МГТУ имени Н.Э. Баумана
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы интерполяции функций

Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Численные методы интерполяции функций

Интерполяция — это вычисление промежуточных значений функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ на сетке значений аргумента $\mathbf{x}$ для заданного дискретного набора $\{\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y})\}$ значений этой функции, где $\mathbf{x} \in [a, b]$ и $\mathbf{y} \in [a, b]$, а интервал $[a, b]$ определён как $[\min(\boldsymbol{y}), \max(\boldsymbol{y})]$.

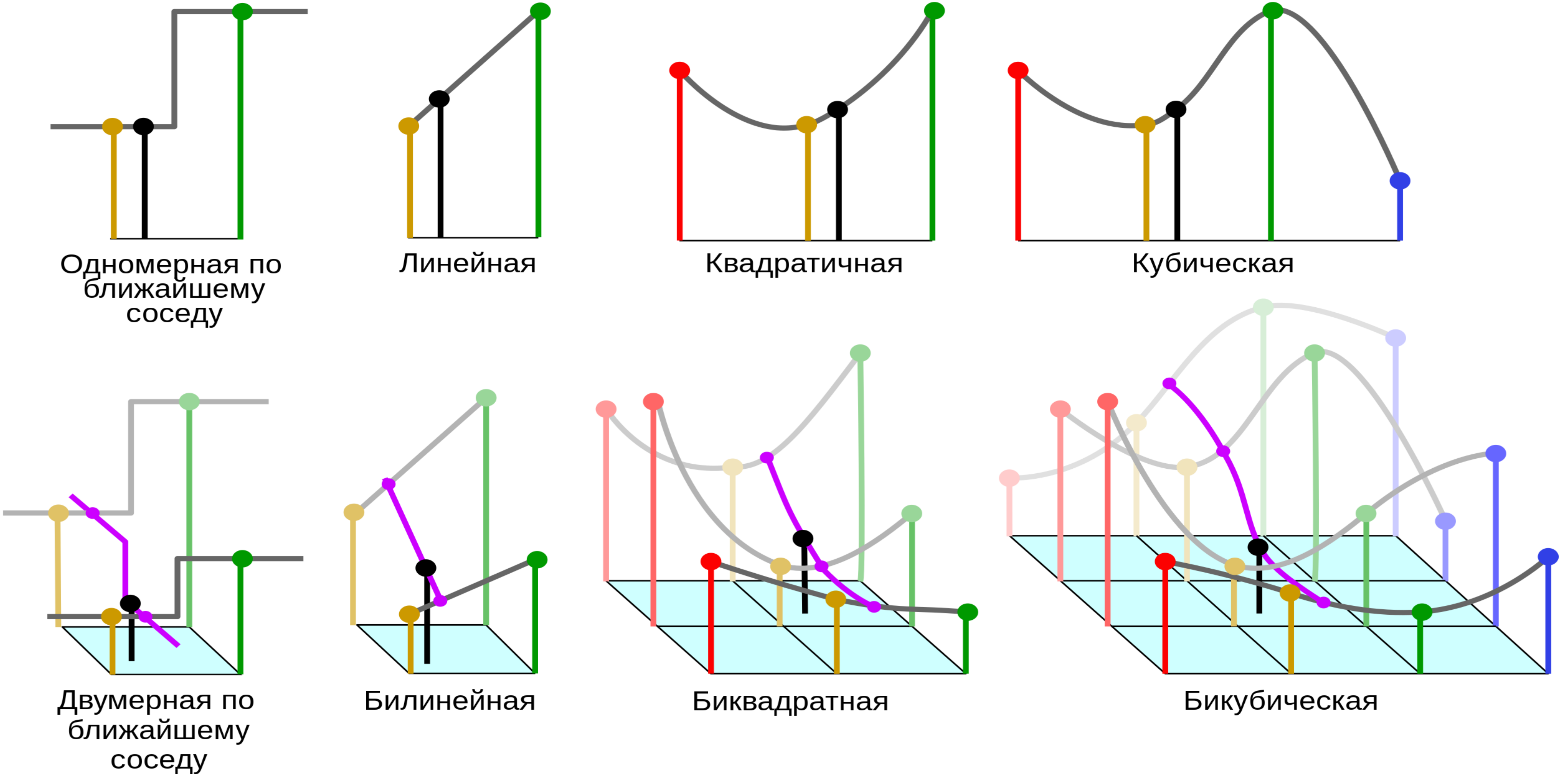
Экстраполяция — это вычисление промежуточных значений функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ на сетке значений аргумента $\mathbf{x}$ для заданного дискретного набора $\{\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y})\}$ значений этой функции, где $\mathbf{x} \notin [a, b]$ и $\mathbf{y} \notin [a, b]$, а интервал $[a, b]$ определён как $[\min(\boldsymbol{y}), \max(\boldsymbol{y})]$.

Виды методов интерполяции:

- интерполяция методом ближайшего соседа;
- полиномиальная интерполяция:
  - линейная интерполяция;
  - интерполяция полиномом Лагранжа;
  - интерполяция полиномом Ньютона вперед;
  - интерполяция полиномом Ньютона назад;
  - интерполяция кубическими сплайнами;
- интерполяция функции нескольких переменных:
  - билинейная интерполяция;
  - бикубическая интерполяция.
- рациональная интерполяция.

Численные методы интерполяции функций

Виды численных методов интерполяции



Интерполяция скалярных функций

Метод ближайшего соседа

Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки

$$\Delta_1 = | x - y_k |$$

$$\Delta_2 = | x - y_{k+1} |$$

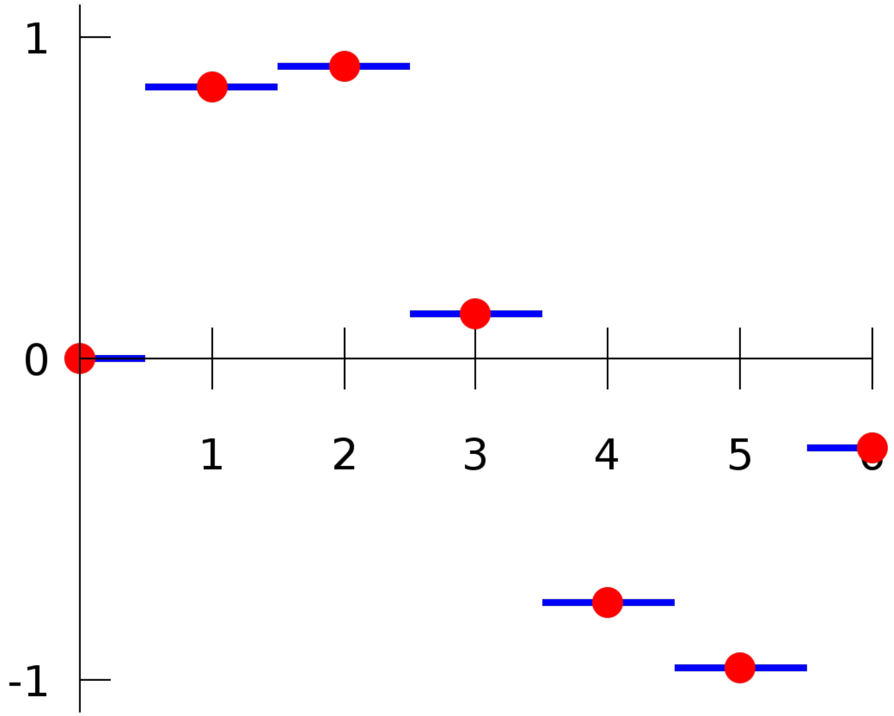
Присваиваем значение функции

$$f(x) = f(y_k)$$

и на каждом шаге проверяем условие $\triangle_2 \leq \triangle_1$
если оно выполняется, то

$$k = k + 1$$

где k — номер узла интерполяционной сетки



Интерполяция скалярных функций

Метод линейной интерполяции

Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

$$f(x) \approx f(y_k) + \frac{f(y_{k+1}) - f(y_k)}{y_{k+1} - y_k}(x - y_k)$$

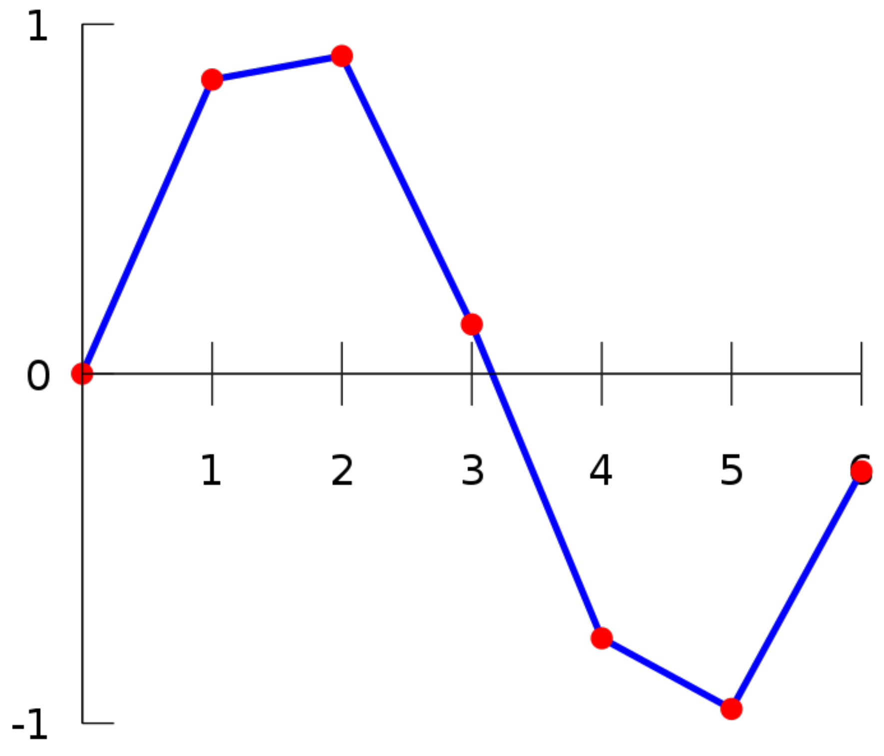
и на каждом шаге проверяем условие $x \geq y_{k+1}$ если оно выполняется, то

$$k = k + 1$$

где k — номер узла интерполяционной сетки.

Формула получена на основе пропорции

$$\frac{f(x) - f(y_k)}{f(y_{k+1}) - f(y_k)} = \frac{x - y_k}{y_{k+1} - y_k}$$



Интерполяция скалярных функций

Интерполяция полиномом Лагранжа

Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

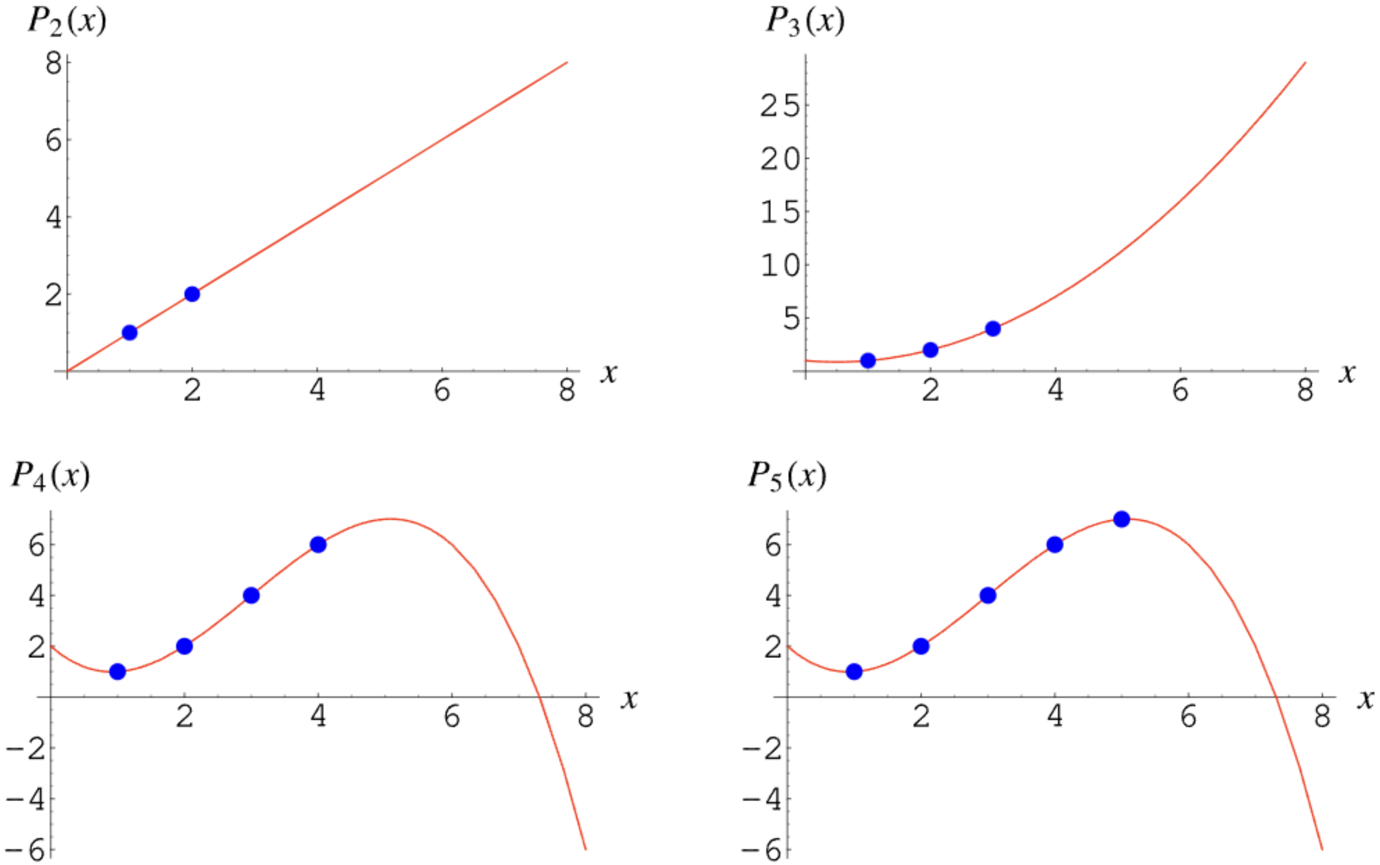
$$f(x) = L(x)$$

где $L(x)$ — полином Лагранжа порядка n

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k) l_k(x)$$

где $l_k(\mathrm{x})$ — базисный полином

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - y_i}{y_k - y_i}$$



Теорема о единственности полинома Лагранжа.
Функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$, состоящая из $n + 1$ точек дискретного набора $\{y, f(y)\}$ аппроксимируется единственным полиномом Лагранжа порядка не выше n.

Интерполяция скалярных функций

Интерполяция полиномом Лагранжа. Примеры

Пусть задана таблично функция $f(x) = x^2$

k	0	1	2
y	1	2	3
$f(y)$	1	4	9

Полином Лагранжа второго порядка

$$L(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + $$
$$+9\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = x^2$$

В результате получим точную аппроксимацию

Пусть задана таблично функция $f(x) = x^3$

k	0	1	2
y	1	2	3
$f(y)$	1	8	27

Полином Лагранжа второго порядка

$$L(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 8\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + $$
$$+27\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = 6x^2 - 11x + 6 \neq x^3$$

В результате получим аппроксимацию с ошибкой, причиной этого, в данном случае, является недостаточность исходного дискретного набора данных

Интерполяция скалярных функций

Интерполяция полиномом Лагранжа. Пример

Пусть задана таблично функция $f(x) = \tan(x)$

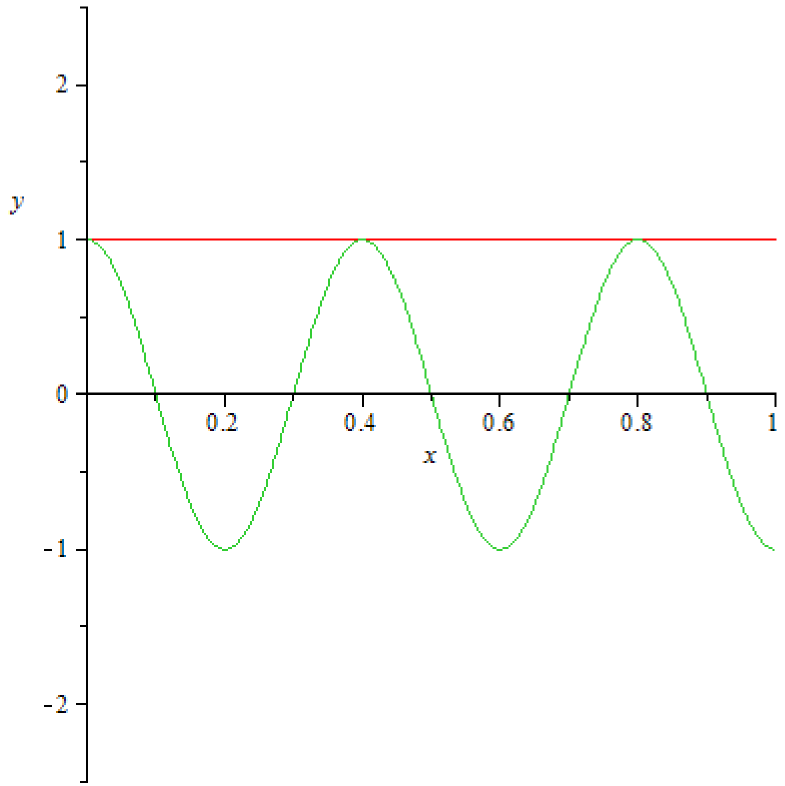
k	0	1	2	3	4
y	-1.5	-0.75	0	0.75	1.5
$f(y)$	-14.1	-0.93	0	0.93	14.1

Полином Лагранжа 5-го порядка

$$
\begin{aligned}
243L(x) = {} & f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \\
& -8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\
& +3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\
& -8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\
& +f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3) \\
& = 4.834848x^3 - 1.477474x
\end{aligned}
$$

Точная аппроксимация для не полиномиальной функции недостижима.

Пример интерполяции функции $f(x) = \cos(5\pi x)$



Алгоритм метода

Для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

$$f(x) = P(x)$$

где $P(x)$ — полином Ньютона порядка n, который может быть рассчитан как

по формуле «вперед»

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$f_k = f(y_k)$$

$$h = y_1 - y_0$$

$$q = \frac{x - y_0}{h}$$

$$\Delta f_k, \Delta^2 f_k, \cdots, \Delta^n f_k$$

конечные прямые разности 1, 2 и n-го порядка

и по формуле «назад»

$$P(x) = f_n + q\nabla f_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 f_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\nabla^n f_0$$

$$f_k = f(y_k)$$

$$h = y_n - y_{n-1}$$

$$q = \frac{x - y_n}{h}$$

$$\nabla f_k, \nabla^2 f_k, \cdots, \nabla^n f_k$$

конечные обратные разности 1, 2 и n-го порядка

Интерполяция одномерной функции

Интерполяция полиномом Ньютона

Формула Ньютона (вперед) при $n = 1$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0$$

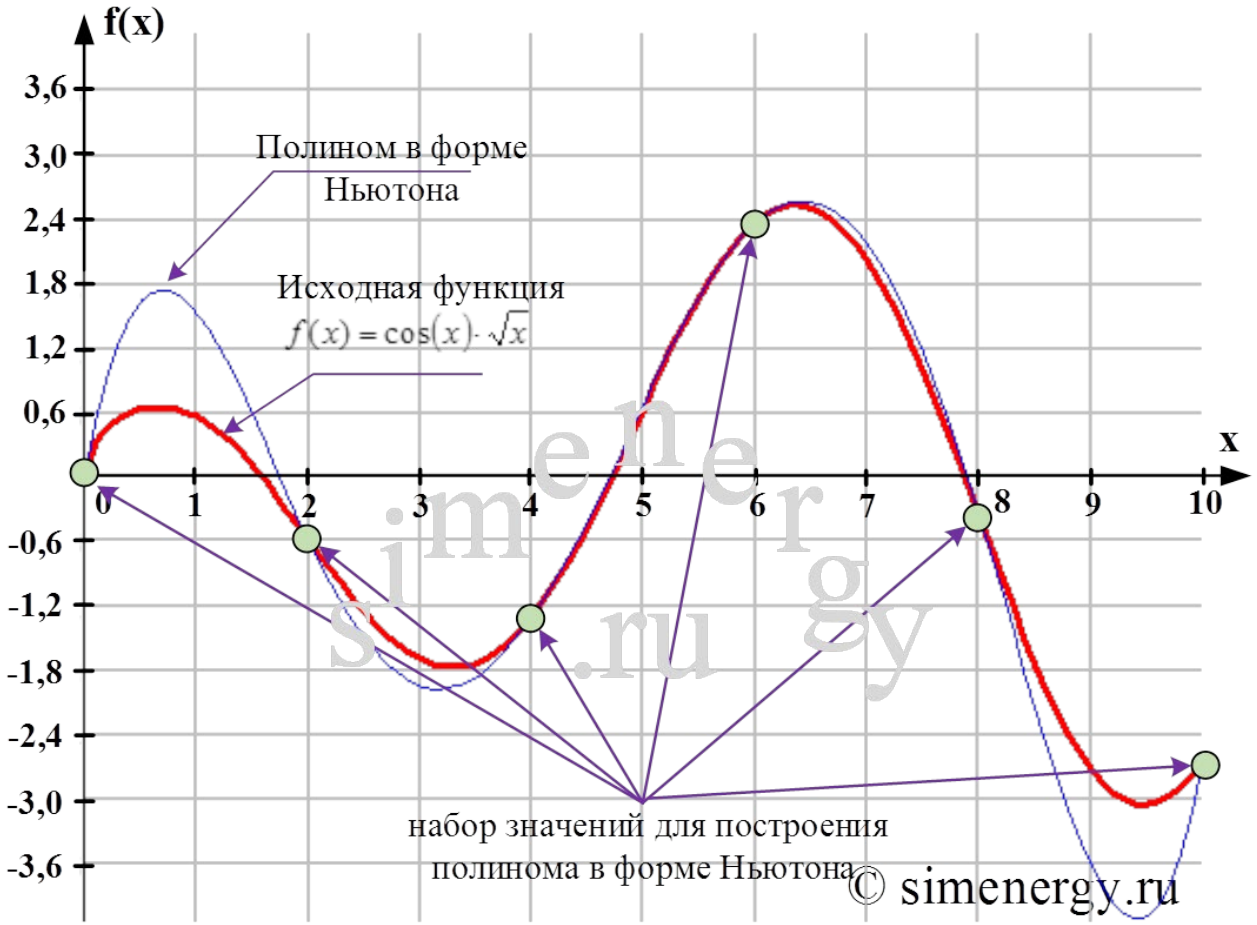
Формула Ньютона (вперед) при $n = 2$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

Формула Ньютона (вперед) при $n = 3$

$$P(x) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

В отличии от интерполяции полиномом Лагранжа, при использовании полинома Ньютона порядок полинома n может быть любым и при добавлении новых точек данных не требуется перерасчет всей задачи



Интерполяция скалярных функций

Интерполяция полиномом Ньютона

Прямые конечные разности

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

$$= \sum_{v=0}^{n} (-1)^v C_n^v f_{k+n-v}$$

Обратные конечные разности

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$\nabla^2 f_k = \nabla f_k - \nabla f_{k-1} = f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}$$

$$\nabla^n f_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$$

$$= \sum_{v=0}^{n} (-1)^v C_n^v f_{k-v}$$

$$C_n^v = \frac{n!}{v!(n-v)!}$$

Пример расчета прямых конечных разностей

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1.77$$

$$y_0 = 0.385$$

$$h = 0.2$$

$$k = \{0,1,2,3\}$$

$$x = 0.885$$

k	y_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.385	1.94	0.29	0.25	0.12
1	0.585	2.23	0.54	0.37	–
2	0.785	2.77	0.91	–	–
3	0.985	3.68	–	–	–

Интерполяция скалярных функций

Интерполяция полиномом Ньютона. Пример

Исходные данные

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1.77$$

$$y_0 = 0.385$$

$$h = 0.2$$

$$k = \{0,1,2,3\}$$

$$x = 0.885$$

k	y_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.385	1.94	0.29	0.25	0.12
1	0.585	2.23	0.54	0.37	–
2	0.785	2.77	0.91	–	–
3	0.985	3.68	–	–	–

Интерполяция полиномом Ньютона—вперед

$$q = \frac{0.885 - 0.385}{0.2} = 2.5$$

$$P(x = 0.885) = 1.94 + 2.5 \cdot 0.29 + \frac{2.5(2.5-1)}{2!}0.25 + $$
$$+ \frac{2.5(2.5-1)(2.5-1)-1}{3!}0.12 = 3.1713$$

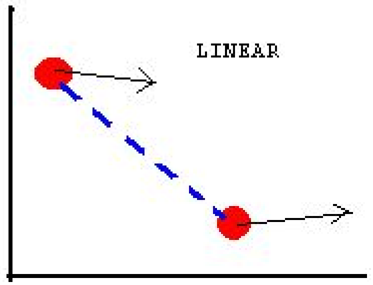
Интерполяция полиномом Ньютона—назад

$$q = \frac{0.885 - 0.985}{0.2} = -0.5$$

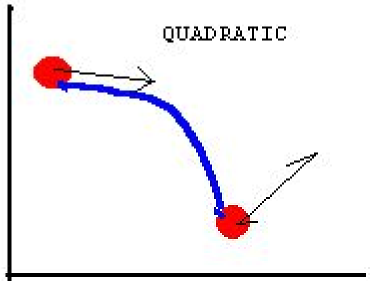
$$P(x = 0.885) = 3.68 + (-0.5)0.91 + \frac{(-0.5)(-0.5+1)}{2!}0.37 + $$
$$+ \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+1+1)}{3!}0.12 = 3.1713$$

Интерполяция скалярных функций функции

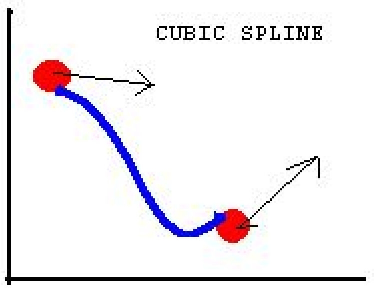
Интерполяция кубическими сплайнами



The path is unrealistic considering the inital velocity vector.



The path doesn't account for the final velocity.



Notice that the path accounts for initial and final velocities.

Условия для кубических сплайнов

- условия Лагранжа

$$s_k(y_{k-1}) = f(y_{k-1})$$

$$s_k(y_k) = f(y_k)$$

- условия непрерывности:

$$s_k^{(1)}(y_k) = s_{k+1}^{(1)}(y_k)$$

$$s_k^{(2)}(y_k) = s_{k+1}^{(2)}(y_k)$$

- условия естественности

$$s_k^{(2)}(y_0) = 0$$

$$s_n^{(2)}(y_n) = 0$$

Интерполяция скалярных функций функции

Интерполяция кубическими сплайнами

Алгоритм метода

Для каждого k-ого интервала $[x_{k-1}, x_k]$ вычисляем коэффициенты $\{a_k, b_k, c_k, d_k\}$ сплайна $s_k(x)$

$$s_k(x) = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3$$

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

затем для каждого x интерполяционной сетки вычисляем значение функции

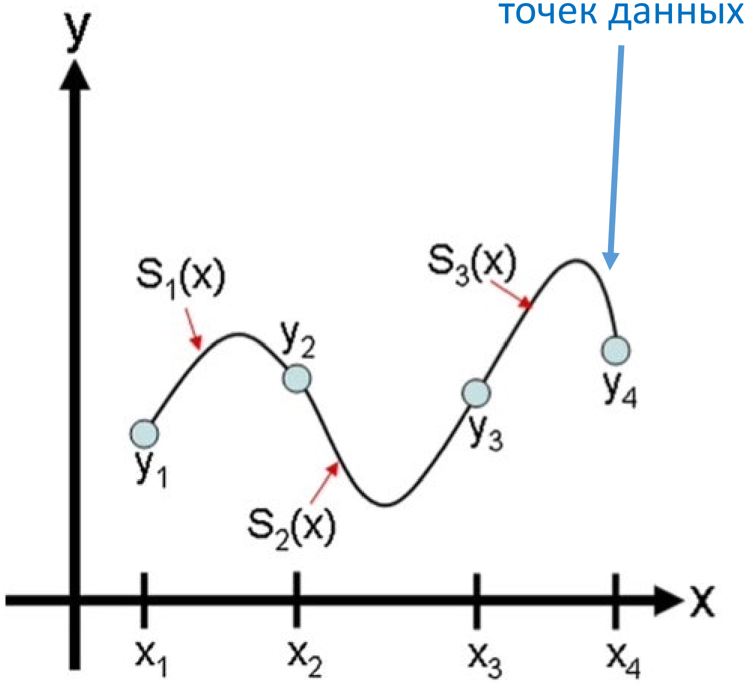
$$f(x) = s_k(x) = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3$$

$$h_k = x - x_{k-1}$$

и на каждом шаге проверяем условие $x \geq x_k$ если оно выполняется, то переходим к следующему сплайну

$$k = k + 1$$

сплайнов на 1 меньше, чем точек данных



Теорема Шенберга—Уитни.
Для $\forall f(x)$ и $\forall$ разбиения интервала $[a, b]$ существует единственный естественный сплайн $s(x)$, который на каждом участке $[x_{k-1}, x_k]$ является полином порядка ≤ 3.

Интерполяция скалярных функции

Интерполяция кубическими сплайнами. Алгоритм определения коэффициентов сплайнов

Инициализируем начальные значения

$$c_1 = c_{n+1} = K_1 = L_1 = 0$$

1. Итерационно для k интервалов вычисляем

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

$$h_{k-1} = x_{k-1} - x_{k-2}$$

$$F_k = 3\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \frac{y_{k-1} - y_{k-2}}{h_{k-1}}\right)$$

$$V_k = 2\left(h_k + h_{k-1}\right)$$

$$K_k = \frac{F_k - h_{k-1}K_{k-1}}{V_k - h_{k-1}L_{k-1}}$$

$$L_k = \frac{h_k}{V_k - h_{k-1}L_{k-1}}$$

2. Итерационно с n до 2 включительно

$$c_k = K_k - L_k c_{k+1}$$

3. Вычисляем остальные коэффициенты с 1 до n до

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

$$b_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2$$

$$a_k = y_{k-1}$$

Индексация сплайнов начинается с 1, а точек данных (значений функций и узлов) с 0

Интерполяция скалярных функций

Интерполяция сплайном Акимы

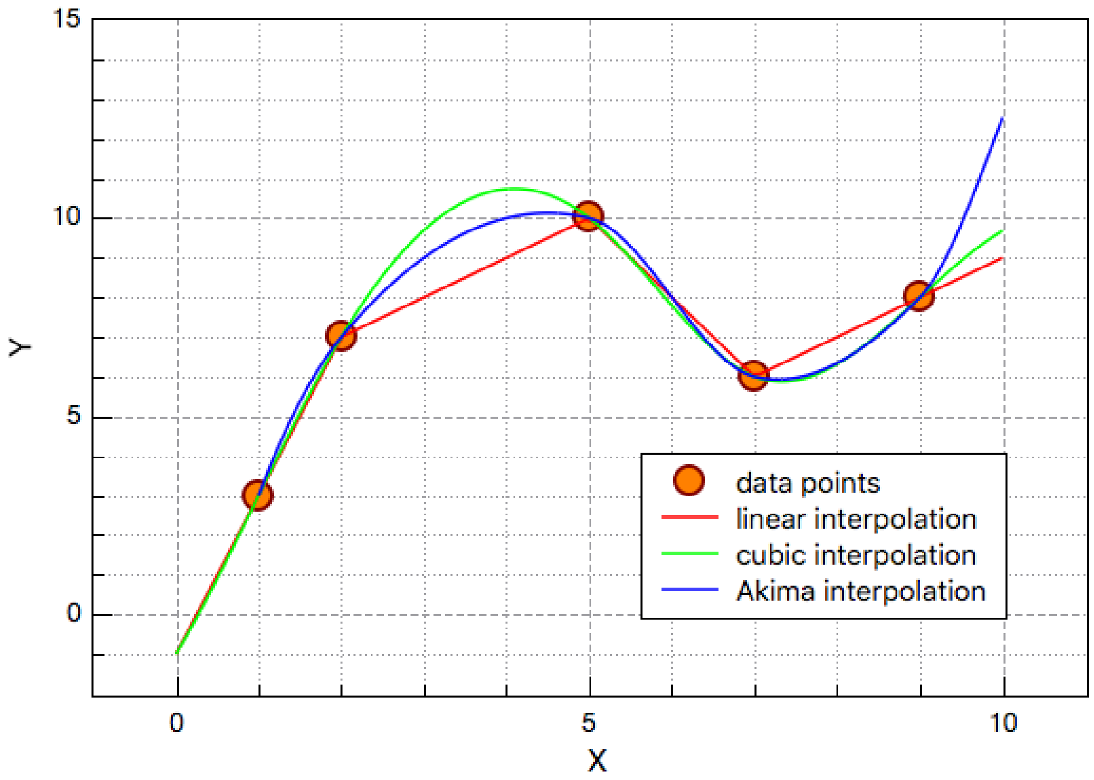
Сплайн Акимы

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

для которого должны выполняться условия

$$P(x_i) = y_i \qquad P'(x_i) = s_i$$

$$P(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad P'(x_{i+1}) = s_{i+1}$$



Алгоритм метода

Для каждого k-ого интервала $[x_{k-1}, x_k]$ вычисляем наклон кривой

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

затем вычисляем наклон сплайна

$$s_i = \frac{|m_{i+1} - m_i| m_{i-1} + |m_{i-1} - m_{i-2}| m_i}{\underbrace{|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}|}_{=0}} \qquad s_i = \frac{m_{i-1} + m_i}{2}$$

для граничных точек

$$s_1 = m_1 \qquad s_{n-1} = \frac{m_{n-2} + m_{n-1}}{2}$$

$$s_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \qquad s_n = m_{n-1}$$

затем определяемы коэффициенты сплайна

$$a_i = y_i \qquad b_i = s_i$$

$$c_i = \frac{3m_i - 2s_i - s_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \qquad d_i = \frac{s_i + s_{i+1} - 2m_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Алгоритм метода

Для каждого узла с координатами y_1 и y_2 линейно интерполируем в точках R_1 и R_2 по x

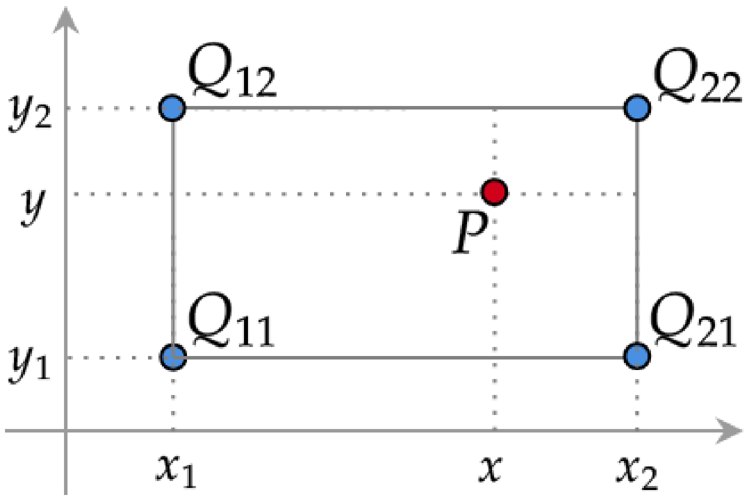
$$f(R_1)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f(Q_{11})+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(Q_{21}),$$

$$f(R_2)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f(Q_{12})+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(Q_{22})$$

по полученным значениям функции в точках R_1 и R_2 интерполируем в точке P с координатами $\{x, y\}$

$$f(P)=\frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}f(R_1)+\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}f(R_2),$$

Затем переходим к следующему квадрату (следующему набору узлов), т.е. увеличиваем i и j (порядок прохождения узлов — произвольный)



$$Q_{11}=(x_i, y_j)$$
$$Q_{12}=(x_i, y_{j+1})$$
$$Q_{21}=(x_{i+1}, y_j)$$
$$Q_{22}=(x_{i+1}, y_{j+1})$$
$$R_1=(x, y_j)$$
$$R_2=(x, y_{j+1})$$
$$P=(x, y)$$

Сначала интерполируем по x, затем по y, но можно и наоборот

Интерполяция функции нескольких переменных

Бикубическая интерполяция

Функция описывается полиномом вида

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^{i}y^{j}$$

нужно определить 16 коэффициентов a_{ij} по заданным 16 значениям функции

для этого формируем СЛАУ и решаем

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$$

Для случая, когда узлы выходят за область [0, 1]

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}\overline{x}^{i}\overline{y}^{j}$$

$$\overline{x}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\overline{y}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

где вектор коэффициентов

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{02} & a_{03} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

вектор значений функции

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}f(-1,-1) & f(0,-1) & f(1,-1) & f(2,-1) & f(-1,0) & f(0,0) \\ f(1,0) & f(2,0) & f(-1,1) & f(0,1) & f(1,1) \\ f(2,1) & f(-1,2) & f(0,2) & f(1,2) & f(2,2)\end{bmatrix}$$

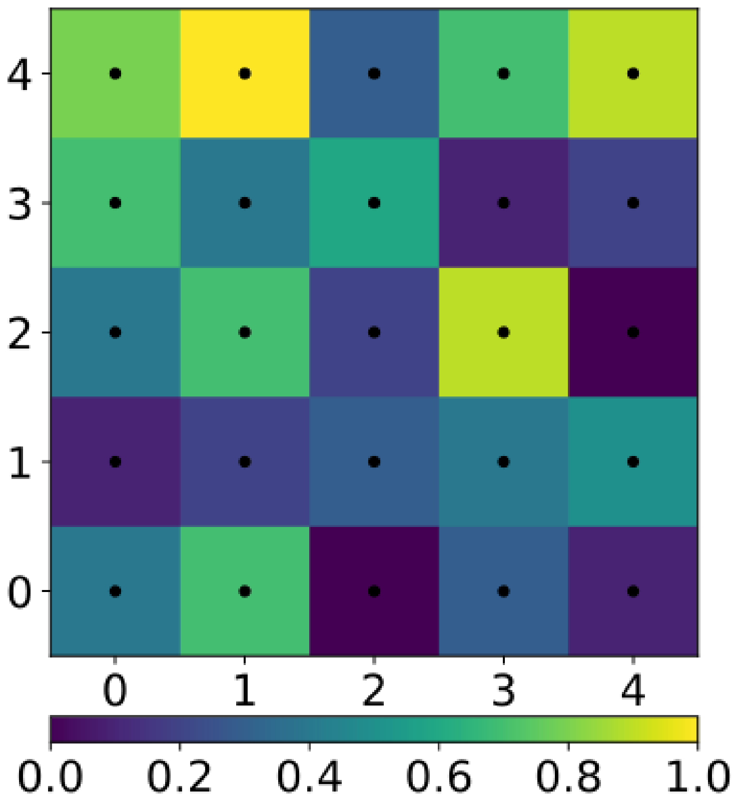
Решение

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -18 & 36 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 6 & -12 & 2 & 6 & 9 & -18 & 3 & -12 & -18 & 36 & -6 & 2 & 3 & -6 & 1 \\
-6 & -9 & 18 & -3 & 12 & 18 & -36 & 6 & -6 & -9 & 18 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -6 & 1 & -6 & -9 & 18 & -3 & 6 & 9 & -18 & 3 & -2 & -3 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -36 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & 12 & 6 & 0 & -9 & 18 & -9 & 0 & 18 & -36 & 18 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\
9 & -18 & 9 & 0 & -18 & 36 & -18 & 0 & 9 & -18 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 6 & -3 & 0 & 9 & -18 & 9 & 0 & -9 & 18 & -9 & 0 & 3 & -6 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 18 & -18 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -6 & 6 & -2 & 3 & -9 & 9 & -3 & -6 & 18 & -18 & 6 & 1 & -3 & 3 & -1 \\
-3 & 9 & -9 & 3 & 6 & -18 & 18 & -6 & -3 & 9 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 3 & -1 & -3 & 9 & -9 & 3 & 3 & -9 & 9 & -3 & -1 & 3 & -3 & 1
\end{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$$

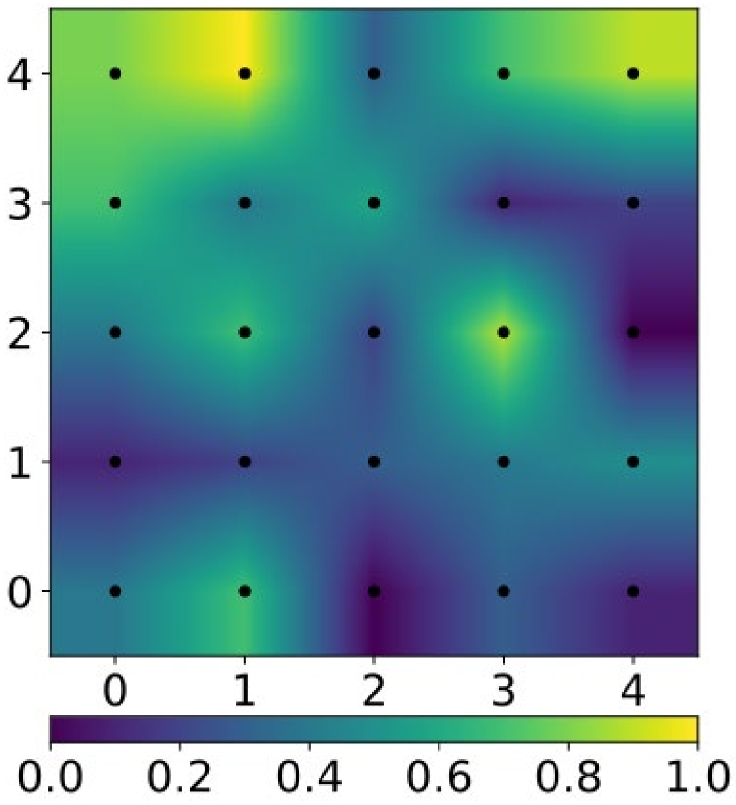
Интерполяция функции нескольких переменных

Бикубическая интерполяция. Сравнение трех методов

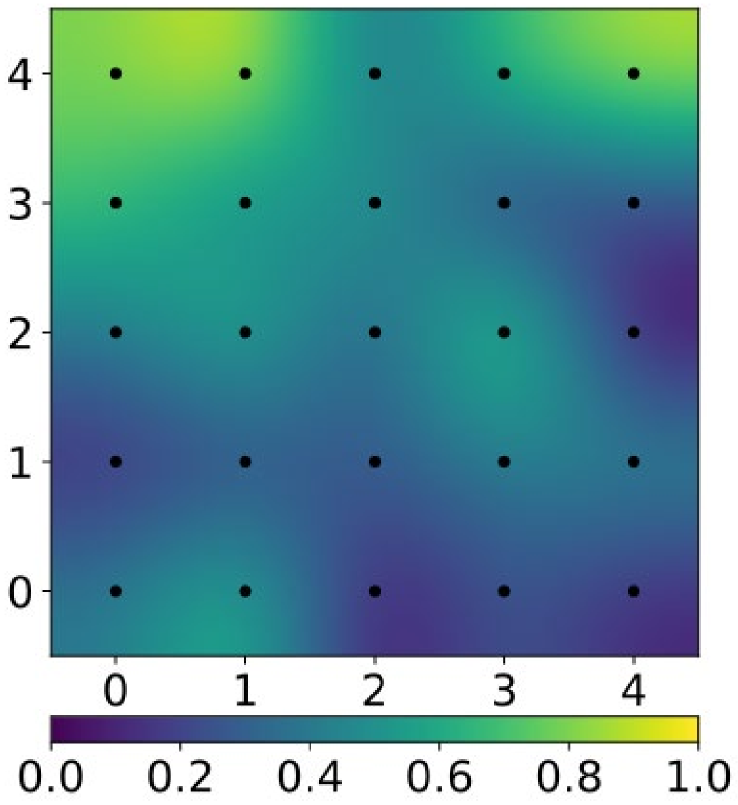
метод ближайшего соседа



метод билинейной интерполяции



метод бикубической интерполяции



Интерполяция функции нескольких переменных

Бикубическая интерполяция. Альтернативные формулы

$$f(x,y)=b_1f(0,0)+b_2f(0,1)+b_3f(1,0)+b_4f(1,1)+b_5f(0,-1)+b_6f(-1,0)+b_7f(1,-1)+b_8f(-1,1)+$$
$$+b_9f(0,2)+b_{10}f(2,0)+b_{11}f(-1,-1)+b_{12}f(1,2)+b_{13}f(2,1)+b_{14}f(-1,2)+b_{15}f(2,-1)+b_{16}f(2,2)$$

$$b_1=\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1)$$
$$b_2=-\frac{1}{4}x(x+1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1)$$
$$b_3=-\frac{1}{4}y(x-1)(x-2)(x+1)(y+1)(y-2)$$
$$b_4=\frac{1}{4}xy(x+1)(x-2)(y+1)(y-2)$$
$$b_5=-\frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1)$$
$$b_6=-\frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2)$$
$$b_7=\frac{1}{12}xy(x-1)(x-2)(y+1)(y-2)$$
$$b_8=\frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y-2)$$

$$b_9=\frac{1}{12}x(x-1)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1)$$
$$b_{10}=\frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y+1)$$
$$b_{11}=\frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y-2)$$
$$b_{12}=-\frac{1}{12}xy(x-1)(x+1)(y+1)(y-2)$$
$$b_{13}=-\frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y+1)$$
$$b_{14}=-\frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y-2)$$
$$b_{15}=-\frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y+1)$$
$$b_{16}=\frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

Интерполяция функции нескольких переменных

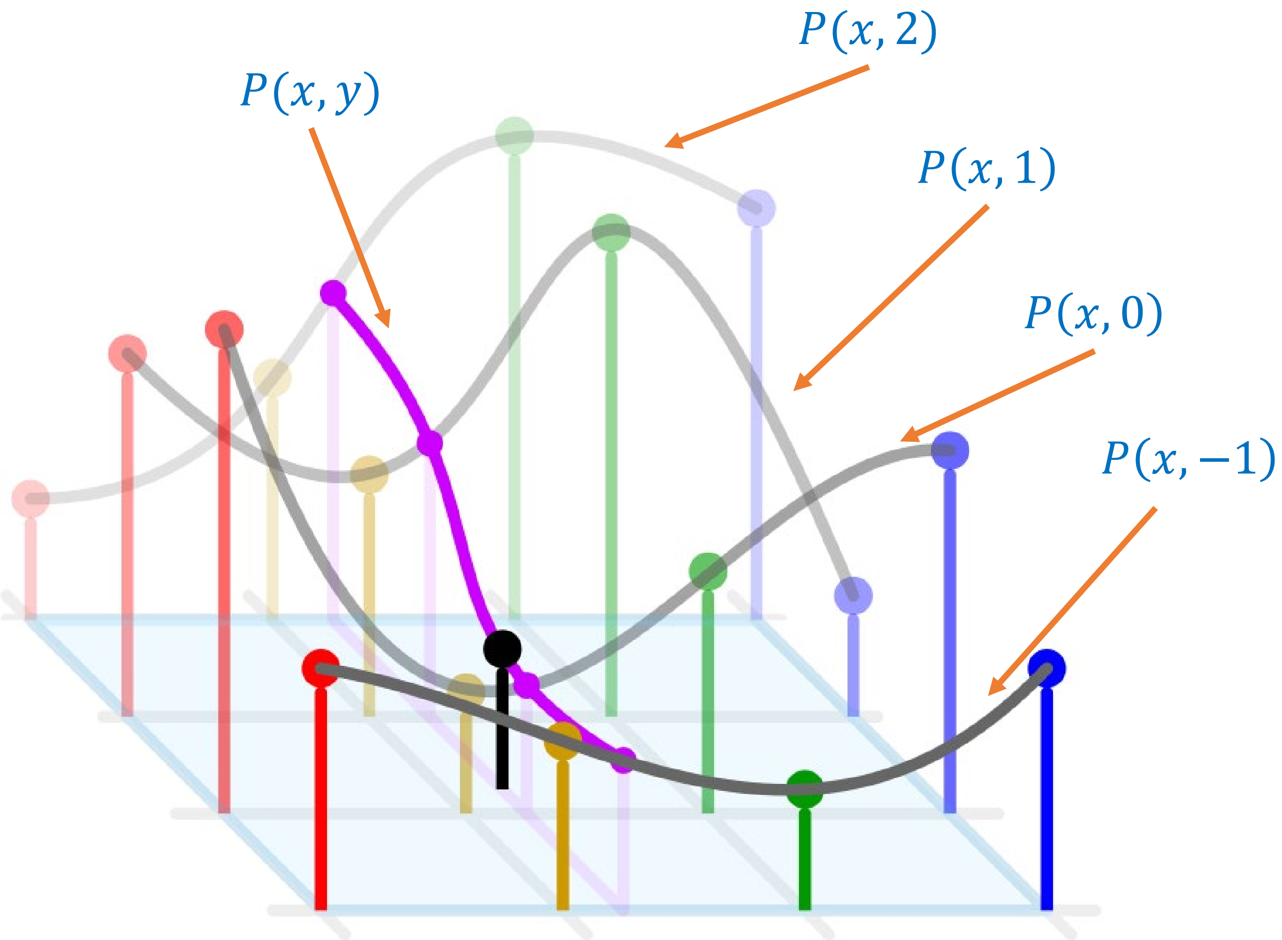
Последовательная бикубическая интерполяция

Функция $f(x)$ с известными $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ описывается кубическим сплайном

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \underbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$$

Рассчитываем $P(x,-1), P(x,0), P(x,1), P(x,2)$ для фиксированного x



Интерполяция идет как в билинейной, сначала по одной координате, потом по другой

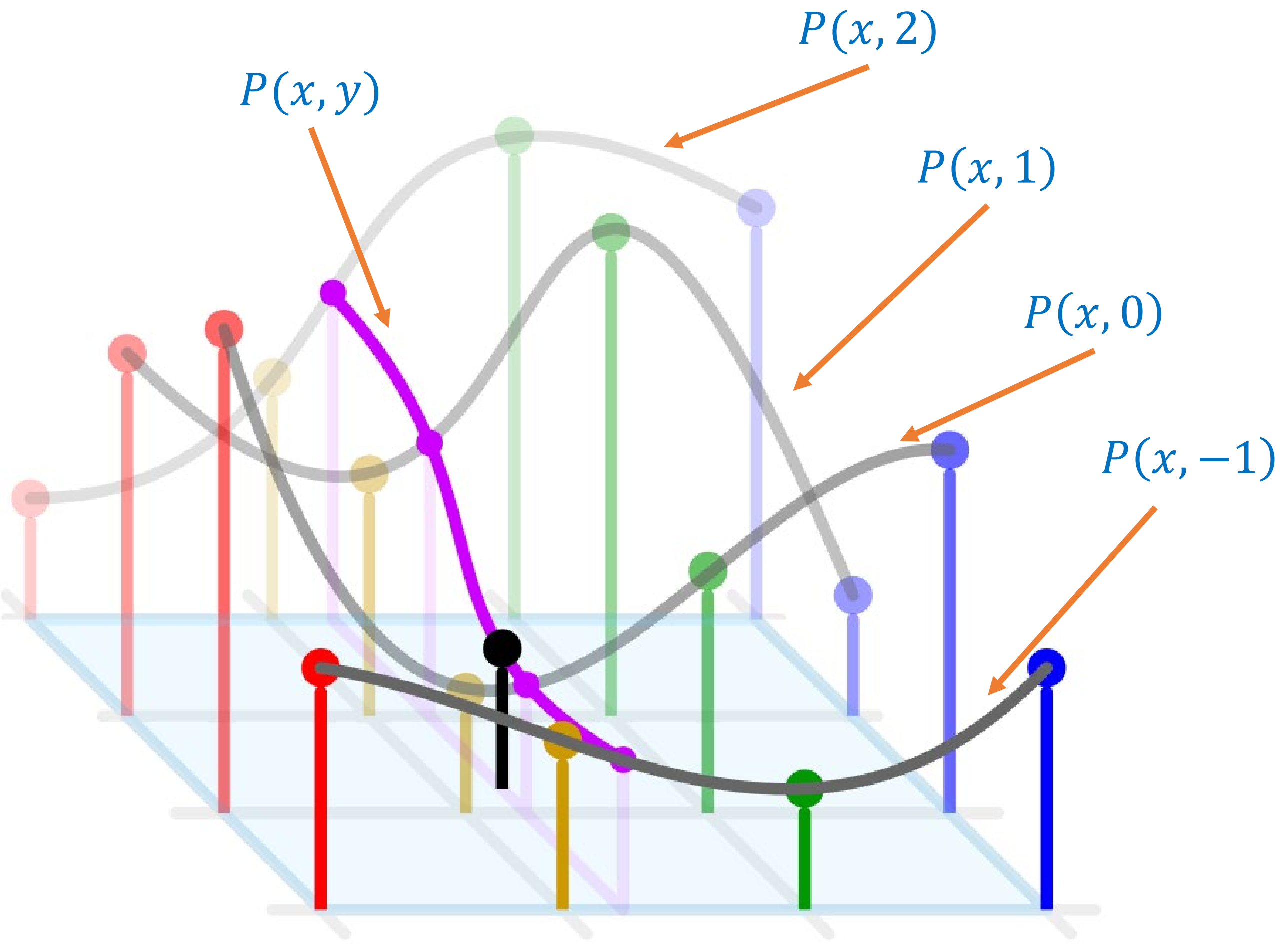
Интерполяция функции нескольких переменных

Последовательная бикубическая интерполяция

Рассчитываем значение $P(x, y)$ в заданной y

$$P(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \mathbf{AFA}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(-1,-1) & f(-1,0) & f(-1,1) & f(-1,2) \\ f(0,-1) & f(0,0) & f(0,1) & f(0,2) \\ f(1,-1) & f(1,0) & f(1,1) & f(1,2) \\ f(2,-1) & f(2,0) & f(2,1) & f(2,2) \end{bmatrix}$$



Подход обеспечивает непрерывность самой функции и её вторых производных на границе ячеек, но не обеспечивает непрерывности первой производной

Интерполяция функции нескольких переменных

Последовательная бикубическая интерполяция

Для непрерывности первой производной коэффициенты сплайна будут иметь вид:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$