

МР И знаний

А.В.СИЛИН Н.А.ШМАКОВА

Открываем неевклидову геометрию



А. В. СИЛИН Н. А. ШМАКОВА

Открываем неевклидову геометрию

*Книга для внеклассного чтения
учащихся 9—10 классов
средней школы*

ББК 22.151.2
С36

Рецензенты:

старший учитель математики школы № 29 Москвы с преподаванием ряда предметов на английском языке *С. М. Саврасова*;
кандидат педагогических наук, доцент МГПИ им. В. И. Ленина
В. А. Гусев

Силин А. В., Шмакова Н. А.

С36 Открываем неевклидову геометрию. Кн. для вне-
клас. чтения учащихся 9—10 кл. сред. шк. — М.:
Просвещение, 1988.—126 с.: ил. — (Мир знаний).
ISBN 5-09-000597-4

Книга адресована школьникам старших классов, интересующимся математикой. В ней популярно и интересно изложены некоторые вопросы, связанные с основаниями геометрии, элементами геометрии Лобачевского. Все изложение полностью опирается на школьные программы по математике. Этих знаний вполне достаточно для того, чтобы хорошо ориентироваться в тексте и без труда читать книгу. Исторические экскурсы оживляют текст, помогают лучше понять развитие математики.

С $\frac{4306020000-785}{103(03)-88}$ 247—88

ББК 22.151.2

ISBN 5-09-000597-4

© Издательство «Просвещение», 1988

Слово к юному читателю

Обычно учащиеся, читая книги, склонны пропускать предисловия. Однако следует сразу же заметить, что данная книга по своей структуре несколько необычна. Основная особенность книги состоит в том, что большая часть ее изложена не в традиционной форме, а в виде программированного учебника. Для того чтобы успешно прочесть и понять эту книгу, необходимо усвоить следующее. Программированный учебник предназначен для самостоятельного изучения материала. При этом его структура позволяет оказывать читателю некоторую помощь. Работа над книгой может принести пользу лишь в том случае, если строго следовать всем указаниям, встречающимся в тексте.

На страницах книги читателю часто будут предлагаться вопросы, сопровождаемые несколькими готовыми ответами, из которых только один является правильным. Обдумав вопрос, необходимо выбрать тот ответ, который представляется правильным, а затем обратиться к соответствующему указанию (все указания пронумерованы и расположены в конце книги). Если ответ окажется неверным, то в соответствующем указании будет разъяснена причина допущенной ошибки.

В программированном учебном пособии можно преждевременно подсмотреть верный ответ. Поступая таким образом, читатель будет, естественно, быстро продвигаться вперед. Однако такое безостановочное и бездумное чтение — это потеря времени: рано или поздно все равно придется еще раз приступить к более вдумчивому изучению ранее просмотренного текста. Самостоятельное же преодоление трудностей несомненно доставит творческое удовлетворение.

Весьма существенно отметить следующее: поскольку речь идет о самостоятельном чтении математической книги, то целесообразно завести специальную тетрадь, в которой в соответствии с указаниями надо будет записывать некоторые формулировки, выполнять чертежи, а иногда и решать задачи.

Обычно книги для дополнительного чтения по математике адресованы хорошо подготовленным учащимся. Иногда авторы даже предупреждают юных читателей, что изучение книги будет делом нелегким, потому что легких книг по математике не бывает. Однако в книге, которая представляется на суд читателей, эти неписанные каноны в известной мере нарушены: авторы считают, что она доступна всем успевающим учащимся IX и X классов, а также отдельным учащимся VIII классов. Хотя нельзя отрицать, что от читателей потребуются некоторое упорство, а главное — собранность, неукоснительное выполнение приведенных выше требований к работе над книгой.

У читающего эти строки, наверное, возник вопрос: чему же все-таки посвящена книга, что нового можно в ней узнать? На этот вопрос в самом общем виде можно ответить так: книга посвящена одному из самых удивительных и грандиозных открытий в истории математики — открытию великим русским ученым Н. И. Лобачевским так называемой неевклидовой геометрии. Создание неевклидовой геометрии не только способствовало открытию новых горизонтов в математике, но и внесло огромный вклад в развитие современного учения о пространстве.

Итак, юный читатель, желаем тебе успешного путешествия по страницам этой книги, самостоятельного открытия неевклидовой геометрии.

АКСИОМЫ — ЭТО СЕРЬЕЗНО

§ 1. Геометрия возникла в глубокой древности — несколько тысячелетий до нашей эры. Самые древние памятники культуры (египетские папирусы, вавилонские глиняные дощечки с клинописными записями) говорят нам о том, что уже 4—5 тысяч лет назад люди знали многие геометрические факты, изучаемые в настоящее время в школе.

Современная геометрия — это одна из основных областей математики. Она изучает пространственные отношения и формы тел, а также некоторые другие отношения и формы действительности. В процессе длительного развития геометрии как науки из нее выделились самостоятельные ветви: дифференциальная геометрия, топология, интегральная геометрия, многомерная геометрия и др.

Если на строго научной основе изложить школьную геометрию, то она представила бы собой логически связанную цепь доказательств различных утверждений (предложений), отражающих свойства реального мира.

Доказательства отдельных утверждений опираются на ранее установленные и сформулированные факты. Все эти отдельные утверждения можно пронумеровать. Тогда становится очевидным следующее: доказывая, например, предложения № 10, мы опираемся или на предложение № 9, или на предложение № 8, или, возможно, на несколько предшествующих утверждений.

Возникает в о п р о с. Можно ли доказать предложение № 1?

О т в е т ы.

А. Да, можно (см. указание 1¹).

Б. Нет, нельзя (см. указание 2).

В. Не знаю (см. указание 3).

§ 2. Если нельзя доказать предложение № 1 (в действительности оказывается, что нельзя доказать целый ряд предложений), то вполне естественно принять некоторые предложения без доказательства. Во всяком случае другого выхода нет, мы вынуждены это сделать.

Предложения, принимаемые без доказательства, называются *аксиомами*.

Предложения, получаемые из аксиом или других ранее доказанных утверждений путем логических умозаключений, называются *теоремами*.

С аксиомами вы уже встречались в курсе геометрии VI класса (см., например, учебное пособие по геометрии А. В. Погорелова).

Напомним эти аксиомы.

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой точкой.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180° . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

7. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

8. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180° , и только один.

9. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

¹ Здесь и далее даются ссылки на указания, помещенные в разделе «Указания», расположенном в конце книги.

10. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

На основе этих десяти аксиом и строится курс планиметрии. В учебном пособии А. В. Погорелова в разделе IX класса дополнительно вводятся три аксиомы, выражающие основные свойства плоскостей в пространстве.

В о п р о с. Если аксиома представляет собой предложение, принимаемое без доказательства, то, по всей видимости, в качестве аксиомы можно принять любое произвольно выбранное предложение. Согласны ли вы с этим?

О т в е т ы.

А. Да, согласен (см. указание 4).

Б. Нет, не согласен (см. указание 5).

В. Не знаю (см. указание 6).

§ 3. Рассмотрим теперь такое предложение: «Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром».

В о п р о с. Куда следует отнести это предложение — к числу аксиом или к числу теорем?

О т в е т ы.

А. Это предложение теорема (см. указание 7).

Б. Это предложение следует отнести к числу аксиом, так как доказательства этого предложения не существует (см. указание 8).

В. Это предложение не относится ни к числу аксиом, ни к числу теорем (см. указание 9).

Г. Не знаю (см. указание 10).

§ 4. Предложение, устанавливающее смысл нового термина исходя из понятий известных, называется *определением*.

Таким образом, предложение о диаметре и хорде, встретившееся в § 3, является определением.

Приведем пример другого определения. Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

В о п р о с. Можно ли определить все понятия, которыми мы пользуемся в геометрии?

О т в е т ы.

А. Да, можно (см. указание 11).

Б. Нет, нельзя (см. указание 12).

В. Не знаю (см. указание 13).

§ 5. Те понятия, которые при построении геометрии (или какого-либо другого раздела математики) не опре-

деляются, называются *основными* или *первоначальными* понятиями.

Помимо основных неопределяемых понятий, существенную роль играют также и *отношения* между ними, которые обозначаются словами «лежат» («принадлежат»), «между», «равны». Эти отношения называются *основными*.

В о п р о с. Какие понятия в геометрии являются, по вашему мнению, основными, т. е. неопределяемыми?

О т в е т ы.

А. Не знаю (см. указание 14).

Б. Основными понятиями являются точка, прямая и плоскость (см. указание 15).

В. Основными понятиями являются точка, прямая, плоскость, расстояние (см. указание 16).

Г. Таких понятий в геометрии нет (см. указание 17).

§ 6. Строго научному построению любой математической дисциплины, в частности геометрии, предъявляются следующие требования:

1) всякое утверждение должно быть либо помещено в число аксиом, либо строго доказано на основе аксиом или ранее сформулированных и доказанных теорем;

2) всякое понятие должно быть либо помещено в число основных, либо определено с помощью основных или ранее определенных понятий.

Метод изложения науки на основе этих требований называется *дедуктивным* или *аксиоматическим*.



Евклид

§ 7. Великий древнегреческий математик Евклид, живший в III в. до н. э., в своих знаменитых «Началах» приводит такое определение: «Точка есть то, что не имеет частей».

В о п р о с. Можно ли принять такое определение понятия точки?

О т в е т ы.

А. Да, конечно, ведь точка действительно не имеет частей (см. указание 18).

Б. Нет, так как точка — понятие основное, неопределяемое (см. указание 19).

В. Не знаю (см. указание 20).

§ 8. Внимательное изучение «Начал» Евклида привело ученых к выводу, что в «Началах» имеются и другие недостатки. В частности, число аксиом, сформулированных Евклидом, является недостаточным для строгого изложения геометрии. Поэтому Евклид был вынужден при изложении некоторых доказательств опираться на непосредственную очевидность, наглядность, нарушая тем самым логическую строгость. Однако следует иметь в виду, что отдельные недостатки «Начал» нисколько не умаляют заслуг Евклида. «Начала» представляют собой одно из величайших творений античной литературы.

§ 9. Историческая задача, связанная со строгим, аксиоматическим обоснованием геометрии, была впервые поставлена на рубеже XIX и XX столетий. При этом, как часто бывало в науке, решение проблемы было предложено независимо друг от друга рядом ученых, из числа которых следует особо выделить немецкого математика профессора Геттингенского университета Давида Гильберта (1862—1943) и советского математика профессора Московского университета Вениамина Федоровича Кагана (1869—1953).

Рассмотрим теперь более подробно систему аксиом Гильберта. Разобранный им список аксиом состоит из 5 групп, охватывающих 20 аксиом. Гильберт писал в 1899 г.: «Геометрия, так же как и арифметика, требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений — это задача, которая со времен Евклида явилась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы. Задача эта сводится к логическому анализу нашего пространственного представления.



Давид Гильберт

Настоящее исследование представляет собой новую попытку установить для геометрии полную и возможно более простую систему аксиом и вывести из этих аксиом важнейшие геометрические теоремы...» (Гильберт Д. Основания геометрии. — М.; Л., 1948).

Приведем в качестве примера аксиомы I группы (при этом следует иметь в виду, что в системе аксиом Гильберта основными понятиями являются точка, прямая и плоскость).

1. *Каковы бы ни были две точки A и B , существует прямая, проходящая через каждую из точек A и B .*

2. *Каковы бы ни были две различные точки A и B , существует не более одной прямой, которая проходит через каждую из точек A и B .*

3. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Последняя аксиома выглядит несколько необычной. Ведь мы привыкли считать очевидным, что на всякой прямой имеется бесконечное множество точек. Однако предложение «Прямая состоит из бесконечного множества точек» в системе Гильберта строго доказывается. Для этого, кстати, необходимы уже аксиомы II группы. А для того чтобы доказать, что прямая полностью «заполнена» точками (каждому действительному числу соответствует точка на прямой, и наоборот), необходимы еще и аксиомы IV группы.

4. *Каковы бы ни были три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, существует плоскость α , проходящая через каждую из трех точек A , B , C . На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка (!).*

5. *Каковы бы ни были три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, которая проходит через каждую из трех точек A , B , C .*

6. *Если две точки A и B прямой a лежат на плоскости α , то каждая точка прямой a лежит на плоскости α .*

7. *Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B .*

8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Если рассматривать I группу аксиом как самостоятельную геометрическую систему, то легко видеть, что она очень бедна объектами. Так, например, четвертая

аксиома гарантирует нам существование хотя бы одной точки. Опираясь на аксиомы I группы, можно доказать, что на каждой плоскости существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

§ 10. Прежде чем двигаться дальше, попытаемся усвоить одно фундаментальное понятие, широко используемое в различных областях знаний. Речь идет о понятии модели. Это понятие основывается на сходстве двух объектов произвольной природы. При этом слово «сходство» понимается в самом широком смысле. Если такое сходство, чисто внешнее или в области внутренней структуры объектов, имеет место, то мы говорим, что объекты связаны отношением оригинала и модели. Когда речь идет о сходстве во внутренней структуре оригинала и модели, то внешне они могут быть совершенно не похожи.

В некоторых случаях, например, целесообразно в соответствующем масштабе «изобразить» молекулу, т. е. нарисовать ее на бумаге, изготовить ее произвольный каркас и т. д. Модель молекулы показывает взаимное расположение атомных ядер и характеризует движущиеся около этих ядер электроны. Модель молекулы позволяет предсказать ряд явлений, не производя химических или физических опытов.

Моделирование широко применяется на производстве. Производственная модель обычно представляет собой математическое описание взаимосвязей процесса производства, позволяющее не только изучать закономерности, но и делать прогнозы на будущее.

Возникает естественный вопрос: используется ли построение моделей в геометрии? Оказывается, моделирование играет огромную роль как в геометрии, так и в математике вообще.

Точка, прямая и плоскость являются в системе Гильберта, как мы уже знаем, основными понятиями и, следовательно, не определяются. Точка, прямая, плоскость — это понятия абстрактные, отвлеченные. В одном случае мы можем понимать под прямой натянутую нить, в другом — луч света, а в третьем прямой может являться карниз здания. Но, применяя логический аппарат геометрии, мы всякий раз отвлекаемся от конкретной природы используемых понятий.

Таким образом, поскольку основные понятия абстрактны, можно вкладывать в них различное конкретное

содержание. Возникает мысль: не могут ли основные понятия (в системе Гильберта), т. е. точка, прямая, плоскость, быть объектами совершенно другой природы, отличной от привычной «практической» точки зрения? Это чрезвычайно важная идея, и надо попытаться хорошо уяснить ее себе на ряде конкретных примеров.

Условимся понимать под точкой грань (!) треугольной пирамиды, под прямой — ребро пирамиды, а под плоскостью — вершину пирамиды (!). На первый взгляд все это представляется крайне необычным и может даже показаться, что такой подход к основным понятиям — пустая игра слов.

Однако в действительности этот путь приведет нас к очень интересным результатам.

Первая аксиома I группы аксиом Гильберта, как мы уже видели, читается так: «Каковы бы ни были две точки A и B , существует прямая, проходящая через каждую из точек A и B ».

Попробуем заменить в этой формулировке слово «точка» словами «грань пирамиды», слово «прямая» словами «ребро пирамиды».

Тогда аксиома будет читаться совершенно по-другому.

Запишите новую формулировку первой аксиомы, а затем проверьте себя по указанию 21.

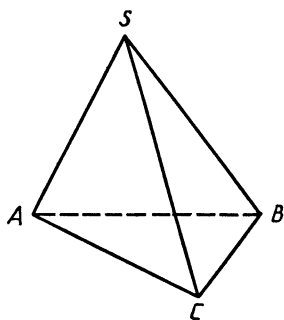


Рис. 1

§ 11. Посмотрите теперь на рисунок 1 и попытайтесь ответить на следующий вопрос:

Вопрос. Верно ли вновь сформулированное предложение?

Ответы.

А. Да (см. указание 22).

Б. Нет (см. указание 23).

В. Не знаю (см. указание 24).

§ 12. Попробуйте записать новую формулировку второй аксиомы I группы, заменив слово «точка» словами «грань пирамиды», а слово «прямая» словами «ребро пирамиды». Проверьте по рисунку 1, справедливо ли новое предложение, а затем см. указание 25.

§ 13. Запишите новую формулировку третьей аксиомы I группы, проверьте по рисунку 1, истинно ли полученное предложение, а затем см. указание 26.

§ 14. Всего в I группе аксиом Гильберта содержится 8 аксиом. Теперь возьмите, например, восьмую аксиому и запишите в тетради ее новую формулировку, заменив слово «точка» словом «грань», а слово «плоскость» словом «вершина». Проверьте после этого по рисунку 1, справедливо ли полученное предложение, а затем см. указание 27.

§ 15. Вкладывая в основные понятия обусловленное нами содержание, можно убедиться, что и остальные аксиомы I группы приводят нас к истинным предложениям (желательно это сделать).

При помощи треугольной пирамиды возможно, таким образом, получить реальное (конкретное) воплощение системы аксиом I группы. В таких случаях принято говорить, что нами построена модель системы аксиом.

Все сказанное выше не означает, что в выборе конкретного содержания, вкладываемого в основные понятия, допускается полнейший произвол. Действительно, если бы мы, например, условились считать точкой вершину треугольной пирамиды, прямой ее грань, а плоскостью ее ребро, то попытка построить модель I группы системы аксиом Гильберта не увенчалась бы успехом.

В о п р о с. Сформулируйте седьмую аксиому I группы, заменив в ней слово «точка» словом «вершина», слово «прямая» словом «грань», слово «плоскость» словом «ребро». Проверьте, справедливо ли полученное предложение, а затем. см. указание 28.

§ 16. Основное требование, которое предъявляется к системе аксиом, состоит в том, что она должна быть *непротиворечивой*. Это требование означает следующее: во-первых, система аксиом не должна содержать двух каких-либо взаимно исключающих друг друга предложений (например, таких: «Для любых двух различных точек существует одна и только одна содержащая их прямая» и «Для любых двух различных точек существует по меньшей мере одна содержащая их прямая»); во-вторых, мы должны быть уверены в том, что, как бы далеко ни развивали следствия из нашей системы аксиом, мы никогда не приходим к двум противоречащим друг другу предложениям. Убедиться в выполнении первого условия весьма просто, так как система аксиом состоит из конечного числа предложений. Что касается второго условия, то здесь дело обстоит сложнее. Ведь число теорем, которые могут быть выведены из данной системы аксиом, являет-

ся неограниченным (если, конечно, в системе аксиом содержится достаточное число предложений).

Итак, возникает вопрос: как можно проверить непротиворечивость системы аксиом?

§ 17. Для того чтобы убедиться в непротиворечивости системы аксиом, надо, как говорят математики, построить модель этой системы. В § 10 мы вложили в основные понятия определенное конкретное содержание («точка» — грань пирамиды, «прямая» — ребро пирамиды, «плоскость» — вершина пирамиды) и сумели построить модель I группы аксиом (мы проверили лишь четыре аксиомы I группы, но можно было бы убедиться, что и другие предложения, получаемые из аксиом I группы, также справедливы). Это означает, что рассматриваемые аксиомы логически «правильно» взаимодействуют друг с другом, и, таким образом, следствия из нашей системы аксиом не могут содержать противоречащих друг другу предложений.

Итак, запомним чрезвычайно важный вывод: доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной модели, в которой реализуется данная аксиоматика.

При этом важно иметь в виду следующее: если при определенном выборе конкретного содержания для основных понятий не удастся построить модель данной системы аксиом, то это еще не означает, что рассматриваемая система аксиом содержит логические противоречия. Может оказаться, что система аксиом допускает построение какой-то другой модели.

Для того чтобы окончательно разобраться в вопросе о методе доказательства непротиворечивости данной системы аксиом, рассмотрим ряд моделей. При этом целесообразно выбрать очень простую и бедную объектами аксиоматику. Итак, наша система аксиом будет состоять из следующих предложений:

A₁. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.

A₂. Существует единственная прямая, проходящая через две различные точки.

A₃. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

A₄. Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой (аксиома параллельности).

Пусть модель состоит из четырех объектов S_1, S_2, S_3, S_4 , которые будем называть точками, и шести объектов $s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{23}, s_{24}, s_{34}$, которые будем называть прямыми.

Условимся считать, что точка S_k принадлежит прямой s_{ij} , если либо $k=i$, либо $k=j$. Например, точка A_1 принадлежит прямым s_{12}, s_{13}, s_{14} .

В о п р о с. Выполняются ли в нашей модели указанные аксиомы? Подумайте, а затем см. указание 29.

§ 18. В о п р о с. Какой вывод можно сделать из того, что модель системы аксиом $A_1—A_4$ удалось построить? Подумайте, а затем см. указание 30.

§ 19. Рассмотрим теперь такую задачу: «В классе шесть учащихся имеют второй разряд по шахматам. Они решили составить турнир. Сколько всего партий они сыграют, если каждый из них должен сыграть с остальными по одной партии?»

Подумайте, а затем см. указание 31.

§ 20. Пронумеруем учащихся $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$.

Обозначим шахматные партии, которые могут сыграть эти шахматисты, так: $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{45}, a_{46}, a_{56}$ (a_{35} — это партия, которую играют шахматисты N_3 и N_5). Мы уже подсчитали, что всего может быть сыграно 15 партий. Все эти партии мы выписали. Введем следующий интерпретационный «словарь», т. е. соглашение, связывающее объекты и отношения аксиоматики $A_1—A_4$ с объектами модели:

1) точка—учащийся; 2) прямая—шахматная партия; 3) точка принадлежит прямой (например, точка N_k принадлежит прямой a_{ij}) — шахматист N_k играет партию a_{ij} ($k=i$ или $k=j$).

В о п р о с. Выполняются ли аксиомы $A_1—A_4$ в этой модели? Подумайте, а затем см. указание 32.

§ 21. Известно, что математическое моделирование — мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Мы рассмотрели лишь одну сторону моделирования, а именно использование моделей для доказательства непротиворечивости заданной системы аксиом.

Следует заметить, что к аксиоматике предъявляются (помимо непротиворечивости) еще и другие требования: аксиоматика должна быть *независимой* и *полной*. Вопрос о независимости системы аксиом будет рассмотрен позже. Сейчас же познакомимся с понятием полноты аксиоматической системы.

Пусть дана система аксиом **A**. Эта аксиоматика называется полной, если ее нельзя дополнить новыми аксиомами, которые не вытекали бы из аксиом **A** и не противоречили им. Существует критерий, позволяющий проверить свойство полноты данной системы аксиом. Этот критерий мы рассматривать не будем.

ПОЧЕМУ ЗАДУМАЛСЯ ЛАГРАНЖ?

§ 22. Для дальнейшего изложения рассматриваемых вопросов нам понадобится уяснить важное понятие: *эквивалентность* двух каких-либо предложений относительно данной системы аксиом.

Пусть нам дана определенная система аксиом, которую мы обозначим греческой буквой Σ (сигма). Присоединим к этой системе аксиом еще одно предложение, которое обозначим буквой **A**. Получаем новую систему аксиом $\Sigma + \mathbf{A}$. Допустим, что из этой системы аксиом логически вытекает, т. е. может быть доказано, предложение **B**. Присоединим теперь к системе аксиом Σ предложение **B**, т. е. будем считать, что предложение **B** является аксиомой. Мы получаем, таким образом, новую систему аксиом $\Sigma + \mathbf{B}$. Если из этой системы аксиом логически следует предложение **A**, то мы говорим, что предложения **A** и **B** эквивалентны относительно системы аксиом Σ .

Коротко это можно записать так.

Если выполняются два условия 1) $\Sigma + \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и 2) $\Sigma + \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, то предложения **A** и **B** называются эквивалентными относительно системы аксиом Σ .

Важно подчеркнуть следующее: два предложения **A** и **B** могут оказаться эквивалентными при использовании одной системы аксиом и неэквивалентными при использовании другой системы аксиом. Поэтому существенно указать, относительно какой системы аксиом рассматриваемые предложения эквивалентны.

Вопрос. К какому виду утверждений относятся предложения **A** и **B**, о которых говорилось выше, — к числу теорем или к числу аксиом?

О т в е т ы.

A. Эти утверждения относятся к числу теорем, так как каждое из них доказывается (см. указание 33).

B. Утверждение **A** в первом случае (см. выше) является аксиомой, а во втором случае оно является теоре-

мой, утверждение **В** в первом случае — теорема, а во втором — аксиома (см. указание 34).

В. Оба утверждения являются аксиомами (см. указание 35).

Г. Не знаю (см. указание 36).

§ 23. Начиная изучать геометрию, вы встретились с таким предложением:

Через точку вне прямой (в плоскости) можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую (в учебнике VI класса это предложение сформулировано несколько иначе).

В о п р о с. Является ли это предложение аксиомой?

О т в е т ы.

А. По-видимому, это предложение является аксиомой, так как это предложение было дано без доказательства и в дальнейшем нигде не доказывалось (см. указание 37).

Б. Это предложение является теоремой (см. указание 38).

В. Это предложение является аксиомой, так как оно совершенно очевидно (см. указание 39).

Г. Не знаю (см. указание 40).

§ 24. Выполним теперь следующее построение.

Из точки A , расположенной вне данной прямой l , опустим перпендикуляр AB на прямую l . Далее из точки A восставим перпендикуляр AC к прямой AB . Возникает вопрос: пересекает ли прямая AC прямую l (рис. 2)? Допустим, что прямая AC пересекает прямую l в некоторой точке X (рис. 3).

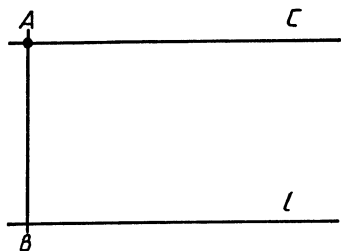


Рис. 2

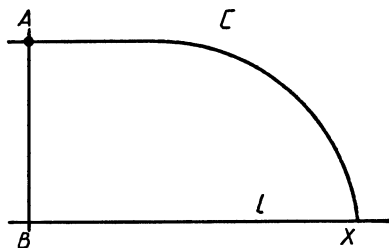


Рис. 3

В о п р о с. Возможно ли это?

О т в е т ы.

А. Мы не можем это опровергнуть, следовательно, это возможно (см. указание 41).

Б. Прямые l и AX не пересекаются: если бы они пересекались, то сумма углов треугольника ABX была бы больше $2d$ (см. указание 42).

В. Прямые l и AX не могут пересекаться, так как это противоречило бы теореме о внешнем угле треугольника (см. указание 43).

Г. Не знаю (см. указание 44).

§ 25. Итак, мы доказали, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой и лежащие в одной плоскости, не пересекаются.

Запишите в тетради формулировку этой теоремы и постарайтесь ее запомнить.

§ 26. В § 23 говорилось о том, что предложение «Через точку вне прямой в плоскости можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую» является аксиомой. Но не противоречит ли это предложение теореме, доказанной выше (см. § 24)? Ведь аксиому доказать нельзя. Подумайте!

О т в е т ы.

А. Не понимаю, почему так получается. По-видимому, в наши рассуждения вкралась ошибка (см. указание 45).

Б. По-видимому, предложение «Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую» не является аксиомой (см. указание 46).

В. В § 23 мы доказали существование непересекающихся прямых, но это не означает, что мы логически обосновали единственность прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую (см. указание 47).

Г. Не знаю (см. указание 48).

§ 27. «Начала» Евклида были составлены по схеме, которую рекомендовал величайший древнегреческий философ и ученый Аристотель (384—322 гг. до н. э.): сначала формулируются определения и аксиомы, затем приводятся теоремы и их доказательства. Именно этой схеме и следовал Евклид. Почти каждая из частей (книг) «Начал» начинается с определений всех терминов, которые в ней встречаются. Правда, как уже отмечалось, многие из этих определений были настолько расплывчатыми, что трудно было ими воспользоваться. Первая книга начинается с перечисления аксиом и постулатов. (Вообще говоря, аксиома и постулат — равнозначные понятия. Но у Евклида под постулатами понимаются

утверждения о возможности определенных геометрических построений.) Далее следуют формулировки теорем с их доказательствами и многочисленными ссылками на постулаты, аксиомы и предыдущие предложения. При этом особенность стиля Евклида состояла в том, что теоремы не связывались между собой какими-либо комментариями и отступлениями. «Начала» — это величественное здание чистой геометрии.

Несмотря на то что первые попытки обосновать геометрию предпринимались задолго до Евклида (одна из таких попыток принадлежала древнегреческому геометру Гиппократу Хиосскому, V в. до н. э.), все они поблекли и были забыты после появления гениального творения Евклида. В течение двух тысячелетий для математиков «Начала» были образцом для подражания, а для прочих — единственным учебником, по которому учились как взрослые, так и дети. «Начала» Евклида в качестве учебника царили вплоть до XVIII в., а в некоторых странах и дольше. Первое печатное издание «Начал» на латинском языке появилось в 1482 г. (напомним читателю, что начало книгопечатания в Европе относится к 40-м гг. XV вв.). Первый перевод «Начал» на русский язык появился в 1739 г.

«Начала» Евклида состоят из 13 книг. Из них I—VI книги посвящены планиметрии, VII—IX — арифметике, X — несоизмеримым величинам¹, XI—XIII — стереометрии.

В первой книге «Начал» приводятся 23 определения, а затем 5 постулатов и 9 аксиом.

Математиков особенно интересовал последний, пятый постулат.

Пятый постулат читается так:

Если две прямые, пересекаясь с третьей прямой, образуют с ней внутренние односторонние углы α и β , сумма которых меньше $2d$ (т. е. двух прямых углов), то они пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше $2d$.

Если $\alpha + \beta < 2d$, то a и b пересекаются (рис. 4).

Чем же объяснить, что в течение многих веков (вплоть до XIX в.) математики многих стран испытывали не-

¹ Несоизмеримыми величинами называются величины, не имеющие общей меры. Так, например, для отрезков длиной 3 и $\sqrt{2}$ см не существует общей меры, т. е. отрезка, который укладывался бы в обоих данных отрезках целое число раз.

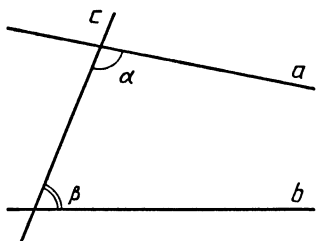


Рис. 4

обыкновенную тягу к евклидову постулату, а некоторые из них сохранили интерес к проблеме постулата в течение всей своей жизни?

Прежде всего отметим, что в системе Евклида надобность в использовании пятого постулата появляется довольно поздно. Большая часть «Начал»

вообще не зависит от пятого постулата. Таким образом, великое творение Евклида условно можно разделить на две части. К первой части относятся предложения, в доказательствах которых совершенно не используется пятый постулат. Затем, наконец, появляется тяжеловесный постулат. Все последующие предложения опираются на него. Таким образом, создается впечатление, что «Начала» вообще можно построить без использования злополучного постулата. А отсюда остается один шаг до соблазна, т. е. до попытки его доказать.

В настоящее время под аксиомами понимаются, как известно, предложения, которые принимаются без доказательства, потому что для их доказательства нет исходного материала. Во времена же Евклида, а затем и до конца XIX в. считали, что аксиомы—это предложения, не требующие доказательства в силу их очевидности. Что же касается пятого постулата, то легко видеть, что утверждение, содержащееся в нем, далеко не столь очевидно. Отсюда у математиков появилось стремление во что бы то ни стало доказать пятый постулат. Так возникла знаменитая проблема пятого постулата.

Постарайтесь запомнить формулировку пятого постулата.

Запишите в тетрадах:

1) формулировку аксиомы из § 23 (это предложение называется *аксиомой параллельности* или *предложением Плейфера* — по имени английского математика XVIII в.);

2) формулировку пятого постулата Евклида.

§ 28. Предложение Плейфера и пятый постулат Евклида являются эквивалентными предложениями.

В о п р о с. Что означает это утверждение? Составьте ответ и проверьте правильность его по указанию 49.

§ 29. Прежде чем доказывать эквивалентность пятого

постулата Евклида и предложения Плейфера, ответьте на следующий вопрос:

В о п р о с. Сколько самостоятельных предложений нужно доказать (одно или два), чтобы установить эквивалентность пятого постулата Евклида и предложения Плейфера?

О т в е т ы.

А. Одно предложение (см. указание 50).

Б. Два предложения (см. указание 51).

В. Не знаю (см. указание 52).

§ 30. Обратите теперь внимание на то, что в следующих параграфах материал расположен иначе. Закройте листком бумаги правую часть страницы и читайте ее левую часть. Обращаться к правой части страницы можно лишь после специальной команды в виде стрелки, направленной вправо (\rightarrow). Стрелка, направленная влево (\leftarrow) и расположенная в правой части страницы, означает команду: «Переходите к чтению текста в левой части страницы».

§ 31. Итак, нам нужно доказать две теоремы.

1. Т е о р е м а 1.

Д а н о: $\Sigma + \text{предложение Плейфера}$ (Σ означает совокупность всех предложений геометрии Евклида, кроме аксиомы параллельности).

Д о к а з а т ь \rightarrow

2. Пусть даны прямая a и точка A , не лежащая на этой прямой (рис. 5).

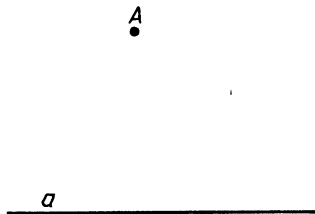


Рис. 5

Можно ли построить прямую, проходящую через точку A и не пересекающую прямую a ? \rightarrow

пятый постулат Евклида. \leftarrow

Да, можно. \leftarrow

3. Как это сделать? →

4. Выполните в тетради рисунок 6.

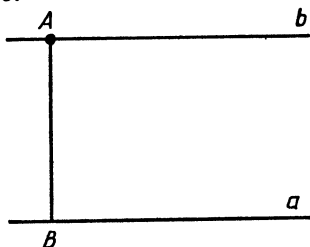


Рис. 6

Можно ли построить еще одну прямую, проходящую через точку A и не пересекающую прямую a ?

О т в е т ы.

А. Да, можно →

Б. Нет, нельзя →

В. Не знаю →

5. Проведем через точку A прямую c под острым углом α к прямой AB (рис. 7). Выполните рисунок.

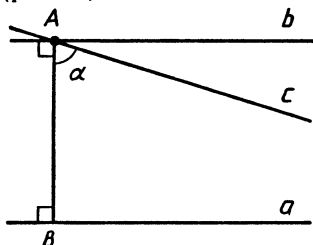


Рис. 7

Прямая c пересекает прямую a , так как →

Для этого надо из точки A опустить перпендикуляр AB на прямую a и из точки A восставить перпендикуляр к прямой AB . ←

см. указание 53.
см. указание 54.
см. указание 55.

согласно предложению Плейфера, которое нами включено в

6. С какой стороны от прямой AB прямая AC пересекает прямую a ? \rightarrow

7. Тем самым мы доказали пятый постулат Евклида.

8. Теорема 2.

Дано: Σ + **пятый постулат Евклида.**

Доказать \rightarrow

Построим прямую b , проходящую через точку A и не пересекающую прямую a (рис. 8). (Это построение нами уже выполнялось при доказательстве теоремы 1.)

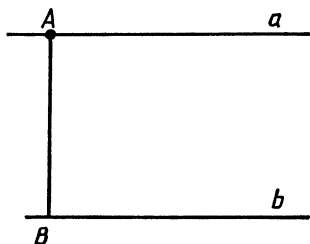


Рис. 8

9. Итак, прямая b не пересекает прямую a . Нужно доказать, что \rightarrow

систему аксиом, через точку A проходит единственная прямая, не пересекающая прямую a (прямая b). \leftarrow

Прямая c пересекает прямую a с той стороны от прямой AB , с которой $\alpha + \beta < 2d$. \leftarrow

предложение Плейфера. \leftarrow

эта прямая единственная, т. е. любая другая прямая, отличная от прямой b и проходящая через точку A , пересекает прямую a . \leftarrow

10. Проведем через точку A произвольную прямую c под углом $\alpha < d$ к прямой AB (рис. 9).

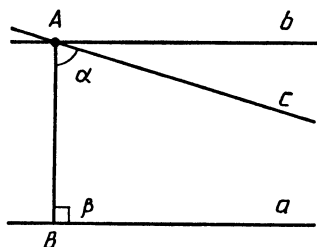


Рис. 9

11. Из сделанного построения следует, что $\alpha + \beta \rightarrow$

12. Значит, прямая c пересекает прямую a . Почему? \rightarrow

13. Таким образом, любая прямая, отличная от прямой b , пересекает прямую a . Следовательно, существует единственная прямая b , не пересекающая прямую a . Тем самым предложение Плейфера доказано.

$< 2d. \leftarrow$

Это следует из пятого постулата Евклида, который мы приняли в качестве аксиомы. \leftarrow

§ 32. В предыдущем параграфе мы установили эквивалентность пятого постулата Евклида и предложения Плейфера. Можно сформулировать и ряд других предложений, эквивалентных пятому постулату Евклида. Среди них можно указать, в частности, и такое: «Сумма углов всякого треугольника равна двум прямым углам». Докажем эквивалентность пятого постулата и предложения о сумме углов треугольника. В дальнейшем этот факт неоднократно будет использоваться.

Т е о р е м а 1. Если сумма углов произвольного треугольника равна $2d$, то имеет место пятый постулат Евклида.

1. Рассмотрим рисунок 10. Прямая a перпендикулярна прямой AB .

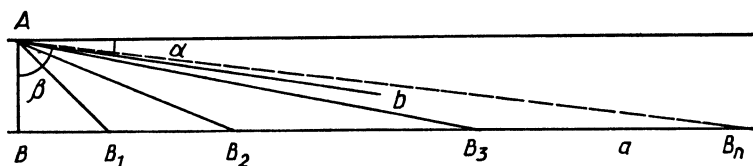


Рис. 10

Нужно доказать, что прямая b , образуя острый угол β с прямой AB , \rightarrow

2. Отложим на прямой a n отрезков: $BB_1=AB$, $B_1B_2=AB_1$, $B_2B_3=AB_2$, ..., $B_{n-1}B_n=AB_{n-1}$.

3. Рассмотрим треугольники ABV_1 , AB_1V_2 , ..., $AB_{n-1}V_n$. По условию сумма углов каждого из них равна \rightarrow

4. Чему равны величины острых углов треугольника ABV_1 ? \rightarrow

5. Чему равны величины острых углов треугольника AB_1V_2 ? \rightarrow

6. Чему равны величины острых углов треугольника AB_2V_3 ? \rightarrow

7. Рассуждая дальше таким же образом, получим в итоге, что величина угла AB_nV равна \rightarrow

8. Чему равна величина угла BAV_n ? \rightarrow

9. Подумайте теперь, как завершить доказательство. \rightarrow

пересекает прямую a с той стороны, с которой сумма углов α и β меньше $2d$. \leftarrow

$2d$. \leftarrow

45° или $\frac{\pi}{4}$, так как треугольник ABV_1 прямоугольный и равнобедренный. \leftarrow

$\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3}$ (прочитайте указание 56).

$\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{2^4}$ (см. указание 57). \leftarrow

$\frac{\pi}{2^{n+1}}$ \leftarrow

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$ \leftarrow

См. указание 58.

10. Теорема 2. Если имеет место пятый постулат Евклида, то сумма углов треугольника равна $2d$.

Посмотрите доказательство этой теоремы в учебнике геометрии для VI класса. В процессе доказательства теоремы используется не пятый постулат Евклида, а его эквивалент-аксиома параллельности.

§ 33. Как это ни странно на первый взгляд, знаменитая теорема Пифагора также является эквивалентом пятого постулата Евклида. И мы сейчас это докажем. Правда, сделаем это окольным путем: докажем эквивалентность теоремы Пифагора предложению «Сумма углов всякого треугольника равна $2d$ ». Последнее предложение, как мы только что отметили, эквивалентно пятому постулату Евклида; отсюда следует, что теорема Пифагора тоже эквивалентна пятому постулату Евклида. (Мы опираемся здесь на свойство транзитивности отношения эквивалентности: если предложение **A** эквивалентно предложению **B**, а предложение **B** эквивалентно предложению **C**, то предложение **A** эквивалентно предложению **C**. Правомомерность использования свойства транзитивности отношения эквивалентности может быть строго обоснована).

Доказательство теоремы Пифагора вам хорошо известно. При этом доказательство теоремы Пифагора было получено на основе системы аксиом $\Sigma + \text{предложение Плейфера}$. Чтобы завершить доказательство эквивалентности теоремы Пифагора и пятого постулата, нужно показать, что из системы аксиом $\Sigma + \text{предложение Пифагора}$ следует пятый постулат или предложение, ему эквивалентное.

Как уже отмечалось выше, пятый постулат Евклида эквивалентен предложению о сумме углов треугольника. Поэтому покажем, что из системы аксиом $\Sigma + \text{предложение Пифагора}$ можно получить предложение о сумме углов треугольника.

Однако доказательство сформулированной теоремы будет проведено в два этапа. Предварительно докажем справедливость ее для случая равнобедренного прямоугольного треугольника. При этом существенно сделать следующее замечание: теорема «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, высота, опущенная на основание, является также биссектрисой и медианой» не зависит от пятого постулата. Следовательно, эту теорему можно использовать в рассуждениях.

Итак, приступаем к доказательству теоремы.

§ 34. Д а н о: Σ + предложение Пифагора.

Д о к а з а т ь: \rightarrow

1. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, длина которой равна c , и катетами, длины которых равны a (рис. 11): $\angle ACB$ прямой, углы A и B острые.

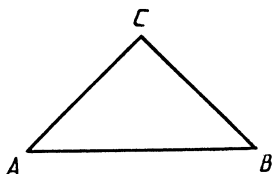


Рис. 11

2. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что $\angle A = \angle B \Rightarrow$

3. Опустим перпендикуляр CD из вершины прямого угла на гипотенузу: $AD = DB = \frac{c}{2}$ (рис. 12).

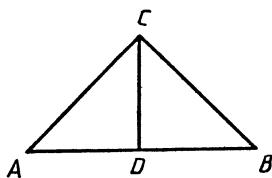


Рис. 12

4. Применяя предложение Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC , находим $c \Rightarrow$

5. Отсюда $AD \Rightarrow$

6. Применяя теперь предложение Пифагора к треугольнику

сумма углов треугольника равна $2d$. \leftarrow

$= 45^\circ$, так как угол C прямой. \leftarrow

$$= \sqrt{AC^2 + CB^2} = \\ = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \leftarrow$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \leftarrow$$

ADC , получим $CD \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{AC^2 - AD^2} = \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \leftarrow \end{aligned}$$

7. Значит, $AD = DC$.

8. Следовательно, $\triangle ADC \rightarrow$

9. Поэтому $\angle A = \angle ACD$.

10. Но $\angle ACD \Rightarrow$

равнобедренный. \leftarrow

11. Поэтому $\angle A = 45^\circ$.

12. Но треугольник ABC равнобедренный. Поэтому \rightarrow

13. Отсюда $\angle A + \angle B + \angle C =$
 \Rightarrow

$= 45^\circ$, так как высота CD — биссектриса прямого угла. \leftarrow

$\angle B = 45^\circ. \leftarrow$

$= 2d. \leftarrow$

Вопрос. Можно ли теперь считать, что теорема доказана? Подумайте, а затем см. указание 59.

§ 35. Как уже отмечалось, многие геометры прошлых веков обратили внимание на сложность формулировки пятого постулата Евклида. У многих из них возникла мысль: не является ли пятый постулат теоремой, нельзя ли его доказать? На протяжении двух тысячелетий многие выдающиеся математики пытались решить эту проблему. Иногда казалось, что они добились успеха, но позднее в их рассуждениях обнаруживались изъяны.

Остановимся подробнее на проблеме пятого постулата, так как этот постулат занимает особенное положение в геометрии. Бесчисленные попытки его доказать в значительной мере способствовали развитию геометрии.

Попытаемся и мы с вами, отдавая дань исторической традиции, доказать пятый постулат Евклида. Естественно, в ходе этого доказательства нельзя опираться на какие-либо предложения, эквивалентные пятому постулату Евклида. Иначе это означало бы, что мы доказываем пятый постулат, прибегая, по существу, к помощи того же пятого постулата.

Так, например, в § 32 пятый постулат доказали, опираясь на теорему о сумме углов треугольника. Это не означает, конечно, что мы решили проблему постулата. Мы только установили эквивалентность пятого постулата и предложения о сумме углов треугольника. Однако, если это

представляется рациональным, можно доказать не пятый постулат непосредственно, а одно из предложений, ему эквивалентных. Так и поступим. Попытаемся доказать предложение, эквивалентное пятому постулату: «Во всяком треугольнике сумма углов равна двум прямым». При изучении геометрии в VI классе вам уже пришлось встретиться с доказательством предложения о сумме углов треугольника. Но в этом доказательстве использовалась аксиома параллельности (предложение Плейфера). Поэтому мы вынуждены пойти другим путем.

§ 36. Теорема. Во всяком треугольнике сумма углов равна $2d$.

1. Пусть нам дан произвольный треугольник ABC . Разобьем его на два треугольника, соединив отрезком вершину с произвольной точкой основания. Обозначим цифрами все получившиеся углы (рис. 13).

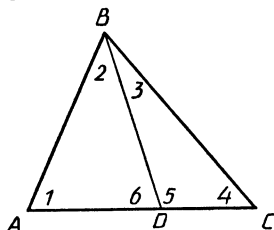


Рис. 13

Пусть x — неизвестная нам пока сумма углов треугольника.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \angle 1 + \angle 2 + \angle 6 &= x, \\ \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 &= x.\end{aligned}$$

2. Складывая почленно эти равенства, получим \rightarrow

$$\begin{aligned}3. \text{ Но } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 &= \rightarrow \\ \text{а сумма } \angle 5 + \angle 6 &= \rightarrow\end{aligned}$$

4. Таким образом, получаем уравнение \rightarrow

5. Откуда \rightarrow

$$\begin{aligned}&\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \\&+ \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \\&= 2x. \leftarrow \\&= x, \leftarrow \\&= 2d, \text{ так как эти} \\&\text{углы смежные.} \leftarrow \\&x + 2d = 2x. \leftarrow \\&x = 2d. \leftarrow\end{aligned}$$

В о п р о с. Какая ошибка была допущена в приведенном «доказательстве»? Подумайте, а затем см. указание 60.

§ 37. Рассмотрим теперь две интересные попытки доказать пятый постулат Евклида. Эти попытки отделяют друг от друга 14 столетий. Первое «доказательство» принадлежит древнегреческому философу идеалисту математику Проклу (ок. 410—485 гг.), второе—венгерскому математику Фаркашу Больяйю (1775—1856).

Доказательство Прокла

1. В процессе доказательства пятого постулата Прокл сделал следующее допущение, считая его очевидным: расстояние от точки, лежащей на одной стороне острого угла, до другой его стороны возрастает при удалении этой точки от вершины угла (рис. 14).

Заметим, кстати, что это предложение может быть доказано без использования пятого постулата или какого-нибудь эквивалентного ему предложения. Для того чтобы придать доказательству Прокла большую строгость, будем считать, что сформулированное выше предложение строго доказано.

Пусть даны две параллельные прямые a и b , а также прямая c , пересекающая прямую a в точке K (рис. 15).

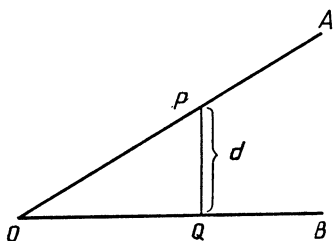


Рис. 14

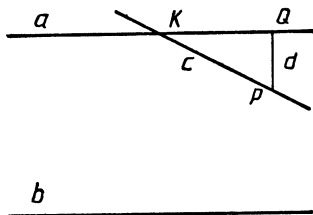


Рис. 15

Тогда по мере удаления точки P от вершины угла PKQ расстояние d безгранично возрастает. Но так как расстояние между параллельными является постоянным, то прямая c обязательно пересекает прямую b .

2. В о п р о с. Какой вывод можно сделать из того, что прямая c пересекает прямую b ? Подумайте, а затем см. указание 61.

3. В о п р о с. Допущена ли в доказательстве логическая ошибка? Подумайте, а затем см. указание 62.

4. Суть проблемы пятого постулата, как известно, состоит в том, чтобы доказать его, не вводя новых аксиом. Математики, пытавшиеся доказать пятый постулат (кстати, всего известно около 250 доказательств), допускали двоякого рода ошибки. Во-первых, они незаметно для себя вводили в ход рассуждений «очевидный» факт, который оказывался эквивалентом пятого постулата. Во-вторых, они сознательно дополняли систему аксиом новым постулатом, который в свою очередь оказывался эквивалентом пятого постулата. Следовательно, в обоих случаях математики попадали в ловушку «порочного круга».

Приведенное ниже доказательство относится ко второму типу доказательств пятого постулата Евклида.

Ф. Больяй дополнил евклидову аксиоматику следующим предложением (постулат Больяйя): «Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда принадлежат некоторой окружности».

5. Итак, пусть имеет место постулат Ф. Больяйя.

Проведем к отрезку AB перпендикуляр BC и наклонную AD (рис. 16).

Вопрос. Можно ли считать, что перпендикуляр и наклонная пересекаются? Подумайте, а затем см. указание 63.

6. Возьмем на отрезке AB (или на его продолжении) произвольную точку K и построим симметричную ей точку K' относительно прямой AD . Аналогично построим точку K'' , симметричную точке K относительно прямой BC .

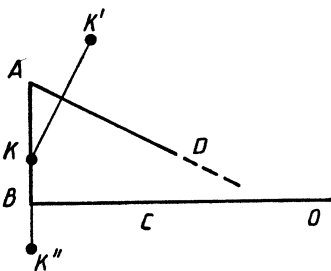


Рис. 16

7. Вопрос. Лежат ли точки K , K' , K'' на одной прямой (см. указание 64)?

8. Теперь можно доказать, что прямые BC и AD пересекаются в точке O . Подумайте, а затем см. указание 65.

9. Вопрос. Какой вывод следует из того, что перпендикуляр BC и наклонная AD пересекаются? Подумайте, а затем см. указание 66.

10. Вопрос. Можно ли считать, что пятый постулат Евклида строго доказан? Подумайте, а затем см. указание 67.



Луи Лагранж

§ 38. Вы уже имели возможность убедиться, что злополучный пятый постулат Евклида способен был вызвать смятение и разочарование.

Во многих книгах описывается любопытный случай, который якобы произошел со знаменитым французским математиком и механиком Жозефом Луи Лагранжем (1736 — 1813). Рассказывают, что Лагранж попытался доказать знаменитый пятый постулат. Он якобы начал читать свой доклад в академии, но по-

том остановился и сказал: «Нужно, чтобы я еще подумал об этом».

В 1790 г., когда во Франции была в разгаре революция, один из ее знаменитых трибунов выдвинул лозунг: «После хлеба просвещение есть первейшая потребность народа». Учителей в это время не хватало, и в 1795 г. в Париже была открыта ставшая в скором времени знаменитой Нормальная школа, которая до настоящего времени готовит учителей для французских школ. В Нормальной школе Лагранж читал свой прославленный курс элементарной математики. Тогда, по-видимому, он и заинтересовался проблемой пятого постулата. Если даже предположить, что описанный выше случай является историческим анекдотом, то остается фактом следующее: на протяжении сотен лет многие математики, пытавшиеся решить проблему постулата, вынуждены были, рано или поздно, сказать (если не другим, то самому себе): «Я должен еще подумать». Не забывайте и вы, юные читатели, этих прекрасных слов. Ведь в течение вашей жизни представится столько возможностей к месту произнести их.

Неоднократно пытался доказать пятый постулат Евклида и соотечественник Лагранжа знаменитый математик Адриен Мари Лежандр (1752—1833). Эти «доказательства» были опубликованы в различных изданиях его «Начал геометрии». Последняя неудачная по-

пытка Лежандра доказать постулат была сделана в 1823 г. (запомните эту дату).

ПРОМЕТЕЙ¹

§ 39. На протяжении двадцати веков ни одна из многочисленных попыток доказать пятый постулат не привела к желаемому результату. У некоторых математиков возникла идея попытаться доказать пятый постулат методом от противного. Отсюда остается лишь один шаг до вывода о том, что пятый постулат не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии. Но авторитет «Начал» был все еще столь велик, что сделать этот шаг было отнюдь не просто. Остановимся в связи с этим на исследованиях двух математиков XVIII в.

Итальянский математик, иезуит Джованни Джироламо Саккери (1667—1733) решил подойти к вопросу доказательства пятого постулата следующим образом.

Пусть из концов отрезка AB проведены два отрезка AA_1 и BB_1 , перпендикулярные отрезку AB , при этом $AA_1 = BB_1$. Эта фигура в честь итальянского математика была названа четырехугольником Саккери (рис. 17). Прежде всего, не опираясь на пятый постулат, Саккери доказал, что $\angle A_1 = \angle B_1$. Отсюда не следует, естественно, что эти углы прямые. Относительно углов A_1 и B_1 можно сделать три предположения: 1) либо оба угла острые; 2) либо оба угла тупые; 3) либо оба угла прямые. Эти предположения получили название соответственно гипотез острого, тупого, прямого угла.

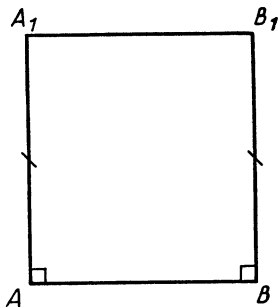


Рис. 17

Саккери установил прежде всего, что гипотеза прямого угла равносильна постулату Евклида. Следовательно дальнейший план действий должен был состоять в том, чтобы отвергнуть гипотезы острого и тупого угла, т. е. доказать, что на этом пути обнаруживаются противоречия. Саккери удалось уstra-

¹ Прометей — один из титанов в греческой мифологии. Он похитил огонь с неба, научил им пользоваться людей, подорвав веру в могущество богов.

нить гипотезу тупого угла. В конце XVIII в. Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может превосходить $2d$. Теорема Лежандра эквивалентна указанному результату Саккери.

Далее усилия Саккери были целиком направлены на то, чтобы отвергнуть гипотезу острого угла. Оставалось сделать лишь один шаг, чтобы доказать пятый постулат Евклида, обнаружив противоречие в гипотезе острого угла. Исходя из гипотезы острого угла, Саккери доказал ряд любопытных теорем. Он полагал, что вот-вот обнаружится противоречие. Но его все не было и быть не могло. В конце концов установив, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, есть кривая, Саккери завершил свое интересное исследование. Он посчитал, что гипотеза острого угла противоречит природе прямой линии.

Еще больше приблизился к решению проблемы пятого постулата немецкий математик (француз по происхождению) И о г а н н Г е н р и х Л а м б е р т (1728—1777). Кстати, Ламберт был не только математиком, но и физиком, философом и астрономом.

Предпосылки, из которых исходил Ламберт, были аналогичны исходным позициям Саккери. Он выполнил следующее построение. Из концов отрезка AB восставил два перпендикуляра, являющиеся равными отрезками AA_1 и BB_1 . Затем из конца отрезка AA_1 Ламберт восставил еще один перпендикуляр в точке A_1 . Получился, таким образом, четырехугольник с тремя прямыми углами (рис. 18). Подобно Саккери, Ламберт выдвинул три гипотезы относительно четвертого угла: гипотезу прямого, тупого, острого угла. Затем он доказал, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, а гипотеза

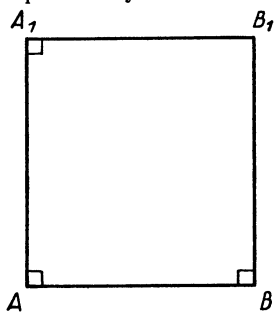


Рис. 18

тупого угла приводит к противоречию. Далее Ламберт попытался развить систему, вытекающую из гипотезы острого угла. Однако ему не удалось обнаружить предполагаемого противоречия. У Ламберта возникла мысль, что, может быть, доказать постулат невозможно.

Слава решения знаменитой проблемы пятого постулата принадлежит великому русскому математику Н и к о л а ю И в а н о-

вичу Лобачевскому (1792—1856). В 1826 г. впервые в истории геометрии он высказал мысль о том, что пятый постулат Евклида не зависит от остальных аксиом геометрии. Это сообщение оказало поистине революционное воздействие на дальнейшее развитие науки. Не случайно впоследствии, когда идеи русского ученого получили всеобщее признание, математики стали называть Лобачевского Коперником геометрии.

Наша дальнейшая задача будет состоять в том, чтобы, с одной стороны, разобраться в проблеме пятого постулата Евклида, а с другой — уяснить значение открытия Лобачевским новой геометрии.

§ 40. Лобачевский заменил в аксиоме Евклида пятый постулат следующей аксиомой (аксиома Лобачевского):

Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определяемой ими, можно провести не менее двух прямых, не пересекающихся с данной прямой.

Итак, согласно аксиоме Лобачевского прямые a_1 и a_2 , проходящие через точку A , не пересекают прямую b (рис. 19). Запишите в тетради формулировку аксиомы Лобачевского и постарайтесь ее запомнить.

Вопрос. Могут ли существовать другие прямые помимо прямых a_1 и a_2 , которые не пересекают прямую b ? Подумайте, а затем см. указание 68.

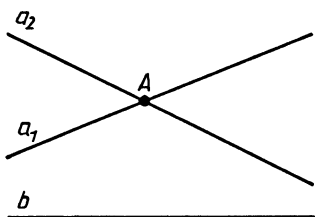


Рис. 19

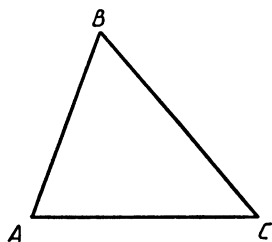


Рис. 20

§ 41. Интересно отметить следующее: можно строго доказать, что если пятый постулат Евклида (или эквивалентное ему предложение Плейфера) заменить аксиомой Лобачевского, то тогда через точку A будет проходить бесконечное (!) множество прямых, не пересекающих прямую b .

В процессе доказательства этого предложения нам придется использовать так называемую аксиому Паша (Мориц Паш (1843—1930) — немецкий математик). Эта аксиома читается так: «Пусть дан треугольник

ABC ; если прямая a , лежащая в плоскости треугольника, пересекает отрезок AB , то она пересекает также либо отрезок AC , либо отрезок BC , при этом прямая a не содержит ни одной из точек A, B, C » (рис. 20).

Аксиома Паша входит во II группу аксиом системы Гильберта. Внимательно прочитайте еще раз аксиому Паша и запишите ее формулировку в тетради.

Приступаем к доказательству следующей теоремы.

Если принять аксиому Лобачевского, то отсюда следует, что *через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определяемой ими, можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую*.

1. Итак, по аксиоме Лобачевского прямые a_1 и $a_2 \rightarrow$

2. На прямой a_2 возьмем какую-нибудь точку B_2 и соединим ее с произвольной точкой B прямой b (рис. 22). Отрезок BB_2 пересечет прямую a_1 в некоторой точке B_1 .

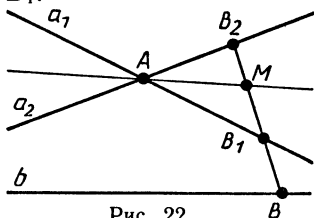


Рис. 22

Возьмем произвольную точку M на отрезке B_1B_2 . Докажем, что прямая AM не пересекает прямую b .

3. Допустим, что прямая AM пересекает прямую b в некоторой точке C (рис. 23).

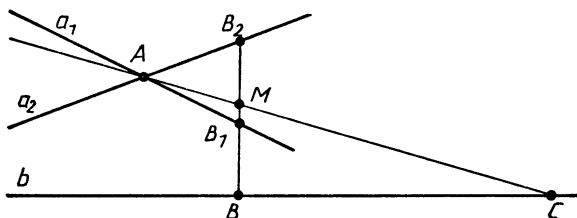


Рис. 23

не пересекают прямую b (рис. 21). ←

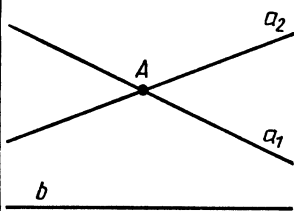


Рис. 21

4. Попробуем теперь обнаружить возникшее противоречие. Для этого надо рассмотреть $\triangle MBC$ и прямую a_1 .

5. Прямая a_1 пересекает сторону MB треугольника MBC ; значит, прямая a_1 должна пересечь \rightarrow

Сторону MC указанного треугольника прямая a_1 пересечь не может, так как \rightarrow

6. Значит, прямая a_1 должна пересечь сторону BC . Почему это невозможно? \rightarrow

7. Мы пришли, таким образом, к противоречию. Следовательно, прямая AM не может \rightarrow

Таким образом, доказали, что все прямые, лежащие в заштрихованной области и проходящие через точку A (рис. 24), не пересекают прямую b .

§ 42. Развивая свою геометрию, которую он назвал «воображаемой», Лобачевский получил стройную логическую систему, в значительной степени отличавшуюся от геометрии Евклида. Казалось бы, в ней должны содержаться логические противоречия. Ведь не могут же существовать две различные геометрии. Но Лобачевский получал все новые и новые следствия, а логические противоречия не обнаруживались.

Вопрос. Содержит ли геометрия Лобачевского логические противоречия? Прочитайте сейчас еще раз § 17, а затем переходите к чтению § 43.

либо отрезок MC , либо отрезок BC (аксиома Паша). \leftarrow

прямые MC и a_1 уже пересекаются в точке A . \leftarrow

По аксиоме Лобачевского прямая a_1 пересекать прямую BC не может. \leftarrow

пересекать прямую b .

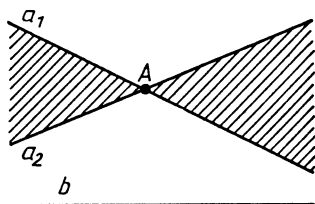


Рис. 24

§ 43. Вы вспомнили, что вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского сводится к построению модели новой геометрии, в которой аксиома параллельности (предложение Плейфера) заменена аксиомой Лобачевского, а остальные аксиомы евклидовой геометрии сохранены в прежнем виде.

Вложим в первоначальные неопределяемые понятия (точка, прямая, плоскость) аксиоматики Гильберта конкретный смысл, а затем проверим, выполняется ли в той модели, которую намечаем построить, аксиоматика Лобачевского.

Пусть дан круг. Неевклидовыми точками будем считать те точки, которые расположены внутри круга. Точки (в обычном смысле), лежащие на окружности, исключаем из рассмотрения. Прямыми будем считать хорды данной окружности и назовем их неевклидовыми прямыми.

Вопрос. Имеются ли на неевклидовой прямой AB первая и последняя точки (рис. 25)?

О т в е т ы.

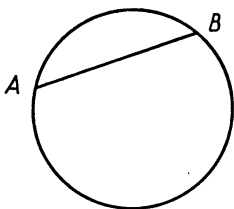


Рис. 25

А. Разумеется, да. Это соответственно точки A и B (см. указание 69).

Б. Нет, так как речь идет о неевклидовых точках, а точки A и B , лежащие на окружности, не являются неевклидовыми (см. указание 70).

§ 44. Посмотрите теперь в § 9 формулировку первой аксиомы I группы Гильберта (это предложение входит в аксиоматику Лобачевского), затем мысленно составьте новую формулировку аксиомы, вложив в понятия «точка» и «прямая» тот смысл, о котором мы договорились выше (проверьте себя по указанию 71).

§ 45. Составьте теперь новые формулировки аксиом 2 и 3 (см. § 9) и проверьте себя по указанию 72.

§ 46. Можно было бы убедиться в том, что в нашей модели выполняются все аксиомы планиметрии первых четырех групп. Важно заметить, что первые группы аксиом в геометрии Евклида и геометрии Лобачевского совпадают. Эти четыре группы аксиом и их следствия носят название *абсолютной геометрии*.

Вернемся к нашей модели, построение которой мы еще не завершили, так как не проверили, как обстоит дело с аксиомой Лобачевского.

Пусть даны прямая AB (неевклидова !) и точка C (неевклидова !) вне ее (рис. 26).

В о п р о с. Выполняется ли в рассматриваемой модели аксиома Лобачевского?

О т в е т ы.

А. Да (см. указание 73).

Б. Нет (см. указание 74).

В. Не знаю (см. указание 75).

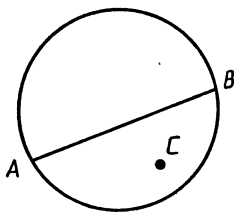


Рис. 26

§ 47. 1. Мы построили, таким образом, модель геометрии Лобачевского¹.

В о п р о с. Какой вывод можно сделать из факта построения модели геометрии Лобачевского (см. указание 77)?

2. Из непротиворечивости геометрии Лобачевского можно сделать еще один интереснейший вывод: доказать пятый постулат Евклида (или любое предложение, ему эквивалентное) невозможно. Таким образом, многочисленные попытки математиков прошлых веков доказать постулат Евклида были заранее обречены на провал.

Почему же все-таки пятый постулат Евклида нельзя доказать, т. е. логически вывести из абсолютной геометрии?

Абсолютная геометрия является общей частью обеих геометрий: если к абсолютной геометрии присоединим пятый постулат Евклида (или предложение Плейфера, т. е. аксиому параллельности), то получим геометрию Евклида, которую вы изучаете на уроках геометрии в школе; если же к абсолютной геометрии присоединить аксиому Лобачевского, то получим геометрию Лобачевского.

В о п р о с. Подумайте теперь, почему пятый постулат Евклида не может быть логически выведен из абсолютной геометрии (рассуждайте методом от противного). См. затем указание 78.

§ 48. Итак, пятый постулат Евклида (или любое предложение, эквивалентное ему) доказать, т. е. логически вывести из абсолютной геометрии, нельзя. Мы знаем, что геометрия Лобачевского непротиворечива. Можно также

¹ Рассмотренная модель геометрии Лобачевского была создана в 1871 г. немецким математиком Феликсом Клейном.

показать, что и геометрия Евклида не содержит логических противоречий (постольку, поскольку непротиворечива арифметика). Следовательно, обе геометрии имеют право на существование. Но геометрия Лобачевского значительно отличается от геометрии Евклида. Так, например, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$, в ней не существует подобных неравных треугольников, множеством точек, равноудаленных от данной прямой, является не прямая, а кривая линия и т. д. Вы сейчас, конечно, в недоумении. Вам хочется задать вопрос: какова же геометрия реального пространства, какая из двух геометрий точнее отражает объективную реальность? Краткий ответ на этот вопрос вы получите в конце книги, а пока... запаситесь терпением и переходите к чтению следующего параграфа.

§ 49. 1. Рассмотрим еще одну модель геометрии Лобачевского, созданную знаменитым французским математиком Жюлем Анри Пуанкаре (1854—1912) в 1882 г. Понимание сущности этой модели потребует от вас большего напряжения, чем в предыдущем случае.

Возьмем обычную евклидову плоскость и проведем в ней горизонтальную прямую a , которая разделит плоскость на две полуплоскости. Точки верхней полуплоскости будем считать неевклидовыми точками (точки прямой a не являются неевклидовыми). Неевклидовыми прямыми будем считать полуокружности, центры которых расположены на прямой a . К числу неевклидовых прямых отнесем также лучи, перпендикулярные прямой a (рис. 27).

Проверим теперь, выполняются ли в данной модели аксиомы I группы системы аксиом Гильберта.

Первая аксиома будет читаться так: *каковы бы ни были две точки A и B , существует полуокружность, проходящая через каждую из точек A и B .*

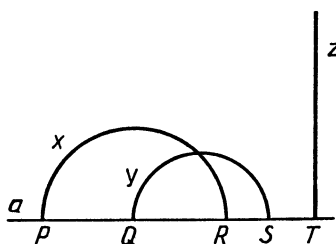


Рис. 27

Имеется в виду, естественно, полуокружность, центр которой принадлежит прямой a .

Вопрос. Как установить единственность неевклидовой прямой, определяемой точками A и B (см. указание 81)?

2. Третья аксиома I группы также имеет место, так

как на полуокружности существуют не две, а даже бесконечное множество точек. В верхней же полуплоскости имеется бесконечное множество точек, не лежащих на полуокружности.

Поскольку мы рассматриваем модель планиметрии Лобачевского, остальные аксиомы I группы нас не интересуют.

Теперь можно перейти к проверке аксиомы параллельности (чтобы не усложнять материал излишними деталями, мы решили, как вы помните, не рассматривать аксиомы II—IV групп системы Гильберта).

Попробуйте теперь выяснить, какое предложение (аксиома Плейфера или аксиома Лобачевского) будет выполняться в модели, а затем см. указание 82.

3. В процессе построения двух последних моделей мы существенно опирались на геометрию Евклида.

Вопрос. Можно ли считать, что доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского носит абсолютный характер? Подумайте, а затем см. указание 83.

4. Итак, для того чтобы окончательно удостовериться в непротиворечивости геометрии Лобачевского, надо доказать непротиворечивость геометрии Евклида.

§ 50. 1. Непротиворечивость геометрии Евклида устанавливается при помощи так называемой арифметической модели.

Ограничимся рассмотрением аксиом плоскости системы Гильберта.

Под точкой условимся понимать любую пару действительных чисел $(x; y)$, при этом числа берутся в определенном порядке. Поэтому точки $(2; 7)$ и $(7; 2)$ различные.

Под прямой условимся понимать тройку чисел $(a; b; c)$, взятых в определенном порядке. При этом по крайней мере одно из чисел a или b должно быть отлично от нуля. Если даны две прямые $(a; b; c)$ и $(a_1; b_1; c_1)$ и выполняется условие $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$, где $k \neq 0$, то прямые совпадают. Будем, наконец, считать, что точка $(x_1; y_1)$ принадлежит прямой $(a; b; c)$, если выполняется условие $ax_1 + by_1 + c = 0$, т. е. числа x_1 и y_1 являются корнями уравнения $ax + by + c = 0$.

2. Проверим первые три аксиомы I группы системы Гильберта.

Сформулируйте указанные аксиомы, запишите их в тетради, а затем правильность формулировок проверьте по указанию 85.

3. Теперь важно убедиться в том, что формулировки аксиом представляют собой верные утверждения.

Первая аксиома, как вы уже знаете, читается так: «Каковы бы ни были две пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, существует тройка чисел $(a; b; c)$, такая, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$ ».

Пусть, например, даны две точки, т. е. две пары чисел $(-4; 2)$ и $(3; 5)$. Если существует прямая $(a; b; c)$, которой принадлежат точки $(-4; 2)$ и $(3; 5)$, то должны выполняться равенства

$$-4a + 2b + c = 0, \quad (1)$$

$$3a + 5b + c = 0. \quad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). Получим:
 $-7a - 3b = 0$, т. е. $-7a = 3b$.

Мы условились, что либо a , либо b не должно быть равным нулю. В данном случае из равенства $-7a = 3b$ видно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b} = -\frac{3}{7}$.

Таким образом, $a = 3k$, $b = -7k$, $k \neq 0$. (Если вам недостаточно ясно, почему появился множитель k , то смотрите указание 86.)

Теперь из первого равенства можно найти значение c :
 $-c = -4 \cdot 3k + 2 \cdot (-7k) = -26k$, $c = 26k$. Таким образом, мы нашли прямую $(3k; -7k; 26k)$, которой принадлежат точки $(-4; 2)$ и $(3; 5)$.

4. Вторую аксиому сформулировали следующим образом: «Каковы бы ни были две различные пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, существует не более одной тройки чисел $(a; b; c)$, такой, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$ ».

Подумайте, выполняется ли в рассматриваемой модели эта аксиома, а затем см. указание 87.

5. Третья аксиома была сформулирована так: «Для каждой тройки чисел можно указать по крайней мере две пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, такие, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$. Существуют по крайней мере три пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, такие, что $ax_1 + by_1 + c = 0$, $ax_2 + by_2 + c = 0$, $ax_3 + by_3 + c = 0$ ».

Установить справедливость этого предложения очень просто. Действительно, возьмем, например, тройку чисел $(1; -2; -4)$ и докажем, что уравнение $x - 2y - 4 = 0$ имеет бесконечное множество решений. Для этого решим уравнение $x - 2y - 4 = 0$ относительно x . Получим

$x = 2y + 4$. Если придавать y произвольные значения, то получим сколько угодно значений x , таких, что x и y при подстановке в уравнение $x - 2y - 4 = 0$ дают верные равенства.

Укажите две пары чисел, которые удовлетворяют уравнению $x - 2y - 4 = 0$, а также пару чисел, не удовлетворяющих уравнению $x - 2y - 4 = 0$ (см. указание 88).

6. Теперь нам осталось установить, что в арифметической модели имеет место аксиома параллельности или предложение Плейфера.

В арифметической модели геометрии Евклида аксиома параллельности сформулирована так: «Пусть дана тройка чисел $(a; b; c)$ и пара чисел $(x_1; y_1)$, такая, что $ax_1 + by_1 + c \neq 0$. Тогда существует единственная тройка чисел $(p; q; r)$, такая, что $px_1 + qy_1 + r = 0$ и уравнения $ax + by + c = 0$ и $px + qy + r = 0$ не имеют общих решений».

Итак, необходимо доказать, что уравнение $ax + by + c = 0$ и $px + qy + r = 0$ не имеют общих решений. Иначе эту задачу можно сформулировать так. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases},$$

не имеет решений.

Пусть, например, даны прямые $y = x - 1$ и точка $(0; 2)$, не лежащая на этой прямой. Требуется доказать, что существует единственная прямая, проходящая через точку $(0; 2)$ и параллельная прямой $y = x - 1$.

Докажите это самостоятельно, а затем см. указание 89.

§ 51. Итак, непротиворечивость геометрии Евклида нами доказана. Однако это доказательство в свою очередь носит относительный характер, так как геометрия Евклида непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива арифметика. Казалось бы, все обстоит очень просто. Надо доказать непротиворечивость арифметики, и тогда непротиворечивость евклидовой геометрии будет полностью установлена. Однако проблема доказательства непротиворечивости арифметики оказалась под стать проблеме пятого постулата. Правда, решалась эта проблема не 2000 лет, а всего лишь 30. Это вполне естественно, так как математическая наука к XX в. достигла очень высокого уровня развития. В 1904 г. Давид Гильберт предложил

формализовать (т. е. построить на аксиоматической основе и доказать непротиворечивость) всю существующую математику. Следовательно, речь шла также о доказательстве непротиворечивости фундамента современной математики — арифметики. Однако в 1931 г. австрийский логик и математик К. Гёдель доказал, что никакая конечная система аксиом для арифметики не является полной. Иными словами, какое бы мы ни выписали конечное число аксиом арифметики, всегда найдется арифметическое утверждение, которое не может быть доказано или опровергнуто при помощи заданной системы аксиом.

Рассмотренный нами отрицательный результат не означает, что здание математики строится на песке. В конечном счете критерием истины в математике, как и в любой другой науке, является практика. Непротиворечивость арифметики подтверждается всей многовековой практикой человеческого общества.

СКВОЗЬ МАГИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ

§ 52. В VIII главе «Евгения Онегина» А. С. Пушкин писал:

И даль свободного романа
Я сквозь магический кристалл
Еще не ясно различал.

Наша задача — различить «не даль свободного романа», а «сквозь магический кристалл» аксиомы параллельных Лобачевского увидеть странные контуры фантастического мира. Правда, этот мир, как мы узнаем впоследствии, имеет под собой весьма реальную основу.

Мы получили самое общее представление о геометрии Лобачевского. Попытаемся сейчас уяснить более обстоятельно некоторые отличия геометрии Лобачевского от привычной нам геометрии Евклида.

Для этого нам понадобится, в частности, доказать теорему, названную теоремой Лежандра в честь знаменитого французского математика.

Предварительно подумайте над следующим вопросом. Вопрос. Принадлежит ли абсолютной геометрии предложение: «Сумма углов треугольника равна $2d$ »? Подумайте, а затем см. указание 90.

§ 53. В абсолютной геометрии справедлива теорема Лежандра: Сумма внутренних углов треугольника не превышает $2d$, т. е. равна $2d$ или меньше $2d$.

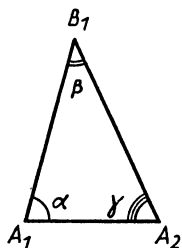
Приступаем к доказательству теоремы Лежандра.

1. Обозначим сумму внутренних углов произвольного треугольника ABC через $S(ABC)$. Тогда нам нужно доказать, что \rightarrow

$$S(ABC) \leq 2d. \leftarrow$$

2. Пусть дан треугольник $A_1B_1A_2$ (рис. 28).

3. Будем доказывать теорему методом от противного. Допустим, что сумма углов в треугольнике $A_1B_1A_2 \rightarrow$



больше $2d$, т. е.
 $\alpha + \beta + \gamma > 2d. \leftarrow$

Рис. 28

4. От точки A_2 на прямой A_1A_2 отложим $n-1$ отрезков, равных отрезку A_1A_2 :

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_{n+1}.$$

На полученных равных отрезках построим треугольники, равные треугольнику $A_1B_1A_2$. Получим в результате всего \rightarrow

n равных треугольников. \leftarrow

5. Соединим вершины всех треугольников отрезками (рис. 29). Выполните в тетради чертеж.

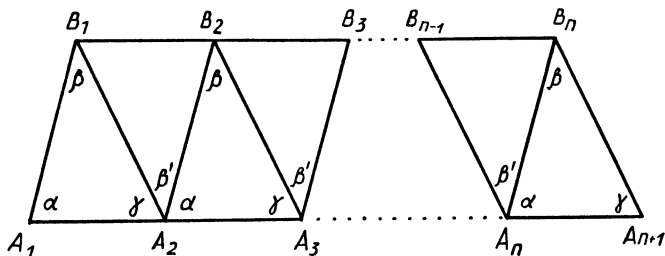


Рис. 29

6. Получим, таким образом, дополнительно к имеющимся уже треугольникам еще \rightarrow

7. Треугольники $A_2B_1B_2, A_3B_2B_3, \dots, A_{n-1}B_n$ будут \rightarrow

8. Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n$.

9. Сравним теперь величины углов $A_1B_1A_2$ и $B_1A_2B_2$, т. е. β и β' .

О т в е т ы:

А. Эти углы равны как накрест лежащие углы при параллельных и секущей. \rightarrow

Б. $\beta > \beta' (\alpha + \beta + \gamma > 2d,$

$\alpha + \beta' + \gamma = 2d).$ \rightarrow

В. Не знаю. \rightarrow

10. Сравним теперь отрезки A_1A_2 и B_1B_2 . \rightarrow

11. Заметим далее, что $A_1B_1 + B_1B_2 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_{n+1} > A_1A_{n+1}$, так как \rightarrow

12. Последнее неравенство можно переписать так:

$$A_1B_1 + (n-1) \cdot B_1B_2 + B_nA_{n+1} > \rightarrow$$

13. Или же:

$$A_1B_1 + n \cdot B_1B_2 - B_1B_2 + B_nA_{n+1} > \rightarrow$$

14. Заменим далее B_nA_{n+1} на B_1A_2 ($B_nA_{n+1} = B_1A_2$).

15. Сгруппируем теперь иначе члены последнего неравенства:

$$n(A_1A_2 - B_1B_2) < A_1B_1 - B_1B_2 + B_1A_2.$$

$n-1$ треугольников: $\Delta A_2B_1B_2, \Delta A_3B_2B_3, \dots, \Delta A_nB_{n-1}B_n$. \leftarrow

равны (по двум сторонам и углам между ними). \leftarrow

См. указание 91.

См. указание 92.

См. указание 93.

$A_1A_2 > B_1B_2$, так как $\beta > \beta'$. \leftarrow

длина ломаной больше расстояния между ее концами. \leftarrow

$$n \cdot A_1A_2. \leftarrow$$

$$n \cdot A_1A_2. \leftarrow$$

16. Последнее неравенство говорит о возникшем противоречии. Подумайте, а затем →

17. Полученное противоречие говорит о том, что сумма углов треугольника →

см. указание 94.

не может превосходить $2d$, т. е. $S\Delta \leq 2d$.

§ 54. Вопрос. Каким свойством обладает сумма внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского?

Выберите верный ответ.

А. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$ (см. указание 95).

Б. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника равна $2d$ (см. указание 96).

В. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника больше $2d$ (см. указание 97).

Г. Не знаю (см. указание 98).

§ 55. После того как мы выяснили, что сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского меньше $2d$, справедливо возникает вопрос: является ли эта сумма постоянной величиной независимо от формы и размеров треугольника?

Ответом на этот вопрос служит следующая теорема:

Сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского есть величина переменная и зависит от формы и размеров треугольника.

1. Пусть дан треугольник ABC , в котором проведен произвольный отрезок BD , разбивающий его на два треугольника ABD и BDC (рис. 30).

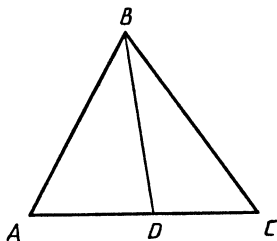


Рис. 30

2. Будем доказывать теорему методом от противного. Допустим, что у всех треугольников в геометрии Лобачевского \rightarrow

3. Обозначим сумму углов данного треугольника $S(ABC)$ и пронумеруем его углы (рис. 31).

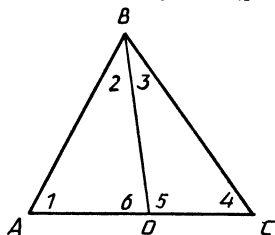


Рис. 31

4. Из рисунка 31 видно, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S(ABC) + \rightarrow$

5. Но $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S(ABD) + S(BDC).$

6. Отсюда $S(ABD) + S(BDC) = \rightarrow$

7. Принимая во внимание сделанное допущение (сумма углов треугольника — величина постоянная), равенство $S(ABD) + S(BDC) = S(ABC) + 2d$ переписывается так: \rightarrow

8. Решив полученное уравнение относительно γ , получим, что $\gamma = 2d$. Это противоречит условию, так как \rightarrow

9. Доказали, таким образом, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника является переменной величиной.

сумма углов есть постоянная величина: $\gamma < 2d.$ \leftarrow

$2d$, так как $\angle 6 + \angle 5 = 2d.$ \leftarrow

$S(ABC) + 2d.$ \leftarrow

$\gamma + \gamma = \gamma + 2d.$ \leftarrow

в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d.$ \leftarrow

§ 56. 1. Введем следующее определение: разность $2d - S(ABC)$ называется *дефектом треугольника* ABC .

Условимся обозначать дефект треугольника следующим образом: $D(ABC)$.

В о п р о с. Может ли дефект треугольника быть величиной отрицательной? Естественно, речь идет о геометрии Лобачевского. См. указание 99.

2. Можно доказать, что дефект треугольника обладает свойством аддитивности. Это означает следующее: $D(ABC) = D(ABC) + D(BDC)$ (рис. 30).

Докажем это свойство: $D(ABC) = 2d - S(ABC) = 2d - (S(ABD) + S(BDC) - 2d)$.

(Если вам непонятно это преобразование, то см. указание 100.)

В о п р о с. Каким образом следует завершить доказательство свойства аддитивности дефекта треугольника? Проверьте свои записи по указанию 101.

§ 57. Английский математик Уоллис Джон Валлис (1616—1703) сформулировал предложение, получившее название *постулата Валлиса*. Кстати, Валлис сделал большой вклад в развитие криптографии, т. е. тайнописи. Он оказал большую помощь знаменитому деятелю английской буржуазной революции XVII в. Кромвелю, быстро расшифровывая переписку монархистов. Заговорщики считали, что используемые ими шифры разгадать нельзя, и даже подозревали измену. Только после падения республики и реставрации королевской власти выяснилось, что шифры разгадывал профессор Оксфордского университета Джон Валлис.

Постулат Валлиса читается так:

Существуют два подобных и неравных треугольника.

Можно доказать, что это предложение является эквивалентом пятого постулата Евклида.

В о п р о с. Какой вывод можно сделать (применительно к геометрии Лобачевского) из того факта, что постулат Валлиса является эквивалентом пятого постулата? Подумайте, а затем см. указание 102.

§ 58. Геометрия Лобачевского обладает еще более удивительными особенностями. Пусть, например, дан острый угол BAC (рис. 32). Для каждого человека, изучавшего геометрию в школе, совершенно ясно, что перпендикуляр A_1B_1 , восставленный из произвольной точки луча AC , обязательно пересечет луч AB . В геомет-

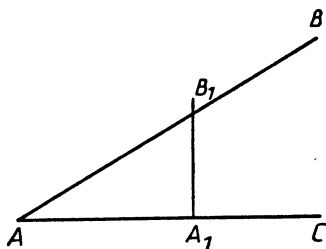


Рис. 32

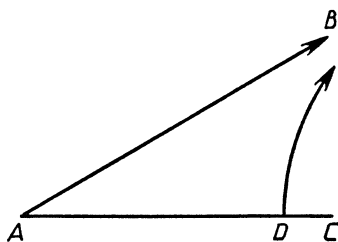


Рис. 33

рии же Лобачевского справедлива следующая теорема:

Для каждого острого угла существует единственная прямая, перпендикулярная к одной его стороне и не пересекающая другую его сторону (рис. 33).

2. Докажем теперь такую теорему:

Если дан острый угол, то не всякая прямая, перпендикулярная к одной его стороне, пересечет другую сторону.

Доказательство теоремы проведем методом от противного. Пусть дан острый угол KON . Допустим, что всякий перпендикуляр, восставленный в любой точке луча OK , пересекает сторону ON . Отложим на луче OK произвольный отрезок OA . Затем отложим отрезки $AA_1 = OA$, $A_1A_2 = OA_1$, $A_2A_3 = OA_2$ и т. д. (см. рис. 34). В соответствии с принятым допущением перпендикуляры к прямой OK , восставленные в точках A , A_1 , A_2 , A_3 и т. д., пересекают луч ON в точках B , B_1 , B_2 , ..., B_n . (Выполните чертеж в тетради.) Тогда $\triangle OAB = \triangle AA_1B$, $\triangle OA_1B_1 = \triangle A_1B_1A_2$, $\triangle OA_2B_2 = \triangle A_2B_2A_3$, ..., $\triangle OA_{n-1}B_{n-1} = \triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$. Почему? Подумайте, а затем см. указание 103.

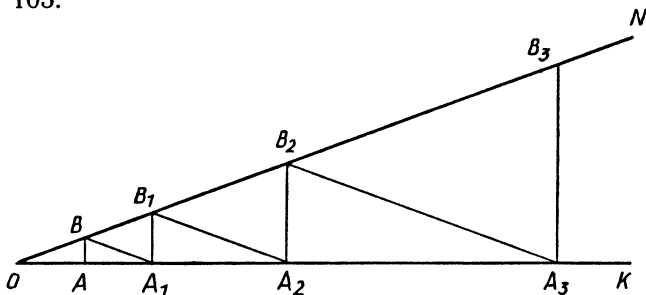


Рис. 34

3. В силу свойства аддитивности дефекта треугольника имеем:

$$D(OBA_1) = D(OBA) + D(ABA_1) = 2D(OAB).$$

Далее можно записать:

$$D(OB_1A_1) = D(OBA_1) + D(BB_1A_1) = 2D(OAB) + D(BB_1A_1) > 2D(OAB)$$

(неравенство имеет место в связи с тем, что значение дефекта треугольника положительно).

Запишите теперь два последующих неравенства, затем см. указание 104.

4. Теперь можно сделать вывод, что $D(OB_nA_n) > \dots$. Что нужно записать в правой части неравенства? Подумайте, а затем см. указание 105.

5. Попробуйте теперь самостоятельно сделать окончательный вывод и обнаружить противоречие, а затем см. указание 106.

6. Итак, обнаруженное противоречие показывает, что не всякий перпендикуляр, восставленный из точки, лежащей на одной стороне угла, пересекает другую сторону. В принципе можно строго доказать, что существует единственный перпендикуляр, пересекающий другую сторону угла. Доказательство этого факта опускаем.

§ 59. 1. В § 41 было установлено, что если в некоторой плоскости даны прямая CD и точка A , не принадлежащая ей, то через эту точку можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих заданную прямую (см. рис. 35). При этом прямые RS и PQ называются *граничными*. Это означает, что любая прямая, образующая с отрезком AB угол, меньший чем угол α , пересекает прямую CD (на рисунке 35 это прямая b). Именно эти граничные прямые и считаются параллель-

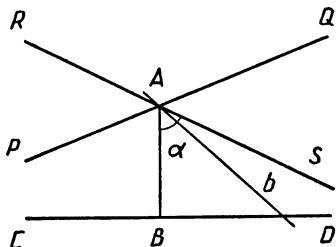


Рис. 35

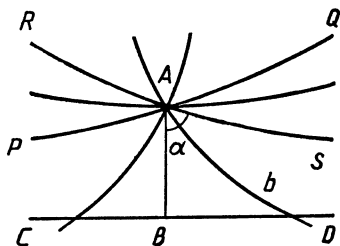


Рис. 36

ными прямой CD . Что касается других прямых, не пересекающих прямую CD , то они не являются граничными и называются *расходящимися* по отношению к прямой CD .

Граничные прямые называются *параллельными* прямой CD в точке A . При этом прямая RS считается параллельной прямой CD в направлении CD , а прямая QP называется параллельной прямой CD в направлении DC (в первом случае говорят, что *прямая RS параллельна прямой CD вправо*, а во втором, что *прямая QP параллельна прямой CD влево*).

Можно доказать следующую теорему:

Если прямая RS параллельна прямой CD вправо, то расстояние d точки, лежащей на прямой RS до другой параллельной CD , неограниченно убывает при перемещении этой точки вправо, т. е. в сторону параллельности.

В связи с этим рисунок 35 естественно представить несколько иначе (см. рис. 36).

2. Докажем теорему:

Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, являются расходящимися.

Итак, построим две прямые, перпендикулярные к третьей прямой (рис. 37).

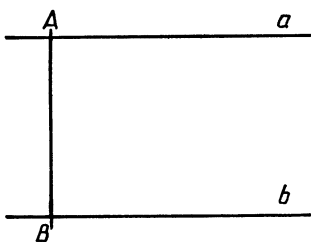


Рис. 37

Вопрос 1. Могут ли прямые a и b пересекаться? Подумайте, а затем см. указание 107.

Вопрос 2. Попробуйте самостоятельно завершить доказательство теоремы. Почему в геометрии Евклида прямые a и b (рис. 37) являются параллельными, а в геометрии

Лобачевского эти прямые не могут быть параллельными? См. указание 108.

§ 60. 1. В геометрии Лобачевского имеет место следующая теорема:

Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют равные накрест лежащие или равные соответственные углы, являются расходящимися.

Выполните в тетради чертеж (рис. 38).

Приступаем к доказательству теоремы. Пусть точка O — середина отрезка AB . Из точки O опустим перпендикуляры на прямые a и b (рис. 39). (Дополните чертеж, выполненный в тетради.)

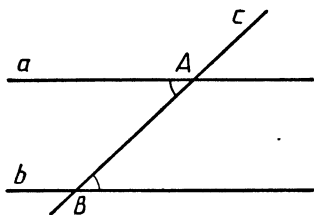


Рис. 38

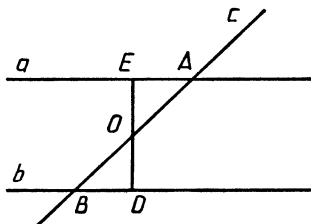


Рис. 39

Попробуйте самостоятельно завершить доказательство теоремы. Следует обратить внимание на доказательство того, что отрезки OD и OE лежат на одной прямой. Подумайте, а затем см. указание 109.

2. Вопрос. Что можно сказать о двух прямых, которые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, составляющие в сумме $2d$?

Ответить на этот вопрос несложно. Подумайте, а затем см. указание 110.

3. Пусть даны две параллельные прямые a и b , которые пересечены третьей прямой c . Мы имеем, таким образом, пару соответственных углов (1 и 2), пару накрест лежащих углов (3 и 2), пару внутренних односторонних углов (2 и 4) (рис. 40).

Вопрос 1. Сравните углы 1 и 2, а затем см. указание 111.

Вопрос 2. Сравните углы 3 и 2, а затем см. указание 112.

Вопрос 3. Что можно сказать о сумме углов 2 и 4 (рис. 40)? Проверьте свой ответ по указанию 113.

4. Итак, мы доказали следствие: если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то: 1) соответственные углы и накрест лежащие углы не равны; 2) сумма внутренних односторонних углов не равна $2d$. При этом очень важно заметить, что сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$ для углов, расположенных от секущей прямой в сторону параллельности.

§ 61. 1. Рассмотрим еще один важный факт геометрии Лобачевского.

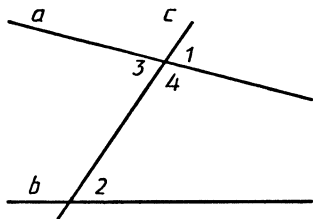


Рис. 40

Пусть прямые EF и CD , проведенные через точку A , параллельны прямой PQ , p — расстояние от точки A до прямой PQ . Обозначим через α величину угла DAB (рис. 41).

Острый угол α , образованный параллельной CD и перпендикуляром AB , называется *углом параллельности в точке A* .

Задача состоит теперь в том, чтобы изучить свойства угла параллельности.

2. Возникает в о п р о с: изменится ли величина угла параллельности с увеличением длины отрезка p ?

Пусть α_1 и α_2 — углы параллельности в точках A_1 и A_2 ; A_1N и A_2M — прямые, параллельные прямой PQ ; $A_1B = p_1$, $A_2B = p_2$ (рис. 42). Оказывается, что $\alpha_2 < \alpha_1$, т. е. с увеличением длины отрезка p величина угла параллельности уменьшается.

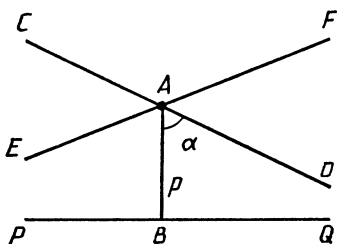


Рис. 41

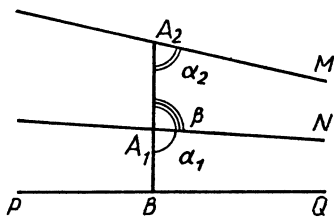


Рис. 42

Обозначим угол A_2A_1N буквой β . Тогда $\alpha_1 + \beta = 2d$, так как эти углы смежные.

По условию прямые A_1N и A_2M параллельны прямой PQ . В геометрии Лобачевского можно доказать те о р е м у:

Если две прямые параллельны некоторой прямой, то они параллельны между собой.

Следовательно, прямая A_2M параллельна прямой A_1N .

Прочитайте еще раз § 60 (4). Обратите особое внимание на то, что сумма внутренних односторонних углов β и α_2 , расположенных от секущей прямой в сторону параллельности, меньше $2d$ (см. рис. 42). Попробуйте теперь доказать, что $\alpha_2 < \alpha_1$, затем см. указание 114.

3. Итак, доказали, что с возрастанием p угол параллельности убывает. Может быть доказано, что каждому значению p соответствует единственное значение α . Та-

ким образом, α есть функция от p , $\alpha = \Pi(p)$. Эта функция получила название функции Лобачевского. Ее область определения $0 < p < +\infty$, а множество значений $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Может быть также установлено, что функция Лобачевского обладает следующим замечательным свойством:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Pi(p) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \Pi(p) = 0.$$

Это означает, что для сравнительно «небольших» расстояний геометрия Лобачевского мало отличается от геометрии Евклида. Когда начинаем рассматривать геометрию Лобачевского, то она поражает прежде всего своей необычностью и парадоксальностью. В итоге же оказывается, что две столь различные геометрии связаны диалектическим единством. Геометрия Евклида является предельным случаем геометрии Лобачевского.

5. Лобачевский нашел для функции $\alpha = \Pi(p)$ следующее уравнение: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{p}{k}}$, где k — длина некоторого постоянного отрезка, названного впоследствии радиусом кривизны пространства, а e — так называемое число Непера, или основание натуральных логарифмов ($e = 2,71828\dots$ — иррациональное число). Из этого уравнения следует, что

$$\Pi(p) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{p}{k}}.$$

Отклонения от евклидовой геометрии даже в пространствах, сопоставимых с поперечником земной орбиты, ничтожны. Таким образом, в технике, инженерных расчетах можно было бы использовать формулы неевклидовой геометрии Лобачевского. Но это нецелесообразно, так как геометрия Евклида по своей структуре существенно проще.

НЕ УБОЯСЯ БЕЗДНЫ ПРЕМУДРОСТИ

§ 62. В комедии Д. И. Фонвизина «Недоросль» упоминается семинарист, «убоявшийся бездны премудрости». Мы же, напротив, не страшась премудрости, попытаемся ответить на вопросы, связанные с изученным материалом.

Контрольные вопросы включены в два последовательных задания. Первое задание более легкое. Оно построено на принципе множественного выбора ответа. После каждого вопроса приводятся четыре ответа, один из которых верный. Необходимо, таким образом, установить единственный верный ответ. На отдельном листе бумаги следует записать номера верных ответов. Поскольку в задании содержится 6 вопросов, число верных ответов также равно 6. Номера верных ответов можно проверить по указаниям 115 (вариант 1) и 116 (вариант 2).

З а д а н и е п е р в о е

Вариант 1

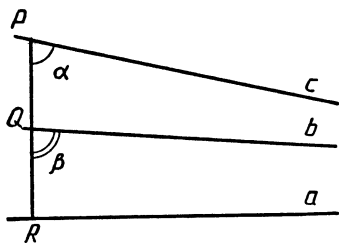


Рис. 43

1. Прямые c и b параллельны прямой a соответственно в точках P и Q ; α и β — величины соответствующих углов параллельности (рис. 43). Выберите верное утверждение:

- 1) $\alpha > \beta$; 2) $\alpha = \beta$;
3) $\alpha < \beta$; 4) $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

II. Выберите верное утверждение.

Пятый постулат нельзя доказать, т. е. вывести из абсолютной геометрии, так как:

5) пятый постулат и аксиома параллельности Лобачевского являются эквивалентными предложениями относительно абсолютной геометрии;

6) пятый постулат и аксиома Лобачевского противоречат друг другу;

7) абсолютная геометрия не является частью геометрии Лобачевского;

8) если бы пятый постулат Евклида (или любое предложение, ему эквивалентное) можно было бы вывести из абсолютной геометрии, то в геометрии Лобачевского оказались бы два противоречащих друг другу предложения.

III. Выберите верное предложение.

В плоскости Лобачевского через точку, не принадлежащую прямой l :

9) можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую l ;

10) можно провести не более двух прямых, не пересекающих прямую l ;

11) можно провести только одну прямую, не пересекающую прямую l ;

12) можно провести две и только две прямые, не пересекающие прямую l .

IV. Как доказывается непротиворечивость заданной системы аксиом? Выберите верный ответ.

Для доказательства непротиворечивости системы аксиом необходимо и достаточно:

13) построить модель заданной системы аксиом;

14) доказать, что в ней нет противоречащих друг другу аксиом;

15) доказать, что в ней нет эквивалентных предложений;

16) доказать, что в ней нет предложений, эквивалентных пятому постулату Евклида.

V. Даны следующие предложения:

А. Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов длин меньших сторон равна квадрату длины большей стороны.

Б. Если дан острый угол, то существует единственная прямая, перпендикулярная к одной его стороне и не пересекающая другую его сторону.

В. Если из точки A , не принадлежащей прямой p , опущен на нее перпендикуляр AC , а затем в точке A восстановлен перпендикуляр AD к отрезку AC , принадлежащий той же плоскости, что и точка A и прямая p , то прямые AD и p не пересекаются.

Г. Сумма углов треугольника есть величина переменная и зависит от его формы и размеров.

Выберите верное предложение:

17) предложения **А**, **Б**, **В**, **Г** входят в геометрию Евклида;

18) предложения **А**, **Б**, **В**, **Г** входят в геометрию Лобачевского;

19) предложения **А**, **Б**, **В**, **Г** входят в абсолютную геометрию;

20) предложение **А** входит в геометрию Евклида, предложения **Б** и **Г** — в геометрию Лобачевского, предложение **В** входит как в геометрию Евклида, так и в геометрию Лобачевского.

VI. Выберите предложение, эквивалентное пятому постулату Евклида:

21) предложение «Сумма углов треугольника меньше $2d$ » входит в абсолютную геометрию;

22) если дан острый угол и к одной из его сторон восстанавливаются перпендикуляры, то все они, за исключением, быть может, одного, пересекают другую сторону угла;

23) в прямоугольном треугольнике квадрат длины большей стороны равен сумме квадратов длин меньших сторон;

24) сумма углов треугольника не является величиной постоянной.

Вариант 2

I. Каким образом доказывается непротиворечивость системы аксиом? Выберите верный ответ.

Для того чтобы доказать непротиворечивость некоторой системы аксиом, необходимо и достаточно:

1) доказать, что в ней нет предложений, эквивалентных пятому постулату;

2) доказать, что в ней нет противоречащих друг другу аксиом;

3) доказать, что в ней нет эквивалентных предложений;

4) построить модель заданной системы аксиом.

II. Выберите предложение, являющееся верным.

В плоскости Лобачевского через точку, не принадлежащую прямой p :

5) можно провести две и только две прямые, пересекающие прямую p ;

6) можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую p ;

7) можно провести только одну прямую, не пересекающую прямую p ;

8) можно провести не более двух прямых, не пересекающих прямую p .

III. Выберите предложение, эквивалентное предложению Плейфера (аксиоме параллельности):

9) в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;

10) сумма углов треугольника есть величина переменная;

11) сумма углов треугольника меньше $2d$;

12) если дан острый угол и к одной из его сторон восстанавливаются перпендикуляры, то все они, за исключе-

нием, быть может, одного, пересекают другую сторону угла.

IV. Даны следующие предложения:

Р. Сумма углов треугольника есть величина переменная и зависит от его сторон и размеров.

Q. Если из точки A , не принадлежащей прямой q , опущен на нее перпендикуляр AD , а затем в точке A восстановлен перпендикуляр AC к отрезку AD , принадлежащий той же плоскости, что и точка A и прямая q , то прямые AC и q не пересекаются.

Р. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин меньших сторон равна квадрату длины большей стороны.

S. Если дан острый угол, то существует единственная прямая, перпендикулярная одной его стороне и не пересекающая другую его сторону.

Выберите предложение, являющееся верным:

13) предложения **Р**, **Q**, **Р**, **S** являются частью абсолютной геометрии;

14) предложения **Р**, **Q**, **Р**, **S** входят в геометрию Евклида;

15) предложение **Р** входит в геометрию Евклида, предложения **Р** и **S** — в геометрию Лобачевского, предложение **Q** — в абсолютную геометрию;

16) предложения **Р**, **Q**, **Р**, **S** входят в геометрию Лобачевского.

V. Прямые p и q параллельны прямой r соответственно в точках A и B ; γ и α — величины соответствующих углов параллельности (рис. 44). Выберите верное утверждение:

17) $\alpha > \gamma$; 18) $\alpha < \gamma$;

19) $\alpha = \gamma$; 20) $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

VI. Выберите верное утверждение.

Пятый постулат нельзя доказать, т. е. вывести из абсолютной геометрии, так как:

21) абсолютная геометрия не является частью геометрии Лобачевского;

22) если бы пятый постулат Евклида (или любое предложение, ему эквивалентное) можно было бы вывес-

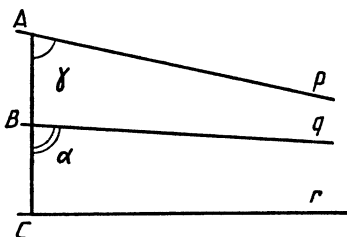


Рис. 44

ти из абсолютной геометрии, то в геометрии Лобачевского оказались бы два противоречащих друг другу предложения;

23) пятый постулат и аксиома параллельности Лобачевского эквивалентны относительно абсолютной геометрии;

24) геометрия Евклида и геометрия Лобачевского имеют общую часть.

З а д а н и е в т о р о е

Это задание несколько сложнее первого. Во всяком случае большинство вопросов требует размышлений. Не торопитесь обращаться к «Указаниям». Творческое удовлетворение можно получить лишь в результате самостоятельного открытия истины.

1. Может ли в геометрии Лобачевского сумма углов произвольного выпуклого четырехугольника равняться $4d$? Подумайте, а затем см. указание 117.

2. Входит ли в абсолютную геометрию следующее предложение: «Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним»? Если ответ на этот вопрос вызовет затруднение, то см. указание 118, в котором приводится доказательство теоремы о внешнем угле треугольника. Если же ответ может быть дан сразу, то см. указание 124.

3. Входит ли в абсолютную геометрию следующее предложение: «Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны»? См. указание 119.

4. Известные из школьного курса математики три признака равенства треугольников входят в абсолютную геометрию, т. е. они имеют место как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского. Однако в геометрии Лобачевского имеется еще и четвертый признак равенства треугольников. Этот признак читается так: «Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны». Как доказать этот признак? Это совсем просто, если вспомнить один факт, упоминавшийся ранее. См. указание 120.

5. Пусть дан угол, меньший $2d$. Оказывается, в геометрии Лобачевского существует единственная прямая, параллельная обеим сторонам этого угла (в противо-

положных направлениях). Для доказательства этого предложения надо использовать одну своеобразную теорему геометрии Лобачевского. Заметим, что предложение «Каждый угол можно единственным образом разделить пополам» входит в абсолютную геометрию. Если вам требуется подсказка, то см. указание 121. Если же вы самостоятельно справились с вопросом, то см. указание 125.

6. Входит ли в абсолютную геометрию следующее предложение: «Если при пересечении двух прямых с третьей соответственные углы равны, или внутренние накрест лежащие углы равны, или сумма внутренних односторонних углов равна $2d$, то данные прямые не пересекаются»? Найдите доказательство этой теоремы в школьном учебнике геометрии для VI класса. Затем подумайте и см. указание 122.

7. Справедливо ли утверждение: «Предложение *Через точку, лежащую вне прямой в плоскости, ими определяемой, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая данной* входит в абсолютную геометрию»? Подумайте, а затем см. указание 123.

8. Пусть даны две расходящиеся прямые (следовательно, речь идет о геометрии Лобачевского). Могут ли они иметь два общих перпендикуляра? Ответ проверьте по указанию 126.

9. Можно ли проверить непротиворечивость системы аксиом I группы Гильберта (см § 9) при помощи следующей модели: дан треугольник, в котором центр вписанной окружности соединен с вершинами? Если ответ готов, то см. указание 127.

10. Система аксиом, как известно, должна удовлетворять требованиям непротиворечивости, независимости и полноты. Что касается требований непротиворечивости и полноты, то эти понятия были разъяснены соответственно в параграфах 16 и 21. Требование же независимости заключается в следующем: любая аксиома не может быть получена как следствие остальных аксиом. Например, если восьмая аксиома I группы системы Гильберта могла бы быть получена из предыдущих предложений, то данная совокупность аксиом не отвечала бы требованию независимости.

Каким же образом можно проверить требование независимости? Характерный прием доказательства независимости какого-либо предложения A заключается в сле-

дующем: строят модель системы аксиом без аксиомы А. Если эту модель удастся построить, то предложение А не зависит от остальных аксиом. В противном случае в модели имело бы место предложение А.

Теперь прочитайте систему аксиом, приведенную в § 17. Как доказать, что предложение А₄ не зависит от первых трех аксиом? Свой ответ вы можете проверить по указанию 128.

11. Вам предлагается еще один вопрос, связанный с предыдущим: почему можно утверждать, что в геометрии Евклида аксиома параллельности (предложение Плейфера) не зависит от остальных аксиом? См. указание 129.

12. В § 34 мы узнали, что теорема Пифагора является эквивалентом предложения: «Сумма углов треугольника равна $2d$ ». В процессе доказательства был установлен лишь частный случай: «Теорема Пифагора является эквивалентом предложения: сумма углов прямоугольного равнобедренного треугольника равна $2d$ ».

Вопрос. Корректно ли приведенное ниже доказательство предложения: «Если сумма углов прямоугольного равнобедренного треугольника равна $2d$, то сумма углов любого прямоугольного треугольника равна $2d$ »?

Доказательство. Пусть дан произвольный прямоугольный треугольник ABC (угол B прямой). На катете BC отложим отрезок BE , равный отрезку AB (рис. 45). Треугольник ABE прямоугольный равнобедренный. Сумма его углов по условию равна $2d$. Поэтому $\angle BAE = \angle BEA = 45^\circ$. Угол AEC равен 135° (как смежный углу 45°). Построим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$. Угол 2 равен углу 3 (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных AD и BC и прямой AC). Сумма углов треугольника ABC может быть представлена так:

$$\begin{aligned} \angle B + \angle 2 + \angle 1 + \angle BAE &= d + \angle 3 + \angle 1 + \angle BAE = \\ &= d + d = 2d. \end{aligned}$$

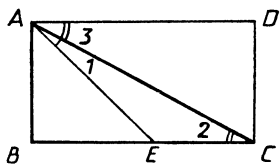


Рис. 45

Итак, корректно ли это доказательство? Подумайте, затем см. указание 130.

13. Для того чтобы вполне корректно доказать предложение о сумме углов произвольного прямоугольного треугольника

(если сумма углов равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2d$, то сумма углов произвольного прямоугольного треугольника также равна $2d$), необходимо провести небольшую подготовительную работу.

Напомним определение дефекта треугольника: дефектом треугольника называется разность $2d - S(ABC)$, где $S(ABC)$ —сумма углов треугольника.

Дефект треугольника неотрицательное число, так как по теореме Лежандра в абсолютной геометрии сумма углов треугольника не превосходит $2d$, т. е. $S(ABC) \leq 2d$ (см. § 53). Дефект треугольника обладает свойством аддитивности (см. § 56).

Докажем теперь одно свойство дефекта треугольника, которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть дан произвольный треугольник ABC . Соединим вершину B с произвольной точкой отрезка AC (рис. 46). $D(ABC) = D(ABD) + D(BDC)$; $D(ABD) = D(ABC) - D(BDC)$.

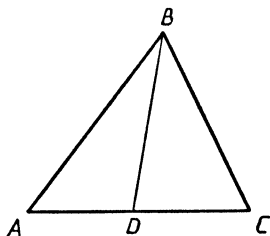


Рис. 46

Сравним дефект треугольника ABD с дефектом треугольника ABC . Какой вывод можно сделать? Подумайте, а затем см. указание 131.

14. Мы готовы теперь к тому, чтобы доказать предложение: «Если сумма углов равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2d$, то сумма углов всякого треугольника также равна $2d$ ».

Предварительно докажем это для случая произвольного прямоугольного треугольника. Для облегчения дальнейшего рассуждения заметим следующее. Неравенство $a \leq b$ состоит из двух утверждений $a < b$, $a = b$. Неравенство $a \leq b$ считается верным, если хотя бы одно из указанных утверждений верно.

Итак, пусть дан произвольный прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и AC . Условимся, что $AB < AC$. На луче AB от вершины A отложим отрезок AD , равный отрезку AC . Затем на луче AC от вершины A отложим отрезок AE , равный отрезку AB . Получим два равнобедренных треугольника ABE и ADC (рис. 47). Для того чтобы сделать вывод о сумме углов прямоугольного треугольника ABC , необходимо сравнить дефекты

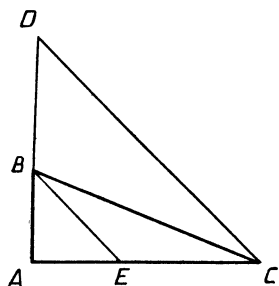


Рис. 47

треугольников ADC и ABE , с дефектом треугольника ABC . Подумайте, а затем см. указание 132.

15. Итак, осталось сделать последнее усилие, чтобы завершить доказательство предложения: «Если сумма углов равнобедренного прямоугольного треугольника равна $2d$, то сумма углов произвольного треугольника также равна $2d$ ».

После проделанной подготовительной работы это осуществить довольно просто. Подумайте, а затем см. указание 76.

16. В § 59 (1) упоминался следующий факт геометрии Лобачевского: «Если прямая RS параллельна прямой CD вправо, то расстояние от точки, лежащей на прямой RS до другой параллельной CD , неограниченно убывает при перемещении этой точки вправо, т. е. в сторону параллельности» (рис. 48). В соответствии с этим свойством при движении точки E вправо расстояние x неограниченно убывает.

Пусть прямая RS параллельна прямой CD вправо. Из произвольных точек A и E прямой RS опустим перпендикуляры AB и EF на прямую CD (рис. 49). Обратим внимание на то, что углы α и β — это соответствующие углы параллельности. Следовательно, углы α и β острые. Это можно установить, рассмотрев четырехугольник $ABFE$. Сумма углов в нем, как уже говорилось, меньше $4d$. С другой стороны, $\angle AEF + \beta = 2d$. Из этих соотношений можно сделать вывод, что $\alpha < \beta$ (если это неясно, то см. указание 135). Как завершить доказательство

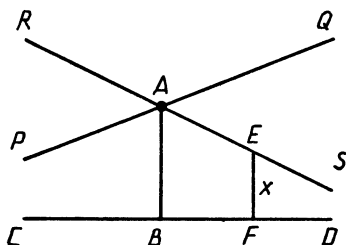


Рис. 48

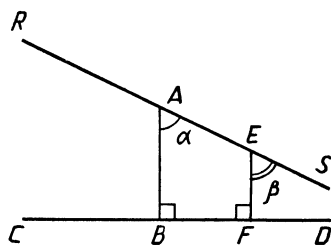


Рис. 49

рассматриваемого свойства? Если у вас возникнут трудности, то предварительно прочитайте § 61 (1—3). Свой ответ вы можете проверить по указанию 136.

КАКОВА ЖЕ ВСЕ-ТАКИ ГЕОМЕТРИЯ ВСЕЛЕННОЙ?

Первым ученым, подвергшим сомнению универсальность геометрии Евклида для космических масштабов, был Н. И. Лобачевский. Для первой половины XIX в. эта мысль была революционной. Лобачевский поднялся до больших высот философских обобщений и намного опередил свое время.

Лобачевский исходил из того, что если реальное пространство не подчиняется законам евклидовой геометрии, то сумма углов треугольника, имеющего гигантские космические масштабы, будет меньше $2d$. Вершины экспериментального треугольника были выбраны следующим образом: одна вершина на Земле, другая на Солнце и третья на звезде Сириус. Если бы сумма углов этого треугольника оказалась меньше $2d$, то у неевклидовой геометрии появилась бы лучшая из всех возможных моделей — природа. Однако результаты измерений разочаровали Лобачевского. Сумма углов треугольника оказалась меньше $2d$, но на столь ничтожную величину, что она не выходила за рамки допустимых ошибок измерений. Вопрос остался открытым, хотя Лобачевский по-прежнему был убежден в неевклидовости мирового пространства.

Вопрос, впервые поставленный Лобачевским, был чрезвычайно сложным. Исчерпывающего ответа на него не дала до сих пор и наука наших дней.

Можно заметить, что ограниченность космического пространства, которое «видит» человек, используя самые мощные астрономические приборы, позволяет сразу поколебать незыблемость евклидовой геометрии. Действительно, астрономические инструменты позволяют «видеть» отдаленные части Метагалактики, находящиеся от нас на расстоянии в несколько миллиардов парсеков (парсек равен 3,26 светового года). Напомним, что свет распространяется со скоростью 300 000 км/с. Таким образом, хотя Вселенная безгранична во времени и пространстве, видимая нам часть пространства ограничена. Рассмотрим рисунок 50. Черным цветом на рисунке окра-

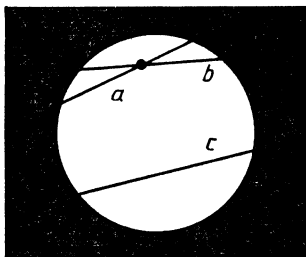


Рис. 50

шена невидимая для нас часть Вселенной. Если ограничить размеры Вселенной до видимой ее части, то в ней будет выполняться геометрия Лобачевского. Правда, мы сделали сильное допущение, ограничив пространство.

При жизни Лобачевского большинство ученых считало, что идеи великого русского ученого бессмысленны. Лед

тронулся лишь в 1868 г., когда произошли два важнейших события, связанные с именами итальянского математика Эудженио Бельтрами (1835—1900) и немецкого математика Бернхарда Римана (1826—1866).

В своей работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии» Бельтрами показал, что существуют реальные тела, на поверхности которых выполняется геометрия Лобачевского. Этот вывод итальянского математика был впечатляющим: оказалось, что в евклидовом реальном мире имеются объекты неевклидовой природы.

Одну из поверхностей, на которых выполняется геометрия Лобачевского, можно получить следующим образом. Рассмотрим кривую, которая называется *цепной линией* (рис. 51). Эта линия называется цепной, так как форму этой линии принимает свободно подвешенная в двух точках тяжелая цепь. Представим себе теперь, что

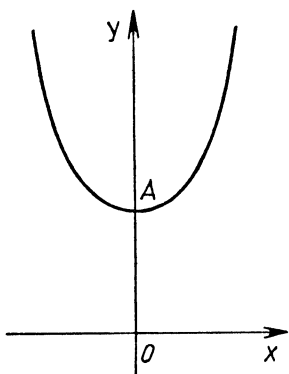


Рис. 51

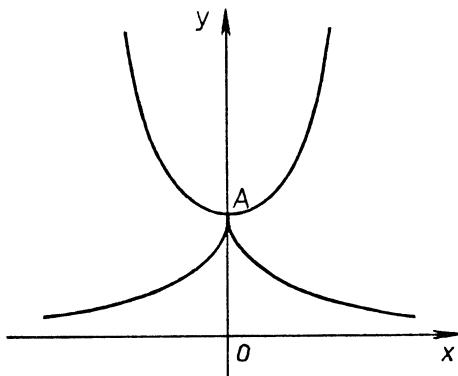


Рис. 52

цепь разрезана в самой низкой точке A . Тогда концы цепи опишут некоторую кривую, получившую название *трактрисы* (рис. 52).

Если же перейти от наглядных представлений к математической интерпретации рассматриваемой кривой, то можно указать следующее характеристическое свойство трактрисы: длина касательной, т. е. отрезок от точки касания до оси абсцисс, есть величина постоянная. При этом ветви кривой неограниченно приближаются к оси абсцисс.

Вращая трактрису около оси абсцисс, получим поверхность вращения в виде двух сложенных раструбов (рис. 53). Эта поверхность называется *псевдосферой*. Условимся считать прямой линией на рассматриваемой поверхности так называемую «геодезическую» линию. Не раскрывая строго математическую суть этого понятия, будем считать «прямой» на псевдосфере линию кратчайшего расстояния между точками, рас-

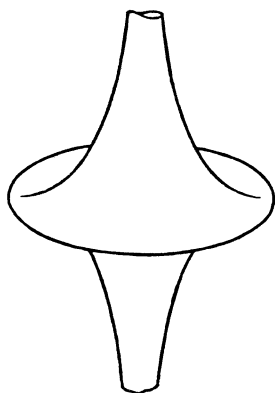


Рис. 53

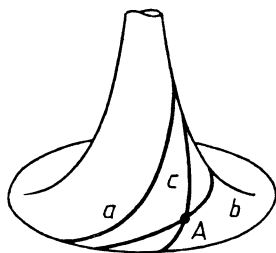


Рис. 54

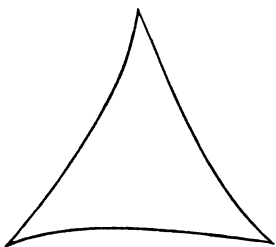


Рис. 55

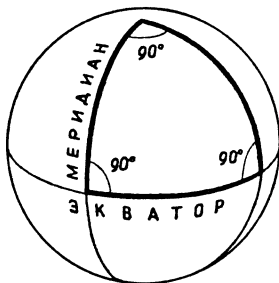


Рис. 56

положенными на ее поверхности. Бельтрами показал, что на псевдосфере реализуется часть плоскости Лобачевского. На рисунке 54 видно, что «прямые» b и c , проходящие через точку A , параллельны «прямой» a .

Псевдосферу называют *поверхностью постоянной отрицательной кривизны*. Говорим, что поверхность имеет отрицательную кривизну, если сумма углов криволинейного треугольника меньше $2d$. Если построим на плоскости Лобачевского (или на псевдосфере, поскольку, как сказано выше, на ее поверхности выполняется геометрия Лобачевского) треугольник, то сразу же увидим, что сумма его углов меньше $2d$ (рис. 55).

Существуют и *поверхности положительной кривизны*, т. е. поверхности, на которых сумма углов треугольника больше $2d$. Обнаружить такую поверхность очень просто. Ею является, например, поверхность шара. Условимся считать «прямой» на сфере любую окружность большого круга, т. е. окружность, получаемую при пересечении сферы плоскостью, проходящей через центр шара. На сфере получаем весьма своеобразную геометрию. Оказывается, что все прямые здесь пересекаются. Следовательно, на сфере не может иметь место ни геометрия Евклида, ни геометрия Лобачевского. Что касается треугольников, то сумма их углов всегда больше $2d$. В некоторых же случаях сумма углов треугольника может быть равной $3d$ (рис. 56).

Поскольку уже имеем как отрицательную, так и положительную кривизну поверхности, легко понять, что на обычной евклидовой плоскости имеет место нулевая кривизна.

Серьезный шаг в развитии неевклидовой геометрии был сделан Бернхардом Риманом. 10 июня 1854 г. Риман прочитал знаменитую лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» на философском факультете Геттингенского университета. Аудитория состояла



Бернхард Риман

в основном из лиц, имевших не очень хорошую математическую подготовку. Правда, на лекции присутствовал Карл Гаусс, высоко ее оценивший, но все же лекция Римана прошла незамеченной в математическом мире. После смерти Римана (он безвременно скончался от туберкулеза) текст лекции был обнаружен в его бумагах немецким математиком Рихардом Дедекиндом. Публикование в 1868 г. этих материалов произвело огромное впечатление на математиков.

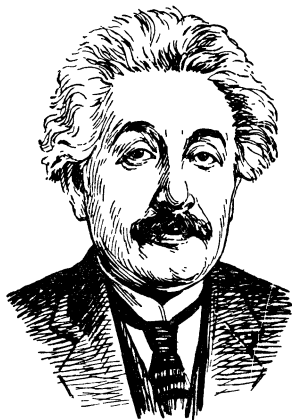
Риман включил в число аксиом следующее предложение: *каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую.*

Это означает, что в геометрии Римана вообще нет параллельных прямых, сумма же углов произвольного треугольника в отличие от геометрии Евклида и геометрии Лобачевского больше $2d$. Выяснилось, что геометрия Римана непротиворечива. При этом пространство Лобачевского оказалось одним из частных случаев римановых пространств. В лекции были затронуты общие вопросы, связанные с геометрией физического пространства. Заканчивая свою лекцию, Риман сказал, что мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день.

Таким образом, наличие трех логически безупречных и равноправных геометрических систем привело к постановке вопроса: какова геометрия Вселенной, какова геометрия внутриатомного мира?

Однозначный ответ современная наука дать не может. Эта проблема может быть решена лишь в результате огромной совместной работы астрономов, математиков, физиков, философов, космологов (космология — наука о Вселенной как едином целом).

Наука приблизилась к ответу на поставленный вопрос о геометрии Вселенной после открытия в начале XX в. великим физиком Альбертом Эйнштейном (1879—1955) специальной и общей теории относительности.



Альберт Эйнштейн

Высказывалось мнение, что общая теория относительности представляет собой первый пример чисто физической теории, появившейся в результате математического прыжка в неизвестное.

Из общей теории относительности следует, в частности, что пространство искривлено. Это объясняется тем, что вблизи тел, имеющих огромную массу (например, вблизи Солнца, звезд), законы ньютоновской механики изменяются, геометрия пространства становится неевклидовой. Хорошо известно, что одной из самых распространенных моделей прямой является луч света. Однако свет, проходя мимо Солнца или каких-либо звезд, под влиянием силы притяжения изгибает свою траекторию.

В 1916 г. Европа была объята войной. Эйнштейн в это время находился в Германии, поэтому экземпляр его статьи был послан английскому ученому Эддингтону из нейтральной Голландии. В этой статье излагалась суть теории относительности. Сам Эйнштейн не сомневался в том, что и эти последние следствия его теории скоро найдут свое подтверждение. Статья Эйнштейна произвела на Эддингтона столь сильное впечатление, что он вместе с астрономом Дайсоном задумал организовать две экспедиции для экспериментальной проверки гравитационного искривления луча света, проходящего вблизи Солнца. Однако надо было дожидаться конца войны, а также... солнечного затмения. Суть эксперимента состояла в том, чтобы попытаться сфотографировать звезду, которую при отсутствии отклонения света вблизи Солнца

наблюдатель с Земли увидеть не мог. Этот опыт можно было осуществить только при полном солнечном затмении, так как фотографировать на фоне яркого светового потока невозможно (рис. 57).

После окончания первой мировой войны одна экспедиция отправилась в деревню Собраль в Бразилии, а другая — на маленький португальский остров Принсипи, расположенный у западного побережья Африки. В этих пунктах сложились благоприятные ус-

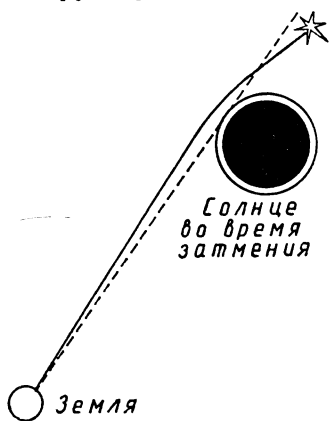


Рис. 57

ловия для наблюдения полного солнечного затмения 29 мая 1919 г. Проведенные эксперименты подтвердили теоретические прогнозы Эйнштейна.

Открытие теории относительности, расширение объема знаний о Вселенной приводят нас к выводу, что Вселенную в целом нельзя рассматривать как застывшую и неизменяемую систему. Противоречивой и изменяющейся Вселенной присуще изменение метрики пространства и времени (пространство называется метрическим, если в нем определено расстояние).

Важные результаты были получены выдающимся советским ученым А. А. Фридманом (1888—1925). В основу разработанной Фридманом модели Вселенной была положена гипотеза, согласно которой Вселенная однородна, т. е. устроена одинаково во всех своих частях. Конечно, речь идет о Вселенной в целом. Если же говорить о сравнительно небольших масштабах, то, разумеется, неоднородность Вселенной будет видна невооруженным глазом. Фридман установил, что если плотность вещества во Вселенной меньше некоторой постоянной величины (критической плотности), то кривизна пространства является отрицательной, если же критическая плотность превзойдена, то пространство имеет положительную кривизну. Наконец, в случае, когда плотность равна критическому значению, то кривизна пространства равна нулю. Таким образом, как показал Фридман, при определенных условиях геометрия Вселенной имеет отрицательную кривизну, т. е. совпадает с геометрией Лобачевского.

Исходя из общей теории относительности, в 1922 г. Фридман сделал вывод, что Вселенная должна расширяться с течением времени.

Фридмановская модель Вселенной, полученная теоретическим путем, была блестяще подтверждена экспериментально уже после смерти Фридмана американским астрономом Эдвином Хабблом (1889—1953). Хаббл, действуя совершенно независимо от Фридмана, обнаружил «разбегание» далеких туманностей. Эйнштейн оценил полученные Хабблом результаты как подтверждение теоретических положений Фридмана. Позднее была построена модель «расширяющейся» Вселенной.

Установленная Хабблом в 1929 г. зависимость между красным смещением галактик и расстоянием до них вошла в науку как один из самых важных космологических законов, получивших название «закона Хаббла».

Современный уровень науки позволяет сделать вывод, что реальное пространство Вселенной является искривленным пространством переменной кривизны. Следовательно, геометрия Вселенной не может быть ни геометрией Евклида, ни геометрией Лобачевского, поскольку евклидово пространство и пространство Лобачевского имеют соответственно нулевую и постоянную отрицательную кривизну. Поскольку кривизна евклидова пространства равна нулю, то можно считать, что пространство Лобачевского, имеющее постоянную отрицательную кривизну, ближе к геометрии Вселенной.

ЖИЗНЬ ТИТАНА

20 ноября 1792 г. (по старому стилю) в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький) в семье скромного коллежского регистратора Ивана Максимовича Лобачевского родился сын Николай, которому суждено было вписать одну из самых ярких страниц в летопись отечественной и мировой науки.

Отец Лобачевского рано скончался, и все заботы о семье легли на мать. Прасковья Александровна Лобачевская осталась с тремя детьми без каких-либо средств к существованию. Проявив завидное мужество и настойчивость, Прасковья Александровна добилась того, что в ноябре 1802 г. три ее сына (Александр — 11 лет, Николай — 10 лет, Алексей — 7 лет) были приняты в Казанскую гимназию. Интересно, что в этой же гимназии и примерно в то же время учился будущий писатель Сергей Тимофеевич Аксаков. Из воспоминаний Аксакова можно получить представление о тех условиях, в которые попали братья Лобачевские.

Прежде всего Аксаков обращает внимание на тя-



Н. И. Лобачевский

желый гимназический режим. «Вставанье по звонку, задолго до света, при потухших и потухающих ночниках и сальных свечах, наполнявших воздух нестерпимой вонью; холод в комнатах, отчего вставать еще неприятнее бедному дитяти, кое-как согревшемуся под байковым одеялом; общественное умывание из медных рукомойников, около которых всегда бывает ссора и драка; ходьба фрунтом на молитву, к завтраку, в классы; к обеду и т. д., завтрак, который состоял в скоромные дни из стакана молока пополам с водою и булки, а в постные дни — из стакана сбитня с булкой...» (Аксаков С. Т. Воспоминания // Собр. соч.: В 4 т. — М., 1955. — Т. 2. — С. 24).

Все в гимназии было организовано так, чтобы подавить и унижить личность. «По распоряжению гимназического начальства, никто из воспитанников не мог иметь у себя ни своих вещей, ни денег: деньги, если они были, хранились у комнатных надзирателей и употреблялись с разрешения главного надзирателя; покупка съестного или лакомства строго запрещалась; конечно, были злоупотребления, но под большою тайной. В числе других строгостей находилось постановление, чтобы переписка воспитанников с родителями и родственниками производилась через надзирателей: каждый ученик должен был отдать незапечатанное письмо, для отправки на почту, своему комнатному надзирателю, и он имел право прочесть письмо...» (Аксаков С. Т. Воспоминания // Собр. соч.: В 4 т. — М., 1955. — Т. 2. — С. 27—28).

Каждый человек, интересующийся жизнью Лобачевского, невольно задается вопросом: кто же учил его математике? Ведь совершенно не исключено, что, будь на месте учителя математики невежественный человек, Лобачевский мог бы приложить свои способности совершенно в другой области.

Аксаков хорошо знал учителя Григория Ивановича Карташевского, который преподавал Лобачевскому математику, так как сам у него учился. «Григорий Иванович серьезно занимался своей наукой и, пользуясь трудами знаменитых тогда ученых по этой части, писал собственный курс чистой математики для преподавания в гимназии; он читал много немецких писателей, философов и постоянно совершенствовал себя в латинском языке» (Аксаков С. Т. Воспоминания // Собр. соч.: В 4 т. — М., 1955. — Т. 2. — С. 102).

В январе 1807 г. в возрасте 14 лет Лобачевский становится студентом Казанского университета, с которым оказалась связанной почти вся его последующая жизнь.

В июле 1807 г. в семье Николая Лобачевского произошло трагическое событие. Купаясь в реке Казанке, утонул его старший брат Александр. Все попытки вернуть ему жизнь оказались тщетными. Гибель брата произвела на Николая столь сильное впечатление, что он решил оставить занятия любимой математикой и отдаться всецело изучению медицины. Лобачевскому казалось, что ему подвластно разгадать тайну жизни и смерти.

Два года продолжалось увлечение Лобачевского медициной, но постепенно влечение к математике вновь захватило все думы и помыслы Лобачевского.

В августе 1811 г. Лобачевский получил степень магистра физико-математических наук, в марте 1814 г. он становится адъюнктом (это ученое звание соответствует современному званию доцента), а летом 1816 г. экстраординарным профессором. Ему было в это время 23 года.

Вскоре после этого начался весьма мрачный период в деятельности Казанского университета.

В те годы среди русской интеллигенции растут революционные настроения. Правительство Александра I проводит все более реакционную линию. В первую очередь проверке подвергаются университеты, чтобы задуть в них зарождающиеся свободомыслие и атеизм.

В январе 1819 г. широкие полномочия для обследования Казанского университета получил крайний реакционер член Главного правления училищ М. Л. Магницкий.

Магницкий представил доклад о неблагополучном состоянии дел в Казанском университете и предложил университет закрыть, а его здание разрушить.

Университет не был закрыт, но Магницкий был назначен попечителем Казанского учебного округа и получил предписание императора Александра I привести в «должный порядок» все части университета.

Прежде всего Магницкий позаботился о том, чтобы истребить в университетской библиотеке все книги, отличающиеся «вредным направлением». Однако книги, отобранные для сожжения, были спасены работниками библиотеки и спрятаны в надежных хранилищах.

Отношения Лобачевского с Магницким были далеко не безоблачными. В 1821 г. Лобачевскому было предложено выступить на торжественном акте по случаю окон-

чания учебного года. Зная по опыту предшествующих лет, что от докладчика требуется угодничать и фари-сействовать, он категорически отказался от выступления. Это привело к первой размолвке между Лобачевским и Магницким. Кризис в их отношениях постепенно углублялся.

После приведения Казанского университета в «надлежащее устройство» Магницкий предложил всем профессорам представить для напечатания книги и конспекты. На это предложение откликнулись немногие. Среди них был Лобачевский. Летом 1823 г. он представил рукопись под названием «Геометрия». Магницкий направил ее на заключение академику Н. И. Фуссу.

«Геометрия» Лобачевского представляла собой краткий обзор элементарной геометрии, предназначенной для лиц, уже знакомых с этим курсом. Книга несомненно была оригинальной, в ней чувствовалась попытка наметить самостоятельные пути построения геометрии. В этот период очень велико было влияние «Начал» Евклида. Во многих странах считалось, что знаменитое творение Евклида должно изучаться в средней школе. «Начала» действительно представляли собой величайшее произведение античной литературы. Однако в конце XVIII и начале XIX в. во Франции под влиянием Даламбера появились школьные учебники, более приспособленные для обучения элементарной геометрии.

В России первым учебником, подвергшим ревизию «Начала» Евклида, явилась книга русского математика и механика, академика С. Е. Гурьева (1766—1813) «Опыт о усовершенствовании элементов геометрии».

Возражения академика Фусса против «Геометрии» заключались в следующем:

1) «Геометрия» не является систематическим изложением курса;

2) в книге использована метрическая система мер (метрическая система была, как известно, введена во время французской революции, и возможно, что именно это обстоятельство особенно шокировало Фусса и явилось главной причиной отрицательного отзыва).

В заключении своего отзыва академик Фусс написал, что «Геометрия» Лобачевского как учебная книга принята быть не может.

Лобачевскому было предложено либо исправить свою рукопись, либо представить возражения на замечания

Фусса. Однако он не пожелал сделать ни того, ни другого, даже не взял рукопись обратно. Она считалась утерянной, и только в 1909 г., через 53 г. после смерти Лобачевского, книга «Геометрия» была наконец опубликована.

Начало 1826 г. было ознаменовано падением Магницкого. Он был уволен в отставку за растрату казенных денег и превышение власти. Это событие, естественно, привлекло к себе внимание широких кругов общественности. Но никто не подозревал, что падение Магницкого является совершенно заурядным происшествием по сравнению с тем, что в этом же 1826 г. произошло одно из величайших открытий в математике. 11 февраля 1826 г. (23 февраля по новому стилю) на заседании физико-математического отделения Лобачевский сделал свой знаменитый доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллелях», в котором он высказал мысль о том, что пятый постулат Евклида не может быть выведен из остальных аксиом геометрии. По существу Н. И. Лобачевский сообщил об открытии им новой геометрии. Однако тогда доклад гениального геометра не был понят и вызвал одно лишь недоумение.

В 1827 г. Лобачевский был избран ректором Казанского университета и занимал эту должность в течение 19 лет. Это была славная страница его жизни, полная трудового пафоса и гражданского мужества. На посту ректора университета Лобачевский показал себя незаурядным организатором науки и выдающимся воспитателем молодежи.

Летом 1830 г. достигла Казани начавшаяся в других районах России эпидемия холеры. О мужестве, проявленном молодым ректором Казанского университета во время эпидемии, впоследствии ходили легенды.

Лобачевский добился от губернатора, чтобы город был оцеплен. По распоряжению Лобачевского университетский квартал был превращен в крепость, полностью изолирован от внешнего мира. На территории университета сосредоточилось около 600 человек — преподавателей, членов их семей, студентов. Энергия Лобачевского, принятые им строгие санитарные меры (вот когда пригодились знания в области медицины!) позволили до минимума сократить число жертв.

В 1829—1830 гг. в «Казанском вестнике» было напечатано исследование Лобачевского «О началах геомет-

рии», в котором впервые на страницах научной печати излагались основы неевклидовой геометрии.

В своей работе Лобачевский, в частности, писал: «...Кто не согласится, что никакая математическая наука не должна была бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию; и что нигде в математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельности линий» (Лобачевский Н. И. О началах геометрии // Полн. собр. соч. — М.; Л., 1946—1951. — Т. 1. — С. 185).

Эти слова русского ученого намного опередили свое время. Они направлены против идеалистических представлений, согласно которым понятия о пространстве не зависят от наших чувств, от опыта. Лобачевский был, таким образом, проводником материалистических идей в математике.

В октябре 1834 г. в реакционном журнале Ф. Булгарина и Н. Греча «Сын отечества», № 41, появилась резкая издевательская критическая статья на работу Лобачевского, подписанная инициалами С. С. В ней, в частности, говорилось: «Как можно подумать, чтобы г-н Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезною целию книгу, которая не много принесла бы чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего».

Рецензент договорился даже до того, что предлагал назвать открытие Лобачевского «карикатурой на геометрию».

В 1867 г. в предисловии к первому изданию «Капитала» Карл Маркс писал: «Что же касается предрассудков так называемого общественного мнения, которому я никогда не делал уступок, то моим девизом по-прежнему остаются слова великого флорентийца:

*«Segui il tuo corso, e lascia dir le genti!»*¹.

К. Маркс привел здесь слова Данте: «Следуй своей дорогой, и пусть люди говорят что угодно!»

Можно без преувеличения сказать, что эти слова были жизненным девизом Лобачевского. Поистине тер-

¹ Маркс К. Капитал: Предисловие к первому изданию // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. — 2-е изд. — Т. 23. — С. 11.



Янош Больяй

нистой была дорога, избранная Лобачевским, но она привела его к бессмертию.

Публикация Лобачевским этой работы явилась, как выяснилось впоследствии, настоящей драмой для выдающегося венгерского математика Яноша Больяйя (1802—1860), имя которого история также связала с открытием неевклидовой геометрии.

Еще будучи студентом военно-инженерной академии, Янош Больяй увлекался проблемой пятого постулата. Он сообщил об этом своему отцу, также матема-

тику, Фаркашу Больяйю и получил от него письмо, отрывок из которого мы здесь приводим: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий... я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспробудную ночь, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях... оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя — оно тебе погубит всю радость жизни...» (К а г а н Ф. В. Очерки по геометрии. — М., 1963. — С.39).

Но Янош был одержим своей идеей. Остановить его на полпути было уже невозможно.

В 1833 г. он оставил тяготившую его военную службу. К этому времени на латинском языке уже было опубликовано его исследование как приложение (по-латыни Appendix) к курсу математики, написанному его отцом. В «Аппендиксе» Янош Больяй в чрезвычайно сжатой форме изложил основы неевклидовой геометрии.

Фаркаш Больяй послал экземпляр «Аппендикса» на суд своему другу—великому математику Карлу Гауссу. В ответном письме Гаусс писал, что не может хвалить работу Яноша, так как это значило бы хвалить самого себя, потому что все содержание этой работы почти сплошь совпадает с теми результатами, которые были давно получены им самим, но при жизни он не хотел их публиковать.



Карл Гаусс

Ответ Гаусса произвел на Яноша Больяйя столь тягостное впечатление, что он даже не поверил ему. Янош решил, что «жадный Гаусс» хочет похитить приоритет его открытия. Янош не знал в это время, что приоритет открытия новой геометрии уже принадлежал русскому математику Лобачевскому. О работах Лобачевского он узнал лишь в 1848 г. Душевное равновесие оставило нервного и впечатлительного Яноша, в 1860 г. он скончался.

Итак, создание неевклидовой геометрии связано с именами трех математиков—Карла Гаусса, Николая Ивановича Лобачевского, Яноша Больяйя. Все они независимо друг от друга и почти одновременно пришли к одной и той же общей системе геометрии. Однако роль каждого из них в создании новой геометрии была различной: Гаусс побоялся опубликовать свои результаты, побоялся быть непонятым, подорвать свой непререкаемый авторитет; Лобачевский до конца своих дней трудился над развитием и совершенствованием своей геометрии; Янош Больяй сделал лишь первые шаги в конструировании новой геометрической системы.

Остановимся теперь более подробно на деятельности Лобачевского на посту ректора.

Лобачевский прежде всего занялся организацией настоящей научной библиотеки, которая должна была не только способствовать более эффективной самостоятельной работе студентов, но и дать возможность преподавателям заниматься серьезными научными исследованиями.

Благодаря энергии Лобачевского удалось получить значительные средства на пополнение библиотеки.

Казанский университет испытывал огромную нужду в новых помещениях. В связи с этим Лобачевский возглавил строительный комитет. Он настолько серьезно отнесся к возведению новых зданий университета, что начал изучать архитектуру, хотя строительство велось при активном участии выдающегося архитектора М. П. Ко-

ринфского (им были построены библиотека, анатомический театр, обсерватория, химическая лаборатория и др.). Новые университетские здания были построены к 1842 г.

Почти сразу же по окончании строительства 24 августа 1842 г. случился один из самых страшных в Казани пожаров. Некоторые из вновь построенных зданий погибли. Спасением университетских зданий и имущества лично руководил Лобачевский. При помощи студентов удалось спасти как здание библиотеки, так и бесценные книги и рукописи.

Лобачевский уделял большое внимание тщательному подбору квалифицированных кадров преподавателей, число которых постепенно росло.

По университетскому уставу каждый преподаватель должен был не только обучать студентов, но и заниматься научными исследованиями. Лобачевский хорошо сознавал, что, для того чтобы научные занятия не были пустой тратой времени, их итоги должны как можно быстрее публиковаться. Для этого же необходимо создание специального научного органа—«ученых записок». Лобачевскому удалось осуществить это начинание, и в 1835 г. появилась первая книжка «Ученых записок Казанского университета».

Современники отмечали, что все события университетской жизни этого периода были связаны с именем Лобачевского.

Несмотря на огромную занятость на посту ректора, Лобачевский в это время чрезвычайно плодотворно занимался научной деятельностью. Так, в 1835 г. в первой же книжке «Ученых записок Казанского университета» была напечатана его работа «Вображаемая геометрия», и сразу же после ее опубликования началось печатание в тех же «Ученых записках Казанского университета» самого объемного его сочинения—«Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Печатание этого сочинения закончилось в 1838 г. Следует заметить, что Лобачевский излагал свои мысли очень конспективно, поэтому читать его труды было делом чрезвычайно сложным. В «Новых началах...» он попытался дать более развернутое изложение открытой им геометрии, хотя и этот текст страдает излишней сжатостью.

В 1840 г. Лобачевский опубликовал небольшую книгу (на немецком языке) под названием «Геометрические

исследования». Эта книга получила отрицательный отзыв в немецкой печати.

После смерти Гаусса в его библиотеке были найдены два экземпляра «Геометрических исследований». Гаусс познакомился с содержанием этой книги и был восхищен им, о чем писал своим друзьям.

Однако он не поддержал Лобачевского. Правда, в ноябре 1842 г. Гаусс предложил избрать Лобачевского за его научные заслуги, не поясняя, за какие именно, членом Геттингенского ученого общества, что было равносильно избранию в академию. Гаусс прислал Лобачевскому в связи с этим специальный диплом и письмо.

В 1855 г. в «Ученых записках Казанского университета» появилась последняя научная работа Н. И. Лобачевского «Пангеометрия» (т. е. «Всеобщая геометрия»).

Лобачевский заканчивает свой последний труд соображениями относительно того, какой из двух постулатов—евклидов или неевклидов—имеет место в природе. Он еще раз повторяет вывод, имеющий не только геометрическое, но и гносеологическое значение: «Один опыт только может подтвердить истину этого предположения, например, измерением на самом деле трех углов прямолинейного треугольника...» (Каган В. Ф. Лобачевский.—М., Л., 2-е изд., 1948.—С. 359).

Многогранная деятельность Лобачевского не ограничивалась руководством университетом, научной работой и чтением лекций. Он проявлял большой интерес и к вопросам воспитания молодежи и преподавания математики в гимназии. Так, еще в 1825 г. Лобачевский подготовил школьный учебник «Алгебра или исчисление конечных». К сожалению, по неясным причинам рукопись так и не была издана. Одна деталь показывает, насколько серьезно относился Лобачевский к созданию школьных учебников. Прежде чем подготовить окончательный вариант своего учебника, Лобачевский организовал его опытную проверку в Казанской гимназии.

В 1828 г. в связи с введением нового учебного плана для гимназий и уездных училищ создается комитет для выработки инструкции для учителей, председателем которого был назначен Лобачевский. Ему же было поручено составить инструкцию под названием «Наставления учителям математики в гимназиях» (эта инструкция сохранилась до наших дней).

Воспоминания о Лобачевском его бывших коллег и учеников, его родственников позволяют воссоздать образ великого геометра.

По свидетельству многих людей, Лобачевский отличался не только глубиной математического образования, но и огромной общей культурой. Он интересовался философией, хорошо знал французскую и немецкую литературу XVIII в., изучал химию, ботанику, анатомию. Повидимому, не была ему чужда и поэзия.

По воспоминаниям современников, Николай Иванович был человек высокого роста, худощавый, несколько сутуловатый, с головой почти всегда опущенной вниз, что придавало ему задумчивый вид.

Глубокий взгляд его темно-серых глаз был постоянно угрюмый, задумчивый, и сдвинутые брови его расправлялись в очень редкие минуты веселого расположения, минуты, в которые Лобачевский поражал слушавших его необыкновенным добродушным юмором!

Лобачевский был прекрасным лектором. И если писал он очень сжато, слог его был тяжелым, то лекции читал совсем по-другому, просто, очень четко, стараясь при этом активизировать мысль слушателей, красиво записывал на доске формулы. Во время экзаменов Лобачевский старался получить ясную картину о знаниях студентов, задавая множество вопросов.

В июле 1846 г. исполнилось тридцатилетие службы Лобачевского в университете. По уставу университета он должен был оставить службу, несмотря на то что ему было только 53 года и как ученый и педагог Лобачевский был еще в расцвете сил.

Вскоре после ухода Лобачевского из университета заболел чахоткой и умер его старший сын Алексей, любимец отца, очень на него похожий. Смерть сына окончательно подорвала здоровье Лобачевского. Он стал мрачным и угрюмым, начал слепнуть.

Свою последнюю научную работу «Пангеометрию» Лобачевский диктовал уже будучи слепым.

Материальное положение его было в это время очень затруднительным.

12 февраля (24 февраля по новому стилю) 1856 г. Лобачевский скончался.

Завершая очерк о жизни и деятельности великого математика, ~~постараемся~~ постараемся коротко обобщить гигантский вклад, сделанный Лобачевским в развитие науки.

1. С открытием неевклидовой геометрии закончились бесплодные попытки доказательства пятого постулата. Формально эта проблема была решена после смерти Лобачевского путем установления непротиворечивости неевклидовой геометрии. Таким образом, Лобачевским была решена проблема, о которую в течение двух тысяч лет разбивались тщетные усилия математиков.

2. Открытие Лобачевского способствовало в конечном счете решению еще одной принципиальной проблемы. Дело в том, что начиная с античной эпохи математики были всегда убеждены в разрешимости любой возникающей проблемы. Считалось, что стоит приложить соответствующие усилия—и любая «крепость» падет. Такая точка зрения сложилась, несмотря на то что, помимо пятого постулата, имелись и другие задачи, не поддававшиеся решению в течение многих веков. К этим неприступным задачам относятся, например, три знаменитые задачи древности, сущность которых состояла в следующем: при помощи циркуля и линейки осуществить деление произвольного угла на три равные части (задача о трисекции угла); построить квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга (задача о квадратуре круга); построить ребро такого куба, объем которого был бы вдвое больше объема данного куба, т. е. куба с заданным ребром (задача удвоения куба). Открытие неевклидовой геометрии явилось первым в истории математики доказательством невозможности осуществления определенного вывода. Добавим, что во второй половине XIX в. была доказана неразрешимость циркулем и линейкой сформулированных выше знаменитых задач древности.

3. Открытие неевклидовой геометрии Лобачевского нанесло удар монополии геометрии Евклида, которая в течение двадцати с лишним веков считалась незыблемой, единственно возможной. Лобачевский показал, что геометрия Евклида является частным случаем «воображаемой» геометрии. Открытие Лобачевского положило начало созданию других неевклидовых геометрий, занимающих важное место в современной математике, и оказало огромное влияние на дальнейшее развитие математики.

4. Создание неевклидовой геометрии Лобачевского имело и большое философское значение, поскольку оно укрепило позиции материализма. Знаменитый немецкий философ-идеалист Кант полагал, что человеческий разум может дать лишь чисто субъективную картину мира.

Пространственные представления, по Канту, возможны лишь в рамках евклидовой геометрии. Все положения математики Кант считал не зависящими от опыта, а непосредственно вытекающими из разума. Доказательство этого он усматривал прежде всего в очевидности аксиом. Кант считал, что евклидова геометрия является единственно возможной геометрией, поскольку можно представить себе только единственное пространство. В отличие от этих идеалистических взглядов материалисты, считая материю первичной, рассматривают сознание, мышление (в частности, все аспекты математики) как свойство материи.

Открытием геометрии Лобачевского учению Канта был нанесен сокрушительный удар. Действительно, возможность существования непротиворечивой геометрической системы, отличной от геометрии Евклида, убедительно показала, что аксиомы геометрии не могут представлять собой положения, зависящие только от разума. Аксиомы—это лишь гипотезы, требующие опытной проверки.

5. Открытие Лобачевского нашло приложение к общей теории относительности. Если считать распределение материи во Вселенной равномерным, то в определенных условиях геометрия пространства совпадает с геометрией Лобачевского.

6. Геометрия Лобачевского нашла интересные приложения в ряде областей математики. Лобачевский применил свою геометрию к вычислению определенных интегралов. Французский математик Анри Пуанкаре использовал геометрию Лобачевского при построении теории так называемых автоморфных функций. Геометрия Лобачевского нашла применение также в одном из разделов теории чисел (геометрия чисел).

Говоря о гигантском вкладе в науку Н. И. Лобачевского, известный математик В. Ф. Каган отметил: «В истории математики, в истории точного знания и философии Лобачевский всегда будет принадлежать к числу величайших основоположников наряду с Архимедом, Галилеем, Коперником и Ньютоном» (В. Ф. Каган. Очерки по геометрии.—М., 1963.—С. 240).

ТРАГИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Янош Больяй — гордость венгерской математики, гений, признанный мировой наукой. Судьба его была поистине удивительной и в то же время трагической. Природа одарила его многим — великим умом, прозорливостью мыслителя, страстной натурой, но не дала только одного — стойкости и уравновешенности, как раз тех качеств, которые в силу ряда обстоятельств были так ему нужны.

Некоторые сведения о Яноше Больяйе читатель уже почерпнул при знакомстве с очерком о жизни Н. И. Лобачевского. Здесь эти сведения будут несколько расширены.

Из-за продолжительной болезни матери воспитанием Яноша занимался его отец Фаркаш Больяй. В течение долгих лет Янош был связан с отцом общностью интересов, так как Фаркаш Больяй тоже был математиком, хотя и не столь одаренным, как его сын.

Естественно поэтому в биографическом очерке о Яноше Больяйе привести некоторые сведения и об его отце Фаркаше.

Фаркаш Больяй родился в 1775 году в юго-восточной Трансильвании. Его предки когда-то были богатыми землевладельцами, но постепенно род Больяй обеднел. Фаркаш был от природы весьма одаренным, но в то же время увлекающимся и крайне неуравновешенным. В Геттингенском университете Фаркаш Больяй познакомился с Карлом Гауссом. Вскоре это знакомство переросло в большую дружбу.

У Фаркаша обнаружился интерес к геометрии, в

частности к проблеме пятого постулата. Этому вопросу он посвятил исследование, получившее в литературе название «геттингенская теория параллельных линий». Фаркаш вновь и вновь возвращался к доказательству пятого постулата и много раз его переделывал. Впоследствии Фаркаш Больяй послал Гауссу свое доказательство злополучного постулата. Гаусс сразу обнаружил ошибку в рассуждениях и сообщил об этом своему другу. Венгерский математик чрезвычайно болезненно воспринял свою неудачу.

В 1804 году Фаркаш начал работать в евангелистско-реформатской коллегии (так называлось одно из средних учебных заведений), где он трудился около 50 лет.

Почти 20 лет своей жизни Фаркаш Больяй посвятил созданию курса математики, предназначенного для изучающих элементарную и высшую математику.

Много времени он уделял занятиям с сыном Яношем, родившимся в 1802 году. Успехи мальчика были огромными, при этом в самых различных областях. У Яноша очень рано пробудился страстный интерес к музыке и математике. К 10 годам он имел собственные музыкальные сочинения. К 13 годам он овладел основами математического анализа, т. е. дифференциальным и интегральным исчислением. В 15 лет Янош Больяй выдержал экзамен на аттестат зрелости.

По рассказам отца Янош хорошо знал о его дружбе с Карлом Гауссом, к этому времени ставшим уже знаменитым ученым. Фаркаш Больяй мечтал о том, чтобы его сын Янош продолжил образование в Геттингенском университете под руководством великого мэтра. Однако он не мог предоставить сыну достаточных средств для жизни в большом городе. Кроме того, после окончания школы Янош был еще очень юн и не смог бы жить самостоятельно вдали от дома. В силу этих причин Фаркаш решил написать письмо своему другу Карлу Гауссу с просьбой, чтобы юноша жил в его доме. Янош и Фаркаш тщетно ждали ответа в течение нескольких месяцев.

После некоторых размышлений Фаркаш решил направить сына в военно-инженерную академию в Вене. (Следует заметить, что в это время Венгрия входила в состав Австро-Венгерской империи.) Очевидно, решающим фактором явилось то, что это учебное заведение было закрытым и обучение в нем не требовало существенных расходов от старшего Больяя.

В августе 1818 года Янош стал студентом военно-инженерной академии, в стенах которой он пробыл пять лет. Все это время он продолжает заниматься любимой математикой. В Вене Янош Больяй познакомился с математиком Карлом Сасом. Некоторое время они вместе увлеченно работали над доказательством пятого постулата Евклида.

В сентябре 1823 года Янош был произведен в офицеры и направлен в небольшую крепость Темешвар (Тимишоар), расположенную на территории современной западной Румынии. Служба была необременительной, Янош располагал свободным временем и со всей страстью своей пылкой натуры отдался исследованию теории параллельных линий. В письме к отцу он писал о том, что не достиг еще цели, но получил замечательные результаты: из ничего создал целый новый мир. Из этих слов молодого математика видно, что он отошел от тех бесплодных дорог, которыми следовали многие его предшественники.

Отец Яноша очень огорчился, когда узнал, что его сын, как и он сам в молодости, занялся теорией параллельных линий. Он написал своему сыну полное драматизма письмо. В нем Фаркаш говорил о том, что мрак, окутывающий тайну постулата, никогда не прояснится, а человечество никогда не будет владеть чем-либо совершенным, даже в геометрии.

Янош не внял совету отца и продолжал упорно трудиться. По-видимому, уже к 1823 году он владел тайной неевклидовой геометрии.

Янош весьма тяготился монотонной службой в крепости. Можно только сожалеть, что гениальный математик находился не в университетской среде, в которой он быстро сумел бы достичь выдающихся результатов.

После десяти лет службы в армии Янош подал в отставку и вернулся домой. В это время ему был уже 31 год.

Еще до возвращения сына Фаркаш Больяй решился наконец опубликовать оба тома своего труда. Сочинение Фаркаша стало известным в математической литературе под сокращенным названием «Тентамен», т. е. «Опыт». Первый его том был издан отдельно в 1832 году под названием «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики, элементарной и высшей, приспособленным для этого наглядным методом». Узнав о решении

отца издать свой труд, Янош сумел убедить его поместить в качестве приложения к первому тому свою собственную работу, вошедшую в научную литературу под сокращенным названием «Аппендикс», т. е. «Приложение». Отдельный оттиск «Аппендикса» вышел в свет в 1831 году. Один экземпляр работы Яноша был тотчас послан Карлу Гауссу, но, по-видимому, до него не дошел. Через несколько месяцев книга была послана вновь. Гаусс с огромным интересом прочитал «Аппендикс» и тотчас поделился произведенным на него впечатлением в письме одному из своих друзей. Он обратил внимание на то, что в опубликованной работе венгерского математика он нашел свои собственные результаты, развитые с большим изяществом, но из-за крайней сжатости изложения в форме, мало доступной тому, кто не имел достаточной математической подготовки. В заключение Гаусс отметил, что юный венгерский геометр — «гений первой величины».

В письме же к Фаркашу Гаусс не проявил восторженности, даже, напротив, был весьма сдержан. Правда, в конце письма Гаусс признал «приоритет» Яноша (как уже говорилось, о трудах русского математика Н. И. Лобачевского ни Гаусс, ни Больяй ничего не знали).

Письмо Гаусса, адресованное Фаркашу Больяйю 6 марта 1832 года, крайне любопытно. Основную его мысль мы знаем, она содержится в очерке о Н. И. Лобачевском. Но письмо Гаусса во многом предопределило трагедию Яноша. Поэтому целесообразно привести наиболее характерный отрывок из него.

О работе Яноша Гаусс написал следующее:

«Если я начну с того, что *я ее не должен хвалить*, то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступить иначе: хвалить ее — значило бы, хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен.

Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей совершенно не имеет правильного понятия о том, о чем здесь идет речь; я встретил только очень немногих людей, которые с особенным интересом восприняли то, что я им об этом

сообщал. Чтобы быть в состоянии это понять, надо сначала живо ощутить то, чего собственно здесь недостает, а это большинству людей совершенно неясно. Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли по крайней мере не погибли со мной.

Я поэтому очень поражен тем, что я освобожден от этой необходимости, и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил» (Каган В. Ф. Очерки по геометрии. — М., 1963. — С. 315).

При чтении письма Гаусса невольно обращаешь внимание на слова — «кое-что... я теперь нанес на бумагу». Возникает вопрос: когда же все-таки Гаусс «нанес на бумагу» свои давно созревшие мысли? Ответ мы получаем в одном из писем Гаусса, отправленном в мае 1831 года: «Вот уже несколько недель, как я начал излагать письменно некоторые результаты моих собственных размышлений об этом предмете, частично имеющих уже 40-летнюю давность, но никогда мною не записанных, вследствие чего я должен был 3 или 4 раза возобновлять весь труд в моей голове. Мне не хотелось бы, однако, чтобы это погибло вместе со мной» (Гиндикин С. Карл Гаусс//Квант.—1977.—№ 8.—С. 13). Таким образом, по удивительному совпадению Гаусс начал делать свои записи именно тогда, когда был напечатан отдельный оттиск «Аппендикса».

Итак, формально Гаусс признал достижение Яноша. Но это было сделано в частном письме, а не публично. Если бы знаменитый математик поддержал Яноша, его судьба могла быть иной.

Гаусс не был лично знаком с молодым геометром, не знал, насколько тот был болезненно раним и психологически неустойчив. Но это не снимает ответственности с Гаусса за судьбу Яноша Больяйя.

Янош воспринял письмо Гаусса крайне враждебно. Он не поверил в то, что «геттингенский король» независимо от него пришел к аналогичным результатам.

В бумагах Яноша после его смерти были найдены заметки, в которых он очень резко высказался по поводу мыслей, изложенных Гауссом в письме Фаркашу Больяйю. Янош писал: «...Гаусс вместо прямого, честного, искреннего признания высокого значения «Аппендикса» и всего «Тентамена», вместо того, чтобы с радостью и участием проложить путь новому учению и подумать о

том, как бы искуснее изложить эти идеи, дать хорошим мыслям надлежащий путь, — Гаусс, напротив, старается этого избежать и изливается в благочестивых пожеланиях и сожалениях по поводу недостатка у читателей достаточного образования. Не в этом, конечно, состоит жизнь, деятельность и заслуга ученого» (Каган В. Ф. Очерки по геометрии. — М., 1963. — С. 316—317).

Трагедия Яноша усугубилась еще и тем, что между отцом и сыном начали все чаще возникать разногласия как научного, так и житейского плана. Дело дошло до полного разрыва. Брат Фаркаша сумел примирить отца и сына, но отчужденность и даже взаимная враждебность в их отношениях не исчезли. Янош вынужден был покинуть дом своего отца.

Несмотря на нужду (при выходе в отставку Яношу была назначена небольшая пенсия, совершенно недостаточная для более или менее сносного существования), Янош Больяй продолжал работать над развитием идей, изложенных в «Аппендиксе».

В 1838—1848 годах судьба нанесла Яношу еще два чрезвычайно болезненных удара.

В 1838 году был объявлен конкурс на премию Лейпцигского ученого общества. Желавшим принять участие в конкурсе было предложено усовершенствовать геометрическую теорию мнимых чисел¹. Фаркаш и Янош Больяйи приняли участие в конкурсе. Отец представил доработанную часть своей книги «Тентамен». Янош написал совершенно новую работу. Однако ни отец, ни сын не заняли призовых мест. Решение жюри было особенно несправедливо в отношении младшего Больяйя, который представил глубокий и оригинальный труд. (Впоследствии работа Яноша была опубликована.) Стало ясно, что по степени научной новизны труд Яноша Больяйя не уступает опубликованной позднее (в 1853 году) работе ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона. Возможно, что причина неудачи заключалась в стиле изложения Яноша Больяйя. Как всегда, он писал чрезвычайно сжато, и понять его было нелегко.

В 1848 году Янош испытал еще одно потрясение,

¹ О мнимых числах можно прочесть в кн.: Гусев В. А., Мордкович А. Г. Справ. материалы: Книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1988.

может быть, самое тяжелое в его и без того нелегкой жизни.

Читатель уже знает, что в 1840 году была издана на немецком языке работа Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», с которой ознакомился Карл Гаусс. В начале 1848 года об этом сочинении впервые узнал Фаркаш Больяй. Он выписал книгу и послал ее сыну. Янош был потрясен. В самом начале этого исследования Н. И. Лобачевский сообщал читателям, что свою первую работу по началам геометрии (т. е. по неевклидовой геометрии) он опубликовал в «Казанском вестнике» за 1829 год.

Сначала Янош отказывался верить в существование в далекой России «какого-то Лобачевского». Его обожгла мысль, что сочинение написано Гауссом под псевдонимом «Лобачевский». Потом у Яноша появилась еще более фантастическая версия. Поскольку, по его мнению, дух и содержание сочинения Лобачевского в такой мере совпадают с «Аппендиксом», то остается предположить, что кто-нибудь послал работу в Казань, а русский математик «как человек бесспорно талантливый» уяснил себе ее цель и содержание, а затем по-своему изложил те же результаты.

Но постепенно Янош отошел от фантастических выдумок, в какой-то мере успокоился. Любопытство ученого взяло верх, он стал тщательно изучать книгу Лобачевского и даже написал подробные «Замечания», которые после смерти ученого были обнаружены в его бумагах (в 1902 году «Замечания» были впервые опубликованы). Янош Больяй скрупулезно поясняет некоторые мысли Лобачевского и делает ряд придиричьих, но несущественных замечаний. Однако, справедливости ради, можно отметить, что многие выводы русского математика Янош назвал гениальными.

В последние годы жизни Янош стал заниматься также и алгеброй, но здесь сказалось отсутствие у него достаточных знаний в этой области. Он пытался доказать, что любое алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах, т. е. для каждого уравнения можно установить формулу его корней. К сожалению, Янош Больяй не был знаком с работой гениального норвежского математика Нильса Абелья (1802—1829), который доказал в 1826 году, что для алгебраических уравнений степени $n \geq 5$ не существует общих формул, выражающих корни

уравнения через его коэффициенты с помощью алгебраических операций.

Перенесенные лишения и обиды подорвали здоровье Яноша Больяйя. Янош пережил своего отца только на три года. Он скончался 27 января 1860 года на 58-м году жизни.

Признание, которого так страстно жаждал Янош, пришло к нему лишь после смерти. В 1903 году Венгерская академия наук торжественно отметила столетний юбилей со дня рождения Яноша Больяйя. По решению Всемирного Совета Мира 27 января 1960 года отмечалось столетие со дня его смерти.

КОРОЛЬ МАТЕМАТИКОВ

Великого немецкого ученого Карла Гаусса современники называли королем математики, хотя его происхождение было далеко не королевским. Карл Гаусс родился 30 апреля 1777 года. Его отец был фонтанных дел мастером и садовником. Он считал, что Карлу вовсе не обязательно учиться, чтобы стать таким же мастером, как он сам. Однако мать Гаусса, обладавшая острым умом и сильным характером, имела противоположное мнение. Ее любимый сын с двух лет поражал окружающих своим умом. Ей удалось преодолеть сопротивление мужа, и семи лет Карл поступил в народную школу. Известно, что уже в третьем классе учитель Карла Бюттнер обратил внимание на блестящие математические способности своего ученика. Математический багаж этого педагога был невелик. Но, к счастью, у учителя был помощник — 17-летний Иоганн Мартин Бартельс, влюбленный в математику. Между помощником учителя и десятилетним мальчиком возникла дружба, продолжавшаяся до смерти Бартельса в 1836 году. Старший друг Гаусса ввел его в тайны алгебры и в значительной степени способствовал его математическому развитию.

Интересно отметить, что в Казанском университете Бартельс получил кафедру чистой математики. В 1811 году он начал заниматься с Лобачевским у себя на дому как с особо одаренным студентом. При этом профессор разбирал со своим талантливым учеником «Арифметические исследования» Гаусса.

Удивительная игры судьбы! Все три создателя неев-

клидовой геометрии были связаны невидимыми нитями: Лобачевский с Гауссом — через Бартельса, Янош Больяй с королем математики — через своего отца Фаркаша.

В 1788 году Карл Гаусс поступает в гимназию. Он с наслаждением изучает иностранные языки (математика в гимназии не преподавалась), в совершенстве овладевает латынью. Впоследствии большинство его работ было написано на этом языке.

По-видимому, в гимназии Гаусс не раз задумывался о своем будущем. Он понимал, конечно, что у его родителей нет средств для того, чтобы дать ему высшее образование. К счастью, его юный друг и покровитель Бартельс был знаком с некоторыми влиятельными людьми. Эти люди, познакомившись с Гауссом, были поражены его способностями и начитанностью. Вскоре о нем узнают при дворе. В 1791 году его представляют герцогу Брауншвейгскому Карлу Вильгельму Фердинанду, которому мальчик очень понравился. В результате Гаусс получает возможность поступить в Карлово училище в Брауншвейге, в котором обучался три года. В это же время он изучил ряд работ Ньютона, Эйлера, Лагранжа, начал свои знаменитые исследования по высшей арифметике. И если бы Гаусс не создал ничего, кроме трудов по арифметике, то его имя все равно навсегда было бы вписано в историю наук.

Примерно в это же время молодому математику удалось доказать теорему, которую он назвал «золотой». Сейчас эта теорема называется законом взаимности квадратичных вычетов. Смысл теоремы состоит в следующем.

Если разность чисел a и b делится нацело на число m , то говорят, что a и b сравнимы по модулю m . Это записывается так: $a \equiv b \pmod{m}$; например, $37 \equiv 5 \pmod{4}$, так как разность $37 - 5$ делится на 4. Пусть далее x — неизвестное число, а r — известное. Если существует такое число x , что $x^2 \equiv r \pmod{m}$, то сравнение разрешимо, в противном случае неразрешимо. Теперь можно сформулировать доказанное Гауссом предложение. Пусть дана пара сравнений $x^2 \equiv q \pmod{p}$ и $x^2 \equiv p \pmod{q}$, в которых p и q — простые числа. Оба сравнения разрешимы или оба неразрешимы во всех случаях, кроме одного, когда p и q при делении на 4 дают в остатке 3.

Доказательство закона взаимности квадратичных вычетов явилось серьезным достижением Гаусса. Ведь этого

не удалось сделать таким блистательным математиком, как Эйлер и Лежандр.

В 1795 году Карл Гаусс поступил в знаменитый Геттингенский университет, хотя он еще и не решил окончательно, сделать ли выбор в пользу математики или же заняться филологией. И лишь за месяц до своего 19-летия Гаусс сделал окончательный выбор в пользу математики.

Выбор Гаусса был предопределен удачным решением интересной математической задачи. Занимаясь отысканием корней уравнения $x^n - 1 = 0$, он неожиданно обнаружил связь между этой задачей и делением окружности на равные части и доказал, что правильный семнадцатиугольник можно вписать в круг при помощи циркуля и линейки. Для Гаусса это открытие имело столь блестящее значение, что впоследствии он завещал выгравировать на своем надгробном памятнике правильный семнадцатиугольник, вписанный в круг. Воля ученого была выполнена, правда, на могильном камне этого рисунка нет. Однако памятник, воздвигнутый Гауссу в Браунгшвейге, стоит на едва заметном семнадцатиугольном постаменте.

Итак, сомнения отброшены, Гаусс окончательно решил стать математиком. Начиная со дня решения задачи о семнадцатиугольнике — 30 марта 1796 года — юный ученый приступил к ведению научного дневника. Последняя запись в дневнике сделана 9 июля 1814 года. Дневник был опубликован только в 1898 году, т. е. через 43 года после смерти Гаусса. Это один из интереснейших документов истории математики.

В 1798 году Гаусс закончил университет и вернулся в родной Браунгшвейг. На помощь ему снова пришел герцог Карл, пожаловавший молодому ученому стипендию для продолжения научных исследований.

Интенсивность научной деятельности Гаусса поражает воображение. В 1799 году он получил степень доктора за диссертацию, посвященную доказательству так называемой основной теоремы алгебры.

Основная теорема алгебры читается так:

алгебраическое уравнение n -й степени имеет ровно n действительных и комплексных корней (комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ, такой, что $i^2 = -1$).

Еще в 1629 году французский математик Альберт Жирар высказал предположение, что уравнение n -й степени имеет n корней. Впоследствии эту теорему доказал Даламбер, но его доказательство носило не чисто алгебраический характер, в нем использовались положения математического анализа. Чисто алгебраическое доказательство было найдено Гауссом.

В течение нескольких лет Гаусс упорно работал над приведением в систему своих исследований по теории чисел. Итогом этой работы явилась публикация в 1801 году большого труда под названием «Арифметические исследования». В этом своем монументальном исследовании Гаусс коснулся также вопросов, которыми уже занимались другие знаменитые математики. Возьмем, например, известный результат Пьера Ферма (1601—1665): всякое простое число вида $4n+1$ единственным образом представимо в виде суммы двух квадратов. Ферма доказал это предложение очень громоздким способом. Гаусс провел доказательство значительно изящнее при помощи так называемых двойничных квадратичных форм.

В 1806 году при трагических обстоятельствах умер герцог Карл — покровитель великого математика. Перед Гауссом сразу же встала задача найти приемлемый способ обеспечения своей семьи: к этому времени он был женат. Но Гаусс напрасно волновался, его математические труды уже получили широкую известность. Предполагалось его приглашение в Петербург, он был выбран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. В конце концов после долгих переговоров Гаусс принял приглашение Геттингенского университета занять пост директора вновь организованной обсерватории. Он должен был также читать лекции по математике, тем не менее у него оставалось много времени и для научно-исследовательской работы. На этом посту Гаусс оставался до конца своей жизни.

Одним из его многих увлечений стала и астрономия. 1 января 1801 года один астроном открыл неизвестную звезду 8-й звездной величины. Была высказана гипотеза, что речь идет о планете. Чтобы ответить на этот вопрос, надо было вычислить орбиту небесного тела. За эту работу взялся Гаусс и за два месяца ее закончил. Планету называли Цирерой. А в следующем году произошла сенсация. Воспользовавшись траекторией, вычисленной

Гауссом, немецкий астроном Ольберс обнаружил эту планету. Многими математиками высказывалось сожаление по поводу того, что Гаусс был сбит с основной математической дороги своими астрономическими увлечениями. Возможно, что для этого сожаления имеется основание. Ведь Гаусс так и не развил и не опубликовал некоторые свои открытия, о которых в очень краткой форме упоминалось в научном дневнике.

В 1809 году Гаусс опубликовал монументальный астрономический труд «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям».

В августе 1811 года Гаусс впервые наблюдал комету, ту самую, на которую зимой 1812 года смотрел с радостным волнением Пьер Безухов, герой романа Л. Н. Толстого «Война и мир». Знаменитую комету наблюдали повсюду, пользуясь расчетами Гаусса. Свои астрономические наблюдения он продолжал до конца жизни.

К 1820 году центр интересов ученого переместился совершенно в иную область. Это произошло следующим образом. По поручению правительства Ганноверского королевства Гаусс начал заниматься геодезическими измерениями и исследованиями. (Геодезия — наука, которая, в частности, занимается измерениями на земной поверхности для отображения ее на планах и картах.) Интересно, что Гаусс усовершенствовал методы геодезических измерений, а также применяемые при этом инструменты. В 1828 году он предложил принять за математическую поверхность Земли средний уровень моря.

В 1828 году была опубликована геометрическая работа Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Положения, развитые в ней, требуют для понимания солидной математической подготовки. Но основную идею уловить можно.

Пусть на некоторой поверхности дана точка, координаты которой в пространстве (x, y, z) . Пусть далее $(x + dx, y + dy, z + dz)$ — координаты бесконечно близкой к ней точки. Квадрат расстояния между этими двумя точками назовем квадратичной формой и обозначим $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Далее на заданной поверхности введем криволинейные координаты (по образцу широт и долгот на сфере). Тогда квадратичная форма запишется так: $ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$, где E, F, G — функции от p и q . Исследуя свойства поверхности, независимые от способа выбора криволинейных координат, Гаусс до-

казал, что свойства внутренней геометрии поверхности (расстояния, углы и др.) зависят от функций E , F , G . Отсюда он сделал вывод, что достаточно задать на поверхности квадратичную форму, чтобы вывести из нее все свойства поверхности. В частности, можно узнать, является поверхность «кривой» или нет. Гаусс предложил числовую характеристику меры искривления поверхности.

Любопытен следующий факт. В черновых записях Гаусса было обнаружено упоминание поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны. Впоследствии эта поверхность вращения получила название псевдосферы. Итальянский математик Бельтрами показал, что ее внутренняя геометрия совпадает с ограниченной частью плоскости, на которой справедлива геометрия Лобачевского. Таким образом, если бы Гаусс, который, как мы знаем, занимался исследованием неевклидовой геометрии, обратил внимание на этот удивительный факт, то непротиворечивость новой геометрии была бы установлена значительно раньше.

Мы подошли теперь вплотную к вопросу об оценке места, занимаемого Гауссом в истории открытия неевклидовой геометрии.

По-видимому, Гаусс заинтересовался проблемой пятого постулата примерно в возрасте 15 лет. Читатель уже знает, что во время учебы в Геттингенском университете Гаусс обсуждал эту проблему со своим другом Фаркашем Больяйем. В одном из писем Гаусса, адресованном Ф. Больяйю (1799 г.), будущий великий математик показал ясное понимание того, что имеются многочисленные утверждения, при помощи которых можно доказать евклидов постулат. Если выразить эту мысль на современном языке, то Гаусс имел в виду следующее: существует много эквивалентов пятого постулата относительно аксиом евклидовой геометрии без аксиомы параллельности (или пятого постулата).

Обращает на себя внимание то, что Гаусс не оставил ни одной записи в научном дневнике, посвященной вопросу о доказательстве пятого постулата Евклида. На этом основании иногда делается вывод, что ученый не интересовался постулатом в тот период времени, когда он вел дневник. Однако записи делались им об открытиях или результатах вычислений. Скорее всего Гаусс размышлял об этом, но никаких записей не делал. Впрочем, о пятом постулате ученый неоднократно писал в своих письмах.

В 1813 году Гаусс написал одному из своих друзей о том, что в теории параллельных математика до сих пор не опередила Евклида. В другом письме, относящемся к 1816 году, ученый выражает эту же мысль. Следовательно, к 1816 году размышления Гаусса, по-видимому, еще не продвинули его вперед.

В 1818 году один из учеников Гаусса сообщил ему, что юрист из Кенигсберга Ф. Швейкарт, увлекающийся математикой, пришел к выводу о недоказуемости пятого постулата и к предположению, что наряду с евклидовой геометрией существует «астральная», т. е. «звездная», геометрия, в которой евклидов постулат не выполняется. (Свои мысли Ф. Швейкарт не опубликовал.) Гаусс ответил: «Почти все списано с моей души».

Таким образом, можно сделать вывод, что к 1818 году Гаусс овладел секретом недоказуемости пятого постулата и понимал возможность существования двух различных геометрий, хотя по-прежнему никаких подробных и систематических записей не делал.

Тем не менее Гаусс продолжал мысленно развивать идеи неевклидовой геометрии. В одном из своих писем он дал очень сжатое изложение сущности этой геометрии. В конспективной форме содержание письма можно изложить так (некоторые пояснения приведены в скобках):

1. Если допустить, что сумма углов треугольника меньше 180° , то это приводит к построению геометрии, отличной от евклидовой. Эта геометрия совершенно последовательна, и в ней можно решить любую задачу. (Читатель, очевидно, помнит, что предположение о равенстве суммы углов треугольника 180° является эквивалентом пятого постулата.)

2. Положения новой геометрии содержат много парадоксального. Но при размышлении они не содержат ничего невозможного.

3. В новой геометрии трудно определить некоторую постоянную. Бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. (Читателю книги известно, что геометрия Евклида является предельным случаем неевклидовой геометрии. На странице 55 приводится так называемая функция Лобачевского: $\alpha = \Pi(p)$ (см. рис. 41). Отсюда можно получить $\Pi(p) = 2 \arctg \frac{-p}{k}$. Значение k — это и есть та постоянная, о которой гово-

рит Гаусс. Легко видеть, что при неограниченном возрастании k $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$.)

4. Попытки найти в неевклидовой геометрии противоречие оказываются бесплодными.

В заключении Гаусс отмечает, что ученым известно очень мало о сущности пространства и что мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным.

Как известно, Гаусс только в 1831 году начал приводить в систему свои мысли и отрывочные записи по неевклидовой геометрии. Его заметки были найдены в архиве ученого после его смерти и напечатаны в 1900 году в восьмом томе «Собрания произведений К. Гаусса».

Итак, три великих ученых — К. Гаусс, Н. И. Лобачевский, Я. Больяй — независимо друг от друга, почти одновременно пришли к отчетливому пониманию возможности существования геометрии, отличной от евклидовой. Но кому же все-таки принадлежит приоритет? Выдающийся немецкий ученый Феликс Клейн (1849—1925) без всяких колебаний пишет, что Гаусс первым открыл существование неевклидовой геометрии. Если бы события, связанные с доказательством возможности существования новой геометрии, происходили не в XIX, а, например, в XVI веке, то тогда установить приоритет открытия было бы весьма сложно. В это время не существовало научных периодических журналов. Ученые, наоборот, всячески старались скрыть от своих коллег сделанное открытие в надежде, что когда-либо удастся опубликовать собственную книгу. В XIX веке положение было иным. Русский математик, открыв неевклидову геометрию, опубликовал свои результаты. Приоритет без всякого сомнения принадлежит ему. Но славу создателей неевклидовой геометрии вместе с Лобачевским справедливо делят Карл Гаусс и Янош Больяй.

Однако вопрос о том, почему геттингенский математик не опубликовал свои результаты, относящиеся к теории параллельных, до сих пор остается загадкой. Гаусс как-то заметил, что он предпринимает свои исследования по глубокому внутреннему побуждению. Для него не столь важно, будут они когда-нибудь опубликованы или нет. В случае же с открытием неевклидовой геометрии были и другие причины. Гаусс бесконечно ценил возможность трудиться в тишине и покое. Он смертельно боялся крика беотийцев, т. е. глупцов и невежд, которые могли

подумать, что ученый, успевший завоевать огромный авторитет, выжил из ума. Гаусс был борцом, когда дело касалось науки, преодоления огромных трудностей в той стихии, которую он хорошо знал. Но совершить другой подвиг — подобно Лобачевскому идти своей дорогой, не обращая внимания на вопли беотийцев, — Гаусс не смог. Поэтому в своих письмах, если речь шла о неевклидовой геометрии, он всегда предупреждал, что его высказывания носят сугубо частный характер.

Карл Фридрих Гаусс начал творить на стыке двух веков. По широте научных интересов, по новизне и оригинальности своих идей он заслуженно называется великим математиком XVIII—XIX веков. При этом в нем поразительным образом сочеталось увлечение чистой математикой и прикладными вопросами.

Гаусс умер на 78-м году жизни 23 февраля 1855 года.

Итак, подошло время расстаться с читателем. Но хотелось бы дать ему еще один, последний совет — прочитать речь Николая Ивановича Лобачевского на торжественном собрании Казанского университета 5 июля 1828 года.

Стиль знаменитого математика не очень легок для восприятия. И все-таки эту речь полезно прочитать. Вы отчетливее представите себе бескорыстного человека долга, каким был всегда Лобачевский, оцените его огромную начитанность, широту интересов. Вы получите возможность хотя бы в какой-то мере приобщиться к бесценному наследию великого математика.

УКАЗАНИЯ

1. Ваш ответ неверен. См. указание 2 (после *).
2. Правильно. * Мы не можем доказать предложение № 1, так как не в состоянии подкрепить наше доказательство ссылкой на ранее установленные факты. Переходите теперь к чтению § 2.
3. См. указание 2 (после *).
4. Вы ошибаетесь. См. указание 5 (после *).
5. Правильно. * Мы не можем вкладывать в аксиомы произвольное содержание, так как аксиомы выражают свойства реально существующих в природе вещей. За аксиомы принимаются такие свойства точек, прямых, плоскостей (т. е. стоящих за ними реальных объектов — малых шариков, узких пучков света и т. д.), которые проверялись человеческим опытом в течение тысячелетий, подтверждались бесчисленными экспериментами. Переходите к § 3.
6. См. указание 5 (после *).
7. Вы ошибаетесь. Теоремой называется предложение, получаемое из аксиом и их следствий путем логических умозаключений. * Предложение о хорде и диаметре носит характер соглашения: мы условливаемся называть хорду, проходящую через центр, диаметром. Подумайте и выберите в § 3 другой ответ.
8. Неверно. См. указание 7 (после *).
9. Правильно. Переходите теперь к § 4.
10. См. указание 7 (после *).
11. Вы выбрали неверный ответ. * Пытаясь определить все понятия, мы рано или поздно придем к каким-то исходным понятиям, определить которые невозможно. Переходите теперь к изучению § 5.
12. Правильно. Прочитайте теперь указание 11 (после *), а затем переходите к § 5.
13. См. указание 11 (после *).
14. В основу построения геометрической системы могут быть положены различные системы основных (неопределяемых) понятий. Так, в частности, в качестве неопределяемых можно принять следующие четыре понятия: точка, прямая, плоскость, расстояние. При другой системе изложения геометрии основными понятиями могут быть, например, точка, прямая и плоскость. В 1917 г. немецкий математик Г. Вейль предложил принципиально новый, векторный путь построения геометрии,

в котором за основные, неопределяемые понятия и отношения принимаются: вектор, точка, сумма векторов, произведение вектора на действительное число, скалярное произведение векторов и откладывание вектора от точки. Переходите к изучению § 6.

15. Ваш ответ в принципе правилен. Однако в основу изложения геометрии могут быть положены различные системы основных понятий. Прочитайте поэтому указание 14.

16. Вообще говоря, ответ правилен. Однако рекомендуем прочитать указание 14.

17. Неверно. Пытаясь определить все понятия, мы рано или поздно придем к таким понятиям, которые определить невозможно. Прочитайте теперь указание 14.

18. Неверно. * Под такое «определение» можно подвести все что угодно, например «трудолюбие», «злость» и т. д. Понятие точки, как уже говорилось, принадлежит к числу основных, т. е. неопределяемых понятий. Ошибка Евклида состояла в том, что он пытался определить все используемые им понятия. См. § 8.

19. Правильно. Прочитайте теперь указание 18 (после *).

20. См. указание 18 (после *).

21. Первая аксиома будет читаться так: «Каковы бы ни были две грани пирамиды (треугольной), существует ребро, проходящее через каждую из этих граней». Переходите к § 11.

22. Верно. Читайте теперь § 12.

23. Неверно. * Посмотрите еще раз на рисунок 1. Возьмем, например, грани ASC и BSC . Легко убедиться, что ребро SC проходит через указанные грани. Можно также сказать, что ребро SC лежит в этих гранях или принадлежит им. Переходите к § 12.

24. См. указание 23 (после *).

25. Новое предложение будет читаться так: «Каковы бы ни были две различные грани пирамиды, существует не более одного ребра, которое проходит через каждую из этих граней, т. е. принадлежит каждой из них». Легко убедиться по рисунку, на котором изображена треугольная пирамида, в истинности вновь полученного предложения. Читайте теперь § 13.

26. Новое предложение будет читаться так: «Каждому ребру пирамиды принадлежат по крайней мере две грани. Существуют по крайней мере три грани, не при-

надлежащие одному ребру». Легко убедиться по рисунку 1 в истинности этого предложения. Переходите к § 14.

27. Новое предложение будет читаться так: «Существуют четыре грани пирамиды, не принадлежащие одной вершине (пирамиды)». Действительно, грани ASC , ASB , BSC принадлежат вершине S пирамиды, а грань ABC не принадлежит вершине S . Переходите к чтению § 15.

28. Новое предложение будет читаться так: «Если два ребра имеют общую вершину, то они имеют по крайней мере еще одну общую вершину». Обратившись к рисунку 1, легко видеть, что это предложение является неверным. Следовательно, построить соответствующую модель нельзя. Переходите к § 16.

29. В нашей модели все аксиомы будут выполняться. Действительно, каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки: например, прямой s_{41} принадлежат точки S_4 , S_1 (аксиома A_1). Существует единственная прямая, проходящая через две различные точки: например, через точки S_1 и S_4 проходит единственная прямая s_{14} (аксиома A_2). Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой: точки S_1 , S_2 , S_3 не принадлежат каждой из прямых s_{12} , s_{23} , s_{13} и т. д. (аксиома A_3). Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой: например, прямая s_{12} параллельна прямой s_{34} (нет общих точек); прямая s_{12} проходит через точку S_1 , других параллельных прямых, проходящих через точку S_1 , нет (аксиома A_4). Переходите к § 18.

30. Построение модели системы аксиом $A_1 — A_4$ означает, что эта аксиоматика является непротиворечивой. Переходите к § 19.

31. Учащиеся сыграют $\frac{6 \cdot 5}{2}$ партий, или 15 партий. Произведение $6 \cdot 5$ мы должны разделить на 2, так как каждая партия сосчитана дважды. Переходите к § 20.

32. Аксиомы $A_1 — A_4$ в этой модели, конечно, выполняются. Дело в том, что рассматриваемая модель по своей структуре аналогична модели, которая была исследована в § 17. Единственное отличие состоит в том, что вторая модель несколько более богата объектами. Переходите к § 21.

33. Неверно. * В первом случае предложение A принимается за аксиому, а предложение B доказывается, т. е. предложение B является теоремой. Во втором слу-

чае, наоборот, теоремой является предложение **A**, а предложение **B** включается в список аксиом. Переходите к § 23.

34. Правильно. Переходите к чтению § 23.

35. См. указание 33 (после *).

36. См. указание 33 (после *).

37. Правильно. Переходите к § 24.

38. Неверно. * Это предложение было принято в качестве аксиомы. Переходите к § 24.

39. Дело не в очевидности этого предложения, а в том, что, начиная излагать геометрию, мы вынуждены принять ряд предложений без доказательства. Переходите к чтению § 24.

40. См. указание 38 (после *).

41. Вы ошибаетесь. Мы можем опровергнуть сделанное допущение. Подумайте и выберите другой ответ в § 24.

42. В принципе это верно. Но предложение о том, что прямая AC не пересекает прямую l , может быть доказано даже в том случае, если исключить аксиому об единственности прямой, проходящей через точку и не пересекающей данную прямую (§ 23) (в дальнейшем это будет для нас очень важно). А теорема о сумме углов треугольника, на которую вы ссылались, не может быть получена, если мы исключим аксиому параллельности (через точку вне прямой можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую). Прочитайте теперь указание 43 (после *).

43. Вы совершенно правы. * Если бы прямые AC и l пересекались, то это противоречило бы теореме о внешнем угле треугольника, которая читается так: «Внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, с ним не смежных». Внешний угол α треугольника ABX

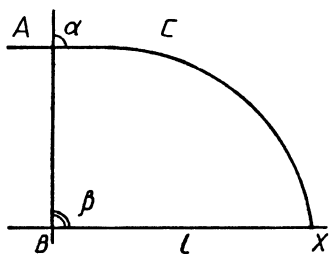


Рис. 58

(рис. 58) должен быть больше внутреннего угла β . Но углы α и β прямые. Полученное противоречие показывает, что прямые AC и l не пересекаются. Переходите теперь к чтению § 25.

44. См. указание 43 (после *).

45. См. указание 46 (после *).

46. Неверно. * В § 24 доказано, что если выполнить определенное построение, то получим две непересекающиеся прямые. Но вполне возможно, что две непересекающиеся прямые можно получить в результате другого построения. В формулировке предложения «Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются» не содержится утверждение о единственности. А в формулировке аксиомы утверждается единственность прямой, проходящей через точку и не пересекающей данную прямую. Переходите к изучению § 27.

47. Правильно. Переходите к изучению § 27.

48. Прочитайте указание 46 (после *).

49. Если обозначим совокупность всех аксиом, которыми мы пользовались при изучении геометрии, за исключением аксиомы параллельности (т. е. предложения Плейфера), через Σ , то следующие два предложения будут истинны:

1) $\Sigma + \text{предложение Плейфера} \rightarrow$ пятый постулат Евклида;

2) $\Sigma + \text{пятый постулат Евклида} \rightarrow$ предложение Плейфера.

Иными словами, если принять предложение Плейфера за аксиому, то можно доказать пятый постулат Евклида, а если принять за аксиому пятый постулат Евклида, то можно доказать предложение Плейфера. Переходите теперь к § 29.

50. Неверно. * Прочитайте еще раз § 22, а затем переходите к § 30.

51. Правильно. Переходите теперь к § 30.

52. См. указание 50 (после *).

53. Неверно. * Ведь мы включили в нашу систему аксиом предложение Плейфера («Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую»). Переходите к § 31 (5).

54. Правильно, это противоречило бы предложению Плейфера, которое мы включили в систему аксиом. См. § 31 (5).

55. См. указание 53 (после *).

56. $\angle AB_1B_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\angle AB_2B_1 = \angle B_2AB_1 = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22,5^\circ$ или $\frac{\pi}{8}$. Переходите к § 32 (6).

57. $\angle AB_2B_3 = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$, $\angle AB_3B_2 = (\pi - \frac{7\pi}{8}) : 2 = \frac{\pi}{16}$. Переходите к § 32 (7).

58. Угол β острый. Можно положить $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 10). С другой стороны, $\angle BAV_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^n + 1}$. Заметим, что с увеличением n увеличивается

также и величина угла BAV_n . Следовательно, при достаточно большом n сможем добиться, чтобы угол β был меньше угла BAV_n . Это означает, что прямая b будет проходить внутри угла BAV_n . Таким образом, прямая b пересечет прямую a . Мы доказали, широко используя теорему о сумме углов треугольника, что если сумма углов ABV_n и β меньше $2d$, то прямая b пересекает прямую a с той стороны, с которой эта сумма меньше $2d$, т. е. доказали пятый постулат Евклида. Переходите теперь к § 32 (10).

59. Доказали, что сумма углов треугольника равна $2d$ для случая равнобедренного треугольника. Можно продолжить доказательство и показать, что если теорема справедлива для случая равнобедренного прямоугольного треугольника, то она будет верна и в общем случае, т. е. для произвольно выбранного треугольника. Это будет сделано позднее, а пока переходите к § 35.

60. Обозначили через x сумму углов произвольного треугольника. Но в момент доказательства нам ничего не было известно о сумме углов треугольника. Нет никаких оснований полагать, что эта сумма одна и та же для всех треугольников, в частности для треугольников ABC , ABD , DBC . Фактически незаметно мы использовали новую аксиому, которая заранее не была включена в систему аксиом, а именно: «Сумма углов во всяком треугольнике есть величина постоянная». Эта аксиома, естественно, не имеет никаких преимуществ перед аксиомой параллельности (или пятым постулатом Евклида). Аналогичную ошибку допускали и те математики, которые пытались доказать пятый постулат Евклида: не замечая этого, они использовали в ходе доказательства какой-нибудь факт, не включенный заранее в систему аксиом. Правда, там речь шла о значительно более сложных, чем в нашем случае, доказательствах и заметить логическую ошибку было очень трудно. Возвращаясь к рассмотренному нами ошибочному доказательству, заметим, что предложение «Сумма углов во всяком треугольнике есть величина постоянная» является эквивалентом пятого постулата. Таким образом, мы пытались доказать

пятый постулат, используя предложение, эквивалентное пятому постулату. Переходите к изучению § 37.

61. Мы взяли произвольную прямую c и установили, что она пересекает прямую b . Следовательно, существует единственная прямая a , проходящая через точку k и не пересекающая прямую b . Отсюда следует справедливость пятого постулата Евклида. Переходите к § 37 (3).

62. В своем доказательстве Прокл исходит из того, что расстояние между параллельными является константой. Это допущение незаконно введено в доказательство. Оно является новым постулатом, равносильным пятому постулату Евклида. Переходите к § 37 (4).

63. Если перпендикуляр и наклонная пересекаются, то имеет место пятый постулат. А это предложение как раз и доказывается. Переходите к § 37 (6).

64. Точки K, K', K'' на одной прямой не лежат, так как прямая KK' перпендикулярна прямой AD , а прямая KK'' не перпендикулярна этой прямой. Переходите к § 37 (8).

65. Действительно, в силу постулата Ф. Большая три точки, не лежащие на одной прямой, принадлежат некоторой окружности. Таким образом, точки K, K', K'' принадлежат окружности. Отсюда следует, что прямые BC и AD являются серединными перпендикулярами к хордам KK' и KK'' , т. е. прямые AD и BC пересекаются в точке O — центре окружности. Переходите к § 37 (9).

66. Отсюда следует, что имеет место пятый постулат Евклида. Переходите к § 37 (10).

67. Рассмотренные рассуждения не являются строгим доказательством пятого постулата, так как использованный нами постулат Ф. Большая является эквивалентом пятого постулата (на это было обращено внимание в § 37). Следовательно, налицо «порочный круг». Переходите к § 38.

68. Аксиома Лобачевского «гарантирует» нам существование двух прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую b . Но она не исключает принципиальной возможности существования других таких прямых, отличных от прямых a_1 и a_2 . Ведь в аксиоме Лобачевского говорится: «...не менее двух прямых...» Переходите к чтению § 41.

69. Неверно. Неевклидовыми точками мы условились считать лишь те точки, которые находятся внутри круга. Переходите к изучению § 44.

70. Правильно. Переходите к § 44.

71. «Каковы бы ни были две точки P и Q (неевклидовы), существует хорда, проходящая через каждую из этих точек».

Легко видеть, что эта аксиома справедлива в той модели, которую мы строим. Переходите к § 45.

72. «Каковы бы ни были две точки P и Q (неевклидовы), существует не более одной хорды, проходящей через каждую из этих точек».

«На каждой хорде лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной хорде».

Эти две аксиомы тоже выполняются в той модели, которую мы строим. Переходите к изучению § 46.

73. Правильно. Прямые AC и BC не пересекают прямую AB (рис. 59). Переходите к чтению § 47.

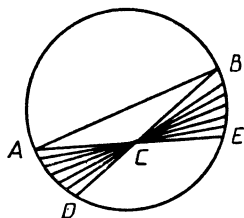


Рис. 59

74. Неверно. *Прямые AC и BC не пересекают прямую AB , так как точки A и B не являются неевклидовыми (рис. 59). Таких прямых, как видно из рисунка, бесконечное множество. Переходите к § 47.

75. См. указание 74 (после *).

76. Мы доказали, что сумма углов произвольного прямоугольного треугольника равна $2d$. Основываясь на этом, можно доказать, что сумма углов любого треугольника равна $2d$. Пусть дан треугольник ABC . Из вершины угла B опустим перпендикуляр BD на основание AC (см. рис. 60). Сумма углов каждого из прямоугольных треугольников ABD и BDC равна $2d$: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 5 + \angle 3 + \angle 4 = 4d$. Сумма углов 5 и 6 равна $2d$. Отсюда заключаем, что $S(ABC) =$

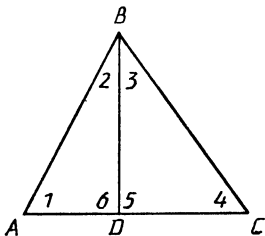


Рис. 60

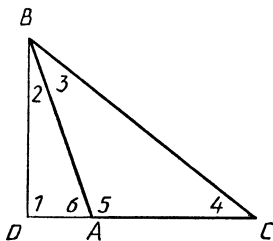


Рис. 61

$=2d$. Доказательство еще не завершено, так как необходимо рассмотреть случай тупоугольного треугольника (рис. 61). Получаем два равенства: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 2d$. Отсюда сразу же видно, что $\angle 3 + \angle 4 = \angle 6$. Таким образом, $S(ABC) = \angle 6 + \angle 5$, $S(ABC) = 2d$. Теперь окончательно доказана эквивалентность «теоремы» Пифагора и предложения о равенстве суммы углов треугольника $2d$. Переходите теперь к § 62 (задание второе, вопрос 16).

77. Построение модели геометрии Лобачевского означает, что геометрия Лобачевского не содержит в себе логических противоречий, т. е. является непротиворечивой. Если же говорить совершенно точно, то следует сказать: геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида. Действительно, при построении модели геометрии Лобачевского мы опирались на факты геометрии Евклида; что касается геометрии Евклида, то можно в свою очередь показать, что и геометрия Евклида непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Наконец, непротиворечивость арифметики подтверждается нашим опытом, нашей практикой. Переходите теперь к изучению § 47 (2).

78. Допустим, что пятый постулат Евклида (или предложение Плейфера) можно логически вывести из абсолютной геометрии. Тогда пятый постулат Евклида будет являться составной частью как геометрии Евклида, так и геометрии Лобачевского. А это невозможно. Почему? Подумайте, а затем см. указание 79.

79. Если бы пятый постулат Евклида (или эквивалентное ему предложение) входил в геометрию Лобачевского, то в ней содержались бы два противоречащих друг другу предложения; предложение Плейфера («Через точку вне прямой в плоскости, определяемой ими, можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую») и аксиома Лобачевского («Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определяемой ими, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих данной прямой»).

Почему все-таки в геометрии Лобачевского не могут оказаться два противоречащих друг другу предложения? Подумайте, а затем см. указание 80.

80. Это невозможно, так как геометрия Лобачевского, как это было установлено выше, является непротиворечивой. Переходите теперь к § 48.

81. Известно, что окружность определяется по трем точкам. У нас же имеются две точки A и B . Однако дополнительно известно, что геометрическое место точек, на которых расположены центры окружностей (неевклидовых прямых), является прямой. Подумайте, как ответить на вопрос, поставленный на странице 40 в § 49 (1), а затем см. указание 84.

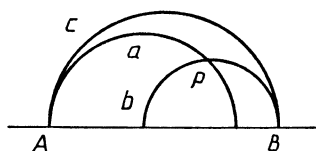


Рис. 62

P проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую c . Переходите к § 49 (3).

83. Нет, нельзя. Геометрия Лобачевского непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива геометрия Евклида. Переходите к § 49 (4).

84. Для того чтобы построить окружность (неевклидову прямую), проходящую через точки A и B , необходимо провести серединный перпендикуляр к отрезку AB . Пересечение его с прямой является центром искомой окружности (рис. 63). Из построения видно, что искомая окружность является единственной. Переходите к § 49 (2).

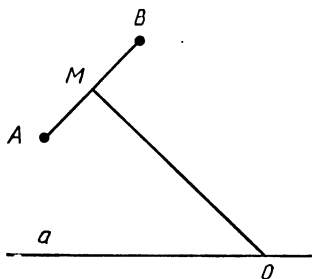


Рис. 63

82. Рассмотрим рисунок 62. Неевклидовы прямые a и b пересекаются в точке P . Прямая c не пересекает прямую b (точки A и B являются неевклидовыми). Таким образом, прямые a и b , проходящие через точку P , параллельны прямой c . Более того, через точку

85. Первая аксиома I группы читается так: «Каковы бы ни были две пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, существует тройка чисел $(a; b; c)$, такая, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$ ».

Вторая аксиома формулируется так: «Каковы бы ни были две различные пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, существует не более одной тройки чисел $(a; b; c)$, такой, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$ ».

Наконец, третья аксиома читается следующим образом: «Для каждой тройки чисел можно указать по крайней мере

две пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, такие, что $ax_1 + by_1 + c = 0$ и $ax_2 + by_2 + c = 0$. Существует по крайней мере три пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, такие, что $ax_1 + by_1 + c = 0$, $ax_2 + by_2 + c = 0$, $ax_3 + by_3 + c \neq 0$. Переходите к § 50 (3).

86. Заметим прежде всего, что уравнения $4x - y - 2 = 0$, $8x - 2y - 4 = 0$, $4kx - ky - 2k = 0$ ($k \neq 0$) задают одну и ту же прямую на плоскости. Находим значения a и b из отношения $\frac{a}{b} = -\frac{3}{7}$. Частные значения a и b равны соответственно 3 и -7 (или -3 и 7). В общем случае полагаем $a = 3k$, $b = -7k$. В итоге была найдена прямая $(3k; -7k; 26k)$. Проверим, принадлежит ли точка $(3; 5)$ этой прямой. Для этого надо подставить в уравнение $3kx - 7ky + 26k = 0$ вместо x число 3 и вместо y число 5. Получаем $9k - 35k + 26k = 0$. Следовательно, точка $(3; 5)$ принадлежит прямой $(3k; -7k; 26k)$. Переходите к § 50 (4).

87. Вторая аксиома в арифметической модели геометрии Евклида также выполняется. Единственность прямой следует из процесса нахождения a ; b ; c (см. § 50 (3)). Переходите к § 50 (5).

88. Решим уравнение $x - 2y - 4 = 0$ относительно x : $x = 2y + 4$. Пусть $y = 0$ и $y = -1$ (произвольные значения). Тогда получим $x = 4$ и $x = 2$. Итак, получили две пары чисел, удовлетворяющих уравнению $x - 2y - 4 = 0$: $(4; 0)$, $(2; -1)$. Получить еще одну пару чисел, не удовлетворяющих уравнению, очень просто. Сразу же видно, что пара чисел $(0; 0)$ не удовлетворяет нашему уравнению. Переходите к § 50 (6).

89. Построим график прямой $y = x - 1$ (рис. 64). Прямая, проходящая через точку $(0; 2)$ и параллельная прямой $y = x - 1$, имеет тот же угловой коэффициент, т. е. $k = 1$. Уравнение этой прямой будет таким: $y = x + b$. В этом случае $b = 2$. Следовательно, искомая прямая имеет уравнение $y = x + 2$. Естественно, что эта прямая единственная. Переходите к § 51.

90. Это предложение, как указывалось ранее, является одним из эквивалентов пятого постулата Евклида и, следова-

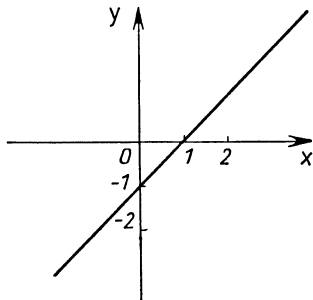


Рис. 64

тельно, не может входить в абсолютную геометрию. Переходите к § 53.

91. Неверно. Теорема, на которую вы ссылаетесь, не принадлежит абсолютной геометрии. В то же время теорема Лежандра, которую мы пытаемся доказать, входит в абсолютную геометрию. См. указание 92 (после *).

92. Правильно. * Согласно сделанному допущению $\alpha + \beta + \gamma > 2d$. С другой стороны, $\alpha + \beta' + \gamma = 2d$ (см. рис. 29). Отсюда следует, что $\beta > \beta'$. Читайте теперь § 53 (10).

93. См. указание 92 (после *).

94. Возникшее противоречие состоит в следующем: правая часть неравенства

$$n(A_1A_2 - B_1B_2) < A_1B_1 - B_1B_2 + B_1A_2$$

есть величина постоянная, левая — величина переменная; следовательно, левая часть неравенства не может принимать при любых значениях n меньшие значения, чем правая (рассмотрим, например, неравенство $5n < 100$, оно не может, естественно, быть верным при любых натуральных значениях n). Переходите теперь к чтению § 53 (17).

95. Правильно. * Сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского не может превосходить $2d$ в соответствии с теоремой Лежандра, которая справедлива для абсолютной геометрии. Эта сумма не может быть равной $2d$, так как предложение о равенстве суммы углов треугольника $2d$ является эквивалентом пятого постулата Евклида. Значит, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского меньше $2d$. Переходите к § 55.

96. Сумма внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского не может быть равной $2d$, так как предложение «Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$ » является эквивалентом пятого постулата Евклида. Вернитесь к § 54, подумайте и выберите другой ответ.

97. Неверно. В § 53 нами была доказана теорема Лежандра: «В абсолютной геометрии сумма углов треугольника не превосходит $2d$ ». Абсолютная геометрия является частью геометрии Лобачевского. Подумайте и выберите в § 54 другой ответ.

98. См. указание 95 (после *).

99. Дефект треугольника не может быть величиной отрицательной. Действительно, $D(ABC) = 2d - S(ABC)$.

В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$, следовательно, $2d - S(ABC) > 0$. Переходите к изучению § 56 (2).

100. Рассмотрим рисунок 31. Сумму углов треугольника ABC можно представить так: $S(ABC) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 4 - 2d = S(ABD) + S(BDC) - \angle 6 - \angle 5 = S(ABD) + S(BDC) - 2d$. Переходите к чтению § 56 (2).

101. $D(ABC) = 2d - (S(ABD) + S(BDC) - 2d) = (2d - S(ABD)) + (2d - S(BDC)) = D(ABD) + D(BDC)$. Переходите к § 57.

102. Эквивалентность постулата Валлиса пятому постулату Евклида означает следующее: в геометрии Лобачевского не существует подобных и неравных треугольников. Если бы такие треугольники существовали, то в геометрии Лобачевского был бы справедлив пятый постулат Евклида, что, естественно, невозможно. Переходите к § 58.

103. Треугольники OAB и AA_1B прямоугольные; $OA = AA_1$ по построению; следовательно, треугольники равны по двум катетам. Аналогично устанавливается равенство других треугольников. Переходите к § 58 (3).

104. Последующие два неравенства запишутся так (см. рис. 34): $D(OB_2A_2) = D(OB_1A_2) + D(B_1A_2B_2) = 2D(OB_1A_1) + D(B_1A_2B_2) > 2^2 D(OAB)$, так как в предыдущем неравенстве (§ 58) было установлено, что $D(OB_1A_1) > 2D(OAB)$. Отсюда $2D(OB_1A_1) > 2^2 D(OAB)$. Аналогично имеем:

$$D(OB_3A_3) = D(OB_2A_3) + D(B_2A_3B_3) = 2D(OB_2A_2) + D(B_2A_3B_3) > 2^3 D(OAB).$$

Переходите к § 58 (4).

105. Из предыдущих записей (см. указание 104) видно, что мы должны получить неравенство $D(OB_nA_n) > 2^n D(OAB)$. Переходите к чтению § 58 (5).

106. Известно, что дефект треугольника есть положительное число, меньшее $2d$. Из неравенства $D(OB_nA_n) > 2^n D(OAB)$ следует, что при достаточно больших значениях n $2^n D(OAB)$ будет рано или поздно превосходить $D(OB_nA_n)$. Таким образом, возникает противоречие. Переходите к § 58 (6).

107. В § 25 была доказана теорема: две прямые, перпендикулярные третьей прямой (в одной плоскости), не

пересекаются. Эта теорема входит в абсолютную геометрию. Переходите к § 59, вопрос 2.

108. В геометрии Евклида через точку A проходит единственная прямая a , не пересекающая прямую b (см. рис. 37). Эта прямая является параллельной прямой b . В геометрии Лобачевского дело обстоит иначе. Прямая a , естественно, также не пересекает прямую b , но она является не параллельной по отношению к прямой b , а расходящейся прямой. Это легко обосновать. Пусть, например, прямая a параллельна прямой b . Тогда прямая a является граничной прямой. Следовательно, любая прямая c , отличная от прямой a , должна пересекать прямую b (рис. 65). Но тогда прямая a оказывается единственной

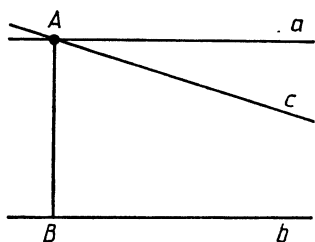


Рис. 65

ной прямой, не пересекающей прямую b . В геометрии Лобачевского это невозможно. Переходите к § 60.

109. Если бы отрезок ED был перпендикулярен обеим прямым a и b , то отсюда сразу следовало бы, что прямые a и b расходящиеся (см. § 59 (2)). Таким образом, следует доказать, что отрезки EO и OD лежат на одной прямой (см. рис. 39). По построению $OD = OE$, $\angle OBD = \angle OAE$ (по условию теоремы). Отсюда следует, что $\triangle OEA = \triangle OBD$. Углы BOD и AOD смежные, т. е. их сумма равна 180° . Сумма углов BOE и EOA также равна 180° . Значит, $\angle AOD = \angle BOE$. Отсюда $\angle BOD + \angle BOE = 180^\circ$. Следовательно, отрезки OD и OE лежат на одной прямой. Переходите к § 60 (2).

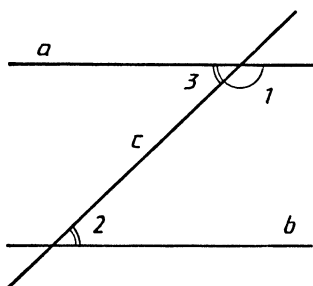


Рис. 66

110. Если две прямые a и b при пересечении с третьей прямой c образуют внутренние односторонние углы, составляющие в сумме $2d$, то эти прямые будут расходящимися (рис. 66). Сумма углов 1 и 2 по условию равна $2d$. Можно доказать, что накрест лежащие углы 3 и 2 равны. Действительно, $\angle 1 + \angle 2 = 2d$, $\angle 1 + \angle 3 = 2d$ (эти углы смежные). Значит, $\angle 2 = \angle 3$. Отсюда по доказан-

ному в § 60 (1) следует, что прямые a и b являются расходящимися. Переходите к § 60 (3).

111. Пусть параллельные прямые a и b пересечены прямой c (см. рис. 40). Если соответственные углы 1 и 2 равны, то по теореме, сформулированной в § 60 (1), прямые a и b будут расходящимися. По условию же прямые a и b параллельные. Следовательно, углы 1 и 2 не могут быть равными. Переходите к § 60 (3), вопрос 2.

112. Углы 3 и 2 не равны (см. рис. 40). В противном случае прямые a и b были бы расходящимися (§ 60 (1)), а по условию они параллельны. Переходите к § 60 (3), вопрос 3.

113. Мы уже видели, что если при пересечении двух прямых третьей прямой сумма внутренних односторонних углов равна $2d$, то эти прямые будут расходящимися (см. указание 110). В нашем же случае прямые по условию параллельны. Значит, сумма внутренних односторонних углов 2 и 4 (см. рис. 40) либо больше $2d$, либо меньше $2d$. Переходите к § 60 (4).

114. Итак, требуется доказать, что $\alpha_2 < \alpha_1$, т. е. с возрастанием расстояния p от вершины угла параллельности до прямой PQ величина угла параллельности уменьшается (см. рис. 42). Известно, что сумма внутренних односторонних углов при параллельных A_2M и A_1N и секущей A_2B меньше $2d$, если эти углы расположены от прямой в сторону параллельности. Таким образом, $\alpha_2 + \beta < 2d$. С другой стороны, $\alpha_1 + \beta = 2d$ как смежные углы. Отсюда следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$. Переходите к изучению § 61 (3).

115. Правильные ответы (вариант 1) таковы: 3; 8; 9; 13; 20; 23. Если, на ваш взгляд, задание выполнено недостаточно хорошо, то можете попробовать свои силы при решении задач варианта 2 (см. с. 58). Переходите ко второму заданию.

116. Правильные ответы (вариант 2) таковы: 4; 6; 9; 15; 17; 22. Переходите ко второму заданию.

117. Сумма углов выпуклого четырехугольника меньше $4d$. Проведем диагональ AC (рис. 67). Сумма углов равна $S = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$. Сумма углов треугольника ABC ($\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$) меньше $2d$; сумма углов треугольника ACD ($\angle 4 + \angle 5 + \angle 6$) также меньше $2d$. Следовательно, сумма углов четырехугольника

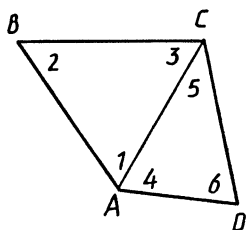


Рис. 67

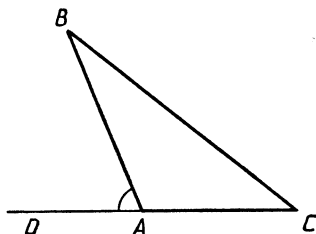


Рис. 68

меньше $4d$. Переходите ко второму вопросу второго задания.

118. Рассмотрим доказательство теоремы о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, т. е. $\angle BAD = \angle ABC + \angle ACB$ (рис. 68). Сумма углов треугольника равна $2d$. Следовательно, $\angle ABC + \angle ACB = 2d - \angle CAB$. Но $2d - \angle CAB = \angle DAB$, что и требовалось доказать. Теперь установите, принадлежит ли данная теорема абсолютной геометрии. Свой ответ проверьте по указанию 124.

119. Указанная теорема в абсолютную геометрию не входит. Абсолютная геометрия является общей частью как геометрии Евклида, так и геометрии Лобачевского. Следовательно, теоремы, в процессе доказательства которых используются эквиваленты пятого постулата, не могут принадлежать абсолютной геометрии. Переходите к четвертому вопросу второго задания.

120. Выше уже указывалось, что предложение «Существуют два подобных и неравных треугольника» является эквивалентом пятого постулата Евклида (§ 57). Следовательно, как уже отмечалось, в геометрии Лобачевского подобных и неравных треугольников не существует. Значит, в геометрии Лобачевского имеется четвертый признак равенства треугольников (если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны). Переходите к пятому вопросу второго задания.

121. Для доказательства рассматриваемого предложения надо использовать теорему: «Для каждого острого угла существует единственная прямая, перпендикулярная одной его стороне и параллельная другой» (см. § 58). Попробуйте все же самостоятельно ответить на вопрос 5, а затем см. указание 125.

122. В процессе доказательства этой теоремы (учебное пособие А. В. Погорелова, раздел VI класса) используются только предложения, входящие в абсолютную геометрию. Следовательно, рассматриваемое предложение входит в абсолютную геометрию. Переходите к вопросу 7 из второго задания.

123. Указанное предложение не исключает существования других прямых, проходящих через заданную точку и не пересекающих прямую. Следовательно, оно входит в абсолютную геометрию. Переходите к вопросу 8 из второго задания.

124. Теорема о внешнем угле треугольника («Внешний угол равен сумме двух внутренних, с ним не смежных») не может входить в абсолютную геометрию, так как в доказательстве этого предложения используется теорема о равенстве суммы углов треугольника $2d$. Заметим, что другая теорема о внешнем угле треугольника («Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного») входит в абсолютную геометрию. Переходите к третьему вопросу второго задания.

125. Пусть дан угол AOB , меньший $2d$. Построим биссектрису OD этого угла (рис. 69). Теорема о том, что каждый угол можно единственным образом разделить пополам, принадлежит абсолютной геометрии. Рассмотрим острый угол AOD . В геометрии Лобачевского для каждого острого угла существует единственная прямая, перпендикулярная к одной его стороне и параллельная другой (§ 58). Луч SP перпендикулярен стороне OD угла AOD и параллелен другой его стороне OA . В силу симметричности относительно прямой OD фигуры, изображенной на рисунке 69, луч SQ также перпендикулярен

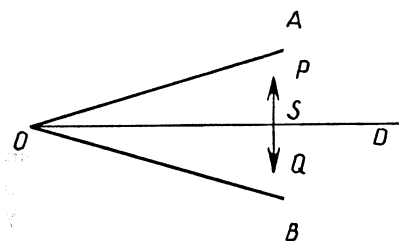


Рис. 69

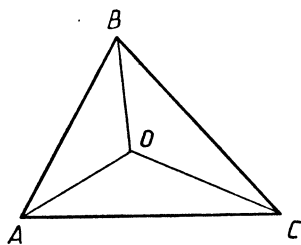


Рис. 70

биссектрисе OD . Таким образом, прямая PQ параллельна обеим сторонам угла AOD в противоположных направлениях. Эта прямая единственная. Переходите к вопросу 6 второго задания.

126. Две расходящиеся прямые не могут иметь более одного общего перпендикуляра. Действительно, пусть, например, расходящиеся прямые имеют два общих перпендикуляра. Тогда получается прямоугольник (сумма его углов $4d$). В геометрии Лобачевского, как мы уже видели, это невозможно (см. вопрос 1 второго задания и указание 117). Переходите к вопросу 9 из второго задания.

127. Пусть дан треугольник, в котором центр вписанной окружности соединен с его вершинами (см. рис. 70). При помощи такой модели можно вполне осуществить проверку аксиом I группы. Ведь в принципе можно считать, что на рисунке изображен тетраэдр (вид сверху).

Если исходить из того, что имеем треугольник, то формулировки аксиом, естественно, изменятся. Например, первая аксиома будет читаться так: «Каковы бы ни были две точки A и B , существует сторона треугольника, проходящая через каждую из этих точек». Переходите к вопросу 10 второго задания.

128. Для того чтобы доказать, что аксиома A_4 не зависит от первых трех аксиом, необходимо построить модель первых трех аксиом, в которой не выполнялась бы аксиома A_4 . Пусть дан треугольник ABC . Условимся считать точками вершины треугольника, а прямыми его стороны. Легко убедиться в том, что первые три аксиомы будут справедливы. Что касается аксиомы A_4 , то она выполняться не будет. Действительно, если сторона AB проходит через вершину A , то не существует стороны, которая бы не проходила через точку и не пересекала сторону AB . Таким образом, аксиома A_4 не зависит от первых четырех предложений. Переходите к вопросу 11 второго задания.

129. Построение модели геометрии Лобачевского, в которой осуществляются все аксиомы абсолютной геометрии, кроме Евклидовой аксиомы параллельности, означает, что эта аксиома не является логическим следствием остальных аксиом. Следовательно, аксиома параллельности геометрии Евклида (или пятый постулат и любое предложение, ему эквивалентное) не зависит от остальных

постулатов абсолютной геометрии. Переходите к вопросу 12 второго задания.

130. Это доказательство не является корректным. Рассуждения, приведенные в вопросе 12, являются частью общего доказательства эквивалентности «теоремы» Пифагора и предложения о сумме углов треугольника (эквивалента пятого постулата). Как уже отмечалось, в процессе доказательства эквивалентности указанных двух предложений ошибочно опираться на другие эквиваленты пятого постулата Евклида. Это будет означать, что система аксиом Евклида искусственно пополняется новыми предложениями. В процессе же рассуждений использован один из эквивалентов пятого постулата. Теперь подумайте, какой именно эквивалент пятого постулата ошибочно использован в рассмотренном доказательстве, затем см. указание 133.

131. Из равенства $D(ABD) = D(ABC) - D(BDC)$ можно заключить, что дефект треугольника ABD меньше, чем дефект треугольника ABC . (Например, если $a = b - c$, то $b = a + c$; значит, $a < b$.) Переходите к вопросу 14 второго задания.

132. Сравним дефекты треугольников ABC и ADC , а также треугольников ABC и ABE (см. рис. 47). На основании свойства, доказанного выше (§ 62, задание второе, вопрос 13), можно составить следующие неравенства:

$$D(ABC) \leq D(ADC), \quad D(ABC) \geq D(ABE).$$

Сумма углов у каждого из равнобедренных прямоугольных треугольников ADC и ABE равна $2d$. Это было доказано ранее. Следовательно, $D(ADC) = 0$ и $D(ABE) = 0$. Неравенства запишутся так: $D(ABC) \leq 0$, $D(ABC) \geq 0$. Как завершить доказательство и установить, что сумма углов треугольника ABC равна $2d$? Подумайте, а затем см. указание 134.

133. В приведенном доказательстве (вопрос 12) сделана ошибочная ссылка на один из эквивалентов пятого постулата: «Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны». Еще раз прочитайте рассуждения на с. 62. Переходите к вопросу 13 второго задания.

134. Неравенства $D(ABC) \leq 0$ и $D(ABC) \geq 0$ могут быть одновременно верными лишь при одном условии,

когда $D(ABC)=0$. (Например, $a \leq b$ и $a > b$. Отсюда следует, что $a=b$.) Следовательно, сумма углов произвольного прямоугольного треугольника ABC равна $2d$. Переходите к вопросу 15 второго задания.

135. Мы составили следующие соотношения: $\alpha + \angle AEF < 2d$ (в геометрии Лобачевского сумма углов четырехугольника меньше $4d$) и $\beta + \angle AEF = 2d$. Отсюда $\alpha < \beta$. Продолжайте читать вопрос 16 второго задания.

136. Функция Лобачевского, как вы знаете, монотонно убывает. Из неравенства $\alpha < \beta$ или $\Pi(AB) < \Pi(EF)$ заключаем, что $AB > EF$. Следовательно, расстояние от одной параллельной прямой до другой при перемещении соответствующей точки в сторону параллельности убывает.

РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ

Вопросы, затронутые в этой книге, не исчерпывают, конечно, темы, связанной с геометрией Лобачевского. Для читателей, заинтересовавшихся различными аспектами неевклидовой геометрии, приводится дополнительный список литературы.

Александров А. Тупость и гений // Квант.—1982.—№ 11, 12.

Александров П. Николай Иванович Лобачевский // Квант. — 1976. — № 2.

Болтянский В. Загадка аксиомы параллельности / Квант. — 1976. — № 3.

Гиндикин С. Волшебный мир Анри Пуанкаре//Квант. — 1976. — № 3.

Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Релятивистский мир. — М.: Наука, 1984. — (Библиотечка «Квант». — Вып. 34).

Каган В. Ф. Очерки по геометрии. — М.: Изд-во МГУ, 1963.

Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика. — М.: Знание, 1984.

Колесников М. С. Лобачевский. — М.: Молодая гвардия, 1965. — (Серия ЖЗЛ).

Лаптев Б. Л. Геометрия Лобачевского, ее история и значение. — М.: Знание, 1976.

Ливанова А. Три Судьбы. — М.: Знание, 1975.

Норден А. П. Великое открытие Лобачевского // Квант. — 1976. — № 2.

С а б и т о в И. Х. Так ли прост евклидов мир? // Квант. — 1984. — № 1.

С м о р о д и н с к и й Я. А. Лобачевский и физика // Квант. — 1976. — № 2.

С м о р о д и н с к и й Я. А., С у р к о в Е. Л. Геометрия Лобачевского и теория относительности. — М.: Знание, 1971.

Ш и р ш о в А. Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского // Квант. — 1976. — № 3.

Щ е р б а к о в Р. Н., П и ч у р и н Л. Ф. От проективной геометрии к неевклидовой. — М.: Просвещение, 1979.

СОДЕРЖАНИЕ

СЛОВО К ЮНОМУ ЧИТАТЕЛЮ	3
АКСИОМЫ — ЭТО СЕРЬЕЗНО	5
ПОЧЕМУ ЗАДУМАЛСЯ ЛАГРАНЖ?	16
ПРОМЕТЕЯ	33
СКВОЗЬ МАГИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ	44
НЕ УБОЯСЯ БЕЗДНЫ ПРЕМУДРОСТИ	55
КАКОВА ЖЕ ВСЕ-ТАКИ ГЕОМЕТРИЯ ВСЕЛЕННОЙ?	65
ЖИЗНЬ ТИТАНА	73
ТРАГИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ	86
КОРОЛЬ МАТЕМАТИКОВ	94
УКАЗАНИЯ	103
РЕКОМЕНДУЕМ ПРОЧИТАТЬ	123

Учебное издание

СИЛИН АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ
ШМАКОВА НИНА АНАНЬЕВНА

**ОТКРЫВАЕМ
НЕЕВКЛИДОВУ ГЕОМЕТРИЮ**

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*

Редактор *Н. И. Никитина*

Младший редактор *Е. В. Казакова*

Художники: обложки *Б. Л. Николаев,*

илл. *С. Ф. Лухин, Н. Н. Рожнов*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *Е. Н. Зелянина*

Корректор *Н. С. Соболева*

ИБ № 10965

Сдано в набор 25.08.87.

Подписано к печати 23.09.88.

Формат 84×108¹/₃₂. Бум. кн.-журн. отеч.

Гарнит. литерат. Печать высокая.

Усл. печ. л. 6,72. Усл. кр.-отт. 7,14. Уч.-изд. л. 6,40.

Тираж 100 000 экз. Заказ № 849. Цена 25 коп.



Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Просвещение»

Государственного комитета РСФСР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.

129846. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.



Ярославский полиграфкомбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
150014. Ярославль, ул. Свободы, 97.

Дорогие читатели!

Книги серии «Мир знаний», выпускаемой издательством «Просвещение», адресованы юным читателям, желающим углубить знания, полученные в школе на уроках математики, физики, биологии, химии и др. Эти небольшие по объему книги отличаются от научно-популярных изданий, выпускаемых примерно на те же темы другими издательствами, прежде всего тем, что они «приспособлены» для чтения школьниками соответствующих классов. Весь материал, в них содержащийся, базируется на школьной программе и учебниках и не предполагает специальной подготовки читателя.

Так, в 1988 году в этой серии выходят следующие книги.

Богданов А. А., Медников Б. М. Власть над геном.

Книга будет интересна тем, кто интересуется новыми исследованиями в одной из самых важных отраслей биотехнологии — направленном изменении наследственности, генной инженерии. Увлекательные очерки о власти человека над геном, о внедрении достижений биотехнологии в медицину, сельское хозяйство, нефтяную и газовую промышленность, о значении охраны генофондов природных сообществ иллюстрированы оригинальными рисунками и схемами.

Липунов В. И. Все нейтронные звезды.

Всем, кто интересуется современным состоянием астрономической науки, в частности астрофизикой, будет интересно прочитать эту книгу, посвященную нейтронным звездам. Из нее можно узнать о результатах наблюдений за этими уникальными объектами, об этапах их эволюции. Чертежи, схемы, шуточные рисунки помогут читателю лучше понять этот достаточно сложный астрономический материал.

Мартыненко Б. В. Кислоты-основания.

Эта книга может быть использована для подготовки тематических вечеров, химических олимпиад и сообщений на уроках, посвященных двум важнейшим классам неорганических веществ — кислотам и основаниям. Содержание книги составляет интересный фактический материал об истории развития теории кислот и оснований, о зна-

чении кислот и оснований в круговороте веществ в природе и в жизнедеятельности организмов, об их использовании человеком.

Комаров В. Н. Наука и миф.

В книге увлекательно описывается современная научная картина мира и те трудности, с которыми встречаются ученые сегодня. В частности, разоблачаются лженаучные, околонаучные «теории» и мифы (о реликтовых животных, «снежном человеке», «пришельцах из космоса» и др.), которыми философы — идеалисты и церковники подменяют научное знание религиозным мировоззрением.

В 1989 году в этой серии также выйдут книги почти по всем учебным предметам. Назовем некоторые из них.

Бурков В. Н. Человек. Управление. Математика.

Какими свойствами должен обладать эффективный хозяйственный механизм? Как его проектировать? Чем может помочь в этом деле математика и вычислительная техника? Все эти вопросы обсуждаются в книге, начиная от простых школьных примеров организации сбора макулатуры и выпуска стенной газеты и кончая сложнейшими задачами перестройки экономики.

Лесенко В. К. Мир озер.

Ярко и увлекательно описываются наиболее интересные озера земного шара, таящиеся в них сокровища и загадки. Особое внимание уделено охране озер.

Чернозубов Ю. С. Как рождаются микросхемы.

Старшеклассникам, желающим углубить свои знания в области физики и химии, особенно тем, кто интересуется физико-химическими основами изготовления и применения микросхем, предназначена эта книга.

Шерстнев М. П., Комаров О. С. Химия и биология нуклеиновых кислот.

В книге рассматриваются достижения и перспективы генной инженерии, а также уровень современной генетики в селекции новых пород животных и сортов растений.