой стороны, по формуле расстояния между двумя точками получаем: $|M_1M| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$; $|M_2M| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$. Подставляя эти выражения в равенство $|M_1M| = |M_2M|$, находим уравнение данного множества точек: $\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$. Упростим его.

Возведем в квадрат обе части уравнения и раскроем скобки в подкоренных выражениях: $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10x + 25$. Переносим все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 4, получаем $3x + y - 1 = 0$. Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что множеством точек, указанным в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку M_1M_2 и проходящая через его середину).

2. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a; b)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка данной окружности. По определению окружности (как множества точек, равноудаленных от данной точки) для любой ее точки имеем $\rho(M; C) = R$. Выразая расстояние между точками M и C по формуле $\rho(M; C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ и подставляя его в левую часть данного равенства, получаем уравнение $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ и записываем его так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (7)$$

Если точка $N(x; y)$ не принадлежит окружности, то $\rho(N; C) < R$ (когда N лежит в круге радиуса R с центром в точке C) или $\rho(N; C) > R$ (когда N лежит вне указанного круга). Следовательно, для точки N выполняется одно из неравенств: $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$ или $(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$, т. е. координаты точки N уравнению (7) не удовлетворяют.

Если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют уравнению $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ и равенству $\rho(C; M) = R$, т. е. точка лежит на окружности радиуса R с центром в точке $C(a; b)$.

Итак, уравнение (7) является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a; b)$.

З а м е ч а н и е 1. Если точка C совпадает с началом координат, то уравнение (7) принимает вид $x^2 + y^2 = R^2$.

З а м е ч а н и е 2. Если точка $N(x; y)$ лежит внутри круга с центром в начале координат, то ее координаты удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < R^2$; если вне указанного круга, то неравенству $x^2 + y^2 > R^2$.

3. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(4; 0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(1; 0)$. Найти уравнение траектории движения точки M .

Текущие координаты точки M в прямоугольной декартовой системе координат обозначим через x, y . По условию $|MA| = 2|MB|$. Выразим длины отрезков $|MA|$ и $|MB|$ через координаты соответствующих точек с помощью формулы (3): $|MA| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$; $|MB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Подставляя эти выражения в равенство $|MA| = 2|MB|$, получаем уравнение траектории движения точки M : $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Упростим это уравнение, для чего возведем в квадрат обе части и приведем подобные члены: $(x-4)^2 + y^2 = 4((x-1)^2 + y^2)$; $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2)$; $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$; $12 = 3x^2 + 3y^2$; $x^2 + y^2 = 4$.

Итак, траекторией движения точки M является окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат.

Задачи

1. Составьте уравнение множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $A(2; 4)$.

2. Составьте уравнение множества точек, равноудаленных от двух точек $A(-1; 2)$, $B(7; 5)$. Принадлежат ли этому множеству точки $C(2; 1)$, $D(5; -6)$, $E(3; 3,5)$?

3. Составьте уравнение множества точек, удаленных от начала координат на 5 единиц. Лежат ли на этой линии точки $A(1; 6)$, $B(-2; -3)$, $C(3; 4)$?

4. Составьте уравнение множества точек, удаленных от точки $M(3; -2)$ на 10 единиц. Лежат ли на этой линии точки $A(2; 5)$, $B(6; 8)$, $C(-5; 4)$?

5. Напишите уравнение линии, по которой движется точка M , оставаясь втрое дальше от оси Ox , чем от оси Oy . Лежат ли на этой линии точки $P(1; 3)$, $Q(2; 5)$, $R(-2; 6)$?

6. Найдите траекторию точки M , которая движется так, что ее расстояние от точки $P(6; 0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $Q(2/3; 0)$.

7. Найдите траекторию точки M , которая движется так, что ее расстояние от точки $P(4; 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $Q(16; 0)$.

8. Составьте уравнение множества точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух точек $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$ есть величина постоянная, равная $2b^2 (b^2 > a^2)$.

9. Составьте уравнение множества точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний до двух точек $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$ есть величина постоянная, равная $4c$.

10. Составьте уравнение множества точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $B(0; 2)$.

11. Даны точка $A(3; 0)$ и прямая, параллельная оси Oy и отсекающая на положительной полуоси Ox отрезок, длина которого равна $25/3$. Составьте уравнение множества точек, для которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой равно $3/5$.

12. Даны точка $A(5; 0)$ и прямая, параллельная оси Oy и отсекающая на оси Ox отрезок, величина которого равна $9/5$. Составьте уравнение множества точек, для каждой из которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой равно $5/3$.

13. Составьте уравнение множества точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух точек $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ есть постоянная величина, равная $c (c \neq 1)$.

14. Прямоугольный треугольник с катетами a и b перемещается

так, что вершины его острых углов скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Составьте уравнение линии, описываемой вершиной прямого угла

15. В треугольниках с постоянной площадью S , ограниченных осями координат и пересекающей их прямой, опускаются перпендикуляры из вершин прямого угла на гипотенузу. Составьте уравнение множества оснований этих перпендикуляров.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямую линию на плоскости относительно системы прямоугольных декартовых координат можно задать различными способами. Прямая однозначно определяется своей точкой и перпендикулярным ей вектором; двумя точками и т. д. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

Докажем, что относительно декартовых координат любая прямая на плоскости определяется уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad (8)$$

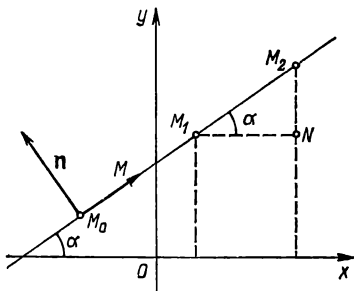


Рис. 4

в котором $A^2 + B^2 \neq 0$, т. е. A и B одновременно не равны нулю. Обратно, всякое уравнение вида (8), где $A^2 + B^2 \neq 0$, x , y — декартовы координаты, определяет прямую на плоскости.

Пусть дана прямая относительно системы прямоугольных декартовых координат (рис. 4). Зафиксируем ее точку $M_0(x_0; y_0)$ и ненулевой вектор $\mathbf{n} = (A; B)$, перпендикулярный к этой прямой. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$ данной прямой и вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,$

$y - y_0$). Так как векторы \mathbf{n} и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (9)$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{n} = (A; B)$. Уравнение (9) можно представить в виде $Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$, т. е. в виде (8). Итак, всякая прямая на плоскости определяется уравнением (8), т. е. уравнением первой степени относительно декартовых координат x и y .

Докажем обратное: всякое уравнение (8), в котором x, y — декартовы координаты, определяет прямую на плоскости. Действительно, пусть $(x_0; y_0)$ — решение этого уравнения, т. е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычтем почленно это тождество из уравнения (8) и получим уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, которое определяет прямую (см. (9)). Следовательно, уравнение (8) также определяет прямую. Уравнение (8) называют *общим уравнением прямой*.

Рассмотрим частные случаи уравнения (8).

1. $A = 0$. Уравнение (8) принимает вид $By + C = 0$. Так как $B \neq 0$ (в силу условия $A^2 + B^2 \neq 0$), то $y = -C/B$, $y = b$, где $b = -C/B$. Уравнение $y = b$ определяет прямую, параллельную оси Ox (все точки прямой имеют одну и ту же ординату). Если и $C = 0$, то $y = 0$ (прямая совпадает с осью Ox).

2. $B = 0$. Поскольку в этом случае $A \neq 0$, то уравнение $Ax + C = 0$ приводится к виду $x = -C/A$ или $x = a$, где $a = -C/A$. Уравнение $x = a$ определяет прямую, параллельную оси Oy . Если и $C = 0$, то $x = 0$ (прямая совпадает с осью Oy).

3. $C = 0$. Уравнение (8) принимает вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат (значения $x = 0, y = 0$ удовлетворяют уравнению).

Если $B \neq 0$, то уравнение (8) можно привести к виду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ или $y = kx + b$ ($k = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$).

Выясним геометрический смысл коэффициентов k и b уравнения

$$y = kx + b. \quad (10)$$

Если $x=0$, то $y=b$, т. е. b — ордината точки Q пересечения прямой с осью Oy ($b=OQ$ — величина направленного отрезка \overline{OQ} , отсекаемого на оси ординат). На прямой (10) выберем две различные точки: $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. Имеем: $y_1 = kx_1 + b$; $y_2 = kx_2 + b$; $y_2 - y_1 = kx_2 - kx_1$; $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (11)$$

Правая часть формулы (11) выражает тангенс угла α (рис. 4), образованного данной прямой с осью Ox , т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha$. Постоянную k в уравнении (10) называют *угловым коэффициентом* прямой, а само это уравнение — *уравнением с угловым коэффициентом*.

Составим уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. Будем считать, что $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$. Пусть M — произвольная точка данной прямой. Введем в рассмотрение два вектора: $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$. Эти векторы коллинеарны, поэтому $\overline{M_1M} = \lambda \overline{M_1M_2}$, откуда $x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$,

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \lambda; \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda; \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) является искомым. Если $y_2 = y_1$, то от-

резок M_1M_2 параллелен оси Ox ; уравнение прямой имеет вид $y=y_1$. Это уравнение можно получить из (12) приравняв нулю числителя (знаменатель равен нулю). Если $x_2=x_1$, то уравнение прямой имеет вид $x=x_1$.

Обозначая буквой t равные отношения в равенстве (12), получаем отсюда *параметрические уравнения прямой*:

$$x=x_1+(x_2-x_1)t; \quad y=y_1+(y_2-y_1)t.$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИЙ

Пусть даны две линии, определяемые уравнениями:

$$F(x; y)=0; \quad (13)$$

$$\Phi(x; y)=0. \quad (14)$$

Требуется найти точку пересечения этих линий.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ пересечения двух данных линий принадлежит первой и второй линиям, поэтому ее координаты удовлетворяют как уравнению (13), так и уравнению (14), т. е. являются решениями системы уравнений:

$$F(x; y)=0; \quad \Phi(x; y)=0. \quad (15)$$

С другой стороны, если координаты x_1, y_1 некоторой точки N_1 удовлетворяют системе (15), то точка $N_1(x_1; y_1)$ лежит на линии (13) и на линии (14), т. е. является точкой их пересечения.

Следовательно, чтобы найти точки пересечения линий, необходимо решить систему их уравнений. Число действительных решений равно числу точек пересечения. Если система (15) не имеет действительных решений, то линии (13) и (14) не пересекаются.

Примеры

4. Найти точки пересечения линий $x^2+y^2=10$; $x+y-4=0$.

Решим данную систему уравнений. Из последнего уравнения определяем $y=-x+4$ и подставляем в первое уравнение: $x^2+(-x+4)^2=$

$=10$, $2x^2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Поставив эти значения в уравнение $y=-x+4$, найдем: $y_1=3$, $y_2=1$. Следовательно, получены две точки пересечения $M(1; 3)$, $N(3; 1)$.

5. Найти точки пересечения окружности $(x-5)^2+(y-3)^2=25$ с координатными осями.

Найдем точки пересечения окружности с осью Ox , для чего решим систему уравнений (15), которая в данном случае принимает вид

$$(x-5)^2+(y-3)^2=25; y=0.$$

Подставляя в первое уравнение значение $y=0$, получаем уравнение $x^2-10x+9=0$, из которого находим $x_1=1$, $x_2=9$.

Следовательно, окружность пересекает ось Ox в двух точках $M_1(1; 0)$, $M_2(9; 0)$. Решив систему уравнений

$$(x-5)^2+(y-3)^2=25; x=0,$$

найдем, что окружность имеет с осью Oy общую точку $N(0; 3)$. В этой точке окружность касается оси Oy (две точки пересечения сливаются в одну).

6. Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2+(y-6)^2=25$, $(x+2)^2+(y-6)^2=32$.

Чтобы найти точки пересечения данных окружностей, необходимо решить систему их уравнений. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему уравнений

$$x^2+y^2-10x-12y+36=0; x^2+y^2+4x-12y+8=0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $-14x+28=0$, откуда $x=2$. Второе уравнение системы при $x=2$ сводится к квадратному уравнению относительно y : $y^2-12y+20=0$. Решив последнее уравнение, найдем $y_1=2$, $y_2=10$. Следовательно, данные окружности пересекаются в двух точках: $M_1(2; 2)$, $M_2(2; 10)$.

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах в общем виде можно записать так:

$$F(\rho; \varphi)=0,$$

где $F(\rho; \varphi)$ — выражение с переменными ρ и φ (ρ , φ — полярные координаты). Если это уравнение разрешимо

относительно ρ , то его можно представить в виде $\rho = \rho(\varphi)$.

Приведем примеры составления уравнений линий в полярных координатах.

Примеры

7. Составить уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей от нее отрезок, длина которого равна a .

Обозначим буквой A точку пересечения данной прямой с полярной осью OP (рис. 5). Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка данной

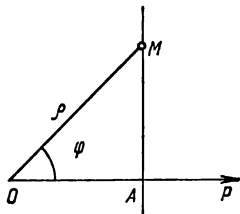


Рис. 5

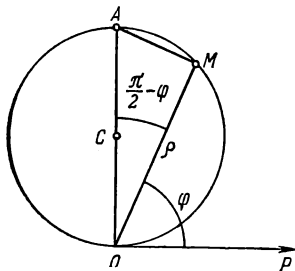


Рис. 6

прямой. Из прямоугольного треугольника OAM находим, что $\rho \cos \varphi = a$. Полученное уравнение является искомым; ему удовлетворяют координаты любой точки данной прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой прямой.

8. Составить уравнение окружности радиуса a , касающейся полярной оси в полюсе (рис. 6), центр которой расположен выше полярной оси.

Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка окружности; OA — диаметр окружности, равный $2a$. Так как в треугольнике OAM угол при вершине M прямой, угол при вершине O равен $\pi/2 - \varphi$, то $2a \cos(\pi/2 - \varphi) = \rho$ или $\rho = 2a \sin \varphi$.

Полученное уравнение является искомым, поскольку ему удовлетворяют координаты любой точки данной окружности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой окружности.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно получить из уравнения данной окружности в прямоугольных декартовых координатах и формул, связывающих прямоугольные координаты с полярными. Действительно, если начало прямоугольной системы координат поместить в полюсе, ось Ox направить по полярной оси, то $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, а уравнение окружности запишется так: $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. Подставляя в это уравнение выражения для x и y , получаем $\rho = 2a \sin \varphi$.

Задачи

16. Составьте уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей на ней отрезок, длина которого равна 5.

17. Луч выходит из полюса под углом $\pi/6$ к полярной оси. Составьте уравнение этого луча в полярных координатах.

18. Прямая проходит через полюс и наклонена к полярной оси под углом 135° . Составьте уравнение прямой в полярных координатах.

19. В полярных координатах составьте уравнение множества точек, расстояния которых до полярной оси равны 3.

20. Составьте уравнение окружности радиуса R , касающейся полярной оси в полюсе, центр которой расположен ниже полярной оси.

21. Окружность радиуса $R = 4$ касается полярной оси в полюсе. Составьте уравнение окружности в полярных координатах.

22. В полярных координатах составьте уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(\rho_0; \varphi_0)$.

23. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = 9$; 2) $\varphi = \pi/4$; 3) $\rho = 6/\cos \varphi$; 4) $\rho = 3/\sin \varphi$.

24. Напишите в полярных координатах уравнения линий: 1) $x^2 + y^2 = R^2$; 2) $x - y = 0$; 3) $x + y = 0$; 4) $x^2 - y^2 = R^2$; 5) $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$.

25. Напишите в декартовых координатах уравнения линий: 1) $\rho \cos \varphi = a$; 2) $\rho = 2a \cos \varphi$; 3) $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$; 4) $\rho = a(1 \pm \sin \varphi)/\cos \varphi$; 5) $\rho = 2a/(1 + \cos \varphi)$; 6) $\rho = 2a/\sin 2\varphi$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

Пусть на плоскости задана некоторая линия относительно декартовых прямоугольных координат. Коорди-

наты точек линии часто можно выразить через некоторую новую переменную (параметр) t :

$$x = \varphi_1(t); y = \varphi_2(t), \quad (16)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — выражения с переменной t .

Уравнения (16) называют *параметрическими уравнениями линии*, если при изменении t в конечном или бесконечном промежутке формулы (16) дают координаты любой точки данной линии и не дают координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Если линия задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то ее параметрические уравнения можно записать так:

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi; y = \rho(\varphi) \sin \varphi. \quad (17)$$

В уравнениях (17) роль параметра играет полярный угол φ .

Примеры

9. Составить параметрическое уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a; b)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 7). Обозначим через P и Q основания перпендикуляров, опущенных из точки M на координатные оси Ox и Oy соответственно, а через L и N — точки пересечения прямых, проходящих через точку C и параллельных координатным осям, с указанными перпендикулярами. Величину угла, образуемого отрезком CM с положительным направ-

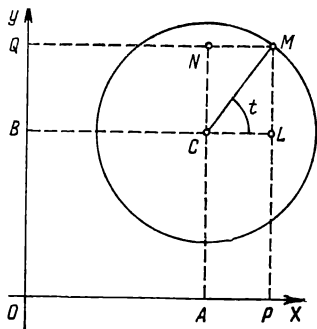
лением оси Ox , обозначим буквой t , т. е. $t = \widehat{MCL}$. Поскольку $x = OP = OA + AP$, $y = OQ = OB + BQ$ и $OA = a$, $AP = CL = R \cos t$, $OB = b$, $BQ = CN = R \sin t$, то $x = a + R \cos t$, $y = b + R \sin t$. Таким образом, получены следующие параметрические уравнения данной окружности:

$$x = a + R \cos t; y = b + R \sin t,$$

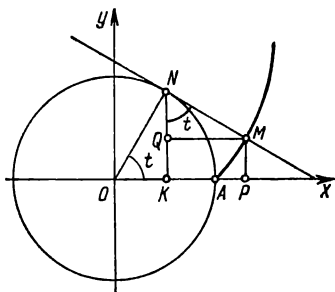
где $0 \leq t < 2\pi$.

З а м е ч а н и е 1. Исключив из этих уравнений параметр t , получим уравнение (7) окружности в декартовых координатах. Действительно, полученные параметрические уравнения можно записать так: $x - a = R \cos t$, $y - b = R \sin t$, откуда $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$.

З а м е ч а н и е 2. Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат имеют вид $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, где $0 \leq t < 2\pi$. Действительно, это частный случай полученных уравнений ($a=b=0$).



Р и с. 7



Р и с. 8

10. По окружности $x^2+y^2=R^2$ без скольжения катится прямая, которая в начальный момент времени касалась окружности в точке $A(R; 0)$. Траекторию данной точки прямой называют *разверткой окружности*. Составьте параметрические уравнения развертки окружности.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка указанной траектории. Предположим, в начальном положении она совпадала с точкой $A(R; 0)$. Возьмем произвольную точку N данной окружности

(рис. 8), обозначим $t = \widehat{AON}$. В силу условия длина дуги NA равна длине отрезка NM , т. е. $Rt = |NM|$. Координаты точки M через угол t и радиус R выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= OP = OK + KP = OK + QM = R \cos t + |NM| \sin t = R \cos t + Rt \sin t; \\ y &= PM = KQ = KN - QN = R \sin t - |MN| \cos t = R \sin t - Rt \cos t. \end{aligned}$$

Таким образом, получены следующие параметрические уравнения развертки окружности: $x = R(\cos t + t \sin t)$; $y = R(\sin t - t \cos t)$.

Задачи

Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

26. $x = t; y = -t.$

27. $x = 1 - t; y = 1 + t.$

28. $x = 5 \cos t - 1; y = 5 \sin t + 2.$

29. $x = 8 \cos t + 3; y = 8 \sin t - 5.$

30. $x = t; y = 3t^2.$

31. $x = 2 - t; y = (t - 1)^2 + 1.$

32. $x = t; y = \frac{6}{t}.$

33. $x = \frac{1}{t}; y = -12t.$

Напишите уравнения в декартовых координатах следующих линий, заданных параметрическими уравнениями:

34. $x = a \cos t; y = b \sin t.$ 35. $x = a \left(t + \frac{1}{t} \right); y = b \left(t - \frac{1}{t} \right).$

36. $x = 2 \sin t + 4; y = 2 \cos t - 5.$

37. $x = 5 \sin t - 7; y = 5 \cos t + 8.$

38. $x = t + 1; y = (t - 2)^2 + 3.$ 39. $x = (t + 1)^2 - 2; y = 1 - t.$

40. $x = t - 1; y = \frac{4}{t + 2}.$ 41. $x = \frac{1}{t + 3}; y = 2t - 5.$

Введя параметр t по формуле $y = tx$, напишите параметрические уравнения линий, заданных уравнениями в декартовых прямоугольных координатах:

42. $x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0.$ 43. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2.$

44. $(x + y)^3 = 2xy.$

45. $(x + y)^4 = x^2y.$

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алгебраической линией n -го порядка называют множество точек плоскости, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению n -й степени относительно двух переменных x и y . Алгебраическую линию n -го порядка кратко называют также *линией (кривой) n -го порядка*. Запишем в общем виде алгебраические уравнения первой, второй и третьей степеней соответственно:

$$\begin{aligned}Ax + By + C &= 0; \quad A^2 + B^2 \neq 0; \\Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0; \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0; \\Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + \\&+ Ky + L = 0; \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Как было показано в предыдущем разделе, уравнение первой степени относительно декартовых прямоугольных координат, т. е. уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, определяет некоторую прямую на плоскости. Обратно, всякое уравнение прямой (с угловым коэффициентом и т. д.) является уравнением первой степени относительно указанных координат. Таким образом, *линиями первого порядка* являются прямые и только они.

В соответствии с приведенным определением *линией (кривой) второго порядка* называют линию, определяемую уравнением в декартовых координатах

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

в котором коэффициенты при старших членах не все равны нулю, т. е.

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (2)$$

К линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола, уравнения которых будут рассмотрены в дальнейшем.

ОКРУЖНОСТЬ

Рассмотрим уравнение, получающееся из уравнения (1) при $A=C$ и $B=0$, т. е. уравнение второй степени, имеющее равные коэффициенты при квадратах координат и не содержащее члена с произведением координат:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3)$$

Докажем, что если уравнение (3) относительно декартовых прямоугольных координат x и y определяет некоторую линию на плоскости, то этой линией является окружность.

Разделив почленно уравнение (3) на A ($A \neq 0$ в силу условия (2)), получим $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, где $d = D/A$; $e = E/A$; $f = F/A$. Преобразуем это уравнение, выделив в левой его части полные квадраты:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2\frac{d}{2}x + \frac{d^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{e}{2}y + \frac{e^2}{4}\right) + \\ + f - \frac{d^2}{4} - \frac{e^2}{4} = 0; \\ \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f. \end{aligned} \quad (4)$$

Алгебраическая сумма в правой части уравнения (4) может быть положительной, равной нулю или отрицательной. Исследуем каждый случай в отдельности.

1. Если $\frac{d^2}{4} + \frac{e^2}{4} - f > 0$, то, введя обозначения $\frac{d^2}{4} +$

$$+\frac{e^2}{4}-f=R^2; \quad \frac{d}{2}=-a; \quad \frac{e}{2}=-b, \quad \text{получим уравнение}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \quad (5)$$

определяющее окружность радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

2. Если $\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}-f=0$, то уравнение (4) принимает вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $x=a, y=b$.

3. Если $\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}-f<0$, то, положив $\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}-f=-R^2$, получим уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=-R^2$. Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости; линии оно не определяет.

Итак, уравнение (3) либо не определяет никакой линии, либо определяет точку, либо определяет окружность.

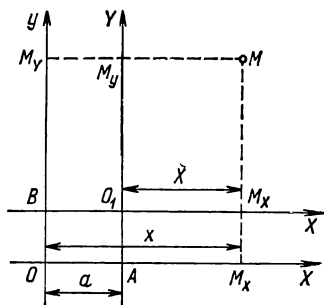
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Одна и та же точка имеет различные координаты в разных системах декартовых координат. Установим связь между координатами точки в разных системах координат, рассмотрев простейшие случаи взаимного расположения двух систем — параллельный перенос и поворот координатных осей.

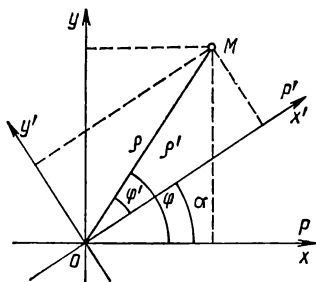
Пусть даны две системы декартовых прямоугольных координат с общим масштабным отрезком — Oxy (старая) и $O_1X_1Y_1$ (новая), — соответствующие оси которых параллельны (рис. 9), положительные полуоси имеют одинаковые направления. Начало новой системы находится в точке $O_1(a; b)$; старые координаты которой $x=a, y=b$ (новые координаты ее равны нулю). Относи-

тельно таких систем говорят, что одна получена из другой путем *параллельного переноса*.

Из определения координат получаем выражения старых координат x, y точки M через ее новые координаты и старые координаты нового начала: $OM_x = OA + AM_x = OA + O_1M_x$, $OM_y = OB + BM_y$ или $x = X + a$; $y = Y + b$.



Р и с. 9



Р и с. 10

Очевидно, новые координаты через старые выражаются формулами

$$X = x - a; Y = y - b. \quad (6)$$

Новая система $Ox'y'$ получена путем поворота старой на угол α вокруг точки O . С каждой из них свяжем полярную систему координат, как показано на рис. 10, тогда $\rho' = \rho$, $\varphi = \alpha + \varphi'$.

Принимая во внимание эти равенства и формулы $x' = \rho' \cos \varphi'$, $y' = \rho' \sin \varphi'$, выражаем старые декартовы прямоугольные координаты x, y точки M через ее новые координаты x', y' :

$$x = \rho \cos \varphi = \rho' \cos (\varphi' + \alpha) = (\rho' \cos \varphi') \cos \alpha - (\rho' \sin \varphi') \times \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;$$

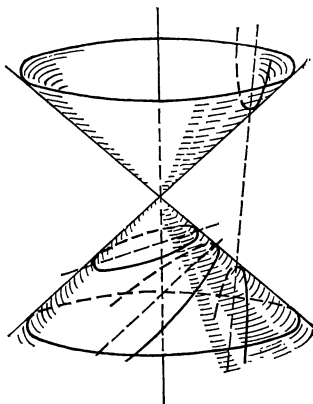
$$y = \rho \sin \varphi = \rho' \sin (\varphi' + \alpha) = (\rho' \sin \varphi') \cos \alpha + (\rho' \cos \varphi') \times \sin \alpha = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha,$$

т. е.

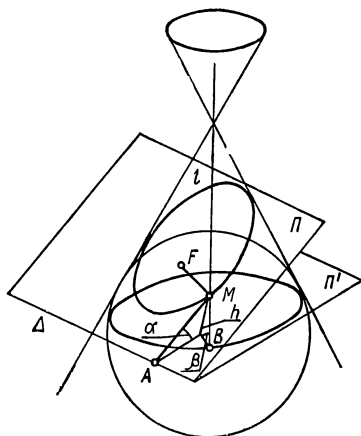
$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \quad (7)$$

КНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Коническим сечением называют линию пересечения кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину (рис. 11). К коническим сечениям относятся следующие линии: окружность (сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси), эллипс (сечение



Р и с. 11



Р и с. 12

одной полости конуса плоскостью, не перпендикулярной его оси и не параллельной образующей), парабола (сечение конуса плоскостью, параллельной его образующей), гипербола (сечение плоскостью обеих полостей конуса).

Докажем одно из замечательных свойств конических сечений. Любое коническое сечение, кроме окружности, является множеством точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до некоторой точки F к ее расстоянию до некоторой прямой Δ (той же плоскости) есть постоянная величина. Точку F называют *фокусом* конического сечения, а прямую Δ — его *директрисой*.

Пусть l — линия, по которой плоскость Π пересекает конус (рис. 12). В конус впишем сферу, касающуюся плоскости Π ; точку касания плоскости и сферы обозначим буквой F . Окружность касания сферы с конусом лежит в плоскости, которую обозначим через Π' . Пусть M — произвольная точка линии l ; проведем через нее образующую конуса до пересечения с плоскостью Π' в точке B . Из точки M опустим перпендикуляр на прямую Δ пересечения плоскостей Π и Π' . Если h — расстояние от точки M до плоскости Π' , то $|AM| = h/\sin \alpha$, $|BM| = h/\sin \beta$, где α — угол между плоскостями Π и Π' , а β — угол между образующей конуса и плоскостью Π' . Поскольку $|FM| = |BM|$ как длины касательных к сфере из одной точки, то

$$\frac{|FM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|AM|} = \frac{h}{\sin \beta} : \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const.} \quad (8)$$

Итак, доказано, что отношение расстояния любой точки M конического сечения до точки F (фокуса) к ее расстоянию до прямой Δ (директрисы) есть постоянная величина. Введем обозначения: $|FM| = r$; $|AM| = d$; $\sin \alpha : \sin \beta = \varepsilon$. Доказанное свойство (8) можно выразить равенством

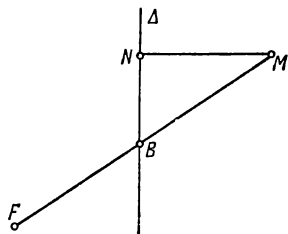
$$r : d = \varepsilon. \quad (9)$$

Постоянную ε называют *эксцентриситетом* конического сечения. Коническое сечение называют *эллипсом* в случае $\varepsilon < 1$, *параболой* при $\varepsilon = 1$, *гиперболой*, если $\varepsilon > 1$.

Пусть F — фокус конического сечения и Δ — его директриса (рис. 13). Поскольку для эллипса и параболы $\epsilon \leq 1$, то все точки этих линий расположены по одну сторону от директрисы, именно со стороны, где находится фокус. В самом деле, для всякой точки M , расположенной с другой стороны директрисы, имеем

$$\frac{|MF|}{|MN|} > \frac{|MB|}{|MN|} \geq 1 \quad \text{или} \quad \frac{r}{d} \geq 1 \quad \left(\frac{r}{d} = \epsilon; \epsilon \geq 1 \right).$$

Так как для гиперболы $\epsilon > 1$, то у нее имеются точки, расположенные по обе стороны директрисы. Гипербола состоит из двух частей, разделяемых директрисой; их называют *ветвями гиперболы*.



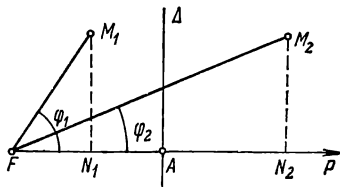
Р и с. 13

УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Составим уравнения конических сечений в полярных координатах. Полюс полярной системы координат поместим в фокусе конического сечения, а полярную ось направим в сторону директрисы и перпендикулярно ей (рис. 14). Обозначим буквой

p расстояние от фокуса F до директрисы Δ , т. е. $p = |FA|$. Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка коничес-

кого сечения, тогда $\varphi = \angle MFA$, $\rho = |FM|$, т. е. расстояние точки M до фокуса равно ρ . Расстояние этой точки до ди-



Р и с. 14

ректрисы выражается формулой $d_1 = p - \rho \cos \varphi_1$ ($d_1 = |N_1 A| = |FA| - |FN_1|$), если точка M и фокус F расположены по одну сторону директрисы (M совпадает с M_1), и формулой $d_2 = \rho \cos \varphi_2 - p$ ($d_2 = |AN_2| = |FN_2| - |FA|$), если точки M и F находятся по разные стороны директрисы (что будет в случае гиперболы).

Подставляя в равенство (9) выражения $r = \rho$, $d = p - \rho \cos \varphi$ или $d = \rho \cos \varphi - p$, соответственно получаем

$$\rho / (p - \rho \cos \varphi) = \varepsilon; \quad \rho / (p - \rho \cos \varphi) = \pm \varepsilon. \quad (10)$$

Разрешая эти уравнения относительно ρ , находим

$$\rho = \varepsilon p / (1 + \varepsilon \cos \varphi); \quad \rho = \pm \varepsilon p / (1 \pm \varepsilon \cos \varphi). \quad (11)$$

Первое из уравнений (11) является полярным уравнением эллипса (при $\varepsilon < 1$) и параболы (при $\varepsilon = 1$), второе — полярным уравнением гиперболы (при $\varepsilon > 1$); знак «—» — отвечает одной ветви гиперболы, знак «+» — другой ее ветви.

УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Запишем уравнения конических сечений в прямоугольных декартовых координатах. Начало прямоугольной декартовой системы координат выберем в полюсе F , а в качестве положительной полуоси Ox возьмем полярную ось. Пусть M — произвольная точка конического сечения, (ρ, φ) — ее полярные координаты, (x, y) — ее декартовы координаты. Тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Из уравнений (10) для любого конического сечения получаем $\rho^2 = \varepsilon^2 (p - \rho \cos \varphi)^2$. Подставляя сюда выражения $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos \varphi = x$, находим $x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (p - x)^2$ или

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon^2 x + y^2 - \varepsilon^2 p^2 = 0. \quad (12)$$

Это уравнение конических сечений в декартовых

координатах принимает более простой вид, если соответствующим образом сместить начало координат вдоль оси Ox . Рассмотрим сначала случай эллипса и гиперболы ($\varepsilon \neq 1$). Уравнение (12) перепишем так:

$$(1 - \varepsilon^2) \left(x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2 - \frac{p^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = 0 \quad (13)$$

Перейдем к новым координатам по формулам $X = x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$, $Y = y$, что соответствует переносу начала координат в точку $O_1 \left(-\frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}; 0 \right)$. В новых координатах уравнение (13) принимает вид

$$(1 - \varepsilon^2) X^2 + Y^2 - \frac{p^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = 0.$$

Вводя обозначения

$$p^2\varepsilon^2/(1 - \varepsilon^2)^2 = a^2; \quad p^2\varepsilon^2/|1 - \varepsilon^2| = b^2, \quad (14)$$

получаем следующие уравнения: для эллипса ($\varepsilon < 1$)

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad (15)$$

для гиперболы ($\varepsilon > 1$)

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Параметры a и b в уравнениях (15), (16) называют *полуосями* эллипса, гиперболы.

В случае параболы ($\varepsilon = 1$) уравнение (12) принимает вид

$$2px + y^2 - p^2 = 0 \quad \text{или} \quad y^2 = 2p(p/2 - x).$$

Введя новые координаты по формулам $X = p/2 - x$, $Y = y$, получаем

$$Y^2 = 2pX \quad (17)$$

Уравнения (15) — (17) называют *каноническими*

уравнениями эллипса, гиперболы, параболы соответственно. Поскольку это алгебраические уравнения второй степени относительно прямоугольных декартовых координат, то конические сечения — линии второго порядка.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Исследуем форму и расположение эллипса на плоскости относительно системы прямоугольных декартовых координат Oxy по его каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует, что $x^2 \leq a^2$, т. е. $|x| \leq a$, $-a \leq x \leq a$, и $y^2 \leq b^2$, т. е. $-b \leq y \leq b$, а это означает, что эллипс расположен целиком в прямоугольнике, основание которого равно $2a$, высота — $2b$, центр находится в начале координат. Поскольку в уравнение (18) x входит только во второй (четной) степени, то эллипс симметричен относительно оси Oy . Действительно, если точка $M_1(x_1; y_1)$ лежит на эллипсе, то точка $M_2(-x_1; y_1)$ также лежит на эллипсе, ибо

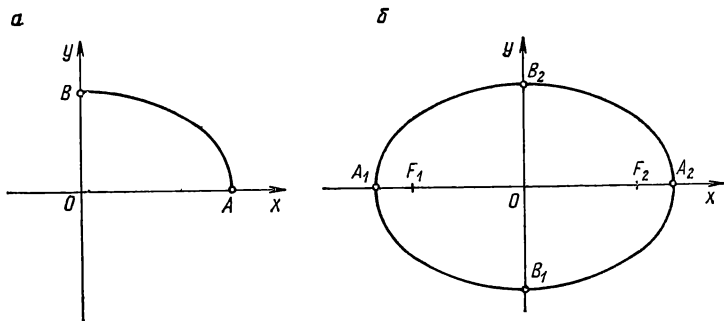
$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1;$$

точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Oy . Аналогично доказывается, что эллипс симметричен относительно оси Ox , так как в уравнение (18) y входит только в четной степени.

В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно исследовать его форму в первой четверти. Разрешив уравнение (18) относительно y , получим

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y = +\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (19)$$

Первое из уравнений определяет половину эллипса, расположенную ниже оси Ox , второе — другую половину, расположенную выше этой оси. Рассмотрим второе из этих уравнений (19). Если x возрастает от 0 до a , то y убывает от b до 0. Если $x=0$, то $y=b$, получаем точку $B(0; b)$; если $x=a$, то $y=0$, получаем точку $A(a; 0)$. Соответствующая дуга эллипса, расположенная в первой четверти, изображена на рис. 15, а, а весь эллипс — на рис. 15, б.



Р и с. 15

З а м е ч а н и е. Для исследования функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ использованы ее производные

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Когда $0 < x < a$, то $y' < 0$, $y'' < 0$. Это означает, что функция убывает, ее график является выпуклым вверх.

Точки пересечения эллипса с координатными осями называют *вершинами эллипса* (точки A_2 , A_1 , B_2 , B_1 на рис. 15, б). Оси симметрии эллипса (оси Ox и Oy) назы-

ваются просто *осями*, точка пересечения осей — *центром эллипса*. Осями называются также отрезки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$, полуосями — отрезки $OA_2 = a$, $OB_2 = b$ и их длины. В случае, когда фокусы расположены на оси Ox , $a > b$; отрезок $OA_2 = a$ называют *большой полуосью*, отрезок $OB_2 = b$ — *малой полуосью*.

Уравнение (18) можно рассматривать и в случае $b > a$; оно определяет эллипс с большой полуосью $OB = b$. Фокусы такого эллипса лежат на оси Oy .

Рассмотрим случай, когда $b = a = R$. Уравнение (18) принимает вид $x^2 + y^2 = R^2$ и определяет окружность радиуса R с центром в начале координат.

Исследуем форму и расположение гиперболы относительно системы декартовых прямоугольных координат по ее каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует, что $x^2 \geq a^2$, т. е. $x < -a$ и $x > a$. Это означает, что в полосе между прямыми $x = -a$ и $x = a$ нет ни одной точки гиперболы. Поскольку в уравнение (20) x и y входят только во второй (четной) степени, то гипербола симметрична относительно координатных осей. Изучим ее форму в первой четверти, где она определяется уравнением $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. При $x = a$ получаем $y = 0$; точка $A(a; 0)$ принадлежит гиперболе. Из уравнения видно, что y неограниченно возрастает при неограниченном возрастании x . Покажем, что точка дуги гиперболы неограниченно приближается к прямой, определяемой уравнением

$$y = \frac{b}{a} x, \quad (21)$$

при ее неограниченном удалении от начала координат.

Фиксируем некоторое значение x ; ему будет соответствовать точка $M(x; y)$ гиперболы и точка $N(x; Y)$ прямой (21). Из точки M опустим перпендикуляр MP на прямую. Отметим, что дуга гиперболы подходит к прямой снизу, так как

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y; \quad Y > y.$$

Длина отрезка MN выразится формулой

$$|MN| = Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Выясним, как изменяется длина отрезка MN , когда x неограниченно возрастает. Для этого предварительно преобразуем правую часть полученного равенства:

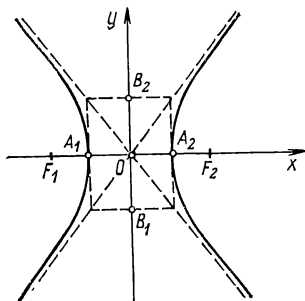
$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \\ &= \frac{b}{a} \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}; \quad |MN| = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что длина отрезка MN стремится к нулю, когда x неограниченно возрастает. Так как $|MP| < |MN|$, то $|MP|$ также стремится к нулю, т. е. расстояние от точки M до прямой стремится к нулю, когда эта точка неограниченно удаляется от начала координат. Отметим, что гипербола (20) и прямая (21) общих точек не имеют, так как система их уравнений не имеет решений.

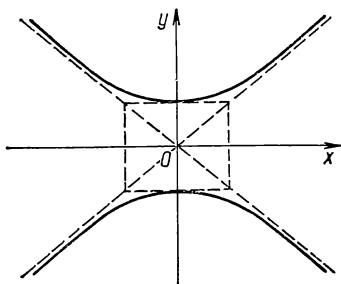
Прямую, определяемую уравнением (21), называют *асимптотой* гиперболы. Легко видеть, что гипербола (20) имеет две асимптоты: $y = +\frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$.

Изобразим гиперболу на чертеже. Построим сначала так называемый основной прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат. Его стороны рав-

ны $2a$ и $2b$ и параллельны соответственно осям Ox и Oy . Прямые, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. Построив асимптоты, строим саму гиперболу (рис. 16); она состоит из двух частей, называемых *ветвями* (левой и правой); разумеется, на рис. 16 изобра-



Р и с. 16



Р и с. 17

жены лишь конечные дуги ветвей (сами ветви простираются неограниченно). Центр симметрии гиперболы называется ее *центром*, а оси симметрии гиперболы — просто ее *осями*. Одна ось пересекает гиперболу в двух точках, называемых *вершинами* (на рис. 16 точки A_1 и A_2). Эта ось называется *действительной осью* гиперболы, другая ось называется *мнимой* (она не имеет общих точек с гиперболой). Длины отрезков $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ также называются осями. Величины a и b называются *полуосями* гиперболы. Если $a=b$, гипербола называется *равносторонней*. Ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$.

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (22)$$

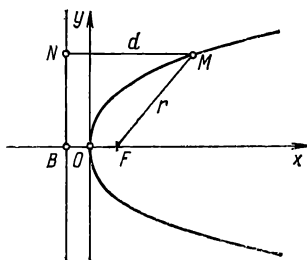
определяет гиперболу с действительной осью Oy (рис. 17).

Гиперболы, определяемые уравнениями (20) и (22) в одной и той же системе координат с одинаковыми значениями a и b , называются *сопряженными*.

Из канонического уравнения параболы

$$y^2 = 2px \quad (23)$$

следует, что $x \geq 0$ (так как $p > 0$), т. е. парабола расположена целиком справа от оси Oy . Парабола симметрична относительно оси Ox (поскольку y входит в уравнение только во второй степени). Когда x неограниченно возрастает, y также неограниченно возрастает. Парабола, определяемая уравнением (23), изображена на рис. 18. Уравнение директрисы (как прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $B(-p/2; 0)$), имеет вид $x = -p/2$.

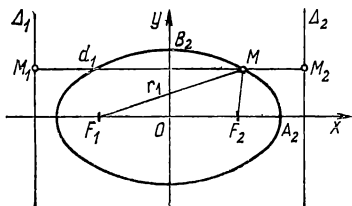


Р и с. 18

З а м е ч а н и е. Каждое из уравнений $y^2 = 2px$; $x^2 = 2qy$; $x^2 = -2qy$ определяет параболу. Постройте эти параболы.

ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Из доказанного свойства конических сечений следует, что эллипс, гипербола, парабола имеют фокус и директрису. Покажем, что у эллипса и гиперболы имеется еще один фокус и директриса. В самом деле, пусть коническое сечение — эллипс, определяемый уравнением (18). Его директриса Δ_1 параллельна оси Oy , а фокус находится на оси Ox (рис. 19). Поскольку при таком выборе



Р и с. 19

системы координат эллипс симметричен относительно оси Oy , то у него имеются фокус F_2 и директриса Δ_2 , симметричные относительно оси ординат фокусу F_1 и директрисе Δ_1 соответственно. Аналогично можно установить существование двух фокусов и двух директрис у гиперболы.

Докажем, что сумма расстояний произвольной точки эллипса до его фокусов есть постоянная величина; она не зависит от положения точки на эллипсе. Действительно, для произвольной точки M эллипса в соответствии с формулой (9) имеем

$$\frac{|MF_1|}{|MM_1|} = \varepsilon; \quad \frac{|MF_2|}{|MM_2|} = \varepsilon,$$

откуда $|MF_1| + |MF_2| = \varepsilon (|MM_1| + |MM_2|) = \varepsilon |M_1M_2|$, т. е.

$$|MF_1| + |MF_2| = \text{const}, \quad (24)$$

так как ε — число и $|M_1M_2|$ — число, выражающее расстояние между директрисами. Значение этой постоянной равно $2a$. В самом деле, если точка M совпадает с точкой $A_2(a; 0)$, то $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Следовательно, $\varepsilon |M_1M_2| = 2a$, откуда $|M_1M_2| = 2a/\varepsilon$. Это означает, что расстояние между директрисами Δ_1 и Δ_2 равно a/ε . Поскольку директрисы Δ_1 и Δ_2 симметричны относительно оси Oy , параллельны ей и находятся на равных расстояниях от нее, то они имеют соответственно уравнения

$$x = -a/\varepsilon; \quad x = a/\varepsilon. \quad (25)$$

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $a/\varepsilon > a$, т. е. директрисы эллипса не пересекают его.

З а м е ч а н и е. Равенство (24) можно положить в основу определения эллипса. *Эллипсом* называют множество всех тех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина. Исходя из этого определения и выбирая соответствующим образом систему прямоугольных декартовых координат, можно получить каноническое уравнение эллипса (18) и доказать свойство, выражаемое равенством (9).

Аналогично доказывается, что модуль разности расстояний произвольной точки гиперболы до фокусов есть постоянная величина:

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a \quad (26)$$

и что директрисы гиперболы имеют уравнения (25). Поскольку для гиперболы $e > 1$, то $a/e < a$, т. е. директрисы гиперболы не пересекают ее (сделайте чертеж).

Найдем фокусы эллипса и гиперболы, заданных каноническими уравнениями. Обозначим буквой c расстояние от центра до фокуса (расстояние между фокусами F_1 и F_2 называют *фокусным расстоянием*; очевидно, $|F_1F_2| = 2c$; c — половина фокусного расстояния). В случае эллипса, применяя равенство $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ к точке $B_2(0; b)$, получаем $2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a$ или $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, откуда

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a^2 - b^2 = c^2). \quad (27)$$

Таким образом, фокусы эллипса, заданного каноническим уравнением (18), находятся в точках $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где c определяется формулой (27).

В случае гиперболы, определяемой уравнением (20), применяя равенство (26) к точке $M(c; y)$, находим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 = c^2). \quad (28)$$

Покажем, что эксцентриситет эллипса, заданного уравнением (18), определяется формулой $e = c/a$, где

c — половина фокусного расстояния; a — большая полуось. Действительно, из равенств (14) для эллипса ($\epsilon < 1$), учитывая формулу (27), находим

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - \epsilon^2}; \quad 1 - \epsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}; \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}; \quad \epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2};$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}; \quad \epsilon = \frac{c}{a}.$$

Из тех же равенств (14) для гиперболы ($\epsilon > 1$), учитывая формулу (28), получаем

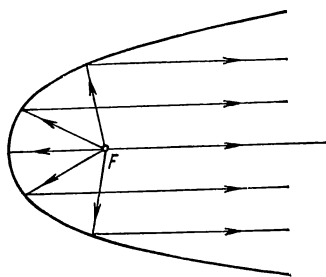
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\epsilon^2 - 1}; \quad \epsilon^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}; \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}; \quad \epsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2};$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}; \quad \epsilon = \frac{c}{a}.$$

Таким образом, эксцентриситет эллипса и гиперболы зависит от отношения их полуосей; он характеризует меру сжатия конического сечения к его оси симметрии.

Приведем без доказательств следующие оптические свойства конических сечений.

Световые лучи, исходящие из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус. Аналогичным свойством обладает и гипербола. Оптическое свойство параболы состоит в том, что лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от параболы параллельны ее оси (рис. 20).

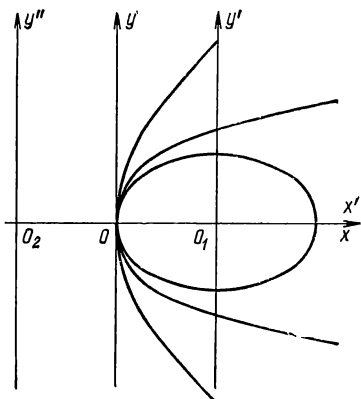


Р и с. 20

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ, ОТНЕСЕННЫХ К ВЕРШИНЕ

Канонические уравнения эллипса и гиперболы получены путем такого выбора прямоугольной декартовой системы координат, при котором начало координат совпадало с центром линии. При выводе канонического уравнения параболы $y^2 = 2px$ начало координат совпадало с ее вершиной.

Составим уравнения эллипса и гиперболы относительно декартовой прямоугольной системы координат, за начало которой выбрана одна из вершин, а ось Ox направлена от O к ближайшему фокусу (рис. 21). Рассмотрим также две другие системы декартовых прямоугольных координат $O_1x'y'$, $O_2x''y''$, относительно которых эллипс и гипербола имеют канонические уравнения



Р и с. 21

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

В случае эллипса за новое начало возьмем левую вершину. Зависимость между старыми координатами $(x'; y')$ и новыми $(x; y)$ при указанном расположении систем $O_1x'y'$ и Oxy (см. рис. 21) выражается формулами $x' = x - a$, $y' = y$. Подставим эти выражения в уравнение эллипса и преобразуем его:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2};$$

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Если ввести обозначения $p = b^2/a$, $q = b^2/a^2$, последнее уравнение можно переписать так: $y^2 = 2px - qx^2$. В случае гиперболы начало поместим в правой вершине. Зависимость между старыми координатами $(x''; y'')$ и новыми $(x; y)$ при указанном расположении систем $O_2x''y''$ и Oxy (см. рис. 21) выражается формулами $x'' = x + a$; $y'' = y$. Подставим эти выражения в уравнение гиперболы и преобразуем его:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} + 1 - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2};$$

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Полученное уравнение примет вид $y^2 = 2px + qx^2$, если воспользоваться теми же обозначениями: $p = b^2/a$; $q = b^2/a^2$.

Таким образом, если начало O декартовой прямоугольной системы координат взять в вершине эллипса, гиперболы, параболы, а ось Ox направить к ближайшему фокусу, то

для эллипса

$$y^2 = 2px - qx^2; \tag{29}$$

для параболы

$$y^2 = 2px; \tag{30}$$

для гиперболы

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{31}$$

Эти три уравнения можно объединить в одно. Действительно, в случае эллипса $q = b^2/a^2 = (a^2 - c^2)/a^2 = 1 - \varepsilon^2$, в случае гиперболы $b^2/a^2 = (c^2 - a^2)/a^2 = (c/a)^2 - a^2/a^2 = \varepsilon^2 - 1$, где ε — эксцентриситет. Все три уравнения (29) — (31) объединяются в одно:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2. \quad (32)$$

При $\varepsilon < 1$ уравнение (32) определяет эллипс, при $\varepsilon > 1$ — гиперболу, при $\varepsilon = 1$ — параболу.

На рис. 21 изображены эллипс, гипербола, парабола, отнесенные к одной и той же системе декартовых прямоугольных координат. Из их уравнений видно, что при одном и том же значении параметров p и q для точек $(x_1; y_1)$, $(x_1; y_2)$, $(x_1; y_3)$ эллипса, параболы, гиперболы, имеющих одну и ту же абсциссу $x > 0$, будет $|y_1| < |y_2| < |y_3|$.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Линией (кривой) третьего порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением третьей степени относительно декартовых прямоугольных координат. Алгебраическое уравнение третьей степени с переменными x и y в общем виде можно записать так:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 3Fxy + 3Gy^2 + \\ + 3Hx + 3Ky + L = 0.$$

Предполагается, что коэффициенты A, B, C, D одновременно в нуль не обращаются (в противном случае получилось бы уравнение второй степени). Это условие выражается неравенством

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0.$$

Если все нераспадающиеся линии второго порядка исчерпываются окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой, то множество линий третьего порядка является более богатым — оно содержит свыше 70 видов этих линий. Здесь рассматриваются только некоторые из них, замечательные по своим свойствам и применениям.

ДЕКАРТОВ ЛИСТ

Декартовым листом называют линию, определяемую

в прямоугольной декартовой системе координат алгебраическим уравнением третьей степени

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad (1)$$

где a — постоянная, причем $a \neq 0$. Из уравнения (1) следует, что декартов лист — алгебраическая линия третьего порядка. Эту линию можно задать и параметрическими уравнениями. В самом деле, положив $y = tx$, подставим это выражение в уравнение (1) и найдем x :

$$\begin{aligned} x^3 + t^3 x^3 - 3axtx &= 0; & x^3(1 + t^3) - 3atx^2 &= 0; \\ x(1 + t^3) - 3at &= 0; & x &= 3at/(1 + t^3). \end{aligned}$$

Подставив выражение для x в формулу $y = tx$, получим $y = 3at^2/(1 + t^3)$.

Итак, выведены параметрические уравнения декартова листа:

$$x = 3at/(1 + t^3); \quad y = 3at^2/(1 + t^3).$$

Составим уравнение линии в полярных координатах. Как известно, при соответствующем выборе систем координат декартовы координаты точки (x, y) через ее полярные координаты (ρ, φ) выражаются формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Подставляя эти формулы в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi - 3a\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi &= 0; \\ \rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) - 3a\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi &= 0; \\ \rho &= \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}. \end{aligned}$$

Обратимся к уравнению (1). Отметим, что определяемая им линия проходит через начало координат, так как координаты $x=0$, $y=0$ удовлетворяют данному уравнению. Из уравнения (1) видно, что декартов лист симметричен относительно прямой $y=x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов). Действительно, в

уравнение (1) координаты x и y входят симметрично: их можно поменять местами, при этом уравнение останется прежним. Это означает, что если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на данной линии, то точка $N_0(y_0; x_0)$ также лежит на этой линии. Но точки $M_0(x_0; y_0)$ и $N_0(y_0; x_0)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (сделайте чертеж).

Перейдем к новой декартовой системе координат с началом в той же точке O , для которой указанная биссектриса будет осью Ox . В качестве оси Oy выберем прямую, перпендикулярную данной биссектрисе, т. е. биссектрису второго и четвертого координатных углов. Воспользуемся формулами преобразования декартовых координат при повороте на угол α :

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

В данном случае $\alpha = 45^\circ$, поэтому формулы преобразования принимают вид

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y').$$

Подставим эти выражения в уравнение (1):

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 (x' - y')^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 (x' + y')^3 - \\ - 3a \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 0;$$

$$y'^2 = \frac{x'^2 (3a - \sqrt{2} x')}{3(\sqrt{2} x' + a)} = -\frac{1}{3} \frac{(\sqrt{2} x' - 3a)}{\sqrt{2} x' + a} x'^2;$$

$$y'^2 = -\frac{1}{3} \frac{\left(x' - \frac{3a}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x' + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)} x'^2$$

Это уравнение декартова листа в новой прямоуголь-

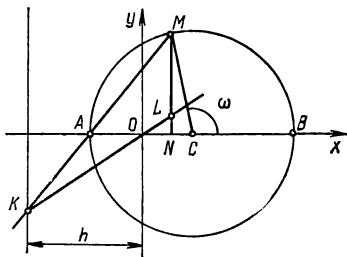
ной системе координат Oxy , полученной из данной системы Oxy поворотом координатных осей на угол $\alpha = 45^\circ$ С.

Обозначив текущие координаты буквами x и y , запишем уравнение декартова листа в виде

$$y^2 = -\frac{1}{3} \frac{x - \frac{3a}{\sqrt{2}}}{x + \frac{a}{\sqrt{2}}} x^2. \quad (2)$$

Пользуясь этим уравнением, определим декартов лист как некоторое множество точек плоскости и укажем способ его построения по точкам.

Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке $C(r/2; 0)$ и прямую $x = -h$. Обозначим буквой A (рис. 22) точку пересечения окружности с отрицательной полуосью Ox , а буквой B — вторую их точку пересечения. Фиксируем произвольную точку M указанной окружности и проведем прямую MA и прямую MN , перпендикулярную оси абсцисс. Пусть прямая MA пересекает прямую $x = -h$ в точке K . Проведем прямую KO до пересечения с прямой MN в точке L . Следовательно, точке M на окружности при таком построении будет поставлена в соответствие точка L . Множество точек L представляет собой декартов лист. Докажем это утверждение.



Р и с. 22

Введем в рассмотрение угол $\omega = \widehat{BCM}$ и выразим через него координаты точки M : $x = r/2 + r \cos \omega$; $y = r \sin \omega$. Отметим, что точка A имеет следующие координаты:

$x = -r/2$; $y = 0$. Составим уравнение прямой, проходящей через две эти точки. Используя уравнение

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

и полагая в нем $x_1 = -r/2$, $y_1 = 0$; $x_2 = r/2 + r \cos \omega$; $y_2 = r \sin \omega$, получаем

$$\frac{y - 0}{r \sin \omega - 0} = \frac{x - \left(-\frac{r}{2}\right)}{\frac{r}{2} + r \cos \omega - \left(-\frac{r}{2}\right)}; \quad \frac{y}{r \sin \omega} = \frac{x + \frac{r}{2}}{r(1 + \cos \omega)};$$

$$\frac{y}{\sin \omega} = \frac{x + \frac{r}{2}}{1 + \cos \omega}; \quad \frac{y}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{x + \frac{r}{2}}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}};$$

$$\frac{y}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{x + \frac{r}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}};$$

$$\left(x + \frac{r}{2}\right) \sin \frac{\omega}{2} - y \cos \frac{\omega}{2} = 0$$

Это уравнение прямой МА. Подставляя сюда $x = -h$, находим ординату точки К: $\left(-h + \frac{r}{2}\right) \sin \frac{\omega}{2} - y \cos \frac{\omega}{2} = 0$; $y = \left(\frac{r}{2} - h\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. Запишем уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку К $\left(-h; \left(\frac{r}{2} - h\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)$:

$$y = \frac{\frac{r}{2} - h}{-h} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} x; \quad y = \frac{2h - r}{2h} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} x.$$

Точка L является пересечением прямых KO и MN , т. е. прямых, заданных уравнениями

$$y = \frac{2h-r}{2h} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} x; \quad x = \frac{r}{2} + r \cos \omega.$$

Исключим из этих уравнений параметр ω :

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{2h}{2h-r} \frac{y}{x}; \quad \cos \omega = \frac{x - \frac{r}{2}}{r};$$

$$\cos \omega = \cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}};$$

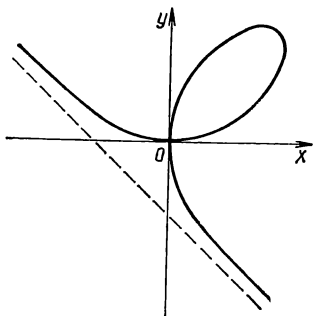
$$\cos \omega = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}};$$

$$\frac{x - \frac{r}{2}}{r} = \frac{1 - \left(\frac{2h}{2h-r}\right)^2 \frac{y^2}{x^2}}{1 + \left(\frac{2h}{2h-r}\right)^2 \frac{y^2}{x^2}}; \quad \frac{x - \frac{r}{2}}{r} = \frac{x^2(2h-r)^2 - (2h)^2 y^2}{x^2(2h-r)^2 + (2h)^2 y^2}.$$

После простых преобразований находим, что

$$y^2 = - \frac{(2h-r)^2}{4h^2} \frac{x - \frac{3r}{2}}{x + \frac{r}{2}} x^2.$$

Итак, координаты точки L удовлетворяют полученному уравнению, которое принимает вид (2), если положить здесь $(2h-r)^2/4h^2 = 1/3$;



Р и с. 23

$r/2 = a/\sqrt{2}$. Следовательно, точка L лежит на рассматриваемой линии. Построив достаточное число точек и соединив их плавной линией, получим декартов лист (рис. 23). Линия эта имеет асимптоту $y = -x - a$, к которой неограниченно приближаются ее ветви во втором и четвертом координатных углах. В первой четверти линия делает петлю, в начале координат сама себя пересекает (начало координат является узловой точкой).

Рассматриваемая линия в истории математики впервые определяется в письме Декарта к Ферма в 1638 г., как кривая, для которой сумма объемов кубов, построенных на абсциссе и ординате каждой точки, равна объему параллелепипеда, построенного на абсциссе, ординате и некотором постоянном отрезке. Форму линии впервые исследовал Роберваль, который нашел узловую точку. Однако он полагал, что линия состоит только из петли. Повторяя эту петлю в четырех квадрантах, Роберваль получает фигуру, напоминающую цветок с четырьмя лепестками. В связи с этим линии было дано название «лепесток жасмина», однако это название не прижилось. Полная форма всей линии была определена позднее Гюйгенсом и И. Бернулли. Название «декартов лист» установилось только в начале XVIII в.

Бернулли Иоганн I (1667—1748) — швейцарский математик, родился в Базеле в семье городского советника Николая Бернулли.

Семья Бернулли дала многих выдающихся ученых, в том числе и математиков, которые нередко имели одинаковые имена (в разных поколениях). В связи с этим носителей одного имени различают, как королей, по порядковым номерам. Сыновья Иоганна I Николай II (1695—1726) и Даниил I (1700—1782) работали некоторое время в Петербурге, как и его внук, специалист по механике, Иоганн II (1710—1792). Члены рода Бернулли проживают в Базеле и в настоящее время.

В семье желали, чтобы Иоганн стал купцом, но юношу тянуло к науке. Три года он учился в Базельском

университете (1682—1685), получил степень магистра наук. По совету родных приступил к изучению медицины, которая могла дать средства к существованию, а по личной склонности — к изучению математики. Занятиями по математике руководил его старший брат Якоб. Иоганн ознакомился с первыми работами Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислениям, высоко оценил их и стал применять на практике. Во время своего пребывания во Франции (1691—1692 гг.) он привлек внимание французских ученых к анализу бесконечно малых. Одним из его учеников был маркиз Г. Ф. де Лопиталь (1661—1704), впоследствии автор первого опубликованного учебника по дифференциальному исчислению «Анализ бесконечно малых». И. Бернулли был профессором Гронингенского университета (Нидерланды), Базельского университета (Швейцария).

И. Бернулли достиг больших успехов в разработке дифференциального и интегрального исчислений. Ему принадлежит первое систематическое их изложение. Курс интегрального исчисления И. Бернулли был опубликован в 1742 г. Бернулли дал определение функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных величин, развил теорию показательной функции. Он занимался исследованием различных специальных линий.

ЦИССОИДА

Рассмотрим окружность с диаметром $OA=2a$ и касательную к ней в точке A (рис. 24). Из точки O проведем луч OB , точку его пересечения с окружностью обозначим буквой C . На этом луче отложим отрезок $|OM| = |BC|$. Проведя другой луч и выполнив аналогичное построение, получим другую точку M_1 . Таким способом можно построить сколько угодно точек. Множество точек M, M_1, \dots называют *циссоидой*. Построив достаточ-

уравнение третьей степени, то циссоида — алгебраическая линия третьего порядка.

Циссоида симметрична относительно оси абсцисс, так как в уравнение (4) y входит только в четной (второй) степени. Линия имеет две бесконечные ветви; касательная к окружности в точке A , т. е. прямая $x=2a$, служит для нее асимптотой (поскольку y неограниченно возрастает, когда x стремится к $2a$; это следует из уравнения (4)). Начало координат является точкой возврата.

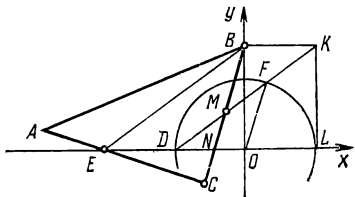


Рис. 25

Запишем параметрические уравнения циссоиды.

Если линия задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то, принимая во внимание формулы $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, получаем параметрические уравнения этой линии $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$; $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, в которых роль параметра играет полярный угол φ .

Подставляя в данные формулы выражение для ρ из (3), выводим параметрические уравнения циссоиды

$$x = 2a \sin^2 \varphi; \quad y = 2a \sin^3 \varphi / \cos \varphi,$$

где φ — параметр.

Циссоиду можно определить и кинематически. Покажем, что циссоида является траекторией середины M катета BC треугольника ABC (рис. 25), передвигающегося в плоскости чертежа так, что его вершина B скользит по оси ординат, а другой катет AC всегда проходит через неподвижную точку E на оси абсцисс, такую, что $|OE| = |BC|$; обозначим середину отрезка OE буквой D , точку пересечения BC с осью абсцисс — буквой N . Так как $|OE| = |BC|$, $\triangle BCE = \triangle BEO$, то $\angle BEO =$

$=\angle CBE$. Следовательно, $\triangle NBE$ равнобедренный. Поскольку $|ED|=|EO|/2=|BC|/2=|BM|$, то отрезок DM параллелен отрезку BE . Через точку B проведем прямую параллельно оси абсцисс. Пусть эта прямая пересекает продолжение отрезка DM в точке K . Построим окружность радиуса $R=|OD|$ с центром в начале координат и проведем к ней касательную в точке L — второй точке пересечения с прямой EO . Эта касательная пройдет через точку K . Пусть F — точка пересечения прямой DM с окружностью. Поскольку $\triangle DOF=\triangle MBK$, то $|DF|=|MK|$; значит, и $|DM|=|FK|$. Последнее равенство означает, что траектория точки M есть циссоида.

Циссоида была открыта древними учеными в поисках решения одной из знаменитых задач того времени. К числу таких задач (V в. до н. э.) относились: задача о квадратуре круга (построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга), задача о трисекции угла (разделить данный угол на три равные части), задача об удвоении куба (построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба). Поставленные задачи нужно было решить с помощью циркуля и линейки.

Существуют различные легенды о происхождении последней задачи. Вот одна из них. На острове Делос, находящемся в Эгейском море, вспыхнула эпидемия чумы. Жители Делоса обратились к оракулу, который служил при храме Аполлона в Дельфах, за помощью и советом. Для прекращения чумы оракул предложил делосцам удвоить жертвенник богу Аполлону (богу Солнца), имевший форму куба. Однако чума не прекратилась и после того, когда был отлит точно такой же жертвенник и поставлен на прежний. Делосцы вновь обратились к оракулу с вопросом: почему не прекратилась чума, хотя жертвенник удвоен? Оракул ответил им, что они не решили задачи, поскольку, увеличив объем, изменили форму жертвенника. Делосцы не могли удвоить куб, не изменив его форму, и обратились к Платону. Философ

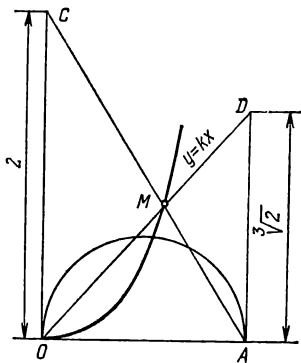
лишь уклончиво заметил, что боги недовольны делосцами за то, что они мало занимаются геометрией. С того времени задачу об удвоении куба начали называть делосской задачей.

Открытие циссоиды для целей решения делосской задачи связано с именем древнегреческого геометра Диоклеса, деятельность которого относится ко второй половине II в. до н. э. По этой причине линию называют циссоидой Диоклеса.

Покажем, как применяется циссоида Диоклеса к решению делосской задачи. Возможность путем построения найти ребро куба с объемом, в два раза большим объема данного куба, усматривается из следующих соображений. Пусть b — ребро данного куба, x — ребро искомого куба, тогда $x^3 = 2b^3$ и $x =$

$= b\sqrt[3]{2}$. Отсюда ясно, что решение задачи сводится к построению $\sqrt[3]{2}$. Для такого построения была использована циссоида. Перепишем урав-

нение циссоиды в виде $y/(2a-x) = (y/x)^3$. Заметим, что прямая $y/x = k$ отсекает от касательной к образующей окружности в точке A отрезок $AD = 2ak$ (рис. 26) и пересекает циссоиду в точке M , координаты которой удовлетворяют уравнению $y/(2a-x) = k^3$. Последнее уравнение можно рассматривать как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2a; 0)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $|OC| = 2ak^3$. Положим $a = 0,5$ и на оси ординат отложим отрезок $|OC| = 2$. Соединим точку C с точкой $A(1; 0)$, а точку M — с точкой O и продолжим отрезок OM до пересечения с касательной к



Р и с. 26

окружности в точке A . Пусть D — точка их пересечения, тогда $|AD| = \sqrt[3]{2}$. Это следует из равенств $|AD| = 2ak$, $|OC| = 2ak^3$, $a = 0,5$, $|OC| = 2$. Действительно, в этом случае $|AD| = k$, $|OC| = k^3 = 2$, $|AD| = \sqrt[3]{2}$.

Древние ученые рассматривали только ту часть циссоиды, которая находится внутри образующего круга. Вместе с дугой окружности этого круга соответствующая дуга циссоиды образует фигуру, напоминающую лист плюща, откуда происходит название линии. Наличие бесконечных ветвей у циссоиды установили уже в XVII в. независимо друг от друга Роберваль и Слюз.

Жиль Роберваль (1602—1675) — французский математик, один из основателей Парижской академии наук (1666). Летом 1628 г. в Париже появился молодой человек — Жиль Персонье. Сын простых земледельцев, Персонье был домашним учителем, служил в армии, много путешествовал по стране. Он решил избрать довольно редкую тогда и малоблагодарную профессию, пожелав стать ученым. В Париже познакомился с Мерсенном, который руководил кружком математиков, физиков, астрономов. Мерсенн высоко оценил выдающиеся способности молодого человека и его основательную научную подготовку — результат самообразования.

Персонье получил место профессора в одном из коллежей и начал усиленно заниматься математикой. Чтобы возвысить себя в глазах парижских знакомых, он присвоил себе вторую фамилию *de Roberval* и не погрешил против истины, так как действительно был из Роберваля (деревни, где жили его родители). Присоединение частицы «де» позволяло другим думать, что носитель соответствующей фамилии — дворянин. В 1634 г. Роберваль занял кафедру Рамуса в одном из крупнейших высших учебных заведений — Коллеж де Франс. Эту кафедру сделал украшением коллежа знаменитый ученый Пьер Рамус (1515—1572); получить ее считалось большой честью. Кафедру Рамуса Роберваль занимал до самой смерти.

Роберваль был разносторонним ученым и оставил работы по математике, физике, астрономии и другим областям естествознания. Одновременно с Кавальери (и независимо от него) Роберваль разработал метод неделимых и применил его к решению многих задач на вычисление длин кривых линий, площадей и объемов. Он построил теорию касательных к кривым, базирующуюся на сложении скоростей по правилу параллелограмма, т. е. на рассмотрении кривой как траектории сложного движения.

СТРОФОИДА

Пусть дана точка A и прямая Δ , не проходящая через данную точку (рис. 27). Обозначим буквой C точку пересечения перпендикуляра к прямой Δ , проведенной в точке A , а длину отрезка AC буквой a , т. е. $|AC| = a$. Вокруг точки A вращается луч, на котором от точки B пересечения с данной прямой откладываются отрезки BM_1 и BM_2 так, что $|BM_1| = |BM_2| = |BC|$. Каждому положению луча соответствует пара точек M_1, M_2 , построенных указанным способом. Множество точек M_1, M_2 называют *строфоидой*. Точки M_1 и M_2 при этом называют сопряженными. Построив достаточное число точек и соединив их плавной линией, получим строфоиду (см. рис. 27).

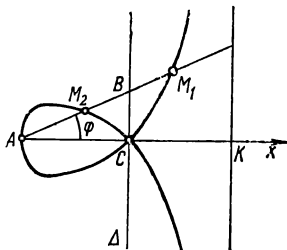


Рис. 27

Составим уравнение строфоиды в полярных координатах. В качестве полюса возьмем точку A , в качестве полярной оси — луч AC . Величину угла наклона луча к полярной оси обозначим буквой φ . Точка M_1 имеет полярные координаты $(\rho_1; \varphi)$, где $\rho_1 = |AM_1|$, а точка M_2 — координаты $(\rho_2; \varphi)$, причем $\rho_2 = |AM_2|$. Очевид-

но, $\rho_1 = |AB| + |BM_1|$; $\rho_2 = |AB| - |BM_2|$. Поскольку $|BM_1| = |BM_2| = |BC|$, то $\rho_1 = |AB| + |BC|$; $\rho_2 = |AB| - |BC|$. Эти две формулы можно объединить в одну: $\rho = AB \pm BC$. Выражаем $|AB|$ и $|BC|$: $|AB| = a : \cos \varphi$, $|BC| = a \operatorname{tg} \varphi$. Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получаем уравнение строфоиды в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \operatorname{tg} \varphi = a \left(\frac{1}{\cos \varphi} \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right);$$

$$\rho = \frac{a (1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (5)$$

Отсюда и из формул $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, связывающих декартовы координаты с ее полярными координатами, выводим параметрические уравнения строфоиды

$$x = a (1 \pm \sin \varphi); \quad y = \frac{a (1 \pm \sin \varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi},$$

где роль параметра играет полярный угол φ . Если $a=1$, то

$$x = 1 \pm \sin \varphi; \quad y = \frac{(1 \pm \sin \varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Запишем уравнение строфоиды в прямоугольных декартовых координатах. Введем декартову систему координат с началом в точке A , в качестве оси абсцисс возьмем ось, проходящую через точки A , C . Тогда

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставим эти формулы в уравнение (5) и преобразуем его к виду

$$y^2 = \frac{(x-a)^2 x}{2a-x}. \quad (6)$$

Уравнение (6) является уравнением строфоиды в прямоугольных декартовых координатах. Поскольку это

уравнение третьей степени относительно декартовых координат, то строфоида — линия третьего порядка.

Так как в уравнение (6) координата y входит только в четной степени (второй), то строфоида симметрична относительно оси абсцисс.

Уравнение (6) можно записать и в другом виде. Разрешив это уравнение относительно y , получим

$$y = \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{2a - x}}. \quad (7)$$

Данное уравнение имеет смысл, когда $x \geq 0$, $x < 2a$. Из уравнения следует, что строфоида состоит из двух ветвей (каждой из них соответствует определенный знак: плюс или минус). Когда x стремится к $2a$, значения y по модулю неограниченно возрастают, т. е. дуга строфоиды неограниченно приближается к прямой, уравнение которой $x = 2a$. Эта прямая является асимптотой строфоиды. В точке $C(a; 0)$ ветви строфоиды пересекаются; такую точку называют *узловой точкой* или *узлом*.

Строфоиду впервые (в 1645 г.) исследовал итальянский математик и физик Эванджелиста Торричелли (1608—1647). Линию долгое время называли «крылом Торричелли»; название «строфоида» окончательно установилось лишь в середине XIX в.

Торричелли родился в Фазнице, математическое образование получил в Риме. Хорошо известны исследования Торричелли по физике (атмосферное давление, ртутный барометр, «торричеллиева пустота») и механике (закон истечения жидкости через боковую стенку сосуда). Он сделал и крупные математические открытия. Ему принадлежат методы вычисления объемов многих тел (в том числе и бесконечных), площадей фигур, ограниченных кривыми, вычисление длин дуг линий. Результаты исследований, касающихся спрямления линий и квадратуры кривых, он собирался объединить в большом сочинении «О новых линиях». Преждевременная смерть помешала

осуществлению его планов, подготовленные им фрагменты были опубликованы лишь в 1919 г. Хотя наиболее общие и важные математические открытия Торричелли долго оставались в рукописях, они все же получили распространение среди итальянских ученых, а затем и среди ученых других стран. Торричелли предложил кинематический способ построения касательной к параболе в сочинении «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1644). Здесь он нашел огибающую семейства параболических траекторий тел, бросаемых под различными углами из данной точки с данной начальной скоростью,— так называемую параболу безопасности. Это был первый пример огибающей семейства линий. Отметим, что именно в этом сочинении изложены открытые Торричелли законы истечения жидкости из отверстия в боковой стенке сосуда — параболическая форма струи вытекающей жидкости и др.

ВЕРСЬЕРА

Рассмотрим окружность с диаметром $|OC| = a$ (рис. 28) и отрезок BDM , построенный так, что

$$|OB| : |BD| = |OC| : |BM|. \quad (8)$$

Множество точек M называют *версьерой*.

Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O , ось ординат направим по OC . Текущие координаты точки M обозначим через x и y , тогда $OB = y$, $BM = x$, $BC = OC - OB = a - y$. Поскольку треугольник CDO прямоугольный, в котором $\widehat{CDO} = 90^\circ$, и DB — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, то $|BD| = \sqrt{|OB||BC|}$ или $|BD| = \sqrt{y(a - y)}$. Подставляя полученные выражения в равенство (8), находим $y : \sqrt{y(a - y)} = a : x$, откуда $xy =$

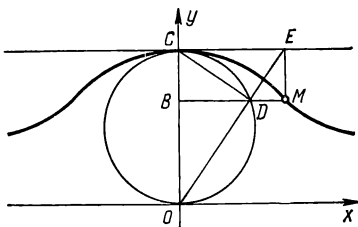
$$= a \sqrt{y(a-y)}; \quad x^2 y^2 = a^2 y(a-y); \quad x^2 y^2 = ya^3 - a^2 y^2;$$

$$(x^2 + a^2) y^2 = ya^3; \quad (x^2 + a^2) y = a^3;$$

$$y = \frac{a^3}{(x^2 + a^2)}. \quad (9)$$

Мы получили уравнение версьеры в прямоугольных декартовых координатах. Поскольку уравнение (9) является уравнением третьей степени относительно декартовых координат, то версьера — линия третьего порядка.

Так как в уравнение (9) координата x входит только во второй степени (четной), то линия симметрична относительно оси ординат. Ось абсцисс служит асимптотой рассматриваемой линии: при неограниченном возрастании x (по модулю) y стремится к нулю. В точке C версьера и окружность имеют общую касательную, параллельную оси абсцисс.



Р и с. 28

Параметрические уравнения версьеры можно записать в виде

$$x = t; \quad y = a^3 / (t^2 + a^2),$$

где роль параметра играет первая координата.

Версьерой назвал эту кривую итальянский математик Гвидо Гранди (1671—1742); название это происходит от латинского versare — обращать, поворачивать. Гвидо Гранди родился в Кремоне, был профессором философии и математики Пизанского университета. Основные его научные интересы относились к геометрии, в частности к специальным плоским линиям (так называемым лепестковым кривым или «розам»). Теория этих кривых

была изложена Гранди в сочинении, опубликованном в 1728 г.

Рассматриваемую линию называют также «локоном Аньези» в честь первой в Европе нового времени женщины-математика.

Мария Гаэтана Аньези (1718—1799) родилась в семье профессора Болонского университета. Этот самый старинный университет в Европе был открыт в 1088 г. На обучение в Болонский университет съезжались молодые люди из разных стран.

В детском возрасте Мария Аньези овладела латинским и греческим языками, а к 13 годам она усвоила еще несколько языков. В 1738 г. на публичном диспуте Мария защищала около 200 философских тезисов, в том числе тезис о способности женщин к наукам. Эти тезисы были позже опубликованы. Известна также ее речь о пользе изучения женщинами древних языков.

С двадцати лет Аньези посвящает себя математике, которую начала изучать ранее под руководством отца. Во время болезни отца ей было поручено чтение лекций в университете. В 1750 г. после смерти отца Мария Аньези стала профессором Болонского университета. К этому времени она получила известность как автор двухтомного сочинения «Основания анализа для употребления итальянского юношества», опубликованного в 1748 г. Первый том содержал обстоятельное и ясное изложение доэйлеровской аналитической геометрии. В книге рассматривалась и версьера, которую еще раньше изучал Ферма. Аньези доказала здесь, что каждое кубическое уравнение имеет три корня. Отметим, что эта книга в 1775 г. была переведена на французский язык (по инициативе Парижской Академии наук), в 1801 г. — на английский язык.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ЧЕТВЕРТОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

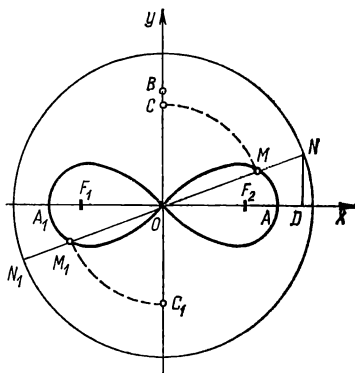
Линией (кривой) четвертого порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением четвертой степени относительно декартовых прямоугольных координат. Аналогично определяются линии (кривые) пятого, шестого и других порядков.

Множество линий (кривых) четвертого порядка содержит уже не десятки, а тысячи линий частного вида. Еще более разнообразными являются множества линий пятого и шестого порядков. Здесь рассматриваются отдельные виды линий четвертого и высших порядков, имеющие интересные свойства и практические применения.

ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

Лемниской Бернулли называют множество всех тех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть постоянная величина, равная квадрату половины расстояния между данными точками.

Пусть F_1 и F_2 — данные точки (рис. 29), расстояние



Р и с. 29

между ними обозначим через $2a$, т. е. $|F_1F_2| = 2a$ или $\frac{1}{2}|F_1F_2| = a$. Составим уравнение лемнискаты Бернулли в прямоугольной декартовой системе координат. Выберем указанную систему координат следующим образом: начало координат поместим в точке O — середине отрезка F_1F_2 , в качестве оси абсцисс возьмем прямую, проходящую через данные точки F_1F_2 (отметим на ней положительное направление от F_1 к F_2), а в качестве оси ординат — прямую, перпендикулярную отрезку F_1F_2 и проходящую через точку O — его середину. При таком выборе прямоугольной декартовой системы координат точка F_1 будет иметь координаты $x = -a, y = 0$, точка F_2 — координаты $x = a, y = 0$, т. е. $F_1(-a; 0), F_2(a, 0)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка рассматриваемого множества точек. Тогда по определению лемнискаты Бернулли

$$|F_1M| |F_2M| = a^2. \quad (1)$$

Применяя формулу $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ для определения расстояния между двумя точками на плоскости, находим

$$|F_1M| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}; \quad |F_2M| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем уравнение лемнискаты Бернулли

$$\sqrt{(x + a)^2 + y^2} \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = a^2.$$

Упростим это уравнение: $((x + a)^2 + y^2)((x - a)^2 + y^2) = a^4$; $((x^2 + y^2 + a^2) + 2ax)((x^2 + y^2 + a^2) - 2ax) = a^4$; $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$; $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4$; $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$.

Итак, получено уравнение лемнискаты Бернулли в прямоугольных декартовых координатах

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad (2)$$

эквивалентное исходному уравнению. Поскольку это алгебраическое уравнение четвертой степени относительно декартовых координат, то лемниската Бернулли — алгебраическая линия четвертого порядка. Так как в уравнение (2) x и y входят только в четных степенях (второй и четвертой), то линия симметрична относительно координатных осей.

Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах. Полюс поместим в точке O — начале декартовой системы координат, а полярную ось направим по оси абсцисс. В этом случае декартовы координаты x, y точки M через ее полярные координаты ρ, φ выражаются формулами $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Подставляя эти выражения в уравнение (2), находим $((\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2)^2 = 2a^2((\rho \cos \varphi)^2 - (\rho \sin \varphi)^2)$; $(\rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))^2 = 2a^2\rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \rho^4 = 2a^2\rho^2 \cos 2\varphi$. Следовательно,

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \quad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением лемнискаты в полярных координатах. Это уравнение можно записать и в другом виде. Поскольку $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) = 2\cos^2 \varphi - 1$, то уравнение (3) запишется так: $\rho^2 = 2a^2(2\cos^2 \varphi - 1)$. Положив $b = a\sqrt{2}$, получаем

$$\rho^2 = b^2(2\cos^2 \varphi - 1). \quad (4)$$

Уравнение (4) используют для построения по точкам лемнискаты Бернулли. Из этого уравнения следует, что полярный радиус произвольной точки M лемнискаты есть катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $b\sqrt{2} \cos \varphi$, а другой катет равен b . Действительно, если x, y — катеты прямоугольного треугольника, z — его гипотенуза, то $x^2 + y^2 = z^2$. В данном случае $x = \rho, y = b, z = b\sqrt{2} \cos \varphi$, поэтому $\rho^2 + b^2 = 2b^2 \cos^2 \varphi, \rho^2 = 2b^2 \cos^2 \varphi - b^2, \rho^2 = b^2(2\cos^2 \varphi - 1)$, т. е. ρ удовлетво-

ряет уравнению (4). Обратно, если $x^2 + y^2 = z^2$, то x , y — катеты, z — гипотенуза прямоугольного треугольника. Этот факт позволяет осуществить построение точек лемнискаты следующим образом

Отложим на оси абсцисс от точки O два отрезка длиной $b = a\sqrt{2}$: $|OA| = b$, $OA_1 = b$ (см. рис. 29). На оси ординат отложим отрезок $|OB| = b$, тогда $|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$. Опишем окружность радиусом $R = |AB| = b\sqrt{2}$ с центром в точке O . Через точку O проведем прямую под произвольным углом φ к оси абсцисс, причем $|\varphi| < \pi/4$ (это следует из уравнения (3): так как $\rho^2 \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$, т. е. $|\varphi| \leq \pi/4$). Точки пересечения указанной прямой с окружностью обозначим буквами N и N_1 . Из точки N опустим перпендикуляр на ось абсцисс; пусть он пересечет эту ось в точке D . Из точки A радиусом, равным $|OD|$, засекаем на OB точку C . Тогда $|OC|^2 = |AC|^2 = |OA|^2 = |OD|^2 - |OA|^2 = (|ON| \cos \varphi)^2 - |OA|^2 = (b\sqrt{2} \cos \varphi)^2 - b^2$, $|OC|^2 = (b\sqrt{2} \cos \varphi)^2 - b^2$. Из этого равенства и уравнения (4) следует, что $|OC| = \rho = |OM|$, т. е. длина катета OC определяет полярный радиус точки M лемнискаты, соответствующий углу φ : $M(\rho; \varphi)$. Осталось радиусом, равным $|OC|$, сделать засечки на прямой N_1ON в точках M и M_1 , которые будут принадлежать лемнискате. Поворачивая прямую N_1ON вокруг точки O и повторяя построение, получим новые пары точек. Соединив эти точки плавной линией, построим лемнискату Бернулли (см. рис. 29).

З а м е ч а н и е 1. Лемнискату можно построить и другим способом. Из уравнения (3) следует, что $\rho = a\sqrt{2} \cos 2\varphi$. Отсюда видно, что ρ монотонно убывает (от $a\sqrt{2}$ до 0), когда φ меняется от 0 до $\pi/4$. Точка $M(\rho, \varphi)$ при этом опишет дугу линии, лежащую в первой четверти (если $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$, то таким значениям φ не соответствуют

действительные значения ρ , т. е. для этих значений φ нет соответствующих точек лемнискаты). Зеркально отразив от оси Ox построенную дугу, получим первую петлю кривой, расположенную в первой и четвертой четвертях. Эту петлю зеркально отразим относительно оси Oy и получим вторую петлю кривой, расположенную во второй и третьей четвертях.

З а м е ч а н и е 2. Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в другой прямоугольной декартовой системе координат $Ox'y'$, полученной поворотом системы Oxy на угол $\alpha = -45^\circ$. Так как $\cos(-45^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\sin(-45^\circ) = -\sqrt{2}/2$, то формулы преобразования координат $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$; $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ принимают вид $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - x')$. Подставим эти выражения в

$$\text{уравнение (2). Поскольку } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x' + y')^2 + \frac{1}{2}(y' - x')^2 = \\ = \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{1}{2}(y'^2 - 2x'y' + x'^2) = x'^2 + y'^2;$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(y' - x')^2 = 2x'y', \text{ то уравнение (2) принимает вид } (x'^2 + y'^2)^2 = 4a^2x'y'.$$

Это уравнение в соответствующих полярных координатах запишется так:

$$(\rho'^2)^4 = 4a^2\rho' \sin \varphi' \rho' \cos \varphi', \quad \rho'^2 = 2a^2 \sin 2\varphi'.$$

Обозначая через x, y прямоугольные координаты, а через ρ, φ — полярные координаты, полученные уравнения записываем так:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy, \quad (5)$$

$$\rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Таким образом, в зависимости от выбора системы координат лемниската Бернулли в декартовых координатах определяется уравнением (2) или (5), а в полярных координатах — уравнением (3) или (6). Лемниската Бернулли, определяемая уравнением (5), симметрична относительно прямой $y = x$ (сделайте чертеж).

Лемниската Бернулли обладает рядом интересных свойств и находит широкое применение. В технике лемниската используется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса (на железнодорожных линиях в горной местности, на трамвайных путях). Эквипотенциальные линии поля, создаваемого дву-

мя параллельными токами, проходящими по достаточно длинным проводам в плоскости, перпендикулярной им, в частном случае являются лемнискатами.

Линия названа по имени ученого, описавшего ее. Уравнение лемнискаты впервые встречается в статье Я. Бернулли, опубликованной в 1694 г. в журнале «*Acta eruditorum*» («Труды ученых»).

Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик. По желанию своего отца, городского советника в Базеле, Якоб изучал философию и богословие, однако решил посвятить себя математике — занятию, которое в тогдашней Швейцарии не сулило выгодной карьеры. Самостоятельно овладев математическими знаниями, будучий ученый несколько лет учительствовал в частных домах. Побывав во Франции, Голландии, Англии, Бернулли с 1683 г. приступил к чтению лекций в Базельском университете, сначала по физике, а затем по математике.

Я. Бернулли принадлежат выдающиеся заслуги в развитии анализа бесконечно малых, начало которому положила работа Г. В. Лейбница, опубликованная в 1684 г. Ознакомившись с этой работой, Бернулли сразу правильно оценил ее значение и стал первым последователем нового исчисления бесконечно малых. Я. Бернулли применил новые идеи к изучению свойств ряда линий: лемнискаты; логарифмической спирали, цепной линии и др. Работы Бернулли относятся также к области арифметики, алгебры, геометрии, теории рядов, теории вероятностей. Он доказал теорему, которую называют теперь «теоремой Бернулли» и которая имеет важное значение в теории вероятностей и ее приложениях в статистике. Совместно с братом Иоганном (1667—1748), его учеником, математиком, иностранным почетным членом Петербургской Академии наук, Якоб Бернулли положил начало новой области математики — вариационному исчислению. Я. Бернулли поставил и частично решил изопериметрическую задачу и задачу о брахистохроне, или кривой быстрейшего спуска, предложенную братом Иоганном. Конец жизни Я. Бернулли был омрачен спорами с братом о приоритете в области некоторых открытий. Отметим, что их

соревнование в решении ряда трудных задач анализа имело положительные результаты. После смерти Я. Бернулли кафедру математики в Базельском университете занял И. Бернулли.

Среди других учеников Я. Бернулли следует назвать его племянника Николая I Бернулли (1687—1759), профессора математики в Падуге (1716), а также Я. Германа (1678—1733), математика и механика, одного из первых членов Петербургской академии наук. Учеником Я. Бернулли был также Пауль Эйлер, отец знаменитого математика Леонарда Эйлера (1707—1783), члена Петербургской академии наук.

ОВАЛЫ КАССИНИ

Овалом Кассини называют множество всех тех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть постоянная величина.

Эту постоянную обозначим через b^2 и составим уравнение овала Кассини в прямоугольной декартовой системе координат. Начало системы поместим в середине отрезка F_1F_2 , концами которого являются данные точки F_1, F_2 , длину самого отрезка обозначим через $2a$, т. е. $|F_1F_2| = 2a$. При указанном выборе координатной системы координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно равны: $x_1 = -a; y_1 = 0; x_2 = a; y_2 = 0$, т. е. $F_1(-a; 0); F_2(a; 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка данного множества. Тогда по определению $|F_1M| \cdot |F_2M| = b^2$. Подставляя сюда выражения $|F_1M| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, получаем уравнение рассматриваемого множества точек $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = b^2$. Упростим это уравнение:

$$\begin{aligned} ((x+a)^2 + y^2)((x-a)^2 + y^2) &= b^4; \\ ((x^2 + y^2 + a^2) + 2ax)((x^2 + y^2 + a^2) - 2ax) &= b^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+a^2)^2-(2ax)^2 &= b^4; \\ (x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2 &= b^4; \\ (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2) &= b^4-a^4.\end{aligned}\tag{7}$$

Уравнение (7) является уравнением овалов Кассини в прямоугольных декартовых координатах. Поскольку это уравнение четвертой степени относительно декартовых координат, то овалы Кассини — линии четвертого порядка. Для этих линий координатные оси являются осями симметрии, так как x и y входят в уравнение только в четных степенях (второй и четвертой).

Запишем уравнение (7) в полярных координатах. Полюс поместим в начале декартовой системы, полярную ось направим по оси абсцисс, тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Подставив эти выражения в уравнение (7), получим:

$$\begin{aligned}((\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2)^2 - 2a^2((\rho \cos \varphi)^2 - (\rho \sin \varphi)^2) &= b^4 - a^4; \\ \rho^4 - 2a^2\rho^2 \cos 2\varphi &= b^4 - a^4; \quad \rho^4 - 2a^2\rho^2 \cos 2\varphi - (b^4 - a^4) = 0; \\ \rho^2 &= a^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{(a^2 \cos 2\varphi)^2 + (b^4 - a^4)} = \\ &= a^2 \left(\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi \pm \left(\frac{b^4}{a^4} - 1\right)} \right); \\ \rho &= a \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{b^4}{a^4} - 1\right)}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Различают три основные формы овалов Кассини в зависимости от соотношений параметров a и b : 1) $b > a$; 2) $b = a$; 3) $b < a$.

В случае $b > a$ в уравнении (8) из двух знаков перед внутренним корнем следует брать только знак плюс, так как для отрицательных значений подкоренное выражение для первого корня будет отрицательным и не существует действительных значений ρ . При изменении φ от 0 до

$\pi/2$ полярный радиус будет монотонно изменяться от $\rho_1 = \sqrt{b^2 + a^2}$ до $\rho_2 = \sqrt{b^2 - a^2}$. Овал в этом случае имеет форму замкнутой линии, симметричной относительно осей координат.

Если $b = a$, то уравнение (8) принимает вид $\rho = a \sqrt{2 \cos 2\varphi}$ и определяет лемнискату Бернулли (уравнение (7) при этом обращается в уравнение (2)). Следовательно, лемниската Бернулли — частный случай овалов Кассини.

В случае $b < a$ введем новую переменную α по формуле

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} &= \sin 2\alpha; \quad \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 = \sin^2 2\alpha; \quad \frac{b^4}{a^4} - 1 = \\ &= -\left(1 - \frac{b^4}{a^4}\right) = -(1 - \sin^2 2\alpha) = -\cos^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Уравнение (8) запишем так:

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}.$$

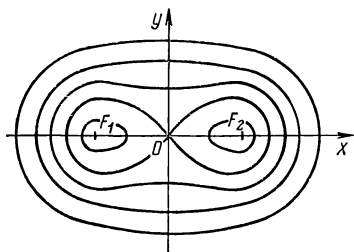
Поскольку $b < a$, то $\sin 2\alpha < 1$; значит, $\alpha < 45^\circ$. Из этого уравнения следует, что каждому значению полярного угла φ , где $0 \leq \varphi \leq \alpha$, соответствует два действительных значения ρ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a \sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}; \\ \rho_2 &= a \sqrt{\cos 2\varphi - \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}, \end{aligned}$$

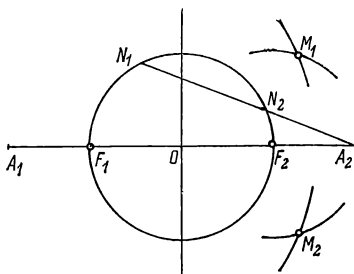
причем $\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\rho_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$ при $\varphi = 0$. При возрастании φ от 0 до α значения ρ_1 будут убывать, а значения ρ_2 возрастать; эти значения окажутся равными, когда $\varphi = \alpha$. При дальнейшем возрастании угла φ от α до $\pi/2$ ρ не может принимать действительных значений.

Овал в этом случае будет состоять из двух замкнутых линий

Таким образом, можно проследить изменение формы овалов Кассини (с фиксированными одними и теми же точками F_1 и F_2) в зависимости от изменения параметра b . Если $b=0$, то овал вырождается в две точки F_1, F_2



Р и с. 30



Р и с. 31

(только они удовлетворяют уравнению $|F_1M| |F_2M| = b^2$). При возрастании параметра b от 0 до a около точек F_1 и F_2 появляются замкнутые линии; они будут увеличиваться в размерах с возрастанием b . В случае $b=a$ эти замкнутые линии сольются и образуют лемнискату Бернулли. При дальнейшем увеличении параметра b овалы будут представлять собой замкнутые линии (рис. 30).

Покажем, как построить овал Кассини по точкам. Если задано уравнение (8), в котором указаны значения a и b , то строим сначала фокусы — точки $F_1(-a; 0)$, $F_2(a; 0)$ и вершины — точки $A_1(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, $A_2(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$, в которых овал пересекает оси абсцисс. Из точки A_2 (рис. 31) проведем луч, пересекающий окружность радиуса $R = a$ с центром в начале координат. Пусть

этот луч пересекает окружность в точках N_1 и N_2 . Опишем две окружности: с центром в точке F_1 и радиусом $R_1 = |A_2N_1|$, с центром в точке F_2 и радиусом $R_2 = |A_2N_2|$. Точки M_1 и M_2 пересечения указанных окружностей будут принадлежать овалу. Действительно, $|M_1F_1| + |M_1F_2| = |A_2N_1| + |A_2N_2| = \text{const}$ (по теореме о произведении секущей на ее внешнюю часть). Меняя направление луча AN_2N_1 , можно построить сколько угодно точек овала.

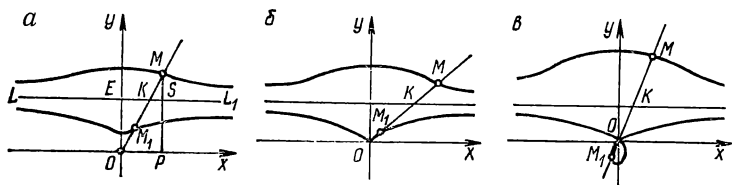
Укажем явления, при наблюдении или исследовании которых встречаются с овалами Кассини. Два параллельных тока, проходящих по достаточно длинным прямолинейным проводникам, создают в плоскости, перпендикулярной этим проводникам, потенциальное поле, эквипотенциальные линии которого представляют собой семейство овалов Кассини. Фокусы этого семейства находятся в точках пересечения проводников с плоскостью потенциального поля. Семейство овалов Кассини можно наблюдать, рассматривая арагонитовую или селитрянную пластинку в поляризованном свете.

Овалы Кассини названы в честь французского ученого, по национальности итальянца, впервые изучившего их. Жан Доминик Кассини (1625—1712) — астроном, первый директор Парижской обсерватории (с 1669 г.) — открыл эти линии при попытке определить орбиту Земли. Он полагал, что Земля движется по овалу, а не по эллипсу, как считал Кеплер.

КОНХОИДА

В плоскости фиксируем прямую LL_1 и точку O , отстоящую от этой прямой на расстоянии $|OE| = a$ (рис. 32). Проведем луч OK , пересекающий прямую LL_1 в точке K . На луче от точки K , по обе стороны от

нее, отложим два отрезка KM и M_1K , таких, что $|KM| = |KM_1| = l$, где l — заданное число. Вращая луч вокруг точки O (от 0 до 180°) и проводя аналогичные построения (при одном и том же значении l), получим линию, описываемую точками M и M_1 . Эту линию называют *конхойдой*. Точку O при этом считают полюсом конхой-



Р и с. 32

ды, а прямую LL_1 — ее базисом. Линия эта состоит из двух ветвей: одну ветвь описывает точка M , другую — точка M_1 .

Составим уравнение конхойды в полярных и декартовых прямоугольных координатах. Принимаем полюс конхойды за полюс полярной системы и начало прямоугольной декартовой системы координат; прямую, проходящую через точку O параллельно прямой LL_1 , — за ось абсцисс и полярную ось; прямую, проходящую через точки O и E , — за ось ординат (в качестве ее положительного направления выбираем направление от точки O к точке E). Обозначим буквой φ величину угла наклона луча OK к полярной оси и оси абсцисс. При таком выборе полярной системы координат точка M имеет координаты (ρ, φ) , где $\rho = |OM|$, точка M_1 — координаты (ρ_1, φ) , где $\rho_1 = |OM_1|$. Из рис. 32, а (на котором предполагается, что $l < a$) следует, что $\rho = |OK| + l$, $\rho_1 = |OK| - l$. Поскольку $|OK| = a : \sin \varphi$, то

$\rho = \frac{a}{\sin \varphi} + l$; $\rho_1 = \frac{a}{\sin \varphi} - l$. Эти две формулы можно объединить в одну:

$$\rho = \frac{a}{\sin \varphi} \pm l.$$

Здесь знак плюс — для верхней ветви, знак минус — для нижней ветви конхойды. Мы получили уравнение конхойды в полярных координатах.

Форма конхойды зависит от соотношения между параметрами a и l . При $l=a$ и $l>a$ линия имеет вид, изображенный соответственно на рис. 32, б, в.

Чтобы записать уравнение конхойды в прямоугольных декартовых координатах, необходимо воспользоваться формулами, выражающими ρ , $\sin \varphi$ через x , y . Однако в данном случае такое уравнение можно получить непосредственно из следующих геометрических соображений. Из точки $M(x, y)$ опустим перпендикуляр на ось абсцисс. Точку пересечения с этой осью обозначим буквой P ; пусть S — точка пересечения перпендикуляра с базисной прямой LL_1 . Из подобия треугольников OMP и KMS имеем $|OM| : |MK| = |MP| : |MS|$.

Поскольку $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|MK| = l$, $|MP| = y$, $|MS| = y - a$, то предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l} = \frac{y}{y - a},$$

откуда $(y - a) \sqrt{x^2 + y^2} = ly$; $(y - a)^2 (x^2 + y^2) = y^2$;

$$(x^2 + y^2) (y - a)^2 - l^2 y^2 = 0. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться в том, что полученное уравнение определяет конхойду в целом (обе ее ветви). Уравнение (9) является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно декартовых координат; поэтому конхойда — линия четвертого порядка.

Конхоида пересекает ось ординат в точках $(0; a+l)$ и $(0; a-l)$; это следует из определения данной линии. Однако уравнению (9) удовлетворяют также значения $x=0, y=0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ также принадлежит конхоиде; она является ее особой точкой. При $l < a$ (рис. 32, а) эта точка будет изолированной (вблизи ее нет других точек линии); при $l = a$ (рис. 32, б) линия имеет в начале координат точку возврата с касательной $x=0$; при $l > a$ (рис. 32, в) конхоида пересекает себя в начале координат. Такую точку называют *узловой точкой* (или *узлом*).

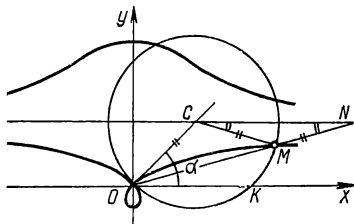
Отметим, что базисная прямая LL_1 будет асимптотой конхоиды: точки линии неограниченно приближаются к этой прямой при неограниченном удалении их от начала координат. Аналитически это следует из того, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = \lim_{\varphi \rightarrow 0} y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\sin \varphi} \pm l \right) \sin \varphi = \\ = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (a \pm l \sin \varphi) = a; \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi} MP = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} y = a.$$

Рассматриваемую линию назвал конхоидой, т. е. похожей на раковину, греческий ученый Прокл. Диадох Прокл (ок. 410—485) — автор многих сочинений по философии и математике, родился в Константинополе, большую часть жизни прожил в Афинах. Прокл — автор комментариев к первой книге «Начал» Евклида. Эти комментарии являются источником наших знаний об истории геометрии в древней Греции. Прокл пытался доказать пятый постулат Евклида (аксиому о параллельных).

Изучаемую линию называют также конхоидой Никомеда, по имени древнегреческого геометра, впервые описавшего ее. Никомед жил в III—II вв. до н. э. Он изобрел также прибор для механического черчения линии, применил линию к решению задач об удвоении куба и трисекции угла.

Покажем, как применяется конхоида для решения последней задачи. Пусть нужно угол α (рис. 33) разделить на три равные части. На одной из сторон данного угла от его вершины O отложим отрезок $|OC|=l$. Опишем окружность радиуса l с центром в точке C . Через точку C проведем прямую, параллельную другой стороне данного угла. Приняв эту прямую за базис, а точку O — за полюс, построим конхоиду. Соединим точку O с точкой M пересечения конхоиды и окружности. Покажем, что угол $МОК$ равен $(1/3)\alpha$. В самом деле, продолжив OM до пересечения с базисом конхоиды в точке N , получим $|MN|=l$ (по основному свойству конхоиды). Поскольку $|OC|=|CM|=l$ и $|MN|=l$, то треугольники CMN и OCM равнобедренные. Рассмотрим соотношения



Р и с. 33

углов этих треугольников: $\widehat{MCN} = \widehat{MNC}$, $\widehat{COM} = \widehat{CMO}$,
 $\widehat{CMO} = 2\widehat{CNM}$ (как внешний угол треугольника CMN),
 $\widehat{CNM} = \widehat{МОК}$, $\alpha = \widehat{COM} + \widehat{МОК} = 2\widehat{CNM} + \widehat{МОК} = 2\widehat{МОК} +$
 $+ \widehat{МОК} = 3\widehat{МОК}$, $\alpha = 3\widehat{МОК}$, откуда и следует наше утверждение.

В XVII и XVIII веках конхоиду Никомеда исследовали многие ученые. Декарт демонстрировал на этой линии предложенный им способ построения нормалей и касательных к кривым. Гюйгенс установил, что площадь фигуры, заключенной между конхоидой и ее базисом, является бесконечно большой. Ньютон применил конхоиду для геометрического решения уравнения третьей степени.

Христиан Гюйгенс (1629—1695) — знаменитый нидерландский механик, физик, математик и астроном. Он родился в Гааге в семье дипломата и поэта Константина Гюйгенса. Разносторонние способности Христиана обнаружились в раннем детстве, и в шестнадцатилетнем возрасте он поступил в университет. В университетах Лейдена и Бреды он изучал юридические науки, но увлекся математикой и физикой, проявив большой интерес к задаче о квадратуре круга. В 22 года Гюйгенс опубликовал работу об определении длины окружности. Он работал в Гааге и продолжительное время в Париже, где в 1666 г. стал президентом Парижской академии наук. Велики заслуги Гюйгенса в организации всей работы академии, которой он руководил пятнадцать лет: эти годы были весьма плодотворны и в его научном творчестве.

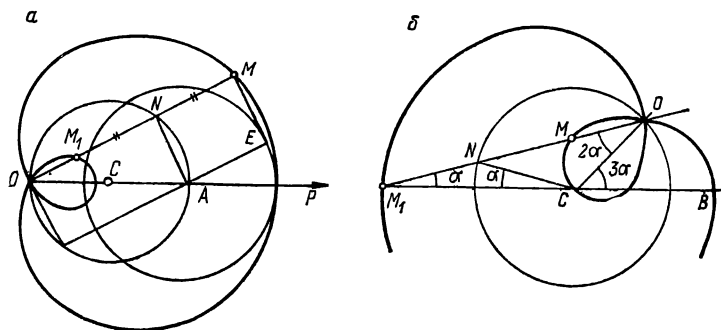
Гюйгенс исследовал свойства многих линий (трактрисы, логарифмической спирали, цепной линии и др.), занимался вычислением их длин (спрямлением кривых), определением площадей плоских криволинейных фигур и площадей поверхностей вращения. В его работах имеются элементы дифференциальной геометрии (раздел геометрии, в котором геометрические объекты исследуются методами математического анализа или анализа бесконечно малых). Гюйгенс опубликовал первое сочинение по теории вероятностей — «О расчетах в азартной игре» (1657). Он писал: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории» [см.: История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука, 1970, с. 89]. В механике Гюйгенсу принадлежит изобретение маятниковых часов (1657) и разработка их теории (1673).

Гюйгенс совместно с английским ученым Робертом Гуком (1635—1703) определил постоянные точки термометра — точку таяния льда и точку кипения воды. В астрономии с помощью усовершенствованных им телескопов Гюйгенс установил, что Сатурн окружен кольцом и име-

ет спутника — Титана, а также сделал другие открытия. Он сконструировал окуляр, носящий его имя и применяемый до сих пор. В «Трактате о свете» (1690) Гюйгенс изложил волновую теорию света и применил ее к объяснению оптических явлений. В приложении «О причинах тяжести» к указанному трактату он близко подошел к открытию закона всемирного тяготения.

УЛИТКА ПАСКАЛЯ

Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке C (рис. 34, а). Выберем на данной окружности точку O . Представим себе, что вокруг точки O вращается луч OM . В каждом его положении откла-



Р и с. 34

ки N пересечения луча и окружности отрезок $|NM| = l$, где l — заданное положительное число. При повороте луча от 0 до 180° получим множество точек M . При дальнейшем повороте луча от 180° до 360° , откладывая отрезок длины l , как и ранее, по направлению луча, мы фактически будем откладывать его в сторону, противоположную прежней, т. е. $|NM_1| = l$, и получим точки M_1 . Множество точек M и M_1 называют *улиткой Паскаля*.

З а м е ч а н и е. Сравнивая определения конхоиды Никомеда и улитки Паскаля, замечаем, что построение их точек производится одним и тем же способом. Разница состоит в том, что базисом конхоиды является прямая, а базисом улитки — окружность. Улитку Паскаля можно рассматривать как конхоиду окружности. В общем случае роль базиса может играть любая линия, в связи с чем рассматривают также и другие конхоидальные кривые.

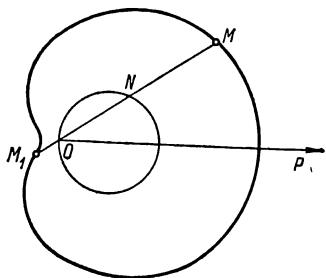
Составим уравнение улитки Паскаля в полярных и декартовых прямоугольных координатах. Точку O примем за полюс, полярную ось направим от точки O к точке C — центру окружности. Таким же образом выберем ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат с началом в той же точке O . Полярные координаты точки M обозначим буквами ρ, φ (где $\rho = |OM|$; φ — величина наклона луча ON к полярной оси), а ее декартовы координаты — буквами x, y . Так как $\rho = |OM| = |ON| + |NM|$ и $|ON| = 2r \cos \varphi$ (получено из $\triangle ONA$), $|MN| = l$ (по определению линии), то $\rho = 2r \cos \varphi + l$. Для точки $M_1(\rho, \varphi)$ аналогично получаем $\rho = 2r \cos \varphi - l$. Эти две формулы можно объединить в одну: $\rho = 2r \cos \varphi \pm l$.

Мы получили уравнение улитки Паскаля в полярных координатах. Запишем его в прямоугольных декартовых координатах, подставив формулы $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = x : \sqrt{x^2 + y^2}$:

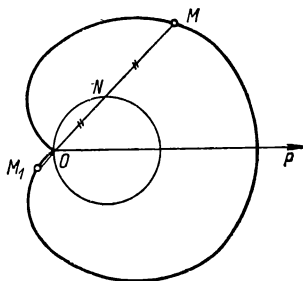
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm l; \quad \sqrt{x^2 + y^2} - \\ &\quad - \frac{2rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm l; \\ \frac{x^2 + y^2 - 2rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \pm l; \quad (x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2 (x^2 + y^2); \\ (x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2 (x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением улитки Паскаля в прямоугольных декартовых координатах. Посколь-

ку это уравнение четвертой степени относительно декартовых координат, то улитка Паскаля — алгебраическая линия четвертого порядка. Линия эта симметрична относительно оси Ox , так как в уравнение (10) y входит только в четной степени.



Р и с. 35



Р и с. 36

Форма улитки Паскаля зависит от соотношения между значениями двух параметров r и l . Если $l < 2r$, то линия имеет вид, приведенный на рис. 34, а. Точка O (полюс) в этом случае будет узловой (в ней линия пересекает себя). На рис. 35 изображена улитка Паскаля в случае, когда $l > 2r$. Для этого случая полюс будет изолированной особой точкой; точка O принадлежит линии, поскольку ее координаты ($x=0$; $y=0$) удовлетворяют уравнению (10). Если $l=2r$, то линия имеет вид, изображенный на рис. 36. Полюс в этом случае является точкой возврата.

Улитку Паскаля можно рассматривать как некоторое другое множество точек. Чтобы сделать это, введем определение подеры.

Подерой данной линии относительно какой-либо точки называют новую линию, являющуюся множеством

оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной линии.

Улитка Паскаля представляет собой подеру окружности относительно некоторой точки плоскости. Действительно, проведем окружность радиусом l с центром в точке A (рис. 34, a) и построим четырехугольник $ANME$, который будет прямоугольником. Следовательно, точка M улитки Паскаля является основанием перпендикуляра, опущенного из полюса O на касательную в точке E к данной окружности.

Итак, множество указанных точек, т. е. улитка Паскаля, и будет подерой окружности относительно точки O .

Можно указать еще один способ получения улитки Паскаля. Введем для этого понятия преобразования инверсии на плоскости.

Инверсией на плоскости называют преобразование, которое каждую точку M данной плоскости переводит в такую точку M' , лежащую на луче OM , что $OM \cdot OM' = k$, где $k > 0$ — некоторое постоянное действительное число (OM, OM' — величины направленных отрезков). Точку O называют центром или полюсом инверсии, k — степенью инверсии или ее коэффициентом. Если $k = R^2$, то точки окружности S с центром O и радиусом R переходят при инверсии сами в себя; точки, внешние по отношению к S , переходят во внутренние, а внутренние — во внешние. В связи с этим инверсию иногда называют *симметрией* относительно окружности.

Центр инверсии не имеет образа. Инверсия с отрицательной степенью k равносильна инверсии с тем же центром O и положительной степенью k , сопровождаемой симметрией относительно точки O . Инверсию с положительной степенью k называют иногда *гиперболической инверсией*, а с отрицательной степенью — *эллиптической инверсией* или *антиинверсией*. Прямая, проходя-

щая через центр инверсии, переходит сама в себя. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии. В декартовых прямоугольных координатах инверсия задается формулами: $x' = kx/(x^2 + y^2)$; $y' = ky/(x^2 + y^2)$.

Улитку Паскаля можно получить путем инверсии линии второго порядка относительно ее фокуса. Инверсию определим формулой $\rho\rho' = k$, где $\rho = |OM|$, $\rho' = |OM'|$, поэтому $\rho = \pm OM$, $\rho' = \pm OM'$ в зависимости от знаков OM и OM' . Уравнение линии второго порядка в полярных координатах можно записать в виде $\rho = k/(2r \cos \varphi - l)$. Подвергнув эту линию преобразованию инверсии $\rho\rho' = k$, найдем $\rho' = 2r \cos \varphi - l$. Полученное уравнение определяет улитку Паскаля. Если $l > 2r$, то преобразуемая линия — эллипс; ему соответствует улитка с изолированной особой точкой. При $l = 2r$ исходной линией является парабола. Если $l < 2r$, то преобразованию инверсии подверглась гипербола; соответствующая ей улитка имеет узловую точку.

Улитка Паскаля относится к числу трисектрис, т. е. линий, позволяющих решить задачу о трисекции угла. В самом деле, если взять улитку с петлей, проходящей через центр окружности (для чего следует выбрать $l = r$), то треугольники M_1NC и NCO (рис. 34, б) будут равно-

бедренными, откуда следует, что $\angle OCB = 3\angle OM_1B$.

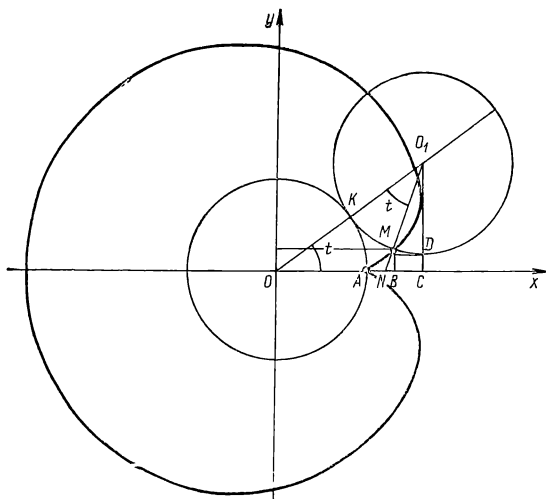
Улитка Паскаля широко применяется в технике. Она используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания. В механизме для поднятия и опускания семафора одна из составных частей очерчена по улитке Паскаля.

Рассматриваемая линия названа в честь Этъена Паскаля (1588—1651) — французского математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля (1623—1662). До 1631 г. Э. Паскаль работал в налоговой палате в Клермон-Ферране, а затем в Париже. Он принимал деятельное участие в работе кружка математиков и физиков, который в 1666 г. был преобразован в Парижскую академию наук. Математические интересы Э. Паскаля касались учения о кривых линиях.

КАРДИОИДА

Кардиоидой называют линию, описанную точкой M окружности радиуса r , катящейся по окружности с таким же радиусом.

Рассмотрим неподвижную окружность радиуса r с центром в точке O (рис. 37) и катящуюся по ней другую



Р и с. 37

окружность такого же радиуса r с центром в точке O_1 . Эта точка меняет свое положение с течением времени; в начальный момент она находилась на прямой OA , а точка M совпадала с точкой A , и в этой точке окружности касались. Угол MO_1K между радиусами, проведенными в вычерчивающую точку M образующей окружности и в точку K касания ее с неподвижной окружностью,

обозначим буквой t ($t = \widehat{MO_1K}$). Так как качение предполагается совершающимся без скольжения, то соответствующие дуги AK и KM равны или $rt_1 = rt$, откуда $t_1 = t$, где $t_1 = \widehat{KOA}$.

Составим уравнения кардиониды в различных координатах. Систему прямоугольных декартовых координат выберем так, как показано на рис. 37. Обозначим прямоугольные декартовы координаты точки M через x и y . Тогда $x = OB = OC - BC$, $y = BM = CD = CO_1 - DO_1$. Отметим,

что $OO_1 = 2r$, $\widehat{O_1NC} = 2t$ (как внешний угол $\triangle OO_1N$), $\widehat{O_1MD} = 2t$. Поскольку $OC = 2r \cos t$, $BC = r \cos 2t$, $CO_1 = 2r \sin t$, $DO_1 = r \sin 2t$, то

$$x = 2r \cos t - r \cos 2t; \quad y = 2r \sin t - r \sin 2t. \quad (11)$$

Мы получили параметрические уравнения кардиониды.

Чтобы найти полярное уравнение кардиониды, примем за полюс точку A (рис. 37), а полярную ось направим по оси Ox . Поскольку четырехугольник AOO_1M является равносторонней трапецией, то полярный угол φ точки M окажется равным углу поворота образующей. Учитывая, что $t = \varphi$, обозначаем во втором уравнении y через $\rho \sin t = \rho \sin \varphi$ и получаем $\rho \sin \varphi = 2r \sin \varphi - 2r \sin \varphi \cos \varphi$. Сокращая это равенство на $\sin \varphi$, запишем уравнение кардиониды в полярных координатах

$$\rho = 2r(1 - \cos \varphi). \quad (12)$$

Подставляя в уравнение (12) выражения $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $\cos \varphi = x' : \sqrt{x'^2 + y'^2}$, находим $(x'^2 + y'^2 + 2rx')^2 = 4r^2(x'^2 + y'^2)$. Это уравнение является искомым. Обозначая текущие координаты через x, y , получаем уравнение $(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$, из которого видно, что кардиоида — алгебраическая линия четвертого порядка.

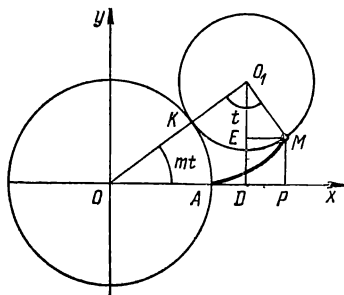
З а м е ч а н и е. Уравнение $\rho = 2r(1 + \cos \varphi)$ также определяет кардиоиду в полярной системе координат с полюсом в той же точке и противоположно направленной полярной осью.

ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

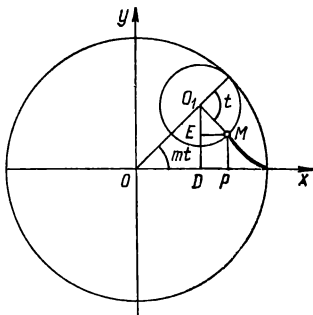
Циклоидальной кривой называют траекторию точки, неизменно связанной с окружностью, катящейся без скольжения по другой окружности. Рассмотрим важнейшие примеры таких кривых.

Пусть точка находится на самой катящейся окружности (ее называют образующей окружностью). При этом условии описываемые линии подразделяют на *эпициклоиды* и *гипоциклоиды* в зависимости от того, где располагается образующая окружность — с наружной или внутренней стороны неподвижной окружности.

Составим параметрические уравнения эпициклоиды и гипоциклоиды. Обозначим через r радиус образующей окружности, через R — радиус неподвижной окружности (рис. 38). Предположим, что в исходном положении вычерчивающая точка M совпадала с точкой A , в которой производящая окружность касалась неподвижной окружности. Ось абсцисс направим через точку A . Обозначим буквой t величину угла MO_1K между радиусами, проведенными из центра O_1 образующей окружности в точку O и точку M . Отношение радиусов рассматриваемых окружностей обозначим через m и назовем это число модулем: $m = r/R, r = mR$. Поскольку образующая окружность катится



Р и с. 38



Р и с. 39

по неподвижной окружности без скольжения, то длина дуги AK равна длине KM : $\widehat{AK} = \widehat{KM}$ или $R\widehat{KOA} = rt$, откуда $\widehat{KOA} = \frac{r}{R}t = mt$. Обозначим декартовы прямоугольные координаты точки M через x, y . Так как $OD = OO_1 \cos mt = (OK + KO_1) \cos mt = (R + r) \cos mt$; $ME = O_1M \sin \widehat{MO_1E} = r \sin(t - \widehat{OO_1D}) = r \sin\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = r \sin\left((t + mt) - \frac{\pi}{2}\right) = -r \cos(t + mt)$; $O_1D = OO_1 \sin mt = (R + r) \sin mt$; $O_1E = O_1M \cos \widehat{MO_1E} = r \cos(t - \angle OO_1D) = r \cos\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = r \cos\left((t + mt) - \frac{\pi}{2}\right) = r \sin(t + mt)$; $r = mR$ и по определению $x = OP = OD + ME$; $y = MP = O_1D - O_1E$, то

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos mt - mR \cos(t + mt); \\ y = (R + mR) \sin mt - mR \sin(t + mt). \end{cases} \quad (13)$$

Мы получили параметрические уравнения эпициклоиды.

Аналогичным способом для координат x, y точки M гипоциклоиды (рис. 39) находим

$$\begin{aligned}x &= OP = OD + ME = (R - r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E; \\y &= PM = O_1D - O_1E = (R - r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E.\end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{MO_1E} = \sin \left(\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (t - mt) \right) = \cos (t - mt)$, $\widehat{MO_1E} = \cos \left(\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - m - t \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - (t - mt) \right) = \sin (t - mt)$, то параметрические уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + mR \cos (t - mt); \\ y = (R - mR) \sin mt - mR \sin (t - mt). \end{cases} \quad (14)$$

Заменяя в параметрических уравнениях (13) число m на $-m$, получим уравнения

$$\begin{aligned}x &= (R - mR) \cos mt + mR \cos (t - mt); \\y &= -((R - mR) \sin mt - mR \sin (t - mt)).\end{aligned}$$

Сопоставляя эти уравнения с параметрическими уравнениями (14) гипоциклоиды, замечаем, что первые уравнения в обоих случаях одинаковы, а вторые отличаются только знаками правой части. Значит, полученные уравнения также определяют гипоциклоиду, симметричную гипоциклоиде (14) относительно оси абсцисс.

Это дает возможность определить эпициклоиду и гипоциклоиду одними и теми же параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}x &= (R + mR) \cos mt - mR \cos (t + mt); \\y &= (R + mR) \sin mt - mR \sin (t + mt),\end{aligned}$$

если условиться считать, что в этих уравнениях модуль m может принимать как положительные, так и отрицательные значения (в последнем случае $r = mR < 0$).

Итак, при указанном условии последние уравнения будут общими параметрическими уравнениями эпициклоиды и гипоциклоиды: при $m > 0$ эти уравнения определяют эпициклоиду, при $m < 0$ — гипоциклоиду. Во вто-

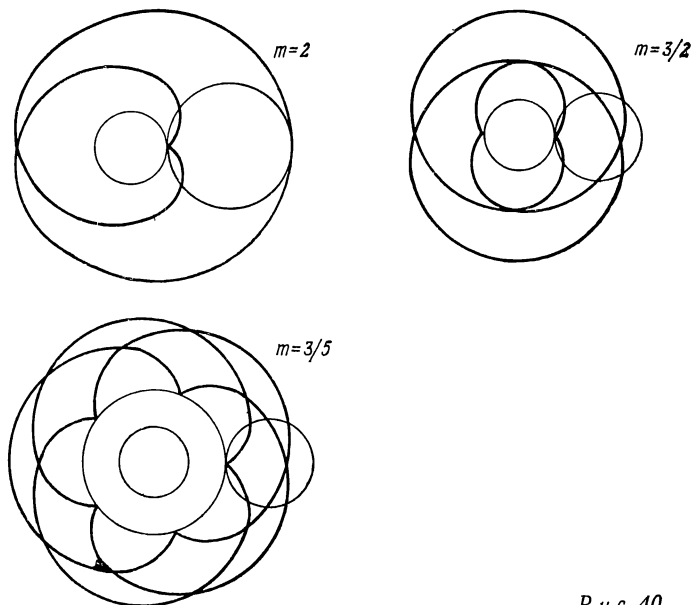
ром случае предполагается, что $|m| < 1$, поскольку для гипоциклоиды $|r| < R$.

Отметим частный случай эпициклоиды. При $m=1$ имеем $r=R$, т. е. радиус образующей окружности равен радиусу неподвижной окружности. Эпициклоида в этом случае является кардиоидой. В случае $m=1, r=R$ параметрические уравнения (13) принимают вид

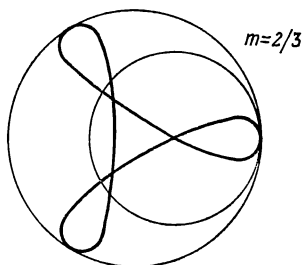
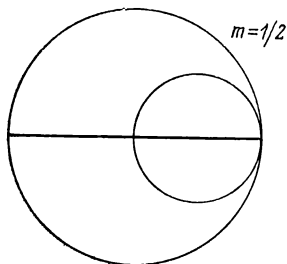
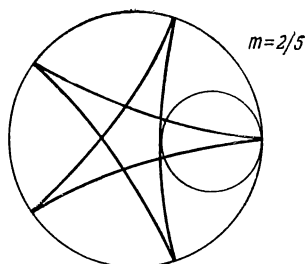
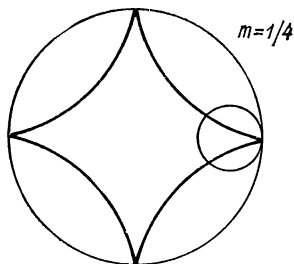
$$x=2r \cos t - r \cos 2t; \quad y=2r \sin t - r \sin 2t.$$

Эти уравнения ранее были получены непосредственно (см. (11)).

Форма эпициклоид (рис. 40) и гипоциклоид (рис. 41) определяется значением модуля m . Если m — рациональ-



Р и с. 40



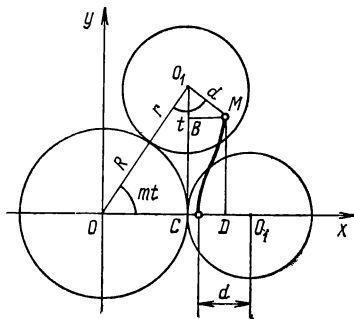
Р и с. 41

ное число, т. е. $m = p : q$ — несократимая дробь, то как эпициклоида, так и гипоциклоида будут замкнутыми линиями. Действительно, когда образующая окружность сделает q полных оборотов, вычерчивающая точка совпадет с исходной точкой A . На протяжении своего пути она q раз будет находиться на неподвижной окружности. Линия будет состоять из q ветвей и иметь q точек возврата (для гипоциклоиды только при $m < 0,5$; при $m > 0,5$ вместо q точек возврата гипоциклоида имеет q узловых точек).

Можно доказать, что эпициклоиды и гипоциклоиды с рациональным модулем являются алгебраическими линиями.

Если модуль m — число иррациональное, то какое бы количество оборотов ни сделала образующая окружность, вычерчивающая точка M не придет в начальное положение. Линия в этом случае не замкнется, она будет состоять из бесконечного числа ветвей.

Переходим к рассмотрению случая, когда вычерчивающая точка находится не на самой образующей окружности, а отстоит от ее центра на некотором расстоянии. Линию, описываемую точкой, отстоящей от центра образующей окружности на определенном расстоянии, называют *трохоидой*. Вид этой линии зависит от расположения вычерчивающей точки относительно образующей окружности и отношения радиусов окружностей, т. е. их модуля. Трохоиды подразделяют на *эпитрохоиды* и *гипотрохоиды* в зависимости от того, будет ли образующая окружность катиться по внешней или внутренней стороне неподвижной окружности. Обозначим буквой d расстояние между вычерчивающей точкой M и точкой O_1 — центром образующей окружности (рис. 42). Если $d < r$, то трохойду называют *укороченной*; если $d > r$ — *удлиненной*, при $d = r$ трохойда становится эпициклоидой или гипоциклоидой.



Р и с. 42

Параметрические уравнения трохойд можно получить тем же способом, который применялся при выводе уравнений эпициклоид и гипоциклоид. Пусть $M(x, y)$ — точка, описывающая трохойду, тогда

$$x = OD = OC + CD = OC + BM = (R + mR) \cos mt +$$

$$+ d \sin \widehat{MO_1B};$$

$$y = DM = O_1C - O_1B = (R + mR) \sin mt - d \cos \widehat{MO_1B}.$$

Так как $\sin \widehat{MO_1B} = \sin \left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right) = \sin ((t + mt) - \frac{\pi}{2}) = -\cos (t + mt)$, $\cos \widehat{MO_1B} = \cos \left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right) = \cos \left((t + mt) - \frac{\pi}{2} \right) = \sin (t + mt)$, то параметрические уравнения эпитрохоиды принимают вид

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos mt - d \cos (t + mt); \\ y = (R + mR) \sin mt - d \sin (t + mt). \end{cases} \quad (15)$$

Аналогично получаем параметрические уравнения гипотрохоиды:

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + d \cos (t - mt); \\ y = (R - mR) \sin mt - d \sin (t - mt). \end{cases} \quad (16)$$

Сопоставляя эти уравнения, замечаем, что уравнения (16) получаются из уравнений (15) заменой m на $-m$, d на $-d$ и изменением знака y . Отметим, что при $d=r$ получаем соответственно параметрические уравнения эпициклоиды и параметрические уравнения гипоциклоиды. Этот факт позволяет записать общие параметрические уравнения циклоидальных кривых

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos mt - d \cos (t + mt); \\ y = (R + mR) \sin mt - d \sin (t + mt), \end{cases}$$

где m и d могут принимать любые положительные и отрицательные значения.

Отметим, что к трохоидам относится улитка Паскаля, которая представляет собой эпитрохоиду, если $R=r$ при любом d . Действительно, в этом случае уравнения (15) принимают вид

$$x=2r \cos t-d \cos 2t; \quad y=2r \sin t-d \sin 2t$$

или

$$x=2r \cos t-d(2\cos^2 t-1); \quad y=2r \sin t-2d \sin t \cos t,$$

откуда

$$x-d=2\cos t(r-d \cos t); \quad y=2 \sin t(r-d \cos t).$$

Перейдем к полярным координатам по формулам $x-d=\rho \cos \varphi$, $y=\rho \sin \varphi$, где $\varphi=t$, и получим $\rho \cos \varphi=2\cos \varphi(r-d \cos \varphi)$; $\rho \sin \varphi=2\sin \varphi(r-d \cos \varphi)$; $\rho=2(r-d \cos \varphi)$. Это уравнение улитки Паскаля в полярных координатах.

Рассмотрим еще один частный случай. При $R=2r$, т. е. $m=1/2$, уравнения (16) запишутся так: $x=\frac{R}{2} \cos \frac{t}{2}+d \cos \frac{t}{2}=\left(\frac{R}{2}+d\right) \cos \frac{t}{2}$; $y=\frac{R}{2} \sin \frac{t}{2}-d \sin \frac{t}{2}=\left(\frac{R}{2}-d\right) \sin \frac{t}{2}$ или $x=a \cos \varphi$, $y=b \sin \varphi$, где $a=\frac{R}{2}+d$; $b=\frac{R}{2}-d$; $\frac{t}{2}=\varphi$. Уравнения $x=a \cos \varphi$, $y=b \sin \varphi$ определяют эллипс.

Кривой Штейнера называют гипоциклоиду, получаемую в случае, когда радиус r образующей окружности в три раза меньше радиуса R неподвижной окружности, т. е. когда модуль $m=1/3$.

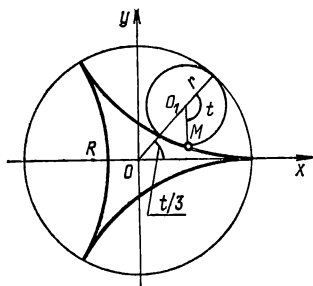
Полагая в формулах (14) $m=1/3$, получаем параметрические уравнения кривой Штейнера

$$x=2r \cos \frac{t}{3}+r \cos \frac{2t}{3}; \quad y=2r \sin \frac{t}{3}-r \sin \frac{2t}{3},$$

где t — угол поворота образующей окружности. Исключая из этих уравнений параметр t , находим уравнение кривой Штейнера в прямоугольных декартовых координатах

$$(x^2+y^2)^2+8rx(3y^2-x^2)+18r^2(x^2+y^2)-27r^4=0.$$

Это уравнение показывает, что кривая Штейнера является алгебраической линией четвертого порядка. Кривая изображена на рис. 43.



Р и с. 43

Рассматриваемая линия названа в честь швейцарского математика Штейнера. Якоб Штейнер (1796—1863) родился в крестьянской семье, до 19 лет был малограмотным, работал с отцом по хозяйству. Якоб рано заин-

тересовался астрономией и целыми ночами наблюдал звездное небо. Склонности юноши были замечены, и его определили в знаменитую тогда школу Песталоцци. В 1821 г. Штейнер переезжает в Гейдельберг, а позднее в Берлин. В Гейдельберге он закончил университет, а в Берлине преподавал в городском промышленном училище. Швейцарский педагог-демократ Песталоцци сказал о Штейнере, что он «с железной энергией пробивает себе путь к самообразованию». Штейнер увлекается геометрическими построениями и публикует ряд талантливых работ: «Геометрические построения, осуществляемые с помощью прямой и постоянного круга» (1833), «Синтетическое развитие геометрических образов один от другого» (1834), «О наибольших и наименьших значениях плоских фигур и о сфере» (1842). В последней из названных книг геометрическими средствами исследованы многочисленные проблемы, относящиеся к максимумам и минимумам. В частности, доказано, что круг является плоской фигурой, имеющей наименьший периметр при заданной площади. Штейнер был избран членом Берлинской академии наук (1834), был профессором Берлинского университета (с 1835). Я. Штейнер — один из основоположников проективной геометрии.

Каппой называют линию, представляющую множество точек касания касательных, проведенных из данной точки к окружности заданного радиуса, центр которой перемещается по фиксированной прямой, проходящей через эту точку.

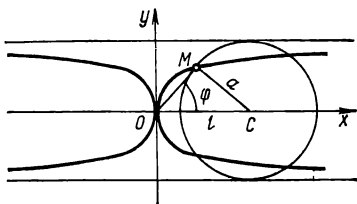


Рис. 44

Линия эта напоминает греческую букву κ (каппа), откуда и происходит ее название.

Составим уравнение линии в полярных и декартовых прямоугольных координатах. Данную точку обозначим буквой O , поместим в ней полюс и начало декартовой системы координат, а в качестве полярной оси и оси абсцисс возьмем прямую, по которой перемещается центр данной окружности (рис. 44). Фиксируем некоторое положение окружности радиуса a . Пусть ее центр находится в точке C . Из точки O проведем касательную к окружности. Обозначим буквой M точку касания, (ρ, φ) — ее координаты. Рассмотрим $\triangle OMC$, пусть $|OC| = l$. Так как $|OM| = \rho$, $|MC| = a$, то $l = \sqrt{\rho^2 + a^2}$; очевидно, l меняется с изменением положения точки C . Из $\triangle OMC$ получаем $\rho = l \cos \varphi$. Исключив отсюда l , найдем $\rho = \sqrt{\rho^2 + a^2} \cos \varphi$; $\rho^2 = (\rho^2 + a^2) \cos^2 \varphi$; $\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi$; $\rho^2 (1 - \cos^2 \varphi) = a^2 \cos^2 \varphi$; $\rho^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi$.

Итак, получено уравнение линии в полярных координатах

$$\rho = a \operatorname{ctg} \varphi. \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражения $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{ctg} \varphi = x/y$, находим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x}{y}; \quad y \sqrt{x^2 + y^2} = ax$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 y^2 = a^2 x^2.$$

Это и есть уравнение каппы в прямоугольных декартовых координатах. Из него следует, что каппа — алгебраическая линия четвертого порядка. Линия эта симметрична относительно координатных осей (так как x и y входят в полученное уравнение только в четных степенях).

Запишем параметрические уравнения линии. Используя формулы $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и уравнение (17), получаем

$$x = a \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi = a \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi = \frac{a \cos^2 \varphi}{\sin \varphi};$$

$$y = a \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi = a \cos \varphi;$$

$$x = \frac{a \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}; \quad y = a \cos \varphi.$$

Так как $|\cos \varphi| \leq 1$, то второе из приведенных уравнений позволяет сделать вывод, что $|y| \leq a$, т. е. линия целиком расположена между прямыми $y = -a$ и $y = a$, параллельными оси абсцисс. Прямые $y = \pm a$ служат асимптотами этой линии. Из первого уравнения следует, что x неограниченно возрастает, когда угол φ неограниченно приближается к значению $\varphi = 0$.

Отметим, что каппа является одной из линий семейства кривых, определяемых уравнением $\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi$ и называемых узлами. Такие кривые имеют в начале координат узловую точку и асимптоты, параллельные координатным осям. Отличительными свойствами узлов является то, что, подвергая инверсии относительно начала координат узел $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$, получаем узел $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$, образованный поворотом данного узла на 90° .

В истории математики исследование каппы связывают с решением задачи, предложенной Слюзу одним из учеников Декарта. В задаче требовалось найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок $МС$, перпендикулярный к любому полярному радиусу $ОМ$ точки $М$ линии, имеет одну и ту же длину. Определение каппы равносильно определению Слюза, данному им в связи с решением поставленной задачи.

Рене Франсуа де Слюз (1622—1685) — бельгийский любитель математики. В молодости Слюз несколько лет провел в Италии, где познакомился с итальянским математиком Микеланджело Риччи (1619—1682), учеником Торричелли. В научных работах Слюза, посвященных геометрии, дается общий метод построения касательных к алгебраическим линиям. Поэтому Слюза считают одним из предшественников создателей дифференциального исчисления. Слюз вел оживленную переписку с выдающимися математиками своего времени: Б. Паскалем, Х. Гюйгенсом, Дж. Валлисом и др. В переписке Слюза с Гюйгенсом, в частности, были рассмотрены примеры линий, заданных более общими уравнениями по сравнению с каноническими уравнениями эллипса и гиперболы. Эти линии Слюз называл эллиптоидами, а Б. Паскаль — жемчужинами. В 1674 г. Слюз был избран членом Лондонского Королевского общества.

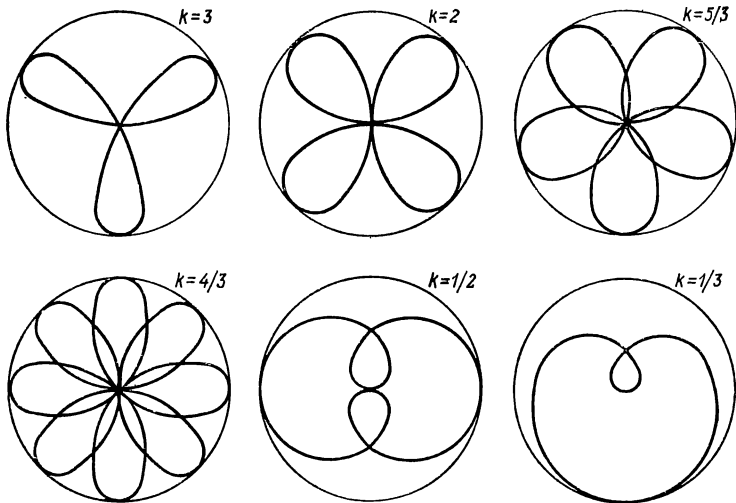
Отметим, что изучением свойств каппы занимались и другие ученые. Гюйгенс впервые показал, что площадь фигуры, заключенная между осью ординат, ветвью каппы и ее асимптотой, равна половине площади образующего круга, т. е. круга, ограниченного окружностью, с помощью которой определена линия каппы.

РОЗЫ

Розами называют линии, заданные полярным уравнением

$$\rho = a \sin k\varphi \quad (18)$$

или уравнением $\rho = a \cos k\varphi$, где a и k — постоянные, которые будем считать положительными числами.



Р и с. 45

Так как $|\sin k\varphi| \leq 1$, то из уравнения (18) следует, что $\rho \leq a$. Последнее неравенство означает, что вся линия расположена в круге радиуса a . Поскольку $\sin k\varphi$ — функция периодическая, то роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a . Количество этих лепестков зависит от числа k .

Если k — целое число, то роза состоит из k лепестков при нечетном k и из $2k$ лепестков при четном k (рис. 45). Если k — рациональное число, причем $k = m/n$ ($n > 1$), то роза состоит из m лепестков в случае, когда m и n — нечетные числа, или из $2m$ лепестков, если одно из чисел будет четным. При этом в отличие от предыдущего случая каждый следующий лепесток будет частично покрывать предыдущий (см. рис. 45). Если число k является иррациональным, то роза состоит из бесконечного множества лепестков, частично накладывающихся друг на друга.

Отметим (без доказательства), что если число k является рациональным, т. е. $k = m/n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), в частном случае k целое, то розы будут алгебраическими линиями, причем всегда четного порядка.

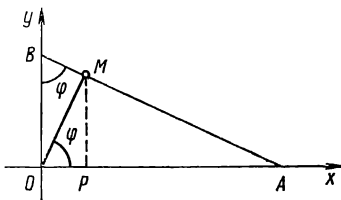
Четырехлепестковой розой называют линию, определяемую полярным уравнением

$$\rho = a \sin 2\varphi. \quad (19)$$

Покажем, что четырехлепестковая роза является множеством оснований перпендикуляров, опущенных из вершины O прямого угла на отрезок постоянной длины, концы которого скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке O .

Эти прямые примем за координатные оси. Из точки O опустим перпендикуляр на данный отрезок AB , длину которого обозначим через $2a$: $|AB| = 2a$. Пусть $M(x, y)$ — основание этого перпендикуляра (рис. 46), где $x = OP$; $y = PM$; OP , PM — величины направленных отрезков.

По теореме о перпендикуляре (MP), опущенном из вершины прямого угла



Р и с. 46

($\angle OMA$) на гипотенузу (OA), имеем

$$\frac{|OP|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|PA|}; \quad |PA| = \frac{|MP|^2}{|OP|}; \quad |PA| = \frac{y^2}{x}.$$

Поскольку треугольники PMA и OBA подобны (прямоугольные, имеют общий угол A), то

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|PA|}{|MA|}.$$

Из $\triangle MPA$ находим $|MA| = \sqrt{PM^2 + PA^2} =$
 $= \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2}} = \sqrt{y^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} (x^2 + y^2)};$
 $|MA| = \frac{|y|}{|x|} \sqrt{x^2 + y^2}$ Из $\triangle OMA$ получаем $|OA| =$
 $= \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{x^2} (x^2 + y^2)} =$
 $= \sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2}}, \quad |OA| = \frac{(x^2 + y^2)}{|x|}.$
 Подставляя найденные выражения в равенство $|OA| : |AB| =$
 $= |PA| : |MA|$, находим

$$\frac{\frac{x^2 + y^2}{|x|}}{2a} = \frac{\frac{y^2}{|x|}}{\frac{|y|}{|x|} \sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{x^2 + y^2}{2a |x|} = \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 2a |x| |y|;$$

$$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2 x^2 y^2 = 0. \quad (20)$$

Мы получили уравнение линии (множества указанных точек M) в декартовых координатах. Перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$, и уравнение (20) принимает вид

$$(\rho^2)^3 - 4a^2(\rho \cos \varphi)^2(\rho \sin \varphi)^2 = 0; \quad \rho^2 - a^2 \sin^2 2\varphi = 0;$$

$$\rho = a \sin 2\varphi.$$

Итак, получено уравнение линии в полярных координатах. Это уравнение совпадает с уравнением (19), которое определяет четырехлепестковую розу. Следовательно, указанное множество точек является четырехлепестковой розой (см. рис. 45, $k=2$).

Из уравнения (20) видно, что четырехлепестковая роза — аглебраическая линия шестого порядка.

Трехлепестковой розой называют линию, определяемую уравнением $\rho = a \sin 3\varphi$. В декартовых координатах линия имеет уравнение $(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2y - y^3)$.

Трехлепестковая роза — линия четвертого порядка (см. рис. 45, $k=3$).

Исследованием роз впервые занялся итальянский математик Гвидо Гранди (см. раздел «Версьера»). Теория этих линий была опубликована в 1728 г.

Еще в 1703 г. Гранди, в частности, указал, что из разложения функции $1/(1+x)$ в ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ при подстановке $x=1$ возникает равенство $1/2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ Группируя попарно члены справа, Гранди приходит к равенству $1/2 = 0 + 0 + 0 + \dots$ и истолковывает его как символ творения мира из ничего. Это вызвало оживленную полемику в печати, в которой приняли участие сам Гранди и многие другие ученые. Отметим, что с современной точки зрения этот вопрос являлся простым: разложение $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ справедливо лишь при $|x| < 1$ (и полагать здесь $x=1$ нельзя).

Исследованием формы цветов и листьев занимался немецкий математик Хабеннихт. Результаты его исследований отражены в книге, изданной в 1896 г. Его суждения основывались на том, что в большинстве случаев абрис листа или лепестка представляет собой линию,

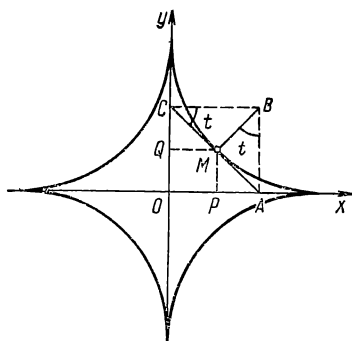
симметричную относительно оси. Поскольку расстояние между двумя любыми точками этой линии будет конечным, то в полярной системе координат уравнение линии можно записать в виде $\rho = F(\varphi)$, где $F(\varphi)$ — непрерывная и периодическая функция с периодом 2π . Эта функция должна быть такой, чтобы равным по модулю значениям φ соответствовали равные значения ρ . Следовательно, искомую функцию можно выразить, например, в виде $F(\varphi) = f(\cos \varphi)$ или в первом приближении равенством

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos^2 \varphi + \dots + a_n \cos^n \varphi.$$

Выражая $\cos^k \varphi$ через $\cos \varphi$, $\cos 2\varphi$, ..., $\cos k\varphi$, получаем

$$\rho = b_0 + b_1 \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi + \dots + b_n \cos n\varphi.$$

Определяя коэффициенты b_0, b_1, \dots, b_n в каждом конкретном случае на основании соответствующих измерений, Хабеннихт выводит целый ряд уравнений, которые с весьма хорошим приближением выражают аналитически формы листьев многих растений.



Р и с. 47

АСТРОИДА

Прямоугольник, две стороны которого лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, деформируется так, что его диагональ сохраняет постоянную длину. Множество точек — оснований перпендикуляров, опущенных из вершины прямоугольника на его диагональ, называют *астроидой*,

Составим уравнение астроида в прямоугольных декартовых координатах. В качестве координатных осей выберем указанные две взаимно перпендикулярные прямые, на которых все время находятся стороны прямоугольника $OABC$ (рис. 47). Постоянную длину диагонали AC обозначим буквой a : $|AC|=a$. Этот прямоугольник деформируется: длины сторон OA и OC меняются так, что $|OA|^2 + |OC|^2 = a^2$. Из вершины B , противоположной началу координат, опустим перпендикуляр на диагональ AC . Пусть $M(x, y)$ — основание этого перпендикуляра. Введем в рассмотрение $\widehat{BCA} = t$, тогда $\widehat{MBA} = t$. Выразим координаты x, y точки M через угол t :

$$\begin{aligned} x &= OP = |CM| \cos t = (|CB| \cos t) \cos t = |CB| \cos^2 t = \\ &= (|CA| \cos t) \cos^2 t = |CA| \cos^3 t = a \cos^3 t; \\ y &= OQ = PM = |MA| \sin t = (|AB| \sin t) \sin t = \\ &= |AB| \sin^2 t = (|AC| \sin t) \sin^2 t = |AC| \sin^3 t = a \sin^3 t. \end{aligned}$$

Таким образом, найдены следующие параметрические уравнения астроида: $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$. Исключив параметр t , получим уравнение астроида в прямоугольных декартовых координатах:

$$\begin{aligned} x^{1/3} &= a^{1/3} \cos t; \quad y^{1/3} = a^{1/3} \sin t; \quad (x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = \\ &= (a^{1/3})^2 (\cos^2 t + \sin^2 t); \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \end{aligned}$$

Освободившись от дробных степеней координат, найдем:

$$\begin{aligned} (x^{2/3} + y^{2/3})^3 &= (a^{2/3})^3; \quad x^2 + 3x^{4/3}y^{2/3} + 3x^{2/3}y^{4/3} + y^2 = a^2; \\ x^2 + y^2 - a^2 &= -3x^{4/3}y^{2/3} - 3x^{2/3}y^{4/3} = \\ &= -3x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) = -3x^{2/3}y^{2/3}a^{2/3}; \\ (x^2 + y^2 - a^2)^3 &= -27x^2y^2a^2, \quad (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27x^2y^2a^2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда видно, что астроида — алгебраическая линия шестого порядка. Поскольку в уравнение (21) x и y

входят только в четных степенях, то астроида симметрична относительно координатных осей. Построим по точкам дугу линии в первой четверти и, приняв во внимание симметрию относительно координатных осей, получим всю астроиду (см. рис. 47).

Астроиду можно рассматривать как частный случай гипоциклоиды, а именно, как гипоциклоиду с модулем $m=1/4$. Обратимся к параметрическим уравнениям гипоциклоиды (14). Положив здесь $m=1/4$, получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}x &= \frac{3}{4} R \cos \frac{t}{4} + \frac{1}{4} R \cos \frac{3t}{4}; \\y &= \frac{3}{4} R \sin \frac{t}{4} - \frac{1}{4} R \sin \frac{3t}{4}.\end{aligned}\tag{22}$$

Исключив из уравнений (22) параметр t , найдем $(x^2+y^2-R^2)^3+27R^2x^2y^2=0$.

Это уравнение отличается от уравнения (21) только обозначением постоянной. Следовательно, уравнения (22) определяют астроиду.

Таким образом, астроида представляет собой траекторию точки, лежащей на окружности радиуса r , катящейся по внутренней стороне другой окружности, радиус R которой в четыре раза больше r ($R=4r$).

НЕКОТОРЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЛИНИИ

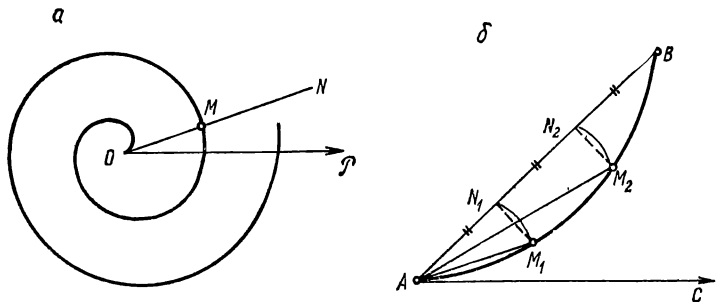
Трансцендентными называют линии, уравнения которых в прямоугольных декартовых координатах не являются алгебраическими. Простейшими примерами трансцендентных линий могут служить графики функций $y=a^x$, $y=\lg x$, $y=\sin x$ и других тригонометрических функций. Рассмотрим некоторые другие трансцендентные линии.

СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

Спиралью Архимеда называют траекторию точки M , равномерно движущейся по прямой, которая равномерно вращается вокруг фиксированной точки.

Таким образом, спираль Архимеда — траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях: одно из них совершается вдоль прямой, другое — по окружности.

Пусть точка M равномерно движется по прямой ON (рис. 48, a), которая равномерно вращается вокруг точки O . Примем точку O за полюс полярной системы координат, начальное положение OP прямой — за полярную ось. Будем считать, что в начальный момент движения точка M находилась в полюсе. Полярные координаты точки M обозначим через ρ , φ , где $\rho=|OM|$, а φ — величина угла наклона полярного радиуса OM к полярной



Р и с. 48

оси. Поскольку расстояние $|OM|$, пройденное точкой N вдоль прямой ON , и полярный угол φ возрастают в силу равномерности движения пропорционально времени t , то они пропорциональны друг другу, т. е. $\rho = a\varphi$, где a — коэффициент пропорциональности. Это уравнение задает спираль Архимеда в полярных координатах. В прямоугольных координатах уравнение принимает вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

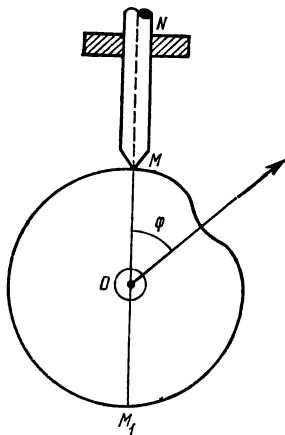
Расстояние d между двумя последовательными витками (n и $(n+1)$) определяется формулой $d = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2a\pi$. Как видно, это расстояние будет постоянным. В силу указанной особенности реальный образ спирали Архимеда можно видеть, например, наблюдая туго завернутый рулон бумаги с его торцевой стороны.

С помощью спирали Архимеда можно разделить заданный угол на любое число равных частей. Действительно, поскольку изменение полярного радиуса спирали пропорционально изменению угла, то для деления угла BAC (рис. 48, б) достаточно разделить полярный радиус

на n равных частей $|AN_1| = |N_1N_2| = \dots |N_{n-1}B|$ и радиусами, равными длинам этих отрезков $|AN_1|$, $|AN_2|$, ..., $|AN_{n-1}|$, сделать засечки M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на дуге спирали (на рис. 48, б изображен случай, когда $n=3$). Проведя полярные радиусы $AM_1, AM_2, \dots, AM_{n-1}$, разделим угол BAC на n равных частей.

В области техники спираль Архимеда, в частности, применяется в кулачковых механизмах. Такой механизм представляет собой шайбу, профиль которой очерчен по некоторой линии. Вращательное движение этой шайбы преобразуется в возвратно-поступательное стержня MN , скользящего по ее профилю (рис. 49).

Закон, по которому движется точка M , определяется видом линии профиля эксцентрика. В некоторых механизмах требуется, чтобы равномерное вращение эксцентрика вызвало равномерное движение стержня, т. е. чтобы поступательное перемещение OM точки M было пропорционально углу поворота эксцентрика. Этому требованию можно удовлетворить, очертив профиль эксцентрика по спирали Архимеда. Возвратно-поступательное движение точки M достигается тем, что эксцентрик очерчивается двумя дугами спирали; его профиль при этом представляет собой линию постоянной ширины. В самом деле, $|OM| = a\varphi$, $|OM_1| = a(\pi - \varphi)$, откуда $|MM_1| = a\pi = \text{const}$ ($|MM_1| = |OM| + |OM_1| = a\varphi + a(\pi - \varphi) = a\pi$).



Р и с. 49

Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик, физик и механик. Родился в Сиракузах (Сицилия). Часть его научных работ дошла до нас в виде писем к александрийским ученым: Конону Самосскому, его ученику Досифею, Эратосфену Киренскому. Основной темой математических работ Архимеда были задачи на нахождение площадей поверхностей и объемов тел с помощью предложенных им методов, которые через два тысячелетия развились в интегральное исчисление. Он разрабатывал математические методы для решения задач естествознания и техники. В сочинении «О плавающих телах» содержится закон, который теперь носит его имя.

Архимед был не только прекрасным математиком-теоретиком, но и замечательным изобретателем и конструктором. Он является автором многочисленных открытий и изобретений: машины для орошения полей, водоподъемного механизма (архимедов винт), системы рычагов, блоков для поднятия больших тяжестей, военных метательных машин и др. Архимед успешно применял на практике разработанную им теорию рычага, с которой связана приписываемая ему крылатая фраза: «Дайте мне точку опоры — и я сдвину Землю». Он сконструировал планетарий, в котором можно было наблюдать движение Солнца и планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения.

Во время Второй Пунической войны ученый возглавил оборону Сиракуз. Его метательные машины вынудили римлян отказаться от попытки взять город штурмом и заставили перейти к осаде. Архимед был убит римским солдатом за отказ немедленно следовать за ним (ученый просил не трогать его, пока он не закончит решение задачи).

Изобретение спирали Архимеда приписывается Конону Самосскому, древнегреческому астроному и математику из Александрии, жившему в III в. до н. э. Однако свойства спирали детально были изучены Архимедом, который предложил способ построения касательной к этой линии и вычислил площадь фигуры, ограниченной дугой

(первым витком) спирали. Он показал, что спираль может быть использована для решения задачи о квадратуре круга. Спрявление спирали Архимеда (т. е. нахождение длины ее дуги) было выполнено лишь в XVII в. Это сделано в работах Б. Кавальери, Ж. Роберваля, П. Ферма и Б. Паскаля.

Блез Паскаль (1623—1662) — французский математик, физик и философ. Родился в семье судьи Этьена Паскаля в Клермон-Ферране. Блез еще ребенком проявил феноменальные способности. С четырех лет он читал и писал, с легкостью производил сложные вычисления. В 1631 г. семья переезжает в Париж. Еще мальчиком Блез вместе с отцом стал посещать собрания ученых, принимал участие в работе кружка Мерсенна. Сначала он больше прислушивался к разговорам взрослых и, как скоро обнаружилось, не без пользы. С пятнадцати лет Паскаль уже участвовал в дискуссиях ученых, выступал с сообщениями, предлагал задачи. В 16 лет он написал свою первую научную работу, в которой высказал следующую теорему: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой. Эту важную теорему проективной геометрии называют теперь теоремой Паскаля. В восемнадцатилетнем возрасте он сконструировал счетную машину для двух арифметических действий. Поводом для этого послужило желание облегчить большие и долгие финансовые вычисления, которые пришлось производить его отцу, привлекая на помощь и сына. Основные принципы его изобретения стали исходными для конструирования счетных машин в последующие времена.

Некоторые свои работы Паскаль посвятил арифметическим рядам и биномиальным коэффициентам. Он предложил так называемый треугольник Паскаля — таблицу, в которой коэффициенты разложения бинома для различных натуральных значений степени расположены в виде треугольника. Он обосновал метод полной математической индукции. Паскаль разработал общие методы определения площадей фигур и центров тяжести. Это дает основание считать его одним из творцов исчисления бес-

конечно малых. Особенно важен его «Трактат о синусах четверти круга», который оказал значительное влияние на творчество Лейбница.

Бонавентура Кавальери (1598—1647) — итальянский математик. Родился в Милане, получил прекрасное гуманитарное образование. Еще юношей Кавальери вступил в монашеский орден. Он изучал математику в Пизе под руководством профессора университета Бенедетто Каstellи (1577—1644), друга Галилея. За короткое время Кавальери прочитал в подлинниках сочинения Архимеда, Аполлония и других античных авторов. Успехи его были столь значительны, что Каstellи поручал иногда своему ученику замещать его на кафедре. Через Каstellи он познакомился с Галилеем, который руководил его дальнейшими занятиями. В 1629 г. Кавальери занял освободившуюся университетскую кафедру математики в Болонье. Его кандидатуру горячо поддержал Галилей, охарактеризовав молодого ученого как «соперника Архимеда». В должности профессора университета Кавальери работал до конца жизни.

Кавальери предложил новый метод определения площадей и объемов (так называемый метод неделимых), который отражен в его основном сочинении «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635). Неделимыми он называл параллельные между собой хорды плоской фигуры или параллельные плоскости тела. Некоторые результаты, полученные Кавальери с помощью метода неделимых, в переводе на современный язык соответствуют вычислению определенных интегралов от степенной функции (для первых девяти степеней). Исследования Кавальери сыграли большую роль в формировании анализа бесконечно малых. Он опубликовал ряд книг, в которых рассматриваются вопросы тригонометрии, применения логарифмов, геометрической оптики и др.

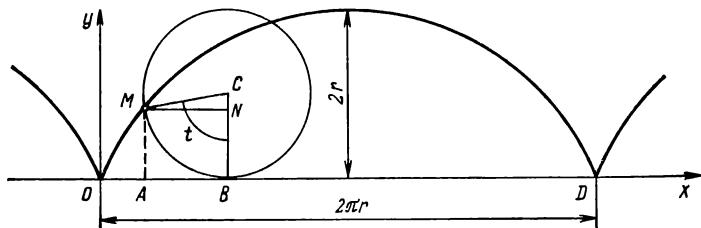
ЦИКЛОИДА

Рассмотрим линию, которая является траекторией точки, жестким образом скрепленной с окружностью, катящейся по прямой линии. Мысль изучить указанную траекторию возникла давно, свыше 500 лет назад. Еще в середине XV в. Николай Кузанский задумался над тем, какую линию опишет гвоздь, вбитый в колесо движущегося экипажа.

Николай Кузанский (1401—1464) — немецкий ученый-гуманист, родился в семье рыбака, в деревне Куза на Мозеле. Он учился в университетах Гейдельберга и Падуи. В 1449 г. Кузанский стал кардиналом, и наряду с богословием, занимался многими науками: астрономией, географией, механикой, математикой, философией и правом. Ученый выступал за введение экспериментального метода в научное исследование природы и в математику, искал методы решения задачи о квадратуре круга. Будучи убежден в невозможности точного решения задачи, Кузанский предложил ряд простых и достаточно хороших приближенных построений. Он составил карту Европы, высказал идею о движении Земли, сделал попытку начертить карту мира.

Указанная траектория гвоздя (точнее его шляпки, которую будем считать точкой) зависит от того, где и как вбить этот гвоздь («гвоздик Николая Кузанского»). Его можно вбить до шляпки с внешней или внутренней стороны обода колеса, можно вбить только наполовину. Разумеется, у читателя может возникнуть вопрос, как же будет двигаться колесо, если гвоздь вбить только наполовину с внешней стороны его обода. Чтобы рассеять сомнения читателя, рекомендуем ему представить себе вместо такого гвоздя фиксированную точку на вагонном колесе, движущемся по рельсу, в той части колеса, которая при движении оказывается ниже рельса (и не дает

возможности колесу сходиться с рельса). Фиксируем три точки вагонного колеса: точку M на контуре обода, катящегося по рельсу, точку N с внутренней стороны этого обода, точку L с внешней стороны обода (о которой говорилось выше). Траектории этих точек будут соответ-



Р и с. 50

ственно циклоидой, укороченной циклоидой, удлиненной циклоидой.

Циклоидой называют траекторию фиксированной точки окружности, которая без скольжения катится по прямой.

Составим параметрические уравнения этой траектории. В качестве оси Ox прямоугольной декартовой системы координат выберем прямую, по которой катится окружность. Эту окружность называют образующей окружностью, а прямую — направляющей прямой. Радиус образующей окружности обозначим буквой r . Предположим, что в исходном положении точка $M(x, y)$, описывающая циклоиду, находилась в начале координат, а после того как окружность повернулась на угол t , заняла положение M (рис. 50). По определению декартовых прямоугольных координат $x = OA = OB - AB$, $y = AM = BC - NC$. Поскольку $|OB| = \widehat{MB} = rt$, $|AB| = |MN| =$

$= r \sin t$, $|NC| = r \cos t$, то параметрические уравнения циклоиды примут вид

$$x = rt - r \sin t; \quad y = r - r \cos t. \quad (1)$$

Исключим из этих уравнений параметр t . Второе из уравнений перепишем по другому и определим t : $r \cos t = r - y$; $\cos t = \frac{(r - y)}{r}$; $t = \arccos \frac{(r - y)}{r}$. Найдем выражение для $\sin t$:

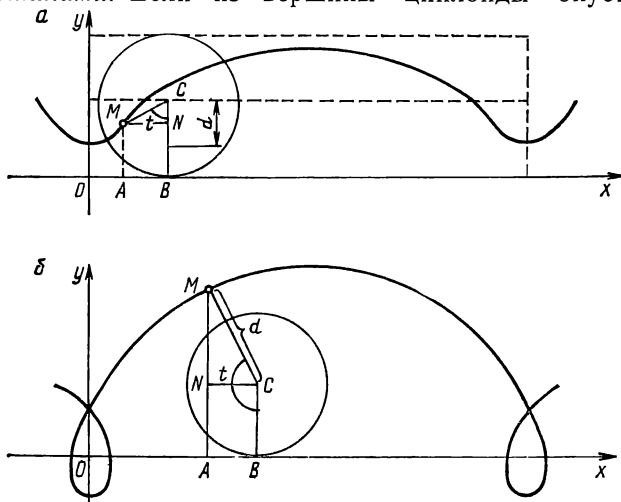
$$\begin{aligned} \sin t &= \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{r - y}{r}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{r^2 - 2ry + y^2}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{2ry - y^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в первую из формул (1), получаем уравнение циклоиды в прямоугольных декартовых координатах

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

Циклоида, как и прямая, является бесконечной линией. Действительно, образующая окружность может катиться по направляющей прямой неограниченно долго. Точка M описывает при этом бесконечную траекторию. Циклоида состоит из ряда арок, каждая из которых соответствует полному обороту образующей окружности; на рис. 50 изображена одна из них. Расстояние между началом и концом каждой такой арки равно $2\pi r$ — длине образующей окружности: $|OD| = 2\pi r$. Отрезок OD называют *основанием циклоиды* (точнее, основанием одной арки циклоиды). Отдельные арки соединяются в точках, в которых они имеют общую касательную. Эти точки называют *точками возврата циклоиды* (на рис. 50 точки O и D). Они соответствуют самым

низким положениям точки M , описывающей циклоиду. Наибольшая ордината точки циклоиды равна $2r$ — диаметру образующей окружности. «Наивысшие» точки циклоиды (т. е. точки с ординатой, равной $2r$) называют ее *вершинами*. Если из вершины циклоиды опустить



Р и с. 51

перпендикуляр на направляющую прямую, то точка пересечения перпендикуляра и основания разделит пополам отрезок между точками возврата (т. е. разделит на две равные части основание циклоиды).

Рассмотрим теперь траекторию точки, жестко связанной с окружностью, катящейся по прямой, но находящуюся не на самой окружности, а на произвольном расстоянии d от ее центра. При $d < r$ вычерчивающая точка находится внутри окружности, ее траекторию называют *укороченной циклоидой* (рис. 51, а). Если $d > r$, то вы-

черчивающая точка находится вне окружности; ее траекторию называют *удлиненной циклоидой* (рис. 51, б). Эти линии имеют параметрические уравнения $x = rt - d \sin t$; $y = r - d \cos t$, которые можно вывести тем же способом, что и уравнения (1). Очевидно, при $d = r$ получаем циклоиду, в этом случае уравнения принимают вид (1).

Циклоида сыграла важную роль в истории математики. Многие ее геометрические и механические свойства были открыты в XVI в. Свойства эти устанавливались или эмпирическим путем или на основе остроумных геометрических построений. Первым, кто изучал циклоиду, был Г. Галилей.

Галилео Галилей (1564—1642) — знаменитый итальянский ученый и просветитель. Он придумал и название «циклоида», что означает «напоминающая о круге».

Г. Галилей, один из основателей точного естествознания, родился в Пизе, в семье талантливого музыканта. До 11 лет он жил в Пизе, где посещал школу, а затем семья переехала во Флоренцию. По совету отца в 1581 г. Галилей поступил в Пизанский университет, где изучал медицину, а затем обратился к чтению сочинений древних математиков — Евклида и Архимеда. Увлечшись геометрией и механикой, Галилей бросил медицину и вернулся во Флоренцию, где провел четыре года, занимаясь математикой. Результатом этой деятельности было небольшое сочинение «Маленькие весы» (1586 г.), в котором описаны построенные им гидростатические весы для быстрого определения состава металлических сплавов и геометрическое исследование о центре тяжести пространственных фигур. Благодаря первым работам, Галилей получил известность среди итальянских математиков. С 1589 г. он профессор кафедры математики университета в Пизе, а с 1592 г. по 1610 г. — в Падуе. В 1610 г., уже будучи знаменитым ученым, по приглашению герцога Козимо II Медичи Галилей переехал во Флоренцию, где

получил должность придворного «философа» и «первого математика» университета без обязательств читать лекции. С 1605 г. он открыто выступал в защиту гелиоцентрического учения Коперника. В 1632 г. вышел его знаменитый «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой», в котором развивается учение Н. Коперника о движении Земли. Вскоре «Диалог» был запрещен, Галилей официально считался «узником инквизиции». Ему было запрещено печатать свои труды. Однако его работы выходили в других странах. Католическая церковь только в 1971 г. отменила решение об осуждении Г. Галилея.

Работы Галилея имели большое значение в создании принципов механики: открытие закона инерции, закона падения тел, колебаний маятника и др. Галилей впервые в истории наблюдал небесные светила с помощью изобретенной им зрительной трубы. В работах Галилея имеются элементы теории вероятностей.

Галилей показал, что площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды и ее основанием, в три раза больше площади круга, ограниченного образующей окружностью. Для установления этого факта он сравнивал вес двух металлических пластинок одинаковой толщины, одна из которых была очерчена по циклоиде, другая — по образующей окружности. Ученик Галилея Торричелли нашел указанную площадь, используя кинематические соображения.

С конца 30-х годов XVII в. циклоида становится одной из наиболее популярных линий, на которых математики испытывали силу своих новых методов. Оригинальное доказательство теоремы Галилея дал Роберваль (в 1634 г.) и независимо от него (и друг от друга) Ферма и Декарт (в 1638 г.). Они же указали способы построения касательной к циклоиде. Б. Паскаль вычислил объем и поверхность тела, полученного вращением циклоиды, а также нашел их центры тяжести. Спрямление

циклоиды (т. е. нахождение длины ее дуги) впервые осуществил Рен (в 1658 г.).

Кристофер Рен (1632—1723) — английский ученый и архитектор, изучал математику в Оксфордском университете. Был профессором астрономии в Лондоне, потом в Оксфорде. Рен является одним из основателей научного кружка, из которого возникло Лондонское королевское общество (в 1662 г.). Он был талантливым наблюдателем и экспериментатором (проводил опыты по изучению удара упругих тел). Рен особенно прославился, как выдающийся архитектор и один из строителей лондонского собора св. Петра.

Исследованием циклоиды успешно занимались и другие ученые. Гюйгенс и И. Бернулли установили ее важнейшие механические свойства. Одной из замечательных задач, поставленных и решенных в XVII в., была следующая. В вертикальной плоскости найти линию, обладающую свойством: время, необходимое для того, чтобы материальная точка, двигаясь по этой линии, спустилась до определенной ее точки, не зависит от исходного положения на линии данной материальной точки. Эту линию называли *таутохронной* или *изохронной кривой*. Искомой линией оказалась циклоида.

Внимание математиков XVII в. привлекала и другая задача, связанная с циклоидой. Задача состояла в следующем: среди всех линий, соединяющих две данные точки *A* и *B*, не лежащие на одной вертикали, найти ту, двигаясь по которой под действием силы тяжести материальная точка перейдет из положения *A* в положение *B* в кратчайшее время. В силу этого свойства линию называли *брахистохроной*. Оказалось, что искомой линией является циклоида. Задача о брахистохроне была поставлена в 1696 г. И. Бернулли и решена им, а также другими учеными.

Задача о брахистохроне положила начало развитию новой области математики — вариационному исчислению. Отметим, что некоторые (неклассические) задачи вариационного исчисления привели к созданию математической теории оптимального управления, в развитие которой существенный вклад внесли советские математики (академик Л. С. Понтрягин и др.).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ

Алгебраической спиралью называют линию, определяемую алгебраическим уравнением

$$f(\rho, \varphi) = 0 \quad (1)$$

относительно полярных координат ρ и φ . Рассмотренная ранее спираль Архимеда относится к алгебраическим спиральям, так как ее уравнение $\rho = a\varphi$ — алгебраическое уравнение первой степени относительно ρ и φ .

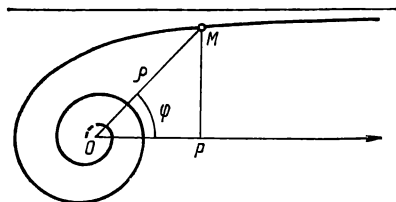
Рассмотрим алгебраические спирали, заданные наиболее простыми уравнениями вида (1).

Гиперболической спиралью называют линию, определяемую уравнением в полярных координатах

$$\rho = a/\varphi, \quad (2)$$

где a — постоянная.

Пусть $M(\rho, \varphi)$ — произвольная точка гиперболической спирали, P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на полярную ось (рис. 52). Тогда $MP = \rho \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}$. Так как $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$, то $\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = a$. Это означает, что точка M неограниченно приближается



Р и с. 52

к прямой AB , параллельной полярной оси и отстоящей от нее на расстоянии, равном a . Указанная прямая является асимптотой гиперболической спирали. Отметим, что $\rho \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$, т. е. при неограниченном увеличении полярного угла полярный радиус неограниченно убывает и точка M спирали неограниченно стремится к полюсу. В таком случае полюс называют *асимптотической точкой*. Следовательно, при возрастании φ от 0 до ∞ точка M гиперболической спирали пробегает участок линии, где она близка к асимптоте, и, пересекая полярную ось, устремляется к полюсу, делая вокруг него бесконечное множество витков, расстояние между которыми быстро убывает.

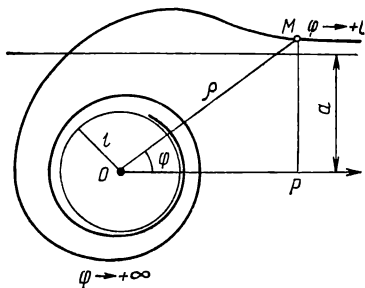
Конхойдой гиперболической спирали называют линию, которая в полярных координатах определяется уравнением $\rho = (a/\varphi) + l$. Линия эта получается из гиперболической спирали увеличением каждого полярного радиуса на величину l ($l > 0$). Конхойда гиперболической спирали имеет ту же асимптоту, что и гиперболическая спираль (2), так как

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} MP &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\varphi} + l \right) \sin \varphi = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} a \frac{\sin \varphi}{\varphi} + \lim_{\varphi \rightarrow 0} l \sin \varphi = a. \end{aligned}$$

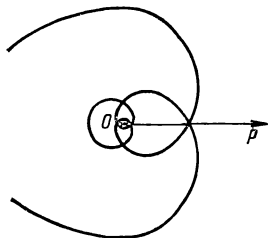
При возрастании φ от 0 до $+\infty$ полярный радиус неограниченно приближается к l :

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \rho = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{\varphi} + l \right) = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\varphi} + \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} l = 0 + l = l.$$

Значит, кривая, закручиваясь против хода часовой стрелки, неограниченно приближается к окружности радиуса l с центром в полюсе O (рис. 53).



Р и с. 53



Р и с. 54

Спиралью Галилея называют линию, определяемую уравнением в полярных координатах

$$\rho = a\varphi'^2 + b\varphi' + c, \quad (3)$$

где a , b , c — постоянные. Выделим полный квадрат в правой части этого уравнения:

$$\begin{aligned} a\varphi'^2 + b\varphi' + c &= a\left(\varphi'^2 + 2\frac{b}{2a}\varphi' + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(\varphi' + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Введем новую переменную φ по формуле $\varphi = \varphi' + \frac{b}{2a}$

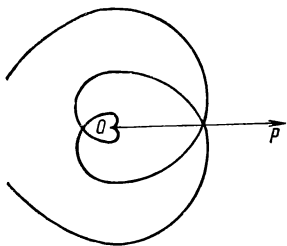
и обозначим $\frac{b^2}{4a} - c = l$. Тогда $a\varphi'^2 + b\varphi' + c = a\varphi^2 - l$;

поэтому уравнение (3) примет вид $\rho = a\varphi^2 - l$ ($l \geq 0$). Из этого уравнения видно, что спираль симметрична относительно полярной оси (рис. 54). При $l = 0$ получаем спираль, определяемую уравнением

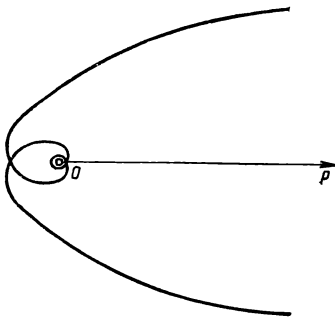
$$\rho = a\varphi^2. \quad (4)$$

Эта линия в полюсе имеет острие; касательные к ней в полюсе совпадают с полярной осью (рис. 55).

К спирали Галилея возник интерес в XVII в., в связи с постановкой задачи определения формы линии, по которой должна двигаться свободно падающая в области экватора точка, если бы она не обладала начальной скоростью, сообщаемой ей вращением земного шара.



Р и с. 55



Р и с. 56

Если спираль Галилея (4) подвергнуть преобразованию $\rho\rho' = a^2$, то получим новую спираль, определяемую уравнением $\rho = a/\varphi^2$. Эта спираль состоит из двух бесконечных ветвей (соответствующих положительным и отрицательным значениям φ); ветви спирали напоминают параболы. В полюсе линия имеет двойную асимптотическую точку (рис. 56).

Спиралью Ферма называют линию, определяемую уравнением $\rho = a\sqrt{\varphi}$ или

$$\rho^2 = a^2\varphi \quad (5)$$

относительно полярных координат ρ и φ .

Отметим, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0$, т. е. линия проходит через полюс. Полярный радиус ρ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании полярного угла φ . Точка линии совершает бесконечное множество витков во-

круг полюса. Расстояние между двумя соседними витками обозначим буквой d . Тогда $d = a(\sqrt{\varphi + 2\pi} - \sqrt{\varphi})$,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a(\sqrt{\varphi + 2\pi} - \sqrt{\varphi}) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a \frac{(\sqrt{\varphi + 2\pi} - \sqrt{\varphi})(\sqrt{\varphi + 2\pi} + \sqrt{\varphi})}{\sqrt{\varphi + 2\pi} + \sqrt{\varphi}} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \infty} a \frac{(\varphi + 2\pi) - \varphi}{\sqrt{\varphi + 2\pi} + \sqrt{\varphi}} = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{2a\pi}{\sqrt{\varphi + 2\pi} + \sqrt{\varphi}} = 0. \end{aligned}$$

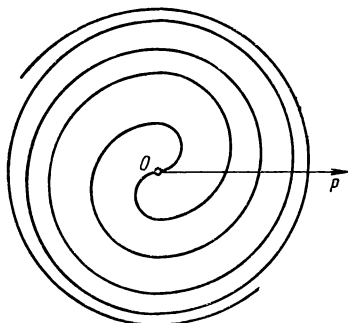


Рис. 57

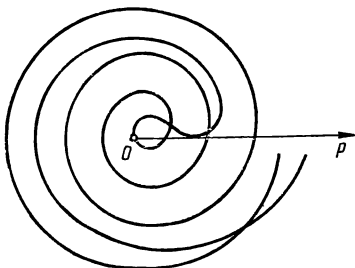


Рис. 58

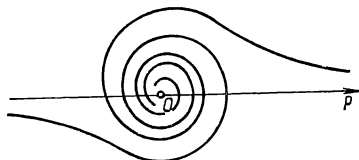


Рис. 59

Значит, расстояние между витками неограниченно убывает при неограниченном удалении точки спирали от полюса (рис. 57). Как уже отмечалось, расстояние между витками спирали Архимеда остается постоянным.

Параболической спиралью называют линию, которая в полярных координатах определяется уравнением $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$ ($l > 0$). Сопоставляя это уравнение с урав-

нением (5), видим, что параболическая спираль получается из спирали Ферма увеличением всех ее полярных радиусов на величину l . Другими словами, параболическая спираль — конхоида спирали Ферма. Линия изображена на рис. 58.

Жезлом называют спираль, определяемую уравнением $\rho = a/\sqrt{\varphi}$ относительно полярных координат ρ , φ . Линия эта изображена на рис. 59.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Логарифмической спиралью называют линию, определяемую в полярных координатах ρ' , φ' уравнением

$$\rho' = C\alpha^{\varphi'}, \quad (6)$$

где C , a — постоянные; $a > 0$, $a \neq 1$, $C > 0$.

Перейдем к новой полярной системе координат по формулам $\rho' = \rho$, $\varphi' = \varphi + \varphi_1$, тогда $\rho = C\alpha^{\varphi+\varphi_1} = C\alpha^{\varphi_1}\alpha^{\varphi}$. Если положить теперь $\varphi_1 = -\ln C/\ln a$, то $C\alpha^{\varphi_1} = Ce^{(\ln a)\varphi_1} = Ce^{\ln a(-\ln C/\ln a)} = Ce^{-\ln C} = CC^{-1} = 1$. Уравнение (6) принимает вид $\rho = C\alpha^{\varphi+\varphi_1} = 1 \cdot \alpha^{\varphi}$, или

$$\rho = a^{\varphi}, \quad (7)$$

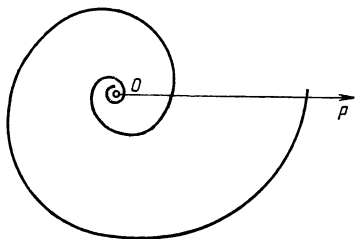
где a — действительное число, причем $a > 0$, $a \neq 1$.

Из уравнения (7) следует, что если $a > 1$, то $\rho = 1$ при $\varphi = 0$; при неограниченном возрастании φ неограниченно возрастает и ρ . Спираль разворачивается против хода часовой стрелки, делая бесконечное множество витков вокруг полюса. Обозначим буквой d расстояние между витками логарифмической спирали. Тогда

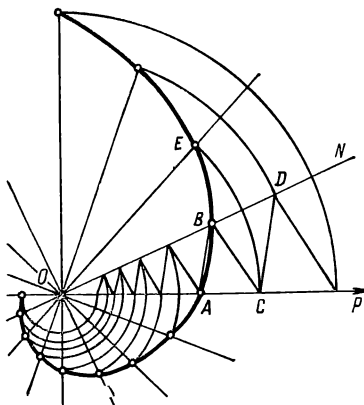
$$d = a^{\varphi+2\pi} - a^{\varphi} = a^{\varphi}(a^{2\pi} - 1).$$

Отсюда видно, что расстояние между витками логарифмической спирали увеличивается с возрастанием φ (отметим, что у спирали Архимеда оно является постоянным, а у

спирали Ферма неограниченно убывает). Если $\varphi \rightarrow -\infty$, то $\rho \rightarrow 0$, полярный радиус неограниченно убывает; спираль закручивается по ходу часовой стрелки, делая бесконечное множество оборотов вокруг полюса, стремясь к нему как к своей асимптотической точке (рис. 60). Если $a < 1$, то спираль закручивается вокруг полюса по часовой стрелке.



Р и с. 60



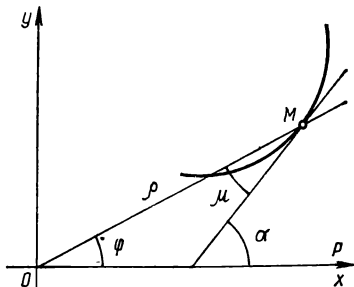
Р и с. 61

Чтобы построить линию по точкам, необходимо зафиксировать некоторое значение a . Придавая произвольные значения переменной φ , вычисляем соответствующие значения ρ . Каждой паре значений (ρ, φ) соответствует единственная точка $M(\rho, \varphi)$. Эти точки логарифмической спирали можно построить следующим образом. Проведем из полюса лучи под углом, равным, например, $\pi/8$, один к другому. Значения полярных радиусов точек спирали, которые придется откладывать на этих лучах, начиная от полярного радиуса $|OA| = 1$, направленного по полярной оси, будут $a^{\pi/8}$, $(a^{\pi/8})^2$, $(a^{\pi/8})^3$, .. Выразив число $a^{\pi/8}$ соответствующим масштабу отрезком OB , отложим этот от-

резок на луче ON и получим точку B (рис. 61) данной спирали. Величину $(a^{\pi/8})^2 = |OB|^2$ полярного радиуса, который надо отложить на следующем луче, найдем графическим путем, построив треугольник OBC , подобный треугольнику OAB . Из подобия этих треугольников следует, что $|OC| : |OB| = |OB| : |OA|$, откуда $|OB|^2 = |OC|$, ибо $|OA| = 1$. Величину полярного радиуса, который нужно отложить на очередном луче, получим, построив треугольник OCD , подобный треугольнику OAB , и т. д. Для определения точек спирали, расположенных по ходу часовой стрелки от точки A , необходимо построить систему уменьшающихся подобных треугольников.

Покажем, что угол μ между касательной к логарифмической спирали в точке M и полярным радиусом OM есть постоянная величина (не меняется при переходе от одной точки спирали к ее другой точке).

Сначала выведем формулу, выражающую тангенс угла между полярным радиусом OM и касательной в точке M для любой линии (рис. 62), заданной уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах. Так как $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то линию можно представить параметрическими уравнениями $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$,



Р и с. 62

где роль параметра играет полярный угол φ . Обозначим буквой α угол, составленный касательной к линии в точке $M(\rho, \varphi)$ с положительной полуосью Ox . Принимая во внимание геометрическое значение производной функции $y = y(x)$, находя производные функций $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ по аргументу φ , получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi}.$$

Пусть μ — угол между полярным радиусом \overline{OM} и касательной к линии в точке M . Тогда $\mu = \alpha - \varphi$,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\operatorname{tg} \alpha$, находим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) \cos \varphi - (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \sin \varphi}{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \cos \varphi + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) \sin \varphi} = \frac{\rho}{\rho'};$$

$$\operatorname{tg} \mu = \rho/\rho' \quad \text{или} \quad \rho' = \rho \operatorname{ctg} \mu.$$

Последняя формула выражает геометрический смысл производной функции $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ , φ — полярные координаты. Первая из этих формул позволяет доказать наше утверждение. Действительно, для логарифмической спирали $\rho = a^\varphi$ имеем $\rho' = a^\varphi \ln a$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a^\varphi}{a^\varphi \ln a} = \frac{1}{\ln a} = \operatorname{const} \quad (a = \operatorname{const}).$$

Значит, каждая логарифмическая спираль пересекает все полярные радиусы своих точек под одним и тем же углом. В связи с этим замечательным свойством логарифмическую спираль называют *равноугольной*. Кроме логарифмической спирали, таким свойством обладает только окружность, которая пересекает полярные радиусы своих точек под прямым углом. Поскольку величина угла μ зависит от значения параметра a , то этот параметр всегда можно определить так, чтобы соответствующая логарифмическая спираль пересекала полярные радиусы своих точек под заданным углом μ_0 . Чтобы найти необходимое значение параметра a , достаточно решить уравнение $\operatorname{tg} \mu_0 = \frac{1}{\ln a}$, откуда $a = e^{\operatorname{ctg} \mu_0}$. Из последней формулы следует, что спи-

раль, определяемая уравнением $\rho = e^\varphi$, пересекает полярные радиусы своих точек под углом 45° .

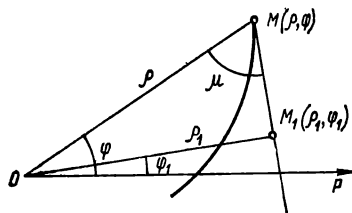
Логарифмическая спираль находится в определенном соотношении с локсодромой. *Локсодромой* называют линию на поверхности шара, которая пересекает все меридианы под одним и тем же углом. Эта линия определяет наиболее удобную ориентацию судна в открытом море, в силу постоянства угла между курсом корабля и магнитной стрелкой. При стереографической проекции полушария меридианы переходят в радиально расположенные прямые. Поскольку в этой проекции равные углы переходят в равные, то локсодрома спроектируется в линию, которая будет пересекать эти радиальные прямые под одним и тем же углом, т. е. проекцией локсодромы на плоскость является логарифмическая спираль.

Равенство $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{const}$ позволяет доказать, что точки касания касательных к логарифмической спирали, проведенной из некоторой точки P плоскости, лежат на окружности, проходящей через эту точку и полюс O . Действительно, вершины углов между касательными и полярными радиусами, имеющими постоянное значение, должны лежать на окружности, проходящей через точку P и полюс O , поскольку при этом условии углы будут иметь одинаковую меру, как опирающиеся на одну и ту же окружность.

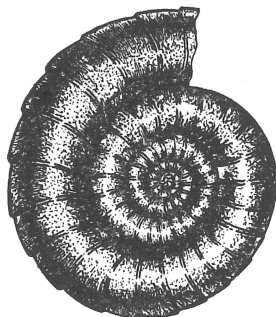
Логарифмическая спираль переходит в себя при многих преобразованиях, в частности, при преобразовании подобия и при инверсии. Пусть задана логарифмическая спираль уравнением (7). При преобразовании подобия с коэффициентом C полярный радиус каждой ее точки умножается на множитель C . В результате получается уравнение $\rho = Ca^\varphi$, которое также определяет логарифмическую спираль (см. уравнение (6)). Одна спираль получается из другой поворотом на угол $\varphi_1 = -\ln C / \ln a$. Рассмотрим инверсию с центром в полюсе, определяемую

соотношениями $\rho \rho_1 = k^2$, $\varphi_1 = -\varphi$. Уравнение $\rho = a^\varphi$ перейдет в уравнение $\rho_1 = k^2 a^{\varphi_1}$, которое выражает ту же спираль, но повернутую на угол $\varphi_1 = -\ln k^2 / \ln a$.

Отметим также, что подера логарифмической спирали также является логарифмической спиралью. В самом деле, пусть $M_1(\rho, \varphi_1)$ — точка подеры, соответствующая точке $M(\rho, \varphi)$ данной спирали (рис. 63). Из $\triangle OMM_1$ имеем $\rho = \frac{\rho_1}{\sin \mu}$, $(\varphi - \varphi_1) + \mu = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \mu$.



Р и с. 63



Р и с. 64

Подставляя это выражение в уравнение (7), получаем

$$\frac{\rho_1}{\sin \mu} = a^{\frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \mu}, \text{ или } \rho_1 = \sin \mu \cdot a^{\frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \mu}.$$

Поскольку $\mu = C_1$, то $\sin \mu = C_2$, $\sin \mu \cdot a^{\frac{\pi}{2} - \mu} = C$, где C_1, C_2, C — постоянные. Поэтому последнее уравнение принимает вид $\rho_1 = C a^{\varphi_1}$. Это уравнение определяет логарифмическую спираль.

Свойство логарифмической спирали оставаться неизменной при различных преобразованиях впервые установил Я. Бернулли; он называл спираль *spira mirabi-*

lis — дивная спираль. Эти свойства настолько поразили его, что он склонен был придать им мистический смысл и завещал изобразить на своем надгробии логарифмическую спираль с надписью: «eadem mutata resurgo» — «измененная, возрождаюсь прежней».

Логарифмическая спираль широко применяется в технике. Эти применения основаны на свойстве, выражаемом равенством $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{const}$ и означающим, что логарифмическая спираль пересекает полярные радиусы всех своих точек под одним и тем же углом. Так, в различных режущих инструментах и машинах вращающиеся ножи имеют профиль, очерченный по дуге логарифмической спирали. В силу этого угол резания, т. е. угол θ между лезвием ножа и направлением скорости его вращения, равен $\frac{\pi}{2} - \mu$ и остается неизменным, поскольку $\mu = \operatorname{const}$.

Логарифмическая спираль применяется в теории механизмов при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом (т. е. отношением их угловых скоростей). В природе по логарифмической спирали очерчены некоторые раковины (рис. 64). Семечки подсолнуха расположены по дугам, близким к дугам логарифмической спирали.

Логарифмическая спираль впервые упоминается в письме Декарта к Мерсенну от 12 сентября 1638 г. (опубликовано в 1657 г.). Занимаясь одной задачей механики, Декарт рассмотрел линию, обладающую тем свойством, что угол между полярным радиусом и касательной в конце является постоянным. Отсюда он получил, что длина дуги, отсчитываемая от полюса, пропорциональна радиус-вектору. Декарт определил новую спираль как линию, для которой отношение полярного радиуса точки к длине соответствующей дуги является постоянным.

Марен Мерсенн (1588—1648) — французский ученый,

оставил в истории науки своеобразный и заметный след. Мерсенн подружился с Декартом в период их совместной учебы в иезуитской коллегии Ла Флеш. Путешествуя по Италии, Нидерландам, Мерсенн устанавливал научные контакты с учеными. Отметим, что в то время при помощи переписки осуществлялся обмен научной информацией. Переписка заменяла тогда научные журналы, которые появились позднее (первый физико-математический журнал «*Journal des Savants*» основан в Париже в 1665 г.). Благодаря переписке между учеными становились известными многие важные математические и физические открытия. В Париже Мерсенн выполнял функции современных институтов научной информации. Корреспондентами Мерсенна были Декарт, Кавальери, Паскаль, Роберваль, Гюйгенс, Торричелли, Ферма. Мерсенна отличала замечательная интуиция, позволявшая ему из потока научных работ выделить наиболее значительные. Он отличался редкой способностью объединять вокруг себя людей с общими интересами. Вокруг Мерсенна в Париже образовался кружок естествоиспытателей, который стал основой для организации Парижской академии наук (1666). Кружок математиков, физиков, астрономов с 1625 г. регулярно (раз в неделю) собирался на заседания у Мерсенна. Мерсенн внес собственный вклад в науку: известны его работы по акустике, математике, теории музыкальных инструментов. Ему удалось впервые определить скорость звука. Мерсенн изучал движение жидкостей, законы колебания маятника. Он содействовал изданию работ Декарта, пропагандировал учение Галилея во Франции.

Отметим, что независимо от Декарта логарифмическая спираль была открыта Торричелли, который выполнил ее спрямление и квадратуру. Название «логарифмическая спираль» для рассматриваемой линии предложил Лопиталь.

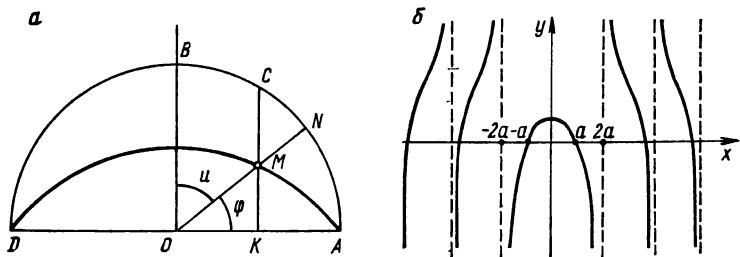
Маркиз Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь (1661—1704) — французский математик, родился в Париже, в

семье генерал-лейтенанта французских войск. По желанию отца стал военным, но затем отказался от военной карьеры из-за призвания к математике, которое проявилось с детства. Его первые математические работы (связанные с теорией колебаний маятника) обратили на себя внимание Гюйгенса и Лейбница. Под руководством И. Бернулли Лопиталь овладел исчислением бесконечно малых, причем овладел мастерски, с помощью методов анализа бесконечно малых решил ряд задач математики и механики. Главной заслугой Лопиталья является создание — при участии И. Бернулли — первого печатного учебника по дифференциальному исчислению, который опубликован в 1696 г. под названием «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий». Этот курс получил международное распространение (в 1730 г. был переиздан на английском языке, в 1764 г. вышел в Вене на латинском языке). «Анализ бесконечно малых» выдержал еще четыре издания на французском языке, последнее из которых вышло в 1781 г. Книга Лопиталья пользовалась большим, вполне заслуженным успехом. Она впервые открыла доступ к новой науке более широкому кругу людей. В книге, в частности, содержится правило нахождения предела дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю, известное теперь под названием правила Лопиталья — Бернулли. Уже после смерти Лопиталья было опубликовано другое его сочинение — «Аналитический трактат о конических сечениях» (1707), посвященное теории линий второго порядка. В 1693 г. Лопиталь был избран членом Парижской академии наук и дважды состоял ее вице-президентом.

КВАДРАТРИСА

Квадратриса получается следующим образом. Пусть дан отрезок $|AD| = 2a$, O — середина этого отрезка (рис. 65, а). Отрезок OA равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = \pi/2T$, а прямая KC , перпендикулярная AD , одновременно начинает равно-

мерно двигаться от точки A к точке D со скоростью $v = a/T$, оставаясь параллельной исходному направлению. Точка M пересечения вращающегося отрезка и движущейся указанной прямой опишет линию, которую и называют *квадратрисой*.



Р и с. 65

Составим параметрические уравнения квадратрисы. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в точке O , ось абсцисс направим по отрезку DO . Предположим, что положение точки M соответствует моменту времени t , прошедшему от начала движения (в начальный момент, т. е. при $t=0$, точка M совпадала с точкой A). Обозначим через x, y прямоугольные декартовы координаты точки M , тогда $x = OK = OA - AK$;

$$y = KM = OK \operatorname{ctg} \widehat{NOB}.$$

Поскольку $OA = a$; $AK = \frac{a}{T} t$; $\widehat{NOB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MOA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2T} t = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)$, то эти формулы принимают вид

$$x = OK = a - \frac{a}{T} t = a \left(1 - \frac{t}{T}\right); y = KM =$$

$$= a \left(1 - \frac{t}{T} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Итак, получены параметрические уравнения квадратрисы

$$x = a \left(1 - \frac{t}{T} \right); \quad y = a \left(1 - \frac{t}{T} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right),$$

где роль параметра играет время t . Эти уравнения примут более простой вид, если в качестве нового параметра u взять величину угла NOB , т. е. положить

$$u = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right) \quad \text{или} \quad 1 - \frac{t}{T} = \frac{2u}{\pi}$$

Параметрические уравнения в этом случае запишутся так:

$$x = \frac{2a}{\pi} u; \quad y = \frac{2a}{\pi} u \operatorname{ctg} u$$

Исключим параметр u из этих уравнений:

$$u = \frac{\pi x}{2a}; \quad y = \frac{2a}{\pi} \frac{\pi x}{2a} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}.$$

Мы получили уравнение квадратрисы в прямоугольных декартовых координатах

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}. \quad (8)$$

Запишем уравнение квадратрисы в полярных координатах. Полюс полярной системы координат поместим в точке O , а полярную ось направим по оси абсцисс. Тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, откуда $\rho = \frac{x}{\cos \varphi}$. Так как

$$x = \frac{2a}{\pi} u, \quad u = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad x = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi},$$

то полярное уравнение квадратрисы принимает вид

$$\rho = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}.$$

Исследуем форму и расположение квадратрисы по уравнению (8). Из этого уравнения можно получить следующие заключения.

Начальная ордината (при $x=0$) линии равна $2a/\pi$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$$

(мы воспользовались здесь равенством $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1$, которое следует из равенств $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$).

Линия имеет бесконечное множество точек пересечения с осью ординат, так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = 0$ при $x = \pm a, \pm 3a, \pm 5a, \dots$

Квадратриса изображена на рис. 65, б, а на рис. 65, а указана та часть линии, которая соответствует отрезку $-a \leq x \leq a$.

Квадратриса была открыта еще в древности. Это первая трансцендентная кривая, известная древним грекам. В поисках решения задачи о трисекции угла линию впервые открыл Гиппий из Элиды — древнегреческий софист, живший в V в. до н. э. К задаче о квадратуре круга эту линию применил древнегреческий геометр Динострат, научное творчество которого относится ко второй половине IV в. до н. э. В связи с этим кривую называют квадратрисой Динострата. Динострат был учеником Платона и Евдокса. Он изучал конические сечения, но труды его до нас не дошли. Динострат нашел предложение, равносильное утверждению о том, что предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге равен единице.

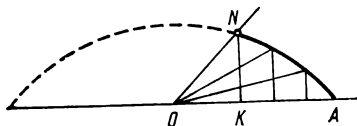
Рассматриваемую линию описывает древнегреческий математик Папп в восьмой книге своего труда «Математическое собрание» (в восьми книгах; первая книга и значительная часть второй не сохранились). Замечательный ученый Папп жил в III в. н. э. По-видимому, он работал в Александрии, так как его называют Александрийским. Это был прекрасный знаток древнегреческой математики. Указанное сочинение Паппа содержит добросовестное изложение содержания работ многих математиков и астрономов того времени, оригиналы которых до нас не дошли. Папп изучал линии на торе и других поверхностях. Он доказал ряд теорем, которые относятся к проективной геометрии. Эти теоремы включены в его «Математический сборник». Известны также комментарии Паппа к «Альмагесту» Птолемея и к «Началам» Евклида (знаменитый астроном Клавдий Птолемей работал в Александрии в середине II в. до н. э. В указанном труде он подробно изложил теорию видимого движения Солнца, Луны и планет).

Покажем, как применяется квадратриса к нахождению длины окружности и к задаче о квадратуре круга, а также к решению задачи о делении угла в заданном отношении.

Как уже отмечалось, начальная ордината (при $x = 0$) равна $2a/\pi$, т. е. $|OP| = 2a/\pi$. Это равенство позволяет найти отрезок, длина которого равна длине окружности, если известны $2a$ и $|OP|$. В самом деле, указанное равенство можно записать в виде пропорции $\frac{2\pi a}{2a} = \frac{2a}{|OP|}$. Отсюда видно, что отрезок длины $2\pi a$, равный длине окружности радиуса a , можно построить как четвертый пропорциональный отрезок к отрезкам $2a$, $2a$, $|OP|$. Поскольку площадь круга радиуса a определяется формулой $\pi a^2 = 2\pi a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} 2\pi a \cdot a$, т. е. равна площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и высотой,

равной ее радиусу, то, построив такой треугольник и преобразовав его в равновеликий квадрат, получим решение задачи о квадратуре круга.

Квадратрису можно применить к решению задачи о делении угла в заданном отношении. Пусть угол COD



Р и с. 66

надо разделить на три равные части. На этот угол наложим шаблон квадратрисы так, чтобы основание ее совпало с одной из сторон угла, а середина ее основания — с вершиной этого угла (рис. 66).

Вычертив по профилю шаблона дугу AN квадратрисы и убрав его, из точки N опускаем перпендикуляр на OA , точку пересечения его с OA обозначим буквой K . Разделим отрезок KA на три равные части. В точках деления восставим перпендикуляры к OA и отметим точки пересечения их с дугой квадратрисы. Соединив эти точки с вершиной угла, мы решим поставленную задачу — задачу о трисекции угла COD .

Название «квадратриса» для рассматриваемой линии предложил Лейбниц.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родился в семье профессора морали Лейпцигского университета Фридриха Лейбница. В 1653 г. он поступил в школу, увлекся историей, логикой, риторикой, писал стихи. В 1661—1666 гг. Лейбниц изучал философию и юриспруденцию в университетах Лейпцига и Иены. В 1666 г. защитил докторскую диссертацию по юридическим наукам. Состоял на юридической и дипломатической службе у Майнцского курфюрста. В 1672 г. Лейбниц выехал из Майнца в Париж с дипломатическим поручением курфюрста. Здесь он познакомился с учеными Парижской академии наук и ее президентом — Гюйгенсом, с которым обсуждал свои первые математические работы. В 1673 г.

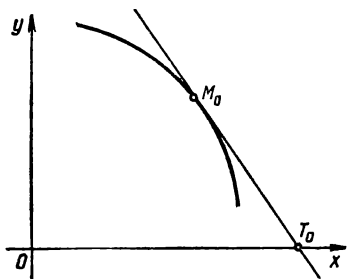
Лейбниц совершил поездку в Лондон, где установил контакты с английскими учеными и продемонстрировал им модель счетной машины, которую построил, ознакомившись с арифмометром Паскаля. Лондонское Королевское общество избрало Лейбница своим членом. Правда, многие ученые нашли его знания поверхностными, а самого его только дилетантом, к чему в то время имелись все основания. Возвратившись в Париж, Лейбниц начал серьезно изучать математику. Большую роль в его занятиях сыграли беседы с Гюйгенсом. В короткий срок он изучил труды Декарта, Паскаля, Гюйгенса и др. Вскоре Лейбниц приступил к самостоятельным научным исследованиям, к осени 1675 г. выработал принципы и символику дифференциального и интегрального исчисления. В 1676 г. Лейбниц поступил на службу к герцогу Ганноверскому, у которого заведовал библиотекой и был историографом двора. Однако его деятельность выходила далеко за пределы официальных обязанностей. Его серьезно интересовали математика, химия, геология. Лейбниц разработал ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт. Свыше 40 лет он посвятил усовершенствованию сконструированной им счетной машины. Эта машина выполняла не только сложение и вычитание (как машина Б. Паскаля), но и умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратных и кубических корней. Вследствие этого Лейбница можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики.

Важнейшей научной заслугой Лейбница является то, что он одновременно с Ньютоном и независимо от него завершил создание дифференциального и интегрального исчисления. В 1684 г. он опубликовал первую статью по анализу бесконечно малых. Лейбниц ввел ряд математических терминов, которыми пользуются и в настоящее время: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата, а также знаки дифференциала, интеграла и др. Он создал собственную научную школу, в которую входили братья Бернулли, Лопиталь и другие математики.

В 1700 г. Лейбниц организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом; в том же году он был избран иностранным членом Парижской академии наук.

В 1697 г. Лейбниц впервые встретился с русским царем Петром I. Он вел переписку с русским правительством, которому представил ряд проектов о распространении образования и наук в России. В 1711—1712 гг. Лейбниц дважды встречался с Петром I, который назначил его тайным советником юстиции русской службы. Царь Петр I несколько раз беседовал с Лейбницем по вопросу об основании Академии наук в Петербурге. Последняя их встреча произошла в 1716 г.

ТРАКТРИСА



Р и с. 67

Определение трактрисы основано на понятии длины касательной к линии в данной ее точке. Введем это понятие.

Пусть дана линия, определяемая уравнением $y = f(x)$. Фиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ данной линии (рис. 67). Проведем касательную к линии в точке $M_0(x_0, y_0)$, обозначив буквой T_0 точку пересечения этой

касательной с осью абсцисс. Длиной касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется длина ее отрезка M_0T_0 , где T_0 — точка пересечения касательной и оси Ox , т. е. число $|M_0T_0|$. Найдем эту длину. Как известно, уравнение касательной к данной линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ или $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где $y'_0 = y'(x_0) = f'(x_0)$. Определим координаты точки из системы двух уравнений

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0); y = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$-y_0 = y'_0(x - x_0); \quad -\frac{y_0}{y'_0} = x - x_0; \quad x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}.$$

Таким образом, точка T_0 имеет координаты $x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$; $y = 0$; $T_0\left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0\right)$. Зная координаты точек M_0 и T_0 , найдем длину отрезка M_0T_0 по формуле для вычисления расстояния между двумя точками:

$$\begin{aligned} |M_0T_0| &= \sqrt{\left(-\frac{y_0}{y'_0}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\frac{y_0^2}{y'^2_0}(1 + y'^2_0)} = \\ &= \frac{|y_0|}{|y'_0|} \sqrt{1 + y'^2_0}. \end{aligned}$$

Итак, для длины касательной получена формула

$$|MT| = \frac{|y|}{|y'|} \sqrt{1 + y'^2}, \quad (9)$$

где $M(x, y)$ — точка линии $f(x)$, T — точка пересечения оси Ox и касательной к этой линии в точке M .

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в интервале $[a, b]$ и имеющую производную в каждой его точке. Фиксируем точку $x \in]a, b[$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называют произведение ее производной на приращение аргумента в этой точке. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначим символом dy или $df(x)$. Тогда по определению $dy = y' \Delta x$ или $dy = f'(x) \Delta x$. Если $y = x$, то $dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x$, $dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен этой переменной. Формула для дифферен-

циала принимает вид $dy = y' dx$ или

$$dy = f'(x) dx, \quad (10)$$

откуда $y' = \frac{dy}{dx}$ или

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (11)$$

Поскольку по определению $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Умножая обе части последнего равенства на Δx , получаем $\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$ или $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$, т. е. дифференциал функции есть часть ее приращения. Эту часть называют главной линейной частью приращения функции (если $y' \neq 0$).

В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (11), которая означает, что производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Трактрисой называют линию, у которой длина касательной является величиной постоянной.

Обозначим эту постоянную буквой a и воспользуемся формулой (9) для длины касательной. Для любой точки трактрисы будем иметь

$$a = \frac{|y|}{|y'|} \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{или} \quad a^2 = \frac{y^2}{y'^2} (1 + y'^2).$$

Найдем отсюда выражение для производной:

$$a^2 y'^2 = y^2 (1 + y'^2); \quad (a^2 - y^2) y'^2 = y^2;$$

$$y'^2 = \frac{y^2}{a^2 - y^2}; \quad y' = \sqrt{\frac{y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Используя формулу (11), преобразуем последнее ра-

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2 - y^2}}; \quad dx = \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}} dy.$$

Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей полученного равенства

$$x = \int \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}} dy.$$

Чтобы найти этот неопределенный интеграл, введем новую переменную t по формуле $y = a \sin t$. С помощью формулы (10) находим дифференциал функции y : $dy = a \cos t dt$. Преобразуем подкоренное выражение:

$$\frac{a^2 - y^2}{y^2} = \frac{a^2 - a^2 \sin^2 t}{a^2 \sin^2 t} = \frac{a^2 (1 - \sin^2 t)}{a^2 \sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

Подынтегральное выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}} dy &= \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} a \cos t dt = a \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \\ &= a \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}} dy = \int a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - \\ &\quad - a \int \sin t dt. \end{aligned}$$

Второй интеграл является табличным: $\int \sin t dt = -\cos t + C$, поэтому

$$x = a \int \frac{dt}{\sin t} + a \cos t + C_1.$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, введем новую переменную u по формуле $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$. Тогда

$$\frac{t}{2} = \operatorname{arctg} u; \quad t = 2 \operatorname{arctg} u; \quad dt = \frac{2}{1+u^2} du;$$

$$\sin t = \sin 2 \frac{t}{2} = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + 1} = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sin t} &= \int \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C_2 = \\ &= \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + C_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t + C \quad (C = C_1 + C_2).$$

Положим $y=a$ при $x=0$. Поскольку $y=a \sin t$, то введенное условие дает возможность определить t : $a = a \sin t$, $1 = \sin t$, $t = \pi/2$. Из выражения для x находим значение произвольной постоянной C :

$$0 = a \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a \cos \frac{\pi}{2} + C, \quad \text{откуда} \quad C = 0.$$

Итак, получены параметрические уравнения трактрисы

$$x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t; \quad y = a \sin t. \quad (12)$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получаем уравнение линии в декартовых координатах

$$x = \pm \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \right). \quad (13)$$

Отсюда видно, что трактриса симметрична относительно оси ординат: каждому значению y соответствуют два значения x , равных по модулю и имеющих противоположные знаки. Это следует также из уравнений (12): каждой паре значений t и $\pi - t$ параметра t соответствуют одинаковые значения y , а значения x отличаются только знаком. Из уравнений (12) следует, что t может меняться лишь в интервале $0 < t < \pi$, поэтому $y > 0$ при указанных значениях t . Как уже отмечалось, $x=0$ и $y=a$ при $t=\pi/2$. Точка $A(0, a)$ является для трактрисы точкой возврата.

Ось абсцисс является асимптотой трактрисы, поскольку $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pi$, т. е. y стремится к нулю, когда x неограниченно возрастает по модулю, принимая положительные или отрицательные значения (рис 68).

Выясним геометрический смысл параметра t в уравнениях (12). Как известно, $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx$, где α — угол наклона касательной к оси абсцисс. Если x и y заданы

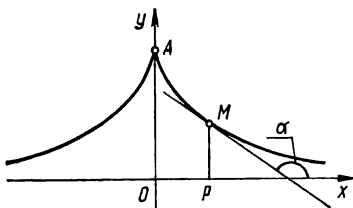
параметрическими уравнениями, то $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$. Так как

$$y'_t = a \cos t; \quad x'_t = a \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \frac{1}{2} - a \sin t = \frac{a}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} -$$

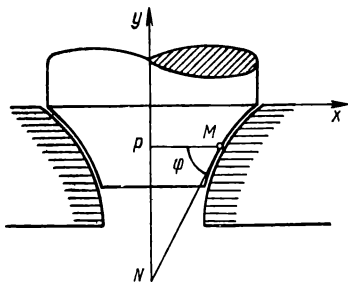
$$- a \sin t = \frac{a}{\sin t} - a \sin t = \frac{a(1 - \sin^2 t)}{\sin t} = \frac{a \cos^2 t}{\sin t},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \cos t}{\frac{\cos^2 t}{a \sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t; \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \alpha; t = \alpha.$$

Значит, параметр t есть величина угла, составленного касательной к трактрисе с положительным направлением оси абсцисс.



Р и с. 68



Р и с. 69

Отметим применение трактрисы в технике. В механизме карусельного токарного станка одной из его частей является антифрикционная пята. Линия, по которой очерчен профиль вертикального сечения этой пяты, должна удовлетворять условию $x/\cos \varphi = r = \text{const}$ (рис. 69). Это условие выражает техническое требование, чтобы снашивание указанной части механизма во время работы станка было равномерным. Очевидно, левая часть данного равенства выражает длину касательной $|MN|$, отсчитываемую от точки касания M до точки N пересечения с осью ординат. Следовательно, линия вертикального профиля антифрикционной пяты обладает тем свойством, что длина ее касательной постоянна, т. е. линия эта представляет собой трактрису.

Трактриса была впервые открыта в XVII в. в результате решения следующей задачи: найти линию, по которой должна перемещаться в горизонтальной плоскости тяжелая материальная точка M , прикрепленная к концу нити, если другой конец нити перемещается по некоторой прямой, лежащей в той же плоскости. Сразу же было отмечено, что траектория точки M будет характеризоваться постоянством отрезка касательной к линии, равном длине рассматриваемой нити. Об этом способе образования линии говорит и ее название — трактриса: от латинского *tracto* — «тащу, влеку». Указанную задачу впервые (около 1675 г.) предложил ученым парижский врач и архитектор Клод Перро (1613—1688), брат Шарля Перро — автора знаменитых сказок, среди которых — бессмертная «Красная Шапочка» (1697). Эту задачу решил Лейбниц.

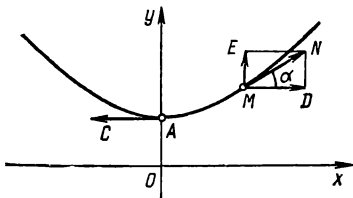
Трактриса сыграла выдающуюся роль в истории математики в связи с открытием Н. И. Лобачевским новой геометрии и последующим развитием учения о неевклидовых геометриях. Оказалось, что гиперболическая геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана реализуются на поверхностях постоянной кривизны. К таким поверхностям относится псевдосфера, полученная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты.

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ

Цепной линией называют кривую, форму которой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая тяжелая нить с закрепленными концами.

Составим уравнение этой линии в прямоугольных декартовых координатах, приняв ее ось симметрии за ось ординат, а за ось абсцисс — перпендикулярную ей прямую на расстоянии $|OA|$, которое будет определено в дальнейшем. Выделим дугу AM (рис. 70) от вершины A до точки $M(x, y)$ этой линии. Поскольку нить находится в состоянии равновесия, то дугу AM можно рассматри-

вать как твердое тело, на которое действуют три силы: сила F_1 натяжения нити в точке A , направленная по касательной AC , сила F_2 натяжения нити в точке M , направленная по касательной MN , сила P , равная весу материальной дуги AM этой нити. Обозначим длину дуги AM буквой s , а линейную плотность — буквой γ . Тогда $P = \gamma s$.



Р и с. 70

Разлагая силу F_2 на составляющие \overline{ME} и \overline{MD} , получим $ME = F_2 \sin \alpha$, $MD = F_2 \cos \alpha$, где α — угол наклона касательной MN к оси Ox . Поскольку нить находится в состоянии равновесия, то $F_2 \sin \alpha = \gamma s$, $F_2 \cos \alpha =$

$= F_1$. Разделив почленно первое из этих равенств на второе, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma_1}{F_1} s; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma_1}{F_1} s; \quad s = a \frac{dy}{dx}; \quad s = ay',$$

где $a = \frac{F_1}{\gamma_1}; \quad y' = \frac{dy}{dx}.$

Очевидно, с изменением положения точки M на линии меняется и длина дуги AM , т. е. $s = s(x)$, где $s(x)$ — функция абсциссы x . Будем считать, что эта функция имеет производную, тогда $s' = ay''$ или

$$\frac{ds}{dx} = a \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (14)$$

где $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ — вторая производная функции $y = y(x)$,

т. е. производная от первой производной $y' = \frac{dy}{dx}$.

Рассмотрим точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ данной линии, длина дуги AM' будет $s+\Delta s$, где s — длина дуги AM , а Δs — длина дуги MM' . Из треугольника MKM' находим длину хорды MM' :

$$|MM'| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Очевидно, что

поэтому
$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} = 1; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 1,$$

$$\frac{|MM'|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{|MM'|}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, получаем формулу для производной функции $s=s(x)$, выражающей длину дуги:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (15)$$

так как

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|MM'|}{\Delta s} = 1; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Применяя полученную формулу, уравнение (14) перепишем так:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (16)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка (оно содержит вторую производную неизвестной функции $y=y(x)$).

Из полученного дифференциального уравнения цепной линии найдем ее уравнение в прямоугольных декартовых координатах. Сначала понизим порядок дифференциально-

го уравнения. Введем новую переменную p по формуле $p = \frac{dy}{dx}$. Тогда $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, и уравнение (16) примет вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1+p^2}; \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a} dx.$$

Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей последнего равенства:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x}{a} + C_1. \quad (17)$$

Чтобы найти интеграл в левой части, положим

$$\sqrt{1+p^2} = u - p \text{ или } u = p + \sqrt{1+p^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} u' &= p' + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} p' = p' \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) = \\ &= p' \frac{\sqrt{1+p^2} + p}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{p + \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx}; \\ du &= \frac{u}{\sqrt{1+p^2}} dp; \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C_2 = \ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C_2.$$

Равенство (17) принимает вид

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C_2 = \frac{x}{a} + C_1;$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C \quad (C = C_1 - C_2) \quad (18)$$

Система декартовых прямоугольных координат выбрана так, что $p = \frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$. Действительно, когда $x = 0$, то точка M совпадает с точкой A , в которой y достигает минимума, т. е. $x = 0$ — точка минимума, поэтому в ней производная равна нулю. Подставляя значения $x = 0$ и $p = 0$ в уравнение (18), находим, что $C = 0$. Таким образом, равенство (18) принимает вид $\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = x/a$.

Потенцируя, находим

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1 + p^2} &= e^{x/a}; \quad e^{x/a} - p = \sqrt{1 + p^2}; \\ e^{2x/a} - 2pe^{x/a} + p^2 &= 1 + p^2; \quad e^{2x/a} - 2pe^{x/a} - 1 = 0; \\ e^{2x/a} - 1 &= 2pe^{x/a}; \quad e^{2x/a}(e^{-x/a}) - e^{-x/a} = 2pe^{x/a}(e^{-x/a}); \\ e^{x/a} - e^{-x/a} &= 2p; \quad p = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}). \end{aligned}$$

Поскольку $p = dy/dx$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}); \quad dy = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) dx.$$

Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \int e^{x/a} dx - \frac{1}{2} \int e^{-x/a} dx = \frac{1}{2} \int e^{x/a} a d\left(\frac{x}{a}\right) - \\ &- \frac{1}{2} \int e^{-x/a} (-a) d\left(-\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \int e^{x/a} d\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \times \\ &\times \int e^{-x/a} d\left(-\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} e^{x/a} + \frac{a}{2} e^{-x/a} + C; \\ y &= \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) + C. \end{aligned}$$

Положим теперь, что $|OA|=a$, т. е. $y=a$ при $x=0$. Подставляя эти значения x и y в полученное уравнение, находим, что $C=0$.

Таким образом, координаты x , y точки M рассматриваемой линии удовлетворяют уравнению

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}). \quad (19)$$

Мы получили уравнение цепной линии в прямоугольных декартовых координатах.

Введем в рассмотрение новые функции, которые называют гиперболическими.

Гиперболическим синусом называют функцию, определяемую формулой $\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2$.

Гиперболическим косинусом называют функцию, определяемую формулой $\text{ch } x = (e^x + e^{-x})/2$.

Гиперболический тангенс и *гиперболический котангенс* определяются соответственно формулами:

$$\text{th } x = \text{sh } x / \text{ch } x; \quad \text{cth } x = \text{ch } x / \text{sh } x.$$

Гиперболические функции обладают некоторыми свойствами, характерными для обычных тригонометрических функций. Из определения гиперболических функций следует, что $\text{sh } 0 = 0$, $\text{ch } 0 = 1$; $\text{sh } 2x = 2\text{sh } x \cdot \text{ch } x$.

Гиперболические функции имеют ряд свойств, отличных от свойств тригонометрических функций. В частности, гиперболические функции не обладают свойством периодичности. Кроме того, легко видеть, что

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1. \quad (20)$$

С помощью гиперболических функций можно записать параметрические уравнения гиперболы. Эти уравнения имеют вид

$$x = a \text{ ch } t; \quad y = b \text{ sh } t. \quad (21)$$

В самом деле, разрешив уравнения (21) относитель-

но $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ и приняв во внимание равенство (20), получим

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t; \quad \frac{y}{b} = \operatorname{sh} t; \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1;$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, координаты точки x , y , определяемые формулами (21), удовлетворяют последнему уравнению, т. е. уравнению гиперболы.

Найдем производные гиперболических функций

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-x)') = \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-x)') = \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x \end{aligned}$$

Итак, получены следующие формулы:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Отметим, что для обычных тригонометрических функций имеем

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Рассмотрим некоторые свойства цепной линии. Уравнение цепной линии можно записать так:

$$y = a \operatorname{ch}(x/a), \quad (22)$$

что следует из уравнения (19) и определения функции $\operatorname{ch} x$,

Найдем угловой коэффициент касательной к цепной линии:

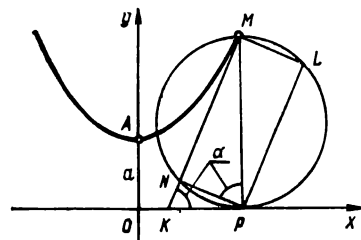
$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right)' = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \frac{1}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Применяя это равенство, формулы (20) и (22), найдем, что

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 (x/a)}} = \frac{1}{\operatorname{ch} (x/a)} = \frac{a}{y}$$

или

$$y \cos \alpha = a. \quad (23)$$



Р и с. 71

Полученное равенство дает следующий способ построения касательной в любой точке M цепной линии. На ординате MP , как на диаметре, строим окружность (рис. 71), затем радиусом $R=a$ делаем засечку в точке

N этой окружности. Из $\triangle MNP$ следует, что $\widehat{MPN} = a/y$; так как $\cos \alpha = a/y$, то $\widehat{MPN} = \alpha$. Проведем прямую через точки M и N ; точку пересечения этой прямой с осью абсцисс обозначим буквой K . Прямая MK будет касательной к цепной линии. В самом деле, $\widehat{MKP} = \widehat{MPN}$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

Из последнего равенства и равенства $\widehat{MPN} = \alpha$ следует, что $\widehat{MKP} = \alpha$, т. е. MK — касательная к цепной линии в точке M .

Равенство (23) показывает, что проекция ординаты произвольной точки цепной линии на нормаль в этой точке является величиной постоянной, равной параметру a цепной линии: $|ML|=a$ при любом положении точки M .

Обратимся снова к формуле (15). Отсюда получим формулу для вычисления длины дуги линии, заданной уравнением $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$. Действительно, формулу (15) можно записать так: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Взяв определенный интеграл, получим

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (24)$$

Найдем длину дуги цепной линии от вершины (точки A) до произвольной ее точки $M(x, y)$. Поскольку цепная линия определяется уравнением (22), т. е. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, то

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Далее, в нашем случае $a = 0$, $b = x$. По формуле (24) находим

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} a d\left(\frac{x}{a}\right) = \\ &= a \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} d\left(\frac{x}{a}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } s &= a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \text{ или } s = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1} = \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - a^2} = \sqrt{y^2 - a^2}, \\ s &= \sqrt{y^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Формула (25) означает, что длину дуги AM можно рассматривать как длину катета прямоугольного треугольника MNP (см. рис. 71), гипотенуза которого равна y , а другой катет равен параметру a цепной линии. Отсюда вытекает простой и изящный способ спрямления дуги AM : длина дуги цепной линии от ее вершины до некоторой точки равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в данной точке ($s = |MN|$).

Свойства цепной линии применяются в строительстве и технике. Они используются в расчетах, связанных с провисанием нитей — проводов, тросов и т. д. В строительной технике используется также линия свода, определяемая уравнением

$$y = c(e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

Вопрос о форме линии провисания впервые рассмотрел Галилей (1638 г.). Он полагал, что линия провисания является параболой. Против этого возражал Гюйгенс, который считал, что указанная линия имеет форму параболы только в случае, когда нагрузка на элемент дуги нити будет пропорциональна не длине дуги, а длине ее горизонтальной проекции. Мнение Галилея было опровергнуто экспериментальным путем. Окончательное теоретическое решение вопроса о форме линии провисания дали Лейбниц, Гюйгенс и Я. Бернулли с помощью метода анализа бесконечно малых.

ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Будем исходить из наглядного представления о поверхности, известного читателю по курсу математики средней школы. В этом курсе рассматривались простейшие поверхности — плоскость, сфера, поверхность конуса, поверхность цилиндра и др. Здесь вводятся понятия уравнения поверхности, уравнений линии в пространстве, рассматриваются отдельные линии, поверхности второго порядка и некоторые другие поверхности.

ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямоугольная декартова система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке.

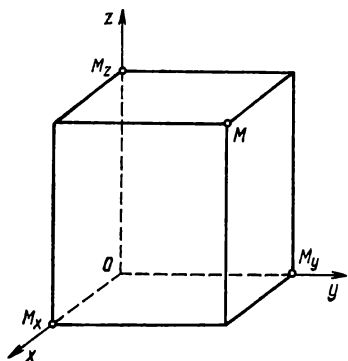
Точку пересечения осей называют *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*, причем первую из них — *осью абсцисс*, вторую — *осью ординат*, третью — *осью аппликат*. Обозначим начало координат буквой O ; координатные оси будем обозначать соответственно через Ox , Oy , Oz (рис. 72).

Пусть M — произвольная точка пространства, отличная от точки O . Проведем через точку M три плоскости,

перпендикулярные координатным осям; точки пересечения с осями обозначим соответственно через M_x , M_y , M_z . Декартовыми прямоугольными координатами точки M называют числа, определяемые формулами

$$x = OM_x; y = OM_y; z = OM_z, \quad (1)$$

где OM_x , OM_y , OM_z — величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$ соответствующих координатных осей.



Р и с. 72

Число x называется первой координатой или абсциссой, число y — второй координатой или ординатой, число z — третьей координатой или аппликатой точки M . Запись $M(x, y, z)$ обозначает, что точка M имеет координаты x, y, z .

Каждая пара координатных осей определяет координатную плоскость, координатные плоскости обозначают соответственно буквами Oxy , Oxz , Oyz . Легко видеть,

что прямоугольные декартовы координаты точки M представляют собой расстояния этой точки до соответствующих координатных плоскостей, взятые с надлежащими знаками (абсцисса x — расстояние до координатной плоскости Oyz , взятое со знаком плюс, если M — впереди плоскости Oyz , со знаком минус, если M — сзади плоскости Oyz , когда положительное направление оси Ox и взаимное расположение осей выбраны так, как показано на рис. 72).

На основании сказанного заключаем, что для точек, лежащих в плоскости Oyz , $x=0$; для точек, лежащих в плоскости Oxz , $y=0$; для точек, лежащих в плоскости

$Oxy, z=0$. Точки оси Ox характеризуются двумя равенствами $y=0, z=0$; точки оси Oy — равенствами $x=0, z=0$; точки оси Oz — равенствами $x=0, y=0$. Начало координат имеет все нулевые координаты: $x=0, y=0, z=0$.

Координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz делят все точки пространства, не принадлежащие этим плоскостям, на восемь частей, называемых *октантами*. Исходя из I октанта, в котором все координаты положительны, перенумеруем октанты (I, II, III, IV) верхнего полупространства ($z>0$) против часовой стрелки (для наблюдателя со стороны положительной оси Oz). В нижнем полупространстве ($z<0$) произведем соответствующую нумерацию октантов (V, VI, VII, VIII) так, чтобы V октант находился под I, VI — под II, VII — под III, VIII — под IV. Знаки координат точек в различных октантах приведены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты	Октанты							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	—	—	+	+	—	—	+
y	+	+	—	—	—	+	—	—
z	+	+	+	+	—	—	—	—

Очевидно, знаки координат однозначно определяют октант пространства.

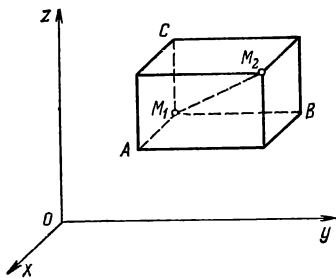
Итак, если задана система прямоугольных декартовых координат в пространстве, то каждой точке пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x, y, z) — ее координаты. С другой стороны, если задана упорядоченная тройка действительных чисел (x, y, z) , то можно указать точку, для

которой x будет абсциссой, y — ординатой, z — аппликатой. Чтобы построить эту точку, необходимо на оси Ox отложить направленный отрезок OM_x , величина которого равна x , на оси Oy — отрезок OM_y , величина которого y , на оси Oz — отрезок OM_z , величина которого z ; через точки M_x, M_y, M_z провести плоскости, перпендикулярные соответственно осям Ox, Oy, Oz ; точка пересечения указанных плоскостей будет искомой. Следовательно, между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть относительно прямоугольной декартовой системы координат в пространстве заданы две точки, т. е. указаны их координаты. Требуется вывести формулу, по которой вычисляют расстояние между данными точками. Докажем, что если $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две любые точки пространства, то расстояние между ними определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2)$$



Р и с. 73

Через точки M_1 и M_2 проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям, и рассмотрим получившийся прямоугольный параллелепипед (рис. 73). Точки M_1 и M_2 являются противоположными вершинами этого параллелепипеда. Концы трех взаимно перпендикулярных ребер, исхо-

дящих из вершины M_1 , обозначим через A, B, C , причем $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_1, y_2, z_1)$, $C(x_1, y_1, z_2)$. На основании известной теоремы стереометрии получаем $|M_1M_2|^2 = |M_1A|^2 + |M_1B|^2 + |M_1C|^2$, где $|M_1M_2|$, $|M_1A|$, $|M_1B|$, $|M_1C|$ — длины диагонали и боковых ребер.

Обозначив через $\rho(M_1M_2) = |M_1M_2|$, найдем $\rho(M_1M_2) = \sqrt{M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2}$. Подставляя в это равенство выражения $|M_1A| = |x_2 - x_1|$, $|M_1B| = |y_2 - y_1|$, $|M_1C| = |z_2 - z_1|$, получаем формулу (2).

В частном случае, если точка M_1 лежит в начале координат, т. е. если $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то $\rho(O, M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ. УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнением поверхности называют такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они. Из этого определения получаем способ решения следующей задачи: выяснить, лежит ли данная точка на поверхности, определяемой заданным уравнением. Чтобы решить эту задачу, необходимо подставить координаты точки в заданное уравнение; если при этом получается числовое равенство, то точка лежит на данной поверхности, в противном случае точка поверхности не принадлежит.

Уравнение с тремя переменными x, y, z в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — выражение с переменными x, y, z ; в частных случаях, например, $F(x, y, z) = x - y + z - 5$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ и т. д. Иногда уравнение может не содержать одной или двух переменных.

Приведем примеры уравнений поверхностей. Составим уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка этой сферы, тогда $\rho(C, M) = R$ (сфера — множество точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы). По формуле (2) получаем $\rho(C, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Из этих двух равенств следует, что

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (3)$$

Итак, координаты любой точки данной сферы удовлетворяют уравнению (3). Если точка N не лежит на данной сфере, то для нее $\rho(C, N) \neq R$, поэтому ее координаты не будут удовлетворять уравнению (3). Следовательно, уравнение (3) является уравнением сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$. В частном случае, когда центр сферы находится в начале координат (т. е. $a=b=c=0$), уравнение (3) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (4)$$

Это уравнение называют *каноническим уравнением сферы*.

Приведем еще один пример. Из определения декартовых прямоугольных координат точки следует, что координатные плоскости Oyz , Oxz , Oxy определяются соответственно уравнениями $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x=0$ — уравнение плоскости Oyz и т. д.). Отметим, что каждое из этих уравнений содержит только одну переменную.

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. В соответствии с этим линия в пространстве определяется двумя уравнениями. Пусть l — линия, по которой пересекаются поверхности, определяемые уравнениями $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, т. е. множество общих точек этих поверхностей.

Тогда координаты любой точки линии l одновременно удовлетворяют обоим уравнениям

$$F_1(x, y, z) = 0; F_2(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Уравнения (5) являются уравнениями указанной линии l . Например, уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $z = 0$ определяют окружность радиуса $R = 5$, лежащую в плоскости Oxy (первое уравнение определяет сферу радиуса $R = 5$ с центром в начале координат, второе уравнение — координатную плоскость Oxy).

Запишем уравнения координатных осей декартовой системы координат в пространстве. Ось Ox , как линия пересечения плоскостей Oxz и Oxy , определяется уравнениями $y = 0, z = 0$; ось Oy — уравнениями $x = 0, z = 0$; ось Oz — уравнениями $x = 0, y = 0$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим уравнения

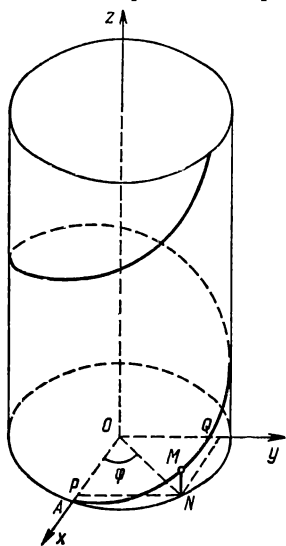
$$x = \varphi_1(t); y = \varphi_2(t); z = \varphi_3(t), \quad (6)$$

где $\varphi_1(t)$; $\varphi_2(t)$; $\varphi_3(t)$ — заданные функции переменной t (параметра). Эти уравнения называют *параметрическими уравнениями линии в пространстве*, если при каждом значении t из некоторого промежутка (конечного или бесконечного) они дают координаты точек данной линии и только таких точек.

Параметрические уравнения линии часто применяются в механике для описания траектории движущейся точки; роль параметра t в таких случаях играет время (координаты движущейся точки изменяются с течением времени).

В качестве примера приведем параметрические урав-

нения винтовой линии. *Винтовой* называют линию, описываемую точкой, равномерно движущейся по образующей кругового цилиндра, который при этом вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. В качестве оси Oz декартовой прямоугольной системы координат выберем ось вращения цилиндра (рис. 74). Обозначим буквой v постоянную скорость прямолинейного движения точки вдоль образующей цилиндра, буквой ω — постоянную скорость вращательного движения, буквой R — радиус цилиндра. Пусть в начальный момент времени точка находилась на оси Ox (совпадала с точкой A), а в момент времени t — в положении M . Обозначим через N проекцию точки M на плоскость Oxy , через P и Q — ее проекции соответственно на оси Ox и Oy . Обозначая через φ величину угла между \overline{OP} и \overline{ON} , находим, что $x = OP =$



$= R \cos \varphi$; $y = OQ = R \sin \varphi$; $z = NM = vt$. Так как $\varphi = \omega t$, то

Р и с. 74

$$x = R \cos \omega t; y = R \sin \omega t; z = vt.$$

Мы получили параметрические уравнения винтовой линии.

Рассмотрим уравнения

$$x = f_1(u, v); y = f_2(u, v); z = f_3(u, v), \quad (7)$$

где $f_1(u, v)$; $f_2(u, v)$; $f_3(u, v)$ — заданные выражения с двумя переменными u, v (параметрами). Уравнения (7)

называют *параметрическими уравнениями поверхности*, если при любых значениях u и v (меняющихся в некоторой области) они дают координаты точек данной поверхности и только таких точек.

Обращаем внимание на то, что правые части уравнений (7) содержат два параметра, а уравнений (6) — только один параметр.

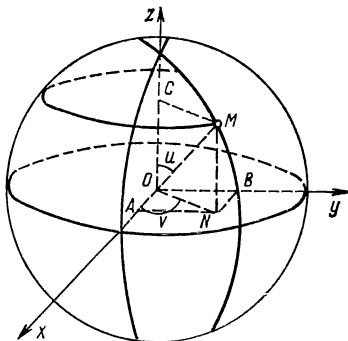


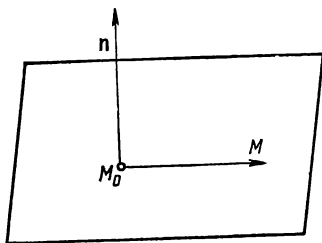
Рис. 75

В качестве примера приведем параметрические уравнения сферы радиуса R . Введем систему декартовых прямоугольных координат с началом в центре сферы (рис. 75). Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной сферы, N — ее проекция на плоскость Oxy . Величину угла, образуемого отрезком \overline{OM} с осью Oz обозначим буквой u (широта), а угла, образуемого отрезком \overline{ON} с осью Ox , — буквой v (долгота). Проекции точки N на оси Ox и Oy обозначим соответственно через A и B , а проекцию точки M на ось Oz — через C . В соответствии с определением декартовых прямоугольных координат имеем $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$. Поскольку $OA = ON \cos v = (OM \sin u) \times \cos v = (R \sin u) \cos v$; $OB = ON \sin v = (OM \sin u) \sin v = (R \sin u) \sin v$; $OC = OM \cos u = R \cos u$, то параметрические уравнения сферы имеют вид

$$x = R \sin u \cos v; \quad y = R \sin u \sin v; \quad z = R \cos u,$$

где $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v < 2\pi$. Исключив из этих уравнений параметры u и v (для чего нужно возвести в квадрат обе части каждого уравнения и почленно сложить), получим уравнение (4).

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ



Р и с. 76

В зависимости от способа задания плоскости рассмотрим следующие виды ее уравнений.

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору. Дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Требуется

составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно данному вектору \mathbf{n} ; вектор \mathbf{n} называют *нормальным вектором плоскости*. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ данной плоскости и вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Поскольку вектор $\overline{M_0M}$ лежит в плоскости, то он перпендикулярен вектору \mathbf{n} (рис. 76). Следовательно, скалярное произведение указанных векторов равно нулю, т. е. $\mathbf{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Записывая скалярное произведение в координатах, получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (8)$$

которому можно придать вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Уравнение (8) является искомым, в этом уравнении коэффициенты при x, y, z — координаты нормального вектора плоскости.

2. Общее уравнение плоскости. Покажем, что уравнение первой степени относительно декартовых координат

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (9)$$

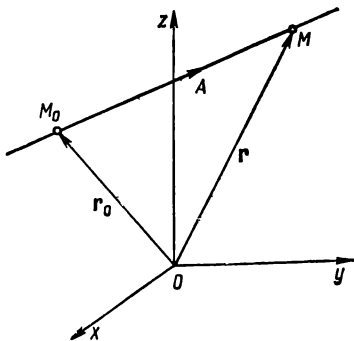
в котором A, B, C одновременно в нуль не обращаются, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, определяет плоскость в простран-

стве. Действительно, пусть x_0, y_0, z_0 — три числа, удовлетворяющих уравнению (9); $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \equiv 0$. Вычитая почленно это тождество из уравнения (9), получаем уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Это уравнение вида (8); оно определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$; этот вектор не будет нулевым в силу условия $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Следовательно, уравнение (9) также определяет плоскость. Уравнение (9) называют *общим уравнением плоскости*.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямую в пространстве можно задать различными способами: точкой и направлением, двумя точками и т. п. В зависимости от этого рассматривают различные виды ее уравнений.

Направляющим вектором прямой называют любой ненулевой вектор, лежащий на этой прямой или параллельный ей. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Отложим из точки M_0 вектор $\overrightarrow{M_0A} = \mathbf{a}$ (рис. 77). Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной прямой. Введем в рассмотрение векторы $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. По определению суммы векторов имеем $\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM}$. Из условия коллинеарности двух векторов следует, что $\overrightarrow{M_0M} = at$, где t — некоторое



Р и с. 77

число. Отметим, что каждому положению точки M на прямой соответствует определенное значение t . Подставляя в равенство $\overline{OM} = \overline{OM}_0 + \overline{M_0M}$ выражения $\overline{OM} = \mathbf{r}$, $\overline{OM}_0 = \mathbf{r}_0$, $\overline{M_0M} = \mathbf{at}$, получаем уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{at},$$

которое называют *векторно-параметрическим* уравнением прямой.

Поскольку $\mathbf{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \overline{OM}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{at} = (a_1t, a_2t, a_3t)$, то из векторно-параметрического уравнения следует, что

$$x = x_0 + a_1t; \quad y = y_0 + a_2t; \quad z = z_0 + a_3t. \quad (10)$$

Мы воспользовались здесь тем, что равные векторы имеют равные координаты (в одной и той же системе координат) и координаты суммы векторов равны суммам одноименных координат слагаемых. Уравнения (10) называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Каждое из уравнений (10) разрешим относительно t :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = t; \quad \frac{y - y_0}{a_2} = t; \quad \frac{z - z_0}{a_3} = t.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (11)$$

Эти уравнения называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через эти точки, можно взять вектор $\mathbf{a} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то в соответствии с (11) имеем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Мы получили уравнения прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. Пусть заданы две плоскости своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Первая из них имеет нормальный вектор $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, вторая — нормальный вектор $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Если эти векторы неколлинеарны, т. е. $\mathbf{n}_2 \neq \lambda \mathbf{n}_1$, или не выполняется условие

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

то плоскости пересекаются. Прямая пересечения этих плоскостей определяется двумя уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (12)$$

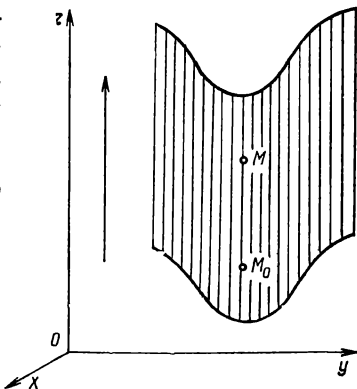
УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗУЮЩЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ ОСИ. ЦИЛИНДРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цилиндрической называют поверхность, описываемую прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и остающейся параллельной исходному направлению (рис. 78).

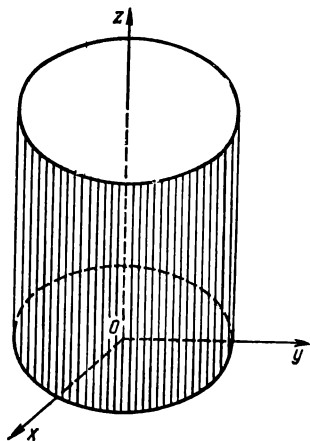
Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (13)$$

не содержащее переменной z . Покажем, что если это уравнение имеет действительные решения, то оно



Р и с. 78



Р и с. 79

определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz . Если числа x_0, y_0 удовлетворяют уравнению (13), то точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где z_0 — некоторое число, лежит на поверхности, определяемой этим уравнением. На этой поверхности будет лежать и точка $M(x_0, y_0, z)$, так как $F(x_0, y_0) = 0$, а z в уравнение не входит. Следовательно, поверхности целиком принадлежит прямая, проходящая через точки M_0 и M , а эта прямая параллельна оси Oz (точки M_0 и M отличаются только аппликатами). Итак, поверхность, опре-

деляемая уравнением (13), является цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz .

Отметим, что в плоскости Oxy уравнение (13) определяет линию (направляющую), которая в пространстве задается уже двумя уравнениями

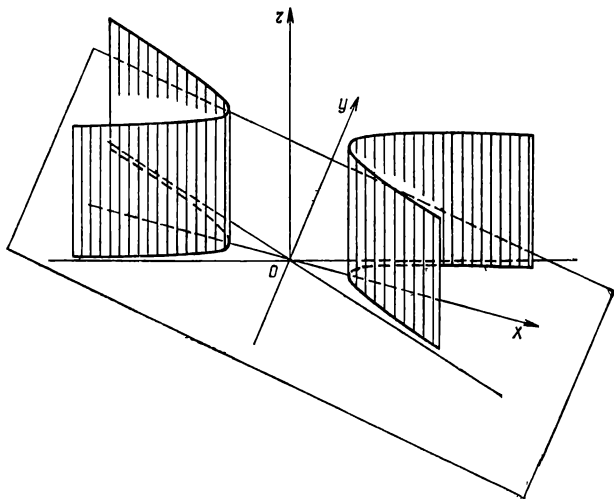
$$F(x, y) = 0; z = 0.$$

Эти уравнения задают линию (направляющую) как пересечение цилиндрической поверхности (13) и координатной плоскости Oxy ($z = 0$).

З а м е ч а н и е 1. Если уравнение $F(x, z) = 0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oy .

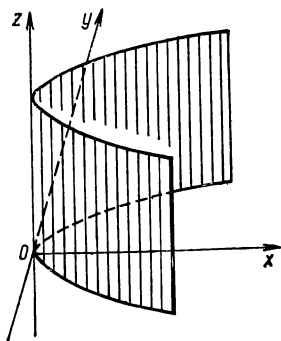
З а м е ч а н и е 2. Если уравнение $F(y, z) = 0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Ox .

Цилиндром второго порядка называют цилиндрическую поверхность, определяемую алгебраическим урав-



Р и с. 80

нением второй степени с двумя переменными, т. е. уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. К цилиндрам второго порядка относятся: *эллиптический цилиндр* (рис. 79), определяемый уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; *гиперболический цилиндр* (рис. 80), определяемый уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; *параболический цилиндр* (рис. 81), определяемый уравнением $y^2 = 2px$.



Р и с. 81

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим линию l , заданную уравнениями

$$x = \varphi_1(z); \quad y = \varphi_2(z). \quad (14)$$

Здесь предполагается, что уравнения (5), определяющие линию l , можно представить в виде (14), т. е. выразить x и y только через z . Будем вращать линию (14) вокруг оси Oz и в результате получим некоторую поверхность вращения. Составим уравнение этой поверхности вращения. Пусть M — произвольная точка данной поверхности, ее текущие координаты обозначим буквами X, Y, Z . Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz ; эта плоскость имеет уравнение $z = Z$. Указанная плоскость пересекает поверхность вращения по окружности с центром в точке $O_1(0, 0, Z)$ на оси Oz (рис. 82). Обозначим буквой N точку пересечения этой окружности и линии l , точка N имеет координаты x, y, Z , т. е. $N(x, y, Z)$. Поскольку $|O_1M| = |O_1N|$, как радиусы одной и той же окружности, и $|O_1M| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $|O_1N| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad X^2 + Y^2 = x^2 + y^2.$$

Так как точка N лежит на линии l и в плоскости $z = Z$, то для ее координат $x = \varphi_1(Z)$, $y = \varphi_2(Z)$, $z = Z$. Следовательно, последнее уравнение принимает вид

$$X^2 + Y^2 = \varphi_1^2(Z) + \varphi_2^2(Z).$$

Полученное уравнение является уравнением поверхности, полученной вращением линии (14) вокруг оси Oz . Если обозначить текущие координаты точки поверхности строчными буквами x, y, z , то уравнение примет вид

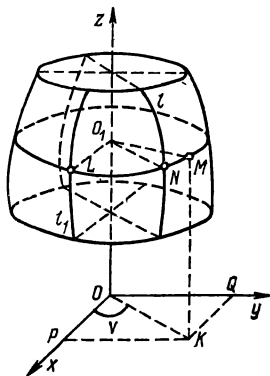
$$x^2 + y^2 = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z). \quad (15)$$

Обратно, если задано уравнение $x^2 + y^2 = f(z)$, где $f(z) > 0$, то оно определяет поверхность вращения. Дей-

ствительно, в сечении этой поверхности плоскостью $z=h$ получаем окружность в пространстве, определяемую уравнениями $x^2+y^2=f(h)$, $z=h$ (первое из этих уравнений определяет прямой круговой цилиндр с образующей, параллельной оси Oz ; второе — плоскость, перпендикулярную оси Oz ; пересечением их является окружность).

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (15) поверхности, образованной вращением линии (14), можно получить в результате следующих формальных действий: возвести в квадрат уравнения (14) и почленно сложить.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что уравнение поверхности, полученной вращением линии $F(y, z)=0$ (лежащей в плоскости Oyz) вокруг оси Oz , имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$.



Р и с. 82

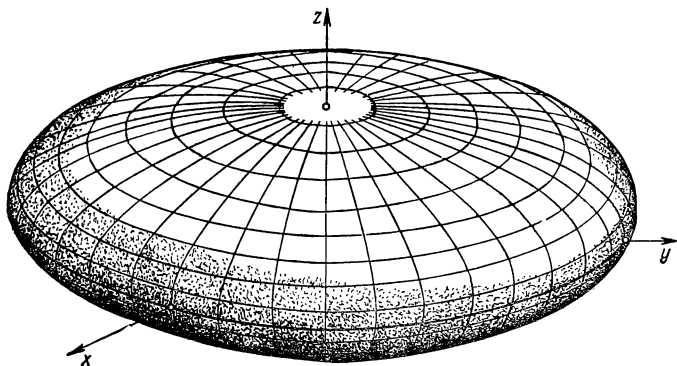
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью вращения второго порядка называют поверхность, образованную вращением линии второго порядка вокруг ее оси.

Эллипсоидом вращения называют поверхность, полученную вращением эллипса вокруг одной из его осей (рис. 83). В плоскости Oyz рассмотрим эллипс, заданный уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad x = 0. \quad (16)$$

Подчеркнем еще раз, что линия в пространстве определяется двумя уравнениями относительно декартовых ко-



Р и с. 83

ординат (см. уравнения (5)). В данном случае первое уравнение определяет эллиптический цилиндр с осью Ox , второе — координатную плоскость Oyz . Цилиндр и плоскость пересекаются по эллипсу с полуосями b и c . Уравнения рассматриваемого эллипса приведем к виду (14). Так как в уравнение (15) поверхности вращения входят только квадраты x и y , то нам достаточно выразить их из уравнений эллипса:

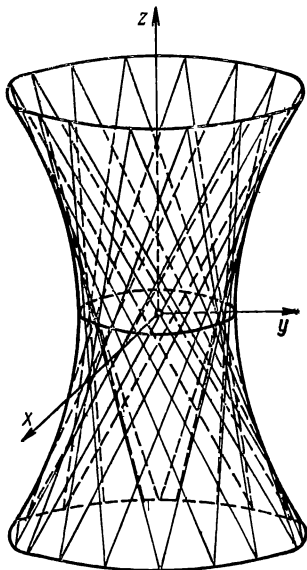
$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right); \quad x^2 = 0.$$

На основании (15) получаем $x^2 + y^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$ или

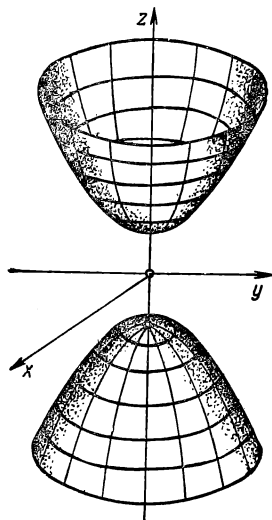
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (17)$$

Это уравнение является уравнением эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса (16) вокруг оси Oz .

Однополостным гиперboloидом вращения называют поверхность, образованную вращением гиперболы во-



Р и с. 84



Р и с. 85

круг ее мнимой оси. Составим уравнение однополостного гиперboloида вращения, полученного вращением гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad x = 0$$

вокруг оси Oz (рис. 84). Из уравнений гиперболы найдем квадраты x и y , складываем их:

$$y^2 = b^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right); \quad x^2 = 0; \quad x^2 + y^2 = b^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Отсюда получаем уравнение указанного однополостного гиперboloида вращения

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (18)$$

Двуполостным гиперboloидом вращения называют поверхность, полученную вращением гиперболы вокруг ее действительной оси. Запишем уравнение двуполостного гиперboloида, образованного вращением гиперболы,

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x = 0$$

вокруг оси Oz (рис. 85). Рассуждая, как и в предыдущих случаях, находим

$$y^2 = b^2 \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right); \quad x^2 = 0; \quad x^2 + y^2 = b^2 \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

откуда

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением двуполостного гиперboloида вращения, полученного вращением указанной гиперболы вокруг оси Oz .

Конусом вращения называют поверхность, образованную вращением двух пересекающихся прямых вокруг биссектрисы угла между ними. Запишем уравнение конуса, полученного вращением прямых

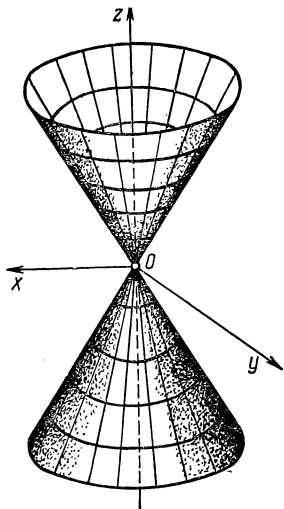
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

вокруг оси Oz (рис. 86). Так как в данном случае $y^2 = \frac{b^2}{c^2} z^2$, $x^2 = 0$, то $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{c^2} z^2$ или

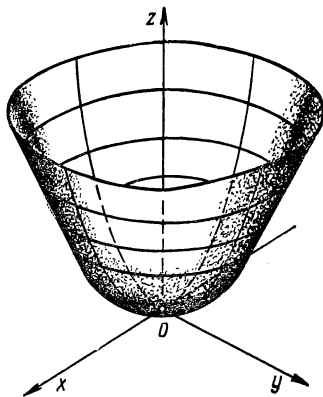
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (20)$$

Мы получили уравнение указанного конуса вращения.

Параболоидом вращения называют поверхность, полученную вращением параболы вокруг ее оси. Составим уравнение параболоида вращения, образованного вращением параболы $y^2 = 2pz$, $x = 0$ вокруг оси Oz . Посколь-



Р и с. 86



Р и с. 87

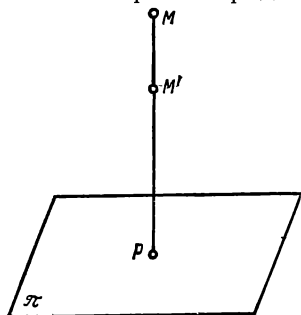
ку $y^2 = 2pz$, $x^2 = 0$, то на основании (15) имеем $x^2 + y^2 = 2pz$ или

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z. \quad (21)$$

Параболоид вращения, определяемый уравнением, изображен на рис. 87.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Поверхностью второго порядка называют поверхность, определяемую алгебраическим уравнением второй степени относительно декартовых координат. К поверхностям второго порядка относятся эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус второго порядка, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид (а также цилиндры второго порядка).



Р и с. 88

Переходим к определению этих поверхностей и выводу их канонических уравнений. При определении указанных поверхностей будем пользоваться понятием «сжатия к плоскости», одним из преобразований точек пространства. «Сжатием к плоскости Π » называют такое преобразование, которое каждой точке M пространства ставит в соответствие точку M' , лежащую на перпендикуляре MP к плоскости Π (рис. 88), такую, что

$$\frac{PM}{PM'} = k \quad (k > 0),$$

где PM ; PM' — величины соответствующих отрезков (P — основание перпендикуляра). Число k называют коэффициентом «сжатия»; отметим, что при $k > 1$ будет сжатие, при $k < 1$ — растяжение, при $k = 1$ — тождественное преобразование (каждая точка пространства переходит в себя). Если плоскость Π является координатной плоскостью, то формулы преобразования имеют простой вид, поскольку две координаты остаются прежними, ме-

няется лишь одна из них. Например, если Π — плоскость Oyz , то формулы преобразования «сжатия» к этой плоскости имеют вид

$$x=kX; y=Y; z=Z,$$

где (x, y, z) — координаты точки M ; (X, Y, Z) — координаты точки M' .

Эллипсоидом называют поверхность, полученную в результате «сжатия» эллипсоида вращения к плоскости, содержащей ось вращения.

Эллипсоид вращения, определяемый уравнением (17), подвергнем преобразованию «сжатия» к плоскости Oyz по формулам

$$x = \frac{a}{b} X; y = Y; z = Z. \quad (22)$$

Подставляя эти формулы в уравнение (17), получаем уравнение эллипсоида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Если текущие координаты точки эллипсоида обозначить строчными буквами x, y, z , то его уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (23)$$

Это уравнение называют *каноническим уравнением эллипсоида*.

Эллипсоид отсекает на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно отрезки $2a, 2b, 2c$, которые называют осями; $a=OA, b=OB, c=OC$ — полуоси эллипсоида. Если a, b, c — различные числа, то поверхность называют *трехосным эллипсоидом*.

З а м е ч а н и е. В случае равенства двух полуосей получаем эллипсоид вращения. Если все полуоси равны и $a=b=c=R$, уравнение (23) принимает вид $x^2+y^2+z^2=R^2$; оно определяет сферу радиуса

R с центром в начале координат. Это уравнение было получено ранее другим путем.

Однополостным гиперboloидом называют поверхность, полученную в результате сжатия однополостного гиперboloида вращения к плоскости, содержащей ось вращения.

Подставляя формулы (22) в (18), получаем каноническое уравнение однополостного гиперboloида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Подвергая преобразованию сжатия к плоскости Oyz по формулам (22) поверхность вращения, определяемую уравнением (19), получаем двуполостный гиперboloид, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1.$$

Подвергнув преобразованию «сжатия» к плоскости Oyz по формулам (22) поверхность, определяемую уравнением (20), получим конус второго порядка, имеющий каноническое уравнение

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Эллиптическим параболоидом называют поверхность, полученную путем «сжатия» параболоида вращения к плоскости, содержащей ось вращения.

Произведем сжатие к плоскости Oxz по формулам

$$x = X, \quad y = \sqrt{\frac{p}{q}} Y, \quad z = Z \quad (pq > 0).$$

Подставим эти формулы в уравнение (21):

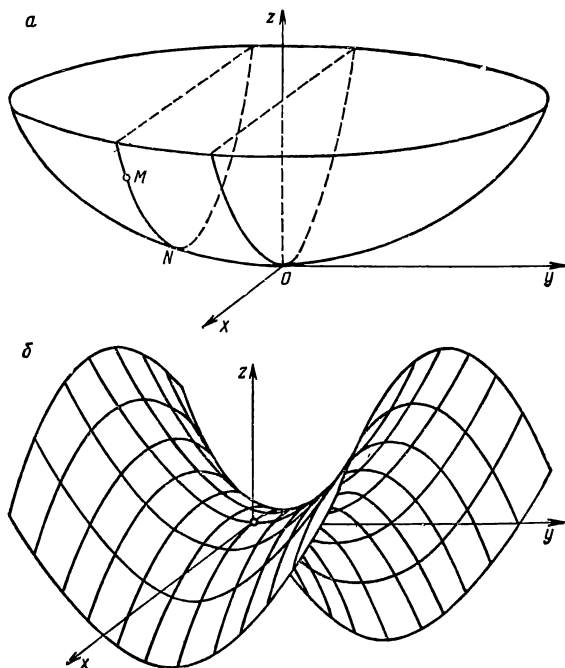
$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z \quad (pq > 0).$$

Мы получили каноническое уравнение эллиптического параболоида.

Поверхность эллиптического параболоида можно найти и другим способом. Пусть даны две параболы в пространстве, каждая из которых определяется парой уравнений:

$$y^2 = 2qz, \quad x = 0; \quad x^2 = 2pz, \quad y = 0.$$

Эти параболы расположены в координатных плоскостях Oyz (первая) и Oxz (вторая); они имеют общую вер-



Р и с. 89

шину и общую ось (рис. 89, а). Рассмотрим поверхность, описанную второй параболой при таком поступательном перемещении ее, когда ось не меняет направления, а вершина движется по первой параболе, причем плоскости, в которых лежат подвижная и неподвижная параболы, остаются взаимно перпендикулярными. Составим уравнение описанной поверхности. Возьмем произвольную точку $M(X, Y, Z)$ этой поверхности и проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси Oy . Эта плоскость имеет уравнение $y=Y$, где Y — ордината точки M . В процессе движения вторая парабола в некоторый момент времени окажется в проведенной плоскости $y=Y$. Пусть N — вершина параболы, тогда $(0, Y, z)$ — ее координаты, поскольку эта точка лежит в плоскости Oyz и в плоскости $y=Y$. Уравнения параболы с вершиной в точке $N(0, Y, z)$ имеют вид

$$(X-0)^2=2p(Z-z); y=Y \text{ или } X^2=2p(Z-z); y=Y.$$

Так как точка N лежит на первой параболе, то $Y^2=2qz$, откуда $z=Y^2/2q$. Следовательно, уравнение рассматриваемой поверхности принимает вид

$$X^2=2p\left(Z-\frac{Y^2}{2q}\right) \text{ или } \frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z.$$

Возможны два случая: 1) числа p и q одного знака ($pq>0$), параболы имеют одинаковые направления осей; 2) числа p и q имеют разные знаки ($pq<0$); параболы имеют противоположные направления осей.

В первом случае, положив $p=a^2$, $q=b^2$, получим уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$

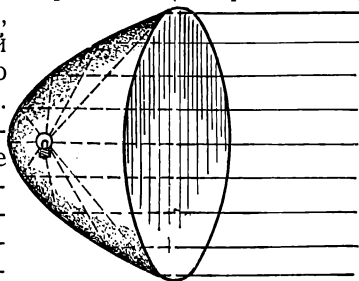
Это уравнение определяет эллиптический параболоид.

Во втором случае, положив $p = -a^2$, $q = b^2$, получим уравнение

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z.$$

Поверхность, определяемую этим уравнением, называют *гиперболическим параболоидом*. Гиперболический параболоид — седлообразная поверхность (см. рис. 89, б).

В заключение отметим, что свойства поверхностей второго порядка широко применяются на практике. Так, форму параболоида вращения имеют автомобильные фары (рис. 90) и прожекторы. Источник света помещается в фокусе параболы, получаемой в сечении поверхности плоскостью, проходящей через ось. Лучи света, отразившись от параболического зеркала, распространяются далее параллельно оси.



Р и с. 90

Параболические зеркала (имеющие форму параболоида вращения) можно использовать и для другой цели — концентрации в фокусе лучей, отраженных от их поверхности.

Форму некоторых поверхностей (первого или второго порядка) имеют концентраторы в солнечных энергетических станциях. Эти станции предназначены для преобразования солнечной энергии в электрическую. Разработаны две основные схемы таких станций: с большим числом одинаковых плоских отражателей, фокусирующих энергию солнечной радиации на общем паровом котле, и с параболо-цилиндрическими концентраторами,

каждый из которых снабжен отдельным трубчатым котлом (в случае, когда преобразование солнечной энергии в электрическую осуществляется по классическому циклу: паровой котел — турбина — генератор).

Системы параболоидов вращения (подвижных и неподвижных), а также параболические цилиндры и сферы используются в антенных системах радиотелескопов — астрономических инструментов для приема собственного радиоизлучения небесных объектов (в Солнечной системе, Галактике, Метагалактике).

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Прямолинейной образующей поверхности второго порядка называют прямую, целиком принадлежащую данной поверхности. Очевидно, прямолинейные образующие имеют цилиндры второго порядка, конус второго порядка. Не все поверхности второго порядка имеют прямолинейные образующие. Так, эллипсоид не имеет прямолинейных образующих. Это следует из простых геометрических соображений: эллипс целиком расположен в прямоугольном параллелепипеде с измерениями $2a$, $2b$, $2c$ (в котором не может поместиться бесконечная прямая). Не имеет прямолинейных образующих эллиптический параболоид (расположен по одну сторону от одной из координатных плоскостей) и двуполостный гиперболоид (в части пространства, ограниченной двумя параллельными плоскостями, нет ни одной точки этой поверхности).

Замечательно то, что некоторые «кривые» поверхности имеют прямолинейные образующие. К таким поверхностям относятся однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Тот факт, что эти поверхности

имеют прямолинейные образующие, геометрически не очевиден, но его можно установить аналитически.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

представим в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

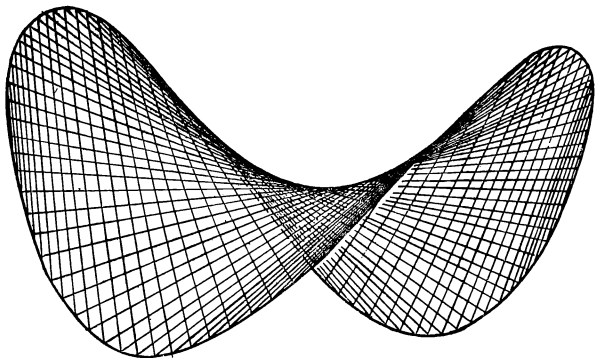
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим две системы двух уравнений

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), & \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right); \\ \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), & \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right),\end{aligned}$$

где α и β — действительные числа, не равные нулю одновременно. Если α и β фиксированы, то каждая из этих систем уравнений определяет некоторую прямую в пространстве (как пересечение двух плоскостей; см. уравнение (12)). Любая из этих прямых целиком лежит на однополостном гиперболоиде, так как умножая почленно оба уравнения (в каждом из двух случаев) и сокращая на $\alpha\beta$, получаем каноническое уравнение однополостного гиперболоида. Меняя α и β , находим две бесконечные системы (семейства) прямолинейных образующих этой поверхности. Каждое семейство данных прямых определяется соответственно системой двух уравнений (первой, второй).

Однополостный гиперболоид с его двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рис. 84.



Р и с. 91

Аналогично можно показать, что гиперболический параболоид, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

также имеет два семейства прямолинейных образующих, определяемых соответственно системами уравнений:

$$\alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 2\beta z, \quad \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = \alpha;$$

$$\alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = 2\beta z, \quad \beta \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = \alpha.$$

Гиперболический параболоид с его прямолинейными образующими изображен на рис. 91.

Отметим, что линейчатый характер однополостного гиперboloида используется в строительной технике. Идея такого использования впервые высказана знаменитым русским инженером и ученым, почетным академиком В. Г. Шуховым (1853—1939). Владимир Григорьевич Шухов предложил конструкции из металлических балок, рас-

положенных так, как прямолинейные образующие однополостного гиперболоида вращения. Указанные конструкции оказались прочными и сравнительно легкими. Они часто применяются для устройства высоких опор, башен и мачт.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим следующие замечательные поверхности: тор, катеноид, геликоид, псевдосферу. Прежде чем определить каждую из них и вывести ее уравнение, запишем параметрические уравнения поверхности вращения. В плоскости Oxz ($y=0$) задана линия l_1 своими параметрическими уравнениями

$$x=f(u); z=\varphi(u), \quad (24)$$

не пересекающая ось Oz . Рассмотрим поверхность, полученную вращением этой линии вокруг оси Oz . Пусть $M(X, Y, Z)$ — произвольная точка данной поверхности (см. рис. 82). Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz . Эта плоскость имеет уравнение $z=Z$; она пересекает поверхность по окружности с центром в точке $O_1(0, 0, z)$ на оси Oz , а линию l_1 — в точке $L(x, 0, z)$, где x, z определяются уравнениями (24), т. е. $x=O_1L=f(u)$, $z=OO_1=\varphi(u)$. Введем следующие обозначения: K — проекция точки M на плоскость Oxy ; P — проекция точки K на ось Ox ; Q — проекция точки K на ось Oy ; v — величина угла, образуемого отрезком \overline{OK} с осью Ox . Так как $|O_1L|=|O_1M|=|OK|$ и $Z=z$, то по определению декартовых прямоугольных координат точки в пространстве имеем

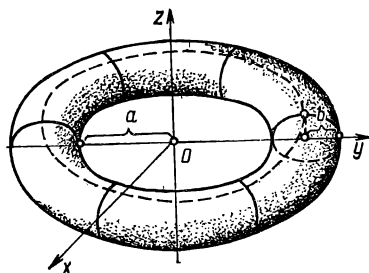
$$X=OP=f(u)\cos v; Y=OQ=f(u)\sin v; Z=OO_1=\varphi(u).$$

Обозначая текущие координаты точки M строчными

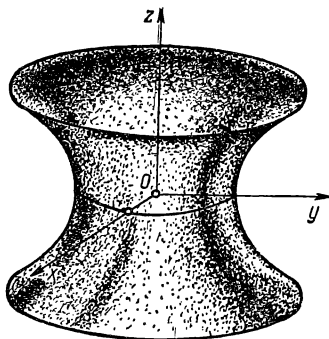
буквами x, y, z , получаем следующие параметрические уравнения рассматриваемой поверхности вращения:

$$x=f(u)\cos v; y=f(u)\sin v; z=\varphi(u). \quad (25)$$

Тором называют поверхность, полученную вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости данной окружности и не пересекающей ее. Эта поверхность на-



Р и с. 92



Р и с. 93

поминает бублик, спасательный круг, камеру автомобильной шины (рис. 92).

Составим уравнение тора, полученного вращением вокруг оси Oz окружности, заданной параметрическими уравнениями

$$x=a+b\cos u; y=0; z=b\sin u \quad (b<a).$$

Эта окружность лежит в плоскости Oxz ($y=0$) и определяется уравнениями вида (24), где $f(u)=a+b\cos u$, $\varphi(u)=b\sin u$. В соответствии с (25) получаем параметрические уравнения тора:

$$x=(a+b\cos u)\cos v; y=(a+b\cos u)\sin v; z=b\sin u.$$

Катеноидом называют поверхность, полученную вращением цепной линии вокруг ее оси (рис. 93). Составим уравнение катеноида, полученного вращением вокруг оси Oz цепной линии, заданной параметрическими уравнениями

$$x = a \operatorname{ch}(u/a); \quad y = 0, \quad z = u.$$

Эта линия расположена в плоскости Oxz ($y=0$). Она определена уравнениями вида (24), где $f(u) = a \operatorname{ch}(u/a)$; $\varphi(u) = u$. В соответствии с (25) находим параметрические уравнения катеноида

$$x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v; \quad y = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v; \quad z = u.$$

Исключим из этих уравнений параметры u и v :

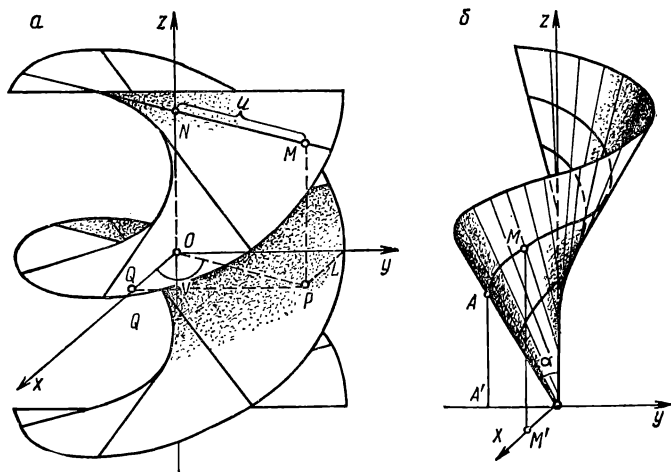
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} (\cos^2 v + \sin^2 v) = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} = \\ &= a^2 \left(\frac{e^{u/a} + e^{-u/a}}{2} \right)^2; \\ x^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2} \right)^2 (e^{z/a} + e^{-z/a})^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного равенства, находим уравнение катеноида в прямоугольных декартовых координатах

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2} (e^{z/a} + e^{-z/a}). \quad (26)$$

Катеноид является единственной минимальной поверхностью среди поверхностей вращения. Минимальные поверхности возникли при решении следующей задачи: среди всех поверхностей, проходящих через данную замкнутую пространственную линию, найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности, ограниченной данной линией. Отсюда происходит и назва-

ние такой поверхности. Бельгийский физик Плато предложил простой экспериментальный способ получения минимальных поверхностей посредством мыльных пленок, натянутых на проволочный каркас.



Р и с. 94

Катеноид обладает следующим свойством. Рассмотрим две окружности, полученные пересечением катеноида (26) соответственно плоскостями $z = -c$, $z = c$. Любая поверхность, «края» которой совпадают с этими окружностями, имеет площадь большую, чем часть катеноида, расположенная между указанными окружностями. Мыльная пленка, соединяющая данные окружности под действием сил внутреннего натяжения, принимает форму катеноида.

Геликоидом называют поверхность, описанную пря-

мой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, пересекает ось под постоянным углом α и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha = 90^\circ$ геликоид называют *прямым* (рис. 94, а), а при $\alpha \neq 90^\circ$ — *косым* (рис. 94, б).

Составим параметрические уравнения прямого геликоида, описанного прямой, перпендикулярной оси Oz (рис. 94, а). Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности; P — ее проекция на плоскость Oxy ; Q, L, N — проекции точки P соответственно на оси Ox, Oy, Oz . Обозначим через u расстояние точки M до оси Oz ($|MN| = |OP| = u$), а через v — величину угла, образуемого отрезком \overline{OP} с осью Ox .

Принимая во внимание определения прямого геликоида и прямоугольных декартовых координат точки в пространстве, получаем параметрические уравнения геликоида

$$x = u \cos v; \quad y = u \sin v; \quad z = av,$$

где a — некоторая постоянная.

Наглядное представление о положении отдельных прямых (лучей) при $v = \text{const}$ дают ступени винтовой лестницы.

Представление о геликоиде можно составить, например, наблюдая движение винта вертолета при его вертикальном взлете. Отметим, что первоначально вертолеты называли геликоптерами («винтокрылыми»). Первый эскиз геликоптера был нарисован еще Леонардо да Винчи (1452—1519), знаменитым итальянским художником и ученым эпохи Возрождения.

Разнообразные геликоиды широко применяются на практике. Это объясняется следующим: геликоид образован сложением двух самых распространенных видов движения — прямолинейного равномерного и враща-

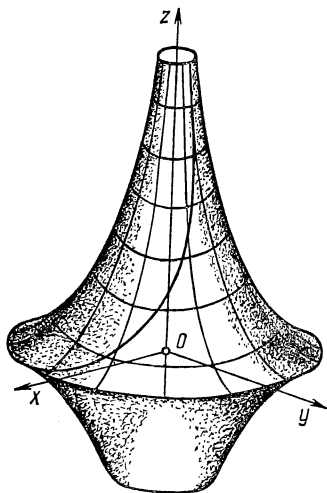
тельного равномерного. Вследствие этого геликоид можно применить там, где необходимо перейти от одного из указанных видов движения к другому, что имеет место практически в любой машине.

Псевдосферой называют поверхность, полученную вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 95). Составим параметрические уравнения псевдосферы, полученной вращением вокруг оси Oz трактрисы

$$x = a \sin u; \quad y = 0; \quad z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Эта трактриса лежит в плоскости Oxz ($y=0$), ось Oz служит ее асимптотой. Линия задана параметрическими уравнениями вида (24), где $f(u) = a \sin u$, $\varphi(u) = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$. В соответствии с (25), получаем параметрические уравнения псевдосферы

$$x = a \sin u \cos v; \quad y = a \sin u \sin v; \quad z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$



Р и с. 95

Название поверхности в переводе с греческого означает «ложная сфера». Эта поверхность совершенно не похожа на сферу, но обладает одним замечательным свойством, аналогичным свойству сферы. Сфера одинаково искривлена во всех своих точках. Если вырезать любой кусочек сферы, то его можно наложить на любое другое место этой сферы. Конечно, таким свойством обладает и плоскость: ее куски можно передвигать по ней самой как угодно. Оказывается, этим свойством обладает и псевдосфера. Если

вырезать кусочек псевдосферы, то его можно наложить на любое другое место этой поверхности, не содержащее точек окружности, полученной вращением особой точки трактрисы. Другими словами, псевдосфера одинаково искривлена во всех своих точках, кроме точек указанной окружности.

Важность псевдосферы состоит в том, что на ней частично реализуется плоская неевклидова геометрия Лобачевского. Этот удивительный факт установил итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835—1900) в 1868 г., уже после смерти Н. И. Лобачевского (1792—1856). Интерпретация планиметрии Лобачевского на псевдосфере положила конец спорам о реальности геометрии Лобачевского.

Несколько слов о самой геометрии Лобачевского. Эта геометрическая теория основана на тех же аксиомах, что и обычная евклидова геометрия, изучаемая в школе, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на противоположную. Вместо евклидовой аксиомы о параллельных в этой геометрии принимается следующая аксиома Лобачевского: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по меньшей мере две прямые, расположенные с данной в одной плоскости и не пересекающие ее. Геометрия Лобачевского непротиворечива, как и геометрия Евклида, хотя некоторые следствия (теоремы), полученные из аксиом Лобачевского, на первый взгляд носят парадоксальный характер и кажутся противоречащими нашим обычным представлениям. Так, в этой геометрии сумма углов треугольника непостоянна и всегда меньше 180° , не вокруг всякого треугольника можно описать окружность, не существует подобных и неравных треугольников и т. д. Открытие новой геометрии было революционным моментом в развитии математики. Оно имело огромное значение, поскольку в большой степени изменило взгляды человечества на свойства реального физического пространства. Геометрия Лобачевского применяется в математике и в физике.

Новая геометрия названа по имени ее творца, великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского. Отметим, что к идеям новой геометрии почти одновременно и независимо друг от друга пришли венгерский математик Янош Больяй (1802—1860) и немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855).

ДВУСТОРОННИЕ И ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим поверхность σ (рис. 96). Фиксируем точку M_0 и проведем через нее различные линии на этой поверхности, построим касательную к каждой линии в этой точке. Можно доказать, что все касательные к линиям на поверхности σ , проходящим через точку M_0 , расположены в одной плоскости. Эту плоскость называют *касательной плоскостью* к данной поверхности σ в заданной точке M_0 . *Нормалью* к поверхности σ в точке M_0 называют прямую, перпендикулярную касательной плоскости и проходящую через эту точку. Из точки M_0 можно отложить два направляющих вектора нормали: $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ (внешняя нормаль поверхности), $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$ (внутренняя нормаль поверхности). Будем считать, что \mathbf{n} — единичный вектор нормали. Поверхность называют *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, положение которой меняется непрерывно при переходе от точки к точке.

На гладкой поверхности σ фиксируем точку M_0 и одно из двух направлений нормали к ней в этой точке. Через точку M_0 проведем замкнутую линию Γ , целиком лежащую на поверхности σ и не имеющую общих точек с границей этой поверхности. Будем совершать обход линии Γ так, чтобы нормаль изменялась непрерывно, при этом вектор \mathbf{n} в каждой точке M будет иметь вполне определенное направление (отличное, вообще говоря, от направления в точке M_0). После обхода по замкнутой линии может оказаться следующее: 1) вектор \mathbf{n} принял

первоначальное положение; 2) вектор \mathbf{n} изменил направление на противоположное.

Поверхность σ называют *двусторонней*, если обход по любой замкнутой линии, лежащей на этой поверхности и не имеющей общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности.

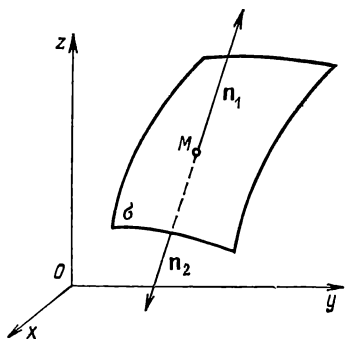


Рис. 96

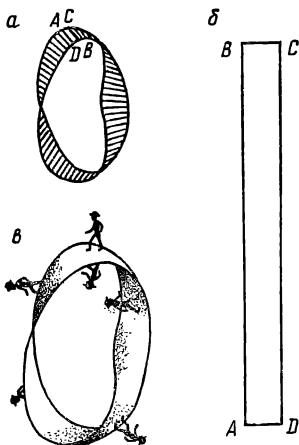


Рис. 97

Двусторонней поверхностью является всякая гладкая поверхность, определяемая уравнением $z=f(x, y)$. Действительно, выбрав направление нормального вектора \mathbf{n} к ней так, чтобы он составил с осью Oz острый угол (рис. 96), получим одну сторону поверхности (верхнюю). Выбрав это направление так, чтобы вектор \mathbf{n} составил с осью Oz тупой угол, получим другую сторону поверхности (нижнюю). В частности, плоскость и всякая ее часть (круг и т. п.) — двусторонняя поверхность. Любая замкнутая поверхность, не имеющая точек самопересе-

чения (сфера, эллипсоид и др.), также является двусторонней. В самом деле, направив нормальный вектор внутрь объема, ограниченного этой поверхностью, получим одну сторону поверхности (внутреннюю), направив нормаль вне указанного объема — другую сторону поверхности (внешнюю).

Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а выбор ее определенной стороны — *ориентацией поверхности*.

Если на поверхности существует замкнутая линия, обход по которой меняет направление нормали на противоположное, то поверхность называют *односторонней*. Простейшим примером односторонней поверхности может служить лист Мёбиуса (рис. 97, а). Эту поверхность можно получить следующим образом: взять полоску бумаги $ABCD$ (рис. 97, б) и склеить ее так, чтобы точка A совпала с точкой C , точка B — с точкой D , т. е. перед склеиванием бумагу повернуть на 180° . Читателю предлагается построить эту поверхность и убедиться в том, что при обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное (рис. 97, в). Поверхность названа в честь немецкого математика Августа Фердинанда Мёбиуса (1790—1868), впервые изучавшего ее.

ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О ЛИНИЯХ И ПОВЕРХНОСТЯХ

Понятие линии возникло в сознании человека в доисторические времена. Траектория брошенного камня, очертания цветов и листьев растений, извилистая линия берега реки и другие явления природы с давних пор привлекали внимание людей. Наблюдаемые многократно, они послужили основой для постепенного установления понятия о линии. Но потребовался значительный промежуток времени для того, чтобы наши предки стали сравнивать между собой формы кривых линий. Первые рисунки на стенах пещер, примитивные орнаменты на домашней утвари показывают, что люди умели не только отличать прямую от кривой, но и различать отдельные кривые. Памятники глубокой древности свидетельствуют о том, что у всех народов на некоторой ступени их развития имелись понятия прямой и окружности. Для построения этих линий использовались простейшие инструменты.

Однако лишь с возникновением математических теорий стало развиваться учение о линиях. Греческие ученые создали теорию линий второго порядка. Эти линии рассматривались как сечения конуса плоскостью, вследствие чего в древности их называли коническими сечениями. Конические сечения впервые рассматривал Менехм, который жил в IV в. до н. э. Первое систематическое изложение теории этих линий дал Аполлоний Пергский (III—II вв. до н. э.) в своем сочинении «Конические сечения», которое почти целиком дошло до нас. В поисках решения различных задач греческие ученые рассматривали и некоторые трансцендентные линии.

В средневековую эпоху важные достижения греческих ученых были забыты. Математическая наука снова обратилась к изучению кривых только в XVII в. Для исследования линий первостепенное значение имело открытие Декартом и Ферма метода координат, способствовавшего возникновению исчисления бесконечно малых. Метод координат в соединении с анализом бесконечно малых позволил перейти к исследованию линий общим способом. Разнообразные проблемы механики, астрономии, геодезии, оптики, возникшие в XVII—XVIII вв.,

привели к открытию многих новых линий и изучению их геометрических и механических свойств. Этими вопросами с большим энтузиазмом занимались крупнейшие математики эпохи — Декарт, Гюйгенс, Лейбниц, братья Бернулли.

Следующий важный шаг в изучении линий был сделан Ньютоном, который начал разработку теории кривых третьего порядка. Впоследствии были поставлены задачи: исследовать кривые четвертого и высших порядков, создать общую теорию алгебраических кривых на плоскости, приступить к систематическому изучению алгебраических поверхностей, начиная с поверхностей второго порядка. В решение последней задачи большой вклад внес знаменитый математик XVIII в. Леонард Эйлер, академик Петербургской академии наук. Он написал первое пособие по аналитической геометрии, в котором излагалась теория линий и поверхностей второго порядка.

ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ДРЕВНОСТИ

Конические сечения (эллипс, гипербола, парабола) впервые были рассмотрены в связи с попытками решить задачу об удвоении куба (построить куб, объем которого в два раза больше объема заданного куба). Эта задача равносильна задаче о решении уравнения $x^3 = 2a^3$, где a — ребро данного куба, x — ребро искомого куба. Удвоение куба сначала пытались осуществить путем построений с помощью циркуля и линейки. Поскольку это сделать не удавалось, то началось тщательное исследование задачи. Задача привлекла внимание древнегреческого математика Гиппократа Хиосского, деятельность которого относится к середине V в. до н. э.

По свидетельству Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), Гиппократ «был плохим купцом, но весьма искусным геометром». Он жил в Афинах, занимался математикой; написал первое систематическое сочинение по геометрии, которое до нас не дошло. Его интересовали и другие задачи, в частности задача о квадратуре круга. Гиппократ принадлежал к числу тех ученых, которые пытались осуществить квадратуру круга «по частям», т. е. через квадратуру сегментов, секторов и луночек (фигур, ограниченных дугами двух окружностей). В поисках решения задачи о квадратуре круга он нашел квадратуры трех луночек; их называют теперь луночками Гиппократа.

Гиппократ обобщил задачу об удвоении куба и свел ее к вопросу о нахождении двух средних пропорциональных между данными величинами. Пусть задан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, объем которого $V = a^2b$ (если основание — прямоугольник, то его можно преобразовать в равновеликий квадрат). Требуется построить куб, объем которого равен объему данного прямоуголь-

ного параллелепипеда, т. е. решить уравнение $x^3 = a^2b$, где x — ребро искомого куба. Гиппократ показал, что решение задачи равносильно нахождению таких двух величин x и y , что $a/x = x/y = y/b$. При $b = 2a$ из уравнения $x^3 = a^2b$ получаем $x^3 = 2a^3$, т. е. x — ребро удвоенного куба.

Чтобы найти величины x , y , обратились к линиям, уравнения которых получаются из пропорции Гиппократа, а именно: $ay = x^2$ и $xy = ab$ или $y^2 = bx$. Построение координат x , y точки пересечения двух таких линий и давало решение задачи (имелась в виду точка, отличная от начала координат).

При исследовании этих линий прежде всего необходимо было установить, являются ли они непрерывными (тогда может идти речь о точке их пересечения). Только во второй половине IV в. до н. э. древнегреческому математику Мeneхму удалось представить эти линии как плоские сечения конусов вращения. Мeneхм рассматривал три вида конусов вращения: прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Проведя сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей, он получил три вида линий, которые теперь называют соответственно параболой, гиперболой и эллипсом. Кроме определения линий, Мeneхм вывел основное планиметрическое свойство каждого конического сечения, которое древние называли симптомом, а мы — уравнением линии. Этот вывод для сечения прямоугольного конуса вращения состоял в следующем.

Пусть AOB — сечение конуса с прямым углом при вершине O плоскостью, проходящей через ось OK (рис. 98), PKL — след плоскости, перпендикулярной к образующей OB , а MPM' — само сечение конуса этой плоскостью. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси OK и проходящей через точку L ; это окружность $AM'BM$. Поскольку AMB — полуокружность, то $\angle AMB$ прямой, а $\triangle AMB$ прямоугольный, в котором AB — гипотенуза. На основании теоремы о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла на гипотенузу (перпендикуляр — среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые делит ее основание этого перпендикуляра), имеем

$$LM^2 = AL \cdot LB. \quad (1)$$

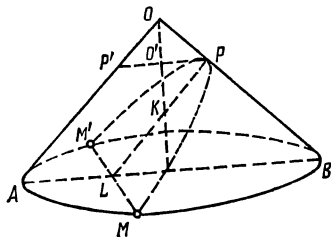
Найдем выражения для AL и LB . Прежде всего $AL = PP' = 2O'P$,

$O'P = O'K$ ($\angle P'OP$ прямой, поэтому $\widehat{POO'} = 45^\circ$, $\widehat{O'PK} = 45^\circ$, $\angle POO'$ и $\angle O'PK$ — углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из $\triangle O'PK$ следует, что $O'P^2 + O'K^2 = PK^2$ или $2O'P^2 = PK^2$, откуда $O'P = \sqrt{\frac{1}{2}PK^2}$, поэтому $AL = PP' = 2O'P = 2\sqrt{\frac{1}{2}PK^2} = \sqrt{2}PK^2$,

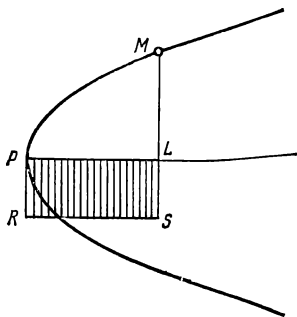
$AL = \sqrt{2PK^2}$; далее, $LB = \sqrt{2LP^2}$. Подставляя два последних выражения в (1), находим $LM^2 = \sqrt{2KP^2} \sqrt{2LP^2}$ или

$$LM^2 = 2PK \cdot PL. \quad (2)$$

Обозначив $LM = y$; $PK = p$; $PL = x$, из равенства (2) получим $y^2 = 2px$. (3)



Р и с. 98



Р и с. 99

Это и есть симптом сечения прямоугольного конуса вращения, или уравнение линии, которое мы записали с помощью буквенной символики. Древние греки выражали это уравнение в словесно-геометрической форме так: квадрат на полухорде LM в каждой точке сечения равен прямоугольнику $PLSR$, построенному на отрезке PL (рис. 99) оси до вершины и на постоянном отрезке PR ($|PR| = |PK|$).

Итак, координаты любой точки $M(x, y)$ указанного сечения удовлетворяют уравнению (3), которое является уравнением параболы в прямоугольной системе координат с началом в вершине параболы и осью абсцисс, совпадающей с ее осью симметрии.

Рассмотрим вывод симптома сечения тупоугольного конуса. Пусть дано сечение OEF (рис. 100) конуса с тупым углом при вершине O и его ось OK . Через точку A конуса проведем плоскость, перпендикулярную к образующей OE . В сечении конуса этой плоскостью получится линия MAN . Продолжим другую образующую OF конуса до пересечения в точке A' с прямой AQ — линией пересечения проведенной секущей плоскости с осевым сечением OEF конуса. Прямая AQ является осью симметрии рассматриваемой линии. Возьмем на этой оси точку L на расстоянии $AL = x$ от вершины и найдем связь

между абсциссой x и соответствующей ей ординатой $y=LM$ данной линии. Через точку L перпендикулярно к оси конуса проведем плоскость, которая в сечении с конусом образует окружность с диаметром CD . Поскольку $\triangle CMD$ прямоугольный, в котором $\angle CMD=90^\circ$, то

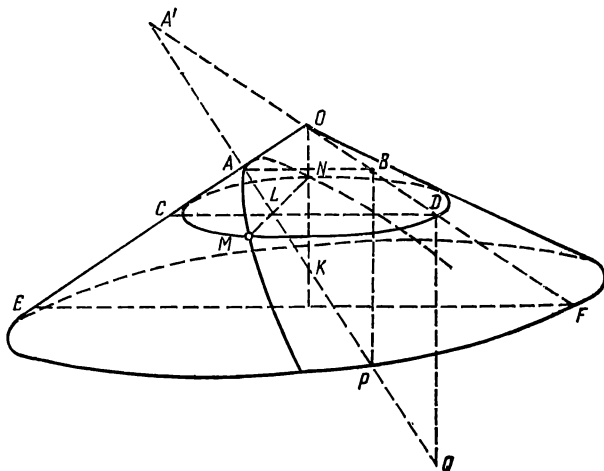
$$y^2=LM^2=CL \cdot LD. \quad (4)$$


Рис. 100

Так как $CA \perp AQ$, $CD \perp DQ$, где $DQ \parallel OK$, то все четыре точки C, A, D, Q будут лежать на окружности, построенной на CQ , как на диаметре. По свойству хорд, проведенных в круге через одну точку, получаем

$$CL \cdot LD = AL \cdot LQ. \quad (5)$$

Если K — точка пересечения AQ с осью конуса, $AB \parallel CD$, а $BP \parallel OK$, то из подобия треугольников DLQ и ABP , $A'AB$ и ALD найдем $LQ : AP = DL : AB = A'L : A'A$, откуда

$$LQ = A'L \frac{AP}{AA'} \quad \text{или} \quad LQ = A'L \frac{2AK}{AA'}, \quad (6)$$

ибо $AP = 2AK$.

Из (4)—(6) получаем

$$y^2 = AL \cdot A'L \frac{2AK}{A A'} . \quad (7)$$

Обозначив $AK=p$, $AA'=2a$ и приняв во внимание, что $AL=x$, $A'L=2a+x$, уравнение (7) представим в виде

$$y^2 = x(2a+x) \frac{2p}{2a}, \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2 \quad (8)$$

или

$$y^2 = 2px + \frac{(2px)(2ax)}{4a^2} . \quad (9)$$

Уравнение (8) является уравнением гиперболы, отнесенным к вершине. С этим уравнением мы уже встречались в разделе «Линии второго порядка». Отметим, что в этом уравнении a — действительная полуось, p — параметр гиперболы, причем $p=b^2/a$, где b — мнимая полуось. Таким образом, сечением тупоугольного конуса является гипербола.

Менехм уравнение (8) представлял в виде

$$\frac{y^2}{x(2a+x)} = \frac{p}{a} ,$$

что можно выразить так: прямоугольник на отрезке x и на том же отрезке, сложенном с дополняющей осью, находится в постоянном отношении к квадрату на соответствующей ординате (рис. 101).

Уравнение (9) означает, что данный квадрат (квадрат, построенный на отрезке $LM=y$), равен «приложенному» к $2p$ прямоугольнику $2px$ (т. е. построенному на другом отрезке $AL=x$ и постоянном для всех точек M отрезке $2p=2AK$), к которому прибавляется площадь, подобная прямоугольнику, стороны которого $2p$ и $2a$. Отрезок длины $2p$ называли «прямой стороной фигуры», отрезок длины $2a$ — «поперечной» стороной фигуры (или «дополняющей осью»). Поскольку квадрат «прикладывался» к стороне $2p$ с избытком, то впоследствии сечение тупоугольного конуса называли гиперболой.

Аналогично можно получить уравнение эллипса, рассмотрев сечение конуса с острым углом при вершине плоскостью, перпендикулярной к его образующей (рис. 102). В этом случае точка A' окажется уже на самой образующей, а не на ее продолжении. Сохраняя прежние обозначения и применяя аналогичные рассуждения, получаем $y^2 = LM^2 = CL \cdot LD = AL \cdot LQ$.

Из подобия треугольников DLQ и ABP , $A'AB$ и ALD находим $A'L : LQ = LQ : LD = AA' : AP$, откуда $LQ = A'L \cdot AP/AA'$.

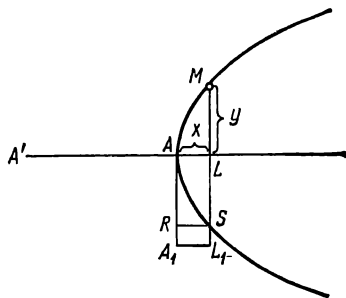
Обозначив $AK=p$, $AA'=2a$ и приняв во внимание, что $AL=x$, $A'L=2a-x$, $AP=2AK$, получим уравнение

$$y^2 = x(2a - x) \frac{p}{a}$$

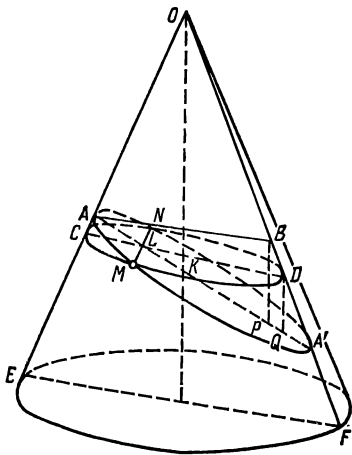
или

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2. \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением эллипса, отнесенным к вершине.



Р и с. 101



Р и с. 102

Первое из уравнений можно представить так:

$$\frac{y^2}{x(2a - x)} = \frac{p}{a},$$

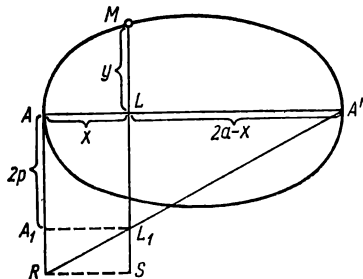
т. е. отношение прямоугольника на отрезках «поперечной стороны» («дополняющей оси») к квадрату на соответствующей ординате есть величина постоянная (рис. 103).

Уравнение $y^2 = x(2a - x) \frac{p}{a}$ можно представить и в таком

виде:

$$y^2 = 2px - \frac{(2px)(2ax)}{4a^2}.$$

Это уравнение означает, что при «приложении» y^2 к прямой $2p$ «недостаёт» площади фигуры, подобной прямоугольнику со сторонами $2a$ и $2p$, поэтому полученная в сечении линия была позже названа эллипсом. Отрезок $AA' = 2a$ является большой осью эллипса. Если положить $x = a$, то получится выражение для малой оси b : $b^2 = 2pa - pa = pa$, откуда находим значение параметра p : $p = b^2/a$.



Р и с. 103

Теорией конических сечений занимался также знаменитый древнегреческий математик Евклид (ок. 365—ок. 300 г. до н. э.). По сообщениям более поздних авторов, он написал четыре книги о конических сечениях, материал которых вошел в произведения Аполлония Пергского. Эти книги Евклида до нас не дошли. Евклид был родом из Афин, а его научная деятельность протекала в Александрии, где он создал математическую школу. Основной труд Евклида «Начала» содержит изложение планиметрии, стереометрии,

ряда вопросов теории чисел, геометрической алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включающего элементы пределов (метод исчерпывания). В этом сочинении, состоящем из 13 книг, Евклид подытожил все предшествующие достижения греческой математики и создал фундамент ее дальнейшего развития. Эта удивительная книга, созданная более двух тысячелетий назад, до сих пор не утратила своего значения: изложенная в ней система изучается во всех школах мира. С 1482 г. она выдержала более 500 изданий на всех языках мира. На русском языке впервые вышла в 1739 г., последнее русское издание «Начал» опубликовано в 1948—1950 гг.

В «Началах» Евклида рассматриваются простейшие линии — прямые (на плоскости и в пространстве), окружности и ограниченные ими фигуры, а также простейшие поверхности — плоскость, сфера, конус, цилиндр и ограниченные ими тела. Так, третья книга целиком посвящена окружности, кругу, хордам и касательным к окружности. В одиннадцатой книге изучаются прямые и плоскости в пространстве,

в двенадцатой — вопросы сравнения объемов тел (пирамид и конусов, призм и цилиндров, шаров), в тринадцатой — вопросы построения пяти правильных многогранников (тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра).

Историческое значение «Начал» Евклида состоит в том, что в этом сочинении впервые сделана попытка логического построения геометрии на основе аксиоматики. Именно «Началам» Евклида в большей степени «обязан» аксиоматический метод, господствующий в современной математике. «Начала» Евклида оказали колоссальное влияние на последующее развитие науки. На них опирались Архимед, Аполлоний и другие античные математики в своих исследованиях по математике и механике. На геометрии Евклида базируется классическая механика. Приведем слова Альберта Эйнштейна (1879—1955) о «Началах»: «Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением» (А. Эйнштейн. Физика и реальность.— М., 1965, с. 62).

Несколько слов о самом Евклиде. Древнегреческие ученые сообщают, что он был очень доброжелателен ко всем тем, кто сделал хоть какой-нибудь вклад в математику, корректен, в высшей степени порядочен и совершенно лишен тщеславия. О его принципиальности свидетельствуют две следующие истории. Царь Птолемей I однажды спросил Евклида, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем штудирование «Начал». На этот вопрос Евклид смело ответил, что «в геометрии нет царской дороги». Другой анекдот повествует о том, что один юноша, изучив первое предложение «Начал», спросил у Евклида: «А что я могу заработать, выучив все это?» Евклид позвал раба и сказал: «Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением».

Теория конических сечений получила свое дальнейшее развитие в трудах древнегреческого ученого Аполлония Пергского. Аполлоний родился около 260 г. до н. э. Расцвет его творчества относится к 210 г. до н. э. В это время он жил в Александрии, куда приехал еще юношей и где учился под руководством математиков школы Евклида. Аполлоний прославился как геометр и астроном. Умер он около 170 г. до н. э. В астрономии Аполлонию принадлежит создание теории эпициклов и эксцентрических окружностей, с помощью которых он построил схему солнечной системы. Эта теория была принята знаменитыми астрономами древности Гиппархом и Птолемеем. В математике Аполлоний более всего известен своим трудом «Конические сечения», в котором дал полное изложение теории линий второго порядка. Он написал трактат «О вставках», посвященный классификации задач, решаемых с помощью вставок. Такие задачи могут

оказаться разрешимыми с помощью циркуля и линейки (древние называли их плоскими), конических сечений (телесные задачи), других кривых (линейные задачи). Назовем еще две геометрические работы Аполлония: «О спиральных линиях», «О касании». В первой из них рассматриваются спирали на поверхности цилиндра. Во второй речь идет о знаменитой задаче Аполлония: даны три вещи, каждая из которых может быть точкой, прямой или окружностью; требуется провести окружность, которая проходила бы через каждую из данных точек или касалась бы данных прямых или окружностей. Аполлоний рассмотрел также преобразования плоскости в себя, которые переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Частными случаями указанных преобразований являются преобразования подобия и инверсии относительно некоторой точки. Об этом можно судить по сообщениям других авторов, приводящих отдельные теоремы из сочинения Аполлония «О плоских геометрических местах», которое до нас не дошло.

Аполлоний первым рассмотрел эллипс, гиперболу, параболу как произвольные плоские сечения любых конусов с круговым основанием и детально изучил свойства этих сечений. Он обнаружил, что парабола — предельный случай эллипса, открыл асимптоты гиперболы. Аполлоний впервые ввел названия «эллипс», «гипербола», «парабола», получил их уравнения (в словесно-геометрической формулировке), впервые изучил свойства касательных и подкасательных к коническим сечениям. Он доказал свыше 300 теорем о линиях второго порядка методом, который состоял в отнесении кривой к некоторому ее диаметру и сопряженным с ним хордам.

Сочинение Аполлония «Конические сечения» оказало большое влияние на развитие науки нового времени — астрономии, механики, оптики. Из его положений исходили Р. Декарт и П. Ферма при создании аналитической геометрии — области математики, изучающей с помощью метода координат линии и поверхности. К разработке основ новой науки — аналитической геометрии — они приступили почти одновременно и независимо друг от друга.

ЛИНИИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРУДАХ ФЕРМА

Французский математик Пьер Ферма родился 17 августа 1601 г. в семье купца в небольшом городке Бомон, близ Тулузы. Маленький Пьер учился в Бомоне, а завершать образование уехал в Тулузу, ближайший университетский город. Обучение было основательным: он хорошо усвоил главные европейские языки и литературу, греческую и латинскую философию. Его познания поражали современников своей широтой и разносторонностью. Ферма писал стихи на француз-

ском, латинском и испанском языках. Ферма окончил юридический факультет; выбор специальности был не случайным — его мать происходила из семьи юристов. Занявшись адвокатурой, он не мог ограничить круг своих интересов только работой по специальности. Все его свободное время занимало чтение произведений древних авторов, возрос и интерес к математике. Уже в 1629 г., прочитав на латинском языке краткий обзор сочинений Аполлония, Ферма самостоятельно доказал основные теоремы о конических сечениях. К этому времени относится одно из его существенных открытий — метод нахождения максимумов и минимумов. В 1631 г. Ферма был зачислен на должность чиновника (советника по приему жалоб) кассационной палаты Тулузского парламента (парламентами называли в ту пору окружные судебные органы). Здесь он проработал до конца жизни, имея репутацию глубокого знатока права и неподкупно честного юриста. В том же 1631 г. Ферма женился на Луизе де Лон, дочери советника указанного парламента. В семье Ферма было пятеро детей: три сына и две дочери. Старший сын Самюэль Клемент (1632—1690), юрист по образованию и профессии, после смерти отца издал собрание его математических работ (1679 г.). Сам Ферма при жизни почти ничего не публиковал, но его достижения были широко известны современным ему математикам благодаря обширной переписке, которую он вел с другими учеными. Ферма все время жил в Тулузе. В другие места выезжал редко и главным образом по делам службы. Во время одной из таких поездок он скончался (12 января 1665 г.).

Математические интересы Ферма были весьма разнообразны: он развил методы вычисления площадей фигур и объемов тел, создал новые методы построения касательных к линиям и отыскания экстремумов функций. Наряду с Декартом Ферма является создателем аналитической геометрии.

Из всех областей математики Ферма наиболее интересовала теория чисел. С его именем связаны две знаменитые теоремы. Фундаментальный результат теории делимости на заданное простое число представляет собой *малая теорема Ферма*: для любого простого числа p и любого $a \geq 1$, которое не делится на p , разность $a^{p-1} - 1$ (или $a^p - a$) делится на p . Ферма сформулировал эту теорему в одном из своих писем (1640 г.) (в письме сообщалось, что он доказал теорему, но доказательство не приводилось). Первое доказательство малой теоремы Ферма дал Лейбниц. Несколько доказательств этой теоремы опубликовал Эйлер, он же обобщил теорему. Важную роль в развитии теории чисел и всей математики сыграла *великая теорема Ферма*: уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ и $xyz \neq 0$ не имеет решений в целых (и рациональных) числах.

Как уже отмечалось, Ферма тщательно изучал математические труды древних. Так, он был знаком с «Арифметикой» греческого ма-

тематика Диофанта Александрийского (III в.). На полях собственного экземпляра этой книги (опубликованной в 1621 г.) Ферма сделал ряд замечаний, возникших у него при изучении задач Диофанта. В замечании, относящемся к задаче о разложении данного квадрата на два квадрата, Ферма записал: «Куб, однако, на два куба или квадрато-квадрат на два квадрато-квадрата и вообще никакую до бесконечности сверх квадрата степень в две того же названия невозможно разделить» [см.: В. А. Никифоровский, Л. С. Фрейман, с. 110]. Далее он пишет, что открыл поистине чудесное доказательство этого предложения и указывает, что недостаточная ширина полей книги не позволяет ему привести его.

Доказательство великой теоремы Ферма стало проблемой, не разрешенной до сих пор. Крупнейшие математики безуспешно пытались ее доказать. Эйлер доказал ее для случаев $n=3$ и $n=4$. В начале XX в. этой проблемой заинтересовались и многие дилетанты. Теорема Ферма стала модой, которая была обусловлена не только математическими интересами: 13 сентября 1907 г. немецкий любитель математики П. Вольфскель завещал (до 13 сентября 2007 г.) выдать доказавшему великую теорему Ферма вознаграждение в размере 100 000 марок. Доходами с завещанной премиальной суммы пользовался Геттингенский университет, который приглашал на эти деньги математиков для чтения лекций и ведения научной работы. Знаменитый немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943), бывший председателем комиссии по премии, заметил: «К счастью, кажется, кроме меня, у нас нет математика, которому была бы под силу эта задача; я же никогда не решусь зарезать курицу, которая несет золотые яйца» [см. В. А. Никифоровский, Л. С. Фрейман, 1976, с. 112].

Основы аналитической геометрии на плоскости Ферма заложил в своей небольшой работе «Введение в изучение плоских и телесных мест» (1636). Напомним, что под «плоскими местами» древние греки понимали прямые и окружности, а под «телесными местами» — эллипс, гиперболу, параболу. При жизни Ферма эта его работа (как и многие другие) распространялась среди ученых только в рукописном виде. Основной принцип аналитической геометрии автор сформулировал следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин» [Декарт, 1938, с. 173].

Под неизвестными величинами (координатами) Ферма понимает прямолинейные отрезки; первую из них он обозначает через NZ или одной буквой A , а вторую — соответственно через ZI и E . Отметим,

что неизвестный отрезок обозначен одной гласной буквой, а данный отрезок — одной согласной. После небольшого введения Ферма переходит к выводу уравнения прямой.

Пусть NZM — данная по положению прямая (рис. 104), N — фиксированная точка и NZ — отложенное на этой прямой одно из неизвестных, ZI — проведенное под данным углом второе неизвестное. Ферма утверждает, что если $DA = BE$, то точка I описывает прямую.

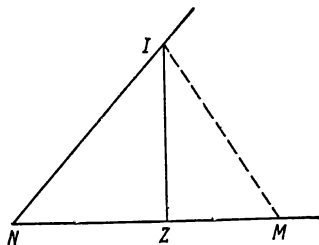
Это равенство он записывает так: $D \text{ in } A \text{ aequatur } B \text{ in } E$ (D на A равно B на E). Таким образом, в современных обозначениях получено уравнение $Dx = By$ прямой NI , проходящей через начало координат (точку N).

Затем Ферма рассматривает наиболее общее уравнение прямой $P - Dx = By$, которое у него имеет вид

$$Z_{pI} - D \text{ in } A \text{ aequatur } B \text{ in } E.$$

Здесь Z_{pI} обозначает данную величину, которая должна иметь размерность площади, если у D и A (B и E) размерности линейные — таково требование однородности, которому неуклонно следовали древние и их последователи, в том числе и Ферма. Обозначение Z_{pI} указывает на размерность l^2 . Относительно последнего уравнения Ферма говорит: «Это — простое и первое уравнение, с помощью которого можно найти все прямолинейные места». От уравнения $P - Dx = By$ он переходит к уравнению $D(R - x) = By$ (где $DR = P$), которое также определяет прямую.

Излагая содержание работы Ферма, будем пользоваться современными обозначениями. Ферма устанавливает далее, что в прямоугольной системе координат уравнение окружности заданного радиуса с центром в начальной точке имеет вид $b^2 - x^2 = y^2$. Он правильно характеризует общее уравнение окружности: равны между собой коэффициенты при квадратах неизвестных (записанные в одной части уравнения), равен нулю коэффициент при произведении неизвестных. Ферма преобразует к каноническому виду уравнение $b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry$ и показывает, что оно определяет окружность. Для этого он производит дополнение до квадратов: $p^2 - (x + d)^2 = (y + r)^2$, где $p^2 = b^2 + d^2 + r^2$. Затем снова пишет x вместо $x + d$ и y вместо $y + r$ и получает уравнение $p^2 - x^2 = y^2$ (т. е. уравнение вида $b^2 - x^2 = y^2$). Здесь отчетливо выражена идея преобразования координат при па-



Р и с. 104

параллельном переносе ($X=x+d$, $Y=y+r$). Следует заметить, что Ферма обходит молчанием вопрос об отрицательных координатах, какими оказываются координаты центра $(-d, -r)$ в данной задаче (ибо d и r у него положительные).

Идея преобразования координат обнаруживается в рассуждениях Ферма при рассмотрении уравнения $d+xy=rx+sy$ (в современных обозначениях). Сначала Ферма показал, что уравнение равноугольной гиперболы относительно ее асимптот имеет вид $xy=c$ (A in E aequatur Z_{PI}). Уравнение $d+xy=rx+sy$ он преобразует следующим образом: $rx+sy-xy=d$; член $rx+sy-xy$ только слагаемым $-sr$ отличается от произведения $(x-s)(r-y)$, т. е. $(x-s)(r-y)=rx+sy-xy-sr$ или $(x-s)(r-y)=d-sr$. Последнее уравнение является уравнением того же типа, что и уравнение $xy=c$; оно также определяет гиперболу.

Основные уравнения конических сечений у Ферма представляют собой непосредственное выражение в терминах алгебры их свойств, известных по сочинению Аполлония. Для параболы это уравнение $x^2=dy$ или $y^2=cx$; для эллипса $(b^2-x^2)/y^2=\text{const}$; для гиперболы $(b^2+x^2)/y^2=\text{const}$. В последнем случае графически изображаются две ветви гиперболы, хотя об отрицательных координатах ничего не сказано.

Ферма рассмотрел и более трудный случай, когда группа старших членов уравнения второй степени содержит член с произведением координат. Он показал, как такое уравнение приводить к каноническому виду на частном примере уравнения $b^2-2x^2=2xy+y^2$. Его построения и выкладки соответствуют переходу к новой системе координат X, Y с прежними началом O , осью ординат и осью абсцисс, образующей угол 45° со старой. В новой системе $X=\sqrt{2}x$, $Y=x+y$, поэтому уравнение преобразуется к виду $(2b^2-X^2)/Y^2=2$; оно определяет эллипс.

Ферма писал, что он коротко и ясно изложил все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест. На самом деле был сделан только первый шаг к созданию новой области математики — аналитической геометрии, которая получила такое наименование лишь в конце XVIII в.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЕКАРТА

Выдающийся французский математик, физик, философ Рене Декарт родился 31 марта 1596 г. в Лаэ, около Тура, во Франции, в небогатой дворянской семье. В детстве у Рене было слабое здоровье, из-за чего отец даже отменил обязательные домашние уроки. По той же причине ректор иезуитского коллежа в Ла Флеш, куда позже по-

ступил Рене, разрешил мальчику приходить в класс попозже, когда ему захочется присоединиться к своим товарищам. С тех пор в течение всей жизни Декарт оставлял все самые серьезные занятия на утро. Уже в зрелом возрасте, вспоминая годы учебы в Ла Флеш, Декарт говорил, что размышления в долгие спокойные утренние часы стали «источником» его философии и математики. Учился Декарт успешно, его яркий талант проявился задолго до того, как он окончил коллеж в 1612 г. В 1614 г. Декарт приехал в Париж, где занялся математическими исследованиями. Через два года он оказался на военной службе; сначала в Голландии, где постигал воинское дело под началом принца Мориса Оранского, затем в Германии, где нанялся к курфюрсту Баварии, ведущему войну против Богемии. В период военной службы, когда армия находилась в бездействии на своих зимних квартирах близ маленькой деревни Нейбург на берегу Дуная, Декарт продолжал научные размышления, в результате которых пришел к основным идеям аналитической геометрии.

Весной 1620 г. Декарт участвовал в сражении за Прагу. В следующем году он оставляет военную службу. Жизнь Декарта была богата приключениями, иногда небезопасными. Так, оставив военную службу в 1621 г., Декарт решает морским путем направиться в Северную Европу, в которой не было войн и эпидемий. На корабле моряки в присутствии Декарта пытаются обсуждать план его ограбления, рассчитывая, что иностранец их не поймет. Обнажив шпагу, Декарт заставил их направить корабль обратно к берегу. Следующий год он провел в путешествиях по Голландии, Франции, Италии. Приехав в Париж, Декарт целиком посвятил себя научным занятиям. Одновременно он оставался светским человеком, увлекся фехтованием, как и подобало дворянину его ранга. Однажды, когда подвыпивший невежа оскорбил даму Декарта, разгневанный ученый на манер Д'Артаньяна выбил шпагу из рук нахала и великодушно отпустил его живым.

Декарт вел активную научную переписку с ведущими учеными Европы через своего друга Мерсенна, единственного, кто знал тайный адрес Декарта. В круг научных интересов Декарта, помимо математики и философии, входили: механика, оптика, химия, анатомия, эмбриология, медицина, астрономия и метеорология.

Декарт отличался независимым характером и нелегко вступал во взаимоотношения с сильными мира сего.

С осени 1641 г. Декарт находился в тихой деревушке около Гааги, где изгнанная принцесса Елизавета жила со своей матерью. Принцесса была одарена, увлекалась науками, владела шестью иностранными языками. Заинтересовавшись математикой и естественными науками, она ознакомилась с книгой Декарта и поняла, что ей необходимо увидеть самого автора. Встреча ученого и принцессы не прош-

ла бесследно: Елизавета настояла, чтобы Декарт давал ей уроки. Она состояла в переписке с Декартом долгие годы.

В 1646 г. Декарт жил в счастливом уединении в Эгмонте, размышляя над научными проблемами, занимаясь садоводством на крошечном участке и ведя переписку с просвещенными людьми Европы. Шведская королева Кристина, которой в ту пору было 19 лет, наслышанная о великом ученом, пожелала, чтобы Декарт стал ее личным учителем. Ученый «держался» до тех пор, пока Кристина весной 1649 г. не послала за ним на корабле адмирала Флемминга. В октябре Декарт навсегда покинул свой дом в Эгмонте и приехал в Стокгольм, где его встретили с большими почестями. Своенравная Кристина считала, что пять часов утра — самое лучшее время для занятий философией. Декарт вставал в утренней темноте, садился в присланную за ним карету и ехал во дворец, где Кристина в своей холодной библиотеке нетерпеливо ждала пяти часов, чтобы вовремя начать занятия. В Стокгольме стояла необычайно суровая зима. Декарт заболел воспалением легких и умер 11 февраля 1650 г. Вскоре после смерти Декарта его произведения были занесены в список книг, запрещенных католической церковью, той самой церковью, которая, следуя совету кардинала Ришелье, при жизни автора разрешила их публикацию. Позже (спустя семнадцать лет) прах Декарта был перевезен во Францию и погребен в Париже (там, где теперь Пантеон).

Научное наследие Декарта велико. В 1637 г. он опубликовал большой философский трактат «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках, с приложениями: диоптрика, метеорология и геометрия». Последнее из этих приложений содержит основы математической теории, которую до сих пор называют аналитической геометрией. Эта теория основана на двух идеях Декарта: идее координат и идее представлять уравнение с двумя переменными в виде некоторой линии на плоскости. Координатами точки на плоскости Декарт называл ее абсциссу и ординату. С этого времени вместо геометрического задания точки достаточно было указать упорядоченную пару чисел (x, y) и обратно. Введением координат Декарт, как говорят, произвел «арифметизацию плоскости».

Вторая идея Декарта состоит в следующем. До Декарта одно алгебраическое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными x и y считалось неинтересным для исследователей. Задача, выраженная таким уравнением, была неопределенной, поскольку из этого уравнения значения переменных нельзя определить однозначно. Переменной x можно придать любое значение и получить уравнение с одной переменной y , значение которой, вообще говоря, определяется этим уравнением. Декарт посмотрел на уравнение $F(x, y) = 0$ с другой точки зрения. Он предложил считать в данном уравнении x абсциссой точки,

а y — ее ординатой. При непрерывном изменении переменной x непрерывно менялась и переменная y ; следовательно, получалось некоторое множество точек, образующих линию. Таким образом, алгебраическому уравнению $F(x, y) = 0$ соответствует некоторая вполне определенная линия на плоскости, а именно линия, представляющая множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Обратно, заданной линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными. Из второй идеи Декарта вытекал метод для исследования линий с помощью алгебраических средств.

Новые идеи Декарта высоко ценил Энгельс, который писал: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...*» (К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд., т. 20, с. 573).

Знаменитая «Геометрия» Декарта состоит из трех книг (можно сказать, глав). В первой из них излагаются основы аналитической геометрии на плоскости. Декарт утверждает, что любую геометрическую задачу можно легко свести к задаче в терминах, для построения которых требуется лишь знание длин прямолинейных отрезков («прямых линий», по его словам). При этом необходимо уметь производить над отрезками действия, аналогичные арифметическим действиям. Декарт ввел в рассмотрение произвольно выбранный отрезок, который назвал «единицей» («дабы удобнее установить более тесную связь с числами»). Сложению и вычитанию чисел соответствовали такие же построения, какие были в геометрической алгебре древних, т. е. прибавление одного отрезка к другому или отнятие одного от другого. Новое исчисление Декарта отличалось от геометрической алгебры древних полным отказом от принципа однородности, который состоял в следующем: складывать можно только однородные объекты (длины с длинами, площади с площадями, объемы с объемами).

Декарт определил умножение, как построение четвертого пропорционального к двум данным отрезкам и единичному отрезку, т. е. $x/a = b/1$. Следовательно, произведение двух отрезков ($x = ab$) также изображалось отрезком, а не прямоугольником, построенным на данных отрезках (как это было в геометрической алгебре древних). Действие деления также сводилось к построению четвертой пропорциональной (оно соответствует нахождению отрезка, который относится к одному из двух данных отрезков так, как единичный отрезок относится к другому: $x/a = 1/b$). Корень квадратный рассматривался как средняя пропорциональная между данным и единичным отрезками ($x = \sqrt{a}$ определялось из пропорции $a/x = x/1$). Введение нового исчисления устанавливало взаимно однозначное соответствие между

множеством действительных чисел и множеством прямолинейных отрезков.

Далее Декарт вводит алгебраическую символику, которой мы пользуемся в настоящее время. Он отмечает, что оперируя с геометрическими величинами, изображенными отрезками, нет нужды проводить эти линии на бумаге, а достаточно их обозначить какими-нибудь буквами, каждую линию одной буквой. Известные величины он обозначил строчными буквами a, b, c , неизвестные — буквами x, y, z . Результат умножения a на b записывался в виде ab , результат возведения величины a в квадрат обозначался через aa или a^2 (чаще aa), возведения в куб — через a^3 или aaa и т. д. Корень n -й степени обозначался современным знаком. Равенство двух выражений обозначалось особым знаком (напоминающим знак бесконечности), который предложил Декарт.

Система координат, введенная Декартом, в значительной мере отличалась от современной. Декарт берет некоторую прямую с фиксированной точкой отсчета и рассматривает кривую линию относительно этой прямой. Положения точек кривой определяются с помощью системы параллельных отрезков, наклонных или перпендикулярных к исходной прямой. Второй координатной оси Декарт фактически не вводил. Не указывал он и направления отсчета от начала координат, отрицательные абсциссы также не рассматривались. Ординаты кривой, изображаемой уравнением $F(x, y) = 0$, которые расположены по одну сторону от исходной прямой, принимаются как «истинные» корни этого уравнения, а по другую сторону — как «ложные» его корни (т. е. отрицательные). Отметим, что современное понимание координатной системы сформировалось в XVIII в.

Во второй главе «Геометрии» приводятся рассуждения о природе кривых линий. Один из основных вопросов для Декарта заключался в следующем: какие линии можно рассматривать в геометрии? Декарт подразделяет линии на геометрические и механические. Геометрические линии — линии, описанные «непрерывным движением или же несколькими такими движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру» [Декарт, с. 30]. В качестве примера геометрических линий приводятся кривые, описываемые точками шарнирных механизмов, число звеньев которых может быть любым. Механические линии — это линии, описываемые двумя движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить. Приведем примеры механических линий: спираль, квадратриса. По мнению Декарта, механические линии следует исключить из геометрии. Свой кинематический способ деления линий на геометрические и механические Декарт облакает в более ясную аналитическую форму и предлагает классификацию первых. Он пишет:

«Все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии» [Декарт, 1938, с. 33]. Несколько ранее Декарт объяснил, как описывать кривую или, вернее, строить любое число ее точек, вычисляя значения x по данным значениям y (первой координатой у него служила y). Декарт приводит первую общую классификацию алгебраических кривых в зависимости от степени их уравнений, отнеся к роду n кривые с уравнениями степеней $2n-1$ и $2n$. Классификация кривых, заданных уравнениями относительно прямоугольных координат, по родам или порядкам имеет смысл, если род или порядок не зависят от выбора координатной системы. Это было ясно Декарту, и он сформулировал фундаментальное предложение о неизменяемости рода кривой при замене одной системы прямолинейных координат другой.

В 1684 г. Лейбниц назвал геометрические кривые Декарта алгебраическими, а механические — трансцендентными. Он объяснял отказ от терминологии Декарта тем, что и механические линии не подлежат исключению из геометрии.

Классификация алгебраических кривых была усовершенствована Ньютоном; Ньютон предложил относить к одному классу линии, определяемые алгебраическими уравнениями одной и той же степени. Например, линиями второго порядка он назвал линии, заданные уравнением второй степени относительно декартовых координат.

Во второй главе Декарт ввел алгебраический метод нахождения нормалей и касательных к кривым, который можно отнести к важным математическим открытиям. Задача нахождения нормали к линии решается с помощью метода неопределенных коэффициентов; этот метод позже сыграл серьезную роль в математике. Он основан на том, что в случае тождества двух алгебраических многочленов коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны.

Третья глава «Геометрии» содержит основы теории алгебраических уравнений, т. е. уравнений вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$. Декарт систематически записывал уравнение в привычной для нас форме — с правой частью, равной нулю, — утверждая, что такая запись наиболее удобна. Одновременно он решает вопрос, сколько корней имеет такое уравнение. Декарт сформулировал теорему о том, что любое алгебраическое уравнение n -й степени имеет n корней, учитывая положительные («истинные»), отрицательные («ложные») и комплексные («воображаемые»). Он выясняет вопрос о числе положительных и отрицательных корней уравнений в зависимости от знаков коэффициентов и предлагает геометрический метод решения уравнений третьей и четвертой степеней. Корни этих уравнений на-

ходятся как абсциссы точек пересечения двух соответствующих линий второго порядка (окружности и параболы).

Декарт утверждал, что степень уравнения, имеющего корень a , можно понизить на единицу, разделив его на двучлен $x - a$, а в случае нескольких корней — на соответствующее число единиц тем же способом. Справедливо и обратное утверждение: если такое деление невозможно, то a не является корнем уравнения.

Алгебраическая символика, введенная Декартом, сыграла особую роль в дальнейшем развитии математики. Эта символика избавляла алгебру от неудобного принципа однородности. Символика Декарта отличается от современной отсутствием дробных и отрицательных показателей. Эти показатели были введены позднее Ньютоном.

В заключение отметим, что «Геометрия» Декарта имела основополагающее значение для развития как геометрии, так и алгебры.

ЛИТЕРАТУРА

- Белл Э. Т.* Творцы математики.— М.: Просвещение, 1979.— 254 с.
- Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики.— Киев: Радянська шк., 1979.— 608 с.
- Декарт Р.* Геометрия.— М.—Л.: Гостехиздат, 1938.— 296 с.
- Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1971.— 232 с.
- История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1970, т. 1.— 352 с.; 1970, т. 2. — 300 с.; 1972, т. 3. — 496 с.
- Кованцов Н. И.* Математика и романтика.— 2-е изд.— Киев: Вища шк., 1980.— 134 с.
- Матвиевская Г. П.* Рене Декарт.— М.: Наука, 1976.— 272 с.
- Математика, ее содержание, методы и значение.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 1.— 296 с.; 1956, т. 2.— 392 с.
- Никифоровский В. А., Фрейман Л. С.* Рождение новой математики.— М.: Наука, 1976.— 198 с.
- Понтрягин Л. С.* Метод координат.— М.: Наука, 1977.— 136 с.
- Рыбников К. А.* История математики.— 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1974.— 456 с.
- Савелов А. А.* Плоские кривые.— М.: Физматгиз, 1960.— 294 с.
- Тышкевич Р. И., Феденко А. С.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия.— 2-е изд.— Минск: Выш. шк., 1976.— 544 с.

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Вместо введения	5
Уравнение линии на плоскости	7
Прямоугольные декартовы координаты на плоскости . .	7
Полярные координаты на плоскости	9
Уравнение линии в декартовых прямоугольных координатах	11
Прямая линия на плоскости	15
Пересечение линий	18
Уравнение линии в полярных координатах	19
Параметрические уравнения линии	21
Линии второго порядка	25
Окружность	26
Преобразования декартовых прямоугольных координат	27
Конические сечения	29
Уравнения конических сечений в полярных координатах	31
Уравнения конических сечений в декартовых координатах	32
Исследование формы конических сечений	34
Фокальные свойства конических сечений	39
Уравнения эллипса, гиперболы, параболы, отнесенных к вершине	43
Замечательные линии третьего порядка	46
Декартов лист	46
Циссоида	53

Строфоида	59
Версьера	62
Замечательные линии четвертого и высших порядков	65
Лемниската Бернулли	65
Овалы Кассини	71
Конхоида	75
Улитка Паскаля	81
Кардиоида	86
Циклоидальные кривые	88
Каппа	97
Розы	100
Астроида	104
Некоторые трансцендентные линии	107
Спираль Архимеда	107
Циклоида	113
Алгебраические спирали	120
Логарифмическая спираль	125
Квадратриса	133
Трактриса	140
Цепная линия	147
Поверхности и линии в пространстве	157
Декартовы прямоугольные координаты в пространстве	157
Расстояние между двумя точками в пространстве	160
Уравнение поверхности. Уравнения линии в пространстве	161
Параметрические уравнения линии в пространстве. Параметрические уравнения поверхности	163
Плоскость в пространстве	166
Прямая в пространстве	167
Уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной координатной оси. Цилиндры второго порядка	169
Уравнение поверхности вращения	172
Поверхности вращения второго порядка	173
Поверхности второго порядка и их канонические уравнения	178
Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка	184

Некоторые замечательные поверхности	187
Двусторонние и односторонние поверхности	194
Из истории развития учения о линиях и поверхностях	197
Теория конических сечений в древности	198
Линии первого и второго порядка в трудах Ферма	206
Аналитическая геометрия Декарта	210
Литература	217

*Алексей Адамович Гусак,
Галина Максимовна Гусак*

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *Н. М. Латышева*
Младший редактор *М. С. Молчанова*
Обложка *С. М. Пчелинцева*
Худож. редактор *Ю. С. Сергачев*
Техн. редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Т. К. Хваль*

ИБ № 1918

Сдано в набор 11.04 84. Подписано в печать 1.02.85.
АТ 06012. Формат 70×108¹/₃₂. Бумага тип. № 1. Гар-
нитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л.
9,8. Усл. кр.-отт. 10,06. Уч.-изд. л. 9,56. Тираж
11 500 экз. Зак. 294. Цена 40 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государствен-
ного комитета БССР по делам издательств, по-
лиграфии и книжной торговли. 220048, Минск,
проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005,
Минск, ул. Красная, 23.

Г 96 **Гусак А. А., Гусак Г. М.**
 Линии и поверхности.— Мн.: Выш. шк., 1985.—
 220 с., ил.
 40 к.

Рассказывается о линиях и поверхностях, замечательных по своим свойствам и применениям. Рассматриваются уравнения линий второго порядка, многих других алгебраических и трансцендентных линий, уравнения некоторых поверхностей, приводятся иллюстрации. Сообщаются краткие сведения об ученых, изучавших свойства этих линий.

Книга предназначена для всех, интересующихся математикой и ее приложениями.

Г 1702030000—026 116 -85
М 304(05) — 85

ББК 22.143

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

В 1985 г.

**в издательстве «Высшая школа»
выйдет в свет следующая
научно-популярная книга:**

**С. А. Фролов, М. В. Покров-
ская я. В поисках начала. Рассказы о на-
чертательной геометрии.**

*Прослеживается история зарождения
методов и приемов изображения окружа-
ющих человека предметов и развития этих
методов вплоть до оформления начертатель-
ной геометрии как строгой дисциплины.
Книга открывает цикл рассказов, посвящен-
ных проблемам начертательной геометрии.
Для широкого круга читателей.*

40 к.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»