МГТУ имени Н.Э. Баумана
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы интегрирования функций

Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Численные методы интегрирования функций

Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

сложно считать,
не всегда существуют

Идея численных методов интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\vartriangle x \to 0} \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j) + E(f)$$

относительно простая функция

ошибка интегрирования

n — количество узлов

x_j — узлы

ω_j — весовые коэффициенты

Виды численных методов интегрирования

- квадратурами интерполяционного типа:
  - квадратуры Ньютона—Котеса;
  - квадратуры Гаусса—Лежандра;
  - квадратуры Гаусса—Якоби;
  - квадратуры Чебышева—Гаусса;
  - квадратуры Гаусса—Лагерпа;
  - квадратуры Гаусса—Эрмита;
  - адаптивные квадратуры.
- стохастический метод (метод Монте—Карло).

Глобальная аппроксимация

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

Локальная аппроксимация

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx$$

Квадратурная формула Ньютона—Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j),$$

строится на основе полинома Лагранжа

- для случая глобальной аппроксимации

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$$

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

один полином на всю область интегрирования, следовательно нужен большой порядок, следовательно сложно считать

- для случая локальной аппроксимации

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_m(x)dx$$

$$L_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

один полином на маленькую область интегрирования, следовательно можно использовать небольшой порядок с сохранением высокой точности

Численные методы интегрирования функций

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Интегрируя $L_n(x)$ и $L_m(x)$ получаем составную квадратурную формулу (набор весовых коэффициентов)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{C_m}\sum_{k=0}^{N-1} h_k\left(\sum_{j=0}^{m} C_{im} f(x_i)\right) = \sum_{j=0}^{n}\omega_j f(x_j)$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

$$x_i = x_k + ih$$

$$C_m = \sum_{j=0}^{m} C_{im}$$

порядок метода

m	C_m	C_{0m}	C_{1m}	C_{2m}	C_{3m}	C_{4m}	C_{5m}	Название метода
0	1	1	–	–	–	–	–	Прямоугольники
1	2	1	1	–	–	–	–	Трапеции
2	6	1	4	1	–	–	–	Формула Симпсона
3	8	1	3	3	1	–	–	3/8 Симпсона
4	90	7	32	12	32	7	–	Формула Милна
5	188	19	75	50	50	75	19	

Численные методы интегрирования функций

Методы прямоугольников и метод трапеций

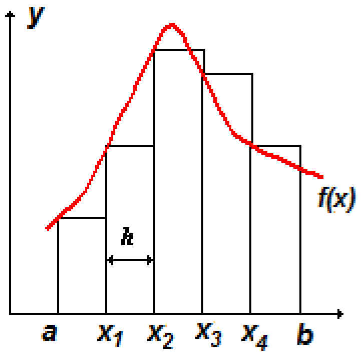
нужно знать точку в середине интервала

Метод левых прямоугольников

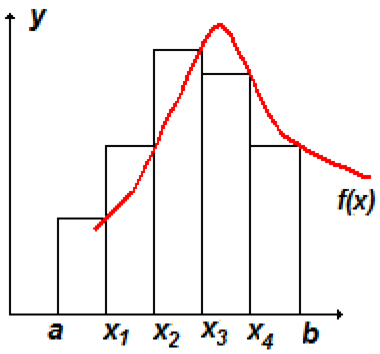
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + E(f)$$

Метод правых прямоугольников

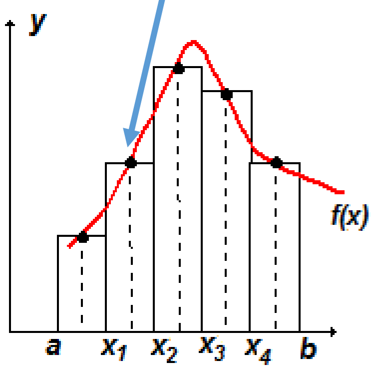
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + E(f)$$



Левые прямоугольники



Правые прямоугольники



Средние прямоугольники

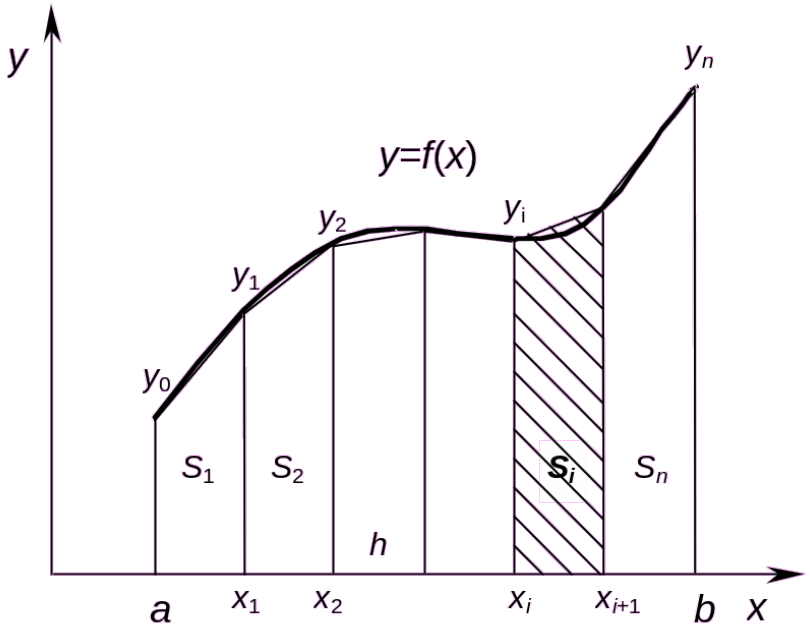
Метод средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) + E(f)$$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) + E(f) =$$

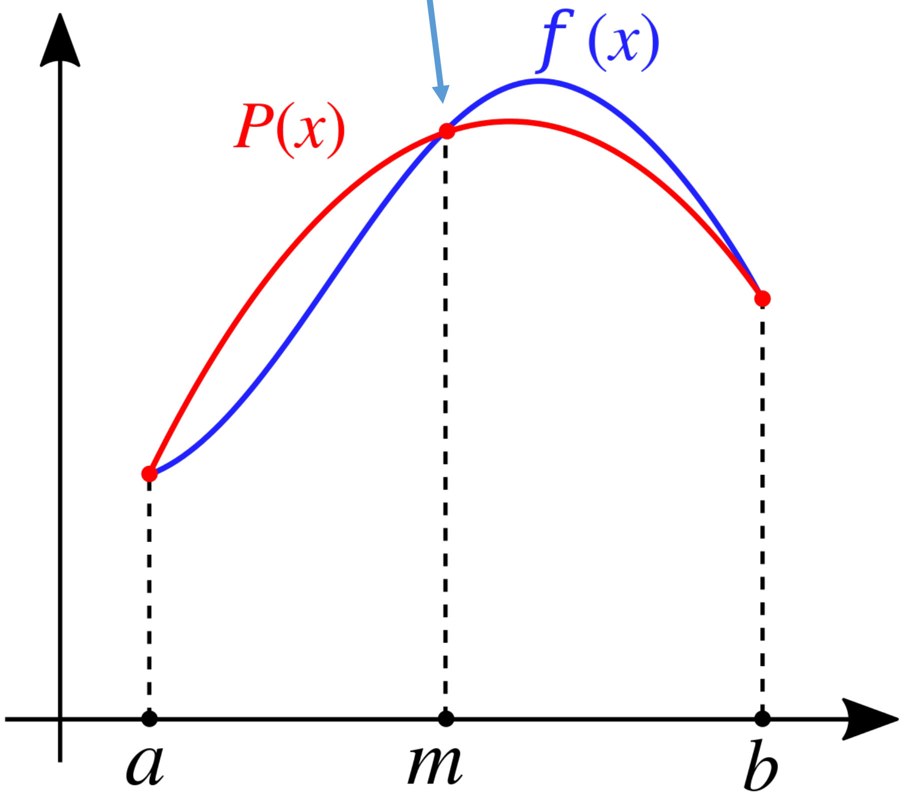
$$= \frac{f(a)}{2}(x_1 - a) + \frac{f(b)}{2}(b - x_{N-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} + E(f)$$



Численные методы интегрирования функций

Метод парабол (метод Симпсона)

нужно знать точку в середине интервала



Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2N}) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_{2i-1}) \right)$$

Метод сам разбивает каждый маленький интервал интегрирования на 2 подинтервала

Численные методы интегрирования функций

Точность интегрирования

Алгебраический порядок точности — это наибольшая степень полинома, для которой численный метод даёт точное решение

Алгебраический порядок точности — численный метод имеет порядок точности d, если его остаток $E(f)$ равен нулю для любого полинома степени d, но не равен нулю для полинома степени d+1.

Методы повышения точности интегрирования:

- усложнение глобальной аппроксимации;
  (аппроксимация всей $f(x)$)
- усложнение локальной аппроксимации;
  (аппроксимация $f(x)$ на интервале $[x_j, x_{j+1}]$
- увеличение количества интервалов $[x_j, x_{j+1}]$
  (квадратурные формулы Ньютона-Котеса)
- выбор узлов x_j.
  (квадратурные формулы Гаусса)

Алгебраический порядок точности некоторых методов:

0 - метод прямоугольников (без средних);
1 - метод трапеций;
3 - метод парабол (метод Симпсона);
9 - метод Гаусса по пяти точкам.

Численные методы интегрирования функций

Квадратурные формулы Гаусса

Квадратурные формулы Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)g(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j)$$

весовая функция
(определяет конкретную квадратуру)

$f(x)$ ДОЛЖНА БЫТЬ ЗАДАНА В ЯВНОМ (АНАЛИТИЧЕСКОМ) ВИДЕ

узлы $x_j \epsilon [-1; 1]$ при $j = 1,2,3 \ldots n$ не фиксированы

Интервал	$p(x)$	Квадратура
$[-1,1]$	1	Гаусса—Лежандра
$(-1,1)$	$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \qquad \alpha, \beta > -1$	Гаусса—Якоби
$(-1,1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Чебышева—Гаусса I типа
$[-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Чебышева—Гаусса II типа
$[0,\infty)$	e^{-x}	Гаусса—Лагерра
$[0,\infty)$	$x^{\alpha}e^{-x}, \ \alpha > -1$	Гаусса—Лагерра
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	Гаусса—Эрмита

Квадратурные формулы Гаусса—Лежандра
для случая глобальной аппроксимации

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j f\left(\frac{b-a}{2}x_j+\frac{a+b}{2}\right)$$

для случая локальной аппроксимации

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

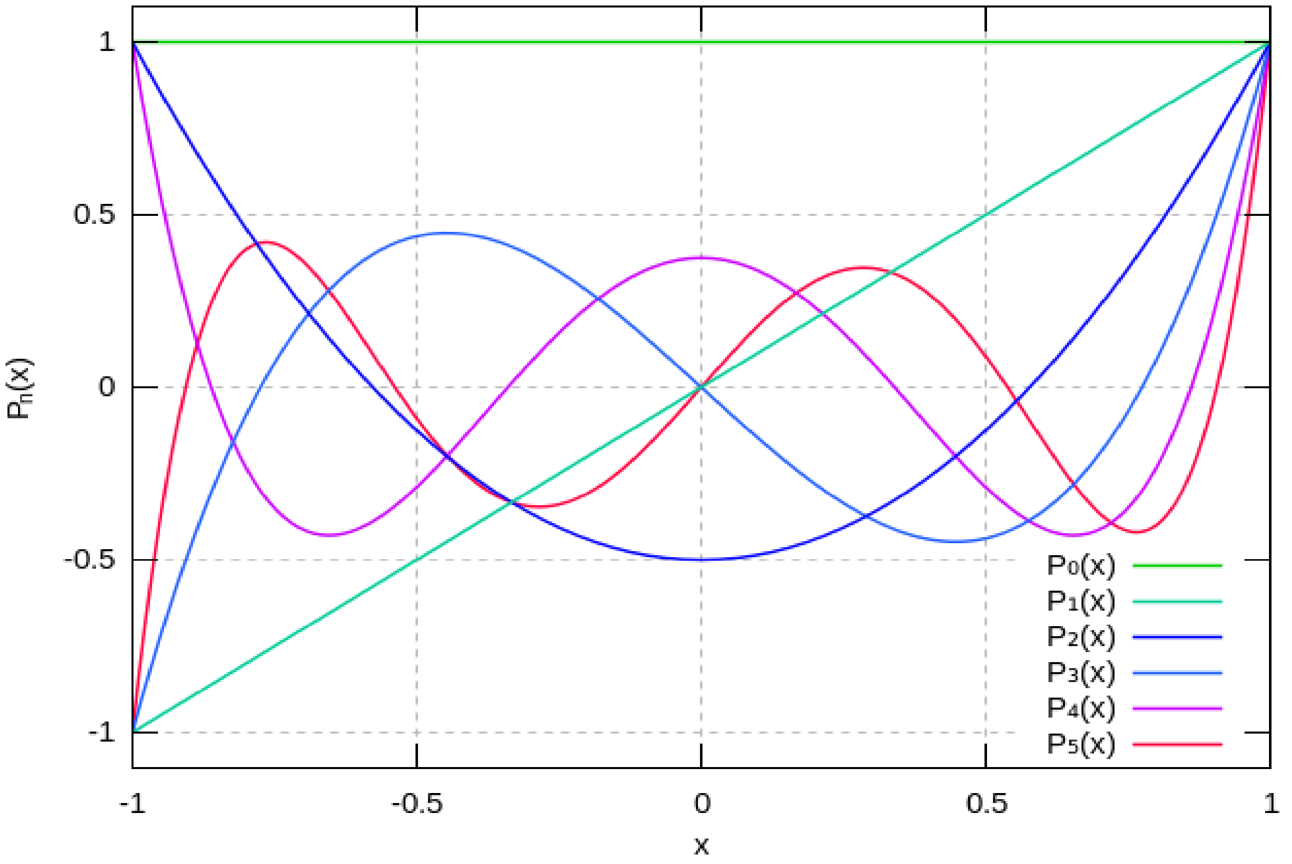
$$\approx \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j f\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}x_j+\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

где весовые коэффициенты ω_j определяются как:

$$\omega_j = \frac{2}{\left(1-x_j^2\right)\left[P_n'(x_j)\right]^2}$$

где P_n' — первая производная полинома Лежандра:

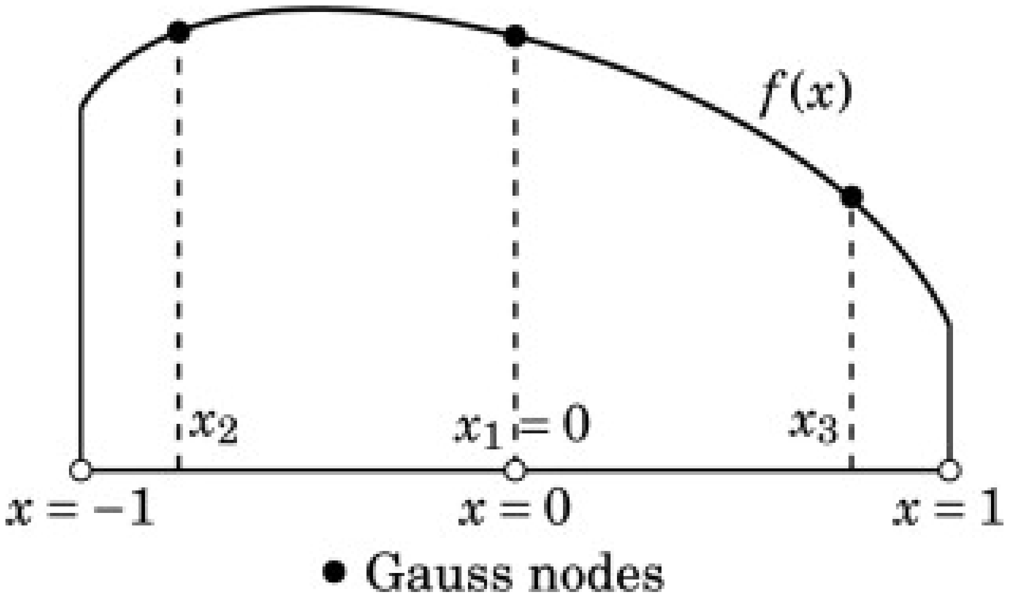
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$



Численные методы интегрирования функций

Квадратурные формулы Гаусса—Лежандра

Количество точек, n	узлы x_j	веса ω_j	Порядок точности
1	0	2	1
2	±0.57735	1	2
3	0 ±0.774597	0.888889 0.555556	5
4	±0.339981 ±0.861136	0.652145 0.347855	7
5	0 ±0.538469 ±0.90618	0.568889 0.478629 0.236927	9



Квадратурные формулы Гаусса-Кронрода состоят из $2n+1$ точек из которых n точек соответствуют квадратурной формуле Гаусса по n точкам, а остальные квадратуре Кронрода

Наличие точек соответствующих методу более низкого порядка позволяет оценить точность следующим образом

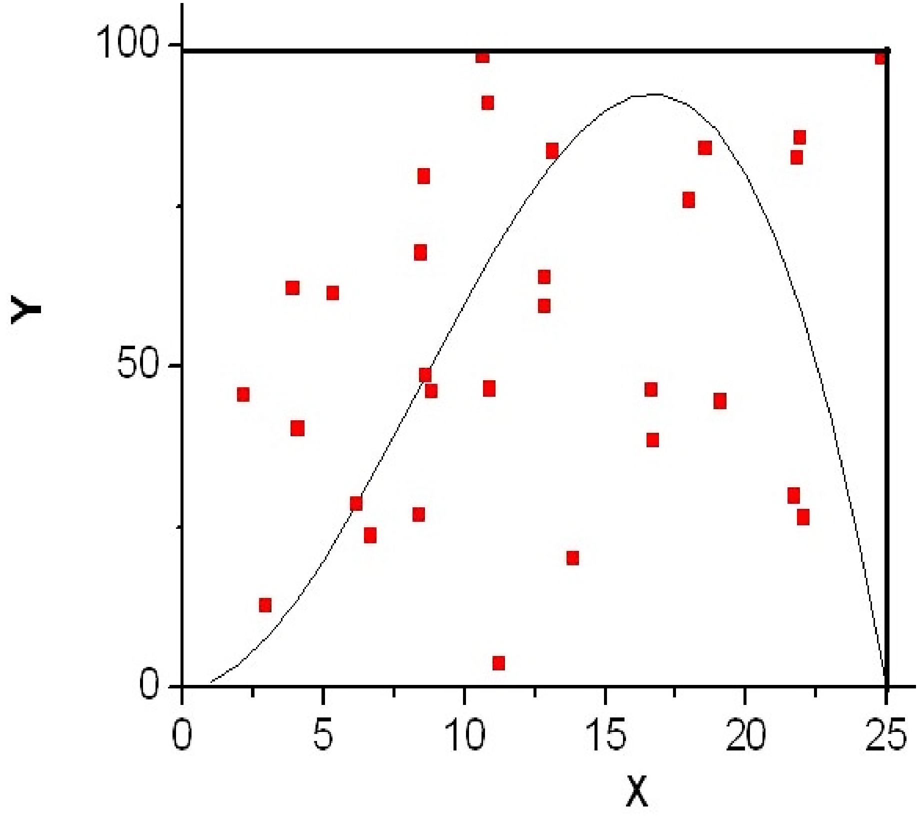
$$\Delta = \left(200\,|\,I_K - I_G\,|\right)^{1.5}$$

узлы x_j	веса ω_j для Кронрода	веса ω_j для Гаусса
± 0.991455371120813	0.022935322010529	
± 0.949107912342759	0.063092092629979	0.129484966168870
± 0.864864423359769	0.104790010322250	
± 0.741531185599394	0.140653259715525	0.279705391489277
± 0.586087235467691	0.169004726639267	
± 0.405845151377397	0.190350578064785	0.381830050505119
± 0.207784955007898	0.204432940075298	
0	0.209482141084728	0.417959183673469

Численные методы интегрирования функций

Стохастический метод интегрирования

Стохастический метод интегрирования *(метод Монте-Карло)* — это метод в котором площадь фигуры определяется с использованием статистических испытаний.



Алгоритм метода

- выбираем n-мерный параллелепипед с площадью S_{par};
- генерируем N случайных точек с координатами $x_1, \dots x_n$
- считаем количество точек K, попавших в область графика
- определяем значение интеграла:

$$I = S_{par} \frac{K}{N}$$

Для достаточной точности метод требует большого объема вычислений, но в некоторых случаях является единственным применимым подходом.