

А.А. МАЗАНИК, С.А. МАЗАНИК РЕШИ САМ

А. А. МАЗАНИК
С. А. МАЗАНИК

РЕШИ САМ



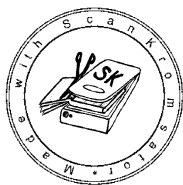
**А. А. МАЗАНИК
С. А. МАЗАНИК**

РЕШИ САМ

**ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ**

**МИНСК
«НАРОДНАЯ АСВЕТА»
1992**

ББК 22.1
М13
УДК (076.1)



Scan AAW

Научно-популярное издание
МАЗАНИК Алексей Архипович
МАЗАНИК Сергей Алексеевич
РЕШИ САМ

Зав. редакцией *Л. И. Минько*. Редактор *Т. А. Акулович*. Обложка художника *С. М. Пчелинцева*. Художественные редакторы *Н. Л. Шавшукова*, *Л. В. Павленко*. Технический редактор *М. И. Чепловодская*.
Корректоры *И. С. Еремчик*, *В. С. Бабеня*.

ИБ № 2977

Сдано в набор 07.02.91. Подписано в печать 13.10.92. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага газетная. Гарнитура литературная. Высокая печать с ФПФ. Усл. печ. л. 13,44.

Усл. кр.-отт. 13,86. Уч.-изд. л. 13,31. Тираж 35 500 экз. Заказ 1195. Цена 15 руб.
Издательство «Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь, 220600, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа, 220005, Минск, Красная, 23.

Мазаник А. А., Мазаник С. А.

М13 Реши сам.—3-е изд., перераб. и доп.—Мн.,
Нар. асвета, 1992.—256 с.: ил.
ISBN 5-341-00462-0.

Учащимся предлагаются разнообразные математические задачи по всем разделам школьной программы для V—VIII классов. К задачам даны ответы, указания или решения.

Книга может быть также использована и учителями при проведении внеклассной работы по математике.

2-е издание вышло в 1980 г.

4802020000—136

М _____ **164—93**
М 303(03)—92

ББК 22.1

ISBN 5-341-00462-0

© А. А. Мазаник, С. А. Мазаник, 1992
© Обложка художника С. М. Пчелинцева, 1992

Дорогие ребята!

Все вы прекрасно знаете, как необходимо для вашего будущего знание математики. В вашем возрасте лучшей формой творческой работы по математике является решение задач. Это весьма интересное, но в то же время и довольно трудное занятие.

В этой книге помещены различные по содержанию и способам решения задачи и примеры. Они предназначены тем из вас, кто любит математику и желает развивать свои способности. Выполняя упражнения, вы не только расширите свои знания по математике, но и испытаете радость творчества.

Для удобства пользования книгой она разбита на четыре части. В каждой части задачи распределены по главам, а внутри глав — по параграфам. В параграфах задачи расположены по возрастающей степени трудности, поэтому целесообразно решать их в том порядке, в каком они даны в каждом параграфе. Иногда придется изучить помещенный в параграфе теоретический материал, который облегчит вам поиск решения некоторых из последующих задач.

Задачи из первой части могут решать учащиеся V класса, из второй — VI, а задачи из третьей и четвертой частей рекомендуются соответственно учащимся VII и VIII классов.

К большинству задач даны ответы, указания или решения, что позволит вам проверять правильность своих решений. Напоминаем, что вначале надо самому решать задачу и только после этого смотреть в ответ.

Авторы

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА I. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Задачи для проверки сообразительности и внимательности

1. Представь себе, что ты — шофер автобуса. В автобусе 28 мест, на которых сидят 16 мужчин и 12 женщин. Кроме них, в автобусе стоя едут еще 6 мужчин. Сколько лет шоферу автобуса?

2. (Шутка.) На грядке сидели 4 воробья. К ним прилетели еще 2 воробья. Кот Васька подкрался и схватил одного воробушка. Сколько воробьев осталось на грядке?

3. Когда автобус вышел из начального пункта своего маршрута, в нем было 8 пассажиров. На первой остановке сели еще 6 пассажиров, а вышли двое. На следующей остановке автобус пополнился семью пассажирами. Потом у моста сели 11, а вышли 5, затем у театра вышли 8 пассажиров, а сели 13, в том числе трое школьников, которые вышли на следующей остановке, у библиотеки. Сколько остановок было до библиотеки, считая последнюю, но не считая начальной остановки?

4. Задачи-шутки.

а) Четверо играли в домино 4 ч. Сколько часов играл каждый из соперников?

б) Пара лошадей пробежала 10 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь?

в) По дороге двое мальчиков шли и 2 рубля нашли. За ними еще четверо идут. Сколько они найдут?

5. В 9 ч из Минска в Могилев выходит автобус, проходящий 50 км в час. Через 2 ч из Могилева в Минск выезжает такси, скорость которого 80 км/ч, и едет по тому же шоссе, что и автобус. Какая из этих автомашин в момент встречи будет ближе к Минску?

6. В 1990 году было 53 понедельника. Какой день недели был 1-го января 1991 года?

7. В ноябре месяце три воскресенья пришлись на нечетные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

8. (Шутка.) Петух, стоя на одной ноге, весит 3 кг. Сколько будет он весить, стоя на двух ногах?

9. (Шутка.) В воскресенье в 6 ч утра гусеница, которая, как известно, живет не более суток, а затем превращается в кокон, начала вползать на дерево. В течение дня, то есть до 6 ч вечера, она забралась на высоту 5 м, но потом сползла на 2 м вниз. Когда и в каком часу гусеница, двигаясь таким образом, может достигнуть вершины, если высота дерева 12 м?

10. Попробуйте найти все 12 ошибок в приведенных ниже примерах. Если вы справитесь с этой работой меньше чем за 5 мин, то вы внимательны.

$3 + 12 = 15$	$15 - 8 = 7$	$16 + 4 = 22$
$13 + 3 = 10$	$16 + 8 = 23$	$13 - 4 = 9$
$16 - 9 = 7$	$16 + 9 = 28$	$13 - 2 = 11$
$12 - 6 = 6$	$15 + 9 = 25$	$15 - 4 = 11$
$15 - 2 = 13$	$19 + 5 = 24$	$12 - 4 = 16$
$15 + 5 = 10$	$14 - 9 = 5$	$12 - 9 = 3$
$5 + 17 = 22$	$7 + 18 = 25$	$2 + 11 = 13$
$4 + 18 = 22$	$6 + 15 = 22$	$18 - 8 = 10$
$16 - 5 = 11$	$12 - 7 = 5$	$19 - 7 = 13$
$17 + 7 = 23$	$19 - 6 = 13$	$5 + 13 = 18$
$14 - 8 = 6$	$16 + 6 = 22$	$13 - 5 = 8$
$18 - 4 = 12$	$14 + 9 = 23$	$16 - 2 = 13$

11. В шести квадратах (рис. 1) размещены кружки. Нарисуйте на листе чистой бумаги шесть пустых квадратов. Постарайтесь в течение двух минут запомнить расположение кружков в каждом из квадратов. Закройте страницу и перенесите кружки по памяти

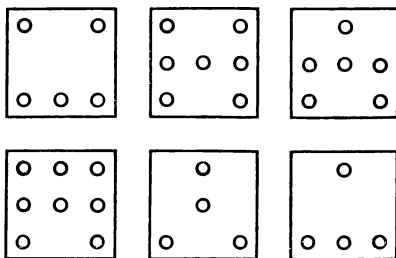


Рис. 1

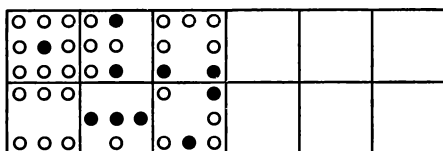


Рис. 2

в нарисованные вами квадраты. За каждый правильно перенесенный кружок вы получите одно очко. Если наберете не менее 30 очков, то вы очень внимательны.

12. В шести квадратах (рис. 2) размещены белые и черные кружки, а рядом находится шесть пустых квадратов. Внимательно посмотрите на расположение кружков в квадратах, затем закройте левую часть рисунка и на свободных квадратах постарайтесь по памяти расположить кружки в том же порядке. За каждый неправильно перенесенный кружок получаете два штрафных очка, а за ошибку в цвете — одно очко. Если у вас будет не больше шести штрафных очков, то вы очень внимательны.

13. «В одном из ящиков, обозначенных цифрами (рис. 3), лежит подарок тебе ко дню рождения,— сказал математик своему сыну.— Попробуй найти его

сам. Он лежит в ящике 1 под ящиком 2, который находится справа от ящика 3, а ящик 3 над ящиком 2, ящик 2 слева от того ящика, в котором подарок». Найдите и вы этот ящик.

14. (Шутка.) Летела уток. Охотник выстрелил и убил одну утку. Сколько уток осталось?

15. (Шутка.) Горело семь свечей. Две свечи погасили. Сколько свечей осталось?

16. Пильщики каждые 5 мин отпиливают от бревна кусок в 1 м. Через сколько минут они распилят бревно длиной в 2 м?

2	2	1	2	3
1	3	2	1	2
2	3	1	3	1
2	1	3	1	2
1	3	3	2	1
2	1	2	1	3
1	2	2	3	1

Рис. 3

17. На лесопильном заводе машина за минуту отпиливает от бревна кусок длиной в 2 м. За сколько минут будет распилено на такие куски бревно длиной в 10 м?

18. В 3 ч стенные часы отбивают 3 удара за 6 с. За сколько секунд эти часы отобьют 6 ударов в 6 ч; 8 ударов в 8 ч?

19. Саша и Коля с восхищением наблюдали за четкой работой кузнеца. Взглянув на часы, они заметили, что кузнец делает 4 удара за 12 с.

— Как ты думаешь,— спросил Саша у друга,— сколько нужно времени, чтобы сделать 8 ударов?

Помогите Коле ответить на этот вопрос.

20. В колесе 10 спиц. Прикиньте в уме, сколько промежутков между спицами.

21. На расстоянии 5 м друг от друга в один ряд посажено 10 молодых деревьев. Найдите расстояние между крайними деревьями.

22. Коля и Петя живут в одном доме: Коля на пятом этаже, а Петя на втором. Если Петя, поднимаясь к себе, проходит 20 ступенек, то сколько ступенек проходит Коля, поднимаясь по лестнице на свой этаж? Во сколько раз Коле необходимо пройти ступенек больше, чем Пете?

23. Пете необходимо пройти в 4 раза больше ступенек, чем Коле. Коля живет на третьем этаже. На каком этаже живет Петя?

24. Петя живет на шестнадцатом этаже, а Коля на четвертом. Во сколько раз Пете необходимо пройти ступенек больше, чем Коле?

25. Установите закономерность в расположении чисел каждого ряда и допишите в соответствии с этой закономерностью еще два числа. Если вы успели дописать все числа за 10 мин, то можно считать, что вы достаточно сообразительны.

2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	9, 1, 7, 1, 5, 1, ...
10, 9, 8, 7, 6, 5, ...	25, 24, 22, 21, 19, 18, ...
5, 10, 15, 20, 25, 30, ...	12, 14, 13, 15, 14, 16, ...
6, 9, 12, 15, 18, 21, ...	16, 12, 15, 11, 14, 10, ...
3, 7, 11, 15, 19, 23, ...	4, 5, 8, 9, 12, 13, ...
24, 21, 18, 15, 12, 9, ...	1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
1, 2, 4, 8, 16, 32, ...	15, 16, 14, 17, 13, 18, ...

26. Установите закономерность в расположении чисел каждого ряда и допишите вместо знака «?» еще

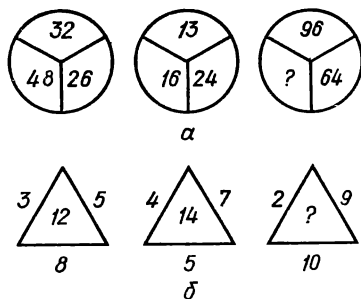


Рис. 4

одно число в соответствии с этой закономерностью:

- а) 3, 5, 9, 17, ?
 б) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ?
 в) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ?
 г) 1, 8, 27, 64, 125, ?

27. Ниже даны числа, расположенные в соответствии с определенной закономерностью. Установите эту закономерность и найдите недостающие числа, которые следует вписать вместо знака «?»:

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------|
| а) 14 9 5 | б) 2 5 7 | в) 16 28 41 58 |
| 24 19 5 | 8 9 5 | 21 33 46 ? |
| 21 7 ? | 5 7 ? | |
| г) 26 44 29 | д) 9 4 20 | е) 84 81 88 |
| 6 8 7 | 7 5 8 | 12 9 11 |
| 14 28 ? | 7 6 ? | 14 18 ? |
| ж) 7 9 5 11 | з) 4 12 10 6 | |
| 4 15 12 7 | 10 3 6 7 | |
| 13 8 8 ? | 6 8 ? 5 | |

28. Если вы найдете закономерность, которой подчиняются группы чисел в первых двух фигурах (рис. 4, а, б), то можно найти недостающее число в третьей фигуре. Какое же это число?

29. Коля принес в класс 3 чистые тетради в линейку, Вася — 6 тетрадей в клетку, а их друг Сережа забыл принести чистые тетради. Друзья разделили все тетради поровну на троих, и каждому досталось по 1 тетради в линейку и по 2 тетради в клетку.

Назавтра Сережа отдал ребятам 6 к. за полученные им тетради. Как надо разделить эти деньги между Колей и Васей?

30. Три мальчика решили сообща купить мяч, но у одного из них не было с собой денег, поэтому один из его товарищей уплатил 1 р. 20 к., а второй — 1 р. 80 к. В тот же вечер он отдал им 1 р. Как надо разделить эти деньги?

31. Три хозяйки решили сообща заготовить малиновое варенье. Одна из них купила 4 кг ягод и столько же сахара, вторая — 5 кг ягод и столько же сахара, а третья вместо своей доли ягод и сахара внесла 6 р.

Как первые две хозяйки должны разделить между собой эти деньги?

32. Три соседа *А*, *Б* и *В* решили совместно построить колодец, распределив все расходы между собой поровну. Для изготовления бетонных колец *А* купил 7 мешков цемента, а *Б* — 4 таких же мешка. Больше цемента не понадобилось, поэтому *В* свою долю расходов в сумме 22 р. внес деньгами. Как распределить их между *А* и *Б*?

— Поровну, — сказал *Б*.

— Пропорционально числу мешков цемента, купленного каждым, — сказал *А*. — Я купил 7 мешков, значит, мне положено 14 рублей, а *Б* получит 8 рублей, так как он купил 4 мешка.

В, который при подсчете расходов определил, сколько потратил каждый и какова общая стоимость, улыбнулся и сказал: «Оба вы ошибаетесь. Деньги следует распределить так: ...»

Ответьте и вы на вопрос задачи.

33. Сообразительному продавцу привезли для продажи конверты, по 100 штук в пачке. Чтобы отсчитать 10 конвертов, он затрачивает 5 с. За сколько секунд он может отсчитать 30 конвертов? 50 конвертов? 70 конвертов? 90 конвертов?

34. При комплектовании новогодних подарков ребята подсчитали, что если в каждый подарок положить по 5 орехов, то не хватит 20 орехов, а если по 3 ореха, то останется 24 ореха. Сколько всего орехов было у ребят?

35. За работу в совхозном саду школьники получили яблоки. В школе было 150 человек, а яблок — 180 крупных и 180 поменьше. Решили каждому школьнику давать либо по 2 крупных, либо по 3 мелких яблока. Таким образом, яблок хватило бы всем.

Однако при перевозке яблоки обоих сортов смешались. Тогда дежурный по столовой решил сделать так: зная, что крупных яблок надо давать по 2 штуки на человека, а мелких — по 3 штуки, он стал раздавать по 5 яблок на каждого двух человек. К его удивлению, шестерым яблок не досталось. Почему так произошло?

36. Можно ли 3 яблока разделить между двумя отцами и двумя сыновьями так, чтобы каждому досталось ровно по одному яблоку?

37. Гусь стоит 2 р. и еще половину действительной стоимости. Сколько стоит гусь?

38. Кирпич весит 1 кг и еще столько, сколько весит полкирпича. Сколько весит кирпич?

39. Рыбак поймал рыбу. Когда у него спросили, сколько весит пойманная рыба, он сказал: «Хвост ее весит 1 кг, голова весит столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько же весит рыба?

40. Если бы завтрашний день был вчера, то до воскресенья оставалось бы столько дней, сколько дней прошло от воскресенья до вчерашнего дня. Какой же сегодня день?

41. В общежитии в одной комнате живут четыре девушки: Маша, Валя, Таня и Галя. Две из них ровесницы. Известно, что Таня старше Маши, которая моложе Гали. Таня моложе Вали, которая старше Гали. Кто ровесницы?

42. Я задумал двузначное число, вычел из него 1 и получил однозначное число. Какое число я задумал?

43. Какое из чисел и на сколько больше: наименьшее трехзначное или наибольшее двузначное?

44. Из трехзначного числа вычли двузначное и получили единицу. Найдите уменьшаемое и вычитаемое.

45. Когда на новогодней елке у Деда Мороза спросили, сколько ему исполнилось лет, он сказал: «Если к наименьшему четырехзначному числу прибавить наименьшее трехзначное число десятков без наибольшего однозначного числа единиц, то получится ответ на ваш вопрос». Сколько же лет исполнилось Деду Морозу?

46. (Шутка.) Мальчик написал на бумажке число 86 и говорит своему товарищу:

— Не производя никаких записей, увеличь это число на 12 и покажи мне ответ.

Не долго думая, товарищ показал ответ.

А вы сумеете это сделать?

47. Сумма трех чисел равна 80. Сумма первого и второго равна 60, а сумма первого и третьего равна 20. Найдите эти числа.

48. Произведение трех чисел равно 140. Произведение первых двух равно 28, а произведение второго и третьего равно 35. Найдите эти числа.

49. Сто орехов разложены на пять кучек. В первой и второй вместе 52 ореха, во второй и третьей — 43, в третьей и четвертой — 34, в четвертой и пятой — 30. Сколько орехов в каждой кучке?

50. Четыре бригады ремонтировали дорогу на четырех участках. Найдите общую длину дороги, если сумма длин всех участков без первого равна 550 м, без второго — 520 м, без третьего — 490 м и сумма длин всех участков без четвертого равна 540 м.

51. Известный немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855) очень рано обнаружил блестящие способности по математике. Рассказывают, что однажды его школьный учитель предложил ученикам найти сумму всех целых чисел от 1 до 100 включительно. Только учитель прочитал задание, как маленький Гаусс сказал: «Готово! 5050».

Учитель был удивлен и спросил Гаусса, как он решил задачу. Тот ответил, что каждая пара чисел, которые одинаково отстоят от концов: 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и так далее, составляют в сумме 101, а так как таких пар 50, то нужно 101 умножить на 50, получится 5050.

Найдите и вы таким же способом сумму всех целых чисел:

- а) от 1 до 50 включительно;
- б) от 1 до 1000 включительно;
- в) от 1 до 9 включительно;
- г) от 1 до 99 включительно.

52. Вычислите:

$$99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \dots + 7 - 5 + 3 - 1.$$

53. На расстоянии 5 м друг от друга в один ряд посажено 16 молодых деревьев. Рядом с крайним деревом расположен колодец. Для полива каждого дерева нужно ведро воды. Какой длины путь придется сделать, чтобы, пользуясь только одним ведром, полить все деревья и возвратиться к колодцу?

54. На расстоянии 5 м друг от друга в один ряд посажено 8 молодых деревьев. Рядом с крайним деревом расположен колодец. Для полива двух деревьев нужно ведро воды. Какой длины путь придется сделать, чтобы, пользуясь только одним ведром, полить все деревья и возвратиться к колодцу?

55. Из пункта А в пункт В выезжает автомобиль со скоростью 50 км/ч. Через час после него в том же направлении вылетает самолет, скорость которого 700 км/ч. Самолет догоняет автомобиль, поворачивает и летит назад в пункт А, затем снова догоняет автомобиль и снова возвращается в пункт А, то есть непрерывно летает от пункта А до движущегося автомобиля и

обратно. Сколько километров пролетит самолет, пока автомобиль приедет в пункт *Б*, если расстояние между пунктами 300 км?

У к а з а н и е. Вначале определите, сколько времени самолет был в пути.

56. (Старинная задача.) У одного путешественника не было денег, но была золотая цепочка из семи звеньев. Хозяин гостиницы, к которому обратился путешественник с просьбой о ночлеге, согласился держать постояльца неделю, если тот будет давать ему ежедневно в виде платы одно из звеньев цепочки.

Какое одно звено надо распилить, чтобы путешественник мог ежедневно в течение семи дней расплачиваться с хозяином гостиницы? (При расчете хозяин может возвращать постояльцу полученные у него раньше звенья.)

57. Две команды проводили новогодний конкурс, состоящий из десяти заданий. За победу в одном задании команда получает 3 очка, за ничью — 2 очка, за проигрыш — 1 очко. Одна из команд набрала 25 очков. Выиграла она конкурс или нет?

58. Книга распалась на две части. Первая страница второй части имеет номер 123, а номер последней страницы состоит из тех же цифр, но записанных в обратном порядке. Сколько страниц во второй части книги?

59. Учащиеся двух пятых классов решили во время каникул отправиться в поход по родному краю. На дорожные расходы в 5 «А» классе собирали по 1 р. 80 к. с человека, а в 5 «Б», где было на 3 ученика больше, — по 1 р. 50 к. В итоге в 5 «А» собрали на 6 р. больше, чем в 5 «Б». Сколько учеников в каждом классе?

60. Несколько человек решили купить новую лодку. Если каждый из них внесет по 50 р., то не хватит 30 р.; если же каждый внесет по 60 р., то 20 р. будут лишними. Сколько было человек? Сколько стоила лодка?

61. Юннаты сажали цветы на школьном дворе. На вопрос, сколько у них цветов, одна девочка ответила: «Если посадить на каждой клумбе по 20 цветов, то 12 цветов останется, а если посадить по 24, то 12 цветов не хватит». Сколько цветов было у юннатов?

62. Для посадки кустов выделили несколько грядок. Ребята рассчитали, что если на каждую грядку посадить по 3 куста, то для посадки всех кустов не хватит 6 грядок, а если посадить по 5 кустов, то останутся

свободными 4 грядки. Сколько кустов хотели посадить ребята и на скольких грядках?

63. (Шутка.) Летели галки, сели на палки. Сели по одной — галка лишняя, сели по две — палка лишняя. Сколько было галок? Сколько было палок?

64. В пяти пакетах лежат яблоки. В первом и втором пакетах вместе 12 яблок, в третьем и четвертом — 39 яблок. В третьем пакете вдвое меньше, чем во втором, в пятом — в 7 раз меньше, чем в четвертом. Сколько яблок в первом пакете, если в пятом их 5?

65. Сережа на свои деньги может купить один карманный фонарик или 8 батареек к нему. Фонарик вместе с батареейкой стоит 1 р. 53 к. Сколько денег у Сережи?

66. Я задумал два числа. Сумма их равна наименьшему трехзначному числу. Если большее из этих чисел разделить на меньшее, то в частном получится наибольшее однозначное число. Какие числа я задумал?

67. Три мальчика нашли 27 белых грибов.

— Витя, сколько ты нашел белых грибов? — спросил Вася.

— Я нашел белых грибов в 2 раза больше, чем ты и Гена вместе, — ответил Витя. А Гена сказал:

— Я нашел грибов вдвое больше, чем Вася.

Сколько белых грибов нашел каждый мальчик?

68. Конь и осел несли на спинах тяжелые мешки. Осел пожаловался, что ему тяжело. Тогда конь ответил:

— Лентяй, ты еще жалуешься! Мне тяжелее, чем тебе. Если бы я взял у тебя мешок, у меня стало бы вдвое больше, чем у тебя; а если бы ты взял у меня мешок, у нас стало бы поровну.

Сколько мешков нес конь и сколько осел?

69. Петя по дороге из школы домой познакомился на улице с Володей.

— Володя, — спросил Петя, — есть у тебя братья и сестры?

— Есть.

— А сколько?

— Сестер у меня столько же, сколько и братьев, а у моей сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Понял?

— Понял.

— Ну, вот и скажи, сколько в нашей семье братьев и сколько сестер.

И вы, ребята, решите эту задачу.

70. Для перевозки на берег пассажиров с теплохода, стоящего на рейде, был выделен сначала один катер. Когда он сделал 5 рейсов и перевез половину пассажиров, к теплоходу подошел второй катер меньшего тоннажа, который перевозил всего по 30 пассажиров. Сделав после этого по 3 рейса, катера закончили работу. Сколько всего пассажиров было перевезено с теплохода на берег?

71. На двух книжных полках было книг поровну. Когда с верхней полки переложили на нижнюю 24 книги, то на нижней стало в 5 раз больше книг, чем на верхней полке. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

72. В шахматно-шашечных соревнованиях на командное первенство участвовало 8 школьных команд. В каждой команде было по 9 шахматистов. Сколько всего шахматистов и шашкистов участвовало в этих соревнованиях, если известно, что число шашкистов всех восьми команд равняется числу участников двух команд?

73. В первый день похода юный натуралист поймал несколько бабочек, а в последующие дни еще 28 штук. Когда он разложил их поровну в 4 коробки, то в каждой из них оказалось вдвое больше бабочек, чем было поймано в первый день. Сколько бабочек было в каждой коробке?

74. В магазин фототоваров привезли ванночки в десяти одинаковых пакетах. В каждом пакете было некоторое число больших ванночек, в которые вкладывались 24 меньшие ванночки. Сколько привезено в магазин больших ванночек, если известно, что число больших ванночек во всех пакетах равно числу больших и малых ванночек в четырех пакетах?

75. На каждой из трех полок буфета стояло по одинаковому количеству литров варенья. На верхней полке стояли 1 большая, 4 средние и 1 литровая банка, на средней — 2 большие и 6 литровых банок, а на нижней — 1 большая, 3 средние и 3 литровые банки. Сколько литров варенья стояло на трех полках?

76. Когда у Вани спросили, сколько ему лет, он подумал и ответил: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше брата Сережи». А маленький Сережа моложе папы на 40 лет. Сколько лет Ване?

77. 1) Отец втрое старше своего сына, а через 11 лет

отец будет старше сына лишь в 2 раза. Сколько лет каждому?

2) 8 лет тому назад отец был старше своего сына в 7 раз, а через 12 лет отец будет старше сына лишь в 2 раза. Сколько лет каждому?

3) Сколько лет матери и дочери, если известно, что через 5 лет мать будет старше дочери в 3 раза, а 4 года тому назад мать была старше дочери в 12 раз?

78. У отца было пятеро детей. Отцу было 42 года, а детям 12, 11, 8, 7 и 4 года, то есть в сумме тоже 42 года. Интересно стало отцу, через сколько же лет его возраст будет равен лишь половине суммы лет его детей. Помогите ответить ему на этот вопрос.

79. Один мальчик беседовал в парке со старушкой:

— Бабушка, сколько лет вашему внуку?

— Ему, милый, столько месяцев, сколько мне лет.

— Сколько же Вам лет?

— Мне с внуком вместе 91 год. А уж сколько лет внуку, сосчитай сам.

Сколько же лет внуку?

80. 1) Сестра старше брата на столько лет, сколько месяцев брату. Во сколько раз сестра старше брата?

2) Сестра старше брата во столько раз, сколько ей лет. Сколько лет каждому?

81. У деда спросили, сколько лет его внуку. Дед ответил, что мальчик прожил столько будних дней, сколько мать его прожила воскресений; столько суток, сколько отец прожил недель; столько месяцев, сколько бабушка прожила лет. Всем им, не считая мальчика и деда, 100 лет. Сколько лет мальчику?

82. В воскресенье пятиклассники отправились в поход. Мальчиков было втрое больше, чем девочек. Когда 4 мальчика и 4 девочки ушли к реке готовить обед, то мальчиков осталось вчетверо больше, чем девочек. Сколько пятиклассников участвовало в походе?

83. 25 учащихся, разбившись на две группы, принимали участие в озеленении школы. Когда из второй группы 5 учащихся перешли в первую, а из первой 1 ученик ушел за цветами, то в первой группе оказалось вдвое больше учащихся, чем во второй. Сколько учащихся было в каждой группе первоначально?

84. Если к задуманному двузначному числу приписать слева цифру 2, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше первоначального. Какое число задумано?

85. Сумма двух чисел равна 165. Если в большем числе отбросить справа один ноль, то числа окажутся равными. Какие это числа?

86. В двузначном числе цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Если записать число теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, то получим число, на 27 меньшее исходного числа. Найдите это число.

87. Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц. По ошибке он переставил цифры во втором сомножителе и получил произведение, на 2808 меньшее истинного. Найдите множитель.

88. Однажды после обеда я зашел к своему товарищу, у которого было двое часов с боем. Одни из них били через 3 с, а другие — через 4 с. И те и другие часы начали бить одновременно. Всего я насчитал 8 ударов, так как совпадающие удары я не мог различить и считал их за один. Который был час?

89. Двое часов *A* и *B* с одинаковым боем ударили всего, как я насчитал, 19 раз. Это произошло потому, что начало боя не совпадало на 2 с, и часы *A* ударили через 3 с, а часы *B*, которые отставали, — через 4 с. Который был час?

90. В кабинете со звуконепроницаемыми стенами висят старинные настенные часы, которые бьют каждые полчаса (один удар) и каждый час (столько ударов, сколько часов показывает часовая стрелка). Однажды, войдя в кабинет, хозяин услышал один удар часов. Через полчаса часы в кабинете пробили еще раз — опять один удар, спустя полчаса — еще один удар. Наконец, еще через полчаса, часы снова пробили один раз. Который был час, когда хозяин вошел в кабинет?

91. Дрожжевые грибки при благоприятных условиях размножаются с большой скоростью, увеличиваясь в объеме в 2 раза за каждую минуту. В колбу поместили небольшое количество этих грибков, и уже к концу пятой минуты дрожжи заполнили половину сосуда. Через сколько минут после этого они заполнят весь сосуд?

92. В небольшой сосуд поместили 1 см^3 дрожжевых грибков. Через 10 мин дрожжи заполнили весь сосуд. Через какое время заполнился бы тот же сосуд, если бы вначале положили 2 см^3 этих дрожжей?

93. На завтрак в двух кастрюлях приготовили

отдельно 2 л молока и 2 л черного кофе. Из кастрюли с молоком взяли 1 л молока и вылили в кастрюлю с кофе. Затем из этой кастрюли взяли 1 л образовавшейся смеси и вылили в первую кастрюлю. Чего стало больше: кофе в первой кастрюле или молока во второй?

94. Два человека подошли к реке. У берега стояла лодка, в которой мог поместиться только один человек. Оба без всякой помощи переправились на этой лодке через реку и продолжали свой путь. Как они это сделали?

95. Имеется 5 одинаковых по виду монет, из которых одна (фальшивая) отличается от остальных по массе. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, какая из монет — фальшивая или настоящая — легче?

2. Волшебные квадраты

В этом параграфе помещены задачи, в которых требуется расставить по клеткам числа так, чтобы при сложении чисел, стоящих в любом столбце или в любой строке, а также по диагоналям (с угла на угол), получалось одно и то же число.

96. Даны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Часть из них расставлена по клеткам (рис. 5). Расставьте остальные числа так, чтобы в любом направлении в сумме получалось 15.

4		
	5	
	1	

Рис. 5

97. В условии задач, подобных предыдущей, не обязательно указывать, какая сумма должна получиться в любом направлении. Подумайте, как в задаче № 96 можно установить, что в любом направлении сумма чисел равна 15.

98. Даны числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Требуется вписать их в клетки квадрата так, чтобы в любом направлении в сумме получилось одно и то же число. Какое число будет такой суммой? Для облегчения решения часть чисел уже вписана (рис. 6).

		9
	6	
		5

Рис. 6

99. Даны числа: 5, 6, 7, 8, 9, 10,

	9	
8		

Рис. 7

35		17
		59
	11	

Рис. 8

11, 12, 13. Два из них вписаны в клетки квадрата (рис. 7). Впишите остальные так, чтобы в любом направлении получилось в сумме одно и то же число. Обратите внимание на то, что в центре квадрата всегда записано среднее число, то есть пятое от начала и пятое от конца.

100. Даны числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Впишите их в клетки квадрата так, чтобы в любом направлении получилось в сумме одно и то же число.

101. Сравните условия задач № 96 и № 100 и подумайте, как можно было решать задачу № 100, зная решение задачи № 96.

102. Даны числа: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. Впишите их в клетки так, чтобы в любом направ-

лении получилось в сумме одно и то же число.

103. В свободные клетки (рис. 8) впишите числа 23, 41, 47, 65 и 71 так, чтобы по всем строкам, столбцам и двум диагоналям в сумме получилось одно и то же число.

Указание. Вначале определите эту сумму.

104. Начертите квадрат из 16 клеток и расположите в нем числа от 1 до 16 включительно так, чтобы в каждой строке, каждом столбце, а также по диагоналям в сумме получилось одно и то же число. Для упрощения решения некоторые числа уже расставлены в клетках квадратов (рис. 9).

105. Впишите в пустые клетки (рис. 10) недостающие числа от 1 до 16 так, чтобы в сумме по всем столб-

1	14		
		6	9
	11		
	2	3	16

15	10		
	6	16	
14	11		
		13	12

	3		
9		5	4
	2		
			1

Рис. 9

			5
	13	3	
		6	9
	1		

			5
	13	11	
		6	9
	1		

Рис. 10

	24	7	20	
	12		8	16
17		13		9
	18	1		
23			2	15

	22			
		21		20
19			25	
				24
23				

Рис. 11

цам, строкам и обеим диагоналям получилось число 34.

106. Расположите 25 чисел, начиная от 1 до 25 включительно, в квадратах с 25 клетками (рис. 11) так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду, а также по диагоналям получились одинаковые суммы. Легко подсчитать (проверьте!), что эти суммы равны 65.

107. В кружках (рис. 12) расставьте числа от 1 до 7 включительно так, чтобы их сумма по каждой окружности и на каждой прямой равнялась 12. Труднее всего определить число, которое надо поставить в центре круга. Как можно рассуждением, а не подбором найти его?

108. Расставьте в пустых квадратах (рис. 13) числа от 1 до 9 включительно так, чтобы сумма

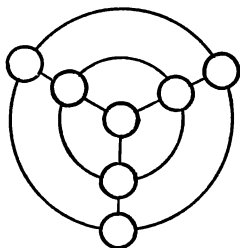
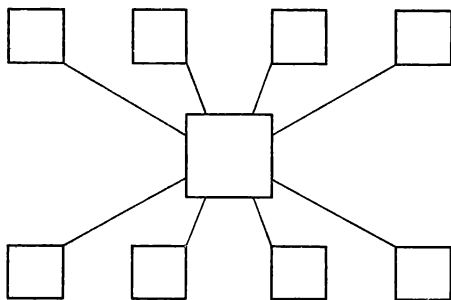


Рис. 12

Рис. 13



чисел в квадратах, соединенных прямой линией, была равна 15. Какое число вы поставите в центральный квадрат?

109. Расставьте в вершинах куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 так, чтобы суммы четырех чисел, расположенных на каждой из шести граней куба, были одинаковы.

3. Задачи, решаемые с конца

Имеется много интересных задач, которые удобно решать, начиная с конца. Рассмотрим, например, следующую задачу.

110. 24 спички разделили на 3 неравные кучки. Если из первой кучки переложить во вторую столько спичек, сколько было во второй кучке, затем из второй кучки переложить в третью столько, сколько было в третьей, и, наконец, из третьей переложить в первую столько спичек, сколько в первой кучке осталось, то после этих перекладываний число спичек во всех кучках будет одинаково. Требуется узнать, сколько было спичек в каждой кучке первоначально.

Решение. После всех перекладываний в каждой кучке стало по 8 спичек.

Перед этим в первую кучку было добавлено столько спичек, сколько их там имелось, то есть число спичек в первой кучке было удвоено. Так как в ней стало 8 спичек, то перед этим там было 4 спички, а 4 спички переложены из третьей кучки. Следовательно, до последнего перекладывания в первой кучке было 4, во второй — 8, а в третьей — 12 спичек.

Второй раз из второй кучки в третью переложили

столько спичек, сколько в третьей имелось. Значит, 12 — это удвоенное число спичек, бывших в третьей кучке до второго переукладывания. Следовательно, можно узнать число спичек в каждой кучке после первого переукладывания: в третьей — $12:2 = 6$ спичек; во второй — $8 + 6 = 14$ спичек; в первой — 4 спички.

Так как первый раз во вторую кучку переложили из первой $14:2 = 7$ спичек, то первоначально в первой кучке было 11, во второй — 7, а в третьей — 6 спичек.

Возьмите 24 спички и проверьте непосредственно все решение.

Решите таким же методом следующие задачи.

111. 16 спичек распределили на две неравные кучки. Когда из первой кучки переложили во вторую столько спичек, сколько во второй кучке имелось, а затем из второй переложили в первую столько спичек, сколько в первой осталось, то в обеих кучках спичек стало поровну. Сколько спичек было в каждой кучке первоначально?

112. На трех проводах сидели 24 воробья. Когда с первого провода перелетели на второй 4 воробья, а со второго перелетели на третий 3 воробья, то на всех проводах воробьев оказалось поровну. Сколько воробьев сидело на каждом проводе первоначально?

113. В двух аквариумах было по определенному числу рыбок. Если из первого аквариума переместить во второй столько рыбок, сколько было во втором, затем из второго аквариума столько, сколько в первом осталось, и, наконец, из первого во второй столько, сколько во втором осталось к этому времени, то в каждом аквариуме окажется по 16 рыбок. Сколько рыбок было в каждом аквариуме первоначально?

114. Петя и Коля коллекционировали почтовые марки. Если бы Петя дал Коле столько марок, сколько собрал Коля, а затем Коля отдал Пете столько, сколько осталось у Пети, то в результате у Пети было бы на 30 марок больше, чем он собрал, а у Коли в 3 раза меньше, чем он собрал. Сколько почтовых марок собрали Петя и Коля в отдельности?

115. Вася, Петя и Сережа пошли в лес собирать орехи. Возвращаясь домой, мальчики подсчитали, что если Вася отдаст Пете столько своих орехов, сколько собрал Петя, а Петя отдаст Сереже столько орехов, сколько собрал сам Сережа, и Сережа, в свою очередь,

отдаст Васе столько орехов, сколько у Васи останется после того, как он передаст часть орехов Пете, то у всех троих будет орехов поровну. Мальчики так и сделали. Оказалось, что у каждого стало по 48 орехов. Сколько орехов собрал каждый мальчик?

116. Спички распределили на две неравные кучки. Когда из первой кучки переложили половину имевшихся в ней спичек во вторую, а затем из второй кучки переложили в первую половину спичек, оказавшихся во второй, то в первой стало 18 спичек, а во второй — 8. Сколько спичек было в каждой кучке первоначально?

117. Спички распределили на три неравные кучки. Из первой кучки половину имевшихся там спичек переложили во вторую. Затем все спички во второй кучке, вместе с добавленными, разделили на две равные части и одну половину переложили в третью кучку. Когда потом в первую кучку добавили половину спичек, оказавшихся в третьей, то в первой кучке стало 25, во второй — 16, а в третьей — 11 спичек. Сколько спичек было первоначально в каждой кучке?

118. В трех сосудах находится одинаковая жидкость в неравных количествах. Если половину содержимого (по объему) первого сосуда разлить поровну в два других, а затем половину содержимого второго сосуда, оказавшегося после первого разлива, разлить поровну в два других и после этого половину содержимого третьего сосуда разлить поровну в два других, то во всех сосудах окажется жидкости поровну, а именно по 16 л. Сколько литров жидкости было в каждом сосуде вначале?

119. Три брата получили 24 яблока, причем каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет. Самый старший из братьев, видя, что младшие несколько недовольны этим распределением, предложил им такой обмен яблоками:

— Пусть самый младший из нас, — сказал он, — оставит себе половину имеющихся у него яблок, а остальные разделит поровну между мной и средним братом. После этого наш средний брат тоже оставит себе половину всех имеющихся у него яблок, а остальные отдаст мне и младшему брату поровну. Затем и я оставляю себе половину всех имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну.

Братья так и сделали, в результате у всех оказалось яблок поровну. Каков возраст братьев?

120. В колхозе три бригады. За каждой из них закреплены определенные сельскохозяйственные машины. Но в наиболее напряженные периоды полевых работ бригады передают друг другу необходимые машины.

Как-то раз первая бригада передала второй и третьей бригадам по столько разных сельскохозяйственных машин, сколько у каждой из них имелось. Вскоре вторая бригада, в свою очередь, передала в распоряжение первой и третьей бригад по столько машин, сколько в каждой из них было в этот момент. А через некоторое время и третья бригада передала первой и второй бригаде по столько машин, сколько к этому моменту в каждой из них имелось. После этого в каждой из трех бригад оказалось по 24 машины.

Сколько сельскохозяйственных машин было вначале в каждой бригаде?

121. В книге «Математическая смекалка» Б. А. Кордемского есть задача «Кот и мыши». Кот сладко спит, а во сне видит себя окруженным тринадцатью мышами. Двенадцать мышей серых, а одна белая. Он должен съедать каждую тринадцатую мышку, считая их по кругу все время в одном направлении, с таким расчетом, чтобы последней была съедена белая мышь. С какой мышки надо начинать счет, чтобы правильно решить эту задачу?

В решении, приведенном в этой книге, рекомендовано расположить по кругу 13 точек, одну из которых обозначить еще и крестиком. Начиная счет с крестика, вычеркиваем каждую тринадцатую точку до тех пор, пока не останется одна точка. Если вместо этой точки поставить белую мышь, то начинать счет следует с серой мышки, помеченной крестиком.

Решите этим приемом следующую задачу, похожую на сказку.

Два купца перевозили вместе свой товар на корабле, и каждый имел по 15 одинаковых ящиков. Во время путешествия поднялась буря, корабль был поврежден, и капитан объявил, что для спасения людей необходимо половину товара выбросить в море. Первый купец ничего не имел против этого, но второй ни за что не хотел лишиться не только восьми, но даже и семи своих ящиков и требовал, чтобы этот вопрос был решен по жребию. Для этого все 30 ящиков были

установлены в кружок, и капитан, считая их громко, каждый девятый ящик велел бросать за борт. Но он так удачно выбрал начало счета, что все 15 ящиков упрямого купца оказались выброшенными, а все ящики первого купца уцелели.

Как были расставлены ящики в кружок?

122. Девочка выложила по кругу 20 камешков: 10 серых и 10 белых, и, считая по кругу в одном направлении, брала каждый седьмой камешек. Через некоторое время все серые камешки были взяты, а все белые остались. В каком порядке были выложены серые и белые камешки?

123. Если из утроенного неизвестного числа вычесть 8, полученное число уменьшить в 2 раза, затем прибавить 5, разделить на 10, то получится единица. Найдите неизвестное число.

124. Сережу угостили яблоками. Половину он съел, а оставшиеся 4 яблока отнес своей сестре. Сколько яблок дали Сереже?

125. Мать для своих двоих детей оставила дома конфеты. Первым пришел из школы брат, взял свою половину конфет и ушел гулять. Затем пришла сестра. Думая, что брат не брал конфет, она съела только половину оставшихся, после чего осталось еще три конфеты. Сколько конфет было вначале?

126. Магазин в первый день продал половину куска ткани, во второй день — половину остатка, а в третий день — половину нового остатка и последние 5 м. Сколько метров ткани было в куске?

127. Колхозница продала первому покупателю половину имевшихся у нее груш и еще 5 груш, а второму покупателю — половину остатка и последние 5 груш. Сколько груш было у колхозницы вначале?

128. Древняя легенда повествует, что некогда чешская королева обещала стать женой того из трех рыцарей, кто первым решит следующую задачу: «Сколько слив было в корзине, из которой она дала первому жениху половину всех имевшихся в ней слив и еще одну сливу, второму — половину остатка и еще одну, третьему — половину нового остатка и еще 3 сливы, после чего в корзине ничего не осталось?»

129. Колхозница принесла на рынок известное число яиц. Первому покупателю она продала половину имевшихся у нее яиц и еще пол-яйца, второму — половину того, что у нее осталось, и еще пол-яйца,

третьему — половину нового остатка и еще пол-яйца, наконец, четвертому — половину того, что осталось от последней продажи, и еще пол-яйца. После этой продажи у нее ничего не осталось. Сколько яиц принесла колхозница на рынок?

130. Ученик прочел 20 страниц, что составило третью часть всей книги. Сколько страниц в книге? Какую часть книги ученику осталось прочесть?

131. Турист прошел 24 км, что составило две третьих части всего пути. Сколько километров составляет весь путь?

132. Магазин продал за один день третью часть всего количества завезенных ему фруктов. Осталось продать еще 300 кг фруктов. Сколько килограммов фруктов было завезено в магазин?

133. Ребята отправились в туристский поход. В первый день они прошли третью часть всего намеченного пути и оказалось, что им надо еще пройти на 12 км больше, чем прошли в первый день. Найдите длину всего маршрута.

134. Школьники в первый день туристского похода прошли третью часть всего пути. Во второй день они встречались с участниками партизанского движения и поэтому смогли пройти только третью часть оставшегося пути. Найдите длину всего пути, если известно, что после двухдневного перехода им осталось пройти 12 км.

135. Между тремя мальчиками разделили имевшиеся персики. Первому мальчику дали третью часть всех персиков, второму — третью часть оставшихся персиков и еще 2 персика, третьему — третью часть нового остатка и последние 4 персика. Сколько было всего персиков и сколько персиков получил каждый мальчик?

136. Мать принесла миску слив. Сереже она дала третью часть всех слив и еще 3 сливы, Люде — третью часть оставшихся и еще 2 сливы. Половину оставшихся после этого слив она отдала отцу, а последние 6 слив взяла себе. Сколько всего слив принесла мать?

137. Магазин продал третью часть полученной свежей капусты и еще 32 кг, третью часть остатка и еще 32 кг отпустил школьной столовой, третью часть нового остатка и еще 32 кг передали детскому саду, после чего осталась третья часть нового остатка и еще 32 кг. Сколько килограммов капусты было в магазине первоначально?

138. Возьмите 15 шашек и проведите с товарищем следующую игру: каждый из двух играющих по очереди берет шашки; за один раз можно брать 1, 2 или 3 шашки; проигрывает тот, кто берет последнюю шашку. Рассчитайте, сколько шашек должен брать первый, чтобы всегда выигрывать.

139. Имеются две кучки камней. Игра состоит в том, что каждый из двух игроков (*А* и *Б*) по очереди берет любое число камней в одной из двух кучек. Выигрывает тот, кто берет последним. Игрок *А* имеет право либо начать игру, либо предоставить первый ход своему партнеру. Найдите способ игры, обеспечивающий выигрыш игроку *А*.

4. Задачи с геометрическим содержанием

140. Возьмите небольшой прямоугольный лист бумаги и ножницы. Сколько прямолинейных разрезов надо сделать, чтобы получить 4 куска? Складывать бумагу и разрезать одновременно 2 куска не разрешается.

141. Прямоугольная плитка шоколада разделена углублениями на 3×4 маленьких прямоугольника. Сколько раз нужно разламывать шоколад, чтобы разделить его на эти маленькие прямоугольники?

А если бы было 4×6 маленьких прямоугольников?

142. (Шутка.) — Ты знаешь, — сказал Вася своему товарищу Гене, — я никак не могу придумать, как посадить деревья на садовом участке.

— А какие у него размеры? — осведомился Гена.

В ответ Вася нарисовал такой треугольник, как на рисунке 14.

Гена долго рассматривал его, а затем засмеялся:

— Знаю я твои шутки... Здесь ничего нельзя посадить!

Почему?

143. Как расставить 16 стульев, чтобы у каждой из четырех стен комнаты стояло: а) по 4 стула; б) по 5 стульев?

144. Снежную крепость защищала группа ребят. Осажденные успешно отбивали все штурмы до тех пор,

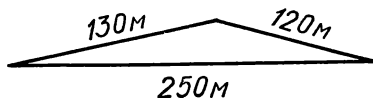


Рис. 14

пока за каждой из четырех стен крепости было по 12 защитников. Вначале снежного боя в крепости было 44 защитника, которые располагались, как показано на рисунке 15.

1	10	1
10		10
1	10	1

Рис. 15

Если в игрока попадал снежок, то он выбывал из боя. В ходе игры в крепости оставалось все меньше и меньше защитников, а именно: 40, 36, 32 и 28. Но, несмотря на это, они размещались так, что за каждой крепостной стеной оставалось по 12 человек, обеспечивающих ее неприступность.

Как же перестраивали свои ряды обороняющие крепость, чтобы сохранить по 12 защитников за каждой ее стеной?

145. Летом я решил привезти на дачу цветочную рассаду для клумбы, имеющей форму прямоугольника. Длина клумбы 240 см, а ширина 120 см.

Цветы решено было сажать на расстоянии 20 см друг от друга. Я подсчитал, что мне нужно $(240:20) \times (120:20) = 12 \cdot 6 = 72$ кустика рассады. К сожалению, их не хватило. Сколько же надо было привезти кустика рассады?

146. Крышка стола имеет четыре угла. Если один из них отпилить, сколько будет углов у крышки?

147. На прямой даны два отрезка: $OA = 4$ см и $OB = 6$ см. Определите расстояние AB .

148. На прямой даны два отрезка: $OA = 8$ см и $OB = 4$ см. Определите расстояние между точкой O и серединой M отрезка AB .

149. На отрезке взяты точки K и M (рис. 16). Сколько получили разных отрезков? На первый взгляд кажется, что их будет три: AK , KM и MB . Но если внимательнее рассмотреть этот рисунок, то можно найти еще три отрезка: AM , KB и AB . Сколько разных отрезков изображено на рисунке 17?

Рис. 16

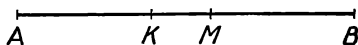
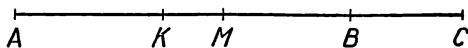


Рис. 17



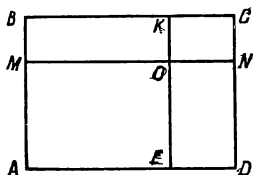


Рис. 18

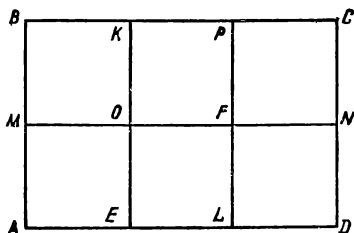


Рис. 19

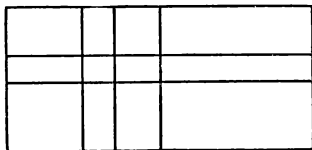


Рис. 20

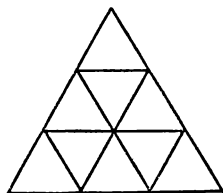


Рис. 21

150. Прямоугольник $ABCD$ (рис. 18) разделен на части прямыми KE и MN . Сколько получилось разных прямоугольников? Четыре? Нет! Найдите на этом рисунке 9 разных прямоугольников.

151. Начертите прямоугольник со сторонами 6 см и 4 см. Разделите его стороны соответственно на 3 и 2 равные части, по 2 см каждая (рис. 19). Найдите 18 разных прямоугольников.

Указание. Квадраты также являются прямоугольниками.

152. Сколько разных прямоугольников изображено на рисунке 20?

153. Сколько разных треугольников в фигуре, изображенной на рисунке 21?

154. Рассмотрите изображенную на рисунке 22 фигуру и постарайтесь подсчитать, сколько здесь разных треугольников.

155. Найдите 27 разных треугольников в фигуре, изображенной на рисунке 23.

156. Квадрат со стороной 6 см разбит на квадраты со сторонами 2 см, как показано на рисунке 24. Сколько разных квадратов на этом рисунке?

157. Найдите 30 разных квадратов на рисунке 25.

158. Найдите 47 разных треугольников в фигуре, изображенной на рисунке 26. Считать нужно все

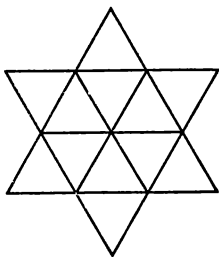


Рис. 22

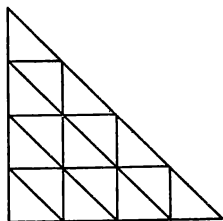


Рис. 23

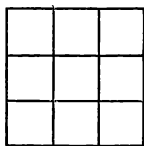


Рис. 24

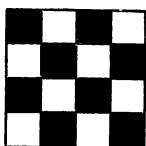


Рис. 25

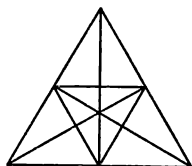


Рис. 26

треугольники, в том числе и те, которые состоят из нескольких треугольников меньших размеров.

159. (Шутка.) Длина каждой палочки 6 см. Как из 13 таких палочек сложить метр? Палочки можно заменить спичками.

160. Сколько пятикопеечных монет надо сложить стопкой, чтобы она была такой же высоты, как пятикопеечная монета, поставленная на ребро? Сначала скажите, а потом проверьте, на сколько вы ошиблись.

161. Попробуйте расположить 10 монет (одинаковых) в 5 рядов так, чтобы в каждом ряду было по 3 монеты. Потом отложите в сторону одну монету и оставшиеся разложите в 8 рядов так, чтобы в каждом ряду было по 3 монеты.

162. С помощью спичек длиной в 5 см надо выложить квадрат со стороной 20 см и разделить его на равные квадратики со сторонами 5 см. Сосчитайте в уме, сколько надо для этого спичек, а затем проверьте свой результат непосредственно со спичками.

163. С помощью спичек длиной в 5 см надо выложить квадрат со стороной 1 м и разделить его на равные квадратики со сторонами 5 см. Подсчитайте, сколько для этого нужно спичек.

164. Из 50 звеньев составлена цепь (рис. 27). Про-

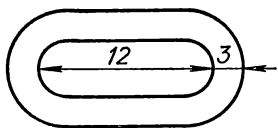


Рис. 27



Рис. 28

свет каждого звена 12 мм, а толщина звена 3 мм. Какова длина цепи?

165. Перед вами (рис. 28) три одинаковых кубика, все грани которых имеют одинаковые обозначения (0; 1; 4; 5; 6; 8). Какими цифрами обозначены те грани кубиков, на которых они лежат?

166. Пачка писчей бумаги в 500 листов имеет высоту 5 см. Какой высоты получится столб из миллиона листов такой бумаги, если их положить друг на друга?

167. Две лестницы, имеющие одинаковую высоту и одинаковое основание, покрыты коврами дорожками (рис. 29). Одинаковой ли длины эти дорожки, если одна лестница состоит из 4 ступеней, а другая — из 8 ступеней? Вычислите длины дорожек, если высота лестницы равна 1 м, а ее основание — 2 м.

168. Комната, в которой вы занимаетесь, имеет размеры $4 \times 4 \times 3$ м. Какова масса находящегося в ней воздуха? Не решая, скажите, она будет больше или меньше 50 кг. (Масса 1 м^3 воздуха приблизительно равна 1300 г.)

169. Какую часть 1 м^2 составляет квадрат со стороной в полметра?

170. Квадрат со стороной 20 см разрезали на квадратики со сторонами 1 см. Прикладывая получившиеся квадратики друг к другу, получили полосу шириной 1 см. Чему равна длина такой полосы?

171. Имеются кубики с ребром (стороной) 1 см.

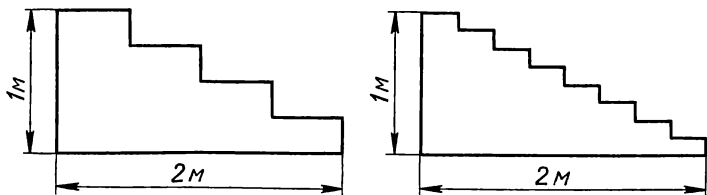


Рис. 29

Сколько нужно таких кубиков, чтобы из них сложить куб с ребром 2 см?

172. Какую часть одного кубического дециметра составляет куб с ребром 5 см?

173. Какую часть одного кубического дециметра составляет куб с ребром 2 см?

174. Куб с ребром 20 см разрезали на кубики с ребром 2 см каждый. Затем эти кубики уложили в сплошной ряд. Чему равна длина ряда?

175. Имеются два кирпича обычной формы, сделанные из одинакового материала. Масса одного из них 5 кг. Какова масса второго кирпича, если все размеры его в 5 раз меньше?

176. Кусок туалетного мыла имеет форму параллелепипеда. После семи дней использования все его размеры уменьшились вдвое. На сколько дней еще хватит этого куска?

177. Сколько дробинок диаметром 1 мм можно выплавить из свинцового шарика диаметром 1 см?

Указание. Если радиус (или диаметр) любого шара увеличить в 2 раза, то объем его увеличится в $2 \times 2 \times 2 = 8$ раз; если же в 3 раза, то объем увеличится в $3 \times 3 \times 3 = 27$ раз и т. д.

178. Сколько дробинок диаметром 1 мм нужно сплавить, чтобы получить свинцовый шарик диаметром 3 см?

179. Склянка в форме шара диаметром 10 см наполнена шарообразными пилюлями радиусом 5 мм. Больной принимает ежедневно по 5 пилюль. На сколько примерно дней ему хватит содержимого склянки?

180. Мать собиралась варить вишневое варенье. Дочь помогала вынимать косточки из вишен.

— Мама, посмотри,— сказала она,— толщина мякоти у вишни как раз равна толщине косточки!

— В таком случае,— отозвалась мать,— подсчитай, сколько у нас стаканов мякоти, если мы собрали 2 стакана косточек.

Подсчитайте и вы, сколько получилось стаканов мякоти. Плотностью укладки косточек и мякоти нужно пренебречь, т. е. считать, что объем косточек и вишен, находящихся в стакане, равен объему стакана.

181. Масса полностью заполненного водой сосуда 8 кг, а заполненного до половины — 5 кг. Сколько килограммов воды вмещает этот сосуд?

182. Сколько граней имеет новый шестигранный карандаш?

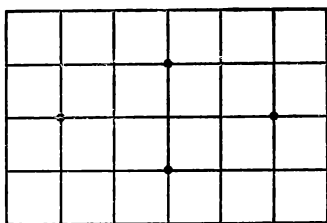


Рис. 30

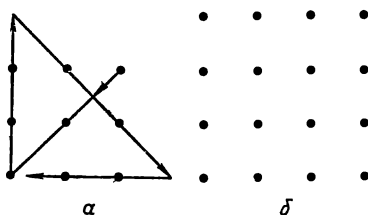


Рис. 31

183. Если куб расечь плоскостями на 8 равных между собой кубиков, то общий объем кубиков, очевидно, будет таким же, как и большого куба. А вот общая поверхность, несомненно, увеличится. Во сколько раз?

У к а з а н и е. Если в общем виде решить эту задачу вам трудно, то можно принять ребро исходного куба за 2 единицы.

184. Для окраски белого куба требуется 1 кг краски. Такой же белый куб разрезан на $10 \times 10 \times 10$ маленьких одинаковых кубиков. Сколько краски потребуется на окраску всех этих кубиков, если толщина слоя краски в обоих случаях одинакова?

185. Начертите квадратную таблицу из шестнадцати клеток. Попробуйте расставить 7 звездочек так, чтобы при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов оставалась незачеркнутой хотя бы одна звездочка.

186. На прямоугольном участке земли размером 120×80 м находятся 4 колодца, изображенные на рисунке 30 точками. Разбейте этот земельный участок на 4 части, одинаковые по величине и форме, так, чтобы колодцы на каждом участке занимали одно и то же положение.

187. Вы, конечно, знаете, как четырьмя линиями соединить 9 точек, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одной и той же линии дважды (рис. 31, а). Попробуйте таким же образом соединить 16 точек (рис. 31, б) шестью прямыми.

188. Имеется 16 палочек длиной 1 см, 16 палочек длиной 2 см и 15 палочек длиной 3 см каждая. Можно ли из всех палочек этого набора сложить прямоугольник?

189. Комната имеет форму куба. В верхнем углу, у потолка, сидит паук, а в противоположном углу внизу, у пола, сидит муха. Каким кратчайшим путем должен двигаться паук, чтобы добраться до мухи?

5. Разные задачи

190. Все натуральные числа записаны подряд, начиная с единицы:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Ясно, что практически мы не можем записать все натуральные числа, так как их бесконечное множество. Но можно рассчитать, какая цифра стоит на каком месте, если учесть, что для записи однозначного числа нужна лишь одна цифра, двузначного — две цифры, трехзначного — три цифры и т. д.

Не записывая чисел, сделайте нужные расчеты и ответьте на следующие вопросы:

1) Сколько имеется однозначных чисел; двузначных чисел; трехзначных чисел?

2) Сколько понадобится цифр, чтобы записать все однозначные числа?

3) Сколько понадобится цифр, чтобы записать все числа от 1 до 99 включительно?

4) Сколько понадобится цифр, чтобы записать все числа от 1 до 999 включительно?

5) Какая цифра в ряду натуральных чисел стоит на 8-м месте; на 15-м месте; на 36-м месте; на 125-м месте; на 316-м месте; на 34 788-м месте?

191. Выпишем подряд все четные числа:

2 4 6 8 10 12

Какая цифра стоит на 1990-м месте?

192. Сколько потребуется цифр для нумерации 32 страниц книги, начиная с первой?

193. Сколько потребуется цифр для нумерации 255 страниц книги, начиная с первой?

194. Для нумерации страниц учебника потребовалось 414 цифр. Сколько страниц в учебнике?

195. Для нумерации страниц словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц в словаре?

196. Какими по счету будут 12-я и 23-я книги в ряду, состоящем из 34 книг, если считать справа налево?

197. Что больше: сумма всех цифр или их произведение?

198. Назовите последнюю цифру произведения пяти чисел: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, не выполняя умножения.

199. На каком месте, считая справа налево, стоит первая, отличная от нуля, цифра в произведении всех целых чисел от 1 до 10 включительно?

200. Назовите четыре последние цифры произведения всех целых чисел от 1 до 20 включительно.

201. На каком месте, считая справа налево, стоит первая, отличная от нуля, цифра в произведении всех целых чисел от 1 до 25 включительно?

202. На сколько сумма всех четных чисел первой тысячи больше суммы всех нечетных чисел этой тысячи?

203. Натуральные числа от 1 до 100 включительно разбиты на два класса: четные и нечетные. Определите, в каком классе и на сколько сумма всех цифр, использованных для записи чисел класса, больше.

204. Какое наибольшее число можно записать с помощью двух двоек; двух троек; двух пятерок; двух девяток?

205. 1) Произведение трех последовательных нечетных чисел равно 105. Найдите эти числа.

2) Произведение трех последовательных натуральных чисел равно 210. Найдите эти числа.

У к а з а н и е. Данное число разложите на простые множители.

206. 1) Произведение четырех последовательных нечетных чисел равно 945. Найдите эти числа.

2) Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 360. Найдите эти числа.

207. В некоторый момент времени планеты Венера и Меркурий занимают определенное положение относительно звезд. Через сколько суток обе планеты будут находиться снова в том же положении относительно звезд, если известно, что Меркурий делает полный оборот вокруг Солнца за 88 сут, а Венера — за 225 сут?

208. Я хожу в бассейн один раз в 3 дня, Вася — один раз в 4 дня, а Коля — один раз в 5 дней. В понедельник мы встретились в бассейне все вместе. Через сколько дней мы встретимся снова, и какой это будет день недели?

209. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 2, то останется 1 лишняя

книга, если по 3, то — 2 книги, а если по 4, то останется 3 книги. Найдите наименьшее число книг, удовлетворяющее этим условиям.

210. Найдите наименьшее число, которое при делении на 6 дает в остатке 5, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 3 дает в остатке 2 и при делении на 2 дает в остатке 1.

211. У Пети немного орехов. Когда он раскладывал их в кучки по 3 или по 4 ореха в каждой, то всякий раз один орех оставался, а когда разложил их по 5, то лишних орехов не оказалось. Сколько орехов было у Пети?

212. Какое число делится на все целые числа?

213. Рассмотрим все целые числа от 1 до 30 включительно:

1; 2; 3; 4; ...; 28; 29; 30.

Не записывая все числа, скажите, сколько среди них таких, которые: а) делятся на 2; б) делятся на 3; в) делятся на 2 и на 3; г) делятся на 2, но не делятся на 3; д) делятся на 3, но не делятся на 2; е) не делятся на 2; ж) не делятся на 3; з) не делятся ни на 2, ни на 3.

Теперь запишите все эти тридцать чисел и проверьте свои ответы.

214. Сколько среди целых чисел от 1 до 60 включительно таких, которые: а) делятся на 3; б) делятся на 5; в) делятся на 3 и на 5; г) делятся на 3, но не делятся на 5; д) делятся на 5, но не делятся на 3; е) не делятся на 3; ж) не делятся на 5; з) не делятся ни на 3, ни на 5?

215. Сколько есть целых чисел от 1 до 41 включительно, делящихся и на 2, и на 3?

216. Сколько есть целых чисел от 1 до 41 включительно, не делящихся ни на 2, ни на 5?

217. Имеется два ряда натуральных чисел, по 30 в каждом. В одном из них числа выписаны через 3, в другом — через 5:

2, 5, 8, 11, 14, 17, ..., 89;
2, 7, 12, 17, 22, 27, ..., 147.

Сколько одинаковых чисел в этих двух рядах? Назовите их.

218. Если к искомому числу прибавить 9 и полученную сумму разделить на 7, то в остатке получится 2. Если же к искомому числу прибавить 32 и сумму раз-

делить на 9, то в остатке получится 5. Найдите искомое число, если известно, что оно больше единицы и меньше ста.

219. Числа от 1 до 1000 включительно выписаны подряд по кругу. Начиная с первого вычеркивается каждое пятнадцатое число (1, 16, 31, ...), причем при повторных обходах по кругу зачеркнутые числа также считаются. Сколько чисел останется невычеркнутыми?

220. На классной доске написаны натуральные числа:

1, 2, 3, 4, ..., 1990.

Разрешается стереть любые 2 числа, записав вместо этих чисел их разность. Докажите, что многократным повторением такой операции нельзя добиться того, чтобы на доске остался лишь ноль.

Указание. Вначале проверьте это утверждение для чисел от 1 до 10.

221. Разность двух чисел 57. Если у большего числа зачеркнуть цифру единиц, равную 3, то получим меньшее число. Найдите эти числа.

222. Сумма двух чисел 78 293. В большем из них цифра единиц — 5, цифра десятков — 1, сотен — 2. Если эти цифры зачеркнуть, то получим меньшее число. Найдите эти числа.

223. Если в неизвестном числе зачеркнуть крайнюю справа цифру 2, то число уменьшится на 31 061. Найдите это число.

224. Если к двузначному числу слева и справа приписать по единице, то оно увеличится в 21 раз. Найдите это двузначное число.

225. Если в неизвестном числе зачеркнуть крайнюю справа цифру 7, то число уменьшится на 31 156. Найдите это число.

226. Некоторое число оканчивается цифрой 2. Если эту цифру переставить из конца числа в начало, то получится число, которое в два раза больше первоначального. Найдите наименьшее из чисел, обладающих указанным свойством.

Решение. Искомое число найдем, постепенно отыскивая все его цифры. Это можно сделать умножением или делением.

Так как при перестановке цифры 2 с конца в начало получили число, в два раза большее, то умножим

искомое число на 2. Обозначив неизвестные цифры точками, запишем

$$\dots 2 \times 2 = \dots$$

Последняя цифра первого множителя 2, значит, в произведении последняя цифра 4 (2×2), но в искомом числе это предпоследняя цифра, поэтому имеем

$$\dots 42 \times 2 = \dots 4.$$

Следующая цифра 8 (4×2), затем 6 ($8 \times 2 = 16$), 3 ($6 \times 2 + 1 = 13$) и т. д. Всякий раз вначале находим цифру произведения, а затем ее пишем в первом множителе, получаем

$$\dots 36842 \times 2 = \dots 3684.$$

Такую работу продолжаем до тех пор, пока не получим цифру 2.

Окончите это решение и сверьте свой результат с ответом. (Искомое число должно записываться 18 цифрами.)

Можно рассуждать и иначе. Вновь полученное число, у которого первой цифрой стала 2, в два раза больше искомого числа. Если новое число разделить на 2, то получим искомое число.

Решите самостоятельно эту задачу делением на 2 вновь полученного числа, у которого первая цифра 2. Следующая цифра (первая цифра искомого числа) будет 1, затем 0, после него 5 и т. д.

227. Шестизначное число оканчивается цифрой 4. Если эту цифру переставить из конца числа в начало, то есть записать ее перед первой, не изменяя порядка остальных пяти, то получится число, которое в 4 раза больше первоначального. Найдите это число.

228. Некоторое число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру переставить в начало числа, то число увеличится в два раза. Найдите наименьшее такое число.

229. В некотором числе последняя цифра 3. При переносе этой цифры на первое место число увеличивается в три раза. Найдите наименьшее такое число (28-значное).

230. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести на два знака влево, то есть поместить в начале записи числа, то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найдите первоначальное число.

231. Рассмотрим двузначное число, например 12. Переставляя его цифры, можно получить еще только одно двузначное число: 21.

Переставляя цифры трехзначного числа, например 123, выпишите все возможные другие трехзначные числа. Вместе с данным таких чисел должно быть 6.

Если проделать то же самое с четырехзначным числом, например 1234, то всего получится 24 различных четырехзначных числа.

Как лучше выписывать такие числа, чтобы быть уверенным, что ни одно число не пропущено и ни одно не повторилось?

Не сможете ли тогда ответить, сколько пятизначных чисел получится при перестановке цифр в числе 12 345?

232. Сколько существует различных двузначных чисел, все цифры которых нечетные? А сколько таких трехзначных чисел?

233. Каких чисел больше среди первой тысячи (от 0 до 999): тех, в записи которых встречается цифра 1, или тех, в записи которых ее нет?

У к а з а н и е. Вычислите, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, учитывая и числа вида 002, 035 и т. п.

234. Сколько целых четырехзначных чисел можно записать двумя единицами и четырьмя нулями?

235. Сколько целых семизначных чисел можно записать тремя единицами и четырьмя нулями?

236. У скольких пятизначных чисел сумма цифр равна 2; 3?

237. Три школьника решили сыграть друг с другом в шахматы. Всего было сыграно 3 партии. Сколько партий сыграл каждый?

238. В шахматном турнире участвовало 11 человек. После окончания турнира участники решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого понадобилось?

239. В классе проводили шахматный турнир. Ежедневно игралось по 4 партии. Весь турнир закончился за 18 дней. Сколько учащихся приняло участие в турнире, если каждый из них играл две партии с каждым из соперников?

240. В розыгрыше кубков по футболу участвовало 16 команд. Повторных игр не было, то есть не было ничьих, проигравшая команда выбывала из розыгрыша.

Сколько всего состоялось матчей в розыгрыше кубка? А как подсчитать число матчей, если бы команд было 1025?

241. Пассажиры, едущие в одном вагоне, оживленно обсуждали 4 журнала. Оказалось, что каждый из них выписывает по 2 журнала, причем каждая из возможных комбинаций двух журналов выписывается одним человеком. Сколько человек участвовали в обсуждении?

242. Сколько двусторонних переговоров состоялось во время выставки, если каждый из ее шести участников беседовал с каждым другим по одному разу?

243. Узел конструкции состоит из трех одинаковых стержней, поэтому для испытания трех узлов изготовили $3 \times 3 = 9$ стержней. При испытании оказалось, что два стержня, входящие в узел, разрушаются, а третий остается целым и может быть использован снова. Поэтому из трех уцелевших стержней удалось собрать и испытать еще один узел — четвертый. Таким образом, 9 стержней позволили испытать 4 узла. Сколько узлов можно собрать и испытать из 72 стержней, если при каждом испытании будут разрушаться только 2 стержня?

244. Имеется 5 кубиков, которые отличаются друг от друга только цветом: 2 красных, 1 белый и 2 черных. Есть два ящика *A* и *B*, причем в *A* помещается 2 кубика, а в *B* — 3 кубика. Сколькими различными способами можно разместить эти кубики в ящиках *A* и *B*?

245. Решите предыдущую задачу, если имеется 4 красных, 2 белых и 2 черных кубика, причем в ящик *A* помещается 3 кубика, а в ящик *B* — 5 кубиков.

246. Решите задачу, которая побудила Пуассона, ставшего впоследствии известным ученым, заняться математикой (в условии французская мера объема «пинта» заменена «литром»).

Некто имеет 12 л вина и хочет половину вина подарить, но у него нет посуды емкостью 6 л, а есть два сосуда, один емкостью 8 л, другой — 5 л. Каким же образом налить 6 л вина в сосуд, вмещающий 8 л.

247. Девять различных цифр (кроме нуля), написанных на отдельных карточках, розданы трем лицам, по 3 каждому, так, что сумма цифр у каждого одна и та же. Из этих цифр каждый составил наименьшее трехзначное число и записал его.

После этого карточки смешали и раздали таким же

образом, как и в первый раз. Оказалось, что каждый получил по одной цифре, уже бывшей у него в первый раз, и сумма полученных каждым цифр одинакова. Каждым вновь было составлено наименьшее трехзначное число и сложено с предыдущим. В результате у всех трех получились суммы, равные 516. Какие числа были составлены каждым?

248. Отец предложил Сереже задачу: «Я сегодня возил разные грузы. Сколько всего сделал рейсов, не помню, знаю только, что их было меньше 11. Больше всего рейсов я сделал в магазин, несколько меньше — на базу, еще меньше — в совхоз. Меньше всего рейсов я сделал в колхоз. Скажу еще, что если число рейсов в магазин умножить на число рейсов на базу, да еще умножить на число рейсов в совхоз, и умножить на число рейсов в колхоз, то получим число, в два раза большее, чем число лет твоей двоюродной сестрички Веры. Сколько лет Вере?»

Помогите Сереже решить задачу.

249. Отец предложил сыну задачу: «Я сегодня на своей машине побывал в разных местах. Сколько всего сделал рейсов, не помню, знаю только, что их было меньше 15. Больше всего рейсов я сделал в магазин, несколько меньше — на базу, еще меньше — в совхоз. Меньше всего рейсов я сделал в колхоз. Скажу еще, что число рейсов в магазин, умноженное на число рейсов на базу, затем на число рейсов в совхоз и на число рейсов в колхоз, составляет возраст моей бабушки, которой, как ты знаешь, уже более 100 лет. Ответь мне, сколько лет моей бабушке».

Решите эту задачу и вы.

250. Однажды мне нужно было сходить в библиотеку, на почту и отдать в ремонт ботинки. Для того чтобы выбрать кратчайший маршрут, необходимо рассмотреть все возможные варианты. Сколько существует вариантов пути, если библиотека, почта и сапожная мастерская расположены далеко друг от друга?

251. Однажды мне нужно было сходить в библиотеку, сберегательную кассу, на почту и отдать в ремонт ботинки. Сколько существует вариантов пути, если библиотека, сберегательная касса, почта и сапожная мастерская расположены далеко друг от друга?

252. Однажды мне нужно было сходить в библиотеку, сберегательную кассу, на почту и отдать в ремонт ботинки. Сколько существует вариантов пути, если

почта и библиотека находятся рядом, но значительно удалены от остальных пунктов, расположенных далеко друг от друга?

253. На рисунке 32 приведена схема автобусной сети города. Она устроена так, что:

а) на каждом маршруте по три остановки;

б) любых два маршрута имеют только одну общую остановку;

в) с любой станции можно попасть на любую другую без пересадки.

Сколько маршрутов в городе?

254. В микрорайоне 8 кварталов, каждый из них имеет в периметре 600 м. По внешним сторонам некоторых кварталов проходит кольцевое шоссе, длина которого 14 км. Найдите общую длину улиц города.

У к а з а н и е. Можно воспользоваться рисунком 32, хотя ответ не зависит от расположения кварталов.

255. Город состоит из 100 кварталов, периметр каждого из них 800 м. По внешним сторонам некоторых кварталов вокруг города проходит кольцевое шоссе. Общая длина всех улиц города, не считая шоссе, составляет 33 км. Найдите длину кольцевого шоссе.

256. Для определения количества деревьев в некотором лесном массиве нередко поступают так. Подсчитывают количество деревьев на небольшом участке и увеличивают полученное число во столько раз, во сколько площадь всего лесного массива больше площади выделенного участка.

Подсчитайте этим способом, сколько примерно деревьев на участке площадью 12 га, если на участке 50×50 м насчитали 52 дерева.

257. Чтобы определить урожайность семенного участка пшеницы, сняли урожай с площади 1 м^2 . Каков средний урожай пшеницы с 1 га, если с 1 м^2 собрали 300 г зерна?

258. При проверке зерна на всхожесть оказалось, что из 55 зерен прорастает только 50. Сколько надо высевать на 1 га такого зерна, если известно, что при полной всхожести (все зерна прорастают) на 1 га требуется 200 кг семян?

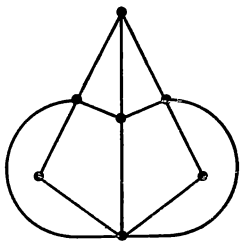


Рис. 32

259. При проверке семенной пшеницы на всхожесть оказалось, что из 100 зерен прорастает только 95. Сколько надо высевать такого зерна на 1 га, если известно, что при полной всхожести на 1 га требуется 190 кг семян?

260. (Шутка.) Четыре Маринки шли по тропинке. Четыре Маринки нашли по картинке. А если бы десять Маринок пошли, Сколько б картинок Маринки нашли?

261. Рыбаки выловили сетью из пруда 60 рыб, поместили и выпустили в воду. Через несколько дней рыбаки выловили сетью 80 рыб, среди которых 5 оказались мечеными. Определите по этим данным, сколько примерно рыб в пруду, если считать, что меченые рыбы равномерно распределены среди всех остальных рыб.

262. На автомобильный завод поступают одинаковые подшипники с двух заводов. Среди подшипников, поступающих с первого завода, из 1000 примерно 5 штук бракованных, а среди подшипников, поступающих со второго завода, который присылает их в два раза больше, чем первый, бракованных только 2 из 1000. Примерно сколько бракованных подшипников оказывается на автозаводе из каждых 1000 штук?

263. Два спортсмена-стрелка A и B стреляют по мишеням. Известно, что A из 10 выстрелов поражает примерно 9 мишеней, а B из 10 выстрелов поражает только 8 мишеней. Однажды им выдали по 100 патронов каждому и предложили одновременно стрелять по 100 мишеням, то есть по одной и той же мишени стрелял один раз стрелок A и один раз стрелок B . Подсчитайте, примерно сколько из 100 мишеней будут иметь по 2 попадания; сколько из этих 100 мишеней не будут иметь ни одного попадания.

264. Каждое утро кот Матроскин и пес Шарик бегают на речку умыться. Шарик добегаёт до реки за 10 мин, а Матроскин за 20. Через сколько минут Шарик догонит Матроскина, если кот выбежит из дома на 5 мин раньше?

ГЛАВА II. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

6. Сложение и вычитание

265. После выполнения сложения и вычитания на доске были стерты некоторые цифры, вследствие чего остались следующие записи:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 36?87 \\ + 529?4 \\ \hline ?3802 \\ ?1?43? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad ? ? ? 43 \\ - 4185? \\ \hline 181?9 \end{array}$$

Необходимо восстановить стерты цифры, обозначенные знаком вопроса.

Решение. Рассмотрим решение таких примеров. Для удобства лучше всего переписать условие примера в тетрадь, заменяя знаки вопроса точками. Получим две записи:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 36 \cdot 87 \\ + 529 \cdot 4 \\ \hline \cdot 3802 \\ \cdot 1 \cdot 43 \cdot \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \cdot \cdot \cdot 43 \\ - 4185 \cdot \\ \hline 181 \cdot 9 \end{array}$$

Постепенно вместо точек вписываем нужные цифры, а в конце делаем проверку. Задача состоит в том, чтобы не случайным подбором, а при помощи рассуждений найти эти цифры.

а) Складываем единицы: $7 + 4 + 2 = 13$, значит, у суммы число единиц 3, один десяток замечаем.

Так как цифра десятков у суммы равна 3, а $1 + 8 + 0 = 9$, то у второго слагаемого цифра десятков должна быть 4, ибо только $9 + 4 = 13$.

Рассмотрим цифры сотен. Одна сотня замечена, и у двух слагаемых цифры сотен известны, а должны получить число, оканчивающееся цифрой 4, но $1 + 9 + 8 = 18$, значит, цифра сотен у первого слагаемого 6.

Рассуждая таким же образом, найдем, что цифра тысяч у суммы 3, цифра десятков тысяч у третьего слагаемого 2, а у суммы цифра сотен тысяч 1. Следовательно, первоначальная запись имела вид

$$\begin{array}{r} 36687 \\ + 52944 \\ \hline 23802 \\ \hline 113433 \end{array}$$

б) Возможны два способа решения примеров на вычитание.

Мы знаем, что разность, сложенная с вычитаемым, дает уменьшаемое, поэтому пример на вычитание можно решать так же, как и пример на сложение. Но можно рассуждать и иначе.

Чтобы получить у разности цифру единиц 9, надо из 13 вычесть 4, значит, цифра единиц у вычитаемого 4, при этом у числа десятков уменьшаемого занята единица.

Так как из 3 десятков нельзя вычесть 5 десятков, занимаем 1 сотню. В сотне 10 десятков да 3 десятка у уменьшаемого, всего 13 десятков. Из 13 десятков вычтем 5 десятков, получим цифру десятков разности 8.

Чтобы цифра сотен разности была 1, надо 8 вычесть из 9, но так как была занята еще 1 сотня, то у уменьшаемого цифра сотен 0, причем занята 1 тысяча.

Рассуждая так же и дальше, мы получим, что у уменьшаемого цифра тысяч 0, а цифра десятков тысяч 6.

Следовательно, первоначальная запись имела вид

$$\begin{array}{r} 60043 \\ - 41854 \\ \hline 18189 \end{array}$$

Напоминаем, что всегда надо проверить, правильно ли решен пример.

266. Восстановите первоначальную запись в следующих примерах на сложение:

а)
$$\begin{array}{r} + \quad ? \, 3 \, 7 \, ? \\ + \quad 4 \, ? \, 5 \, 2 \\ \hline 7 \, 8 \, ? \, 4 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} + \quad 4 \, 4 \, ? \, 2 \\ + \quad 9 \, ? \, ? \, 4 \, ? \\ \hline ? \, ? \, 3 \, 2 \, 9 \, 1 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} 6 \, 5 \, ? \, 7 \\ + 1 \, 5 \, 3 \, ? \\ \hline ? \, 5 \, 4 \, 2 \\ \hline ? \, 3 \, ? \, 4 \, 2 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} 6 \, 1 \, 7 \, 6 \, 7 \\ + 3 \, 5 \, 6 \, ? \, 3 \\ \hline 2 \, ? \, ? \, 4 \, 2 \\ \hline ? \, ? \, 0 \, 2 \, 1 \, ? \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} 8 \, 0 \, ? \, 5 \\ 1 \, 9 \, 3 \, ? \\ + 9 \, ? \, 2 \, 8 \\ \hline ? \, 8 \, 3 \, 7 \\ \hline ? \, 6 \, 5 \, 9 \, 4 \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} 2 \, 1 \, ? \, 5 \, 8 \\ ? \, 3 \, 5 \, 7 \, ? \\ + 5 \, 8 \, 4 \, ? \, 3 \\ \hline 6 \, ? \, 3 \, 2 \, 4 \\ \hline 3 \, 5 \, 7 \, 4 \, 1 \\ \hline ? \, 0 \, 0 \, 0 \, 0 \, 0 \end{array}$$

267. Восстановите первоначальную запись в следующих примерах на вычитание:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} 6??7 \\ -1345 \\ \hline ??63? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б)} \quad \begin{array}{r} 54?7? \\ -3?3?4 \\ \hline ??6149 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в)} \quad \begin{array}{r} 3?63? \\ -?25?6 \\ \hline 1?54 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г)} \quad \begin{array}{r} ????? \\ -????? \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д)} \quad \begin{array}{r} 51?86 \\ -2?2?? \\ \hline ??0833 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е)} \quad \begin{array}{r} 7??57 \\ -?817? \\ \hline 18?9 \end{array} \end{array}$$

7. Умножение и деление

268. Восстановите первоначальную запись в следующих примерах на умножение, рассматривая вначале выполняемое при этом сложение:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} \times 4? \\ ?7 \\ \hline 3?? \\ + ?15 \\ \hline 2?51 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б)} \quad \begin{array}{r} \times ?5? \\ ?8 \\ \hline 2?64 \\ + 1?3? \\ \hline ??718? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в)} \quad \begin{array}{r} \times ??? \\ 1?? \\ \hline 226? \\ + 90? \\ \hline ??2 \\ \hline 56?00 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г)} \quad \begin{array}{r} \times ??4 \\ ?3? \\ \hline 17?? \\ + ?62 \\ \hline ?08 \\ \hline 60?98 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д)} \quad \begin{array}{r} \times ???? \\ ??7 \\ \hline ???? \\ + ?7018 \\ \hline ??509 \\ \hline ??52601 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е)} \quad \begin{array}{r} \times ???? \\ ?2?? \\ \hline 523?? \\ + ????4 \\ \hline ?9641 \\ \hline ?1002???? \end{array} \end{array}$$

269. Восстановите первоначальную запись в следующих более сложных примерах:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} \times 2? \\ 56 \\ \hline 1?8 \\ + ??5 \\ \hline ???? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б)} \quad \begin{array}{r} \times ?? \\ ?3 \\ \hline ?22 \\ + 1?? \\ \hline ??0? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в)} \quad \begin{array}{r} \times 9?? \\ 3? \\ \hline 6??2 \\ + ???8 \\ \hline ???6? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г)} \quad \begin{array}{r} \times ??9 \\ 9? \\ \hline 18?? \\ + 56?? \\ \hline ?????? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д)} \quad \begin{array}{r} \times ??? \\ 1?? \\ \hline 22?? \\ + 90? \\ \hline ??2 \\ \hline 56???? \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е)} \quad \begin{array}{r} \times ???3 \\ ??? \\ \hline ???? \\ + ????9 \\ \hline ???8 \\ \hline 33???51 \end{array} \end{array}$$

270. Решая многие примеры на восстановление первоначальной записи чисел, при умножении надо

проявить сообразительность и смекалку. Пусть требуется восстановить цифры в примере:

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{ccc} ? & ? & ? \\ 3 & 2 & ? \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} ? & 7 & ? & 2 \end{array} \\
 + \quad \begin{array}{ccc} 8 & ? & ? \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} ? & ? & ? & 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc} ? & ? & ? & 6 & ? & ? \end{array}
 \end{array}$$

Здесь уже труднее догадаться, какие цифры можно и нужно определить вначале. Следует внимательно изучить весь пример, чтобы сообразить, что легко можно найти последнюю и первую цифры множимого.

При умножении множимого на 2 получим трехзначное число, содержащее 8 сотен, что может быть лишь тогда, когда множимое содержит 4 сотни.

При умножении множимого на 3 получаем произведение, у которого число единиц равно 4, а это значит, что на 3 умножалось число 8. Значит, множимое имеет вид $4 ? 8$.

Чтобы найти число десятков у множимого, рассмотрим четвертую строку: $8 ? ?$. Средняя цифра либо 5, либо 4, так как $7 + 4 = 11$. Но при умножении $4 ? 8$ на 2 мы получим число вида $8 ? 6$, причем средняя цифра будет нечетной, так как $8 \times 2 = 16$. Следовательно, средняя цифра в четвертой строке 5, и тогда множимое равно 428.

Последняя цифра множителя либо 9, либо 4. Но при проверке обнаруживаем, что 9 не подходит, искомая цифра единиц множителя 4.

Восстановить остальные цифры примера теперь уже легко. Получим запись:

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} 1 & 7 & 1 & 2 \end{array} \\
 + \quad \begin{array}{ccc} 8 & 5 & 6 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 8 & 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 8 & 6 & 7 & 2 \end{array}
 \end{array}$$

Восстановите первоначальную запись в примерах № 271, 272 на умножение. Напоминаем, что надо быть внимательным. В первую очередь перепишите пример, заменяя вопросительные знаки точками, и изучите его условие. Затем примените те знания,

которые получили при решении предшествующих примеров. Не забудьте в конце сделать проверку. После нее сравните свой ответ с ответом, приведенным в конце книги.

271. а)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, 2 \, ? \\ \quad ? \, 3 \\ \hline ? \, 5 \, ? \, ? \\ + 2 \, 0 \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, 0 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, 7 \\ \quad 5 \, ? \, ? \\ \hline ? \, 7 \, ? \\ + ? \, ? \, 2 \\ \hline 7 \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, 1 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, 6 \\ \quad 7 \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \\ + ? \, ? \, 6 \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \\ \hline 2 \, 4 \, ? \, ? \, 1 \, 2 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, ? \, ? \\ \quad ? \, ? \, 3 \\ \hline ? \, ? \, ? \, 2 \, 1 \\ + 3 \, ? \, ? \, ? \, 2 \\ \hline ? \, ? \, 1 \, 9 \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, 7 \, 5 \\ \quad 5 \, ? \, ? \, ? \\ \hline 5 \, 4 \, ? \, ? \, ? \\ + 3 \, 8 \, ? \, ? \, ? \\ \hline 3 \, 8 \, ? \, ? \, ? \\ + 3 \, 8 \, ? \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

272. а)
$$\begin{array}{r} \times \quad 4 \, 5 \\ \quad ? \, ? \\ \hline ? \, 0 \\ + ? \, ? \, 0 \\ \hline 2 \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \\ \quad ? \, 8 \\ \hline ? \, ? \\ + ? \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} \times \quad 6 \, ? \, ? \\ \quad ? \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \\ + ? \, 3 \, ? \\ \hline ? \, ? \, 4 \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, 4 \, ? \\ \quad ? \, 2 \, ? \\ \hline ? \, ? \, 6 \\ + ? \, ? \, ? \, ? \\ \hline 7 \, ? \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, ? \\ \quad ? \, ? \, 8 \\ \hline ? \, ? \, ? \\ + ? \, 1 \, ? \, 7 \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, ? \\ \quad ? \, 2 \, ? \\ \hline ? \, ? \, ? \\ + ? \, ? \, ? \, ? \\ \hline ? \, 8 \, ? \\ \hline ? \, ? \, 9 \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

273. Восстановите первоначальную запись в следующем примере на умножение трехзначных чисел, если все иные цифры, кроме 6, отсутствуют:

$$\begin{array}{r} \times \quad ? \, ? \, ? \\ \quad ? \, ? \, ? \\ \hline ? \, 6 \, ? \, ? \\ + ? \, ? \, 6 \, 6 \\ \hline 6 \, ? \, 6 \\ \hline ? \, ? \, ? \, ? \, ? \end{array}$$

274. Путем последовательных рассуждений решаются и примеры на восстановление цифр при делении.

Пусть требуется восстановить цифры в таком примере:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{---} \text{ ? ? ? ? ? } \\
 \text{---} \text{ ? ? ? ? } \\
 \hline
 \text{? ? ? } \\
 \text{---} \text{ ? ? ? } \\
 \hline
 \text{? ? ? ? } \\
 \text{---} \text{ ? ? ? ? } \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} \text{ ? ? ? } \\
 \hline
 \text{? 8 ? }
 \end{array}
 \end{array}$$

Решение. На первый взгляд кажется, что деление нельзя восстановить, зная только одну цифру. Но не будем торопиться, подумаем.

Так как при умножении делителя на 8 получаем трехзначное число, а при умножении на две другие цифры частного получаем четырехзначные числа, то обе крайние цифры частного должны быть больше 8, то есть обе они равны 9. Значит, частное равно 989.

Найдем теперь делитель. Это трехзначное число, которое при умножении на 9 дает четырехзначное число, поэтому делитель больше, чем $999:9 = 111$.

Но при умножении на 8 получим трехзначное число, причем цифра сотен не больше 8, ибо при вычитании этого трехзначного числа (смотри третью и четвертую строки) мы должны получить разность, начинающуюся самое малое цифрой 1, а у уменьшаемого число сотен не может быть больше, чем 9. Таким образом, делитель должен быть не больше, чем $899:8 = 112$ (в остатке 3).

Следовательно, делитель больше, чем 111, но не больше, чем 112, то есть это будет число 112.

Зная делитель и частное, легко восстановить вторую, четвертую и шестую строки, а так как при делении остатка нет, то и пятую строку, такую же, как и шестую. Получим запись вида

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{---} \text{ } \\
 \text{---} \text{ 1 0 0 8 } \\
 \hline
 \text{? ? ? } \\
 \text{---} \text{ 8 9 6 } \\
 \hline
 \text{? ? ? ? } \\
 \text{---} \text{ 1 0 0 8 } \\
 \hline
 \text{? ? ? ? } \\
 \text{---} \text{ 1 0 0 8 } \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} \text{ 1 1 2 } \\
 \hline
 \text{? 8 ? }
 \end{array}
 \end{array}$$

Складывая 100 и 896, найдем третью строку 996, а прибавив 99 к числу 1008, найдем первые четыре цифры делимого. Последние две цифры делимого, которые при делении сносились, мы уже нашли.

Итак, получили запись:

$$\begin{array}{r}
 110768 \mid 112 \\
 - 1008 \\
 \hline
 996 \\
 - 896 \\
 \hline
 1008 \\
 - 1008 \\
 \hline
 \end{array}$$

275. Восстановите цифры в следующих примерах:

а)
$$\begin{array}{r}
 _ 1 ? 5 \mid ?? \\
 - ?? \mid ? 3 \\
 \hline
 _ ? ? \\
 - 4 ? \\
 \hline
 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r}
 _ 1 ? ? ? \mid ? 7 \\
 - ? ? 5 \mid ?? \\
 \hline
 _ ? ? ? \\
 - ? ? 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r}
 _ ? ? ? ? 0 \mid ? ? ? \\
 - ? ? 3 2 \mid 7 ? \\
 \hline
 _ 2 8 ? ? \\
 - ? ? ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r}
 _ 2 9 ? ? \mid ? ? \\
 - ? ? 8 \mid 3 ? \\
 \hline
 _ 3 ? ? \\
 - ? ? 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r}
 _ ? ? ? ? ? \mid ? ? ? \\
 - ? ? 5 \mid ? ? 4 \\
 \hline
 _ 2 0 ? ? \\
 - ? 9 ? ? \\
 \hline
 _ 1 3 ? ? \\
 - ? ? 0 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r}
 _ 4 6 ? ? 0 4 \mid ? ? 3 \\
 - ? 3 ? 8 \mid ? ? ? \\
 \hline
 _ ? ? ? ? \\
 - ? ? ? 2 \\
 \hline
 _ ? ? ? ? \\
 - ? ? ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

276. Восстановите первоначальную запись в следующих примерах:

а)
$$\begin{array}{r}
 _ ? ? 8 \mid ? ? \\
 - 2 ? \mid ? 7 \\
 \hline
 _ ? ? ? \\
 - ? ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r}
 _ ? ? ? ? 5 \mid ? ? ? \\
 - ? 8 ? \mid ? 2 ? \\
 \hline
 _ ? ? ? ? \\
 - ? ? ? ? \\
 \hline
 _ 6 ? ? \\
 - ? ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r}
 _ ? ? ? ? ? \mid ? ? ? \\
 - ? ? ? \mid ? ? 8 \\
 \hline
 _ 6 ? 7 ? \\
 - ? 7 ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r}
 _ 1 ? ? 6 ? ? 2 \mid ? ? ? \\
 - ? 1 5 ? \mid ? ? ? 7 \\
 \hline
 _ 4 ? ? ? \\
 - ? ? ? ? \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{д) } \begin{array}{r} _ \text{ ? ? ? ? ? } | \text{ ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } | \text{ ? 8 ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{е) } \begin{array}{r} _ \text{ ? ? 5 6 ? } | \text{ 2 3 5 } \\ _ \text{ ? ? ? ? } | \text{ ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? ? } \\ \hline \end{array} \end{array}$$

277. В данном примере известна только одна цифра. Но если внимательно изучить пример, то и здесь можно восстановить деление. Попробуйте это сделать.

$$\begin{array}{r} _ \text{ ? ? ? ? ? ? ? ? } | \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? ? } | \text{ ? 7 ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? ? } \\ \hline \end{array}$$

278. Определите число A по двум операциям деления:

$$\begin{array}{r} _ \text{ ? ? ? ? ? ? ? ? } | \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } | \text{ ? ? ? ? ? ? } = A \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? ? } \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{r} _ \text{ ? ? ? ? ? ? } | \text{ 2 ? } \\ _ \text{ ? ? } | \text{ 1 ? ? ? 6 } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? ? } \\ _ \text{ ? ? ? } \\ \hline \end{array}$$

279. Определите четырехзначное число, если:

а) деление этого числа на однозначное производится по схеме:

$$\begin{array}{r} _ \text{ ? ? ? ? } | \text{ ? } \\ _ \text{ ? ? } | \text{ ? ? ? } \\ \hline _ \text{ ? ? } \\ _ \text{ ? ? } \\ \hline \end{array}$$

б) деление этого числа на другое однозначное число производится по схеме:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{— } \text{? ? ? ?} \\
 \text{— } \text{?} \\
 \hline
 \text{— } \text{? ?} \\
 \text{— } \text{?} \\
 \hline
 \text{— } \text{? ?} \\
 \text{— } \text{? ?} \\
 \hline
 \text{— } \text{? ?}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 \text{?} \\
 \hline
 \text{? ? ?}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

8. Зашифрованные действия

Арифметические действия можно зашифровывать, заменяя цифры буквами. Одинаковые цифры заменяют одинаковыми буквами, а разные цифры — разными буквами. Это позволяет, найдя значение одной буквы, сразу определить несколько цифр.

Для решения удобно переписать пример, заменяя все буквы точками. Постепенно вместо точек будем писать найденные цифры, пока не восстановим всю запись примера. Напоминаем, что и здесь нужно не подбирать цифры, а находить их рассуждениями.

280. Определите цифровые значения букв в примере:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{— } \text{M U X A} \\
 \text{— } \text{X A} \\
 \hline
 \text{— } \text{K X} \\
 \text{— } \text{A P} \\
 \hline
 \text{— } \text{U X A} \\
 \text{— } \text{U X A} \\
 \hline
 \text{— } \text{U X A}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 \text{X A} \\
 \hline
 \text{U X A}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Решение. Так как при умножении XA на U получаем XA, то, значит, $U = 1$.

При умножении XA на X получаем двузначное число, меньшее 90, так как при вычитании KX — AP получается число, у которого 1 десяток. Следовательно, при умножении X на X мы получим число, меньшее 9, то есть X меньше 3, и так как цифра 1 обозначена буквой U, то $X = 2$.

Легко догадаться, что $P = 0$, так как $2 - P = 2$. Но тогда $A = 5$, потому что только при умножении 5 на 2 можно получить число, оканчивающееся цифрой 0.

Теперь можно восстановить и значения буквы М. Получим запись:

$$\begin{array}{r|l} 3125 & 25 \\ \underline{25} & \\ 62 & \\ \underline{50} & \\ 125 & \\ \underline{125} & \end{array}$$

281. Найдите цифровые значения букв в следующем примере:

$$\begin{array}{r} \text{— МАСЛО} \mid \text{Л} \\ \text{— МЛ} \mid \text{САЛО} \\ \hline \text{— УС} \\ \text{— УЛ} \\ \hline \text{— ЭЛ} \\ \text{— ЭЛ} \end{array}$$

Учтите, что только число 5 при умножении на три различных числа дает число, тоже оканчивающееся цифрой 5.

282. а) Средняя цифра трехзначного числа 0. Если зачеркнуть этот 0, то получим число, в 9 раз меньшее первоначального. Найдите такое число.

б) Одна из средних цифр четырехзначного числа 0. Для того чтобы разделить это число на 9, можно зачеркнуть этот 0. Найдите все такие числа.

283. Вдоль дорог обычно расставлены километровые столбы, на которых указаны расстояния до определенного города. Поезд, в котором я ехал, долго шел равномерно (без остановок и с постоянной скоростью). Выглянув в окно, я заметил указатель с двузначным числом. Ровно через час промелькнул второй указатель. Число было опять двузначное, записанное теми же цифрами, что и в первый раз, но в обратном порядке. Еще через час на километровом столбе появилось трехзначное число. Крайние цифры совпали с цифрами первого указателя, а средней цифрой был 0.

Какие цифры я видел на километровых столбах и с какой скоростью шел поезд?

284. Определите цифровые значения букв в следующих примерах:

$$\begin{aligned} 1) & \quad M \cdot A = T - E = M : A = T : H = K - A; \\ 2) & \quad \Gamma + O = L - O = B \cdot O = L - O = M - K = A; \end{aligned}$$

3) $\text{ОДИН} + \text{ОДИН} = \text{МНОГО}$;

4) $(\text{И} + \text{Г} + \text{Р} + \text{А})^4 = \text{ИГРА}$.

285. Определите цифровые значения букв в примере:

$$\text{РЛОРЕ} + \text{РККРК} = \text{ЛКЕККЕ}$$

Запишите буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, начиная с нуля. Если вы правильно решите пример, то получите фамилию известного французского математика, который в возрасте десяти лет уже знал высшую математику, в двенадцать лет сделал свое первое научное открытие, а в восемнадцать лет стал научным работником (адъюнктом) Парижской Академии наук.

286. Определите цифровые значения букв в примере:

$$\text{ТИДМ} + \text{МИДШ} = \text{МШТШМ}$$

Запишите буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, начиная с нуля. Если вы правильно решите пример, то получите фамилию талантливого ученого — математика и астронома, геофизика и географа, одного из первых Героев Советского Союза, который родился в г. Могилеве, где окончил гимназию с золотой медалью.

287. У Деда Мороза замечательный почтовый индекс. Если цифры этого индекса заменить буквами, то полученное число А Б В Г Д Е при умножении на 2 перейдет в В Г Д Е А Б, а при умножении на 3 — в число Б В Г Д Е А. Какой же почтовый индекс у Деда Мороза?

9. Числовые ребусы

Встречаются интересные примеры на восстановление цифр, в которых одновременно зашифровано несколько действий. Их обычно называют числовыми ребусами. Рассмотрим такой пример:

$$\begin{array}{r} \text{АТУ} + \text{ИАЗ} = \text{ИТЕ} \\ \text{—} \quad \text{—} \quad : \\ \text{НЕГ} : \text{ИОГ} = \text{Е} \\ \hline \text{ПАУ} - \text{НЗ} = \text{ППА} \end{array}$$

Как и в примерах предыдущего параграфа, цифры здесь зашифрованы буквами, причем всегда соблю-

дается условие: одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные цифры разными буквами.

Между зашифрованными числами поставлены математические знаки, показывающие, какие действия надо выполнить по столбцам сверху вниз и по строкам слева направо. Результат действий по столбцам записан в том же столбце под чертой, а результат действий по строкам записан на той же строке после знака равенства.

Решать числовые ребусы нужно, как и предыдущие примеры, не случайным подбором, а логически, путем рассуждений.

288. Восстановите цифровые значения букв в приведенном выше примере.

Решение. Заготовим схематическую запись примера (заменяя все буквы точками), в которой постепенно будем расставлять найденные цифры. Одновременно выпишем в строку (или в столбец) все десять цифр, против которых будем записывать соответствующие им в этом числовом ребусе буквы. Получим записи:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & + & . & . & . & = & . & . & . & . \\
 - & . & . & - & . & . & . & : & & & & \\
 \hline
 . & . & . & : & . & . & . & = & . & & & \\
 . & . & . & - & . & . & = & . & . & . & &
 \end{array}$$

Изучим внимательно условие примера. Рассматривая первый столбец (или второй), мы видим, что при вычитании из цифры У цифры Г получается цифра У, значит, буквой Г обозначена цифра 0 (для краткости будем записывать так: Г = 0).

В первой строке складываются два трехзначных числа, а их сумма есть число четырехзначное, что может быть лишь тогда, когда И = 1, так как сумма двух трехзначных чисел (меньших 1000) всегда меньше 2000. Расставив найденные значения двух букв в схематической записи примера, получим:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 . & . & . & + & 1 & . & . & = & 1 & 1 & . & . \\
 - & . & . & - & . & . & . & : & & & & \\
 \hline
 . & . & 0 & : & 1 & . & 0 & = & . & & & \\
 . & . & . & - & . & . & = & . & . & & &
 \end{array}$$

В первой строке записано, что при прибавлении к трехзначному числу числа, большего 100, получим число, большее, чем 1100, следовательно, первое слагаемое больше 900, то есть $A = 9$. Можно рассуждать и иначе: чтобы найти первое слагаемое, мы можем из $111 \dots$ вычесть $1 \dots$, тогда ясно, что $A = 9$.

Рассмотрим последний столбец. Если число $П П 9$ умножить на цифру $Е$, то получим число $11 Т Е$, оканчивающееся тоже цифрой $Е$, что может быть лишь тогда, когда $Е = 5$ ($Е$ не равно нулю). Это легко проверить хотя бы по таблице умножения на 9.

Теперь уже получили такую запись:

$$\begin{array}{r} 9 \dots + 19 \dots = 11 \dots 5 \\ - \qquad \qquad \qquad : \\ \hline \dots 50 : 1 \dots 0 = \dots 5 \\ \dots 9 \dots - \dots = \dots 9 \end{array}$$

Займемся последним столбцом. Если число 11.5 делить на число 5, то получим число, у которого цифра сотен равна 2, то есть $П = 2$. Умножая 229 на 5, найдем, что $Т = 4$.

Получив числовое значение той или иной буквы, вписываем его в схематическую запись и внимательно изучаем одновременно и условие примера и эту запись:

$$\begin{array}{r} 94 \dots + 19 \dots = 1145 \\ - \qquad \qquad \qquad : \\ \hline \dots 50 : 1 \dots 0 = \dots 5 \\ 29 \dots - \dots = 229 \end{array}$$

Из записи вычитания в первом столбце легко найти, что число сотен у вычитаемого равно 6, значит, $Н = 6$, а после записи значения $Н$ во второй столбец получим, что буква $О$ заменяет цифру 3. (Значение буквы $О$ можно получить и из второй строки, если разделить 650 на 5.)

Итак, получили

$$\begin{array}{r} 94 \dots + 19 \dots = 1145 \\ - \qquad \qquad \qquad : \\ \hline 650 : 130 = \dots 5 \\ 29 \dots - 6 \dots = 229 \end{array}$$

Остались нерасшифрованными две буквы $У$ и $З$, для которых возможны лишь два значения цифр:

7 и 8. Из последней строки видно, что при вычитании из 29. числа 6. занимали один десяток, значит, цифра, соответствующая букве З, больше, чем цифра, соответствующая букве У, следовательно, $У = 7$; $З = 8$. Зашифрованная запись приобрела вид

$$\begin{array}{r} 947 + 198 = 1145 \\ - \quad \quad \quad : \\ 650 : 130 = 5 \\ \hline 297 - 68 = 229 \end{array}$$

Проверка по строкам и столбцам показывает, что числовой ребус решен верно. Нередко вместо цифр буквы подбирают так, что при расположении их в определенном порядке получается некоторое слово. Например, в решенном нами ребусе расположим буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, начиная с нуля:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Г И П О Т Е Н У З А

Мы получили слово ГИПОТЕНУЗА — название наибольшей стороны прямоугольного треугольника, лежащей против прямого угла.

289. Решите самостоятельно простые числовые ребусы, в которых зашифрована лишь часть цифр:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{array}{r} \text{К А} + 8 = 3 \text{ Р} \\ - \quad \quad \quad - \\ \text{С И} + \text{Р} = \text{С Р} \\ \hline \text{С А} + 3 = \text{К И} \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} \text{К Г} - \text{Б} = 1 \text{ А} \\ + \quad \quad + \quad \quad + \\ \text{Г К} - \text{Г} = \text{К С} \\ \hline \text{Б Б} - \text{А} = 4 \text{ В} \end{array} \end{array}$$

Вместо букв надо подобрать цифры так, чтобы можно было произвести все указанные в ребусе действия над числами, в данном случае — сложение и вычитание. Напоминаем, что одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры.

290. Решите следующие ребусы, которые чуть-чуть сложнее:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{array}{r} \text{Е Д} + \text{У Д} = \text{С С} \\ - \quad \quad - \\ \text{А} + \text{А} = \text{У Ч} \\ \hline \text{Д 7} + 7 = \text{Е С} \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} \text{Ш К} + \text{Е} = \text{К Ш} \\ - \quad \quad - \\ \text{О} + \text{Л} = \text{В К} \\ \hline \text{В Л} + \text{Ш} = \text{В Е} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в)} \quad \begin{array}{ccccccc} \text{А} & \text{Б} & + & \text{В} & \text{Г} & = & \text{Д} & \text{Б} \\ \hline & & & \text{К} & + & & \text{М} & = & \text{Н} & \text{В} \\ \hline \text{В} & \text{С} & + & \text{Н} & \text{Р} & = & \text{М} & \text{Д} \end{array} \end{array}$$

291. Расшифруйте следующие числовые ребусы:

$$\begin{array}{rcl} \text{а) } & \text{П О} & + \quad \Gamma = \text{И П} \\ & + & + \\ & \text{Р} & + \quad \text{Р} = \text{П А} \\ \hline & \text{И Ф} & + \quad \text{П И} = \text{Ф Г} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \text{б) } & \text{М О М} & - \quad \text{К М} = \text{Е И Д} \\ & : & + \quad - \\ & \text{Е Е} & \times \quad \text{И} = \quad \text{И И} \\ \hline & \text{М М} & + \quad \text{Р Д} = \quad \text{Т М} \end{array}$$

Определите цифровое значение букв, расставьте буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр. Получите фамилии древних ученых, крупнейших мыслителей, живших более двух тысяч лет назад и внесших значительный вклад в развитие геометрии, которую вы будете изучать в старших классах.

292. Расшифруйте числовой ребус:

М	О	А	—	Л	Е	О	=	Р	З	Е
:		+				—				
Х	Р	×				М	=	Л	М	А
Л	О	+		Л	З	Л	=	Л	И	Е

Из букв, расположенных в порядке возрастания соответствующих им цифр (начиная с нуля), получится фамилия известного узбекского математика, жившего более тысячи лет тому назад. От названия одной из его работ произошел термин «алгебра».

293. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{А Т М Г} : \text{А О} = \text{Н Г} \\ - \quad \quad \quad - \quad \quad + \\ \text{Л Г Ъ} : \text{Н} = \text{Л Ъ} \\ \hline \text{А М А Ъ} : \text{Н} = \text{А И Ъ} \end{array}$$

В этом ребусе зашифрована фамилия известного английского математика и физика, который в детстве обладал прекрасной памятью и отличным даром устного счета. Он мгновенно производил четыре арифметических действия над большими числами и почти молниеносно решал самые сложные арифметические задачи.

294. Если правильно разгадать следующий ребус, то из букв, расположенных в порядке возрастания соответствующих им цифр, приписав в конце еще

букву Й, получите фамилию величайшего русского математика прошлого столетия:

$$\begin{array}{r}
 \text{К Е Л} + \text{О О А} = \text{И В А} \\
 + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \\
 \text{Б Б Ч} : \quad \quad \text{О В} = \quad \quad \text{О Ч} \\
 \hline
 \text{О Л С Ч} - \quad \quad \text{И С} = \text{И С С}
 \end{array}$$

295. Определите цифровые значения букв в ребусе

$$\begin{array}{r}
 \times \text{Е Л Ы} \\
 \text{Е К Ш} \\
 \hline
 + \text{Е К К К} \\
 \text{Е Л Ы} \\
 \hline
 \text{Е Д Ы К К}
 \end{array}$$

Выписав буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, вы получите фамилию известного советского математика и механика, академика АН СССР, президента АН СССР в 1961—1975 гг., трижды Героя Социалистического Труда.

296. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{Е Н Е} - \text{И Ш} = \text{Е Л И} \\
 : \quad \quad - \quad \quad - \\
 \text{Я} \times \text{Е В} = \text{Н Е} \\
 \hline
 \text{И В} + \text{Ш Е} = \text{Л Е Ш}
 \end{array}$$

Выписав буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, вы получите имя и фамилию известного советского футболиста.

297. Восстановите цифры в следующем примере:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{? ? ? ? ? ? ? ? ? ?} \\
 - \text{? ? 0} \\
 \hline
 \text{? ? ?} \\
 - \text{? 1 6} \\
 \hline
 \text{? ?} \\
 - \text{? ?} \\
 \hline
 \text{? ? ?} \\
 - \text{? 9 ?} \\
 \hline
 \text{? ?} \\
 - \text{? ?} \\
 \hline
 \text{? ?} \\
 - \text{? ?} \\
 \hline
 \text{? ? ?} \\
 - \text{? 1 ?} \\
 \hline
 \text{? ?} \\
 - \text{? ?} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{? ?} \\
 \hline
 \text{? ? ? ? ? ? 2 ?}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{И Н К} - \text{Ы Т} = \text{К И} \\
 : \quad \quad - \quad \quad - \\
 \text{Й} \times \text{Л} = \text{Ю Е} \\
 \hline
 \text{Ы Т} + \text{И К} = \text{И Х}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \triangle \square + \square \circ & = & \square \triangle \\
 - & & - \\
 \bigotimes + \boxtimes & = & \bigcirc \square \\
 \hline
 \bigcirc \boxtimes + \triangle & = & \bigcirc \square \circ
 \end{array}$$

Рис. 33

Одновременно решите помещенный рядом числовой ребус. Если цифры делимого заменить буквами с соответствующими числовыми значениями, то получите название журнала, из которого заимствованы некоторые из числовых ребусов.

298. Иногда встречаются арифметические ребусы, у которых цифры заменены не буквами, а геометрическими фигурами. Одинаковым цифрам соответствуют одинаковые фигуры, а разным цифрам — разные фигуры. Расшифруйте такой ребус (рис. 33).

299. При решении числовых ребусов часто следует учитывать особенности конкретных чисел. Например, проверяя таблицу умножения, можно установить, что если произведение двух различных цифр есть число, оканчивающееся на единицу, то одна из цифр 7, а другая 3. Никакие другие две различные цифры этим свойством не обладают.

Пользуясь этим указанием, решите два примера, данных на рисунке 34.

Выпишите буквы из второго ребуса (рис. 34, б) в порядке возрастания соответствующих им цифр, начиная с нуля, и букву Т замените буквой И. Полу-

а

$$\begin{array}{rcl}
 \blacksquare \blacksquare \blacktriangle - \square \bigcirc & = & \frown \nabla \\
 \vdots & & - \\
 \blacksquare \nabla \times \square & = & \triangle \blacksquare \\
 \hline
 \nabla + \bigcirc \blacktriangle & = & \square \smile
 \end{array}$$

б

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Н} \text{И} \text{А} : \text{А} \text{К} = \text{Г} \text{Н} \\
 - \quad \times \quad + \\
 \text{И} \text{Ц} - \text{А} \text{А} = \text{Т} \text{И} \\
 \hline
 \text{Г} \text{И} \text{И} - \text{А} \text{Т} \text{К} = \text{А} \text{М} \text{Т}
 \end{array}$$

Рис. 34

4	+		-		=	2
+		-		+		+
	-	2	+	0	=	
-		+		-		-
	+		-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-		=	3

Рис. 35

чите фамилию автора первого русского учебника по арифметике.

300. Расшифруйте два ребуса по двум действиям, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры (в обоих примерах!):

$$\begin{array}{r} + \text{ А Б В} \\ \text{ В В} \\ \hline \text{ А А Б} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \text{ А Б В} \\ \text{ В В} \\ \hline + \text{ А Б В} \\ \text{ А Г А В} \end{array}$$

301. В пустые клетки «числового коврика» (рис. 35) впишите числа так, чтобы все 8 примеров (по столбцам и по строкам) были решены правильно.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Рис. 36

$$\square \times \square \square = \square \square \square = \square \square \times \square$$

Рис. 37

302. Перед вами 9 карточек с цифрами (рис. 36). Замените ими пустые карточки (рис. 37) так, чтобы получились верные равенства.

ГЛАВА III. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

10. Задачи, решаемые почти без вычислений

303. В ящике имеются 12 одинаковых шаров, отличающихся только цветом: 6 красных, 3 белых, 2 зеленых и 1 черный. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика наугад (не заглядывая в него), чтобы среди вынутых шаров было:

- не менее двух шаров одного (любого) цвета?
- хотя бы три шара одного цвета?
- хотя бы один красный шар?
- хотя бы два белых шара?

Решение. Здесь фактически четыре задачи, но все они решаются почти одинаково.

а) В задаче требуется определить, сколько нужно вынуть шаров, чтобы среди них обязательно было два шара одного цвета: красного, зеленого или белого. Будем рассуждать следующим образом.

Вынув один шар, мы вынимаем следующий. Он может оказаться того же цвета, что и первый. Но возможно, что второй шар иного цвета. Так как мы должны быть уверены в том, что среди вынутых шаров обязательно есть два шара одного цвета, то нужно рассматривать худший вариант.

Может оказаться, что вынуто уже 4 шара, но все они различных цветов: 1 красный, 1 белый, 1 зеленый и 1 черный. Но если теперь вынуть еще один шар: красный, белый или зеленый (черного уже нет), то в любом случае получим 2 шара одного цвета.

Итак, вынув из ящика 5 шаров, мы обязательно среди них будем иметь 2 шара одного цвета.

б) При решении задачи также рассматриваем худший вариант. Может оказаться, что вынули 2 красных, 2 белых, 2 зеленых и 1 черный, то есть 7 шаров, но среди них нет трех шаров одного цвета. Значит, чтобы обязательно было три шара одного цвета, красного или белого, нужно вынуть еще один шар.

Итак, ответ: 8 шаров.

в) В третьей задаче необходимо, чтобы среди вынутых был хотя бы один красный шар. Может оказаться, что вынули все белые, зеленые и черный шар, всего 6 шаров. Какой бы после этого шар мы ни вынимали, он обязательно будет красного цвета, так как все 6 оставшихся в ящике шаров — красные. Значит, нужно вынуть самое меньшее 7 шаров, чтобы быть уверенным, что среди вынутых есть один красный шар.

г) Рассуждая таким же образом, как и в предыдущей задаче, получим, что в худшем случае среди вынутых шаров может оказаться 6 красных, 2 зеленых, 1 черный и 1 белый, а в ящике осталось еще 2 белых. И только взяв одиннадцатый шар, мы обязательно будем иметь среди вынутых 2 белых шара.

В подобных задачах нужный вариант может появиться и раньше, но может и не появиться. А мы должны быть уверенными, что он обязательно появится, поэтому и рассматриваем всякий раз наихудший вариант.

304. В ящике имеется 3 черных и 5 белых шаров. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика (не заглядывая в него), чтобы среди вынутых шаров оказался:

- а) хотя бы один черный?
- б) хотя бы один белый?

305. В ящике имеется 3 черных и 5 белых шаров. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, чтобы среди вынутых шаров оказалось:

- а) хотя бы два черных?
- б) хотя бы два белых?

306. В пакете имеются конфеты трех сортов, не различимые на ощупь. Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди вынутых было:

- а) хотя бы две конфеты одного сорта?
- б) хотя бы три конфеты одного сорта?

307. В ящике имеется 100 одинаковых шаров, различающихся только цветом: 30 красных, 30 зеленых, 30 белых и 10 черных. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, чтобы среди них было не менее пяти шаров одного цвета?

308. Ученик собирался на вечер, когда погас свет в комнате, где в ящике шкафа лежали его носки двух цветов: коричневые и серые. Какое наименьшее число носков он должен взять из ящика, чтобы обеспечить себя парой носков одного цвета?

309. Мои четыре пары перчаток одного фасона: две пары черных и две серых, лежали на полке в темной комнате. Какое наименьшее число перчаток я должен взять наугад, чтобы иметь пару перчаток одного цвета, безразлично какого?

310. При делении целых чисел на некоторое число можно получить столько различных остатков (включая и нуль), сколько единиц в делителе. Например, при делении на 5 остаток может быть равен нулю (число делится на 5), единице, двум, трем или четырем, то есть всего может быть пять различных остатков.

Сколько нужно взять целых чисел, чтобы среди них хотя бы два при делении на 3 давали одинаковые остатки?

311. Ответьте на тот же вопрос для случая деления на 7; на 10; на 15.

312. Сколько (самое меньшее) надо взять произвольных чисел, чтобы среди них имелись хотя бы три

числа, которые при делении на 5 давали бы одинаковые остатки? Приведите примеры меньшего числа чисел, среди которых нет трех, дающих одинаковые остатки при делении на 5.

313. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы?

314. В пионерском отряде 22 пионера. Можно ли утверждать, что среди пионеров найдутся хотя бы два, имена которых начинаются с одной и той же буквы?

315. В школе 400 учеников. Почему среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, родившихся в один и тот же день года?

316. В школе 735 учащихся. Почему можно утверждать, что по крайней мере три ученика должны отмечать день своего рождения в один и тот же день?

317. Почтовое отделение приняло у населения 200 посылок с яблоками. Известно, что ящик не может вмещать более 60 яблок. Докажите, что по крайней мере четыре посылки содержат одинаковое число яблок.

318. У открытого окна стояли три вазы с розами. В белой вазе было в 2 раза, а в синей — в 3 раза больше цветов, чем в красной. Ветром опрокинуло одну вазу, и она разбилась. Пять роз осыпались. Остальные поставили поровну в синюю и вторую целевшую вазу. Какого цвета ваза разбилась?

319. Перед началом учебного года учащиеся организовали воскресник по заготовке дров для школы. Шестеро из них взялись за распиловку кругляков разной длины на полуметровые куски. Учащиеся разбились на три пары. Один из каждой пары считался бригадиром. Бригадиров звали: Володя, Петя и Вася. Володя с Мишей пилили двухметровые тонкие кругляки. Петя с Костей — полутораметровые кругляки средней толщины. Вася с Федей пилили метровые толстые кругляки.

На другой день в школьной стенной газете была отмечена хорошая работа трех бригад пильщиков: бригад Лаврова, Галкина и Медведева. Сообщалось, что Лавров и Котов напилили 26 штук кругляков, Галкин и Пастухов — 27 штук, Медведев и Евдокимов — 28 штук.

Как зовут Пастухова?

320. Четыре мальчика Андрей, Борис, Виктор и Гри-

горий учатся в 4«А», 4«Б», 5«А» и 5«Б» классах. Их фамилии Иванов, Петров, Сидоров и Егоров. Известно, что Андрей и Сидоров учатся не в параллельных классах, Борис и Иванов, а также Виктор и Петров учатся в 4«А» и 5«А» классах. Григорий же и Иванов ученики четвертых классов. Узнайте имя и фамилию каждого из них и определите, кто в каком классе учится.

321. Аркадий, Борис, Владимир и Григорий перетягивали канат. Хотя и с трудом, но Борис мог перетянуть Аркадия и Григория, вместе взятых. Если с одной стороны становились Борис и Аркадий, а с другой — Владимир и Григорий, то ни та, ни другая пара не могла перетянуть канат на свою сторону. Но если Григорий и Аркадий менялись местами, Владимир и Аркадий легко побеждали соперников.

Кто из них был самый сильный, кто занимал второе место, кто третье, кто самый слабый?

322. У Алексеева и Смирнова по два сына, каждому из которых меньше 9 лет. В обеих семьях одному мальчику больше 5 лет, а другому меньше 5 лет. Известно, что Аркадий на 3 года моложе своего брата. Борис — самый старший среди мальчиков. Клим вдвое моложе младшего сына Алексеева. Дима на 5 лет старше младшего сына Смирнова. Назовите имена и фамилии мальчиков и укажите, сколько лет каждому из них.

11. Кто прав?

Рассмотрим логические задачи, для решения которых особенно нужно умение правильно, обоснованно и последовательно рассуждать.

323. Вадим, Сергей и Михаил изучают в школе различные иностранные языки: английский, французский и немецкий. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает английский, Сергей не изучает английский, а Михаил не изучает немецкий язык». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой иностранный язык изучал каждый из мальчиков?

Р е ш е н и е. Имеются три утверждения: 1) Вадим изучает английский; 2) Сергей не изучает английский;

3) Михаил не изучает немецкий. Из них только одно верно, а два других — неверны.

Если верно утверждение (1), то тогда будет верно и утверждение (2), так как мальчики изучают различные языки. Получили, как говорят в математике, противоречие с условием задачи, где сказано, что верно только одно из трех утверждений. Значит, утверждение (1) обязательно ложно.

Пусть верно утверждение (2), тогда утверждения (1) и (3) будут ложны. Значит, будем иметь, что Вадим не изучает английский, а Михаил изучает немецкий язык. Следовательно, ни один из мальчиков не изучает английский язык, что противоречит условию задачи.

Будем считать верным утверждение (3), тогда утверждения (1) и (2) должны быть ложными. Значит, Вадим не изучает английский, а Сергей изучает английский. Так может быть в том случае, когда Михаил изучает французский, а Вадим — немецкий язык.

Никаких других вариантов быть не может, значит, возможен лишь такой ответ: Вадим изучает немецкий, Сергей — английский, а Михаил — французский язык.

324. Десятиклассники Коля, Вася и Сережа руководили математическим кружком учащихся четвертых классов. На одном из занятий они предложили ребятам логическую задачу, которую составил один из них. На вопрос, кто составил задачу, они дали такие ответы:

Сережа: 1) Я не составлял. 2) Вася не составлял.

Вася: 3) Сережа не составлял. 4) Задачу составил Коля.

Коля: 5) Я не составлял. 6) Задачу составил Сережа.

Известно, что один из них, назовем его правдивым, оба раза говорил правду; второй, назовем его шутником, оба раза сказал неправду; третий, назовем его хитрецом, один раз сказал правду, а другой раз — неправду.

Назовите имена правдивого, шутника и хитреца. Кто составил задачу?

Решения. 1. Узнаем вначале, например, кто из ребят правдивый.

Если правдивый Сережа, то из справедливости утверждений (1) и (2) следует, что задачу составил Коля. Но тогда оба утверждения Васи тоже справедливы, чего быть не может, ибо только у одного из них могут быть оба утверждения верными. Следовательно, Сережа не правдивый.

Если правдивый Вася, то тогда вновь получаем, что задачу составил Коля, значит, оба утверждения Сережи тоже верны, чего быть не может. Следовательно, Вася тоже не является правдивым.

Итак, имя правдивого не Сережа и не Вася, поэтому его имя — Коля.

Так как утверждения (5) и (6) справедливы, то задачу составил Сережа. А тогда получим, что из двух утверждений Сережи первое ложно, а второе верно; Вася оба раза солгал. Следовательно, шутником является Вася, а хитрец — Сережа.

2. Можно было вначале искать, кто из троих составил задачу. Если задачу составил Сережа, то тогда его утверждение (1) — ложно, а (2) — справедливо; у Васи — оба ложны; у Коли — оба справедливы. Такой случай возможен, если Коля — правдивый, Вася — шутник, а Сережа — хитрец.

Итак, задача решена. Но надо проверить, не подойдет ли еще какой-либо другой ответ. Поэтому следует рассмотреть случаи, не может ли быть составителем задачи Вася или Коля.

Если задачу составил Вася, то первое утверждение Сережи верно, а второе — ложно. Но и у Васи утверждение (3) — верно, а (4) — ложно, что противоречит условию задачи.

Если задачу составил Коля, тогда все четыре первых утверждения верны, чего быть не может.

Следовательно, задачу составил Сережа.

3. Можно решить задачу и по-другому: узнать, кем является, например, Сережа. Самостоятельно проверьте, кто Сережа: правдивый, хитрец или шутник.

4. Иногда целесообразно пересмотреть все приведенные утверждения и установить, какое из них верно, а какое — ложно. Для сокращения записей условимся верное утверждение обозначать знаком «+», а ложное — знаком «-». При таких обозначениях возможен лишь такой случай, когда у одного будет два плюса, у другого — два минуса, а у третьего — один плюс и один минус.

Пусть утверждение (1) верное. Тогда (2) может быть как верным, так и ложным. Если утверждение (2) тоже верное, то получим:

Сережа	+	+
Вася	+	+
Коля	-	-

но такого сочетания знаков быть не может.

Если утверждение (2) ложно, то получим

Сережа	+	—
Вася	+	—
Коля	+	—,

чего также быть не может.

Следовательно, заявление (1) не может быть верным, оно ложно. Но тогда сразу получаем, что задачу составил Сережа. Чтобы ответить на остальные вопросы, рассмотрим распределение знаков:

Сережа	—	+
Вася	—	—
Коля	+	+

Отсюда ясно, что имя правдивого — Коля, имя хитреца — Сережа, а шутника — Вася.

5. Четвертый способ решения сложный, требует много времени, то есть, как говорят в математике, нерациональный. Лучше, хотя и труднее, внимательно изучить все приведенные утверждения и установить некоторые зависимости между ними, которые позволят быстрее решить задачу.

Например, легко заметить, что утверждения (1) и (3) утверждают одно и то же. Если они верны, то из справедливости утверждения (2) следует справедливость утверждения (4), и, наоборот, если верно (4), то верно и (2). Значит, ни Сережа, ни Вася не может быть правдивым. Дальнейшее решение уже простое.

Рекомендуем самостоятельно провести одно-два рассуждения, начиная, например, не с Сережи, а с Коли.

325. Из трех учеников (*A*, *B* и *B*) два отличника. Определите, кто отличник, если известно, что:

а) из *A* и *B* один — отличник, один — нет;

б) из *B* и *B* один — отличник, один — нет.

326. Учитель проверил работы трех учеников: Алексеева, Васильева и Сергеева, но не захватил их с собой. Ученикам он сказал: «Все вы получили разные оценки: «3», «4», «5». У Сергеева не «5», у Васильева не «4», а вот у Алексеева, по-моему, «4». Оказалось, что учитель ошибся: верную оценку сказал только одному ученику. Какие оценки у каждого ученика?

327. Четырем участникам математического кружка: Алексееву, Борисову, Васильеву и Григорьеву, которые учились в параллельных классах, было предложено составить такую логическую задачу.

На вопрос: «Из какого кто класса?» — каждый должен дать два ответа: один — правильный, а другой — неправильный, но чтобы по их ответам можно было определить, кто в каком классе занимается. Мальчики дали такие ответы:

Алексеев: Я из класса «А», а Васильев — из «В».

Борисов: Я из класса «Б», а Васильев — из «Г».

Васильев: Я из класса «В», а Алексеев — из «Б».

Григорьев: Я из класса «А», а Алексеев — из «В».

Определите, в каком из параллельных классов занимается каждый из них.

328. Аналогичную задачу составили 5 школьников (из пяти различных городов), которые приехали в Минск для участия в республиканской математической олимпиаде. На вопрос: «Откуда вы?» — каждый дал такой ответ:

Андреев: Я приехал из Гомеля, а Давыдов — из Бреста.

Борисов: Я приехал из Бреста, а Андреев — из Могилева.

Виноградов: Из Бреста приехал я, а Давыдов — из Гродно.

Гордиенко: Я прибыл из Могилева, а Андреев — из Витебска.

Давыдов: Я действительно из Гродно, а Виноградов живет в Могилеве.

Откуда приехали эти школьники, если у каждого из них одно утверждение истинное, а другое — ложное?

329. В финал розыгрыша первенства города на приз газеты «Зорька» вышли 5 команд: «Восток», «Космос», «Чайка», «Салют» и «Победа». Перед началом финальных игр редакция газеты «Зорька» попросила читателей принять участие в своеобразном конкурсе прогнозов: назвать две какие-нибудь команды и указать, какие места они займут.

Вот предположения, собравшие наибольшее число голосов:

1) «Салют» займет первое место, а «Космос» — второе.

2) «Космос» окажется на третьем месте, а «Салют» — на пятом.

3) Первое место будет за командой «Чайка», а «Победа» окажется лишь на четвертом.

4) «Восток» будет вторым, а «Победа» — четвертой.

5) «Восток» займет второе место, «Чайка» — третье.

После окончания финальных игр оказалось, что в каждом из этих вариантов одно предположение подтвердилось, а другое — нет.

Как же в действительности распределились места между командами?

330. Определите, кто из трех мальчиков *А*, *Б*, *В* играет в шахматы, если известно, что:

а) из *А* и *Б* один играет, один не играет;

б) если играет *А*, то играет и *Б*;

в) *А* и *В* оба играют или оба не играют.

331. Четверо друзей-шахматистов перед началом шахматного турнира обсуждали свои возможности на призовые места. Друзья были уверены, что они займут четыре первых места, но не знали, в какой последовательности. Вот что они говорили:

Олег: Если я не займу первое место, то Леонид займет четвертое.

Леонид: Если Сергей не займет первое место, тогда Олег выйдет на третье место.

Сергей: У Олега положение в турнирной таблице будет лучше, чем у Павла.

Павел: Могу сказать только, что все мы займем разные места.

Предположения друзей целиком оправдались. Кто какие места занял в шахматном турнире?

332. В одном городке жили два близнеца: Первый и Второй, как две капли воды похожие друг на друга. Первый говорил неправду по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни был правдив. А Второй обманывал по вторникам, четвергам и субботам, а в другие дни говорил правду.

Как-то повстречал я этих близнецов и спросил у одного из них:

— Скажи, пожалуйста, как тебя зовут?

Тот без малейшего колебания ответил:

— Первый.

— А скажи-ка мне, какой сегодня день недели? — продолжал я расспросы.

— Вчера было воскресенье, — сказал мой собеседник.

— А завтра будет пятница, — добавил его брат.

— Подожди, как же так? — изумился я, обращаясь к брату моего собеседника. — Разве ты говоришь правду?

— Я всегда говорю правду по средам,— услышал я в ответ.

Решив, что говорить со мной больше не о чем, близнецы пошли дальше, оставив меня в полном недоумении. Но, подумав, я все-таки сообразил, кто из двух братьев был Первый, а кто — Второй. Между прочим, по разговору можно установить и день недели, в который я встретился с ними.

Попробуйте сообразить и вы.

333. Рассказывают, что много лет тому назад жил народ, который звали рокоманцы. Однажды рокоманский корабль потерпел крушение у одного из островов Тихого океана. Корабль был разбит. Часть команды спаслась и поселилась на острове. Вскоре они переняли все обычаи местных жителей и стали во всем похожи на туземцев. Даже язык свой они забыли. В одном только они по-прежнему отличались от жителей острова: туземец что ни скажет, то правда, а рокоманец что ни скажет, то наоборот.

Через некоторое время французская экспедиция обнаружила обломки рокоманского корабля у берегов острова. Капитан французского корабля высадился на остров. Он увидел трех стариков. «Ты кто,— спросил он первого на языке жителей острова,— туземец или рокоманец?» Старик ответил на вопрос капитана, но тот не расслышал ответа. «Первый старик сказал, кажется, что он рокоманец»,— обратился капитан к двум другим старикам. «Да,— ответил второй,— он сказал, что он рокоманец». «Нет,— возразил третий,— он сказал, что он не рокоманец, что он туземец».

Что сказал первый старик? Кем был второй и кем был третий старик?

12. Задачи, решаемые методом исключения с применением таблиц

При решении некоторых задач целесообразно составить таблицу, которая поможет провести нужные рассуждения.

Рассмотрим следующую задачу.

334. В финале турнира шахматистов Советской Армии встретились представители шести воинских званий: майор, капитан, лейтенант, старшина, сержант

и ефрейтор, разных специальностей: летчик, танкист, артиллерист, минометчик, сапер и связист. Определите специальность каждого из шахматистов по следующим данным.

В первом туре лейтенант выиграл у летчика, майор у танкиста, а сержант у минометчика. Во втором туре капитан выиграл у танкиста. В третьем и четвертом турах минометчик из-за болезни не участвовал в турнире, поэтому свободными от игры оказались капитан и ефрейтор. В четвертом туре майор выиграл у связиста.

Победителями турнира оказались лейтенант и майор. Хуже всех выступил сапер.

Решение. Исключим те случаи, которые противоречат какому-либо из условий задачи. Для удобства решения составим прямоугольную таблицу, в которой по вертикали запишем воинские звания шахматистов, а по горизонтали — их специальности.

	Летчик	Танкист	Артиллерист	Минометчик	Сапер	Связист
Майор	—	—		—		
Капитан						
Лейтенант	—	—		—		
Старшина						
Сержант	—	—		—		
Ефрейтор						

Рассмотрим, кто с кем играл первую партию. В условии сказано, что лейтенант выиграл у летчика, ясно, что лейтенант — не летчик. Но одновременно с лейтенантом и летчиком на другой доске играл майор с танкистом, значит, лейтенант и не танкист, а майор — не танкист и не летчик. Учитывая, что на третьей доске играл сержант с минометчиком, мы получаем, таким образом, следующий вывод: лейтенант — не

летчик, не танкист и не минометчик. Ставим в соответствующих клеточках таблицы знак минус, то есть в строке «лейтенант» ставим минусы в 1, 2 и 4-й клеточках (считая слева направо).

В тех же трех столбцах ставим минусы и в строке «майор», ибо и майор — не летчик, не танкист и не минометчик. По той же причине вписываем минусы в 1, 2 и 4-ю клеточки строки «сержант».

Перерисуйте эту таблицу и в дальнейшем сами постепенно заполняйте ее.

Так как во втором туре капитан выиграл у танкиста, значит, капитан — не танкист, вносим в таблицу еще один минус в соответствующую клеточку (2-я строка, 2-й столбец).

В третьем туре минометчик должен был играть с капитаном, а в четвертом — с ефрейтором. Следовательно, минометчик — не капитан и не ефрейтор. Вписываем в 4-й столбец два минуса в соответствующие клеточки (2-я и 6-я, считая сверху вниз).

В четвертом туре майор выиграл у связиста, значит, майор — не связист. По результатам турнира можно судить, что сапер — не майор и не лейтенант. Вписав в таблицу и эти последние три минуса, получим следующую таблицу:

	Летчик	Танкист	Артиллерист	Минометчик	Сапер	Связист
Майор	—	—		—	—	—
Капитан		—		—		
Лейтенант	—	—		—	—	
Старшина						
Сержант	—	—		—		
Ефрейтор				—		

По смыслу задачи в каждой строке и в каждом столбце должен быть плюс и только один, ибо каждую специальность имеет только один из шахматистов

и каждое воинское звание имеет только один из шахматистов, так как всего шесть различных воинских званий и шесть разных специальностей.

Рассмотрим 4-й столбец: в пяти клеточках стоят минусы, значит, минометчиком является старшина, что обозначим знаком плюс. Но тогда в остальных пяти клеточках 4-й строки можно поставить минусы.

Рассмотрим теперь 2-й столбец. Легко сообразить, что танкистом является ефрейтор. Поставим плюс во 2-й клеточке последней строки, в остальных клеточках этой строки поставим минусы. Затем устанавливаем, что летчик — капитан; сапер — сержант; связист — лейтенант; майор — артиллерист.

	Летчик	Танкист	Артиллерист	Минометчик	Сапер	Связист
Майор	—	—	+	—	—	—
Капитан	+	—	—	—	—	—
Лейтенант	—	—	—	—	—	+
Старшина	—	—	—	+	—	—
Сержант	—	—	—	—	+	—
Ефрейтор	—	+	—	—	—	—

Можно было рассматривать не столбцы, а строки. Иногда рассматривают попеременно и строки, и столбцы.

Зада н и е. Попробуйте теперь восстановить таблицу игр: кто с кем должен был играть в каждом из пяти туров. Учтите, что в турнире один и тот же шахматист играл с каждым из пяти других только по одной партии в каждом туре.

335. В одном классе уроки по математике, истории и русскому языку вели три учителя: Архипов, Морозов и Светлов. Определите, кто из них какой предмет ведет, если известно, что:

а) все трое — Морозов, учитель математики и Светлов — идут из школы домой вместе;

б) учитель истории старше учителя математики, а Морозов — самый младший среди них.

336. В одном доме живут три товарища — школьники Боря, Вася и Дима. Один из них играет в футбольной команде, другой пишет стихи, а третий лучше своих друзей играет в шахматы.

Известно, что:

а) друг Васи с огорчением сказал: «Вчера я не сумел реализовать пенальти»;

б) товарищ поэта сказал: «Эх, Дима! Написал бы ты стихи для нашей футбольной команды».

Назовите имена футболиста, поэта и шахматиста.

337. Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на одной улице. Один из них работает плотником, другой — маляром, третий — водопроводчиком.

Однажды маляр пришел к плотнику, чтобы попросить его починить дверь в своей квартире, но ему сказали, что плотник помогает Федорову ремонтировать пол.

Определите профессию каждого, если известно, что водопроводчик никогда не видел Давыдова.

338. Воронов, Павлов, Левицкий и Сахаров — четыре талантливых молодых человека. Один из них — танцор, другой — художник, третий — певец, а четвертый — писатель. Вот что известно о них.

Воронов и художник сидели в театре в тот вечер, когда певец выступал там с концертом.

Павлов и писатель вместе позировали художнику.

Писатель написал биографическую повесть о своем друге Сахарове и собирается написать о втором друге, Воронове.

Назовите фамилии танцора, художника, певца и писателя.

339. В одном колхозе живут три школьника: Саша, Коля и Петя. Они осваивают сельскохозяйственные профессии. Один из них готовится стать трактористом, другой — садовником, третий — комбайнером. В разное время нами были записаны следующие сказанные ими фразы:

1) Петя, ты меня не жди, я должен осмотреть свой комбайн, ведь скоро начнется уборка.

2) Видел я вчера, Коля, как ты осматривал машину и подумал, что держать машину в отличном состоянии не легче, чем мне вывести новый сорт яблок.

3) Завтра, Коля, не приходи, я буду регулировать работу молотилки у комбайна.

Какой сельскохозяйственной профессией овладевает каждый из ребят?

340. Поезд идет из Москвы в Минск. В поезде едут пассажиры Иванов, Петров и Сидоров. В поездной бригаде такие же фамилии у машиниста, помощника и проводника. Известно, что:

1) Пассажир Иванов живет в Москве, а пассажир Петров живет в Минске. Однофамилец машиниста живет между Москвой и Минском.

2) Однофамилец проводника получает ровно втрое больше помощника. Пассажир Петров получает в месяц 400 рублей.

Определите фамилии всех членов поездной бригады.

341. Четыре мальчика из одного дома: Алеша, Боря, Вася и Гена — учились в разных классах: в первом, во втором, в третьем и в четвертом. Определите, кто в каком классе учился, если известно, что:

1) Боря еще в прошлом году отдал свои учебники сестре;

2) Алеша учился классом старше Гены;

3) Боря еще октябренок;

4) Вася в прошлом году был принят в пионеры.

342. Однажды, сидя в чайхане, Ходжа Насреддин заинтересовался беседой четырех мужчин, сидевших рядом с ним. Это была очень интересная компания, так как мужчины говорили между собой на нескольких языках и часто один переводил другому сказанное третьим. Вскоре Ходже стало ясно, как зовут каждого из четырех. В своей беседе мужчины использовали четыре языка: армянский, персидский, греческий и турецкий, однако не было языка, который был бы известен всем. При этом каждый из них владел двумя языками.

Самый младший из четырех, Салал, не знал персидского, но был переводчиком, когда Мохаммед хотел объясниться со стариком Абдулой, прекрасно владевшим персидским. При этом Мохаммед не только говорил на своем родном турецком языке, но и свободно разговаривал с Юсуфом, не знавшим по-турецки ни слова. Ни Салал, ни Абдула, ни Юсуф не знали языка, на котором могли бы объясняться все трое между собой.

Ходжа Насреддин заметил, что среди собеседников

не было ни одного, кто владел бы одновременно и армянским, и турецким.

Какими же языками владел каждый из четверых мужчин?

343. В небольшом городке живут пятеро друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин и Алексеев. Профессии у них разные: один из них — маляр, другой — мельник, третий — плотник, четвертый — почтальон, пятый — парикмахер.

Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин все собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Петренко и Иванов живут в одном доме с почтальоном. Иванов и Сидорчук каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Петренко брал билеты в театр для себя и для мельника.

Определите профессию каждого из друзей.

344. В одном из вагонов поезда едут 6 пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Санкт-Петербурге, Минске, Киеве, Харькове и Одессе. Их фамилии: Андреев, Борисов, Васильев, Григорьев, Дмитриев и Елисеев.

При посадке Васильев помогал одесситу грузить багаж. В дороге выяснилось, что Андреев и москвич — врачи; Дмитриев и петербуржец — учителя; Васильев и минчанин — инженеры. Борисов и Елисеев — участники Великой Отечественной войны, а минчанин в армии не служил. Андреев и харьковчанин сошли в Киеве, а Васильев поехал дальше. Елисеев вел спор с петербуржцем о пользе нового лекарства.

Определите местожительство каждого из пассажиров, а затем укажите их профессии.

345. Четыре летчика-испытателя: Андрей, Борис, Николай и Сергей — получили задание испытать 4 разных самолета. Каждый самолет должен быть испытан каждым летчиком. Испытания проводились одновременно и были выполнены летчиками за четыре дня. В первый день Андрей испытывал самолет Ми, во второй — самолет Ла, а в четвертый — самолет Ту. В те дни, когда Андрей поднимался на самолетах Ми и Ан, у Бориса на испытаниях были Ан и Ту. У Николая первым на испытании был самолет Ту, а последним Ми.

В какой последовательности испытывал самолеты Сергей?

Указание. Для решения рекомендуем составить таблицу (рис. 38), в пустые клеточки которой следует вписать имена летчиков, испытывавших в определенный день соответствующий самолет.

	Д н и			
	1-й	2-й	3-й	4-й
<i>Ми</i>	<i>А</i>			
<i>Ла</i>		<i>А</i>		
<i>Ту</i>				<i>А</i>
<i>Ан</i>				

Рис. 38

346. Пять летчиков-испытателей: Андрей, Борис, Василий, Григорий и Дмитрий — получили задание испытать 5 самолетов, которые обозначим С-1, С-2, С-3, С-4, С-5. Каждый самолет должен быть испытан каждым летчиком. Ежедневно испытывались 5 различных самолетов и все летчики участвовали в испытаниях. В результате все испытания были проведены за 5 дней. Каждый летчик в день испытывал только один самолет. Самолет С-3 во второй день испытывал Василий, в третий — Борис, а в пятый — Андрей. Самолет С-2 в третий день испытывал Андрей, а в четвертый — Василий. В те дни, когда самолет С-3 испытывали Андрей и Дмитрий, самолет С-1 испытывали Василий и Андрей. Григорий первым испытывал самолет С-3, а последним — С-5. Самолет С-4 первым испытывал Андрей, а последним — Борис. В какой последовательности испытывал самолеты Дмитрий? Восстановите всю таблицу испытаний: укажите для каждого дня, кто какой самолет испытывал.

347. В купе поезда ехали 3 старшеклассника: Вася, Коля и Петя. Один из них радиолюбитель, другой занимается в авиамodelьном кружке, а третий летом отправляется в поход с геологической партией.

В пути выяснилось, что один из них свое свободное время проводит на рыбалке, а другой хорошо разбирается в живописи и сам отлично рисует. Третий же пассажир оказался знатоком музыки.

Ниже мы приводим несколько фраз из разговора наших пассажиров. Попробуйте по этим фразам определить, чем увлекается каждый из троих товарищей и кто из них рыболов, художник и музыкант.

1) — Помните картину «Утро в лесу», — воскликнул радиолюбитель и начал со знанием дела рассказывать об этой картине.

2) — Подумаешь, динамик сам сделал! Коле труднее нужные произведения подготовить к концерту.

3) — Неужели ты, Коля, не возьмешь с собой удочки? — А зачем? Этим я не увлекаюсь. В походе и без них дела хватит.

4) — Так подари ему сделанный тобой транзисторный радиоприемник,—сказал Вася одному из товарищей.

348. В 8, 9 и 10-м классах учатся 3 товарища: Миша, Вася и Коля. Один из них радиолюбитель, другой авиамоделист, третий занимается в математическом кружке. Определите, в каком из классов и в каком кружке занимается каждый из них, если известно:

1) 8-й класс посетил судовой верфь, 9-й класс — кондитерскую фабрику, 10-й класс совершил экскурсию на автозавод.

2) Во время посещения судовой верфи Вася опасался, как бы не разбить лежавшую в кармане радиолампу.

3) Миша ушел на стадион один, так как его товарищ был занят налаживанием элерона у своей модели самолета.

4) Товарищ авиамоделиста очень заинтересовался конвейером на автозаводе.

349. Одиннадцать мальчиков: Александр, Борис, Василий, Георгий, Дмитрий, Евгений, Захар, Иван, Кирилл, Леонид и Михаил — учатся все в разных классах одной средней школы.

1) Старший брат Дмитрия оканчивает 7-й класс, а младший брат Евгения учится в 5-м классе. Александр старше Кирилла на один класс, Леонид старше Евгения на два класса, а самый старший из мальчиков Михаил. Борис помогает в учебе Евгению, Дмитрий — Ивану, Георгий — Александру.

2) Иван при окончании 4-го класса получил похвальную грамоту. Борис — пионервожатый в 5-м классе, а Василий — в 4-м классе.

3) Александр, Кирилл и шестиклассник занимаются в гимнастической секции, а одновременно с ними тренируются баскетболисты, среди которых всегда Борис, Евгений и восьмиклассник.

4) Александр и семиклассник живут на улице Лесной, Георгий и пятиклассник — на улице Красивой, Дмитрий, первоклассник и восьмиклассник — на Садовой, а Кирилл и десятиклассник — на Солнечной.

Кто из них в каком классе учится?

ГЛАВА IV. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

13. Различные системы счисления

Для записи чисел мы пользуемся десятичной позиционной системой счисления.

Позиционной она называется потому, что один и тот же знак получает различное значение в зависимости от места, или позиции, которое он занимает в записи данного числа. Например, в записи 555 цифра 5, стоящая на первом месте справа, обозначает 5 единиц, на втором — 5 десятков, на третьем — 5 сотен.

Десятичной (или десятиричной) она называется потому, что при этой системе счета 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Число десять называется основанием десятичной системы счисления.

Мы настолько привыкли к десятичной системе счисления, что не представляем себе существования других систем. Из истории математики известно о существовании систем счисления, в которых основанием счета были числа: 2; 3; 5; 7; 8; 11; 12; 20; 60 и др. Такие системы счисления называются соответственно двоичной, троичной, пятеричной, семеричной, восьмеричной, одиннадцатеричной, двенадцатеричной, двадцатеричной и шестидесятеричной.

С примерами некоторых из этих систем счисления вы встречаетесь в повседневной жизни. Год мы делим на 12 месяцев, а сутки на 24 часа, причем часы считаем только до 12, а затем начинаем счет сначала. Еще не так давно такие предметы, как пуговицы, перья, карандаши, принято было считать дюжинами (12 единиц). 12 дюжин называли «гросс», 12 гроссов — «масса».

В настоящее время широкое распространение получили электронные вычислительные машины. Большинство таких машин считает в двоичной системе. В последние годы появились машины, использующие восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Успешно работают и электронные цифровые машины, которые производят вычисления в троичной и девятиричной системах счисления с так называемой симметричной базой.

Изучая другие системы, вы лучше поймете сущность и десятичной системы.

Рассмотрим вначале запись чисел в различных системах счисления. При помощи десяти цифр десятичной системы можно записать любое число по новой системе, если только основание новой системы меньше десяти. Для записи чисел, например, в двенадцатеричной системе нам понадобилось бы ввести еще две новые цифры для обозначения 10 и 11. В дальнейшем будем рассматривать лишь системы счисления, основания которых не больше десяти.

350. Как записать в пятеричной системе числа: 4; 5; 6; 8; 16; 37; 79; 140?

Решение. При пятеричной системе мы считаем пятерками. Пять единиц одного разряда составляют единицу следующего высшего разряда. Следовательно, одна единица 2-го разряда равна 5 единицам 1-го разряда; единица 3-го разряда — 5 пятеркам, то есть $5 \cdot 5$ единицам 1-го разряда; единица 4-го разряда — 5 раз по 5 пятерок, то есть $5 \cdot 5 \cdot 5$ единицам 1-го разряда и так далее.

Принято числа вида $5 \cdot 5$ записывать как 5^2 (читается: пять во второй степени, или пять в квадрате), $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ (пять в третьей степени, или пять в кубе), $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ (пять в четвертой степени) и т. д.

Таким образом, в пятеричной системе число 4 запишется в виде 4; число 5 содержит одну пятерку, значит, оно запишется в виде 10; число $6 = 1 \cdot 5 + 1$ запишется 11.

Для удобства записей условимся знак основания системы, отличной от десятичной, записывать внизу после записи числа. Для десятичной системы оставим прежнюю запись без каких-либо знаков. Теперь предыдущие решения запишутся так:

$$4 = 4_5; 5 = 10_5; 6 = 11_5.$$

Число 8 содержит 1 пятерку и 3 единицы, значит,

$$8 = 1 \cdot 5 + 3 = 13_5.$$

Число 16 содержит 3 пятерки и 1 единицу, значит,

$$16 = 3 \cdot 5 + 1 = 31_5.$$

Число 37 содержит 7 пятерок и 2 единицы, следовательно, оно содержит 1 единицу 3-го разряда ($5^2 = 5 \cdot 5 = 25$), 2 единицы 2-го разряда и 2 единицы 1-го разряда, поэтому:

$$37 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = 122_5.$$

Число 79 содержит 3 раза по $5^2 = 25$ и 4 единицы 1-го разряда, значит, $79 = 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 4 = 304_5$.

Число 140 уже содержит и 1 единицу 4-го разряда ($5^3 = 125$), значит, $140 = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 0 = 1030_5$.

Как видим, вместо того чтобы записывать сумму последовательных степеней основания системы, умноженных на некоторые числа, являющиеся цифрами, мы записываем только те цифры, на которые умножаются эти степени. Поэтому, например, вместо выражения $178 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 3$ записываем 1203_5 .

Заметим, что и в десятичной системе запись, например, числа 2387 есть сокращенная запись выражения:

$$2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7.$$

351. Записать в пятеричной системе следующие числа: 9; 13; 21; 36; 50; 57.

352. Записать в восьмеричной системе следующие числа: 7; 9; 24; 35; 57; 64.

353. Записать в троичной системе следующие числа: 3; 6; 12; 25; 27; 29.

354. Записать в двоичной системе следующие числа: 1; 2; 5; 7; 8; 16.

355. В какой системе счисления имеют место следующие равенства: $4 = 10_x$; $8 = 11_x$; $9 = 100_x$?

Буквой x обозначены неизвестные основания систем счисления.

356. Возможна ли такая запись: $4 = 12_x$?

357. На обложке книги Я. И. Перельмана «Зани-

мательная арифметика» нарисована запись: $2 \cdot 2 = 11$.

Возможна ли такая запись, и если возможна, то в какой системе счисления?

Рекомендуем, кроме книги Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика», прочесть статью «Как люди считали в старину и как писали цифры», помещенную в «Детской энциклопедии».

14. Переход от одной системы счисления к другой

Мы уже рассмотрели, как небольшие числа записывать в новых системах счисления. Например, чтобы записать число 37 в пятеричной системе, мы устно находили, сколько оно содержит по $25 = 5^2$, да сколько еще пятерок и сколько единиц. Но для больших чисел такой способ перехода от одной системы к другой оказывается нерациональным. Ознакомимся еще с одним способом перехода от десятичной системы счисления к новой системе счисления.

Пусть нужно число 867 выразить в пятеричной системе, используя известные нам пять знаков: 0; 1; 2; 3 и 4. Для этого вначале узнаем, сколько в этом числе пятерок, для чего разделим 867 на 5. Получим, что в числе 867 содержится 173 единицы 2-го разряда, причем остается 2 единицы 1-го разряда.

Теперь узнаем, сколько в 173 пятерках содержится единиц 3-го разряда, что также находим делением числа 173 на 5, ибо единица третьего разряда содержит 5 единиц 2-го разряда. Получим, что в 173 единицах 2-го разряда содержится 34 единицы 3-го разряда и 3 единицы 2-го разряда.

Аналогично находим, что 34 единицы 3-го разряда содержат 6 единиц 4-го разряда и 4 единицы 3-го разряда.

Теперь 6 единиц 4-го разряда превращаем в единицы 5-го разряда, в результате получим 1 единицу 5-го разряда и 1 единицу 4-го разряда.

Следовательно, число 867 в пятеричной системе счисления изобразится так: 11432_5 .

Напоминаем, что в равенстве $867 = 11432_5$ правая часть представляет собой сокращенную запись выражения $1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$ подобно тому, как

и в десятичной системе 867 — это сокращенная запись выражения: $8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$.

Вычисления удобно располагать в таком порядке:

$$\begin{array}{r}
 867 \quad | \quad 5 \\
 \hline
 5 \quad | \quad 173 \quad | \quad 5 \\
 \hline
 36 \quad | \quad 15 \quad | \quad 34 \quad | \quad 5 \\
 \hline
 35 \quad | \quad 23 \quad | \quad 30 \quad | \quad 6 \quad | \quad 5 \\
 \hline
 17 \quad | \quad 20 \quad | \quad 4 \quad | \quad 5 \quad | \quad 1 \\
 \hline
 15 \quad | \quad 3 \quad | \quad 1 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

Последовательные остатки и последнее частное являются цифрами искомой записи.

Таким образом, чтобы число десятичной системы счисления записать в новой системе счисления, надо данное число разделить на основание новой системы, новое частное опять разделить на основание новой системы и так далее, пока не получим частного, которое меньше основания новой системы.

Тогда последовательные остатки и последнее частное будут разрядными числами искомой записи.

Учтите, что первый остаток есть число единиц 1-го разряда, второй остаток — число единиц 2-го разряда и т. д.

358. Записать число 985 в восьмеричной системе, причем сначала, как и в предыдущем примере, определить число единиц каждого разряда, а затем выполнить вычисления по рекомендуемой схеме.

359. Записать в пятеричной системе следующие числа: 86 ; 125 ; 625 ; 1257 .

360. Записать в восьмеричной системе следующие числа: 57 ; 64 ; 128 ; 2546 .

361. Записать в девятеричной системе следующие числа: 47 ; 81 ; 458 ; 1546 .

362. Записать в семеричной системе следующие числа: 14 ; 85 ; 343 ; 1449 .

363. Записать в троичной системе следующие числа: 27 ; 29 ; 58 ; 729 .

364. Записать в двоичной системе следующие числа: 29 ; 50 ; 70 ; 140 .

Так как деление на 2 , на 3 и на 5 легко выполнить в уме, то вычисления можно располагать в форме

таблицы, заполняя ее справа налево. Поясним на примере изображения числа 68 в двоичной системе (см. табл.):

1	2	4	8	17	34	68	Частные в десятичной системе
1	0	0	0	1	0	0	Остатки от деления, они же цифры числа в двоичной системе

Итак, $68 = 1000100_2$.

365. Решите задачи № 359, 363 и 364, пользуясь такой таблицей. Сравните ответы и сами вычисления. Какой способ вам больше понравился?

Рассмотрим теперь переход от недесятичных систем счисления к десятичной системе.

Пусть имеем число 2431_5 . Его можно представить так:

$$2431_5 = 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 = 1 + 15 + 100 + 250 = 366.$$

Аналогично:

$$111101_2 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 61.$$

Разумеется, вычисления производятся устно.

Но можно поступать иначе. Возьмем то же число 2431_5 . Раздробим 2 единицы 4-го разряда в единицы 3-го разряда, для чего 2 умножим на 5, ибо единица 4-го разряда в пятеричной системе содержит 5 единиц 3-го разряда, получим: $5 \cdot 2 = 10$.

К 10 единицам 3-го разряда прибавим имеющиеся 4 единицы 3-го разряда, получим 14 единиц 3-го разряда. Раздробим эти 14 единиц 3-го разряда в единицы 2-го разряда, для чего вновь основание системы 5 умножим на 14, получим: $5 \cdot 14 = 70$ единиц 2-го разряда. Как и в предыдущем случае, прибавим еще 3 имеющиеся единицы 2-го разряда, будет 73 единицы 2-го разряда.

Наконец получим, что данное число содержит $5 \cdot 73 + 1 = 366$ единиц 1-го разряда.

Письменные вычисления удобно располагать так:

$$\begin{array}{r}
 \times 2 \\
 \hline
 10 \\
 + 4 \\
 \hline
 14 \\
 \times 5 \\
 \hline
 70 \\
 + 3 \\
 \hline
 73 \\
 \times 5 \\
 \hline
 365 \\
 + 1 \\
 \hline
 366
 \end{array}$$

Аналогичным образом запишем преобразования и для числа 111101_2 , причем прибавление нулей не записываем:

$$\begin{array}{r}
 \times 1 \\
 \hline
 2 \\
 + 2 \\
 \hline
 1 \\
 \times 3 \\
 \hline
 2 \\
 \times 2 \\
 \hline
 6 \\
 + 1 \\
 \hline
 7 \\
 \times 2 \\
 \hline
 14 \\
 + 1 \\
 \hline
 15 \\
 \times 2 \\
 \hline
 30 \\
 \times 2 \\
 \hline
 60 \\
 + 1 \\
 \hline
 61
 \end{array}$$

Таким образом, чтобы заменить число любой системы счисления числом десятичной системы, надо число единиц высшего разряда умножить на основание данной системы, к полученному произведению прибавить следующее разрядное число; получившуюся сумму снова умножить на основание системы и так далее. Полученное число и будет изображать искомое число в десятичной системе.

366. Записать в десятичной системе следующие числа: 143_5 ; 5046_8 ; 1221_3 ; 10111_2 ; 110100_2 ; 1000001_2 .

Вычисления можно выполнять любым способом.

Чтобы число какой-либо системы счисления заменить числом любой другой системы, можно данное число сначала записать в десятичной системе, а затем полученное число записать в новой системе.

Например, требуется число 2431_7 записать в восьмеричной системе. Как и при решении предыдущих примеров, вначале преобразуем данное число в число десятичной системы:

$$\begin{aligned}
 2431_7 &= 1 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 = 1 + 21 + 4 \cdot 49 + \\
 &\quad + 2 \cdot 343 = 904.
 \end{aligned}$$

Теперь найдем изображение этого числа в восьмеричной системе:

$$\begin{array}{r}
 904 \quad | \quad 8 \\
 \hline
 8 \quad \quad | \quad 113 \quad | \quad 8 \\
 \hline
 10 \quad \quad | \quad 8 \quad \quad | \quad 14 \quad | \quad 8 \\
 \hline
 8 \quad \quad | \quad 33 \quad \quad | \quad 8 \quad \quad | \quad 1 \\
 \hline
 24 \quad \quad | \quad 32 \quad \quad | \quad 6 \\
 \hline
 24 \quad \quad | \quad 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Значит, $904 = 1610_8$.

Таким образом, получили: $2431_7 = 1610_8$.

367. Записать в восьмеричной системе следующие числа: 2401_5 ; 2101_3 ; 100100_2 ; 11110001_2 .

Теоретические вопросы, относящиеся к различным системам счисления, включая и десятичную, становятся более доступными, если применять простейшие понятия алгебры.

Всякая позиционная система счисления характеризуется основанием системы счисления, то есть определенным числом единиц, составляющих единицу следующего высшего разряда. Если основание системы обозначено буквой d , то единица 2-го разряда есть число d . Единица 3-го разряда состоит из d единиц 2-го разряда, значит, она равна

$$\underbrace{d + d + \dots + d}_{d \text{ слагаемых}} = d \cdot d = d^2.$$

Единица 4-го разряда состоит из d единиц 3-го разряда, значит, она равна

$$\underbrace{d^2 + d^2 + \dots + d^2}_{d \text{ слагаемых}} = d^2 \cdot d = d^3 \text{ и т. д.}$$

Получили следующие записи:

$$\begin{aligned}
 10_d &= d; \\
 100_d &= d^2; \\
 1000_d &= d^3; \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Мы видим, что единицы высших разрядов являются степенями d . Чтобы некоторое число N записать в системе счисления по основанию d , нужно вначале определить, какая самая большая степень d содер-

жится в этом числе и сколько раз. Затем находим, сколько раз в оставшейся части числа N содержится d в степени, на единицу меньшей, чем в первом случае, и т. д.

В результате получим, что натуральное число N будет записано в виде многочлена, расположенного по степеням буквы d . Коэффициенты этого многочлена есть целые неотрицательные числа (могут равняться и нулю), меньшие d .

Если, например, при счете получилось a_n единиц $(n+1)$ -го разряда, a_{n-1} единиц n -го разряда, ..., a_1 единиц 2-го разряда и a_0 единиц 1-го разряда, то такое $(n+1)$ -значное число в системе счисления с основанием d запишется так:

$$N = a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_1 d + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ имеют значения $0, 1, \dots, d-1$.

Обычно пользуются сокращенной записью чисел цифрами, опуская плюсы и букву d в различных степенях. Цифры, изображающие результаты счета единицами соответствующего разряда, записывают одну за другой (справа налево). Число N , равное

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_1 d + a_0,$$

сокращенно запишется так:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_d.$$

Черта сверху ставится для того, чтобы не смешивать сокращенную запись числа N с произведением $a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot a_0$.

Сравнение чисел и правила действий над многозначными числами легко получаются из правил действий над многочленами. Следует лишь учитывать, что цифры в сокращенной записи чисел не могут быть большими, чем $d-1$.

15. Сложение и вычитание

Как же считали люди, которые пользовались когда-то другими системами счисления? Во всяком случае, они умели устно быстро складывать и умножать одноразрядные числа, то есть они знали наизусть таблицы сложения и умножения для своей системы счисления. Мы и теперь учим наизусть таблицу умно-

жения для десятичной системы счисления, а таблицу сложения запоминаем еще в первом классе, хотя ее никто и не записывает.

Чтобы производить вычисления в непривычной системе счисления, нам придется составлять и таблицы сложения, чтобы пользоваться ими. Запоминать их не стоит!

Запись чисел в любой системе счисления производится по тем же правилам, что и в случае десятичной системы. Некоторое определенное число единиц составляет одну новую единицу старшего разряда. Каждая цифра получает числовое значение не только в зависимости от своего начертания, но и от того, на каком месте она стоит в записи числа.

Поэтому действия сложения и вычитания над числами, записанными в любой системе счисления, выполняются по тем же правилам, что и над числами десятичной системы.

Правда, таблица сложения для каждой системы будет своей. Составим таблицу сложения для пятеричной системы:

$$\begin{array}{llll} 1+1=2; & 2+2=4; & 3+3=11; & 4+4=13. \\ 1+2=3; & 2+3=10; & 3+4=12; & \\ 1+3=4; & 2+4=11; & & \\ 1+4=10; & & & \end{array}$$

Для троичной системы таблица сложения выглядит так:

$$1+1=2; \quad 1+2=10; \quad 2+2=11.$$

Рассмотрим теперь сложение многозначных чисел на примере.

Требуется найти сумму двух чисел в пятеричной системе счисления:

$$242_5 + 331_5.$$

Складываем единицы 1-го разряда ($2+1=3$). Затем складываем единицы 2-го разряда ($4+3=12$), получим одну единицу 3-го разряда и 2 единицы 2-го разряда.

Сложим теперь единицы 3-го разряда ($2+3=10$), да при сложении единиц 2-го разряда была получена 1 единица 3-го разряда, значит, всего единиц 3-го разряда будет 11, то есть 1 единица 4-го разряда и одна единица 3-го разряда.

Следовательно, $242_5 + 331_5 = 1123_5$.

Записывать сложение многозначных чисел удобно, как и при сложении в десятичной системе:

$$\begin{array}{r} + 242 \\ + 331 \\ \hline 1123 \end{array}$$

З а м е ч а н и е. В подобных записях обычно не записывают внизу основание системы, так как все числа берутся в одной и той же системе.

368. Проверьте правильность выполнения сложения в троичной системе:

$$\begin{array}{r} + 1202 \\ + 21 \\ \hline 2000 \end{array}$$

369. 1) Найдите суммы следующих чисел в пятеричной системе:

$$23 + 11; 221 + 104; 432 + 114; 3241 + 1204; 4444 + 212.$$

2) Найдите суммы следующих чисел в троичной системе:

$$10 + 12; 101 + 121; 212 + 122; 2012 + 1211; 2101 + 212.$$

3) Найдите суммы следующих чисел в восьмеричной системе:

$$54 + 21; \quad 63 + 46; \quad 514 + 325; \quad 5364 + 3414; \\ 3107 + 724.$$

4) Найдите суммы следующих чисел в двоичной системе:

$$10 + 11; \quad 101 + 110; \quad 101 + 101; \\ 10001 + 10101; \quad 100101 + 1011.$$

Вычитание однозначных чисел производится на основании таблицы сложения, а вычитание многозначных чисел так же, как и в случае десятичной системы. Вычитаемое подписывается под уменьшаемым и производится вычитание чисел, являющихся цифрами единиц разрядов, начиная с 1-го разряда. Если вычитание не выполнимо (число единиц какого-нибудь разряда уменьшаемого меньше числа единиц того же

разряда вычитаемого), то в уменьшаемом занимаем единицу следующего более высокого разряда и раздробляем ее в единицы рассматриваемого разряда. Все вычисления, включая и раздробление единиц высшего разряда, делаются в уме.

Пусть требуется найти разность $2134_5 - 1242_5$. Начинаем с единиц 1-го разряда: $4 - 2 = 2$. Вычитание единиц 2-го разряда ($3 - 4$) невозможно, поэтому у уменьшаемого занимаем 1 единицу 3-го разряда, получим 13 единиц 2-го разряда, тогда: $13 - 4 = 4$. (Помните, что $13_5 = 8$.)

Вычитание единиц 3-го разряда вновь невозможно, поэтому занимаем единицу 4-го разряда, получим $10 - 2 = 3$.

Для единиц 4-го разряда имеем: $1 - 1 = 0$.

Итак, в пятеричной системе:

$$\begin{array}{r} 2134 \\ - 1242 \\ \hline 342 \end{array}$$

Правильность выполнения вычитания можно проверить сложением, так как сумма вычитаемого и разности должна равняться уменьшаемому:

$$\begin{array}{r} + 1242 \\ + 342 \\ \hline 2134 \end{array}$$

Не забывайте, что и сложение производится в пятеричной системе.

370. Проверьте правильность выполнения вычитания в троичной системе:

$$\begin{array}{r} 2101 \\ - 211 \\ \hline 1120 \end{array}$$

371. 1) Найдите разности следующих чисел в пятеричной системе:

$$\begin{array}{lll} 43 - 22; & 4123 - 2112; & 3013 - 1004; \\ 2143 - 1244; & 3012 - 2123. & \end{array}$$

2) Найдите разности следующих чисел в троичной системе:

$$\begin{array}{l} 22 - 11; \quad 2021 - 1010; \quad 1021 - 1012; \quad 2012 - 1121; \\ 2011 - 1112. \end{array}$$

3) Найдите разности следующих чисел в восьмеричной системе:

$$\begin{array}{lll} 57 - 44; & 7163 - 5141; & 6223 - 5114; \\ & 5413 - 3605; & 5023 - 2136. \end{array}$$

4) Найдите разности следующих чисел в двоичной системе.

$$\begin{array}{lll} 1011 - 1001; & 1110 - 1001; & 1001 - 110; \\ 1110101 - 1001011; & & 101101 - 1010. \end{array}$$

372. Один ученик предложил своим товарищам восстановить цифры в примере на сложение:

$$\begin{array}{r} 21?02 \\ + ?1212 \\ \hline ?2?021 \end{array}$$

Некоторые из решавших вначале заявили, что такой записи вычислений быть не может. Но, вспомнив, что они знают и другие системы счисления, сообразили, каково основание системы, и затем быстро восстановили все цифры. Сделайте это и вы.

373. Восстановите неизвестные цифры, обозначенные знаком вопроса, в следующих примерах на сложение и вычитание, определив вначале, в какой системе изображены числа. Напоминаем, что мы условились рассматривать лишь системы, основания которых не больше десяти.

а)
$$\begin{array}{r} + 5?57 \\ + ?325 \\ \hline ?16?4 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} + 2?21 \\ + 123? \\ \hline ?203 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} + ?123 \\ + 422? \\ \hline ?34?1 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} - 4?5 \\ - 136 \\ \hline ?56 \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} - 1536 \\ - ?42 \\ \hline 67? \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} - ?0?10 \\ - 111?1 \\ \hline 1310? \end{array}$$

374. Вычислить:

а) в пятеричной системе:

$$\begin{array}{r} 3240 \\ + 1424 \\ \hline 4132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2134 \\ + 1431 \\ + 444 \\ \hline 3244 \end{array}$$

б) в троичной системе:

$$\begin{array}{r} 1021 \\ + 2012 \\ \hline 2221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2121 \\ + 2102 \\ + 212 \\ \hline 2122 \end{array}$$

в) в восьмеричной системе:	7621	6126
	+ 4215	+ 765
	<u>3127</u>	<u>3042</u>
		<u>1124</u>

375. В рассказе «Загадочная автобиография» из книги Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика» имеется такое предложение: «...100-летним молодым человеком я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами...»

В какой системе счисления записаны эти числа?

Рекомендуем прочесть всю четвертую главу «Недесятичные системы счисления» в книге Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика» (М., 1954).

16. Умножение и деление

Чтобы производить умножение в некоторой недесятичной системе счисления, надо прежде всего составить таблицу умножения. Для пятеричной системы таблица умножения будет такой:

$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 14$	$4 \cdot 4 = 31$
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 11$	$3 \cdot 4 = 22$	
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 4 = 13$		
$1 \cdot 4 = 4$			

Вначале рассмотрим умножение многозначного числа на однозначное.

Умножение начинаем с единиц 1-го разряда. Если вычисленное произведение есть число однозначное, то это и есть цифра единиц искомого произведения. Если произведение цифр 1-го разряда есть число двузначное, то цифра единиц этого числа есть цифра единиц искомого произведения, а цифра единиц 2-го разряда прибавляется к произведению единиц 2-го разряда множимого на множитель и так далее.

Найдем в пятеричной системе произведение 1243 на 3.

$$\begin{array}{r}
 \times 1243 \\
 3 \\
 \hline
 4334
 \end{array}$$

Находим $3 \cdot 3 = 14$: 4 — цифра единиц, а 1 прибавляем к произведению $4 \cdot 3 (4 \cdot 3 + 1 = 22 + 1 = 23)$. Цифра единиц 2-го разряда — 3, а 2 прибавляем к произведению $2 \cdot 3 (2 \cdot 3 + 2 = 11 + 2 = 13)$. Цифра единиц третьего разряда — 3, а 1 прибавляем к произведению $1 \cdot 3 (1 \cdot 3 + 1 = 3 + 1 = 4)$, получим цифру единиц 4-го разряда. Ответом будет 4334.

Все вычисления, приведенные в скобках, должны выполняться устно.

376. Вычислите произведения следующих чисел в пятеричной системе: $1312 \cdot 2$; $3112 \cdot 3$; $2034 \cdot 4$.

Чтобы находить произведения чисел в других недесятичных системах счисления, можно поступить и несколько иначе: сначала мысленно изобразить написанные числа в привычной нам десятичной системе, перемножить их в десятичной системе, а получив результат, снова изобразить его в требуемой недесятичной системе.

Пусть надо вычислить в восьмеричной системе произведение: $3072 \cdot 4$.

Перемножаем по разрядам, начиная справа, с единиц; $2 \cdot 4$ равно восьми, но мы не можем записать 8, потому что в восьмеричной системе такой цифры не существует; 8 есть уже единица высшего разряда: $8 = 10_8$. Значит, в произведении число единиц равно нулю, а 1 единицу второго разряда запоминаем.

Затем 7 умножаем на 4. В десятичной системе это будет 28, но нужно это число (устно!) выразить в восьмеричной системе; оно содержит 3 восьмерки и еще 4 единицы: $28 = 34_8$. Учитывая замеченную единицу, пишем цифру единиц 2-го разряда произведения $4 + 1 = 5$, а 3 запоминаем.

Так как $0 \cdot 4 = 0$, то цифрой 3-го разряда будет $0 + 3 = 3$, причем замеченных единиц уже нет.

При умножении единиц 4-го разряда ($3 \cdot 4$) получим число 12, которое равно $1 \cdot 8 + 4$; пишем 4, а 8, то есть единицу 5-го разряда, записываем левее.

Следовательно, искомое произведение запишется так:

$$\begin{array}{r} \times 3072 \\ 4 \\ \hline 14350 \end{array}$$

377. Вычислите этим методом в пятеричной системе произведения тех же чисел, что и в предыдущей задаче:

$$1312 \cdot 2; \quad 3112 \cdot 3; \quad 2034 \cdot 4.$$

Сравните решения новым методом с решениями этих же примеров с использованием таблицы умножения. Какой из них более заинтересовал вас?

Следующие примеры можно решать любым из двух рассмотренных методов.

378. Вычислите произведения следующих чисел:

а) в троичной системе: $121 \cdot 2$; $221 \cdot 2$; $20212 \cdot 2$;

б) в восьмеричной системе: $2321 \cdot 2$; $3724 \cdot 3$; $6025 \cdot 6$;

в) в семеричной системе: $1232 \cdot 2$; $4115 \cdot 3$; $51261 \cdot 4$.

379. Сложение многозначных чисел также можно выполнять, применяя второй способ, рассмотренный нами для умножения: находим суммы в десятичной системе счисления, а затем результат переводим в требуемую недесятичную систему.

Вычислите вторым способом суммы следующих чисел:

а) в троичной системе:

$$\begin{array}{r} 2102 \\ + 1222 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2012 \\ + 1022 \\ \hline 2222 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2212 \\ 122 \\ + 2021 \\ \hline 1212 \end{array}$$

б) в пятеричной системе:

$$\begin{array}{r} 3412 \\ + 2414 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2043 \\ + 1124 \\ \hline 4142 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4213 \\ 2214 \\ + 301 \\ \hline 2114 \end{array}$$

в) в восьмеричной системе:

$$\begin{array}{r} 7305 \\ + 2376 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6543 \\ + 2144 \\ \hline 5273 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5304 \\ 2112 \\ + 6742 \\ \hline 347 \end{array}$$

Умножение многозначных чисел производится по той же схеме, что и в десятичной системе счисления. Вначале умножаем на число единиц 1-го разряда множителя. При умножении на число единиц

2-го разряда множителя получаем единицы 2-го разряда, поэтому к полученному произведению приписываем 0. Умножая на число единиц 3-го разряда множителя, к полученному числу приписываем два нуля и так далее. Все полученные при этом произведения складываем, для чего подписываем их одно под другим, причем приписываемые нули обычно опускаются, а промежуточные произведения сдвигаются на один знак влево по сравнению с предшествующим.

Например, при умножении в пятеричной системе 43231 на 3014 запись вычислений выглядит так:

$$\begin{array}{r}
 \times 43231 \\
 \hline
 3014 \\
 334024 \\
 43231 \\
 + 240243 \\
 \hline
 242114334
 \end{array}$$

380. 1) Найдите произведения следующих чисел в пятеричной системе:

$$2141 \cdot 24; \quad 3241 \cdot 2301.$$

2) Найдите произведения следующих чисел в троичной системе.

$$2112 \cdot 12; \quad 1022 \cdot 2012.$$

3) Найдите произведения следующих чисел в восьмеричной системе:

$$3712 \cdot 42; \quad 3645 \cdot 2430.$$

381. Найдите произведения следующих чисел в двоичной системе:

$$\begin{array}{l}
 1001 \cdot 11; \quad 110101 \cdot 1011; \quad 101011 \cdot 101010; \\
 10011101 \cdot 110100.
 \end{array}$$

З а м е ч а н и е. Обратите внимание на простоту вычислений в двоичной системе счисления. Умножение сводится к простому переписыванию множимого. Хотя числа записываются довольно длинно, но зато все арифметические действия письменно выполняются просто.

382. В какой системе счисления выполнены действия умножения:

$$3 \cdot 3 = 12; \quad 21 \cdot 4 = 104; \quad 21 \cdot 2 = 112?$$

383. Почему ни в какой системе счисления невозможны равенства:

$$2 \cdot 2 = 100; \quad 3 \cdot 2 = 20?$$

Деление чисел в любой системе счисления производится по той же схеме, что и деление при основании 10. Рассмотрим такой пример на деление в пятеричной системе:

$$\begin{array}{r} 412041 \overline{) 32} \\ \underline{32} \\ 42 \\ \underline{32} \\ 100 \\ \underline{32} \\ 134 \\ \underline{114} \\ 201 \\ \underline{201} \\ 0 \end{array}$$

384. Проверьте правильность выполненного деления в троичной системе:

$$\begin{array}{r} 120101 \overline{) 102} \\ \underline{102} \\ 111 \\ \underline{102} \\ 201 \\ \underline{102} \\ 22 \end{array}$$

385. Выполните деление:

- а) в пятеричной системе: $2134:12$; $124002:34$;
- б) в троичной системе: $1022:12$; $12012:21$;
- в) в двоичной системе: $10001:11$; $1011011:111$.

З а м е ч а н и е. Умея выполнять деление над числами в любой системе счисления, можно от одной десятичной системы переходить к другой без перевода чисел в десятичную систему. Например, чтобы число 2431_7 изобразить в восьмеричной системе, мы переходили от семеричной системы к десятичной, а затем уже к восьмеричной. Но можно непосредственно

делить 2431_7 на 8 в семеричной системе ($8=11_7$).
Получим:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2431 \\
 -22 \\
 \hline
 23 \\
 -22 \\
 \hline
 11 \\
 -11 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 | 11 \\
 \hline
 221 \\
 -22 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 | 11 \\
 \hline
 20 \\
 -11 \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 | 11 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Следовательно, $2431_7 = 1610_8$.

17. Разные задачи на системы счисления

386. Во время туристского похода на привале инструктор рассказывала пятиклассникам свою биографию, записывая все числа на песке:

«В первый класс я поступила в возрасте 13 лет. Из-за болезни во втором классе училась 2 года. Когда мне было 33 года, меня приняли в комсомол. Через год я окончила школу и в том же году в возрасте 100 лет поступила в педагогическое училище. Через 10 лет окончила училище и уже 12 лет работаю в школе».

Чем объяснить кажущиеся странности этого рассказа? Восстановите истинный смысл чисел в этой биографии.

387. Учитель, отвечая на вопрос, много ли у него в классе учеников, написал: «В классе 100 детей, из них 25 мальчиков и 31 девочка».

Сначала такой ответ нас удивил, но потом мы поняли, что учитель пользовался недесятичной системой. В какой системе этот ответ является непротиворечивым?

388. (Шутка.) Возможно ли такое равенство:
 $19 + 20 = 15?$

389. Один пятиклассник написал о себе: «Палец у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на обеих ногах десять».

В чем здесь дело?

390. Руководитель кружка на доске написал следующие примеры:

$$\begin{array}{lll}
 11 \cdot 11 = 121; & 12 \cdot 12 = 144; & 4 \cdot 4 = 20; \\
 6 \cdot 6 = 44; & 17 \cdot 17 = 341. &
 \end{array}$$

$$VII - V = XI \quad VIII - III = X$$

a

$$VI - IX = III \quad VIII - III = V$$

$$IX - V = VI \quad VIII + II = X$$

Рис. 39

$$VII + III = X$$

Рис. 40

б

На первый взгляд кажется, что некоторые из этих равенств не верны. Подумайте, в какой системе счисления все написанные равенства верны.

391. В шестеричной системе $2 \cdot 3 = 10$; $4 \cdot 13 = 100$; $12 \cdot 43 = 1000$ и т. д.

Можно ли в десятичной системе получить 1000 при умножении двух целых чисел, в каждом из которых не было бы ни одного нуля? А 10 000?

392. Употребляемые нами цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 и система обозначения чисел были перенесены в Европу арабами (около XII в.), поэтому эти цифры называются арабскими. Многие ученые считают, что арабы в свою очередь заимствовали эту систему у индусов.

На уроках математики вы познакомились и с римскими цифрами. Первые три из них I, V, X, с помощью которых можно записать любое число от 1 до 39, легко изобразить, используя палочки или спички.

На рисунке 39 написано несколько неверных равенств. Как можно получить из них верные равенства, если разрешается переложить с одного места на другое только одну спичку?

Замечание. Ваши ответы могут не совпадать с ответами, которые вы найдете в конце книги, ибо некоторые примеры допускают несколько решений. Например, внести поправку в неверное равенство, изображенное на рисунке 40, *a*, можно различными способами (рис. 40, *б*).

393. Применение недесятичных систем счисления

позволяет проводить различные игры на угадывание чисел. Опишем одну из них.

Изобразим все числа от 1 до 15 в двоичной системе. Впишем эти числа в занумерованные четыре строки, придерживаясь следующего правила: в строку № 1 записываем все числа, в двоичном изображении которых есть единицы 1-го разряда (это будут нечетные числа); в строку № 2 записываем все числа, у которых есть единицы 2-го разряда; в строку № 3 — у которых есть единицы 3-го разряда и в строку № 4 — у которых есть единицы 4-го разряда. Тогда таблица примет вид:

№ 1	1	3	5	7	9	11	13	15
№ 2	2	3	6	7	10	11	14	15
№ 3	4	5	6	7	12	13	14	15
№ 4	8	9	10	11	12	13	14	15

Теперь вы предлагаете своим товарищам задумать любое число от 1 до 15 и указать, в каких строках таблицы оно записано. Пусть, например, указали, что задуманное число имеется в строках № 1 и № 3, значит, его изображение в двоичной системе содержит единицы 1-го и 3-го разрядов, а единиц 2-го и 4-го разрядов нет. Следовательно, задуманное число есть $101_2 = 5$.

Если задуманное число имеется во 2, 3 и 4-й строках, то это будет $1110_2 = 14$.

Для большего эффекта обычно берут все числа от 1 до 63, и по тому же правилу, что и выше для чисел от 1 до 15, записывают их на шести пронумерованных карточках. На каждой карточке уже будет по 32 числа.

Изобразите все числа от 1 до 31 в двоичной системе и заполните соответствующие 5 карточек. Потренируйтесь в устном переводе чисел (включая пятизначные) из двоичной системы в десятичную, после чего можете провести эту игру со своими друзьями.

394. Имеются чашечные весы и по одной гире в 1, 2, 4, 8, 16 г и т. д. Доказать, что с помощью такого

набора гирь можно определить массу любого груза с точностью до 1 г.

Решение задачи сводится к записи любого числа в двоичной системе. Действительно, чтобы взвесить некоторый груз, помещая гири только на одну чашку весов, надо его массу представить в виде суммы масс имеющихся гирь, причем каждая гиря берется либо 0, либо 1 раз.

Например, $27 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1$, значит, чтобы взвесить груз в 27 г, надо брать гири в 16, 8, 2 и 1 г.

Запишем число 27 в двоичной системе счисления:

$$\begin{aligned} 11011_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Очевидна аналогия в решении задачи о взвешивании и задачи о представлении чисел в двоичной системе счисления.

Определите, какие гири из нашего набора нужно взять, чтобы взвесить груз в 9, 19, 22 г.

395. Каким наименьшим числом гирь можно взвесить груз от 1 до 63 кг с точностью до 1 кг, помещая гири только на одну чашку весов?

396. Если при взвешивании класть гири на обе чашки весов, то можно пользоваться набором гирь в 1, 3, 9, 27, 81 г и т. д. Такой набор гирь позволяет взвешивать любой груз, масса которого равна целому числу граммов.

Действительно, любое число можно представить в троичной системе. Если цифра некоторого разряда 0, то соответствующей гири не берем; если цифра равна 1, то берем одну гирю; если же цифра равна 2, то берем гирю, соответствующую следующему большему разряду, но на вторую чашку весов (с грузом) ставим гирю данного разряда. Например, $2 \cdot 9 = 1 \cdot 27 - 1 \cdot 9$.

Запишите все числа от 1 до 13 в троичной системе. Как можно взвесить любой груз от 1 до 13 г с точностью до одного грамма, имея только три гири: 1, 3, 9 г?

397. Кладовщик одного склада оказался в большом затруднении: заказанный комплект гирь для простых чашечных весов не прибыл к сроку, а на соседнем складе лишних гирь тоже не было. Тогда он решил подобрать несколько кусков железа разной массы и временно пользоваться ими как гирями. Ему удалось выбрать

такие четыре «гири», с помощью которых можно было взвешивать с точностью до 100 г товар массой от 100 г до 4 кг.

Подумайте, какой массы были эти «гири».

ГЛАВА V. ДРОБИ

18. Задачи на все действия с дробями

398. У рыбака, любителя математики, спросили: «Сколько весит пойманная вами рыба?» Он ответил: «Три четверти килограмма и еще три четверти своей массы». Сколько весит рыба?

399. 1) Найдите полторы трети от ста.

2) Сколько получится, если полсотни разделить на половину?

400. 1) Как изменится дробь, если числитель ее увеличить на знаменатель?

2) На какое число надо разделить данное число, чтобы увеличить его в 3 раза?

3) (Шутка.) Какое число и на какое число разделено, если делимое равно делителю и делитель равен частному?

401. Разделите 5 яблок на 6 равных частей, не разрезая ни одного яблока на 6 частей.

402. Дано несколько чисел. Каждое из них разделили на их сумму и полученные результаты сложили. Чему равна такая сумма?

403. 1) Напишите рядом две цифры 5 и 6 и подумайте, какой знак, употребляемый в математике, надо поставить между ними, чтобы получить число, большее 5, но меньшее 6.

2) Как увеличить число 666 в $1\frac{1}{2}$ раза, не производя над ним никаких арифметических операций?

404. Найдите число, если известно, что: а) половина — треть его; б) треть — половина его.

405. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого кочана. Какова масса этого кочана капусты?

406. Восстановите знаки действий, обозначенные вопросительным знаком:

а) $37,3 ? \frac{1}{2} = 74\frac{3}{5}$; б) $\frac{33}{40} ? \frac{10}{11} = 0,75$;

в) $0,375 ? \frac{1}{40} = 0,4$; г) $0,45 ? \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$.

407. Восстановите числители и знаменатели, обозначенные вопросительными знаками:

a) $\frac{5}{?} - \frac{?}{3} = \frac{1}{6};$

$$6) \quad \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$

B) $\frac{1}{?} - \frac{?}{7} = \frac{1}{14};$

$$\Gamma) \quad \frac{?}{5} - \frac{2}{?} = \frac{2}{15};$$

Д) $\frac{5}{?} - \frac{?}{4} = \frac{1}{12};$

e) $\frac{?}{9} - \frac{5}{?} = \frac{1}{18};$

$$\text{ж) } \frac{1}{2} - \frac{?}{9} = \frac{1}{9};$$

$$3) \quad \frac{?}{6} - \frac{2}{?} = \frac{1}{30}.$$

З а м е ч а н и е. Учтите, что возможны различные решения. В конце книги приведен один из возможных ответов.

408. Восстановите цифры в следующем примере на деление:

[illegible]

409. При сложении двух десятичных дробей по ошибке во втором слагаемом поставили запятую на одну цифру правее, чем следовало, и получили в сумме 49,1 вместо 27,95. Определите слагаемые.

410. Как изменится частное, если делитель уменьшить на $\frac{1}{5}$ его величины?

411. Увеличится или уменьшится неправильная дробь, если к ее числителю и знаменателю прибавить одно и то же натуральное число?

412. Найдите несократимую дробь, которая увеличится в 4 раза, если к числителю прибавить знаменатель.

413. Дана дробь $\frac{13}{19}$. Какое число нужно прибавить

к числителю и знаменателю этой дроби, чтобы она обратилась в $\frac{5}{7}$?

414. Дана дробь $\frac{19}{44}$. Какое число надо вычесть из ее числителя и знаменателя, чтобы получить дробь $\frac{2}{7}$?

415. Великий русский математик Николай Иванович Лобачевский родился в 1792 г. Детство, $\frac{1}{8}$ всей жизни, он провел в Нижегородской губернии. После того как $\frac{1}{4}$ часть его жизни прошла в неустанной учебе и труде, ему было присвоено звание профессора математики Казанского университета. Спустя $\frac{5}{32}$ своей жизни, он сделал сообщение об открытии новой геометрии, носящей теперь его имя. Через 3 года в «Казанском вестнике» был опубликован его первый труд по новой геометрии, после чего остальные 27 лет жизни ученый упорно трудился над дальнейшим развитием своих идей.

Определите год, в котором Николай Иванович впервые доложил о своей работе.

416. Во время похода Таня и Люда готовили для своего отряда обеды. В первый день Таня положила в суп мало соли, и затем суп пришлось досаливать. Учтя это, на следующий день Люда в такое же количество супа положила соли в 2 раза больше. Поэтому досаливать уже пришлось вдвое меньшим количеством соли, чем в первый раз. Какую часть нужного количества соли Таня положила в суп в первый день?

417. В зале было почти 100 стульев, но участники пионерского слета все прибывали и прибывали. Пришлось удвоить количество стульев, и тогда $\frac{1}{19}$ часть мест осталась незанятой. Сколько пионеров прибыло на слет?

418. Сумма трех дробей равна единице. Разность между первой и второй дробями равна третьей дроби. Сумма первых двух дробей в 3 раза больше третьей. Найдите эти дроби.

419. Найдите четыре числа, сумма которых равна 45, зная, что если к первому прибавить 2, из второго вычесть 2, третье умножить на 2 и четвертое разделить на 2, то получатся равные числа.

420. Найдите четыре числа, сумма которых равна $190\frac{1}{8}$. Если одно из этих чисел увеличить на $5\frac{1}{2}$, второе уменьшить на $5\frac{1}{2}$, третье увеличить в $5\frac{1}{2}$ раза, а четвертое число уменьшить в $5\frac{1}{2}$ раза, то результаты будут равны.

421. Два сосуда вместимостью 144 л и 70 л содержат некоторое количество воды. Если больший сосуд долить доверху водой из меньшего сосуда, то в последнем останется еще 1 л воды. Если же долить доверху меньший сосуд водой, то в большем останется $\frac{3}{4}$ первоначального количества воды. Сколько литров воды содержалось в каждом сосуде?

422. В колхозе отвели 40 га земли под картофель и несколько гектаров под капусту. Если бы $\frac{1}{4}$ часть земли, отведенной под картофель, засадить капустой, то количество земли под капустой составляло бы $\frac{2}{3}$ земли, оставшейся после этого под картофелем. Сколько земли было отведено под капусту?

423. На одном земельном участке под пашней и сенокосом было 800 га. Если бы под пашней было земли меньше на участок, равный $\frac{1}{8}$ площади сенокоса, а под сенокосом больше на $\frac{1}{4}$ площади пашни, то под пашней и сенокосом было бы земли поровну. Сколько гектаров земли под пашней и сколько под сенокосом?

424. На участке однокольного железнодорожного пути длиной в 20 км надо уложить рельсы. Имеются рельсы длиной по 25 м и 12,5 м. Если уложить все рельсы длиной в 25 м, то рельсов длиной в 12,5 м надо будет добавить $\frac{1}{2}$ от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиной в 12,5 м, то рельсов длиной в 25 м надо добавить $\frac{2}{3}$ от всего их количества. Определить число тех и других рельсов.

425. (Старинная задача.) Прекрасная дева с блестящими очами, скажи мне, ты, которая умеешь

правильно считать, как велико число, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$ частного, умножено на 14, уменьшено на 52, разделено на 12, после прибавления 8 и деления на 2, даст число 10.

426. В три сосуда налили воды. Если $\frac{1}{3}$ воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{4}$ воды, оказавшейся во втором сосуде, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{10}$ воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелить в первый, то в каждом сосуде будет по 9 л воды. Сколько литров воды было в каждом сосуде первоначально?

427. На покупку тетрадей мальчик израсходовал $\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{8}$ имеющихся у него денег, после чего у него осталось еще 1 р. 70 к. Сколько денег было у мальчика до покупки?

428. (Исторические задачи.) 1) — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твои беседы?

— Вот сколько,— ответил философ.— Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины. Сочти сам, сколько у меня учеников.

2) — Скажи мне, вестник времени, какая часть дня миновала?

— Трижды две трети того, что прошло, остается. В какое время суток был задан вопрос?

3) — Который час? — спросили у Пифагора. Он ответил:

— До конца суток остается дважды две пятых того, что уже протекло от начала.

В какое время суток был задан вопрос?

429. Группа пятиклассников решила летом пройти по дорогам одного партизанского отряда. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ всего пути и еще 4 км; во второй — $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 2 км; а в третий — половину оставшегося пути. После этого им осталось идти $\frac{1}{6}$ первоначального пути.

чального пути. Сколько километров прошли школьники за 3 дня?

430. В корзине были яблоки. Сначала из нее взяли половину яблок без 5 яблок, затем $\frac{1}{3}$ оставшихся яблок и еще 4 яблока, после чего осталось 12 яблок. Сколько яблок было в корзине?

431. Проехав 120 км, что составляло половину всего пути, пассажир лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, который он проехал спящим. Сколько километров пути пассажир проехал спящим?

432. Лучший класс одной из школ Могилева был премирован поездкой на автобусе в Брест. Решено было в дороге сделать только одну остановку в Минске. Из школы выехали в 10 часов утра. Через час ребята спросили: «Сколько мы уже проехали?» Шофер ответил: «Половину того, что осталось до Минска».

Прибыв в Минск, путешественники пообедали и пошли осматривать достопримечательности города. На завтра в 11 часов, когда они отъехали примерно 400 км от того места, где в первый раз спрашивали у шофера о расстоянии, ребята еще раз спросили: «Сколько нам осталось ехать до Бреста?» Последовал ответ: «Половину того, что мы отъехали от Минска».

Школьники прибыли в Брест в 15 часов. Из-за условий движения ехать приходилось с разной скоростью.

Сколько километров проехали ребята от Могилева до Бреста?

433. Расстояние между двумя городами пароход проходит по течению реки за 6 ч, а против течения — за 8 ч. На какую часть этого расстояния пароход проходит за 1 ч по течению больше, чем против течения? Какую часть этого расстояния пройдет плот за 1 ч?

У к а з а н и е. Скорость движения плота равна скорости течения реки.

434. 1) Пароход идет из Киева в Днепропетровск в течение двух суток, а обратно — в течение трех суток. Сколько времени будет плыть плот из Киева в Днепропетровск?

2) Пароход по течению проходит расстояние между двумя городами за трое суток, а обратно это же расстояние — за четверо суток. Сколько суток будет плыть плот от одного города до другого?

435. При попутном ветре лыжник проходит 1 км за 6 мин. Чтобы пройти такое же расстояние при встречном ветре, лыжнику потребуется 8 мин. С какой скоростью двигался бы лыжник в безветренную погоду?

436. Стоя неподвижно на ступени эскалатора метро, человек поднимается на поверхность за 1 мин. Тот же человек, взбегая по ступеням неподвижного эскалатора, доберется до верха за 40 с. За какое время поднимется человек на поверхность, если начнет взбегать по движущемуся эскалатору?

437. Пешеход проходит 4 км в час. Лыжник тратит на прохождение 1 км на 9 мин меньше, чем пешеход. Во сколько раз скорость лыжника больше скорости пешехода?

438. Группа школьников отправляется от пристани на моторной лодке по течению реки с условием вернуться обратно через 6 ч. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость моторной лодки в стоячей воде 12 км/ч. На какое наибольшее расстояние школьники могут отплыть от пристани, если, перед тем как возвратиться обратно, они пробудут на берегу 2 ч?

439. От пристани вниз по течению реки отправился пароход одновременно с плотом. Собственная скорость парохода (в стоячей воде) 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. С какой скоростью пароход удалялся от плота? А с какой скоростью пароход и плот сближались бы, если бы пароход шел навстречу плоту?

440. Моторная лодка, собственная скорость которой 16 км/ч, отошла от пристани *A* одновременно с плотом вниз по течению. У пристани *B* лодка развернулась и на обратном пути встретила плот в 20 км от пристани *A*. Найдите расстояние между пристанями *A* и *B*, если известно, что скорость течения реки 4 км/ч.

441. У пристани из лодки, плывущей против течения реки, выпал бочонок. Пропажу обнаружили через 1 ч, повернули обратно и на расстоянии 5 км от пристани догнали бочонок. Определите скорость течения реки.

442. Автобус и грузовик, скорости которых соответственно равны 60 км/ч и 70 км/ч, выехали одновременно из города по одной и той же дороге. Через некоторое время по той же дороге выехал легковой автомобиль со скоростью 90 км/ч. Определите, на сколько позже выехал легковой автомобиль, если он за полчаса до встречи с грузовиком обогнал автобус.

443. Прохожий, идущий вдоль трамвайной линии,

замечает, что каждые 7 мин его нагоняет трамвай и каждые 5 мин проходит трамвай навстречу. Какой интервал движения трамваев?

В задачах 443—445 предполагается, что трамваи отправляются с конечного пункта через равные промежутки времени и движутся с постоянной скоростью и без остановок; пешеход тоже идет с постоянной скоростью. Кроме того, будем считать, что первые и последние обгоняющие и встречные трамваи пешеход видит одновременно.

444. Вдоль трамвайной линии шел мальчик со скоростью 2,5 км/ч и считал трамваи. Он насчитал 21 трамвай, обогнавший его. Сколько за это же время он насчитает встречных трамваев, если полагать, что трамваи движутся со скоростью 12,5 км/ч?

445. Человек шел со скоростью 3 км/ч по улице, вдоль которой проходила трамвайная линия, и считал трамваи. Он насчитал 41 трамвай, обогнавший его, и 61 встречный. Какова средняя скорость движения трамваев?

446. Пароход начали загружать 4 подъемных крана одинаковой мощности. После того как они проработали 2 ч, к ним присоединили еще 2 крана меньшей мощности, и после этого погрузка была закончена через 3 ч. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка была бы закончена за 4,5 ч. За сколько часов мог бы закончить погрузку один кран большей мощности?

447. В первом матче футболисты «Чайки» забили в ворота соперника половину мячей, забитых ими во втором матче, и еще один мяч. Во втором матче они забили вдвое меньше мячей, чем в третьем матче, и еще один мяч. В третьем матче они забили вдвое меньше мячей, чем в первом, и еще один мяч. Сколько всего мячей забили футболисты «Чайки» за 3 матча?

448. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы закончить работу за 6 ч, если бы начали ее одновременно, но они приступали к работе один за другим через одинаковые промежутки времени. Через такой же промежуток времени после выхода на работу последнего участника канавы была вырыта, причем каждый из участников оставался на работе до конца. За сколько времени они вырыли канаву, если приступивший к работе первым проработал в 5 раз больше времени, чем приступивший последним?

449. Докажите, что

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} = 1 - \frac{1}{101}.$$

450. Электронная цифровая машина универсального назначения производит до 8 тысяч арифметических действий в секунду. Вот пример, в котором этих действий около 30 тысяч:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9999 \cdot 10000}.$$

Значит, машине понадобится для вычисления этой суммы около 3 с. Вы можете решить этот пример быстрее. Правда, для этого нужно записать его по-иному.

Посоревнуйтесь с машиной!

451. Возьмите лист бумаги в форме квадрата или прямоугольника. Примите его площадь за единицу. Отрежьте половину листа и положите ее на стол. Затем от остатка снова отрежьте половину (получится уже $\frac{1}{4}$ часть листа) и положите ее рядом с первой. Прделав то же самое с новым остатком, присоедините $\frac{1}{8}$ листа к первым двум половинкам и т. д.

На столе получим как бы сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. Если представить, что этот процесс бесконечный, то чему равна сумма бесконечного числа таких слагаемых?

452¹. На столе стоит самовар, продолжающий кипеть во все время чаепития. 5 человек могут выпить весь самовар за $1\frac{1}{2}$ ч, а 8 человек — за 1 ч. За какое время выпьют самовар 11 человек? (Предполагается, что выкипание воды и распитие чая происходит равномерно.)

453. (Задача Ньютона.) Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколь-

¹ Подробные решения задач № 452—455 приведены в книге: Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение.— Л., 1956. С. 63—64. Попробуйте вначале самостоятельно решить их, а в случае неудачи познакомьтесь с решениями по указанной книге.

ко коров съели бы всю траву за 96 дней? (Предполагается, что коровы поедают траву равномерно.)

454. (Задача Л. Эйлера.) Решив все свои сбережения поделить поровну между своими сыновьями, некто составил такое завещание.

«Старший из моих сыновей должен получить 1000 р. и $\frac{1}{8}$ часть остатка; следующий — 2000 р. и $\frac{1}{8}$ нового остатка; третий сын — 3000 р. и $\frac{1}{8}$ часть третьего остатка и т. д.».

Найдите число сыновей и размер завещанного сбережения.

455. (Задача Л. Н. Толстого.) Косцы должны были скосить два луга. С утра они все вместе стали косить большой луг. По прошествии половины рабочего дня косцы разделились: половина косцов осталась на большом лугу и к вечеру его докосила, а другая перешла косить другой луг, вдвое меньший первого, но не успела к концу дня закончить косьбу. На другой день на этот луг вышел один косец и в течение всего дня докосил его. Сколько всего было косцов?

19. Задачи на дроби от разных чисел

Встречаются интересные задачи, в которых заданы части от разных чисел. Рассмотрим решение одной из таких задач.

456. Во время летних каникул мальчик заработал 10 р. 40 к. и решил купить фотоаппарат. Недостающие деньги дали ему отец и два старших брата. Оказалось, что первый брат дал $\frac{1}{4}$ суммы, собранной на покупку без него, второй брат дал $\frac{1}{3}$ суммы, собранной на покупку без него, и отец дал $\frac{1}{2}$ суммы, собранной на покупку без него. Сколько рублей заплатил мальчик за фотоаппарат?

Решение. В этой задаче дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ являются частями различных чисел, поэтому над ними нельзя производить арифметические операции. Нужно преобразовать их в дроби от одного и того же числа.

Первый брат дал $\frac{1}{4}$ суммы, собранной на покупку без него, значит, без него собрали в 4 раза больше, чем дал он. Если принять его взнос за единицу, тогда взнос остальных — 4 такие единицы, и стоимость фотоаппарата составит 5 таких единиц. Следовательно, первый брат внес $\frac{1}{5}$ стоимости фотоаппарата.

Аналогично получим, что второй брат дал $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ стоимости фотоаппарата, а отец — $\frac{1}{3}$ всей суммы.

Теперь легко узнать, какую часть стоимости фотоаппарата дали мальчику отец и два его старших брата: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$.

Отсюда найдем, что 10 р. 40 к. составляют $1 - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$ стоимости фотоаппарата. Значит, мальчик заплатил за фотоаппарат

$$10,4 : \frac{13}{60} = 48 \text{ (р.)}.$$

457. Сейчас 6 ч вечера. Какую часть составляет оставшаяся часть суток от прошедшей и какая часть суток осталась?

458. На одном заводе число работающих женщин составляет $\frac{1}{3}$ числа работающих мужчин. Какую часть от общего числа работающих на заводе составляют женщины?

459. В классе число отсутствующих учащихся составляет $\frac{1}{6}$ числа учеников класса. После того как из класса вышел еще один ученик, число отсутствующих оказалось равным $\frac{1}{5}$ числа всех учащихся класса. Сколько учеников в этом классе?

460. В классе число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ числа присутствующих. После того как из класса вышел еще один ученик, число отсутствующих оказалось равным $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

461. Вчера число учеников, присутствовавших в классе, составило $\frac{4}{5}$ числа всех учеников класса. Сегодня же пришло еще 2 ученика, и оказалось, что теперь число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ числа присутствующих. Сколько всего учеников учится в классе?

462. Садовник собрал с четырех яблонь некоторое число яблок: с первой — 130 штук; со второй — вдвое меньше, чем с остальных трех яблонь; с третьей — втрое меньше, чем с остальных трех; с четвертой — вчетверо меньше, чем с остальных трех. Сколько всего яблок собрал садовник?

463. 1,6 т картофеля при сушке теряет в своей массе столько, что $\frac{1}{2}$ потерянной массы в $1\frac{1}{2}$ раза больше оставшейся. Чему равна масса картофеля после сушки?

464. Если к половине дней, прошедших от начала года, прибавить $\frac{1}{3}$ числа дней, оставшихся до конца года, то получится число уже прошедших дней. Определите, в каком месяце и какого числа это событие произойдет, если в году 365 дней.

465. У одного любителя математики спросили: «Который час?» Он ответил: «Если вы прибавите четверть того времени, которое прошло после полудня до данного момента, к половине времени, которое пройдет от данного момента до завтрашнего полудня, то как раз будет то, что нужно». Сколько же было времени?

466. В бочке было 27 ведер спирта. Сначала из нее вылили 9 ведер и заменили вылитый спирт таким же количеством воды; потом от этой смеси отлили 9 ведер и это количество смеси заменили опять водой; в третий раз отлили 9 ведер смеси и заменили водой. Сколько ведер спирта и сколько ведер воды осталось в бочке?

467. В трех шестых классах 102 ученика. Число учеников класса «Б» составляет $\frac{8}{9}$ числа учеников класса «А», а число учеников класса «В» равно $\frac{17}{16}$ числа учеников класса «Б». Сколько учеников учится в каждом классе?

468. Трое рабочих получили премию. Первый получил $\frac{24}{77}$ суммы, полученной всеми; второй — $\frac{7}{8}$ того, что получил первый. По дороге домой каждый из них купил подарки своим детям. Первый израсходовал $\frac{1}{12}$ полученных им денег; второй — $\frac{7}{24}$ своих денег; третий — $\frac{5}{32}$ полученных им денег. Все подарки стоили 52 р. 50 к. Сколько денег получил каждый рабочий?

469. В классе 36 учеников. Сколько среди них мальчиков и сколько девочек, если $\frac{2}{5}$ числа всех мальчиков равны половине числа всех девочек?

470. Три мальчика решили купить мяч. Определите взнос каждого мальчика, зная что $\frac{1}{2}$ вноса первого мальчика равна $\frac{1}{3}$ вноса второго, или $\frac{1}{4}$ вноса третьего, и что взнос третьего мальчика больше вноса первого на 64 к.

471. Три сосуда вместе вмещают 27 л воды. Если воду из первого сосуда переливать в два других, то можно полностью наполнить второй и $\frac{1}{2}$ третьего или полностью третий сосуд и $\frac{2}{3}$ второго. Сколько воды вмещает каждый сосуд в отдельности?

472. Из корзины взяли 3 яблока, затем $\frac{1}{3}$ остатка и еще 3 яблока. После этого в корзине осталась половина первоначального количества яблок. Сколько всего яблок было в корзине?

473. Девочки составляли $\frac{3}{7}$ всего числа учащихся класса. Когда в класс приняли еще 4 девочки, то девочки стали составлять $\frac{1}{2}$ всех учащихся класса. Сколько всего учащихся было первоначально в классе?

474. В корзине имелись яблоки и груши, причем число груш составляло $\frac{1}{3}$ числа яблок. Когда продали 30 груш и 60 яблок, число оставшихся груш составило лишь $\frac{1}{4}$ числа оставшихся яблок. Сколько яблок и

и сколько груш было в корзине первоначально?

475. Одновременно были зажжены 2 свечи одинаковой длины: одна потолще (сгорающая за 4 часа), другая потоньше (сгорающая за 2 часа). Через некоторое время обе свечи были потушены. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

476. Мастер, работая вместе со своим учеником, помог ему выполнить часть задания, а затем прекратил работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось вдвое меньше времени, которое бы потребовалось ученику для самостоятельного выполнения этого задания. Во сколько раз больше времени мастер затратил бы, выполняя все задание один, по сравнению с тем временем, которое он затратил, помогая ученику?

477. (Старинная задача.) Собака гонится за зайцем, который находится на 40 своих прыжков впереди собаки. Собака делает 7 прыжков за то время, за которое заяц делает 9 прыжков, но 3 прыжка собаки по длине равны 5 прыжкам зайца. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать зайца?

20. Проценты

Вы знаете, что сотая часть числа называется процентом этого числа, то есть проценты — частный случай дробей. Рассматриваемые три типа задач на проценты — нахождение процентов данного числа, нахождение числа по его процентам и нахождение процентного отношения двух чисел — являются фактически задачами на нахождение дроби данного числа, нахождение числа по данной его дроби или отношение двух чисел.

Не удивительно, что в этом параграфе вы найдете задачи, весьма похожие на задачи из предыдущих параграфов этой главы, их можно рассматривать как задачи на повторение. Если вы решили все задачи из первых двух параграфов, то можно быть уверенным, что вы решите и все эти задачи.

478. Цена книги снизилась на столько процентов, на сколько копеек она снизилась. Какова была цена книги?

479. В сосуд с водой и спиртом добавили столько спирта, сколько было его в растворе воды, и столько воды, сколько первоначально было спирта. Найдите процентное содержание спирта в новом растворе.

480. Две автомашины разных марок имеют максимальные скорости 100 км/ч и 125 км/ч. На сколько процентов скорость второй автомашины больше скорости первой? На сколько процентов скорость первой автомашины меньше скорости второй?

481. При проверке влажность зерна оказалась равной 20 %. 10 ц этого зерна просушили, после чего оно потеряло 100 кг. Определите влажность зерна после сушки.

З а м е ч а н и е. Влажность зерна показывает содержание в нем воды и выражается в процентах.

482. На складе есть 100 кг ягод. Проведенный анализ показал, что в ягодах содержится 99 % воды. Через некоторое время анализ повторили. Оказалось, что содержание воды в ягодах упало до 98 %. Какова теперь масса ягод? Прежде чем считать, прикиньте ответ «на глаз».

483. Хранившееся на складе зерно имело влажность 20 %. После просушивания влажность его стала 15 %. Какова стала масса зерна после просушивания, если при первоначальной влажности она была равна 51 т?

484. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70 % воды, а полученный из него мед — только 17 %. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меду?

485. Морская вода содержит 5 % (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученной воде составило 2 %?

486. Кусок сплава меди и олова массой 12 кг содержит 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав имел 40 % меди?

487. 1) До просушки влажность зерна была равна 23 %, а после просушки оказалась равной 12 %. На сколько процентов уменьшилась масса зерна?

2) Семена, попав под дождь, разбухли и стали на 20 % тяжелее. Когда их высушили, то их масса

уменьшилась на 20 %. Стала ли масса семян прежней?

488. Однажды грибов я набрал в лесу! Еле дотащил. Но тащил-то почти одну воду: в свежих грибах ее 90 %. А когда грибы высушил, они стали весить на 15 кг легче. Теперь в них стало 60 % воды. Сколько же грибов я принес из леса?

489. Автоматическая линия для производства подшипников давала 2 % изделий второго сорта. После усовершенствования одного из станков изделий второго сорта стало 0,5 %. На сколько процентов уменьшился выпуск изделий второго сорта?

490. Производительность труда рабочего при выполнении определенной работы увеличилась на 25 %. На сколько процентов сократилось время для выполнения этой работы?

491. Со стоимости товара сделаны последовательно скидки сначала на 8 %, а затем на 5 %. На сколько процентов снизилась стоимость товара?

492. На заводе 40 % всех станков были усовершенствованы, в результате чего их производительность повысилась на 60 %. На сколько процентов повысился выпуск продукции на заводе?

493. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка пересыпать во второй 12,5 % муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

494. Молочное мороженое содержит 18,5 % молочного жира и сахара вместе, остальная часть — вода¹. Сколько сахара и воды в отдельности содержится в 200 г молочного мороженого, если известно, что сахара в нем содержится на 11,5 % от всей массы мороженого больше, чем молочного жира?

495. В классе число отсутствующих учеников составляет 12,5 % от числа присутствующих. Если из класса выйдут еще два ученика, то будет отсутствовать 20% от числа учеников, оставшихся в классе. Сколько всего учеников учится в классе?

496. В начале учебного года в школе мальчиков и девочек было поровну. В течение первой четверти в школу было принято еще 15 девочек и 5 мальчиков, в результате число девочек уже составляло 51 %

¹ Количество белка и минеральных солей, входящих в мороженое, весьма незначительно и не учитывается.

от числа всех учащихся. Сколько было девочек и сколько мальчиков в начале учебного года?

497. Шестиклассники решили совершить лыжный поход. Первоначально девочек было 25 % от числа всех участников. Но одна девочка не пришла, а вместо нее пришел один мальчик, и тогда уже число девочек составило только 20 % от числа всех участников. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в лыжном походе?

498. Для учащихся организовали экскурсию в Брестскую крепость. Предполагалось, что девочек будет 25 % от числа мальчиков. Одна девочка не пришла, и вместо нее взяли мальчика, в результате чего число девочек составило только 20 % от числа мальчиков. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в этой поездке?

499. В спортивном лагере число девочек составляло 15 % от числа мальчиков. Когда группа мальчиков в 20 человек уехала на соревнования, то число девочек составило уже 20 % от числа оставшихся мальчиков. Определите, сколько девочек и сколько мальчиков было в лагере.

500. В забеге на длинную дистанцию участвуют 2 спортсмена. У одного из них шаг на 20 % короче, чем у другого, но он делает на 20 % больше шагов, чем второй за такое же время. Кто из этих спортсменов первым будет на финише?

501. В 150 г раствора содержится 1 % соли. Сколько воды требуется испарить, чтобы получить 6%-ный раствор?

502. Объем строительных работ в городе в предстоящем году увеличится на 30 %, а производительность труда строителей будет увеличена на 10 %. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих?

ГЛАВА VI. ЛОГИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ

21. Необходимость и достаточность

Решение простейшей задачи или примера и самые сложные расчеты и доказательства в математике начинаются с изучения заданных величин или условий. Важнейшими из них являются так называемые необходимые и достаточные условия. Здесь мы познако-

мимся с сущностью этих условий и научимся правильно употреблять эти термины.

Рассмотрим вначале несколько не математических утверждений, а фактов из обыденной жизни, связанных с употреблением слов «необходимо» и «достаточно».

Чтобы на привале во время похода сварить суп, нужно обязательно иметь воду. Здесь вполне можно употребить слово «необходимо», то есть сказать так: «Чтобы сварить суп, необходимо иметь воду». Слово «достаточно» в данном случае не подходит по смыслу, ибо наличие воды явно недостаточно, чтобы сварить суп, нужны еще и продукты.

Или возьмем такое утверждение: «Чтобы поступить в высшее учебное заведение, ... иметь среднее образование».

В этом предложении вместо многоточия можно поставить только слово «необходимо». Действительно, без документа о среднем образовании ни в одно высшее учебное заведение не принимают, значит, обязательно нужно иметь среднее образование. Но этого недостаточно, так как нужно еще выдержать конкурсные вступительные экзамены.

Рассмотрим еще пример, который, надеемся, также будет понятен каждому из вас: «Чтобы земля на школьных грядках была мокрой, ..., чтобы прошел дождь».

Если вместо многоточия поставим слово «необходимо», то получим неверное, ошибочное утверждение. Ведь совсем не обязательно, чтобы прошел дождь. Земля на грядках может быть мокрой и после недавней поливки.

Но если дождь действительно пройдет, то этого будет вполне достаточно для того, чтобы земля на грядках стала мокрой.

Эти примеры показывают, что иногда из двух слов «необходимо» и «достаточно» подходит лишь одно. Но нередко они могут подходить оба. Например: «В нашей стране, чтобы поступить учиться в десятый класс, необходимо и достаточно окончить неполную среднюю школу».

Действительно, если человек не окончил 9 классов, то его не примут в X класс. Значит, окончание неполной средней школы является обязательным и необходимым условием для поступления в X класс.

С другой стороны, в нашей стране каждый человек, окончивший неполную среднюю школу, имеет право на обучение в X классе. Значит, окончание неполной средней школы является и достаточным условием для поступления в X класс.

Таким образом, запомним:

если некоторое событие или факт обязательно имеет место при определенном условии, то это условие является достаточным;

если некоторое событие или факт не может иметь места без определенного условия, то такое условие является необходимым.

Учитывая большое значение необходимых и достаточных условий в математике, рассмотрим детально еще несколько математических утверждений.

1. Для того чтобы число делилось на 4, ..., чтобы оно было четным.

В этом утверждении четность является необходимым, но недостаточным условием.

Действительно, если число делится на 4, то оно обязательно делится и на 2, то есть будет четным. Иными словами, если число нечетное, то оно не может делиться на 4.

С другой стороны, существуют четные числа, например 2, 6, 10 и т. п., которые не делятся на 4, то есть четность числа не является достаточным условием для делимости на 4.

Следовательно, чтобы получилось справедливое утверждение, вместо многоточия нужно поставить слово «необходимо».

2. Чтобы число делилось на 3, ..., чтобы оно делилось на 9.

Слово «необходимо» здесь не подходит, ибо число может не делиться на 9, но делиться на 3, как например 6, 15 и т. п.

Но если число делится на 9, то этого вполне достаточно, чтобы быть уверенным, что оно разделится и на 3.

Следовательно, чтобы получить справедливое утверждение, вместо многоточия нужно поставить слово «достаточно».

3. Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы оно оканчивалось нулем.

Вы знаете, что если число оканчивается нулем, то оно делится на 10, и наоборот, если оно делится на

10, то оно оканчивается нулем. Следовательно, здесь подходят оба слова: «необходимо» и «достаточно».

Выражение «необходимо» и «достаточно» часто заменяют другими выражениями: «тогда и только тогда»; «те и только те».

Подведем итог всему сказанному. В примерах фигурировали различные свойства, но в каждом примере было два определенных свойства, таких, что наличие или отсутствие одного из них зависело от второго свойства. Для сокращения записей выводов условимся обозначать эти свойства латинскими буквами *A* и *B*.

I. Если из наличия свойства *A* следует свойство *B*, то условие *A* является **достаточным** для существования *B*.

При этом если свойство *A* является только достаточным, то есть не необходимым условием существования *B*, то это значит, что наличие *A* гарантирует существование *B*, но *B* может существовать и без *A*.

Чтобы установить, что некоторое условие *A* не является необходимым для существования *B*, можно привести хотя бы один такой пример, когда *B* имеет место, хотя *A* отсутствует.

II. Если свойство *B* имеет место только при наличии *A*, иными словами без *A* нет и *B*, то условие *A* является **необходимым** для существования *B*.

При этом если *A* является необходимым, но недостаточным условием существования *B*, то это значит, что без наличия свойства *A* не существует свойство *B*, но *B* может и не иметь места, хотя *A* существует.

III. Если из наличия условия *A* следует существование *B*, а без *A* не может быть и *B*, то условие *A* является **необходимым и достаточным** для существования *B*.

В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо» или «достаточно», а где можно — «необходимо и достаточно» так, чтобы получились справедливые утверждения.

503. Чтобы в магазине купить книгу, ... иметь деньги.

504. Чтобы играть в хоккей, ... иметь клюшку.

505. Чтобы поступить в техникум, ... окончить неполную среднюю школу.

506. Чтобы участвовать в финальных соревнова-

ниях на приз «Кожаный мяч», ... быть победителем областного розыгрыша этого приза.

507. Чтобы произведение двух чисел равнялось нулю, ..., чтобы каждое из них равнялось нулю.

508. Чтобы произведение двух чисел равнялось нулю, ..., чтобы хоть одно из них равнялось нулю.

509. Чтобы умножить сумму нескольких чисел на какое-нибудь число, ... каждое слагаемое умножить на это число и произведения сложить.

510. Чтобы произведение нескольких чисел разделить на какое-нибудь число, ... разделить на это число только один из сомножителей, и полученное частное умножить на остальные сомножители.

511. Для того чтобы сумма двух чисел была числом четным, ..., чтобы каждое из слагаемых было четным числом.

Замечание. В этом и в последующих упражнениях имеются в виду только целые числа, причем в десятичной системе, если не указана другая система счисления.

512. Для того чтобы сумма двух чисел делилась на некоторое число, ..., чтобы каждое слагаемое делилось на это число.

513. Если из двух слагаемых одно делится на какое-либо число, то для того чтобы их сумма делилась на это число, ..., чтобы другое слагаемое делилось на это число.

514. Чтобы сумма трех чисел была числом нечетным, ..., чтобы хоть одно из них было числом нечетным.

515. 1) Чтобы произведение двух чисел делилось на некоторое число, ..., чтобы хоть одно из них делилось на это число.

2) Чтобы произведение двух чисел делилось на некоторое простое число, ..., чтобы каждое из них делилось на это простое число.

3) Чтобы произведение двух чисел делилось на некоторое простое число, ..., чтобы, по крайней мере, одно из них делилось на это простое число.

516. 1) Чтобы произведение двух чисел было числом четным, ..., чтобы каждое из них было числом четным.

2) Чтобы произведение двух чисел было числом нечетным, ..., чтобы каждое из них было числом нечетным.

3) Чтобы произведение двух чисел было числом четным, ..., чтобы хоть одно из них было числом четным.

517. 1) Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы оно делилось на 5.

2) Для того чтобы число было четным, ..., чтобы оно делилось на 4.

3) Для того чтобы число делилось на 6, ..., чтобы оно делилось на 2 и на 3.

4) Для того чтобы число делилось на 12, ..., чтобы оно делилось на 2 и на 3.

5) Для того чтобы число делилось на 30, ..., чтобы оно делилось на 3 и на 10.

6) Для того чтобы число делилось на 60, ..., чтобы оно делилось на 6 и на 10.

7) Для того чтобы число делилось на 3, ..., чтобы оно делилось на 15.

8) Для того чтобы число делилось на 5, ..., чтобы оно делилось на 15.

9) Для того чтобы число делилось на 3 и на 5, ..., чтобы оно делилось на 15.

518. Для того чтобы число не делилось на 6, ..., чтобы оно не делилось на 3.

519. Чтобы четырехугольник был квадратом, ..., чтобы все его стороны были равны.

520. Чтобы прямоугольник был квадратом, ..., чтобы все его стороны были равны.

521. Чтобы периметр квадрата был равен 20 см, ..., чтобы его сторона была равна 5 см.

522. Чтобы площадь прямоугольника была равна 48 см^2 , ..., чтобы его длина была 24 см, а ширина 2 см.

523. Чтобы объем куба был равен 27 см^3 , ..., чтобы его ребро было равно 3 см.

524. Чтобы поверхность куба была равна 24 см^2 , ..., чтобы его ребро было равно 2 см.

525. Чтобы объем прямоугольного параллелепипеда был равен 30 см^3 , ..., чтобы его размеры были $2 \times 3 \times 5 \text{ см}$.

526. Чтобы прямоугольный параллелепипед был кубом, ..., чтобы все его боковые грани были равны.

527. Чтобы прямоугольный параллелепипед был кубом, ..., чтобы все шесть его граней были квадратами.

528. Чтобы прямоугольный параллелепипед был кубом, ..., чтобы все шесть его граней были равны между собой.

529. Чтобы на чашечных весах взвесить любой груз, масса которого равна целому числу килограммов

и не превышает 40 кг, ... иметь шесть гирь в 1, 2, 4, 8, 16 и 32 кг.

530. Вы знаете, что число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его делится на 9.

Это утверждение можно выразить и так:

Для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его делилась на 9.

Какое из выражений: «тогда» или «только тогда» обозначает необходимость, а какое — достаточность?

531. Каждое из следующих утверждений разбейте на два отдельных утверждения, чтобы одно выражало необходимость, а другое — достаточность, формулируя утверждения по схеме: если ..., то

а) Для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось нулем.

Решение. Утверждение «Если число оканчивается нулем, то оно делится на 10» выражает достаточность условия: число оканчивается нулем. Утверждение «Если число делится на 10, то оно оканчивается нулем» выражает необходимость того же условия.

б) Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его делилась на 3.

в) Для того чтобы произведение двух целых чисел было четным, необходимо и достаточно, чтобы хоть один из сомножителей был четным.

22. Построение отрицания

При решении многих задач вы неоднократно уже пользовались отрицанием несложных утверждений. Например, если утверждение «Вадим изучает английский язык» неверно, ложно, то его заменяли таким: «Вадим не изучает английский язык».

Измените таким же образом следующие утверждения.

532. Неверно, что:

а) Город Нью-Йорк является столицей США.

б) Число 1 есть простое число.

в) Число 1 есть составное число.

г) Число $2^{2^3} + 1$ есть составное число.

д) Число $2^{2^5} + 1$ есть простое число.

е) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ есть составное число.

ж) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ есть простое число.

533. Неверно, что:

а) Число 3 не является делителем числа 1980.

б) Книга «Реши сам» написана не для любителей математики.

534. При решении одного примера Коля и Петя установили, что неравенство $a < 0$ не имеет места. Коля сделал вывод, что a — число положительное, а Петя утверждал, что a — неотрицательное число. Кто из них прав? Какому неравенству удовлетворяет число a ?

535. Запишите, какому неравенству удовлетворяет число x , если известно, что это число не удовлетворяет следующему неравенству:

а) $x < 3$; б) $x \leq 2$; в) $0 \leq x < 2$; г) $|x| > 1$.

536. Какие из следующих высказываний истинны:

а) $3 < 5$, $3 = 5$, $3 \leq 5$;

б) $-2 > -5$, $-2 = -5$, $-2 \geq -5$;

в) $3 < 3$, $3 > 3$, $3 \leq 3$, $3 \geq 3$?

537. На одном из занятий кружка с шестиклассниками рассматривали, как переносить отрицание всего предложения в середину этого предложения.

Вначале учитель предлагал простые задачи такого типа. Из любого предложения при помощи выражения «неверно, что» (короче «не»), поставленного перед этим предложением, он получал отрицание. Учащиеся должны были это отрицание всего предложения рассматривать как отрицание внутри предложения.

Например, отрицание «Неверно, что Толя навестит Сашу» заменяли предложением: «Толя не навестит Сашу». Предложение «Неверно, что Сережа не придет на занятия математического кружка» заменяли таким: «Сережа придет на занятия математического кружка».

Но когда учитель прочел предложение «Неверно, что Коля решил все шесть задач, предложенных на городской олимпиаде», то мнения шестиклассников разделились. Одни утверждали, что это означает: «Коля не решил все шесть задач, предложенных на городской олимпиаде», а другие утверждали, что надо говорить так: «Коля решил не все шесть задач, предложенных на городской олимпиаде».

А как вы думаете, какое из этих утверждений правильное?

538. На занятиях кружка учитель рассказал забавную историю: «Один француз, по имени Жан, сказал, что все французы лгут. Требуется выяснить, правда это или ложь».

Если считать, что утверждение Жана правильно: «Все французы лгут», то и он, как француз, лжет. Значит, такое утверждение верным быть не может.

Предположим, что Жан лжет, значит, «неверно, что все французы лгут». Но тогда верным будет: «Все французы не лгут». А Жан ведь тоже француз, значит, он тоже говорит правду. Вновь получили, что Жан не может лгать».

Ученикам было предложено разобраться дома самим, говорит Жан правду или ложь, и выяснить, где в рассуждении учителя допущена ошибка.

Разберитесь теперь и вы в этом задании.

Решая предыдущие задачи, вы видели, что при построении отрицаний утверждений слова «все», «каждый», «любой» можно заменить словами «некоторый», «есть», «существует» и наоборот. Например, утверждение «Неверно, что любое число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4» можно сформулировать так: «Существует число, оканчивающееся цифрой 4, которое не делится на 4».

Утверждение «Неверно, что некоторые числа, оканчивающиеся цифрой 2, являются квадратами натуральных чисел» может быть сформулировано так: «Любое число, оканчивающееся цифрой 2, не является квадратом натурального числа».

Сформулируйте подобным образом следующие утверждения.

539. Неверно, что:

а) Некоторые натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.

б) При любом a неравенство $2x^2 + a^2 > 0$ верно для всех x .

в) При любых p и q сумма корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ не равна свободному члену q .

г) При любых p и q сумма корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна свободному члену q .

д) В некотором поезде, идущем из Минска в Москву, в каждом вагоне есть свободное место.

е) Если произведение двух чисел делится на некоторое число, то хотя бы одно из них делится на это число.

ж) Если две прямые параллельны, то они не имеют общих точек.

23. Применение графов к решению логических задач

Решите несколько задач, подобных тем, что вы решали в первой части.

540. В ящике лежат 40 шаров различного цвета: 17 зеленых, 12 синих, 5 красных; остальные 6 шаров окрашены в белый и черный цвета. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть, не заглядывая в ящик, чтобы среди вынутых шаров оказалось:

- а) не менее 6 шаров одного цвета?
- б) хотя бы 1 зеленый шар?
- в) хотя бы 2 синих шара?

541. На столе поставлены в ряд бутылка минеральной воды, кружка, чашка, стакан и кувшин, причем точно в таком порядке, в каком они перечислены. В них находятся различные напитки: кофе, чай, молоко, квас и минеральная вода, но неизвестно, какой напиток в какой посуде. Если стакан поставить между чаем и молоком, то по соседству с молоком будет квас, а кофе будет точно в середине. Определите, в какую посуду что налито.

542. (Шутка.) На столе в ряд стоят 6 стаканов, первых 3 с напитком, а потом 3 пустых (рис. 41). Требуется расположить их так, чтобы стаканы с напитком и пустые стаканы чередовались через один, причем разрешается брать в руки только один стакан.

543. Докажите, что если из числа всех отличников в классе вычесть число тех отличников, которые не являются спортсменами, то получим тот же результат (то же число человек), если бы от числа всех спортсменов вычли число тех спортсменов, которые не являются отличниками.

544. Сереже вдвое больше лет, чем будет Саше, когда Толе исполнится столько лет, сколько лет Сереже сейчас. Кто из мальчиков старший, кто младший, кто средний по возрасту?

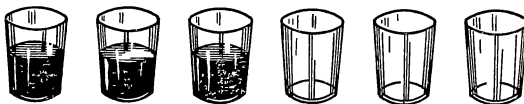


Рис. 41

545. Леня, Дима, Коля и Алик подсчитывали свой улов. В результате выяснилось следующее:

Алик поймал рыбы больше, чем Коля. Леня и Дима вместе поймали столько же рыбы, сколько поймали Коля и Алик. Леня и Алик вместе поймали меньше рыбы, чем Дима и Коля.

Как распределились между рыбаками места по количеству выловленной рыбы?

546. Стрелковое подразделение построили в колонну. В каждой шеренге нашли самого высокого солдата и из этих самых высоких выбрали самого низкого, обозначим его *А*. Потом в каждом ряду нашли самого низкого солдата и из этих самых низких выбрали самого высокого, *Б*. Кто из солдат выше: *А* или *Б*?

547. Три мальчика нашли в море старинный сосуд — амфору. Один сказал, что амфору изготовили финикийцы в V в. до н. э., второй — что ее изготовили греки в III в. до н. э., а третий сказал, что она не греческая, а изготовлена в IV в. до н. э.

Пошли они к учителю и попросили разрешить их спор. Тот оглядел амфору и сказал, что каждый из них прав только наполовину, то есть у каждого мальчика одно утверждение верное, другое — неверное. Требуется узнать, в каком веке и кем изготовлена амфора.

548. Три ученика нашей школы — *А*, *Б* и *В* — должны были принимать участие в областной математической олимпиаде. При обсуждении того, кто из них может оказаться победителем, были высказаны такие мнения: а) *А* и *Б*; б) *А* и *В*; в) *Б*, но не *В*.

Оказалось, что двое получили дипломы победителей. Кто из них стал победителем олимпиады, если из трех предположений полностью оправдалось лишь одно, другое — частично, а третье — полностью оказалось ложным?

549. Три одноклассника — Алеша, Вася и Сережа — занимались во Дворце культуры в разных кружках: танцевальном, хоровом и драматическом. На вопрос, кто в каком кружке занимается, они ответили:

Алеша: Я — в танцевальном.

Вася: Я — не в танцевальном.

Сережа: Я — не в хоровом.

В каком кружке занимается каждый из них, учитывая, что двое солгали, а один сказал правду?

550. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в дет-

ской спортивной школе в разных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Петя, Дима и волейболист занимаются в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

551. На съезде встретились четверо ученых: физик, биолог, историк и математик. Они были разных национальностей, и хотя каждый из ученых владел двумя языками из четырех (русский, английский, французский и итальянский), не было такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером, и был только один язык, на котором могли бы разговаривать сразу трое. Никто из ученых не владел французским и итальянским одновременно. Хотя физик не мог говорить по-английски, но он был переводчиком в разговоре биолога и историка. Историк говорил по-итальянски, но мог говорить по-русски с математиком, ибо тот не знал ни одного итальянского слова. Физик, биолог и математик не могли беседовать втроем на одном языке. Какими двумя языками владел каждый из ученых?

552. Каждому из шести ученых — назовем их *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е* — на корабле была отведена отдельная каюта. Двое из них были москвичи, а двое других — *Д* и тот, кто находился в каюте № 5, — были из Минска. *Г* находился рядом с каютой № 2. Обитатель каюты № 3 и *А* были из Киева. *В* разместился рядом со своим земляком, который жил в каюте № 6, а с другой стороны от него находились каюты киевлян. Земляк киевлянина *Е* в своей каюте № 4 оборудовал фотолабораторию. Кто из ученых находился в какой каюте?

553. Однажды в самолете встретились три человека — назовем их *А*, *В* и *С* — из Минска, Киева и Вильнюса. Один из них увлекался литературой, другой — живописью, а третий был заядлым театралом. Минчанин предпочитает телевизор книге, киевлянин не пропускает ни одной театральной премьеры. *В* не любит посещать картинные галереи. Определите, чем увлекается *С* и из какого он города, если известно, что *А* живет не в Минске.

554. В одном селе живут три школьника: Саша, Коля и Петя, которые осваивают сельскохозяйствен-

ные профессии. Один из них готовится стать трактористом, другой — садоводом, третий — комбайнером. Кроме того, все они имеют и общественную профессию: один — киномеханик, другой — руководитель драмкружка, третий работает на радиоузле.

В разное время ими были сказаны следующие фразы:

1) Петя, ты меня не жди, я должен осмотреть свой комбайн, ведь скоро начнется уборка.

2) Эх, Коля, радиосхемы — сложная, но интересная вещь.

3) Завтра, Коля, не приходи ко мне, я буду регулировать работу молотилки.

4) На днях я получу кинокартину «Мичурин». Для тебя, как для будущего садовода, она будет интересной и полезной.

5) Наблюдал я вчера за тобой во время репетиции и подумал, что тебе поставить пьесу не легче, чем мне вывести новый сорт яблок.

6) С применением ламп в кино я совершенно не знаком, сам понимаешь, на тракторе «Беларусь» таких нет.

Попробуйте по этим фразам установить, кто из друзей какую сельскохозяйственную профессию осваивает и какая у него общественная профессия.

Некоторые логические задачи целесообразно решать графически, используя геометрическую иллюстрацию. Рассмотрим для примера задачу.

555. На научной конференции встретились 6 ученых. Оказалось, что среди них не было трех человек, которые до этого были бы знакомы друг с другом. Докажите, что среди этих шести человек есть хотя бы одна группа из трех человек, которые не знакомы друг с другом.

Решение. Условимся обозначать ученых точками и соединять эти точки сплошными отрезками, если ученые знакомы, и штриховыми, если они не знакомы.

Рассмотрим одну из точек, например A (рис. 42). Из нее исходят пять отрезков, значит, хотя бы три из них будут одинаковыми. Пусть отрезки AB , AG и AD — сплошные. Тогда отрезки DB , DG и GB обязательно будут штриховыми, ибо не может быть трех человек, которые были бы знакомы друг с другом (на рисунке не может быть треугольника, все стороны

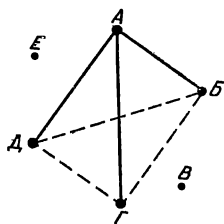


Рис. 42

которого — сплошные отрезки). Но это и значит, что B , Γ и D — не знакомы друг с другом.

Рассмотрите случай, когда из точки A исходят три штриховых отрезка. Вновь получите треугольник с тремя штриховыми сторонами, так как треугольника со сплошными сторонами быть не может.

Этим же приемом решите следующие задачи.

556. В одном купе ехали четыре человека. Среди них не было трех человек, которые прежде были бы знакомы друг с другом, хотя один был знаком с тремя остальными.

Докажите, что три остальных пассажира прежде не были знакомы друг с другом.

557. В спортивном лагере подружились пять девочек. Среди них не было трех таких, которые прежде были бы знакомы друг с другом. Одна из девочек была знакома с троими. Докажите, что среди них есть, по крайней мере, одна группа из трех девочек, которые до лагеря не были знакомы друг с другом.

558. На торговой выставке встретились 6 представителей разных стран. Выяснилось, что среди любых троих двое могут объясниться друг с другом. Докажите, что найдутся таких 3 человека, что каждый из них может объясниться с двумя другими.

559. Каждый из шести ученых переписывается с пятью остальными. В их переписке речь идет о двух научных темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются между собой по одной и той же теме.

При решении задач № 555—559 применялись схематические рисунки. Схемы, состоящие из точек (прямоугольников) и отрезков (дуг кривых), их соединяющих, называются графом решения задачи. Точки называются элементами или вершинами графа, а отрезки — связями или ребрами графа. Иногда вместо сплошных и штриховых линий для большей

наглядности удобно применять разноцветные линии.

Впервые графы появились в связи с играми и развлечениями. Первая работа по теории графов, написанная петербургским академиком Леонардом Эйлером, появилась в 1736 г. В ней рассматривалась одна математическая головоломка — так называемая «задача о кенигсбергских мостах» (см. с. 151), для решения которой Л. Эйлер и создал эту теорию. Впоследствии графы нашли применение в решении многих важных задач практики, например при планировании наиболее рациональной схемы перевозки грузов, в задачах о потоках в сети нефтепроводов и т. п. В настоящее время теория графов применяется в экономике, психологии, биологии и других науках.

Графы можно применять и при решении задач, которые мы решали методом исключения с применением таблиц. Рассмотрим задачу, в которой для удобства некоторые условия занумерованы.

560. В начале учебного года пятиклассники избрали старосту, председателя совета отряда и звеньевых первого, второго и третьего звеньев. Их имена: Аня, Боря, Вася, Гриша и Дина. 1) Звеньевая первого звена решила подружиться со звеньевой второго звена. 2) Дина удивилась, узнав, что председатель совета отряда и звеньевая второго звена брат и сестра. 3) Гриша дружит с председателем совета отряда и со старостой. 4) У Васи нет сестер. Назовите имена каждого из избранных.

Методом исключения с применением таблиц можно установить (сделайте это!), что Вася — староста, Боря — председатель совета отряда, Дина — звеньевая первого звена, Аня — второго и Гриша — третьего. Приведем решение с использованием графа.

В этой задаче два вида элементов: 5 пятиклассников и 5 должностей, так что множество вершин графа удобно рассматривать как два таких множества, что никакие две вершины из одного и того же множества не соединены между собой ребрами. По условию задачи каждая вершина одного множества должна быть соединена с одной из вершин другого множества, и только с одной. Если M избран на должность P , то условимся точки M и P соединять сплошным отрезком, а при отрицании — штриховым. Точки обозначим

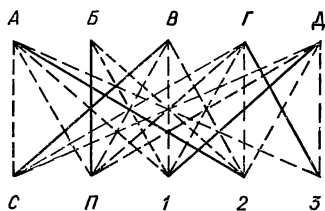


Рис. 43

первыми буквами имен и должностей. Для удобства точки расположим следующим образом:

<i>A</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>Д</i>
.
.
<i>С</i>	<i>П</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>

Из условия (1) следует, что мальчики *Б*, *В* и *Г* не являются звеньевыми 1-го или 2-го звена, так что отрезки *Б1*, *Б2*, *В1*, *В2*, *Г1* и *Г2* должны быть штриховыми. Из условия (2) следует, что Дина не председатель совета отряда и не звеньевая 2-го звена, причем председатель совета отряда — мальчик, поэтому строим штриховые отрезки *ДП*, *Д2* и *АП*. В результате вершина 2 соединена с четырьмя точками штриховыми линиями, следовательно, с точкой *А* она должна быть соединена сплошным отрезком, т. е. звеньевой 2-го звена избрана Аня. Тогда отрезки *АС*, *А1* и *А3* — штриховые. Теперь определяем, что отрезок *Д1* — сплошной, а *ДС* и *Д3* — штриховые. Из условия (3) получаем, что отрезки *ГП* и *ГС* должны быть штриховыми, а значит, отрезок *Г3* как пятый отрезок, соединяющий точку *Г*, при четырех других штриховых, будет сплошным. Для *Б* и *В* остаются две должности *С* и *П*, но по условию (4) с учетом условия (2) Вася — не председатель совета отряда. В результате получили так называемый двудольный граф (рис. 43).

Решите еще раз задачи № 550—554, но теперь уже с использованием графов.

ГЛАВА VII. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

24. Математические игры и софизмы

В этом параграфе вы познакомитесь с некоторыми математическими играми. Это задачи, в которых требуется найти определенную закономерность, знание которой позволяет одному из играющих всегда выигрывать. При этом надо помнить, что ваш расчет не должен зависеть от случайных ошибок противника, так что всегда нужно рассматривать самый неблагоприятный для себя случай.

Предлагаемые игры сравнительно просты по математическому содержанию, причем они таковы, что каждый из вас сможет играть в них и один. Главное — найти способ, приводящий к выигрышу. В большинстве случаев начинающий игру первым же ходом может обеспечить себе победу.

561. Двое играют в такую игру: первый называет любое число от 1 до 10 включительно, второй прибавляет к нему еще какое-нибудь число, не большее десяти, и называет сумму; к этой сумме первый прибавляет снова какое-нибудь число от 1 до 10, опять называет сумму и так далее. Выигрывает тот, кто первым назовет число 100.

Какие числа должен называть первый, чтобы независимо от ходов второго выиграть?

Решение. Для отыскания решения удобно начинать рассуждения с конца. Очевидно, что первый предпоследним числом должен называть $89 = 100 - (10 + 1)$. Только в этом случае, какое бы число ни назвал второй, получить 100 он не сможет. Заменяя теперь первоначальное число 100 на 89, получим, что

первый перед этим ходом должен назвать обязательно число $89 - (10 + 1) = 78$, ибо в противном случае второй сможет выиграть. Рассуждая аналогично и далее, получим для первого следующий ряд чисел, всегда приводящих к выигрышу: 100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 и 1.

Заметим, что, если первый хотя бы один раз отклонится от этого ряда чисел, второй может перехватить инициативу и выиграть.

562. Рассмотрите еще один частный случай этой игры. Каждый играющий может называть числа от 1 до 9 включительно. Выиграет тот, кто первым назовет число 100. Кто в этом случае при правильной игре может всегда выиграть?

563. Теперь рассмотрите общий случай этой игры.

Играют двое: первый называет натуральное число от 1 до p включительно; второй прибавляет к нему еще какое-нибудь натуральное число, не большее p , и называет сумму; к этой сумме первый вновь прибавляет натуральное число, не большее p , и называет сумму и так далее. Выигрывает тот, кто первым назовет натуральное число n .

Определите, в каком случае всегда может выиграть первый, а в каком — второй.

564. Как надо поступать каждому из играющих, если в предыдущей игре (задача № 563) условиться, что тот, кто первым назовет число, не меньшее n , проигрывает?

Указание. Вначале рассмотрите эту задачу с числовыми данными, приведенными в задаче № 562.

565. 1) Возьмите 18 спичек, разложите их на столе и проведите с товарищем такую игру. Каждый из двух играющих по очереди берет спички. За один раз можно брать одну, две, три или четыре спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Рассчитайте, сколько спичек должен брать начинающий игру, чтобы всегда выиграть.

2) Рассмотрите эту же игру, если первоначально было взято 25 спичек.

566. Обобщим предыдущую задачу.

Из кучки в m спичек A и B берут поочередно спички, но не более p спичек за один раз. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Рассчитайте ходы противников, ведущие к выигрышу.

567. Рассмотрите задачу № 566 при условии, что

выигрывает тот, кто заставит противника взять последнюю спичку.

568. Из двух кучек, в которых содержится соответственно m и n спичек, A и B берут поочередно спички. Из любой одной кучки разрешается брать любое число спичек, а если брать из двух кучек, то обязательно поровну из каждой кучки. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку.

Указание. Рассмотрите несколько частных случаев, считая m равным 0, 1, 2 и 3, и выясните, когда, в зависимости от n , где $n \geq m$, выигрывает A , начинающий игру.

569. Двое играют в следующую игру. Вначале первый игрок называет какое-нибудь из чисел: 2, 1, —1, —2, —3, —4, —5, —6. Затем его партнер прибавляет к этому числу еще какое-нибудь число из этих восьми чисел. После этого первый игрок вновь выбирает какое-нибудь число (из указанных восьми) и прибавляет его к полученной ранее сумме и так далее. При этом все время нужно выбирать только положительные числа или только отрицательные. Победителем считается тот, кто первым назовет число, равное по абсолютной величине числу 50.

Например, если оба игрока выбрали отрицательные числа, игра может развиваться так:

1-й игрок	— 6	— 16	— 22	— 29	— 35	— 40	— 45
2-й игрок	— 12	— 21	— 28	— 33	— 36	— 43	— 50

Победил второй игрок.

Подумайте, существуют ли в этой игре такие правила, придерживаясь которых всегда можно выиграть. Кто победит при этом: игрок, делающий первый ход, или его партнер?

570. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. «Вот тебе меч-кладенец,— говорит ему Баба Яга.— Одним ударом ты можешь срубить Змею либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни только: срубишь голову — новая вырастет, срубишь хвост — два новых вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет. Срубишь две головы — ничего не вырастет».

За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею все головы и все хвосты?

Софизмом называется умышленное ложное умозаключение, которое имеет видимость правильного.

Обычно в математических софизмах скрыто выполняются запрещенные действия или не учитываются условия применимости правил, формул или теорем. Весьма интересно найти ошибку в рассуждении, которая приводит к абсурдному выводу, причем, как вы убедитесь позже, это не всегда просто и легко сделать.

Рассмотрим вначале несколько простейших примеров софизмов с подробными разъяснениями.

571. Докажем, что $5 = 6$.

Легко проверить справедливость равенства

$$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54,$$

которое можно записать так:

$$5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9).$$

(Вынесли общий множитель за скобки.) Мы видим, что произведения равны и вторые сомножители равны, значит, и первые сомножители равны: $5 = 6$.

Объяснение. Ошибка в наших рассуждениях состоит в том, что мы сделали вывод о равенстве первых сомножителей у равных произведений при условии равенства вторых сомножителей, что не всегда верно. Такое утверждение верно лишь тогда, когда эти равные вторые сомножители отличны от нуля и мы можем обе части равенства разделить на это число. В случае же нуля всегда $a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$ при любых a и b , так что не обязательно, чтобы $a = b$.

572. А вот «доказательство» того, что $4 = 5$.

Возьмем два числа $a = 4$ и $b = 5$, их полусумму обозначим через $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда $a = 2c - b$ и $2c - a = b$. Перемножим эти равенства почленно, получим: $a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$. Прибавим к обеим частям по c^2 , будем иметь: $a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$ или $(a - c)^2 = (b - c)^2$. Значит, $a - c = b - c$, откуда $a = b$, то есть $4 = 5$.

Объяснение. Если квадраты чисел равны, то

сами числа не обязательно равны, они могут быть и противоположными. Поэтому равенство $a - c = b - c$ неверно, должно быть $c - a = b - c$ или $a - c = c - b$.

В последующих примерах этого параграфа самостоятельно найдите ошибки в приведенных «доказательствах».

573. Известно, что $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, каковы бы ни были числа a и b . Взяв $b = a$, будем иметь: $a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$ или $a(a - a) = (a + a)(a - a)$. В обеих частях равенства имеем равные сомножители $a - a$, поэтому $a = a + a$ или $a = 2a$, откуда $\frac{a}{2} = a$, то есть половина равна целому.

574. Возьмем произвольное положительное число b и число a , в полтора раза большее b . Тогда $a = 1,5b$, поэтому $10a = 15b$ и $14a = 21b$, откуда $14a - 10a = 21b - 15b$ или $15b - 10a = 21b - 14a$, значит, $5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$.

Сокращая на $3b - 2a$, получим, что $5 = 7$.

575. Пусть $x = 5$, а $y = 4$, тогда $x + y = 9$. Умножим обе части равенства на $x - y$, получим: $x^2 - y^2 = 9x - 9y$ или $x^2 - 9x = y^2 - 9y$. Прибавим к обеим частям равенства по $\frac{81}{4}$, будем иметь: $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{9}{2}\right)^2$, откуда $x - \frac{9}{2} = y - \frac{9}{2}$, значит, $x = y$, то есть $5 = 4$.

576. На одном из заседаний математического кружка, посвященном алгебраическим софизмам, Коля взялся «доказать», что все числа равны между собой. Так как это весьма невероятный факт, то он привел три доказательства. Разберитесь в них.

1) Пусть a и b — любые два числа, причем $a > b$. Обозначим $a - b = c$, где c — положительное число. Значит, $a = b + c$. Умножим обе части этого равенства на положительное число $a - b$ и преобразуем полученные выражения: $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$; $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$; $a(a - b - c) = b(a - b - c)$.

Разделив обе части этого равенства на одно и то же число $a - b - c$, получим, что $a = b$.

2) Пусть по-прежнему a и b — любые числа. Обозначим их среднее арифметическое через c , значит,

$c = \frac{a+b}{2}$, откуда $2c - a = b$ и $a = 2c - b$. Перемножим эти равенства почленно: $2ac - a^2 = 2bc - b^2$. Прибавим к обеим частям по $-c^2$, получим: $-c^2 + 2ac - a^2 = -c^2 + 2bc - b^2$; $-(c-a)^2 = -(c-b)^2$.

Умножив обе части равенства на -1 , найдем, что $(c-a)^2 = (c-b)^2$, значит, $c-a = c-b$ или $-a = -b$, поэтому $a = b$. Но так как a и b — произвольные числа, то этим мы и доказали, что все числа равны.

3) Очевидно, что $3 - 1 = 6 - 4$. Умножим обе части на -1 и прибавим к обеим частям равенства по $\frac{9}{4}$, получим: $1 - 3 = 4 - 6$; $1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = 4 - 2 \cdot 2 \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$; $\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$, откуда $1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$.

Следовательно, $1 = 2$. Но если $1 = 2$, то, прибавив к обеим частям этого равенства по 1 , получим, что $2 = 3$, а затем, что $3 = 4$, и так далее. Значит, $1 = 2 = 3 = 4 = \dots$

Члены кружка сразу указали на недочет в доказательстве: Коля обещал доказать равенство любых чисел, а доказал лишь равенство целых чисел.

Вам понравились эти доказательства? Вы согласны с Колей?

577. На следующем заседании математического кружка многие ребята выступили со своими «доказательствами» слишком неправдоподобных утверждений. Вот как, например, Петя доказал, что сумма любых двух положительных чисел равна нулю.

Пусть a и b — любые два положительных числа, тогда их сумма $c = a + b$ — число положительное. Умножим обе части этого равенства на $a + b$, получим: $c(a + b) = (a + b)^2$; $ac + bc = a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc = 0$. Разложим левую часть на множители:

$$\begin{aligned}(a^2 + ab - ac) + (ab + b^2 - bc) &= 0; \\ a(a + b - c) + b(a + b - c) &= 0.\end{aligned}$$

Сократив на $a + b - c$, получим $a + b = 0$.

578. Докажем, что ноль больше любого числа.

Если число a отрицательное, то утверждение очевидно.

Пусть a — сколь угодно большое положительное число. Ясно, что $a - 1 < a$. Умножив обе части неравенства почленно на $-a$, получим: $-a^2 + a < -a^2$.

Прибавив к обеим частям полученного неравенства по a^2 , получим: $-a^2 + a + a^2 < -a^2 + a^2$, то есть $a < 0$.

Следовательно, любое, даже сколь угодно большое положительное число меньше нуля.

579. А вот еще два «доказательства» того, что любое число равно нулю.

1) Возьмем произвольное число a и обозначим его половину через x , значит, $2x = a$. Умножим обе части на a , получим: $2ax = a^2$ или $a^2 - 2ax = 0$. Если к обеим частям полученного равенства прибавим x^2 , то получим $a^2 - 2ax + x^2 = x^2$ или $(a - x)^2 = x^2$. Это можно переписать так: $(x - a)^2 = x^2$. Следовательно, $x - a = x$, откуда $a = 0$.

2) Рассмотрим сумму:

$a - a + a - a + a - a + a - \dots$ и так до бесконечности.

Эту сумму можно представить двояко:

$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \dots = 0$ или

$a - (a - a) - (a - a) - (a - a) - \dots = a$.

Левые части равны, значит, равны и правые: $a = 0$.

580. Разберитесь еще в одном интересном «доказательстве» того, что $2 = 3$.

Возьмем любое число b и число $a = b + 1$. Умножим это равенство почленно на $a - b$, получим: $a^2 - ab = ab + a - b^2 - b$ или $a^2 + b^2 = 2ab + a - b$. Это равенство верно при любых a и b , лишь бы $a = b + 1$.

Подставим в него значения $a = 2$ и $b = 2$, получим: $4 + 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, то есть верное равенство. Значит, и исходное равенство $a = b + 1$ будет верным при $a = b = 2$. Таким образом, $2 = 2 + 1$.

В чем же здесь ошибка?

581. Есть интересное «доказательство» переместительного закона для сложения: $a + b = b + a$.

Предположим, что это свойство не имеет места. Следовательно, $a + b \neq b + a$ при любых a и b . Взяв $b = a$, получим: $a + a \neq a + a$, чего не может быть. Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение о несправедливости переместительного закона для сложения ложно, поэтому всегда должно быть $a + b = b + a$.

В этой задаче само утверждение верное, но доказательство ошибочное. Где в нем допущена ошибка?

25. Круги Эйлера

При решении некоторых задач целесообразно для схематического обозначения множеств применять так называемые круги Эйлера. Множество всех элементов, обладающих определенным свойством, изображают в виде круга. При рассмотрении двух и более множеств рисуем требуемое число кругов. Общая часть двух кругов соответствует элементам, которые обладают как свойствами элементов одного множества, так и свойствами элементов другого.

Пусть, например, A — множество отличников в вашем классе, а B — множество спортсменов в этом же классе. Тогда заштрихованная часть (рис. 44) изображает отличников, являющихся спортсменами, или, что тоже самое, спортсменов, которые занимаются на «5».

Иногда вместо кругов для изображения множеств применяют фигуры иной формы, овальной или прямоугольной (рис. 45). В таком случае уже говорят не о кругах Эйлера, а о диаграммах Венна.

Рассмотрим решение одной сравнительно сложной задачи.

582. В областной спартакиаде участвует школьная команда в 20 человек, каждый из которых имеет юношеский спортивный разряд по одному или нескольким из трех видов спорта: легкой атлетике, плаванию и гимнастике. Известно, что 12 из них имеют спортивные разряды по легкой атлетике, 10 — по гимнастике и 5 — по плаванию.

Сколько учеников из этой команды имеют разряды по всем трем видам спорта, если по легкой атлетике и плаванию разряды имеют 2 человека, по легкой

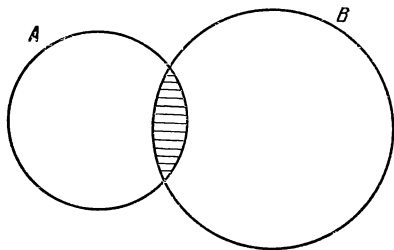


Рис. 44

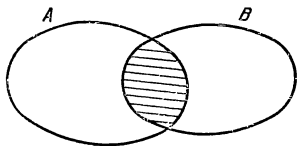


Рис. 45

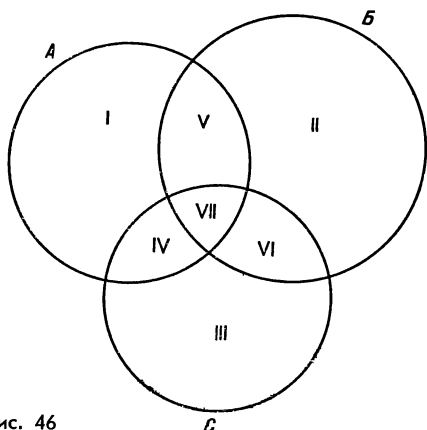


Рис. 46

атлетике и гимнастике — 4 человека, по плаванию и гимнастике — 2 человека?

Решение. Пусть круг A (рис. 46), состоящий из частей I, IV, V и VII, изображает учеников, имеющих разряды по легкой атлетике, круг B (II + V + VI + VII) — учеников, имеющих разряды по гимнастике, а круг C (III + IV + VI + VII) — учеников, имеющих разряды по плаванию.

Всего в команде 20 учеников, и так как в A — 12, в B — 10, а в их общей части (V + VII) — 4, то в части III, соответствующей ученикам, имеющим разряды только по плаванию, будет 2 человека ($20 - 12 - (10 - 4)$).

Аналогично находим, что разряды только по легкой атлетике имеют 7 человек и только по гимнастике — 5 человек. Значит, не менее чем по двум видам спорта разряды имеют $20 - (2 + 7 + 5) = 6$ (человек), что соответствует частям IV + V + VI + VII.

Из этих 6 человек $3 = 5 - 2$ имеют разряды по плаванию, но тогда только по легкой атлетике и гимнастике (часть V) имеют разряды 3 ученика. Таким же рассуждением находим, что только по гимнастике и плаванию имеет разряды 1 ученик, по легкой атлетике и плаванию — также 1 ученик.

Следовательно, по всем трем видам спорта разряды имеет 1 человек ($6 - 3 - 1 - 1$).

Используя круги Эйлера, решите следующие задачи.

583. Все 35 шестиклассников являются читателями школьной или районной библиотеки. Из них 25 берут книги в школьной библиотеке, 20 — в районной.

Сколько из них:

- а) не являются читателями школьной библиотеки?
- б) не являются читателями районной библиотеки?
- в) являются читателями только школьной библиотеки?
- г) являются читателями только районной библиотеки?
- д) являются читателями обеих библиотек?

584. В классе 14 мальчиков и 16 девочек. Каждый из них в свободное время посещает либо Дворец пионеров, либо пионерскую комнату при домоуправлении. Может ли быть так, что Дворец пионеров посещают 20 человек, а пионерскую комнату — 17?

585. Сколько в классе учащихся, если известно, что лыжным спортом увлекаются 28 человек, отличников в классе 12, причем отличников-спортсменов, увлекающихся лыжами, 10?

586. 37 выпускников средней школы из ученической производственной бригады изъявили желание летом работать на уборке зерновых. Каждый из них имеет права для работы на тракторе или на комбайне, а некоторые могут работать и на тракторе, и на комбайне. Сколько выпускников могут работать и на тракторе, и на комбайне, если известно, что трактором хорошо овладели 23, а комбайном — 31 человек?

587. В ученической производственной бригаде 86 старшеклассников. 8 из них не могут работать ни на тракторе, ни на комбайне. 54 ученика хорошо овладели трактором, 62 — комбайном. Сколько человек могут работать и на тракторе, и на комбайне?

588. Из 100 участников математического съезда 49 владеют русским языком, 46 — английским, 31 — немецким, 21 — русским и английским, 17 — английским и немецким, 13 — русским и немецким, 5 — всеми тремя языками. Сколько участников съезда не владеют ни одним из этих трех языков?

589. В районной математической олимпиаде участвовали 75 учащихся шестых классов. Им было предложено решить задачу по алгебре, задачу по геометрии и арифметический пример. С арифметическим примером справились 51 человек, задачу по геометрии решили 35, по алгебре — 40.

61 ученик выполнил задания по арифметике или алгебре, 60 — по арифметике или геометрии, 53 — по алгебре или геометрии, а 7 шестиклассников не выполнили правильно ни одного задания. Сколько участников олимпиады выполнили все три задания?

590. В классе 25 учеников. Из них 17 умеют ездить на велосипеде, 13 — плавать, а 8 — ходить на лыжах. Ни один из учеников не владеет тремя видами спорта. Все велосипедисты, пловцы и лыжники имеют по математике оценки «4» или «5». В классе 6 учеников имеют удовлетворительные оценки по математике. Сколько учеников не успевают по математике? Сколько пловцов умеют ходить на лыжах?

591. В классе 35 учеников, каждый из которых любит футбол, волейбол или баскетбол. 24 из них любят футбол, 18 — волейбол и 12 — баскетбол. Дело в том, что 10 учеников одновременно любят и футбол и волейбол, 8 — футбол и баскетбол, а 5 — волейбол и баскетбол. Сколько учеников этого класса любят все три вида спорта?

592. Группа ребят отправилась в поход. На привале разговорились о предстоящих первенствах школы по футболу, баскетболу и волейболу. Оказалось, что семеро из ребят хотят участвовать в первенстве по футболу, шестеро — по баскетболу, а пятеро — по волейболу. Сколько ребят принимало участие в этом разговоре, если четверо из них хотели участвовать в первенстве по футболу и баскетболу, трое — по футболу и волейболу, двое — по баскетболу и волейболу, а один хотел участвовать во всех трех первенствах?

593. На первом туре олимпиады школьникам были предложены 4 задачи, и на второй тур допускали только тех, кто все их решил. На первый тур пришло 200 школьников. Первую задачу решили 180 школьников, вторую — 170, третью — 160, а четвертую — 150. Поместятся ли школьники, допущенные на второй тур, в классной комнате, вмещающей не более 50 человек?

Требуется обосновать один из трех ответов:

а) в любом случае поместятся;

б) в любом случае не поместятся;

в) могут поместиться, а могут и не поместиться.

594. У Вити, активного участника математического кружка, спросили: «Какая была погода, когда ты отдыхал в пионерском лагере?» «80 % дней была теплая

погода, — ответил он, — 80 % дней было облачно и 60 % дней было ветрено». Подсчитайте число дней (в процентах), когда одновременно было тепло, облачно и ветрено.

595. В одном институте 70 % преподавателей владели испанским языком, 75 % — немецким, 80 % — французским и 85 % — английским. Сколько преподавателей (в процентах) владели четырьмя языками? Требуется найти наименьшее возможное значение.

596. В уставе одного лондонского клуба были записаны следующие правила:

а) финансовый комитет должен быть избран из состава общего комитета;

б) никто не может быть одновременно членом и общего, и библиотечного комитетов, если только он не состоит также в финансовом комитете;

в) никто из членов библиотечного комитета не может быть в финансовом комитете.

Требуется упростить эти правила.

26. Рациональные числа

597. Какие из следующих высказываний истинны:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0; \end{cases} \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0; \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0? \end{cases}$$

598. Вычислите следующие выражения:

$$|a| + a; \quad |a| - a; \quad \frac{|a|}{a}.$$

599. Если $a > b$, может ли быть $a^2 < b^2$?

600. В каком случае квадраты неравных между собой чисел равны?

601. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но недостаточно» или «достаточно, но не необходимо», а где можно — «необходимо и достаточно», чтобы получились верные утверждения:

1) Для того чтобы $a^2 = b^2$, ..., чтобы $a = b$.

2) Для того чтобы $a^2 = b^2$, ..., чтобы $|a| = |b|$.

3) Для того чтобы $a^3 = b^3$, ..., чтобы $a = b$.

4) Для того чтобы $a^3 = b^3$, ..., чтобы $|a| = |b|$.

- 5) Для того чтобы $a = b$, ..., чтобы $a^2 = b^2$.
 6) Для того чтобы $|a| = |b|$, ..., чтобы $a^2 = b^2$.
 7) Для того чтобы $a = b$, ..., чтобы $a^3 = b^3$.
 8) Для того чтобы $|a| = |b|$, ..., чтобы $a^3 = b^3$.
 602. Докажите следующие свойства модуля числа:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

603. Решите следующие уравнения:

- а) $|x - 3| = 2$; б) $|x + 1| = 0$;
 в) $|x - 3| = -1$; г) $|x| = b$; д) $|x| = 3x - 2$.

604. Упростите следующие выражения:

- а) $|a - 3| - |a - 2|$; б) $|2a + 1| + |3a - 5|$.

605. Решите следующие уравнения:

- а) $|x - 1| + |x - 2| = 1$;
 б) $|2x + 1| - |3 - x| = |x - 4|$.

606. Укажите различные известные вам способы разбиения множества рациональных чисел на два класса без общих элементов.

607. Всякое рациональное число можно представить в виде частного $\frac{a}{b}$ двух целых чисел, где $b \neq 0$. Если a делится на b без остатка, то частное — целое число. Можно ли утверждать, что каждому рациональному числу соответствует частное двух целых чисел и притом единственное?

608. Найдите два рациональных числа, таких, чтобы их сумма, произведение и частное были равны между собой.

609. Вы знаете, что во множестве рациональных чисел всегда выполнимы все четыре основные математические операции: сложение, вычитание, умножение и деление, исключая деление на 0. Какая из этих операций не всегда выполнима во множестве положительных и отрицательных чисел (то есть во множестве рациональных чисел без числа 0)?

610. Какие из четырех основных операций не всегда выполнимы: а) во множестве положительных чисел; б) во множестве отрицательных чисел; в) во множестве дробных чисел?

611. Какие из четырех основных операций не всегда выполнимы во множестве целых чисел?

Решая эту задачу, вы установили, что во множестве целых чисел всегда выполнимы лишь три операции: сложение, вычитание и умножение. Деление же не всегда выполнимо. В связи с этим в математике рассматриваются вопросы делимости чисел, с которыми прямо или косвенно связаны многие проблемы теории целых чисел.

Рассмотрим более подробно некоторые вопросы делимости целых чисел, причем для краткости в дальнейшем вместо слов «целое число» будем говорить просто «число».

612. Если каждое из слагаемых делится на одно и то же число, то и их сумма разделится на это число. Докажите эту теорему для двух и трех слагаемых.

613. Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на одно и то же число, то и их разность разделится на это число. Докажите.

614. Докажите следующие утверждения:

1) Если a делится на b , то $a \cdot x$ делится на b при любом целом x .

2) Если a делится на b и c делится на b , то $a \cdot x + c \cdot y$ делится на b при любых целых x и y .

3) Если a делится на $b \cdot c$, то a делится на b и a делится на c .

4) Если a делится на b и b делится на c , то a делится на c .

615. Верны ли высказывания:

1) Если сумма двух чисел есть число четное (делится на 2), то каждое слагаемое есть число четное?

2) Если одно из двух слагаемых есть число четное и их сумма — число четное, то второе слагаемое есть число четное?

616. Докажите, что если одно из слагаемых не делится, а остальные делятся на одно и то же число, то их сумма не разделится на это число.

617. При делении на 5 числа a в остатке получается число 3, при делении числа b на 5 в остатке получается число 3, а при делении на 5 числа c в остатке получается число 2. Какой остаток получится при делении на 5 разности $a - b$ и разности $a - c$?

618. Докажите: для того чтобы разность $a - c$ делилась без остатка на b , необходимо и достаточно, чтобы остатки от деления a и c на b были равны между собой.

619. Верны ли утверждения:

1) Если число не делится на 2, то оно не делится и на 4?

2) Всякое число, не делящееся на 4, не делится и на 2?

620. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

1) Всякая береза есть дерево; это не береза, следовательно, это не дерево.

2) Если число оканчивается нулем, то оно делится на 5; число не оканчивается нулем, следовательно, оно не делится на 5.

3) Если число оканчивается нулем, то оно делится на 10; число не оканчивается нулем, следовательно, оно не делится на 10.

621. Верны ли утверждения:

1) Если 10 делится на 3, то и 100 делится на 3?

2) Если 9 не делится на 3, то и 81 не делится на 3?

622. Известно, что если число делится на 2 и делится на 3, то оно делится и на 6. Можно ли утверждать, что если число делится на 2 и не делится на 6, то оно не делится и на 3?

623. 99 лошадей разместили в 15 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне будет обязательно нечетное число лошадей?

624. Почему не существует числа, которое при делении на 15 дает в остатке 6, а при делении на 24 дает в остатке 4?

625. Докажите, что: а) $(n + 15) \cdot (n + 10)$ есть четное число при всех целых n ; б) для любых целых чисел a и b число $ab(a + b)$ всегда четное.

626. Докажите, что произведение любых 101 последовательных целых чисел (не обязательно начинать с единицы) делится на 101.

627. Дано 120 последовательных натуральных чисел (начиная с любого натурального числа). Известно, что их сумма делится на 3 и на 5, но не делится на 8. Докажите, что эту сумму можно сделать делящейся на 3, 5 и 8 одновременно, если умело исключить одно из слагаемых.

628. Докажите, что сумма четного числа первых чисел натурального ряда делится на натуральное число, следующее за наибольшим из слагаемых.

629. Докажите, что числа $3n + 1$ и $2n + 1$ взаимно простые при любом целом n .

630. Докажите, что дробь, дополняющая несократимую правильную дробь до единицы, несократима.

631. Если число a делится на произведение $b \cdot c$, то a делится и на b , и на c . Справедливо ли обратное утверждение, то есть можно ли утверждать, что если a делится на b и делится на c , то a делится на $b \cdot c$? Приведите примеры.

Решая предыдущую задачу, получаем, что число a может делиться и на b , и на c , но не делится на их произведение. Например, 36 делится и на 4, и на 6, но не делится на $4 \cdot 6 = 24$.

Но если b и c — взаимно простые числа, то в этом случае a всегда делится и на $b \cdot c$. Рекомендуем запомнить, что если число a делится порознь на два взаимно простых числа b и c , то a делится и на их произведение $b \cdot c$.

Используя это утверждение, решите задачи № 632—638.

632. Докажите следующие утверждения:

1) Произведение трех последовательных целых чисел делится на 6.

2) Произведение четырех последовательных целых чисел делится на 24.

3) Произведение пяти последовательных целых чисел делится на 120.

633. Установите, что если a — целое число, то:

а) $a^3 - a$ делится на 6;

б) $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ есть целое число.

634. Докажите, что $n^3 + 11n$ делится на 6 при любом целом n .

635. Докажите, что произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 19$$

(коротко оно записывается $19!$ и читается «19 факториал») делится на 820 125.

636. Докажите следующие предложения:

1) Всякое простое число, большее 3, при делении на 6 дает в остатке либо 1, либо 5.

2) $n^2 - 1$ делится на 24, если n — простое число, большее 3.

637. Докажите, что при любом четном n число $n^3 + 20n$ делится на 48.

638. Докажите, что ни при каком натуральном n :
 а) $n^2 + 1$ не делится на 3; б) $n^2 - 3$ не делится на 5.

ГЛАВА VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

27. Вычерчивание фигур одним росчерком

Начертите на плоскости какую-нибудь связную сеть кривых. Условимся точки, соединенные кривыми, а также точки, в которых кривые пересекаются, называть узлами или вершинами сети, а участки кривых между вершинами — отрезками или ребрами сети. Вершины, в которых сходится четное число отрезков сети, будем называть четными, а вершины, в которых сходится нечетное число отрезков, — нечетными.

639. Докажите, что невозможно начертить такую сеть кривых, которая имела бы нечетное число нечетных вершин, то есть что число нечетных вершин произвольной сети кривых — всегда четное.

640. Какие из следующих фигур (рис. 47) нельзя вычертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза по одной и той же линии?

641. Почему сеть с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком карандаша?

642. Докажите, что если данную фигуру можно вычертить одним росчерком карандаша, то эта фигура

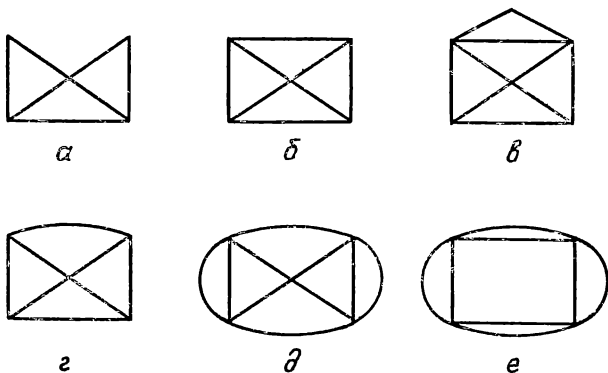


Рис. 47

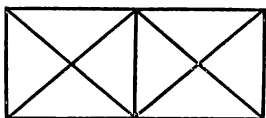


Рис. 48

либо содержит только четные, либо две и только две нечетные вершины. Что можно сказать о вершинах, в которых начинается и заканчивается вычерчивание фигуры?

643. Можно ли из одного куса проволоки получить такую фигуру, как на рисунке 48?

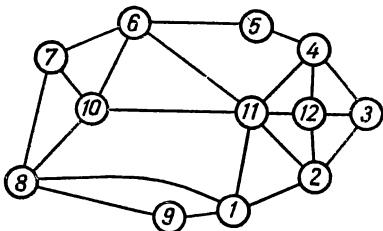


Рис. 49

644. Однажды пионеры попросили вожатую организовать экскурсию в большой городской парк. Пионервожатая, показав план парка (рис. 49), предложила следующую задачу: «Найдите тот перекресток, откуда можно пройти по всем дорожкам парка и притом только по одному разу». Как бы вы решили эту задачу?

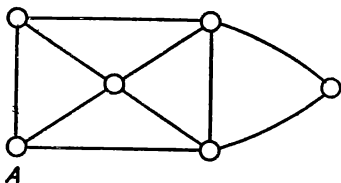


Рис. 50

645. На плоскости дано 5 точек, которые обозначены числами: 3, 6, 8, 12 и 15. Пары точек, соответствующие не взаимно простым числам (наибольший общий делитель которых больше единицы), соединены и притом одной кривой. Можно ли полученную фигуру начертить одним росчерком? Укажите начальную и конечную точки.

646. В точке А расположен гараж для снегоочистительных машин. Одному водителю было поручено убрать снег с улиц части города, план которой изображен на рисунке 50. Может ли он закончить свою поездку на том перекрестке, где находится гараж, если по каждой улице своего участка города он может проехать только по одному разу?

647. Докажите, что любой населенный пункт, из которого выходит не менее трех шоссежных дорог, можно обойти так, чтобы пройти по каждой улице 2 раза, и нельзя обойти так, чтобы пройти по каждой улице 3 раза.

648. С вычерчиванием фигур одним росчерком свя-

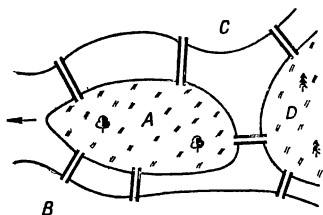


Рис. 51

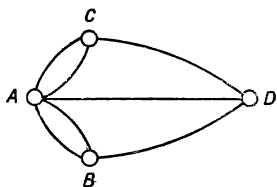


Рис. 52

зана и известная задача о семи мостах Кенигсберга, которой занимался один из крупнейших математиков, член Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783).

Части города, по которому протекает река, соединены семью мостами (рис. 51). Можно ли пройти по этим семи мостам, проходя по каждому из них только один раз?

Решение. Если через *A* обозначить остров, через *B* — левый берег реки, через *C* — правый и через *D* — второй остров, то задача сведется к вычерчиванию одним росчерком фигуры, состоящей из семи линий — мостов (рис. 52).

У этой фигуры все четыре вершины нечетные, следовательно, обойти семь мостов, о которых говорится в этой задаче Эйлера, не проходя ни по одному мосту дважды, нельзя.

Примечание. Все подобные задачи принадлежат к области математики, называемой топологией.

649. 1) Река разделяет город на четыре части, которые соединены шестью мостами, как схематически показано на рисунке 53. Турист решил обойти все мосты, побывав на каждом из них только по одному

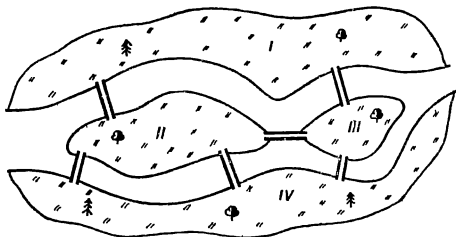


Рис. 53

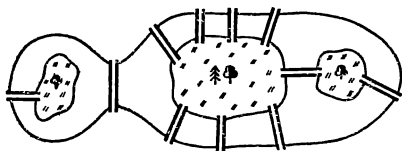


Рис. 54

разу. Как это можно сделать, если не требовать обязательного возвращения в ту часть города, из которой начался обход?

2) Добавьте на рисунке 53 еще один мост так: а) чтобы можно было совершить переход через все мосты из любой части города; б) чтобы совсем нельзя было совершить переход через все мосты, побывав на каждом по одному разу.

650. В парке построен водоем с островками и мостами (рис. 54). Можно ли обойти все 11 мостов, проходя по каждому из них только один раз?

651. На рисунке 55 изображен план подземного лабиринта-подвала из 16 комнат, соединенных дверьми. Можно ли, начиная с комнаты № 1, обойти комнаты так, чтобы пройти через все двери всех комнат и только один раз? В какой комнате закончится такой обход?

У к а з а н и е. Замените комнаты точками, а двери — дугами и постройте соответствующую сеть кривых.

652. На рисунке 56 изображен план подвала из 10 комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

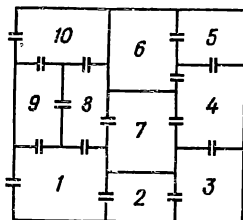
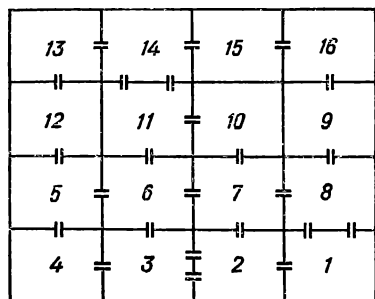


Рис. 56

Рис. 55



Рис. 57

653. В журнале «Пионер», № 4 за 1969 г. помещена задача «Три поводка» (рис. 57):

На рисунке три собаки,
На рисунке три руки,
Но, конечно, спросит всякий:
— Где ж, однако, поводки?

Поводков действительно нет. Вы должны их нарисовать сами, но так, чтобы каждый хозяин гулял со своей собакой. Проследите за тем, чтобы поводки нигде не пере-

секались, не касались друг друга и рамки рисунка.

В следующем номере журнала дано ее решение, в котором поводок № 2 пересекает руку № 3. Придумайте лучшее решение.

654. На рисунке 58 изображены три домика, колодец, навес и погреб. Требуется провести от каждого домика по одной тропинке к колодцу, навесу и погребу так, чтобы ни одна из этих девяти тропинок не пересекалась с другой. Докажите, что сделать это невозможно.

655. Проведены четыре прямые так, что каждые две из них пересекаются. Сколько получилось точек пересечения?

Рассмотрите случай, когда в каждой из искомым точек пересекаются не более двух прямых, а также и другие возможные случаи.

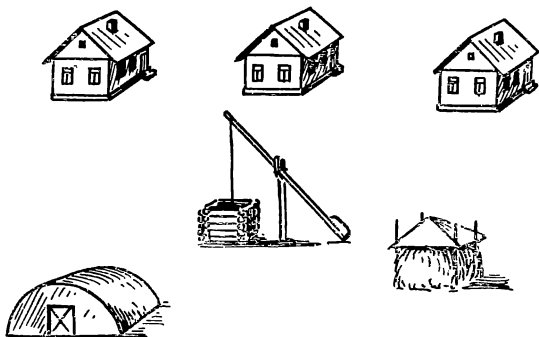


Рис. 58

Примечание. Вершины ломаной не могут лежать на других ее звеньях.

656. Имеется замкнутая ломаная, обладающая тем свойством, что каждое звено пересекается некоторым другим звеном этой ломаной и причем только один раз. Докажите, что число звеньев такой ломаной четное.

657. Можно ли на плоскости построить указанную в задаче 656 ломаную, состоящую из: 1) 1989 звеньев; 2) 1992 звеньев.

28. Задачи на первые понятия геометрии

658. Начертите окружность и возьмите на ней четыре точки. Через каждые две из них можно провести прямую и притом только одну. Сколько получится различных прямых?

659. В предыдущей задаче вы могли просто пересчитать все шесть различных прямых. Подумайте, как иначе можно подсчитать число таких прямых. Определите число всех различных прямых, проходящих через каждые две точки из заданных на окружности: а) 6 точек; б) 10 точек; в) 1970 точек.

660. 1) На плоскости даны шесть точек, которые лежат на одной прямой, и одна точка вне этой прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки, взяв их попарно?

2) На плоскости даны десять точек, из которых четыре лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки, взяв их попарно?

661. 1) На рисунке 59 изображено шесть точек, причем каждая из этих точек соединена с тремя из остальных пяти точек. Можно ли четыре точки соединить между собой так, чтобы каждая точка была соединена с тремя из остальных точек? А если дано пять точек?

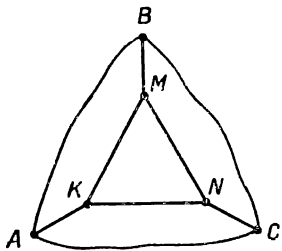


Рис. 59

2) Докажите, что семь точек нельзя соединить между собой произвольными кривыми так, чтобы каждая точка была соединена с тремя из остальных шести точек.

662. 1) На сколько частей делят плоскость две прямые? Рассмотрите случаи, когда прямые пересекаются и когда они параллельны (случай совпадения прямых исключается).

2) На сколько частей делят плоскость три прямые? Рассмотрите все возможные случаи взаимного расположения трех прямых на плоскости: все три параллельны; две параллельны, а третья пересекает их, все три пересекаются в одной точке; все три попарно пересекаются в трех различных точках.

663. 1) Определите число диагоналей выпуклого n -угольника.

2) Есть ли такие многоугольники, у которых количество диагоналей равно: 9; 20; 30; 1; 0?

664. 1) На сколько частей можно разделить круг двумя хордами?

2) На сколько частей можно разделить круг тремя хордами?

3) Проведите в круге 4 хорды так, чтобы они делили круг на 8 частей; на 11 частей.

Примечание. Можно вполне строго доказать, что если в круге проведено n хорд, которые пересекаются в k точках, причем точка пересечения считается p раз, если через нее проходит $p + 1$ хорда, то эти хорды разрезают круг на $(n + k + 1)$ частей.

665. Возьмите произвольный треугольник и проведите все три его медианы. Вы увидите, что все медианы пересекаются в одной точке. Найдите на полученном вами чертеже 16 различных треугольников.

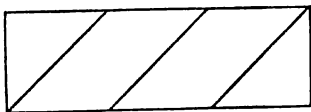


Рис. 60

666. 1) Постройте все три средние линии треугольника. Найдите на полученном чертеже 6 различных четырехугольников.

2) Найдите 8 четырехугольников на рисунке 60.

667. На рисунке 61 показано такое сечение куба плоскостью, что в сечении получился шестиугольник. Можно ли пересечь куб плоскостью так, чтобы в сечении получить

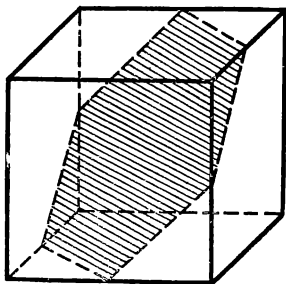


Рис. 61

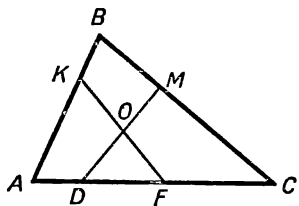


Рис. 62

пятиугольник, четырехугольник, треугольник? А можно ли получить в сечении куба плоскостью семиугольник?

668. Сколько углов имеет фигура, изображенная на рисунке 62?

669. (Шутка.) Казалось бы, лупа должна увеличивать все без исключения предметы. Но все же существуют такие

объекты, которые лупа не увеличивает. Что это за объекты?

670. Дан отрезок AB , серединой которого является точка M . Докажите, что для любой точки C , лежащей на продолжении отрезка AB , $MC = \frac{AC + BC}{2}$. А если точка C принадлежит самому отрезку AB , какая тогда зависимость между длинами отрезков MC , AC и BC ?

671. Существует ли треугольник, у которого: а) две высоты имеют длины, меньшие 1 см, а площадь больше 100 см^2 ; б) две высоты имеют длины, большие 100 см, а площадь меньше 1 см^2 ?

672. 1) Длины сторон треугольника выражены целыми числами. Найдите длину третьей стороны этого треугольника, если длины двух других равны соответственно 1 см и 7 см.

2) Длины двух сторон треугольника равны соответственно 5 см и 10 см. Найдите длину третьей стороны, если она выражается целым числом сантиметров, кратным 3.

673. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $c = 5$ см и $a = 11$ см. Найдите периметр этого треугольника.

674. Могут ли быть не равны два треугольника, если все углы одного треугольника равны соответствующим углам другого треугольника и две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого?

675. На прямой AB взята точка C и через нее под произвольным углом проведена прямая CD . На биссектрисах углов ACD и DCB взяты точки M и N . Докажите, что если $MN \parallel AB$, то CD делит отрезок MN в точке O пополам.

676. 1) В треугольнике ABC угол C равен 80° .

Определите величину угла между биссектрисами углов A и B .

2) В треугольнике ABC угол C равен 40° . Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине C пересекают прямую AB в точках M и N . Найдите градусную меру углов A и B , если $CM = CN$.

677. Градусная мера одного из углов треугольника равна 75° . Найдите градусные меры остальных углов этого треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину данного угла, разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника (два случая).

678. Дан квадрат $ABCD$. Из произвольной точки M стороны BC квадрата проведена прямая, пересекающая сторону CD в такой точке K , что $\angle AMB = \angle AMK$. Определите градусную меру угла MAK .

679. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята произвольная точка E . Биссектриса угла CDE пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $AE + KC = DE$.

ГЛАВА IX. АЛГОРИТМЫ И СХЕМЫ

Обычно под алгоритмом понимают предписание о выполнении в определенном порядке некоторой системы операций, позволяющих решать задачи определенного класса. В жизни мы часто пользуемся алгоритмами, даже не замечая этого. Вот, например, рецепт приготовления пирога с яблоками.

1. Подготовить необходимые продукты: 250 г муки, 200 г сахара, 100 г сметаны, 25 г масла, 2 яйца, 10 г сухарей, 5 г соды, 3 г уксуса, 300 г яблок.
2. Очистить и порезать яблоки.
3. Смазать форму маслом и посыпать сухарями.
4. Взбить яйца с сахаром и сметаной.
5. Добавить муку, масло и перемешать.
6. Погасить соду уксусом и добавить к полученной массе.
7. Добавить яблоки.
8. Выложить массу в форму.
9. Поставить форму в духовку и выпекать при температуре 300 °С.
10. Через 35 мин вынуть из духовки готовый пирог.

Если все действия выполнить в правильной последовательности, то пирог получится такой, что «за уши не оттянешь».

Любая инструкция по сборке игрушек из деталей детского конструктора также является алгоритмом, объясняющим, как собрать ту или иную модель. В большинстве задач, с которыми вы встречаетесь на уроках математики, ответ может быть записан в так называемом «общем виде», то есть в виде формулы. Формулы определяют последовательность математических операций, которые надо выполнить

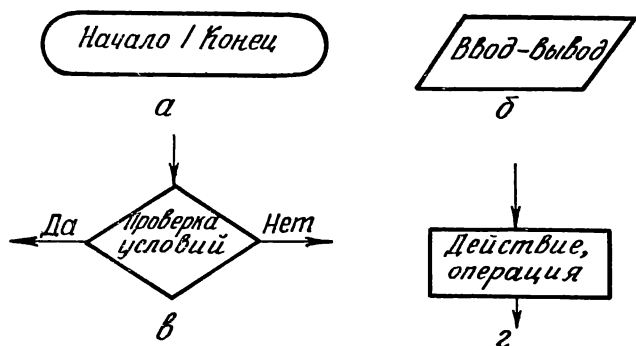


Рис. 63

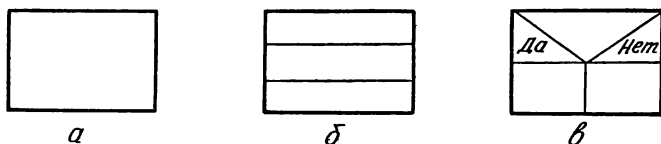


Рис. 64

для получения искомой величины, поэтому формулы можно также рассматривать как разновидности алгоритмов.

Рассмотрим несколько задач, в которых требуется построить алгоритм решения.

680. Постройте алгоритм нахождения корня линейного уравнения $ax = b$.

Решение. Возможен следующий алгоритм решения линейного уравнения:

1. Задать значения чисел a и b .
2. Проверить, не является ли a нулем.
3. Если $a \neq 0$, то вычислить значение $x = b/a$; если $a = 0$, то проверить, не является ли b нулем.
4. Если $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений; если $b = 0$, то x может принимать любые значения.
5. Записать ответ.

Чтобы облегчить пользование алгоритмом, его удобно изображать графически в виде схемы или диаграммы. Для построения схем используют замкнутые фигуры стандартной формы — блоки — и соединяющие их стрелки. Для обозначения начала и конца алгоритма используется овал (рис. 63, а), для операций

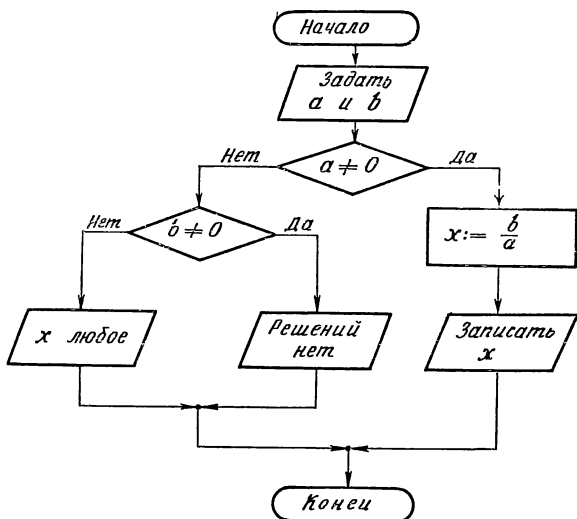


Рис. 65

ввода исходных данных и вывода результата — параллелограмм (рис. 63, б), проверку условий будем записывать в ромбиках (рис. 63, в), а все остальные операции — в прямоугольниках (рис. 63, г). Для построения диаграмм также будем использовать специальные символы: символ блока обработки данных (рис. 64, а), символ следования, объединяющий ряд следующих друг за другом процессов обработки (рис. 64, б), символ блока решения, т. е. проверки условий (рис. 64, в).

Например, схема построенного в задаче № 680 алгоритма изображена на рисунке 65, а соответствующая диаграмма — на рисунке 66.

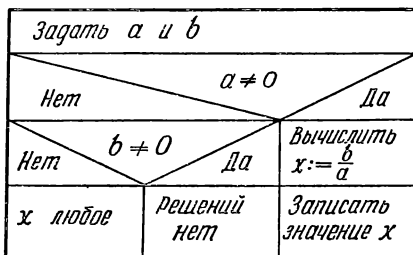


Рис. 66

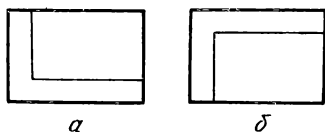


Рис. 67

681. На классной доске начерчен прямоугольник. Опишите алгоритм вычисления площади этого прямоугольника.

682. На классной доске начерчены 4 прямоугольника. Составьте алгоритм вычисления их площадей.

Решение. Требуемый алгоритм может иметь вид:

1. Повторять пункты 2—6 до тех пор, пока не кончатся все прямоугольники.
2. Взять прямоугольник.
3. Измерить одну из его сторон, например a .
4. Измерить другую его сторону b .
5. Вычислить площадь рассматриваемого прямоугольника, перемножив два полученных числа.
6. Записать найденное значение площади.

При решении этой задачи у нас возник так называемый цикл, т. е. такая конструкция, когда одна и та же последовательность действий повторяется несколько раз. Для обозначения циклов на диаграмме используют специальные символы (рис. 67, а, б), при этом условие окончания цикла в зависимости от того, где оно проверяется в алгоритме, записывают в нижней или в верхней полосе над прямоугольником, в котором записывают операции самого цикла. Диаграмма построенного алгоритма изображена на рисунке 68.

Все построенные алгоритмы отражают одно из важных свойств, присущих всем алгоритмам: алгоритм

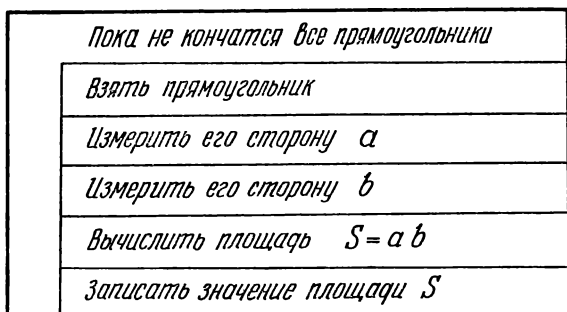


Рис. 68

позволяет решать не только данную конкретную задачу, но и любую другую задачу этого типа. Например, алгоритм, построенный в задаче № 680, позволяет находить решения любого линейного уравнения, а алгоритм задачи № 682 — вычислять площади любых прямоугольников.

683. Как будет выглядеть схема алгоритма решения задачи № 682, если у заданных прямоугольников величина одной из сторон, например a , не изменяется?

684. Составьте алгоритм нахождения длины заданной ломаной.

685. Найдите разность двух целых чисел с помощью поразрядного вычитания столбиком, если уменьшаемое больше вычитаемого.

Решение. Алгоритм решения задачи может иметь вид:

1. Записать данные числа в столбик так, чтобы каждый разряд вычитаемого находился под соответствующим разрядом уменьшаемого. Провести под нижним числом черту.
2. Если число разрядов у уменьшаемого и вычитаемого различно, то записать у вычитаемого на месте недостающих разрядов нули.
3. Для одноименных разрядов, начиная с крайнего справа, определить цифру, стоящую в соответствующем разряде у разности по следующим правилам: 1) если верхняя цифра не меньше нижней, то вычесть из верхней цифры нижнюю; 2) если верхняя цифра меньше нижней, то: а) уменьшить на 1 число единиц разряда, стоящего на одну позицию левее рассматриваемого, б) изменить цифры разрядов, стоящих левее рассматриваемого в соответствии с указанным в а) уменьшением, в) прибавить 10 к верхней цифре и вычесть нижнюю из полученной суммы.
4. Записать полученную цифру разности под чертой в рассматриваемом разряде.
5. Повторять пункты 3, 4 для всех одноименных разрядов, двигаясь справа налево, до тех пор, пока не будут рассмотрены все разряды.
6. Если в полученной разности есть нули, стоящие слева, то отбросить их.
7. Записать полученный результат.

686. Составьте алгоритм поразрядного вычитания

двух десятичных дробей, если уменьшаемая дробь больше вычитаемой.

Решение. Возможный алгоритм решения задачи имеет вид:

1. Записать данные числа в столбик так, чтобы запятые были друг под другом. Подвести под нижним числом черту.
2. Найти разность данных чисел как разность целых чисел, не обращая внимания на запятую, т. е. воспользоваться алгоритмом, построенным в предыдущей задаче, начиная с пункта 2 и до конца.
3. Поставить в полученном результате запятую так, чтобы она располагалась под запятыми данных чисел.
4. Записать полученный результат.

При решении этой задачи мы использовали алгоритм в алгоритме. На практике такой прием используется очень часто, так как он позволяет разбить сложную задачу на несколько простых, что существенно облегчает разработку алгоритма, а затем проверку и контроль его работы.

Как же можно проверить работу алгоритма или правильность его графического изображения? Для этого существует простой способ: в точности соблюдая свои собственные предписания, выполните их в указанном порядке. Выполняйте их так, как будто вам не известно, для чего эти действия предназначены, и не задумываясь над тем, почему их нужно выполнять, будто вы и есть вычислительная машина. Это самый надежный способ!

687. Постройте алгоритм записи смешанного числа в виде неправильной дроби.

688. Постройте алгоритм сложения десятичных дробей.

689. Постройте алгоритм умножения десятичных дробей.

690. Определите, существует ли треугольник, длины сторон которого равны заданным числам a , b , c и, если такой треугольник существует, то вычислите его площадь по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

691. Начертите схемы алгоритмов вычисления

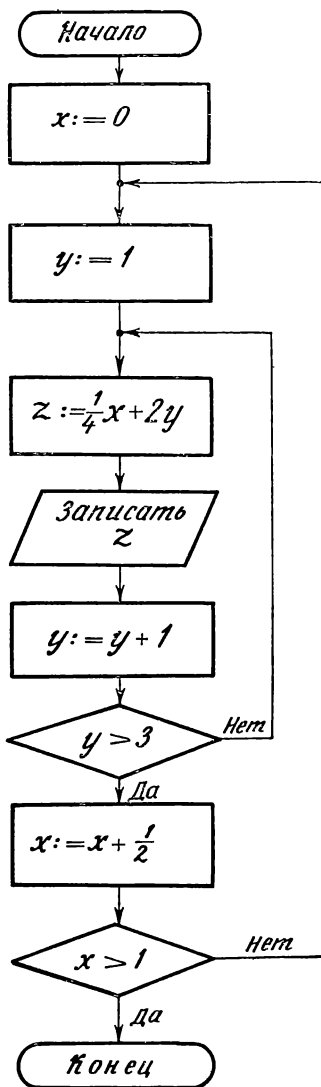


Рис. 69

функций: 1) $y = |x|$; 2) $y = x^5$; 3) $y = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

692. Восстановите условия задач, решения которых изображены на рисунках 69, 70.

693. Постройте диаграмму алгоритма нахождения решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = f, \\ cx + dy = g. \end{cases}$$

694. Постройте диаграмму алгоритма решения уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

695. Постройте алгоритм деления данного отрезка пополам с помощью циркуля и линейки.

696. Постройте алгоритм деления данного угла пополам с помощью циркуля и линейки.

697. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки прямой, параллельной данной прямой a и проходящей через точку M , которая не принадлежит прямой a .

698. Постройте алгоритм превращения равностороннего треугольника в «снежинку» (рис. 71).

Теперь рассмотрим несколько способов получения простых чисел. Одним из таких способов является «решето Эратосфена». Пусть, например, требуется выделить все простые числа из первых ста натуральных

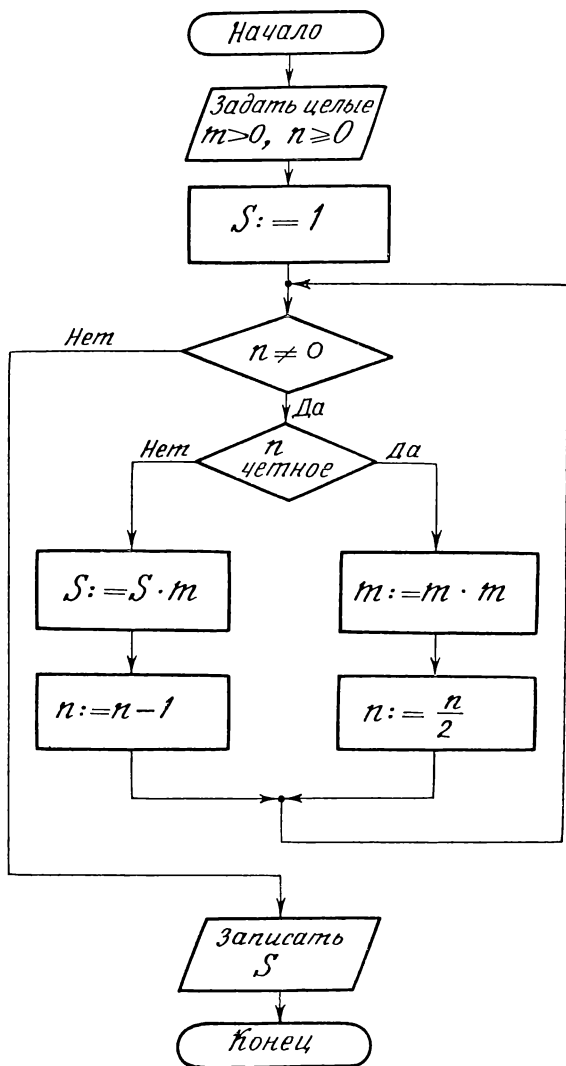


Рис. 70

чисел. Составим таблицу из ста клеточек, в которые впишем все натуральные числа от 1 до 100 (рис. 72). Зачеркиваем 1, так как 1 — число не простое. Следующее число 2 — простое, его сохраняем. Далее зачеркиваем все числа, кратные 2, кроме 2, т. е. зачеркиваем все числа через одно, начиная с 4. Пер-

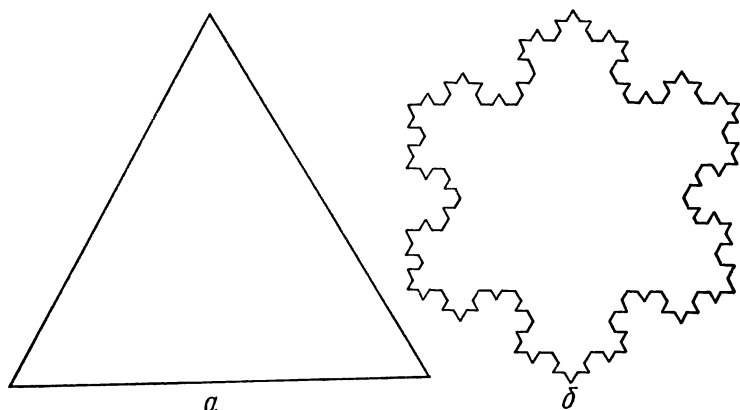


Рис. 71

вое незачеркнутое после 2 число 3— простое. Зачеркиваем теперь все числа, кратные 3, кроме 3. Первое после 3 незачеркнутое число 5— простое, так как не делится ни на одно меньшее его простое число. Отсчитываем от него числа по пять и каждое пятое зачеркиваем. Подобным же образом зачеркиваем и все составные числа, делящиеся на 7. Так как следующее число — простое число 11, причем 11^2 боль-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 72

ше 100, то, следовательно, все оставшиеся незачеркнутыми числа в первой сотне — простые. Кстати, Эратосфен писал свои числа на папирусе, натянутом на рамку, и прокалывал составные числа. Получалось нечто вроде решета, сквозь которое составные числа «просеивались», а простые «оставались».

Существуют и другие способы определения простых чисел, например, для определения, является ли данное число N простым или составным, можно последовательно проверить, делится ли оно на числа 2, 3, 4, ..., $N - 1$. Если на каком-либо из шагов число N разделится на делитель без остатка, то N — составное число, в противном случае N — простое число.

699. Начертите схему описанного алгоритма определения. Является ли данное число простым?

700. Можно существенно сократить число проверок для данного числа N , так как, очевидно, не имеет смысла проверять делимость N на числа больше

\sqrt{N} . Начертите схему такого «улучшенного» алгоритма для ответа на вопрос, какие из заданных натуральных чисел являются простыми.

701. Составьте алгоритм и начертите его схему для нахождения всех простых чисел среди последовательности натуральных чисел от 2 до некоторого заданного числа M .

Указание. Учтите, что в качестве делителей проверяемого числа можно ограничиться использованием лишь простых чисел. Не забудьте также, что вам придется «хранить» (накапливать и запоминать) ранее найденные простые числа.

Построим схему еще одного алгоритма, часто используемого в арифметике целых чисел. Это «алгоритм Евклида» нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел. Алгоритм Евклида основан на следующих двух утверждениях: 1) если большее из двух данных чисел делится на меньшее, то наибольшим общим делителем этих чисел будет меньшее число; 2) если большее из двух данных чисел не делится на меньшее, то наибольший общий делитель данных чисел равен наибольшему общему делителю двух других чисел: меньшего из двух данных и остатка, полученного от деления большего числа на меньшее.

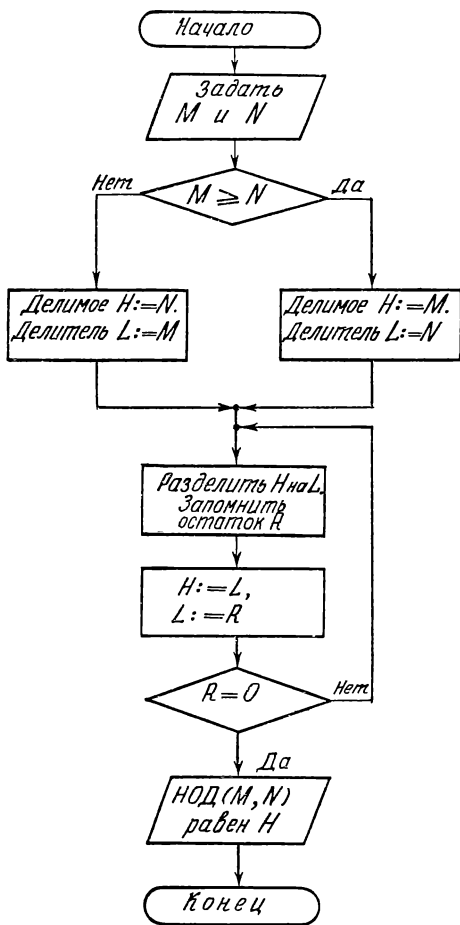


Рис. 73

Схема алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух данных чисел M и N изображена на рисунке 73.

702. По приведенной схеме (см. рис. 73) опишите алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

703. Постройте диаграмму алгоритма нахождения наибольшего общего делителя для случая трех и более чисел.

ГЛАВА X. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

29. Уравнения в целых числах

Если взять в общем виде одно уравнение с двумя переменными, то почти всегда существует бесконечное множество пар рациональных чисел, удовлетворяющих данному уравнению. Но в отдельных случаях оно может иметь лишь одно решение.

Иногда по условию задачи требуется найти не любые рациональные числа, а такие, которые удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям, например, чтобы x и y были целыми числами. Решение уравнений в целых числах, наряду с делимостью чисел, является одним из наиболее интересных вопросов теории чисел.

Решением уравнений в целых числах занимались великие математики древности: греческий математик Пифагор (VI в. до н. э.), александрийский математик Диофант (II—III в. н. э.), по имени которого уравнения в целых числах называются диофантовыми уравнениями. Этой труднейшей проблемой теории чисел занимались и такие крупные математики, как П. Ферма (XVII в.), Л. Эйлер (XVIII в.), Лагранж (XVIII в.) и др. Но и теперь еще нет общих методов решения таких уравнений.

В этом параграфе вы познакомитесь с некоторыми интересными задачами, требующими умения решать уравнения первой степени в целых числах.

704. Найдите все целые положительные значения x и y , удовлетворяющие уравнению $5x + 7y = 112$.

Решение. Берем член с меньшим коэффициентом и находим, что $5x = 112 - 7y$, откуда $x = \frac{112 - 7y}{5}$.

Исключаем целую часть: $x = \frac{110 - 5y + 2 - 2y}{5} = 22 - y + \frac{2 - 2y}{5} = 22 - y + \frac{2(1 - y)}{5}$.

Так как x — число положительное, то $112 - 7y > 0$, откуда $y < \frac{112}{7} = 16$. Но x должно быть целым числом, следовательно, должно быть целым числом и $\frac{2(1 - y)}{5}$,

что возможно лишь тогда, когда $y - 1 = -(1 - y)$ делится на 5, ибо числа 2 и 5 взаимно простые. Поэтому число y при делении на 5 должно давать в остатке 1. Таких чисел, положительных и меньших 16, три: 1, 6 и 11.

Если $y = 1$, то $x = 21$; если $y = 6$, то $x = 14$; если $y = 11$, то $x = 7$. Легко проверить, что все найденные три пары положительных чисел удовлетворяют данному уравнению.

705. Найдите все целые положительные значения x и y , удовлетворяющие следующим уравнениям: а) $3x + 2y = 5$; б) $3x + 5y = 19$; в) $3x + 5y = 66$; г) $5x + 19y = 674$.

706. Имеются монеты по 15 к. и 20 к. Сколько надо взять тех и других монет, чтобы получить число копеек, равное произведению их стоимостей, причем число всех монет кратно трем?

707. Найдите все решения в простых числах уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

708. Из числа победителей областной математической олимпиады a участников получили дипломы III степени, b участников — дипломы II степени и c участников — дипломы I степени, причем всего дипломов меньше 50. Оказалось, что числа a , b и c — простые числа, причем $b(b + c) = a + 8$. Определите число дипломов каждого вида.

709. Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если переставить эту цифру на первое место, то получится число, в 2 раза и еще на 21 единицу больше первоначального. Определите это число.

Решение. Обозначим цифру сотен через x , а цифру десятков через y . Тогда искомое число будет иметь вид: $100x + 10y + 7$. После перенесения цифры 7 на первое место получим число $700 + 10x + y$. Составим уравнение

$$700 + 10x + y = 2(100x + 10y + 7) + 21.$$

После упрощений получим: $10x + y = 35$.

Но x и y — цифры, значит, единственным решением данного уравнения является $x = 3$, $y = 5$. Ответ. 357.

710. Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 7 раз больше первоначального. Найдите это число.

711. Если к двузначному числу приписать слева и справа по единице, то полученное четырехзначное число будет больше первоначального в 21 раз. Найдите это число.

712. Если между цифрами двузначного числа вписать двузначное число, на 1 меньшее первоначального, то полученное четырехзначное число будет в 91 раз больше первоначального. Найдите это число.

713. Число заканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить с последнего места на первое и приписать слева 1, то число увеличится втрое. Найдите наименьшее из таких чисел.

714. 1) Найдите двузначное число, если известно, что, во-первых, число делится на 5 без остатка; во-вторых, если умножить это число на цифру его единиц, то получится число, которое на 363 больше суммы цифр данного числа.

2) Найдите двузначное число, равное сумме числа его десятков и квадрата числа единиц.

3) Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

4) Найдите трехзначное число, которое в 11 раз больше суммы своих цифр.

715. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых справедливо равенство $1991 + m^2 = n^2$.

716. Найдите два двузначных числа x и y , сумма которых кратна 13, а частное кратно 7.

717. В саду двузначное число деревьев в каждом ряду выражено теми же цифрами, что и количество рядов, но в обратном порядке. Два полных ряда заняты грушами. Остальная часть сада отведена под яблони трех сортов с одинаковым количеством деревьев каждого сорта. Первого сорта было по 7 деревьев с обеих сторон каждого ряда, не занятого грушами, а для остальных двух сортов оставшаяся площадь сада разделена пополам. Сколько грушевых деревьев в саду?

718. На вопрос, каков номер его квартиры, Вася ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то получится удвоенный номер моей квартиры». В какой квартире живет Вася?

719. Даны три разные цифры. Сумма всех трехзначных чисел, какие только можно составить, комбинируя эти три цифры, равна 2886. Если расположить данные цифры по убыванию их значения и из

полученного числа вычесть число, составленное из этих же цифр, написанных в обратном порядке, то разность составит 495. Найдите эти три цифры, если известно, что среди них нет нуля.

720. Сколько последовательных членов суммы $1 + 2 + 3 + \dots$ необходимо взять, чтобы получить результат, состоящий из двух одинаковых цифр?

721. Докажите, что если числа $a - b$ и $c - d$ делятся на число m без остатка, то и разность $ac - bd$ также делится на m без остатка.

722. В шахматном турнире участвовало два ученика седьмого класса и несколько восьмиклассников. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый восьмиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в этом турнире, проводившемся по круговой системе?

723. В двух школьных лагерях отдыхали 264 школьника. Из первого лагеря во второй перевели a школьников, и еще такое же число школьников вновь прибыло во второй лагерь. После этого число школьников второго лагеря составило 65 % от числа школьников первого лагеря. Сколько было школьников в каждом из двух лагерей первоначально?

724. Люда с мамой отправились за покупками. У них было немного меньше 150 р., причем только пятерками и рублями. По возвращении домой у них осталась треть первоначальной суммы, при этом пятерок стало столько, сколько раньше было рублей, а рублей столько, сколько раньше было пятерок. Сколько они истратили денег на покупки?

725. В магазин привезли 336 кг растительного масла в бидонах по 30 кг и 27 кг. Сколько было бидонов по 27 кг и по 30 кг?

Иногда решение задачи сводится к решению в целых числах систем двух уравнений с тремя переменными. Исключая одно из переменных, получаем одно уравнение с двумя переменными. Рассмотрим в качестве примера задачу.

726. Можно ли на 100 к. купить 100 предметов: карандашей (цветных и простых) и перьев, если известно, что цветной карандаш стоит 5 к., простой — 3 к., а перьев продают 3 штуки на 1 к.?

Решение. Обозначив число цветных карандашей

через x , простых — через y и перьев — через z , составим два уравнения: $x + y + z = 100$ и $5x + 3y + \frac{z}{3} = 100$.

Следовательно, получили систему двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 15x + 9y + z = 300, \end{cases}$$

где x , y и z — целые неотрицательные числа, не большие 100.

Исключив z , получим одно уравнение с двумя переменными:

$$14x + 8y = 200, \text{ или } 7x + 4y = 100,$$

$$y = \frac{100 - 7x}{4} = 25 - x - \frac{3x}{4}.$$

Очевидно, что x должно быть кратно 4, причем $7x = 100 - 4y$, поэтому $7x < 100$, то есть $x \leq 14$.

Вычислив значения y и z при $x = 0; 4; 8; 12$, получим четыре различных ответа: $(0; 25; 75)$, $(4; 18; 78)$, $(8; 11; 81)$ и $(12; 4; 84)$.

Если считать, что первый ответ не подходит по смыслу задачи, то покупка может быть произведена только тремя способами.

727. 1) Библиотека на 20 р. купила 20 книг разной цены: по 3 р., 2 р. и 50 к. за книгу. Сколько книг по 2 р. купила библиотека?

2) Для школы купили 100 предметов. Общая сумма покупки составила 100 р. Стоимость стула 7 р. каждый, табуретки — 3 р., а книги — 50 к. Сколько каких предметов было куплено?

728. В учреждении стоят 14 канцелярских столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками. Всего в столах 33 ящика. Сколько столов с одним ящиком, если известно, что их столько же, сколько с двумя и тремя ящиками вместе?

729. На какие 6 денежных знаков меньшего достоинства можно разменять 25-рублевую купюру? Можно ли это сделать несколькими способами?

730. В трех домах отдыха, находящихся недалеко друг от друга, отдыхают 480 человек. 10 % отдыхающих первого дома отдыха, 8,5 % второго и 15 % третьего собрались на экскурсию в город, расположенный в 60 км от первого, в 40 км от второго и в 30 км

от третьего дома отдыха. Для оплаты проезда (10 к. с человека за каждые 10 км) экскурсанты собрали некоторую сумму денег. Эта сумма такова, как если бы каждый внес по 40 к. Сколько человек участвовало в экскурсии?

В первой части вы решали примеры на определение цифр, обозначенных буквами, по результатам действий. В более сложных примерах нередко приходится прибегать к составлению уравнений в целых числах.

Рассмотрим пример.

731. Определите значения букв А, Б и В, зная, что:

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline \\ \end{array}$$

Решение. Здесь имеем три неизвестных целых числа (цифры), для отыскания которых надо составить некоторую систему уравнений. Рассмотрим результаты сложений по столбикам. Очевидно, что $A + B = 10$, $A + 1 = B$ и $A + B + 1 = 10 + B$. Заменив в последнем уравнении B на $A + 1$, получим, что $2A + 2 = 10 + B$. Но из первого уравнения $B = 10 - A$. Следовательно, $2A + 2 = 10 + 10 - A$, откуда $A = 6$, тогда $B = 7$ и $B = 4$. Проверка показывает, что данный пример расшифрован верно.

Рассмотрим более сложный пример.

732. Расшифруйте значения букв по данному делению:

$$\begin{array}{r|l} \text{с в и н и н к а} & \text{п у с т о} \\ \text{с а а в с к} & \dots \\ \hline \text{о о а п о к} & \\ \hline \text{п у с т о} & \\ \hline \text{т у н п п а} & \\ \hline \text{у а п о к т} & \\ \hline \text{с у и н к о} & \end{array}$$

Решение. В этом примере находить значения букв таким же путем, как в первом примере, трудно, так как мы не знаем частного, да и число неизвестных довольно велико (10). Поэтому нужно умело сочетать

составление уравнений с догадкой, конечно, обоснованной.

Рассматривая второе вычитание, делаем вывод, что $o = 1$, и так как k не равно нулю (из первого вычитания), то $k - 1 = p$. Тогда из последнего вычитания следует, что $10 + p - k = k$ или $p = 2k - 10$, ибо a больше t на 1.

Получаем уравнение: $2k - 10 = k - 1$, откуда $k = 9$, значит, $p = 8$. Так как $p - 1 - o = i$, то $i = 6$.

Рассмотрим первое вычитание. Вычитая $k = 9$, получим $o = 1$, значит, $n = 0$. При вычитании c получили 8. Следовательно, $c = 7$, ибо $n - 1 = 5$.

Вновь обратимся к последнему вычитанию. Найдем, что $y = 2$, $a = 4$ и $t = 3$, а затем и $v = 5$.

Теперь найдем значение делителя как числовое, так и словесное.

При расшифровке числовых ребусов также весьма часто применяются уравнения и неравенства в целых числах. Правда, и число неизвестных, и число уравнений столь велико, что решение оказывается громоздким, а если учесть наличие различных вариантов, то такая расшифровка ребусов становится нерациональной и нужно проявить сообразительность.

733. Пусть, например, требуется расшифровать ребус.

$$\begin{array}{r} \text{А Б В} : \quad \text{Б Г} = \quad \text{Б В} \\ - \quad \quad \quad \times \quad \quad + \\ \text{Д К М} - \quad \text{Д Р} = \text{Д В В} \\ \hline \text{В В А} - \text{Р А А} = \text{Д М Е} \end{array}$$

Решение. Здесь 9 неизвестных. Легко составить 6 уравнений, отражающих все данные действия. Но можно составлять и дополнительные уравнения, выражающие зависимости между отдельными цифрами. Например, в нашем ребусе очевидно, что $A - A = E$ (из последней строки), а из последнего столбца можно лишь утверждать, что $B + B = E$ или $B + B = 10 + E$. Но если учесть, что из первого уравнения $E = 0$, то $B + B = 10$, а не нулю, значит, $B = 5$.

Рассматривая второй столбец, мы видим, что $B \times D < 5$, ибо $P < 5$. Следовательно, один из сомножителей равен 1. Но B не может быть равным 1, ибо

в первой строке произведение $(10Б + Г)(10Б + 5)$ должно дать число, большее 600. Следовательно, $Д = 1$.

Из первого столбца следует, что $А$ равно 6 или 7, но тогда $Б$ (из первой строки) меньше 3, откуда $Б = 2$.

После этого не имеет смысла рассматривать в общем виде соотношения между цифрами, ибо все оставшиеся цифры могут быть найдены, если в ребус подставить значения уже найденных цифр. Действительно, легко найдем, что $М = 8$, тогда $А = 7$; $Р = 3$; $К = 6$ и $Г = 9$.

734. Расшифруйте подобным образом следующие ребусы:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} А \text{ Б В} - \quad С \text{ Д} = К \text{ К Б} \\ \vdots \quad + \quad - \\ \underline{С \quad \times \quad М \text{ Р}} = В \text{ М В} \\ \text{Е Р} \quad + \text{ Д Б Г} = Б \text{ Г Р} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{r} А \text{ А А} - \text{ Б В} = А \text{ В Б} \\ \vdots \quad + \quad - \\ \underline{Г \text{ Б} \quad \times \text{ В Е}} = Б \text{ Д Г} \\ \text{К М} \quad + \text{ Е Д} = В \text{ В М} \end{array} \end{array}$$

735. Расшифруйте ребус:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} \text{Л Ш Ч Б} : \quad \text{Ы Ш} = \quad \text{Ч В} \\ - \quad \quad \times \quad + \\ \underline{\quad \text{Е Л Е} + \quad \text{Л Ё}} = \text{Е Е П} \\ \text{Л Е Л Л} - \text{В Ы Ч} = \text{Е Ы В} \end{array} \end{array}$$

Если буквы расположить в порядке возрастания соответствующих им цифр, то получите инициалы и фамилию величайшего русского математика прошлого столетия. Его открытия в теории простых чисел принесли всемирную славу русской математической науке.

736. В ребусе зашифрована фамилия талантливого советского математика, академика АН СССР. В 14 лет, будучи учеником шестого класса, от несчастного случая он потерял зрение. Но, несмотря на это, через 2 года он окончил школу, затем за 4 года блестяще окончил Московский университет.

Чтобы узнать его фамилию, расшифруйте ребус,

выпишите буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр и замените букву А на Н:

$$\begin{array}{r}
 \text{Т А Я} - \text{О Т Я} = \text{Н Я П} \\
 : \quad + \quad - \\
 \text{О Н} \times \quad \text{Г} = \quad \text{И Р} \\
 \hline
 \text{Т Т} + \text{О Р Т} = \text{О Г Я}
 \end{array}$$

737. Расшифруйте следующий ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{С М У} - \text{В У} = \text{И Е Л} \\
 : \quad + \quad - \\
 \text{У} \times \quad \text{Н В} = \text{Е В М} \\
 \hline
 \text{В А} + \text{А Н С} = \text{М Е У}
 \end{array}$$

Выписав все буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр и заменив все гласные буквой О, получите фамилию русского ученого-естествоиспытателя, поэта, историка. По его инициативе в 1755 году был основан Московский университет.

738. Расшифруйте следующий ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{А Я Т} - \text{Л О Ч} = \text{Ч А Н} \\
 : \quad + \quad - \\
 \text{А Т} \times \quad \text{Ч} = \text{И Ч Ч} \\
 \hline
 \text{Т Т} + \text{Л Т О} = \text{Л Л Т}
 \end{array}$$

Если вы расположите буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, то получите оценку своей работы.

739. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{Л О Н} - \text{В У} = \text{М В Л} \\
 : \quad + \quad - \\
 \text{Н} \times \quad \text{Н} = \text{П В} \\
 \hline
 \text{П М} + \text{М А Л} = \text{М П Я}
 \end{array}$$

Расставив буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр, начиная с нуля, получите инициалы и фамилию крупнейшего русского математика, обесмертившего свое имя созданием теории равновесия, названной его именем.

740. Расшифруйте ребус:

$$\begin{array}{r}
 \text{Л Е А} - \text{Г У} = \text{Е А Л} \\
 : \quad + \quad - \\
 \text{Я} \times \quad \text{В} = \text{Р Л} \\
 \hline
 \text{Л Р} + \text{А М} = \text{В К}
 \end{array}$$

Выпишите все буквы в порядке возрастания соответствующих им цифр и замените все гласные буквы буквой О. Получите фамилию известного советского академика, Героя Социалистического Труда.

741. 1) Два числа назовем обращенными, если одно число получается из другого перестановкой его цифр в обратном порядке (например, 123 и 321). Произведение двух обращенных чисел равно 92 565. Какие это числа?

2) Найдите четырехзначное число, все цифры которого различны, отличны от нуля, а обращенное к нему число на 7452 меньше.

3) Имеется пятизначное число, большее 20 000, сумма цифр которого равна 10, причем все 5 его цифр различные. Если это число сложить с обращенным к нему числом, то получим пятизначное число, все цифры которого равны. Найдите все такие числа.

742. Найдите в десятичной системе счисления двузначное число, которое, будучи записано в: а) четверичной; б) семиричной системе счисления, дает число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

743. На занятиях математического кружка школьники решали задачи на определение возраста. Один из них спросил учителя: «Сколько Вам лет?» Учитель ответил: «Мне меньше сорока и родился я не в високосном году, а через 2 года, в 1992 году, мой возраст будет равен удвоенной сумме цифр года моего рождения». В каком году родился учитель?

744. Сегодня утром участник математического кружка Юра перемножил число своих полных лет, порядковый номер месяца и число рождения. Получилось 2821. Сколько лет Юре? Укажите также день и месяц его рождения.

745. Определите значения букв по данному делению:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{РЕШИ} & \text{САМ} \\
 \hline
 \text{РИК} & \text{КА} \\
 \hline
 & \text{ШЕИ} \\
 & \text{— А К Е} \\
 & \hline
 & \text{С А Р}
 \end{array}$$

746. Ученику надо перемножить два однозначных числа и это произведение разделить на двузначное число, в результате он получит целое число. Ученик

не заметил знака умножения и принял рядом стоящие множители за двузначное число, поэтому получил частное вдвое больше истинного. Определите все три числа.

30. Систематические дроби

Во второй части вы уже рассматривали различные системы счисления, переход от одной системы счисления к другой, а также действия над натуральными числами, записанными в разных системах счисления. Но, кроме целых чисел, существуют и дробные числа, причем запись дробных чисел в десятичной позиционной системе дает так называемые десятичные дроби.

В алгебре вводятся понятия нулевого и целого отрицательного показателя, а именно:

любое число, кроме нуля, в нулевой степени равно единице;

любое число, кроме нуля, с целым отрицательным показателем равно дроби, у которой числитель 1, а знаменатель — степень с тем же основанием и с противоположным показателем.

Тогда, например, число 1217,574 может быть записано так: $1217,574 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$.

Вместо степеней d с отрицательным показателем будем рассматривать степени дроби $\frac{1}{d}$, где d — основание системы счисления. Тогда число 1217,574 запишется так:

$$1217,574 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^3}.$$

Десятичная дробь 0,1846 запишется так:

$$0,1846 = \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{6}{10^4}.$$

747. Запишите следующие десятичные дроби в виде разложения по степеням дроби $\frac{1}{10}$:

$$0,23; 0,705; 0,00375.$$

Аналогичным образом можно поступать и при дру-

гих основаниях системы счисления d , записывая правильные дроби по степеням дроби $\frac{1}{d}$.

Дробь вида

$$\frac{b_1}{d} + \frac{b_2}{d^2} + \dots + \frac{b_k}{d^k}.$$

условились записывать так:

$$(0, b_1 b_2 \dots b_k)_d.$$

Числа вида

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_1 d + a_0 + \frac{b_1}{d} + \frac{b_2}{d^2} + \dots + \frac{b_k}{d^k}$$

записывают так:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_k)_d,$$

где все цифры меньше d . Например:

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0,101_2; \quad 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 0 + \frac{1}{3} = 200,1_3.$$

Дроби такого вида называются систематическими.

748. Запишите в виде систематических дробей следующие дроби:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$; б) $\frac{7}{8^2} + \frac{3}{8^4}$;

в) $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$; г) $3 \cdot 8^3 + 5 + \frac{3}{8^2}$.

749. Запишите систематическую дробь $25,037_8$ в виде обыкновенной дроби в десятичной системе счисления.

Решение. $25,037_8 = 2 \cdot 8 + 5 + \frac{0}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{7}{8^3} =$
 $= 21 + \frac{24+7}{512} = 21 \frac{31}{512}.$

750. Запишите следующие систематические дроби в виде обыкновенных дробей в десятичной системе счисления:

а) $0,12_3$; б) $21,304_5$;

в) $1001,0101_2$; г) $712,006_8$.

751. Следующие обыкновенные дроби, заданные в десятичной системе счисления, запишите в виде систематических дробей в восьмеричной системе счисления:

а) $\frac{21}{64}$; б) $\frac{155}{256}$.

Решение. а) $\frac{21}{64} = \frac{1}{8^2} \cdot (2 \cdot 8 + 5) = \frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} = 0,25_8$;

б) $\frac{155}{256} = \frac{155 \cdot 2}{256 \cdot 2} = \frac{310}{8^3} = \frac{466_8}{8^3} = 0,466_8$.

Таким образом, для решения подобных примеров нужно вначале знаменатель дроби (умножая числитель и знаменатель на одно и то же число) сделать степенью основания системы счисления d , затем числитель дроби записать в новой системе счисления, после чего легко получается запись систематической дроби в требуемой системе счисления.

Такое преобразование невозможно, если знаменатель данной дроби не является делителем некоторой степени d . В подобных случаях получаются бесконечные дроби, которые из-за сложности здесь не рассматриваются.

752. Следующие обыкновенные дроби, заданные в десятичной системе счисления, запишите в виде систематических дробей в указанной системе счисления:

а) в двоичной: $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{16}$, $4\frac{5}{64}$;

б) в троичной: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $9\frac{17}{243}$;

в) в восьмеричной: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{64}$, $3\frac{155}{1024}$.

Из самого определения и формы записи систематических дробей следует, что действия над систематическими дробями производятся по тем же правилам, что и действия над десятичными дробями. Пусть, например, требуется вычислить сумму двух чисел, записанных в пятеричной системе счисления: $24,013 + 1,14$.

По определению $24,013 + 1,14 = \left(2 \cdot 5 + 4 + \frac{0}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3}\right) + \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2}\right) =$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{5^2} + \frac{3}{5^3} \Big) + \Big(1 + \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} \Big) = 2 \cdot 5 + (4+1) + \frac{0+1}{5} + \frac{4+1}{5^2} + \\
 & + \frac{3+0}{5^3} = 2 \cdot 5 + 5 + \frac{1}{5} + \frac{5}{5^2} + \frac{3}{5^3} = 3 \cdot 5 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^3} = \\
 & = 30,203.
 \end{aligned}$$

Мы видим, что сложение производится, как и в случае десятичных дробей:

$$\begin{array}{r}
 + 24,013 \\
 + 1,14 \\
 \hline
 30,203
 \end{array}$$

Аналогично вычисляются и произведения систематических дробей. Поясним на тех же числах (умножение производится в пятеричной системе счисления):

$$\begin{array}{r}
 24,013 \\
 \times 1,14 \\
 \hline
 211112 \\
 + 24013 \\
 + 24013 \\
 \hline
 34,03042
 \end{array}$$

753. Найдите суммы следующих систематических дробей в указанной системе счисления:

а) в восьмеричной: $204,31 + 75,52$; $1,047 + 36,26$;

б) в троичной: $2,101 + 0,102$; $12,122 + 1,22$;

в) в двоичной: $0,101 + 0,011$; $101,001 + 10,1111$.

754. Найдите разности следующих систематических дробей в указанной системе счисления:

а) в восьмеричной: $43,47 - 21,35$; $305,1 - 46,66$;

б) в троичной: $2,102 - 1,011$; $2,01 - 0,122$;

в) в двоичной: $10,101 - 1,001$; $110,01 - 1,111$.

755. Найдите произведения следующих систематических дробей в указанной системе счисления:

а) в восьмеричной: $1,07 \cdot 3,7$; $2,56 \cdot 0,035$;

б) в троичной: $2,01 \cdot 2,2$; $20,12 \cdot 0,12$;

в) в двоичной: $1,11 \cdot 1,01$; $10,11 + 1,001$.

ГЛАВА XI. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

31. Геометрические софизмы

Не только в алгебре, но и в геометрии иногда умозаключения при всей кажущейся их правильности могут привести к бессмыслице, парадоксу. По-гречески

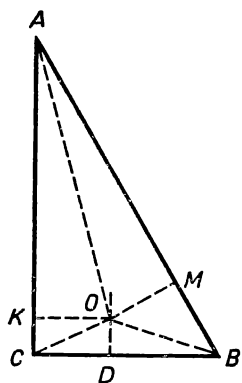


Рис. 74

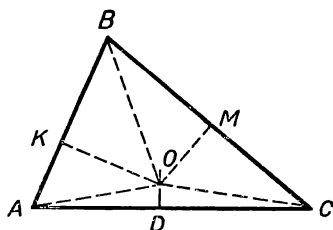


Рис. 75

слово «парадокс» означает «странный», «неожиданный».

В геометрических софизмах, в отличие от алгебраических, все умозаключения могут оказаться верными, но исходные данные, чаще всего рисунок, оказываются ошибочными. Разберем в качестве примера известный парадокс: «Гипотенуза равна катету».

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 74) построим биссектрису острого угла A и перпендикуляр к отрезку CB через его середину D. Обозначим точку их пересечения (она всегда существует!) через O, соединим ее с точками B и C и построим $OK \perp AC$; $OM \perp AB$.

Легко установить, что $\triangle COD = \triangle DOB$ ($CD = DB$, DO — общий катет) и что $\triangle AOK = \triangle AOM$ ($\angle KAO = \angle OAM$, AO — общая гипотенуза). Отсюда следует, что $AK = AM$; $KO = OM$ и $OC = OB$. Но тогда $\triangle OKC = \triangle OBM$ (по катету и гипотенузе: $OK = OM$ и $OC = OB$), откуда $CK = BM$. Следовательно, $AC = AK + KC = AM + MB = AB$, что и требовалось доказать.

Сколько бы вы ни искали ошибок в приведенных рассуждениях, вы их не найдете, так как применяемые здесь признаки равенства треугольников справедливы. Оказывается, весь секрет этого софизма в исходном рисунке.

Если аккуратно выполнить чертеж (сделайте его обязательно!), то биссектриса угла A и перпендикуляр к катету BC, проведенный через его середину, пересекаются не внутри треугольника, а вне его. И тогда

легко убедиться, что гипотенуза и катет не равны, так как катет будет равен разности, а гипотенуза — сумме попарно равных отрезков.

756. Теперь самостоятельно найдите ошибки, допущенные в приведенных ниже рассуждениях.

1) Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 75). Через середину отрезка AC проведем $DO \perp AC$ и построим биссектрису угла B , пересекающую DO в точке O .

Соединим точку O с точками A и C и построим $OK \perp AB$ и $OM \perp BC$. Легко доказать, что $\triangle OKB = \triangle BOM$ (BO — общая гипотенуза и $\angle KBO = \angle OBM$), значит, $OK = OM$ и $BK = BM$. Так как $\triangle AOD = \triangle DOC$ (по двум катетам), то $AO = OC$. Следовательно, $\triangle AOK = \triangle MOC$ (по катету и гипотенузе), поэтому $AK = MC$.

Итак, $AB = AK + KB = CM + MB = CB$, то есть произвольный треугольник ABC оказался равнобедренным.

Рассуждая аналогично для сторон AC и AB , получим, что любой треугольник является равносторонним.

2) Докажем, что прямой угол равен острому углу.

В точках A и D построим два угла (рис. 76): $\angle DAB$ — острый и $\angle ADC$ — прямой. На их сторонах отложим равные отрезки: $AB = DC$ и точки B и C соединим прямой BC . Из середины отрезка AD восставим перпендикуляр KO , из середины BC — перпендикуляр MO до их взаимного пересечения в точке O , а затем точку O соединим с точками A, B, C и D .

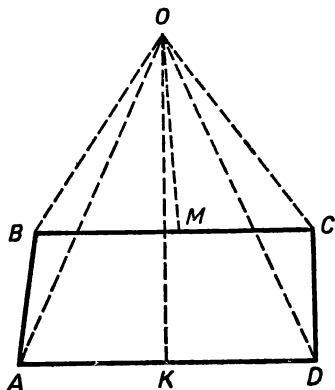


Рис. 76

Очевидно, что треугольники AOD и BOC — равнобедренные, значит, $AO = OD$ и $BO = OC$, причем $\angle DAO = \angle ODA$. Так как по построению $AB = DC$, то $\triangle ABO = \triangle DOC$ (по трем сторонам), тогда $\angle BAO = \angle CDO$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BAO + \angle OAD = \angle CDO + \angle ODA = \angle CDA$, что и требовалось доказать.

3) Построим окружность и проведем в ней диаметр AOB . Через точку B проведем хорду BC , а через ее середину P хорду AD . Соединим точки D и C (рис. 77).

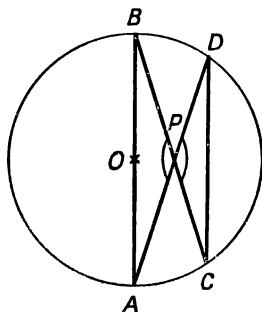


Рис. 77

Рассмотрим теперь два получившихся равнобедренных треугольника: APB и DPC . По построению $BP = PC$, тогда $AP = PD$. Кроме того, $\angle APB = \angle DPC$ (как вертикальные). Значит, $\triangle APB = \triangle DPC$, откуда $AB = DC$, то есть длина хорды, не проходящей через центр окружности, равна длине ее диаметра.

4) Рассмотрим так называемый «четвертый признак равенства треугольников».

Если две стороны и угол против одной из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против одной из них другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 78).

Дано: $AB = MP$, $AC = MK$, $\angle ABC = \angle MPK$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle MPK$.

Для доказательства приложим треугольник MPK к треугольнику ABC так, чтобы точка M совпала с точкой A , а точка K с точкой C . Возможен один из трех случаев расположения треугольников (рис. 79).

Рассмотрим случай, показанный на рисунке 79, а. Соединим точки B и P_1 , получим треугольник ABP_1 , у которого $AP_1 = MP = AB$, значит, и $\angle ABD = \angle AP_1D$, но тогда $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = \angle AP_1C - \angle AP_1D = \angle DP_1C$. Следовательно, треугольник P_1BC — равнобедренный, $BC = P_1C = PK$.

Итак, у треугольников ABC и MPK три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, поэтому треугольники равны.

Так же устанавливаем равенство треугольников и в случаях, показанных на рисунках 79, б и 79, в.



Рис. 78

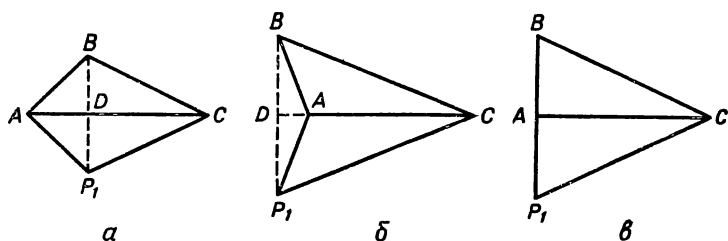


Рис. 79

Следовательно, четвертый признак равенства треугольников доказан.

Но ... рассмотрим равнобедренный треугольник ABD , где $AB = BD$ (рис. 80). На продолжении отрезка DA возьмем точку C и соединим ее с точкой B .

Получим два треугольника ABC и DBC , у которых сторона BC — общая, $AB = BD$ и $\angle BCD$ — общий. По четвертому признаку они должны быть равны, а из построения очевидно, что $CA \neq CD$.

Примечание. Четвертый признак равенства треугольников правильно формулируется так: «Если две стороны и угол против большей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против большей из них другого треугольника, то такие треугольники равны». Если же две стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то такие треугольники могут быть равными, но могут быть и неравными.

5) Софизм Прокла из Византии (412—485): «Никакие две прямые не пересекаются».

Возьмем две различные прямые a и b в одной плоскости (рис. 81, а) и две точки: A на прямой a и B на прямой b . Соединим точки A и B и построим два таких отрезка, что $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$. Отрезки AA_1 и BB_1 не пересекаются, ибо в противном случае (рис. 81, б) имели бы, что $AB < AC + CB < \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = AB$, чего не может быть.

Строим теперь $A_1A_2 = BB_1B_2 = \frac{1}{2}A_1B_1$ и так да-

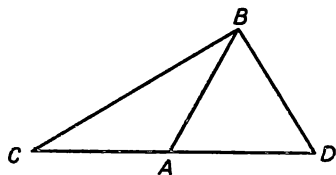


Рис. 80

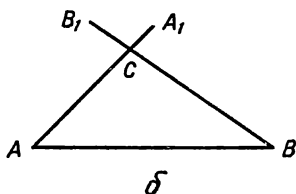
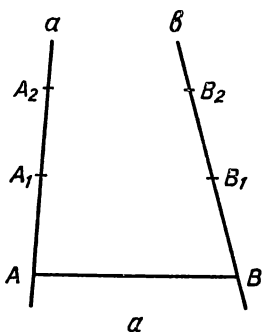


Рис. 81

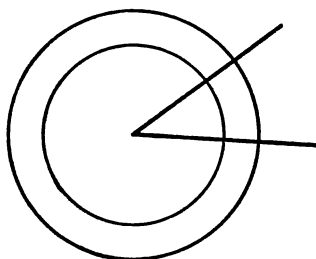


Рис. 82

лее. Рассуждая как и прежде, получим, что прямые a и b не пересекаются.

757. На рисунке 82 изображены две различные концентрические окружности. Если из общего центра провести лучи, то получим, что каждой точке малой окружности соответствует одна

точка большой окружности и наоборот. Следовательно, обе окружности содержат одинаковое число точек, а значит, имеют и одинаковые длины. В чем ошибка?

758. Найдите ошибки в следующих рассуждениях:

1) Начертите произвольный прямоугольный треугольник ABC (рис. 83) и проведите его средние линии, параллельные катетам. Получите ломаную $AA_1C_1B_1B$, длина которой равна сумме длин катетов (проверьте!). Выполните такие же построения в треугольниках AA_1C_1 и C_1B_1B , получите ломаную $AA_2C_2B_2C_1A_3C_3B_3B$, длина которой по-прежнему равна сумме длин катетов.

Проведя в каждом из четырех получившихся треугольников такие же средние линии, получим новую ломаную, длина которой опять равна сумме длин катетов.

Продолжая эти построения, будем получать ломанные, которые все меньше и меньше отличаются от гипотенузы и в пределе сольются с ней. Длины этих ломанных всегда равны сумме длин катетов. Значит, $AC + CB = AB$, то есть сумма длин катетов равна длине гипотенузы.

2) Ранее мы приводили примеры «доказательств»,

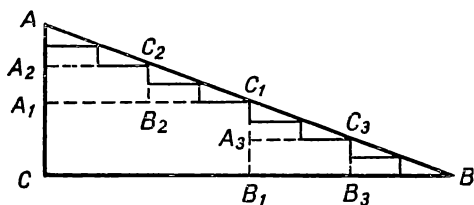


Рис. 83

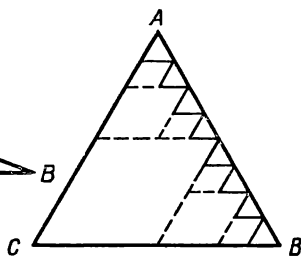


Рис. 84

что $1 = 2$. Рассмотрим еще геометрическое «доказательство» этого равенства.

Выполним построение, как и в предыдущей задаче, для равностороннего треугольника ABC (рис. 84). Вновь легко установить, что построенные ломаные имеют постоянную длину, равную $AC + CB$, и все меньше и меньше отличаются от AB . Выполним 4—5 построений, и ломаная почти сольется со стороной AB . В результате получим, что $AC + CB = AB$, то есть $2 = 1$.

32. Метод пересечения фигур

Познакомимся с методом пересечения фигур при решении задач на построение, который прежде назывался методом геометрических мест.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением множеств точек на плоскости. В VII классе на уроках геометрии вы изучали некоторые специальные множества точек, а именно:

1. Окружность (по определению) есть множество точек, находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки.

2. Множество точек, каждая из которых равноудалена от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

3. Множество точек угла, меньшего развернутого, каждая из которых равноудалена от его сторон, есть биссектриса этого угла.

Последние два утверждения были сформулированы как обобщения взаимно обратных теорем: а) если точка принадлежит фигуре F , то она обладает свойством P ; б) если точка обладает свойством P , то она

принадлежит фигуре F . Очевидно, что и в определении окружности выражено аналогичное содержание: если точка принадлежит окружности $(O; R)$, то она находится на расстоянии $R > 0$ от точки O , и наоборот, если точка находится на расстоянии $R > 0$ от точки O , то она принадлежит окружности $(O; R)$.

Заметим, что иногда лучше вместо одной из взаимно обратных теорем доказывать теорему, противоположную другой.

759. 1) Докажите, что если точки A и B симметричны относительно прямой l , то прямая l есть множество всех точек, каждая из которых равноудалена от точек A и B .

2) Какое множество точек образуют вершины равнобедренных треугольников с общим основанием?

760. 1) Какое множество точек образуют середины всех радиусов данной окружности?

2) Установите, какое множество образуют центры окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.

Указание. Вначале постройте 3—4 окружности одного и того же радиуса, проходящие через данную точку O .

761. Установите, какое множество образуют точки, каждая из которых равноудалена от двух пересекающихся прямых.

Учтите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, а объединением биссектрис вертикальных углов является прямая.

762. 1) На прямой, пересекающей стороны тупого угла, найдите точку, равноудаленную от сторон этого угла.

2) На данной окружности найдите точку, находящуюся на равном расстоянии от двух данных пересекающихся прямых.

763. В равнобедренном треугольнике $AB = BC = 10$ см и $\angle ABC < 60^\circ$. На стороне BC имеется точка D , равноудаленная от точек A и B и соединенная с точкой A . Вычислите длину стороны AC , если периметр треугольника ADC равен 15 см.

764. Приведем формулировки нескольких задач на построение. Требуется решение каждой из них, начиная со второй, свести к предыдущей задаче.

1) Найдите точку, находящуюся от данной точки A

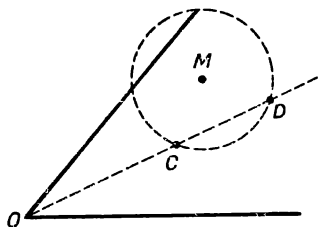


Рис. 85

на расстоянии, равном b , и от точки B на расстоянии, равном a .

2) Постройте треугольник, равный данному треугольнику ABC .

3) Постройте треугольник по трем данным сторонам.

4) Постройте угол, равный данному углу, имеющий данную вершину и данную сторону.

765. Даны угол и точка M внутри его. Найдите такую точку угла, которая была бы одинаково удалена от обеих сторон угла и отстояла от точки M на данное расстояние a (рис. 85).

Решение. Так как искомая точка должна быть одинаково удалена от сторон угла, то она находится где-то на биссектрисе данного угла, ибо множество всех точек, каждая из которых равноудалена от сторон угла, есть биссектриса этого угла. Но где же точно на биссектрисе?

Примем во внимание, что искомая точка должна отстоять от точки M на данное расстояние a . А множество всех точек, отстоящих от точки M на расстояние a , есть окружность радиуса a с центром в точке M . Построим эту окружность.

Искомыми точками будут точки C и D , точки пересечения построенных окружности и биссектрисы, так как они должны удовлетворять обоим условиям, а поэтому принадлежат пересечению обоих множеств.

Очевидно, что если точка M взята так, что окружность данного радиуса a с центром в точке M не пересекает биссектрисы, то задача решений не имеет; если же окружность и биссектриса имеют лишь одну общую точку, то задача имеет одно решение; если окружность пересекает биссектрису в двух точках, то задача имеет два решения.

Рекомендуем построить несколько окружностей с центром в точке M , постепенно увеличивая радиус a . Учтите, что если $a > MO$, то задача имеет одно решение.

766. Даны угол A и точка B на одной из его сторон. Найдите на другой стороне такую точку C , чтобы $AC + CB$ была равна длине l данного отрезка.

767. Какое множество точек образуют центры окружностей, каждая из которых проходит через две данные точки?

768. Постройте окружность, проходящую через три данные точки.

Проанализируем решение этой задачи, выделяя основные его этапы (рис. 86).

1) Решение задачи сводим к определению некоторой точки (центра), удовлетворяющей определенным условиям (окружность с центром в искомой точке должна проходить через все три заданные точки A , B и C).

2) Отбросим одно из этих условий (окружность проходит через точку C), тогда задача становится неопределенной, и оставшимся условиям (окружность должна проходить через точки A и B) будет удовлетворять уже не одна точка, а все точки некоторой фигуры (серединного перпендикуляра к AB).

3) Затем, отбрасывая какое-нибудь из использованных условий (окружность проходит через точку A), принимаем во внимание условие, ранее отброшенное. В результате получаем новое множество точек (серединный перпендикуляр к BC), удовлетворяющих оставшимся условиям (окружности с центрами в этих точках проходят через точки B и C).

4) Искомая точка должна удовлетворять всем условиям задачи (окружность с центром в искомой точке должна проходить через все три точки), следовательно, должна принадлежать обоим множествам. Если построить каждую из этих найденных фигур, то точка их пересечения и будет искомой.

Рекомендуем провести самостоятельно подобный анализ хорошо известного вам построения треугольника по трем сторонам.

Такой метод решения геометрических задач на построение называется методом пересечения фигур.

В общем случае сущность этого метода состоит в следующем:

1) Решение задачи на построение некоторой фигуры сводим к отысканию точки, удовлетворяющей определенным условиям;

2) Не учитывая одно из этих условий, находим множество точек, удовлетворяющих остальным условиям, и строим соответствующую фигуру.

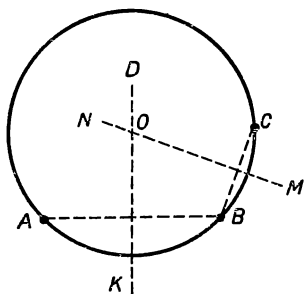


Рис. 86

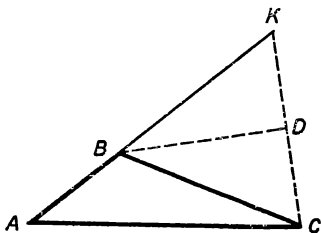


Рис. 87

3) Затем, не учитывая какое-нибудь другое условие, находим новое множество точек, удовлетворяющих остальным условиям, и строим другую фигуру.

4) Искомая точка, удовлетворяющая всем условиям, должна принадлежать пересечению обеих построенных фигур.

769. Постройте треугольник ABC , зная основание b , прилежащий угол α и сумму s длин боковых сторон (рис. 87).

Решение. Основание AC искомого треугольника известно, значит, для решения задачи нужно определить положение третьей вершины B . Так как известен угол CAB , то вершина B будет находиться где-то на стороне AK угла CAK , равного по величине данному углу α .

Чтобы учесть известную сумму длин боковых сторон, целесообразно на продолжении отрезка AB отложить отрезок $BK = BC$, тогда $AK = s$. Таким образом легко можно найти положение точки K .

Искомая же точка B равноудалена от точек K и C , поэтому для отыскания ее достаточно найти точку пересечения луча AK и серединного перпендикуляра BD к отрезку KC .

Определив положение вершины B искомого треугольника, соединим точку C с точкой B и получим искомым треугольник ABC .

Нетрудно видеть, что если $s > b$, то задача имеет одно решение, а если $s \leq b$, то задача не имеет решения.

770. Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и разности двух других сторон. Рассмотр-

рите отдельно два случая: когда известен меньший угол при основании и когда известен больший угол при основании.

771. Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета.

772. Используя свойства прямоугольника, установите, какое множество образуют точки, находящиеся на данном положительном расстоянии от данной прямой.

773. Какое множество точек образуют: а) точки, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых; б) середины отрезков, заключенных между двумя данными параллельными прямыми?

774. Найдите точку на прямой (на окружности): а) находящуюся на данном расстоянии от другой прямой; б) равноудаленную от двух данных параллельных прямых.

775. Найдите точку, находящуюся на данном расстоянии от данной прямой и равноотстоящую от двух данных точек.

776. 1) Внутри данного угла построен другой, равный ему угол, стороны которого параллельны сторонам данного и одинаково отстоят от них. Докажите, что биссектриса данного угла делит и построенный угол пополам.

2) Разделите пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже.

3) Даны две точки A и B . Как с помощью циркуля и линейки провести через эти точки прямую, если длина линейки меньше расстояния между точками?

777. Постройте треугольник по основанию a , высоте h , опущенной на основание, и боковой стороне b .

778. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

779. Концы отрезка постоянной длины скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Какую кривую описывает при этом середина отрезка?

780. Углом, под которым отрезок AB виден из точки M , называется угол с вершиной в точке M , стороны которого проходят через точки A и B .

Докажите, что множество всех точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом, есть построенная на этом отрезке как на диаметре, окружность, кроме ее точек A и B .

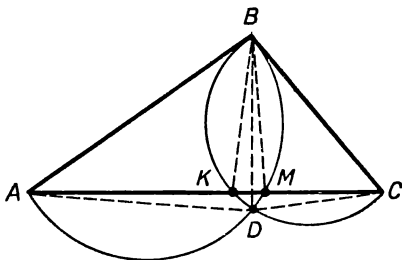


Рис. 88

781. Докажите, что если через одну из точек пересечения двух окружностей провести диаметры каждой окружности, то прямая, соединяющая другие концы этих диаметров, пройдет через вторую точку пересечения тех же окружностей.

782. Ниже приведены четыре геометрических софизма. Укажите ошибки в каждом из приведенных «доказательств».

1) Через две точки можно провести две прямые.

На сторонах AB и BC (рис. 88) треугольника ABC как на диаметрах построим полуокружности, пересекающиеся в точке D , и соединим точку D с точками A , B и C . Тогда $\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$, ибо они вписанные, опирающиеся на диаметр. Значит, ADC есть отрезок прямой. Следовательно, через точки A и C проведены две прямые AC и ADC .

2) На прямую из одной точки можно опустить два перпендикуляра (рис. 88).

На сторонах AB и BC треугольника ABC как на диаметрах построим полуокружности, пересекающиеся AC соответственно в точках K и M . Очевидно, что углы AMB и BKC — прямые, ибо они вписанные, опирающиеся на диаметр. Следовательно, из точки B на прямую AC опущены два перпендикуляра: BM и BK .

3) Через точку вне прямой можно провести две прямые, параллельные данной прямой.

Вы, вероятно, знаете, что в геометрии Лобачевского через точку, взятую вне прямой, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих данную прямую. Докажем, что и в геометрии Евклида через одну точку можно провести две различные прямые, не пересекающие данной прямой.

Возьмем две параллельные прямые m и n (рис. 89) и под углом в 30° пересечем их прямой AB .

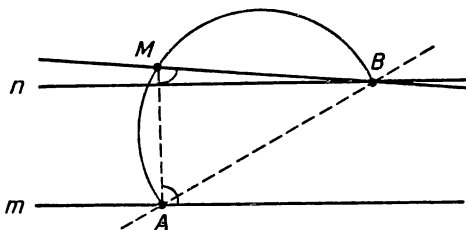


Рис. 89

На отрезке AB как на диаметре строим полуокружность и на ней находим такую точку M , что $MA \perp m$. Через точки M и B проводим прямую MB , которая будет параллельна m , ибо внутренние накрестлежащие углы M и A равны, так как они оба прямые.

4) Окружность имеет два различных центра.

Возьмем две непараллельные прямые и из точек A и B на этих прямых восставим перпендикуляры, пересекающиеся в точке C (рис. 90). Через три точки A , B и C проведем окружность, пересекающую данные прямые в точках K и M . По построению $\angle KBC = \angle MAC = 90^\circ$, значит, эти углы опираются на диаметры KC и CM построенной окружности. Середины этих диаметров O_1 и O_2 являются двумя центрами одной и той же окружности.

783. 1) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, и наоборот, если диаметр делит хорду пополам, то он перпендикулярен к ней. Основываясь на этих теоремах, установите, какое множество точек образуют середины параллельных хорд круга.

2) Через данную в круге точку M провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

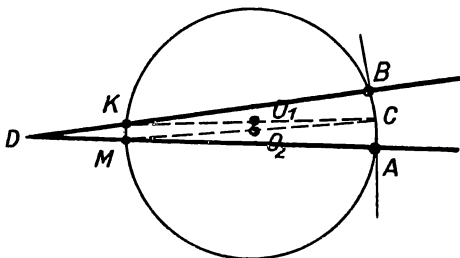


Рис. 90

784. Используя прямую и обратную теоремы о касательной к окружности, докажите, что множество центров окружностей, касающихся данной прямой AB в принадлежащей ей точке M , есть проведенный через точку M перпендикуляр к AB кроме самой точки M .

785. Докажите, что центр окружности всегда отстоит от касательной на расстояние, равное радиусу, и наоборот, если центр окружности отстоит от данной прямой на расстояние, равное радиусу, то такая окружность касается данной прямой.

786. Основываясь на доказанных в задачах № 761 и 785 теоремах, разъясните справедливость следующих утверждений:

1) Множество центров окружностей данного радиуса R , касающихся данной прямой, есть объединение двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстояние, равное R .

2) Множество центров окружностей, касающихся двух данных различных параллельных прямых, есть параллельная этим прямым их ось симметрии.

3) Множество центров окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых, есть объединение двух взаимно перпендикулярных прямых, делящих пополам углы, образованные данными прямыми, без их точки пересечения.

787. Между двумя данными параллельными прямыми задана точка K . Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

788. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них в заданной точке.

789. Какое множество точек образуют центры окружностей, касающихся данной окружности в принадлежащей ей точке M .

У к а з а н и е. Рекомендуем через точку M провести к данной окружности касательную.

790. Докажите, что множество центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности, есть объединение двух окружностей, концентрических с данной, радиусы которых соответственно равны сумме или разности данных радиусов.

П р и м е ч а н и е. Если радиусы данной окружности и касающихся ее окружностей равны, то одна из окружностей нашего множества вырождается в точку — центр данной окружности.

791. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в заданной на ней точке.

792. Постройте окружность, касающуюся данной окружности в заданной на ней точке и данной прямой.

793. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Из некоторой точки M , лежащей на BC , к гипотенузе проведен перпендикуляр MN . Докажите, что углы MAN и MCN равны.

794. Докажите, что множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, отличным от нуля и от развернутого угла, состоит из дуг двух сегментов, каждый из которых вмещает в себе заданный угол, и один расположен по одну сторону данного отрезка, а другой — по другую сторону.

795. На данном отрезке как на хорде постройте сегмент, вмещающий данный угол.

796. На данной прямой найдите точку, из которой данный отрезок виден под данным углом.

797. Постройте треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

798. Даны разные по величине и положению два отрезка a и b . Найдите точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом α , а отрезок b под данным углом β .

Укажите такое расположение соответствующих дуг сегментов, чтобы задача имела 8 решений.

799. (Задача Потенота.) Как определить положение корабля на море (самолета в воздухе), зная расположение трех радиомаяков и направления с корабля на эти маяки?

800. 1) Между двумя окружностями проведите отрезок данной длины параллельно данной прямой.

2) С корабля под углом α видны два маяка, положение которых на карте известно. Когда корабль прошел в определенном направлении расстояние d , эти же маяки стали видны под углом β . Как определить на карте местоположение корабля?

ГЛАВА XII. ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДНОГО ХАРАКТЕРА

801. Для награждения пяти победителей математической олимпиады были куплены 10 книг. Жюри решило распределить эти книги следующим образом: книги пронумеровали от 1 до 10 и заготовили 10 кар-

точек с такими же номерами. Каждый из победителей наугад выбрал 2 карточки и получил книги с соответствующими номерами. При награждении один из членов жюри вслух называл числа, записанные на выбранных карточках, а второй записывал их в протокол, однако по рассеянности он вместо самих чисел записывал их суммы. В протоколе получилась следующая запись: Иван — 11, Федор — 7, Юрий — 4, Денис — 16, Максим — 17. Можно ли по этой записи восстановить, книги с какими номерами достались каждому победителю?

802. Сумма номеров домов на одной стороне квартала 333. Определите номер дома, пятого от угла квартала.

Кажется, что эту задачу решить невозможно. А в действительности она решается легко, простым логическим рассуждением и применением первых четырех действий арифметики.

803. Учитель, идя по улице со своим учеником, встретил трех знакомых. Когда они разошлись, учитель сказал: «Моим знакомым, вместе взятым, в 4 раза больше лет, чем тебе. Произведение же их лет равно 2450. Зная это, сможешь ли ты определить возраст каждого?»

Ученик подумал и сказал, что необходимо еще одно условие. «Да,— согласился учитель,— все они моложе меня». Тогда ученик быстро дал правильный ответ.

Для ученика задача оказалась нетрудной, так как ему был известен возраст свой и учителя. Однако, и не зная этого, можно определить возраст не только трех знакомых, но еще и возраст учителя и ученика. Попробуйте определить и вы.

Предполагается, что все числа лет — целые, меньше 100 и больше 1.

804. Четыре охотника убили на охоте по несколько уток, причем каждый не менее двух. Добыча у всех охотников была разная, а промахов все сделали поровну — по два. Известно, что общее количество патронов у всех охотников — трехзначное число, причем если от этого числа отнять число убитых уток, то получится также трехзначное число. Количество неиспользованных патронов, оставшихся к концу охоты у всех охотников — двузначное число, которое в 7 раз больше числа убитых уток. Сколько уток убил каждый

охотник? Сколько всего патронов было до начала охоты?

805. 1) $6 \cdot 21 = 126$. Найдите еще несколько таких чисел, чтобы произведение записывалось цифрами сомножителей, но в обратном порядке.

2) Если в дроби $\frac{26}{65}$ зачеркнуть в числителе и в знаменателе цифру 6, то получится $\frac{2}{5}$. Вы знаете, что так сокращать нельзя, хотя дробь $\frac{26}{65}$ действительно равна дроби $\frac{2}{5}$. Подберите еще такой пример правильной дроби, чтобы зачеркивание одной и той же цифры в числителе и знаменателе давало, к нашему удивлению, верный результат.

806. У трех друзей была белка. Они купили орехов и положили их в кладовой. Однажды один из друзей захотел полакомиться, пошел в кладовую и взял третью часть, но при этом оказалось, что один орех лишний, и он отдал его белке.

Спустя некоторое время пришел второй и, не подозревая, что первый уже взял часть орехов, разделил остаток на три равные части, причем опять оказался один орех лишний, и он тоже отдал его белке.

Наконец пришел третий и также поделил остаток на три равные части, причем опять один лишний орех отдал белке.

Оказалось, что если оставшиеся орехи делить на троих поровну, то вновь надо один лишний орех отдать белке.

Определите наименьшее число орехов, которое удовлетворяет указанным выше условиям распределения.

807. На концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая полуокружность делится пополам, и в ее середине пишется сумма чисел, стоящих на концах. Затем каждая из четырех получившихся дуг вновь делится пополам, и в ее середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих на концах дуги, и так далее. Найдите суммы всех записанных чисел после первого; второго и третьего шагов. Докажите, что суммы всех записанных чисел при любом шаге будут увеличиваться втрое.

808. (Старинная задача.) Некий купец нанял работника на год и обещал ему дать 12 рублей

и кафтан. Но работник, проработав 9 месяцев, захотел уйти и попросил отдать ему кафтан и еще 8 рублей. Во сколько рублей оценивался кафтан?

809. Однажды Ходжа Насреддин и его друг Али поехали на бухарский базар продавать дыни. У Али была 71 дыня, а у Насреддина — 50. У городских ворот их остановили стражники и потребовали налог за ввоз дынь в Бухару. Узнав величину налога и цену за одну дыню на бухарском базаре, Али отдал стражникам в уплату налога 13 дынь, переплатив при этом одну таньгу, а Насреддин — 9 дынь, не доплатив одну таньгу. Сколько же стоит одна дыня?

Учтите, что Али и Насреддин платили налог только за те дыни, которые они собирались продавать на базаре.

810. Пионерский отряд, разделившись на две группы, собирал металлолом. В первой группе каждый собрал по 13 кг, кроме одного, который собрал 6 кг. Вторая группа собрала то же количество металлолома, причем каждый собрал по 10 кг, кроме одного, который собрал 5 кг. Сколько было ребят в каждой группе, если весь отряд собрал больше 100 кг, но меньше 500 кг?

811. Ящик вмещает 14 кг яблок или 21 кг слив. Если его наполнить теми и другими на одинаковые суммы, то в нем окажется 18 кг стоимостью 6 р. Определите стоимость 1 кг яблок и 1 кг слив, если сливы дороже яблок.

812. Имеются 3 сосуда общей вместимостью 120 л. Если первый сосуд наполнить водой, а затем перелить ее в 2 других, то либо третий наполнится полностью, а второй лишь на $\frac{1}{2}$ своей вместимости, либо

второй наполнится доверху, а третий лишь на $\frac{1}{3}$ своей вместимости. Определите вместимость каждого сосуда.

813. 1) Не выполняя действий возведения в квадрат и умножения, найдите

$$19901990^2 - 19901989 \cdot 19901991.$$

2) Докажите, что если a , b и c отличны друг от друга, то $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \neq 0$.

3) Разложите на множители выражение:

$$a^3(b - c) + c^3(a - b) - b^3(a - c).$$

814. Упростите выражения:

1) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)$.

2) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$

если $a + b + c = 5$.

815. Вычислите сумму: 1) $a^{1980} + \frac{1}{a^{1980}}$; 2) $a^{1981} +$

$+\frac{1}{a^{1981}}$, если известно, что $a^2 + a + 1 = 0$.

816. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 2y + 5.$$

817. Дана последовательность чисел

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1.$$

Докажите, что разность крайних членов $(a_1 - 1)$ равна сумме всех разностей рядом стоящих чисел этой последовательности.

Рекомендуем вначале взять 5 или 7 чисел, а потом доказать и в общем случае.

818. 1) Докажите, что для любых положительных чисел a и b всегда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2) Какая из дробей ближе к единице: правильная или обратная ей (неправильная)?

3) Покажите, что если $x + y = 2$, то $x \cdot y \leq 1$.

819. (Шутка.) Какой знак следует поставить между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, чтобы в результате получить дробь

$$\frac{a+c}{b+d}?$$

820. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4}, \\ x+y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}, \\ x-2y+3z=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}, \\ 2x+3y-4z+7=0. \end{cases}$

821. Каким должно быть число a , чтобы уравнения $x^3 + ax + 1 = 0$ и $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ имели общий корень?

822. Мои часы отстают на 10 мин, но я считал, что они спешат на 5 мин. Часы моего друга Вани спешат на 5 мин, но он думает, что они отстают на 10 мин.

Мы с Ваней договорились встретиться в 16 ч. Кто из нас двоих придет первым к месту встречи?

823. У двух братьев, назовем их *А* и *Б*, дни рождения совпадают. Оказалось, что *А* исполнилось вчетверо больше лет, чем было *Б* тогда, когда *А* было втрое больше лет, чем *Б* тогда, когда *А* было вдвое больше лет, чем *Б*. Сколько лет *А*, если *Б* теперь 21 год?

824. На спортивных состязаниях спортсмены с номерами 1, 2, 3 и 4 заняли первые четыре места, причем ни один из них не занял места, совпадающего с его номером. Оказалось, что номер спортсмена, занявшего четвертое место, совпадает с номером места того спортсмена, чей номер есть номер места спортсмена с номером 2; спортсмен с номером 3 занял не первое место. Какое место, занял каждый из спортсменов?

825. В одном из вагонов поезда Москва — Минск возвращались с целинных земель 16 студентов. В купе № 1 ехали *А*, *Б*, *В* и *Г*, в купе № 2 — *Д*, *Е*, *Ж* и *З*, в купе № 3 — *И*, *К*, *Л* и *М*, а в купе № 4 — *Н*, *О*, *П* и *Р*.

Оказалось, что *А*, *Д*, *И* и *Н* — минчане, *Б*, *Е*, *К* и *О* — могилевчане, *В*, *Ж*, *Л* и *П* — родом из Бреста, а *Г*, *З*, *М* и *Р* — из Гомеля.

Среди них было 4 будущих учителя математики, 4 — истории, 4 — географии и 4 инженера, причем любые четверо студентов одной специальности ехали в разных купе и были из разных городов.

На целине четверо студентов работали строителями, четверо — шоферами, четверо — комбайнерами и четверо — трактористами, причем любые четверо студентов, работавших по одной специальности, ехали в разных купе, были из разных городов и обучались различным специальностям.

Четверо из них оказались футболистами, четверо — боксерами, четверо — волейболистами и четверо — шахматистами, причем каждые четыре любителя одного и того же вида спорта были из разных городов, ехали в разных купе, обучались различным специальностям, а на целине тоже работали по разным специальностям.

Установите для каждого студента специальность, которой он обучается и по которой работал на целине, а также любимый вид спорта, если известно, что *И* — волейболист, *Е* — футболист, *В* — инженер, *Г* — математик, на целине работал строителем, увлекается шахматами, *К* — географ, работал на целине комбай-

нером и увлекается шахматами, а Ж — работал шофером, шахматист.

826. Трое любителей-рыболовов — Петя, Гриша и Вася — вот что сказали о количестве рыбы, пойманной каждым из них:

Петя: Я поймал 22 рыбы; Гриша на 2 больше меня, а Вася на 1 меньше меня.

Гриша: Я поймал не меньше всех; Вася поймал 25 рыб; разница между моим и Васиным уловом составляет 3 рыбы.

Вася: Я поймал меньше, чем Петя; Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на 3 рыбы больше, чем Петя.

Оказалось, что друзья не всегда точны, когда речь идет о результатах рыбной ловли. Два утверждения каждого из них верны, а одно ложно.

Сколько в действительности рыб поймал каждый из ребят?

827. (Шутка.) Мальчики играли в футбол. Утомившись от игры, двое из них легли отдохнуть. Во время сна они испачкались. Проснувшись и взглянув друг на друга, мальчики стали смеяться. Внезапно один из них перестал смеяться, так как сообразил, что он также испачкался. Как он рассуждал?

828. На школьном вечере два класса соревновались в сообразительности и смекалке. Среди многих интересных задач и вопросов было и такое задание. От каждой команды взяли по одному наиболее смекалистому ученику и показали им две белые и одну черную шапочку. Завязав затем обоим глаза, надели каждому на голову по белой шапочке, а черную шапочку спрятали. Им объявили, что победителем будет тот, кто первым определит цвет своей шапочки. После этого повязки сняли. Ни один из соревнующихся не мог видеть цвета своей шапочки, но видел белую шапочку у своего товарища.

Вскоре один из них уверенно заявил, что на нем надета белая шапочка. Как он рассуждал?

829. Из трех победителей математического турнира, набравших по одинаковому числу очков, надо было выделить самого сообразительного. Для этого поступили так: показали 5 шапочек — 3 белые и 2 серые. Завязав затем им глаза, на голову каждого надели по белой шапочке, а оставшиеся две шапочки спрятали. Когда повязки были сняты, объявили, что победителем турнира будет тот, кто первым опреде-

лит цвет своей шапочки. Некоторое время соревнующиеся молча смотрели друг на друга. Наконец один из них сказал, что на нем надета белая шапочка. Как он рассуждал?

830. Когда-то одной из стран правил пожилой король. Наследников у него не было. И, чувствуя, что жить ему остается немного, он начал искать достойного преемника. Наконец 4 самых талантливых юноши королевства предстали перед ним. Король должен был сделать окончательный выбор.

Всем четверым завязали глаза и усадили вокруг стола. Король сказал: «Я притронусь ко лбу каждого из вас и оставлю на нем либо черную, либо белую метку, причем черных больше, чем белых. Затем я прикажу снять повязки с ваших глаз и каждый сможет увидеть метки, сделанные у других. Тот, кто определит, какая метка у него на лбу, будет моим преемником на троне».

Когда повязки были сняты, юноши долго смотрели друг на друга. Наконец один из них воскликнул: «Государь, у меня на лбу черная метка!» — и рассказал, как он решил эту нелегкую по тем временам задачу.

Какие метки сделал король на лбах четырех кандидатов? Как победитель соревнования доказал, что у него черная метка?

831. В трех ящиках лежит по одному шарiku: белый, черный и зеленый. На одном из ящиков имеется надпись «белый», на втором — «белый или зеленый». Где какие шарики лежат, если ни одна из надписей не соответствует действительности?

832. Из трех четвероклассников, победителей математической викторины, набравших по одинаковому числу очков, надо было выделить самого сообразительного. Им предложили такое задание:

На столе стоят 3 совершенно одинаковых ящичка. В одном из них лежат 2 черных шарика, в другом — черный и белый, а в третьем — 2 белых. На крышках ящичков легко прочесть надписи: «2 черных», «2 белых», «черный и белый». Известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Победителем будет тот, кто сможет, вынув только один шарик из какого-либо ящичка, установить, какого цвета шарики лежат в каждом из этих трех ящичков.

Вскоре один ученик подошел к одному ящичку, вынул из него один шарик и рассказал, какие шарики

лежат в каждом ящичке. Из какого ящичка он вынул шарик и как он рассуждал?

833. Вот какое испытание на сообразительность устроили однажды трем любителям логических задач.

Перед ними поставили 3 одинаковых ящичка и сказали, что в одном из них лежат 3 черных шарика, в другом — 2 черных и 1 белый, а в третьем — 3 белых. На каждом из ящичков были наклеены ярлыки: «3 черных», «2 черных, 1 белый», «3 белых». Однако участников испытаний предупредили, что ни один из ярлыков не соответствует содержимому того ящичка, на который он наклеен. Ящички были составлены на столе так, что надписей не было видно.

Каждый должен был вынуть из одного из ящичков 2 шарика, прочесть ярлык на этом ящичке и, не заглядывая в ящичек, определить цвет оставшегося там шарика.

Один из участников, вынув 2 шарика и, прочтя надпись, сразу же сказал: «Я достал 2 черных шарика и могу определить, какого цвета оставшийся шарик». Второй, вынув 2 шарика, прочитал надпись на своем ящичке и сказал: «Я вынул 2 черных шарика, но определить, какой шарик остался в ящичке, не могу». Третий, слыша высказывания своих товарищей, немного подумал и сказал: «Мне не нужно вынимать шарики. Я знаю цвет каждого шарика, лежащего в третьем ящичке».

Как он смог определить, какие шарики находятся в оставшемся ящичке?

834. Решите теперь предыдущую задачу, но при несколько усложненном условии.

Перед участниками поставили 3 одинаковых ящичка и сказали, что в каждом из них лежит по 3 шарика. Имеются и 3 разных ярлыка, на которых указано, сколько и каких, белых или черных, шариков находится в каждом ящичке. Но наклеены они так, что ни один из ярлыков не соответствует содержимому того ящичка, на который он наклеен, причем надписей не видно.

Каждый должен был вынуть из одного ящичка 2 шарика, прочесть ярлык на этом ящичке и, не заглядывая в ящичек и не читая надписи на других ящичках, определить цвет оставшегося шарика.

Первый из участников, вынув 2 шарика и прочтя надпись, сразу же сказал: «Я достал 2 черных шарика

и уверен, что оставшийся в ящичке шарик белого цвета». Второй, вынув 2 шарика, прочитал надпись на своем ящичке и сказал: «Я вынул 2 белых шарика, но определить, какой шарик остался в ящичке, невозможно». Третий слышал оба эти заявления, подумал немного и сказал: «Я не буду вынимать из своего ящичка ни одного шарика, но уверен, что все они черного цвета».

Как он рассуждал?

835. Восемь команд участвуют в первенстве школы по футболу. Каждые две команды должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому времени одинаковое число матчей.

836. Шестиклассник Петя, победитель математической олимпиады, был направлен на экскурсию в Минск. В университете он увидел машину-экзаменатора, на экране которой одновременно появляются 5 вопросов. На каждый из них нужно ответить «да» или «нет» нажатием соответствующих кнопок.

Пете сказали, что машина всегда задает больше таких вопросов, на которые следует давать утвердительные ответы, и что ответы на 3 подряд стоящих вопроса никогда не должны совпадать. На второй вопрос Петя и сам смог верно ответить. Кроме того, он догадался по характеру первого и последнего вопросов, что ответы на них должны быть противоположными.

Эти сведения дали возможность Пете ответить на все вопросы правильно. Каков был ответ на второй вопрос?

837. На плоскости дано 25 точек. Среди любых трех из них найдутся две, расстояние между которыми меньше 1 см. Доказать, что найдется круг радиуса 1 см, содержащий не менее 13 из этих 25 точек.

838. В один пустой ящик вкладываются n пустых ящичков поменьше. Затем в каждый из этих n пустых ящичков кладут или не кладут n пустых ящичков меньшего размера. Процедуру вкладывания ящичков продолжают снова и снова.

Наполненным ящиком называем такой, в который вложено хотя бы n ящичков. Всего в конце концов оказалось k наполненных ящичков. А сколько тогда оказалось пустых?

839. Найдите наименьшее из чисел, обладающих

тем свойством, что для умножения их на 3 достаточно первую цифру поставить на место последней, а для умножения на 5 — последнюю цифру на место первой.

840. Найдите наименьшее число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все цифры от 1 до 9.

841. Если переписать в обратном порядке цифры некоторого пятизначного числа, то в результате получится число, вчетверо большее первоначального. Найдите это число.

842. Докажите, что число 444...44, записанное только четверками, не делится на 8, сколько бы в нем ни было четверок.

843. 1) Могут ли квадраты целых чисел иметь вид: $10n + 3$, где n — любое целое число?

2) Почему число, тридцать цифр которого — единицы, а остальные — нули, не может быть точным квадратом?

3) Может ли сумма чисел натурального ряда $1 + 2 + 3 + \dots + k$ при каком-либо k оканчиваться цифрой 7?

844. Может ли выражение $n^2 + n + 1$ являться квадратом целого числа при натуральном n ? Четным или нечетным числом является данное выражение?

845. Если значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ есть целые числа при $x = 0, 1$ и 2 , то они есть целые числа при любом целом x . Докажите.

846. Докажите, что у цифр многозначного простого числа не может быть общего делителя, большего единицы.

847. Простые числа располагаются в натуральном ряду весьма неравномерно. Например, числа 1949 и 1951 простые, ближайшее простое число — 1973, следующее за ним — 1979, следующее — 1987.

Можно ли найти в ряду натуральных чисел 1990 следующих друг за другом чисел, среди которых не было бы ни одного простого числа?

848. Докажите, что при любом $p > 3$ три числа: $p, p + 2, p + 4$ — не могут быть одновременно простыми числами.

849. Какое наименьшее число любых различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них обязательно были такие два числа, разность которых делилась бы на 3?

850. В магазине было шесть ящиков с гвоздями массой в 22, 23, 26, 28, 29 и 31 кг. Два покупателя

купили пять ящиков. Один из них взял по массе в 4 раза больше, чем другой. Какой ящик остался?

851. Числа a и b — взаимно простые. Чему может быть равен наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a - b$?

852. Замечательный французский математик Софи Жермен (1776—1831) много сделала в области геометрии и теории чисел, а за работу о колебаниях упругих пластинок была удостоена премии Парижской Академии наук.

Вот одна интересная задача Софи Жермен, показывающая, как иногда сложные проблемы могут решаться просто и красиво.

Показать, что число $k^4 + 4$, где k — любое целое число, большее единицы, есть составное число.

853. Докажите, что $n^3 + 20n$ делится на 48 при любом четном n .

854. Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, причем второй двигался быстрее первого. На расстоянии 6 км от пункта A они встретились и, не останавливаясь, продолжали свой путь. Когда второй достиг пункта A , он сразу же повернул обратно, а первый, достигнув пункта B , тоже повернул обратно. Вторая их встреча произошла на расстоянии 4 км от пункта B . Определите расстояние от A до B .

855. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять каждого из этих сортов лома, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

856. Два путешественника встретили трактор, который тянул на полозьях длинную трубу. Друзья заспорили по поводу ее длины. И так как их мнения разошлись, один из них предложил разрешить спор измерением. Он прошел вдоль трубы по направлению движения трактора и насчитал 140 шагов. Затем повернулся и пошел с той же скоростью обратно вдоль трубы. На этот раз он насчитал всего 20 шагов. Этих двух измерений путешественнику оказалось достаточно, чтобы определить длину трубы, так как он знал, что длина его шага 1 м.

Вычислите и вы по этим данным длину трубы.

857. Сколько ступенек имеет лестница эскалатора метро в неподвижном состоянии, если два друга, из которых один спускался вниз вдвое быстрее второго,

насчитали на движущейся лестнице соответственно 60 и 40 ступенек?

858. Требуется обнести проволочной сеткой длиной 200 м участок земли в форме прямоугольника, используя для одной стороны стену дома. Вычислите размеры прямоугольника, при которых площадь участка будет наибольшей.

859. Прямоугольный участок площадью 900 м^2 необходимо обнести забором, две смежные стороны которого каменные, а две другие — деревянные. Один погонный метр деревянного забора стоит 1 р., а каменного — 2,5 р. На строительство выделено 200 р. Хватит ли этой суммы?

860. Дан угол и внутри него точка M . Постройте треугольник наименьшего периметра такой, чтобы одна его вершина находилась в данной точке M , а две другие — на сторонах данного угла.

861. Буровая вышка B расположена в 9 км от C — ближайшей точки шоссе (шоссе — прямая линия). С буровой надо направить курьера в населенный пункт A , расположенный на шоссе в 15 км от точки C . Если курьер по полю едет на велосипеде со скоростью 8 км/ч, а по шоссе — 10 км/ч, то к какой точке шоссе ему надо ехать по полю, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта A ?

862. Четыре дачных домика расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Найдите место, где нужно расположить колодец так, чтобы сумма всех расстояний от колодца до каждого из домиков была наименьшей.

863. В пункте A расположен гараж, имеющий 300 машин, в пункте B — гараж на 200 машин и в пункте C — гараж на 100 машин. Расстояние между пунктами: $AB = 4$ км, $BC = 3$ км и $AC = 5$ км. Где надо построить бензозаправочную станцию, чтобы общее число километров, проходимых машинами от гаражей до станции, было наименьшим?

На математических олимпиадах значительное место занимают геометрические задачи, которые выделяются либо необычным условием, либо оригинальным решением, либо неожиданным ответом. Приведем в качестве примера три задачи с их решениями.

864. В треугольнике ABC две высоты h_b и h_c меньше длин сторон, на которые они опущены. Что можно сказать о таком треугольнике?

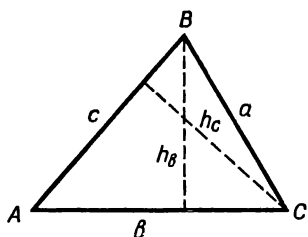


Рис. 91

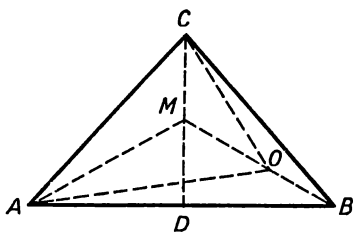


Рис. 92

Решение. По условию $h_b \geq AC$ и $h_c \geq AB$ (рис. 91). Пусть $h_b \geq h_c \geq AB$, но $h_b \leq AB$, значит, $h_b = AB$. Если $h_c \geq h_b \geq AC$, то аналогично получим, что $h_c = AC$. В обоих случаях треугольник будет прямоугольным.

865. На окружности дана дуга в 19° . Как с помощью циркуля разделить ее на 19 равных по величине частей?

Решение. Если данную дугу отложить на окружности 19 раз, то получим $19 \cdot 19 = 361$. В результате найдем дугу в 1° , что позволяет разделить данную дугу на 19 частей.

866. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC , в котором равны стороны AC и BC , а $\angle ACB = 80^\circ$, проведены прямые, пересекающиеся в точке O внутри треугольника (рис. 92). Найдите величину угла ACO , если $\angle OAB = 10^\circ$ и $\angle ABO = 30^\circ$.

Решение. Построим биссектрису угла CAO , пересекающую высоту CD равнобедренного треугольника в точке M . Так как $\angle MAB = \angle ABO = 30^\circ$, то продолжения отрезков AM и BO должны пересекаться на высоте CD , значит, точка M лежит на продолжении отрезка BO .

Рассмотрим треугольники ACM и AMO , у которых AM — общая сторона, $\angle CAM = \angle MAO$ и, как легко подсчитать, $\angle AMC = \angle AMO = 120^\circ$. Следовательно, $\triangle ACM = \triangle AMO$, откуда $AC = AO$, то есть треугольник CAO является равнобедренным с углом CAO при вершине, величина которого равна 40° . Тогда $\angle ACO = \angle AOC = 70^\circ$.

867. Чему равна величина угла ABC (рис. 93), образованного диагоналями двух смежных граней куба?

868. Равнобокая трапеция $ABCD$, где $AD \parallel BC$ и $BC < AD$, диагональю AC разбивается на два рав-

нобедренных треугольника. Найдите острый угол трапеции.

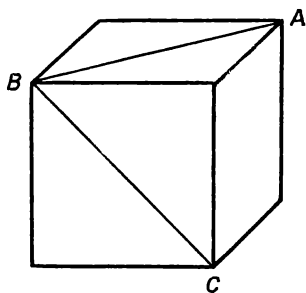


Рис. 93

869. В круглом бассейне плавает щука. Начав «путешествие» от стенки бассейна, она проплыла строго на север 6 м, наткнулась на борт бассейна и повернула на запад. Проплыв еще 8 м, она снова наткнулась на борт бассейна. Чему равен диаметр бассейна?

870. В треугольник ABC вписан полукруг, центр которого принадлежит AB . Известно, что $AC + BC = 12$ см, а площадь треугольника равна 15 см^2 . Определите радиус вписанного полукруга.

871. В круг радиуса 10 см вписан прямоугольник $ABCD$. Вычислите периметр четырехугольника, полученного последовательным соединением середин сторон вписанного прямоугольника.

872. 1) Найдите простейший способ доказательства утверждения, что в прямоугольном треугольнике длина медианы, делящей пополам гипотенузу, равна половине длины гипотенузы.

2) Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, образуют с катетами равные углы.

3) В треугольнике высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Определите величины углов этого треугольника.

4) Высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Докажите, что такой треугольник прямоугольный. Определите величины остальных углов этого треугольника.

873. Докажите, что в равнобокой трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии.

874. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике длина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон, равна полусумме длин двух других сторон, то эти две последние стороны параллельны.

875. 1) Дан правильный пятиугольник, то есть выпуклый пятиугольник, у которого все стороны и все углы равны. Докажите, что внутри него найдется такая точка, лежащая на диагонали, из которой все стороны видны под углами, не большими прямого.

2) Дан правильный пятиугольник. Докажите, что круги, построенные на его сторонах как на диаметрах, не покрывают пятиугольник полностью.

876. На прямой даны три точки A , B и C , причем точка B лежит между точками A и C . На отрезке AB построен равносторонний треугольник ABC_1 , а на отрезке BC — равносторонний треугольник BCA_1 , причем оба треугольника построены по одну и ту же сторону от прямой ABC . Обозначим середину AA_1 через M , середину CC_1 — через N . Докажите, что треугольник BMN — равносторонний.

877. В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего угла B до пересечения с прямой AC в точках D и E . Докажите, что $BD = BE$, если известно, что разность углов C и A треугольника равна 90° .

878. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если медианы, проведенные из вершин острых углов, равны 3 см и 2 см.

879. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK:KB = 3:2$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC , делит медиану BM .

880. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, M — произвольная точка плоскости. Докажите, что $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

881. Найдите площадь равнобокой трапеции, имеющей высоту h и диагональ d .

882. С помощью циркуля и линейки разделите угол в 54° на три равные по величине части.

883. Постройте ромб по сумме диагоналей и углу, образованному одной из диагоналей со стороной.

884. Постройте прямоугольник по диагонали и сумме (разности) двух его неравных сторон.

885. 1) Постройте треугольник по высоте и медиане, выходящим из одной вершины, и радиусу описанного круга.

2) Постройте треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, выходящим из одной вершины.

886. Постройте прямую, соединяющую недоступ-

ную вершину B угла ABC и данную внутри угла точку M .

Примечание. Возможно несколько решений: а) используя свойства диагоналей параллелограмма; б) основываясь на теореме о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке; в) применяя осевую симметрию.

887. Постройте окружность, касающуюся данной прямой в заданной на ней точке и данной окружности.

888. 1) Найдите множество середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку.

2) Рассмотрите случай, когда данная точка лежит вне окружности, то есть найдите множество середин хорд, которые данная окружность отсекает на прямых, проходящих через данную вне окружности точку.

889. 1) Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого находится в данной точке A , другая — на данной прямой l , а третья — на данной окружности с центром O .

2) Постройте равносторонний треугольник, одной вершиной которого является данная точка A , а две другие лежат соответственно на двух данных прямых m и n .

890. Докажите, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна сумме длин диаметров вписанной и описанной около этого треугольника окружностей.

891. У прямоугольного треугольника сумма катетов больше гипотенузы; сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. А что можно сказать о сумме кубов катетов и кубе гипотенузы?

892. Все бесконечно продолженные стороны выпуклого многоугольника (рис. 94), периметр которого равен 12 см, сдвигаются на 1 см во внешнюю сторону. Докажите, что площадь многоугольника увеличивается в этом случае больше чем на 15 см^2 .

893. Докажите, что во всяком треугольнике наибольшей стороне соответствует наименьшая медиана.

894. Из точки P к данной окружности проведены касательные PA и PB , и произволь-

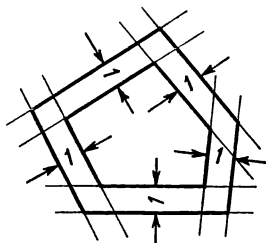


Рис. 94

ная точка M окружности соединена с точками касания A и B . Если через точку P провести прямую l , параллельную касательной к данной окружности в точке M , то прямые MA и MB отсекут на прямой l отрезок, длина которого не зависит от выбора точки M и который делится точкой P пополам. Докажите.

895. Допустим, что бильярдный шар отражается от прямолинейного борта так, что две прямые, по которым он движется до и после удара, одинаково наклонены к борту. Внутри прямоугольника $ABCD$ даны две точки M и N . В каком направлении должен быть пущен шар из точки M , чтобы он прошел через точку N после того, как он отразится последовательно от всех четырех сторон данного прямоугольника?

Докажите, что путь, по которому пройдет шар, есть кратчайшая ломаная линия, идущая из точки M в точку N и имеющая вершины последовательно на сторонах прямоугольника.

896. Один путешественник вышел из палатки и прошел 1 км точно на юг, затем повернул и прошел 1 км точно на восток, повернул снова и прошел 1 км точно на север. Оказалось, что он возвратился к своей палатке. Здесь он увидел медведя. Какого цвета был медведь?

Обычно отвечают, что белый, так как палатка находилась на Северном полюсе.

Спрашивается, могут ли быть еще на поверхности Земли такие точки, что если пройти 1 км на юг, затем 1 км на восток и 1 км на север, то возвратимся в исходную точку.

897. Даны две точки A и B . Пользуясь только циркулем, постройте хотя бы одну точку C , принадлежащую прямой AB .

898. Пользуясь одной двусторонней линейкой: а) удвойте данный отрезок; б) разделите данный отрезок пополам; в) проведите прямую, перпендикулярную данной прямой, через точку, принадлежащую данной прямой; г) постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

899. Проведением только одних прямых (односторонней линейкой): а) разделите основания трапеции пополам; б) зная середину отрезка AB , через точку C проведите прямую, параллельную данному отрезку.

900. На плоскости взяты 9 точек, расположенных в виде квадрата 3×3 . Сколько существует треуголь-

ников, у которых одна вершина находится в точке *A*, а две другие — в двух из остальных восьми точек?

901. Говорят, что в XVIII в. каждый десятый мужчина на Руси был Иван, а каждый двадцатый — Петр. Если это верно, то кого тогда было больше: Иванов Петровичей или Петров Ивановичей?

902. Для экскурсии в Хатынь были заказаны два автобуса: *A* и *B*. Две группы выехали одновременно и возвратились в одно и то же время. Оказалось, что первая группа ехала автобусом *A* вдвое больше времени, чем стоял автобус *B*, а вторая группа ехала автобусом *B* втрое больше времени, чем стоял автобус *A*. Какой из автобусов двигался быстрее?

903. Отец и сын совершали путешествие протяженностью в 48 км. В их распоряжении была лошадь, на которой один человек мог ехать со скоростью 12 км/ч. Отец пешком проходил за час 5 км, а сын — 6 км. Они попеременно ехали на лошади и шли пешком. Проехав определенное расстояние верхом, каждый из них оставлял лошадь для другого и дальше шел пешком. В середине пути один из них поравнялся с другим. Какой путь прошел отец от начала движения до встречи?

904. В 12 часов из городов *A* и *B* выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями, соответственно, легковая и грузовая автомашины. В пути от *B* до *A* грузовая автомашина останавливалась более чем на 1 ч для погрузки, после чего, продолжив движение, встретилась с легковой в 14 ч 12 мин. Определите время прибытия грузовой автомашины в город *A*, если известно, что ее скорость меньше, чем скорость легковой автомашины, и что каждая автомашина на путь от *A* до *B* затрачивает целое число часов.

905. Возвращаясь из школы домой, Юра увидел объявление о начале сеансов в кинотеатре. Придя домой, он попытался по памяти записать это расписание, но ему удалось вспомнить лишь следующее:

- 1-й сеанс — 12 ч ... мин,
- 2-й сеанс — 13 ч ... мин,
- 3-й сеанс — ... ч ... мин,
- 4-й сеанс — ... ч ... мин,
- 5-й сеанс — ... ч ... мин,
- 6-й сеанс — ... ч ... мин,
- 7-й сеанс — 23 ч 05 мин.

Однако после размышления ему удалось восстановить все забытые числа, так как он вспомнил, что продолжительность всех сеансов, включая перерывы, была одинакова. Попробуйте и вы сделать это.

906. Вычислите $x^7 + \frac{1}{x^7}$, если $x + \frac{1}{x} = a$, где a — заданное число.

907. Решите в целых числах уравнение:

$$y^3 - x^3 = 91.$$

908. Найдите четырехзначное число, у которого две первые цифры, так же как и две последние, одинаковы, а само число является квадратом целого числа.

909. Можно ли во фразе «И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ» заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные — разными), чтобы каждое слово стало квадратом некоторого целого числа?

910. Некто написал четыре письма четырем разным людям и заготовил четыре конверта с адресами. Сколькими способами можно вложить письма в конверты, чтобы ни одно письмо не попало тому лицу, которому оно адресовано?

911. По внутренней стороне обруча радиуса $2r$ катится без скольжения кружок радиуса r . Какую линию описывает точка, произвольно взятая на границе кружка?

912. Докажите, что в любой компании число тех, кто знаком с нечетным числом членов компании, четно.

913. Сколько существует различных четырехзначных чисел, состоящих из цифр 1 и 2, в записи которых обе цифры встречаются по крайней мере по одному разу?

914. Докажите, что если какая-нибудь пара значений переменных x и y удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} & x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ \text{и} \quad & x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0, \end{aligned}$$

то эта же пара переменных удовлетворяет уравнению

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

915. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, меньше половины любого из катетов и четверти гипотенузы.

916. Докажите, что если в какую-нибудь окруж-

ность вписан выпуклый пятиугольник, все углы которого равны, то его стороны также равны. Будет ли верно аналогичное утверждение для четырехугольника?

917. На стороне AB треугольника ABC между вершинами A и B произвольно выбрана точка C_1 , которая отрезком прямой соединена с вершиной C . Через вершину A проведена прямая, параллельная отрезку CC_1 , до пересечения с продолжением стороны BC в точке A_1 , а через вершину B проведена прямая, параллельная отрезку CC_1 , до пересечения с продолжением стороны AC в точке B_1 . Докажите, что

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}.$$

918. Даны окружность и точки P и Q внутри нее. Постройте вписанный в эту окружность прямоугольный треугольник, у которого один катет проходит через точку P , а другой — через точку Q . При каком расположении этих точек задача становится неразрешимой?

919. Известно, что продолжения параллельных сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N , а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q , причем длина стороны AB равна p . Постройте прямоугольник $ABCD$. В каких случаях задача имеет решение и сколько их может быть?

920. У каждого из чисел от 1 до 1000 подсчитывается сумма его цифр. Затем у каждого числа из получившейся тысячи чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т. д., пока не получится тысяча однозначных чисел. Каких чисел среди полученных будет больше: 1 или 2?

921. Числа $1, 2, \dots, n$ переставлены в некотором порядке: a_1, a_2, \dots, a_n . Докажите, что если n нечетно, то произведение $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \dots \cdot (a_n - n)$ обязательно четно.

922. Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака I группы пришлось по 13 рыб, II группы — по 5 рыб и III группы — по 4 рыбы. Сколько рыбаков было в каждой группе, если всего их 16?

923. Докажите, что если три угла выпуклого четырехугольника тупые, то диагональ, исходящая из четвертого угла, длиннее, чем другая диагональ.

924. Постройте прямоугольный треугольник, зная

гипотенузу c , если известно, что медиана m_c есть среднее пропорциональное его катетов.

925. В плоскости даны пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Каждые две из них соединены друг с другом либо красным, либо синим отрезком так, что никакие три из этих отрезков не образуют треугольник одного цвета. Докажите, что: а) из каждой точки выходит ровно два красных и два синих отрезка; б) красные отрезки образуют замкнутую линию, которая содержит все пять заданных точек (точно так же и синие отрезки). Покажите, каким способом нужно соединять пять точек красными и синими отрезками, чтобы были выполнены условия задачи.

926. Предположим, что справедливы следующие утверждения: среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами; люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда такое утверждение: не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

927. Ученики A, B, C, D, E участвовали в одном конкурсе. Пытаясь угадать результаты соревнований, некто предположил, что получится последовательность: A, B, C, D, E . Но оказалось, что он не указал верно ни места какого-либо из участников, ни никакой пары следующих непосредственно друг за другом учеников. Некто другой, предполагая результаты: D, A, E, C, B , угадал правильно места двух учеников, а также две пары непосредственно следующих друг за другом учеников. Каков был на самом деле результат конкурса?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Столько же, сколько тебе. 2. Ни одного. 3. 5 остановок.
4. а) По 4 ч; б) по 10 км; в) нисколько.
5. Обе будут находиться на одинаковом расстоянии от Минска.
6. Вторник. 7. Пятница. 8. 3 кг. 9. Никогда.
13. В шестой сверху строке, в четвертом слева столбце.
14. Одна, остальные улетели. 15. Две, остальные сгорели.
16. За 5 мин. 17. За 4 мин. 18. За 15 с; за 21 с. 19. 28 с.
20. 10. 21. 45 м. 22. 80 ступенек; в 4 раза.
23. На 9-м этаже.
24. В 5 раз.
25. 8 и 9; 4 и 3; 35 и 40, 24 и 27; 27 и 31; 6 и 3; 64 и 128; 3 и 1; 16 и 15, 15 и 17; 13 и 9; 16 и 17; 49 и 64; 12 и 19.
26. $33 = 2 \cdot 17 - 1$; $13 = 5 + 8$, $48 = 7 \cdot 7 - 1$; $216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$.
27. $14 = 21 - 7$; $6 = (7 + 5) : 2$, $63 = 58 + 5$; $15 = 29 - 2 \cdot 7$; $4 = (7 - 6) \cdot 4$, $16 = 88 : 11 \cdot 2$; $13 = 13 + 8 - 8$; $9 = 6 + 8 - 5$.
28. а) 52 (во втором круге — половины чисел первого круга, а в третьем — удвоенные числа); б) 18 (перемножив числа вне треугольника и разделив произведение на 10, найдем число внутри треугольника).
29. Все 6 к. Васе. 30. Первому — 20 к., второму — 80 к.
31. Первой хозяйке — 2 р., второй — 4 р. 32. А — 20 р., Б — 2 р.
33. 15 с; 25 с; 15 с и 5 с. 34. 90 орехов.
36. Можно, если это сын, отец и дедушка, то есть отец отца.
37. 4 р. 38. 2 кг. 39. 8 кг. 40. Среда. 41. Таня и Галя. 42. 10.
43. Наименьшее трехзначное 100 на 1 больше наибольшего двузначного 99.
44. 100; 99. 45. $1000 + 100 \times 10 - 9 = 1991$.
46. Необходимо перевернуть число. 47. 0; 60; 20. 48. 4; 7; 5.
49. 27; 25; 18; 16; 14. 50. 700 м. 51. 1275; 500 500, 45; 4950.
52. 50. 53. 1200 м. 54. 160 м. 55. 3500 км. 56. Третье звено.
57. Число очков, набранных обеими командами за одно задание, равно 4, поэтому всего было набрано 40 очков. Так как 25 очков больше половины всех набранных очков, то эта команда выиграла.
58. $321 - 122 = 199$.
59. В 5 «А» классе — 35, в 5 «Б» — 38 учеников.
60. 5 человек; 280 р. 61. 132. 62. 75 кустов на 19 грядках.
63. 4 галки; 3 палки. 64. 4 яблока. 65. 1 р. 36 к. 66. 10 и 90.
67. Витя — 18 грибов; Гена — 6 грибов; Вася — 3 гриба.
68. 7 мешков; 5 мешков. 69. 4 брата и 3 сестры.
70. 450 пассажиров. 71. По 36 книг. 72. Всего 96 человек.
73. 8 бабочек. 74. 160 больших ванночек. 75. 36 л. 76. 15 лет.
77. 1) Сыну 11 лет, отцу 33 года. 2) Сыну 12 лет, отцу 36 лет. 3) Дочери 6 лет, матери 28 лет.
78. Через 14 лет. 79. 7 лет.
80. 1) В 13 раз. 2) Брату — 1 год, сестре может быть любое число лет.
81. 4 года. 82. 48 человек. 83. 12 и 13. 84. 25. 85. 15 и 150.
86. 63. 87. 62. 88. 5 ч. 89. 11 ч.
90. 12 ч; входя в кабинет, хозяин услышал последний удар из двенадцати.
91. Через 1 мин. 92. Через 9 мин.
93. Количество кофе в первой кастрюле и молока во второй одинаково.
94. Двое подошли к разным берегам реки.

95. Возьмем 4 любые монеты и положим на каждую чашку весов по две монеты. Если ни одна из чашек не перевесила, то оставшаяся монета фальшивая. Следующим взвешиванием мы легко установим, легче она или тяжелее настоящей (все четыре взятые нами монеты настоящие). Если же одна из чашек перевесила, то вторым взвешиванием сравним массу монет, лежавших на этой чашке. Если их массы равны, то они настоящие. Следовательно, фальшивая монета лежала на второй чашке и она легче настоящей. Если же массы взятых двух монет различны, значит, фальшивая монета находится среди них и поэтому она тяжелее настоящей.

96. 4 9 2
3 5 7
8 1 6

97. Сумму всех чисел необходимо разделить на 3.

98. 7 2 9 99. 12 5 10 100. 8 18 4 102. 20 45 10
8 6 4 7 9 11 6 10 14 15 25 35
3 10 5 8 13 6 16 2 12 40 5 30

103. Искомая сумма равна $(35 + 17 + 59 + 11 + 23 + 41 + 47 + 65 + 71) : 3 = 369 : 3 = 123$. Решение очевидно

104. 1 14 15 4 15 10 4 5 6 3 10 15
12 7 6 9 3 6 16 9 9 16 5 4
8 11 10 5 14 11 1 8 7 2 11 14
13 2 3 16 2 7 13 12 12 13 8 1

105. 11 8 10 5 3 16 10 5
2 13 3 16 2 13 11 8
7 12 6 9 15 4 6 9
14 1 15 4 14 1 7 12

106. 11 24 7 20 3 15 22 9 16 3
4 12 25 8 16 2 14 21 8 20
17 5 13 21 9 19 1 13 25 7
10 18 1 14 22 6 18 5 12 24
23 6 19 2 15 23 10 17 4 11

107. Сумма всех чисел 28, а на двух окружностях — 24. Значит, в центре круга надо поставить число 4

108. В центральном квадрате надо поставить число 5.

109. Одно из возможных решений см. на рисунке 95.

111. 10 и 6. 112. 12, 7 и 5. 113. 22 рыбки и 10 рыбок.

114. 120 марок и 45 марок. 115. 66, 42 и 36. 116. 20 и 6.

117. 28, 18 и 6. 118. 8 л, 14 л и 26 л.

119. 13 лет, 7 лет и 4 года. 120. 39, 21 и 12.

122. СББССБССББББССССБББ, где С — серый, Б — белый камешек.

123. 6. 124. 8 яблок. 125. 12 конфет. 126. 40 м. 127. 30 груш.

128. 30 слив.

129. 15 яиц

130. 60 страниц; две третьих.

131. 36 км.

132. 450 кг

133. 36 км.

134. 27 км.

135. 18 персиков; по 6 персиков.

136. Всего было 36 слив.

137. 390 кг

138. Столько, чтобы оставалось вначале 13 шашек, затем 9, затем 5 и наконец 1.

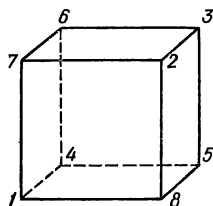


Рис. 95

139. Если камней в кучках поровну, то первый ход A передает B и сам берет всякий раз столько камней, чтобы сохранялось равенство. Если же кучки не равны, то A сам берет из большей кучки разницу.
140. 3 разреза. 141. 11 раз; 23 раза.
142. Так как $120 + 130 = 250$, то это отрезок прямой; на таком «участке» ничего посадить нельзя.
143. б) По 3 стула у каждой стены и по одному в углах комнаты.
144. $\begin{array}{cccc} 2 & 8 & 2 & 3 & 6 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 6 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & & & & \\ 2 & 8 & 2 & 3 & 6 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 2 & 5 \end{array}$
145. При таком подсчете учитывали не число рядов, а число промежутков между рядами. Нужен $(12 + 1) \cdot (6 + 1) = 91$ кустик рассады.
146. 5 углов.
147. Если точки A и B лежат по одну сторону от точки O , то $AB = 2$ см, а если по разные стороны, то $AB = 10$ см.
148. $OM = 6$ см, если $AB = 4$ см и $OM = 2$ см, если $AB = 12$ см.
149. 10. 152. 60. 153. 13. 154. 20.
156. 14. 159. См. рисунок 96.
160. 17. 161. См. рисунок 97.
162. 40 спичек. 163. 840 спичек.
164. $12 \cdot 50 + 3 \cdot 2 = 606$ (мм).
165. 4; 5; 0. 166. 100 м.
167. Обе ковровые дорожки одинаковой длины, по 3 м каждая.
168. Примерно 62 кг. 169. Четвертую.
170. 400 см. 171. 8. 172. Восьмую.
173. 125-ю. 174. 2000 см.
175. 40 г, так как его объем меньше в $5 \cdot 5 \times 5 = 125$ раз.
176. На один день. 177. 1000. 178. 27 000.
179. На 200 дней. 180. 52 стакана. 181. 6 кг.
182. 8. 183. В 2 раза. 184. 10 кг.
185. Одно из возможных решений см. на рисунке 98.
186. См. рисунок 99.
187. Одно из возможных решений см. на рисунке 100.
188. Нельзя, так как периметр прямоугольника должен быть четным числом, а сумма длин всех палочек равна 93 см.
189. Для решения задачи рекомендуем сделать развертку куба и на ней соединить точки, где находятся паук и муха, отрезком прямой. Сравните с другими путями движения паука.
190. 1) 9; 90; 900. 2) 9. 3) 189. 4) 2889. 5) 8; 2; 2; 7; 1; 7.

МЕТР

Рис. 96

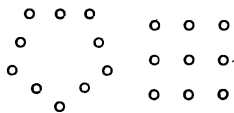


Рис. 97

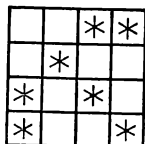


Рис. 98

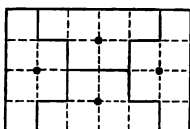


Рис. 99

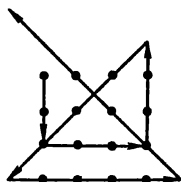


Рис. 100

191. Первая цифра 2 в числе 1272. 192. 55. 193. 657. 194. 174.
 195. 1994. 196. 23-я и 12-я. 197. Произведение равно 0. 198. 0.
 199. На 3-м месте. 200. Нули. 201. На 7-м месте.
 202. На 500; целесообразно все четные и нечетные числа подписать одно под другим в порядке возрастания.
 203. Выпишите друг под другом данные числа

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 100 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & 99 \end{array}$$

 В каждом классе по 50 чисел. Если исключить 10 чисел, которые делятся на 10, останется 40 пар чисел, у которых у каждого четного числа сумма цифр, использованных для записи, на 1 больше, чем у соответствующего нечетного числа. У чисел, делящихся на 10, исключая 100, сумма цифр меньше, чем у соответствующих нечетных чисел, на 8, а у числа 100 — на 17. Следовательно, во втором ряду сумма цифр больше, чем в первом, на $1 \cdot 17 + 9 \cdot 8 - 40 = 49$.
 204. 22, 33, 5^5 ; 9^9 .
 205. 1) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. 2) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 5 \cdot 6 \cdot 7$.
 206. 1) $945 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$.
 2) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.
 207. Через НОК (88; 225) = 19 800 (сут).
 208. Через 60 дней; пятница.
 209. 11. 210. 59. 211. 25 орехов. 212. Нуль.
 213. а) 15; б) 10; в) 5; г) 10; д) 5; е) 15; ж) 20; з) 10.
 214. а) 20; б) 12; в) 4; г) 16; д) 8; е) 40, ж) 48; з) 32.
 215. 6. 216. 17. 217. Шесть: 2; 17; 32; 47; 62; 77.
 218. Искомое число делится на 7 и на 9, значит, это число 63.
 219. При втором обходе по кругу будут вычеркиваться числа 6, 21, 36, ..., при третьем — числа 11, 26, 41, ..., после чего будут вычеркиваться ранее зачеркнутые числа. Следовательно, вычеркнутыми оказываются все числа от 1 до 1000, которые при делении на 5 дают в остатке 1. Таких чисел 200, значит, невычеркнутыми останутся 800 чисел.
 220. Всего имеем 995 нечетных чисел, сумма которых — число нечетное, поэтому и сумма всех натуральных чисел от 1 до 1990 включительно — число нечетное. При замене двух чисел разностью сумма всегда уменьшается на удвоенное вычитаемое, то есть на четное число. Следовательно, сумма оставшихся чисел всегда будет числом нечетным, поэтому нуль никогда получить нельзя.
 221. 63 и 6.
 222. 78 215 и 78. Если заменить три последние цифры нулями, то большее число, а значит, и сумма, уменьшится на 215. Следовательно, число $78\,293 - 215 = 78\,078$ содержит 1001 раз меньшее число, так как большее число без 215 в 1000 раз больше меньшего.
 223. Если бы число оканчивалось на 0, то при зачеркивании цифры единиц число уменьшилось бы на 31 059, что составляет 9 таких частей, каких у искомого числа без цифры 2 десять. Так что искомое число равно $(31\,059:9) \cdot 10 + 2 = 34\,512$.
 224. 91. 225. 34 617. 226. 105 263 157 894 736 842.
 227. 102 564. 228. 157 894 736 842 105 263.
 229. 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793.
 230. 103. 231. 120: 232. 25; 125.
 233. Имеется $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ чисел, не содержащих цифру 1.
 234. 3.

235. Одна из единиц всегда должна стоять на первом месте. Остается расположить на оставшиеся шесть мест две другие единицы. Когда на одном из этих шести мест напишем единицу, то для второй единицы останется 5 свободных мест, т. е. получим 5 различных чисел. Но первую единицу можно записать на любом из шести мест, поэтому получим 30 различных комбинаций. Если при этом поменять эти две единицы местами, то число не изменится, значит, различных чисел будет $30:2 = 15$.
236. 5; 15.
237. 2 партии.
238. $11 \cdot 10 = 110$ фотографий.
239. 9 учащихся.
240. 15, 1024 (всякий раз выбывала одна команда).
241. 6 человек.
242. Состоится $6 \cdot 5:2 = 15$ двусторонних переговоров.
243. 35.
244. Если красные кубики обозначить буквой **к**, черные — **ч**, а белые — **б**, то получим в ящике *A* пять комбинаций кубиков: **кк**; **кб**; **кч**; **чб**; **чч**. Тогда в ящике *B* соответственно: **бчч**, **кчч**, **кбч**, **ккч**, **ккб**.
245. Возможны 8 способов размещения кубиков в ящике *A* могут быть кубики: **ккк**; **ккб**; **кбб**; **ккч**; **кчч**; **бчч**; **ббч**; **кбч**.
246. $12-0-0$, $4-8-0$, $4-3-5$, $9-3-0$, $9-0-3$, $1-8-3$, $1-6-5$.
247. Так как $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, то сумма цифр у каждого равна 15. Каждый записал число, меньшее 416, так как в противном случае сумма со вторым трехзначным числом будет больше 516. Таких чисел лишь шесть: 159 и 168; 267 и 249; 348 и 357. Следовательно, один раз были записаны числа 159, 267 и 348, а второй раз — соответственно 357, 249 и 168.
248. 12 лет. 249. 120 лет. 250. 6. 251. 24. 252. 12.
253. 7 маршрутов. 254. 1200 м. 255. 14 км.
256. Около 2500 деревьев. 257. 30 ц. 258. 220 кг. 259. 200 кг.
261. Около 960 рыб. 262. 3. 263. 72; 2. 264. Через 5 мин.
268. а) $43 \cdot 57$; б) $358 \cdot 48$; в) $452 \cdot 125$; г) $254 \cdot 237$; д) $4503 \cdot 367$; е) $6547 \cdot 3208$.
269. а) $23 \cdot 56$; б) $74 \cdot 23$; в) $926 \cdot 37$, г) $629 \cdot 93$; д) $452 \cdot 125$; е) $523 \cdot 637$.
271. а) $520 \cdot 43$; б) $157 \cdot 563$; в) $336 \cdot 717$; г) $5007 \cdot 603$; д) $7775 \cdot 5557$.
272. а) $45 \cdot 62$; б) $12 \cdot 98$, в) $634 \cdot 111$; г) $746 \cdot 121$; д) $123 \cdot 908$; е) $987 \cdot 121$.
273. $338 \cdot 275$.
275. а) $195:15$; б) $1961:37$; в) $43\,200:576$; г) $2924:86$; д) $53\,300:325$; е) $468\,504:723$.
276. а) $408:24$; б) $82\,885:685$; в) $91\,476:847$; г) $1\,156\,032:576$; д) $11\,868:12$; е) 18 565 или 22 560.
277. $12\,128\,316:124$.
278. $A = 29 \cdot 10\,356 = 300\,324$.
279. $1035 = 5 \cdot 207 = 9 \cdot 115$ или $1014 = 2 \cdot 507 = 3 \cdot 338$.
281. $39\,750:5$.
282. а) 405; б) 2025; 4050; 6075. Для деления полученного частного еще раз на 9 достаточно зачеркнуть в нем первую цифру.
283. 16; 61; 106; 45 км/ч.
284. 1) $2 \cdot 1 = 8-6 = 2:1 = 8:4 = 3-1$;
2) $4+2 = 8-2 = 3 \cdot 2 = 8-2 = 7-1 = 6$,
3) $6823 + 6823 = 13\,646$;
4) $(2 + 4 + 0 + 1)^4 = 2401$.

$$298. \quad \begin{array}{r} \underline{\quad} \quad \underline{23} + \underline{9} = 32 \\ \underline{\quad} \quad \underline{6} + \underline{7} = 13 \\ \underline{\quad} \quad \underline{17} + \underline{2} = 19 \end{array}$$

$$299. \text{ а) } 119 - 32 = 87$$

$$\begin{array}{r} \underline{\quad} \quad \underline{17} \times \underline{3} = 51 \\ \underline{\quad} \quad \underline{7} + \underline{29} = 36 \end{array}$$

$$\text{ б) } 391 : 17 = 23$$

$$\begin{array}{r} \underline{\quad} \quad \times \quad + \\ \underline{96} - \underline{11} = 85 \\ \underline{295} - \underline{187} = 108 \end{array}$$

0 1 2 3 5 6 7 8 9
М А Г Н И Ц К И Й

$$300. 321 + 11. \quad 302. 3 \cdot 58 = 174 = 29 \cdot 6 \text{ или } 4 \cdot 39 = 156 = 78 \cdot 2.$$

$$304. \text{ а) } 6; \text{ б) } 4. \quad 305. \text{ а) } 7; \text{ б) } 5. \quad 306. \text{ а) } 4; \text{ б) } 7.$$

$$307. 17. \quad 308. 3. \quad 309. 5. \quad 310. 4. \quad 311. 8; 11; 16. \quad 312. 11.$$

$$313. \text{ Да. } 314. \text{ Нет. } 315. \text{ Так как в году не более } 366 \text{ дней.}$$

$$316. \text{ Если бы в каждый день года родились } 2 \text{ ученика, то всего в школе было бы не более чем } 2 \cdot 366 = 732 \text{ учащихся.}$$

$$318. \text{ Красная, так как в белой было четное число роз.}$$

$$319. \text{ Костя.}$$

$$320. \text{ Андрей Егоров в 5-м «Б», Борис Петров в 5-м «А», Виктор Иванов в 4-м «А», Григорий Сидоров в 4-м «Б».$$

$$321. \text{ Самый сильный — Владимир, за ним идут Борис, Аркадий и Григорий.}$$

$$322. \text{ Борису Смирнову 8 лет; Диме Алексееву 7 лет, Аркадию Алексееву 4 года; Климу Смирнову 2 года.}$$

$$325. \text{ А и В — отличники.}$$

$$326. \text{ У Алексеева «5», у Васильева «4», у Сергеева «3».$$

$$327. \text{ Алексеев — в «Г»; Борисов — в «Б»; Васильев — в «В»; Григорьев — в «А».$$

$$328. \text{ Андреев — из Гомеля; Борисов — из Бреста; Виноградов — из Витебска; Гордиенко — из Могилева и Давыдов — из Гродно.}$$

$$329. \text{ 1-е место — «Восток»; 2-е — «Космос»; 3-е — «Чайка»; 4-е — «Победа»; 5-е — «Салют».$$

$$330. \text{ В шахматы играет Б.}$$

$$331. \text{ 1-е — Сергей; 2-е — Олег; 3-е — Павел; 4-е — Леонид.}$$

$$332. \text{ Вначале беседовал со Вторым; во вторник.}$$

$$333. \text{ Первый старик, кем бы он ни был, ответил, что он туземец.}$$

$$335. \text{ Архипов преподает математику, Морозов — русский язык, Светлов — историю.}$$

$$336. \text{ Боря — футболист, Вася — шахматист, Дима — поэт.}$$

$$337. \text{ Кондратьев — плотник, Давыдов — маляр, Федоров — водопроводчик.}$$

$$338. \text{ Воронов — танцор, Павлов — певец, Левицкий — писатель, Сахаров — художник.}$$

$$339. \text{ Саша будет комбайнером, Коля — трактористом, Петя — садовником.}$$

$$340. \text{ Сидоров — машинист, Петров — проводник, Иванов — помощник.}$$

$$341. \text{ В 1-м — Гена, во 2-м — Алеша, в 3-м — Боря, в 4-м — Вася.}$$

$$342. \text{ Абдула знает персидский и армянский, Мохаммед — турецкий и греческий, Салал — греческий и армянский, Юсуф — персидский и греческий.}$$

$$343. \text{ Иванов — парикмахер, Петренко — плотник, Сидорчук — мельник, Гришин — почтальон, Алексеев — маляр.}$$

344. А — в Одессе, Б — в Санкт-Петербурге, В — в Киеве, Г — в Минске, Д — в Харькове, Е — в Москве.
345. Ла, Ту, Ми, Ан. 346. С-1, С-4, С-5, С-3, С-2.
347. Петя — радиолюбитель и художник, Коля — геолог и музыкант, Вася занимается в авиамodelьном кружке и рыболов.
348. Радиолюбитель Вася — в 8-м, авиамodelист Коля — в 9-м, а Миша занимается в математическом кружке и в 10-м классе.
349. В 1-м — Захар, во 2-м — Кирилл, в 3-м — Александр, в 4-м — Григорий, в 5-м — Иван, в 6-м — Дмитрий, в 7-м — Евгений, в 8-м — Василий, в 9-м — Леонид, в 10-м — Борис, в 11-м — Михаил.
351. 14; 23; 41; 121; 200; 212. 352. 7; 11; 30; 43; 71; 100.
353. 10; 20; 110; 221; 1000; 1002. 354. 1; 10; 101; 111; 1000; 10000.
355. В четверичной; в семеричной; в троичной.
356. Нет. 357. В троичной. 358. 1731. 359. 321; 1000; 10000; 20012.
360. 71; 100; 200; 4762. 361. 52; 100; 558; 2107. 362. 20; 151; 1000; 4140.
363. 1000; 1002; 2011; 1000000.
364. 11101; 110010; 1000110; 10001100.
366. 48; 2598; 52; 23; 52; 65. 367. 537; 100; 44; 361.
369. 1) 34; 330; 1101; 10000; 10211.
2) 22; 222; 1111; 11000; 10020.
3) 75; 131; 1041; 11000; 4033.
4) 101; 1011; 1010; 100110; 110000.
371. 1) 21; 2011; 2004; 344; 334.
2) 11; 1011; 2; 121; 122.
3) 13; 2022; 1107; 1606; 2665.
4) 10; 101; 11; 101010; 100011.
372.
$$\begin{array}{r} 21102 \\ + 21212 \\ \hline 120021 \end{array}$$
373. а) $5257 + 4325 = 11604$; б) $2421 + 1232 = 4203$;
в) $4123 + 4223 = 13401$; г) $425 - 136 = 256$;
д) $1536 - 642 = 674$; е) $30210 - 11101 = 13103$
374. а) 14401; 13413; б) 20101; 22111; в) 17165; 13301.
375. В пятеричной. 376. 3124; 14341; 13301.
378. а) 1012; 1212; 111201.
б) 4642; 13574; 44176.
в) 2464; 15351; 265434.
379. а) 11101; 20110; 21121.
б) 11331; 12414; 14402.
в) 11703; 16202; 16727.
380. 1) 113034; 14123041. 2) 110121, 2211111. 3) 204324; 11570170.
381. 11011; 1001000111; 11100001110; 1111111100100.
382. В семеричной; в восьмеричной; в троичной.
383. Число $4 = 2 \cdot 2$ записывается как 100 лишь в двоичной системе, в которой цифры 2 нет. Значит, такое равенство не может иметь места ни в какой одной системе счисления. Заметим, что $(2 \cdot 2)_{10} = 100_2$.
385. а) 132; 2011 (ост. 23); б) 21; 202; в) 101 (ост. 10); 1101.
386. Числа записаны в четверичной системе.
387. В шестеричной системе.
388. Если от 19 ч отсчитать еще 20 ч, то получим 15 ч следующих суток.
389. Надо после слова «двадцать» поставить двоеточие.
390. В восьмеричной системе.

$$391. 8 \cdot 125 = 1000; \quad 16 \cdot 625 = 10\,000.$$

392. См. рисунок 101.

395. 1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг, 32 кг.

397. 100 г, 300 г, 900 г, 2 кг 700 г.

398. 3 кг.

399. 1) 50; 2) 100.

400. 1) Увеличится на 1. 2) На $\frac{1}{3}$.
3) $1:1 = 1$.

401. 2 яблока надо разделить на 3 равные части каждое и 3 яблока — пополам каждое, получится 6 трюбемых порций.

402. 1. 403. 1) Запятую. 2) Перевернуть.

404. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. 405. 4 кг.

406. а) Деление; б) умножение; в) сложение; г) вычитание

407. а) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$, в) $\frac{1}{2} - \frac{3}{7}$, г) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$,

д) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, е) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$; ж) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9}$; з) $\frac{1}{6} - \frac{2}{15}$.

408. 631 938:625. 409. 25,6 + 2,35.

410. Увеличится в $\frac{5}{4}$ раза. 411. Уменьшится.

412. $\frac{1}{3}$, так как при прибавлении к числителю знаменателя дробь увеличивается на 1, что составит 3 части.

413. При прибавлении любого числа к числителю и знаменателю дроби разность между знаменателем и числителем не изменяется, всегда равна 6, а должны получить дробь с разностью 2, значит, дробь сократили на 3, то есть $\frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$. Ответ: 2.

414. 9. 415. 1826 г. 416. Третью часть.

417. Число, близкое к 100 и делящееся на 19, это 95, значит, мест стало 190, свободных — 10, следовательно, на слет прибыло 180 пионеров.

418. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$. 419. 8; 12; 5; 20. 420. $19\frac{1}{4}$; $30\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{2}$; $136\frac{1}{8}$.

421. 100 л и 45 л. 422. 10 га.

423. 480 га пашни и 320 га сенокоса.

424. 1200 штук по 25 м и 1600 штук по 12,5 м.

425. 28. 426. 12 л; 8 л; 7 л. 427. 2 р.

428. 1) 28 учеников; 2) В 8 ч утра. 3) В 1 ч 20 мин дня.

429. 60 км. 430. 38 яблок. 431. 80 км. 432. Около 600 км.

433. $\frac{1}{24}$; $\frac{1}{48}$. 434. 1) 12 сут. 2) 24 сут. 435. $\frac{7 \text{ км}}{48 \text{ мин}}$.

436. За 24 с. 437. В 2,5 раза. 438. На 22,5 км.

439. 18 км/ч; 18 км/ч. 440. 50 км. 441. 2,5 км/ч. 442. На 20 мин.

443. Предположим, что прохожий, находящийся в некотором пункте А, пошел вдоль трамвайной линии: 35 мин он шел в одну сторону, а затем 35 мин — обратно. За это время мимо пункта А в один конец прошло $5 + 7$ трамваев. Значит, трамваи отправляются через $70:12 = 5\frac{5}{6}$ (мин).

444. 31 трамвай. 445. 15 км/ч. 446. За 24 ч.

447. 6 мячей, по 2 в каждом матче. 448. За 10 ч.

$$VI + V = XI$$

$$VI = IX - III$$

$$IX - V = IV$$

Рис. 101

$$449. \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101}.$$

$$450. 1 - \frac{1}{10000} = 0,9999.$$

451. Единице. 452. За 45 мин. 453. 20 коров.

454. 7 сыновей, 49 000 р. 455. 8 косцов. 457. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$. 458. $\frac{1}{4}$.

459. 30 учеников. 460. 42 ученика. 461. 35 учеников.

462. 600 штук. 463. 0,4 т. 464. 26-го мая. 465. 9 ч 36 мин вечера.

466. 8 ведер спирта и 19 ведер воды. 467. 36, 32 и 34.

468. 96 р., 84 р. и 128 р. 469. 20 мальчиков и 16 девочек.

470. 64 к., 96 к. и 1 р. 28 к. 471. 12 л; 9 л; 6 л. 472. 30 яблок.

473. 28 учащихся. 474. 180 яблок и 60 груш. 475. 1,6 ч.

476. В 2 раза. 477. 105 прыжков. 478. 100 к.

479. 50 %, так как воды и спирта стало поровну.

480. На 25 %; на 20 %. 481. $11\frac{1}{9}$ %. 492. 50 кг. 483. 48 т.

484. $\approx 2,77$ кг. 485. 60 кг. 486. 1,5 кг.

487. 1) На 12,5 %. 2) Нет, масса семян стала меньше на 4 %.

488. 20 кг. 489. На 75 %. 490. На 20 %. 491. На 12,6 %.

492. На 24 %. 493. 80 кг и 60 кг. 494. 30 г сахара и 163 г воды.

495. 36 учеников. 496. 240 девочек и 240 мальчиков.

497. 4 девочки и 16 мальчиков. 498. 5 девочек и 25 мальчиков.

499. 12 девочек и 80 мальчиков.

500. Победит спортсмен с более длинным шагом.

501. 125 г. 502. На $18\frac{2}{11}$ %. 503. Необходимо. 504. Необходимо.

505. Необходимо. 506. Необходимо. 507. Достаточно.

508. Необходимо и достаточно. 509. Достаточно.

510. Достаточно. 511. Достаточно. 512. Достаточно.

513. Необходимо и достаточно. 514. Необходимо.

515. 1) Достаточно. 2) Достаточно. 3) Необходимо и достаточно.

516. 1) Достаточно. 2) Необходимо и достаточно. 3) Необходимо и достаточно.

517. 1) Необходимо. 2) Достаточно. 3) Необходимо и достаточно.

4) Необходимо. 5) Необходимо и достаточно. 6) Необходимо.

7) Достаточно. 8) Достаточно. 9) Необходимо и достаточно.

518. Достаточно. 519. Необходимо.

520. Необходимо и достаточно. 521. Необходимо и достаточно.

522. Достаточно. 523. Необходимо и достаточно.

524. Необходимо и достаточно. 525. Достаточно.

526. Необходимо. 527. Необходимо и достаточно.

528. Необходимо и достаточно. 529. Достаточно.

530. Слово «тогда» выражает достаточность, а слова «только тогда» — необходимость условия (делимость на 9 суммы цифр).

533. а) Число 3 не является делителем числа 1980, или, в соответствии с правилами русской речи, число 3 является делителем числа 1980.

534. Прав Петя, так как $a \geq 0$.

535. а) $x \geq 3$; б) $x > 2$; в) $x < 0$; $x \geq 2$; г) $|x| \leq 1$.

536. а) $3 < 5$; $3 \leq 5$. б) $-2 > -5$; $-2 \geq -5$; в) $3 \leq 3$; $3 \geq 3$.

537. «Коля решил не все шесть задач, предложенных на городской олимпиаде».

538. Жан лжет; «неверно, что все французы лгут», значит, что «не все французы лгут».
539. а) Все натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, не являются простыми числами.
 б) Существуют такие a и x , что $2x^2 + a^2 \leq 0$ (например: $a = 0$, $x = 0$).
 в) Существуют такие p и q , что сумма корней уравнения равна свободному члену (например: $x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$).
 г) Существуют такие p и q , что сумма корней уравнения не равна свободному члену.
 д) В каждом поезде, идущем из Минска в Москву, существует вагон, в котором все места заняты (нет свободного места).
 е) Существуют два числа, произведение которых делится на некоторое третье число, но ни один из множителей не делится на это число (например, 3, 4, 6).
 ж) Существуют параллельные прямые, имеющие общие точки (совпадающие прямые).
540. а) 22 шара; б) 24 шара; в) 30 шаров.
541. В кружке — чай; в чашке — молоко; в стакане — кофе; в кувшине — квас.
542. Взять второй стакан, перелить его содержимое в пятый стакан и второй поставить на место.
543. В обоих случаях получаем число спортсменов-отличников.
544. Старший — Сережа, средний — Толя и самый младший — Саша.
545. Первое место у Димы, затем идут Алик, Коля и Лёня.
546. A выше B . Если они из одного ряда или шеренги, то это очевидно. Если же они из разных рядов и разных шеренг, то возьмем солдата, который находится в ряду A и в шеренге B (на пересечении их); он выше B , но ниже A .
547. Амфору изготовили финикийцы в III в. до н. э.
548. Победителями стали A и B .
549. Алеша занимается в хоровом, Вася — в танцевальном, Сережа — в драматическом.
550. Петя — баскетболист, Гена — волейболист, Дима — гимнаст, а Вова — легкоатлет.
551. Физик владел французским и русским; биолог — английским и французским; историк — итальянским и русским; математик — английским и русским.
552. A — в № 4; B — в № 2, B — в № 5; Γ — в № 1; D — в № 6; E — в № 3.
553. C живет в Минске и увлекается живописью.
554. Саша — комбайнер и киномеханик; Коля — тракторист и руководитель драмкружка; Петя — садовод и радист.
556. Всегда может выиграть второй, называя числа 10, 20, 30, ..., 100.
563. Если $n \leq p$, то всегда выигрывает первый. Если $n > p$, то для выигрыша нужно называть числа n ; $n - (p + 1)$; $n - 2(p + 1)$; $n - 3(p + 1)$; ..., то есть числа вида $n - k(p + 1)$, пока впервые не получим число, меньшее $p + 1$. Если это будет число 0, то всегда может выиграть тот, кто начинает игру вторым, если же это будет натуральное число m , меньшее $p + 1$, то выигрыш обеспечен начинающему игру, если он будет называть числа m ; $m + (p + 1)$; $m + 2(p + 1)$; ..., $m + k(p + 1)$.

564. Желая выиграть должен называть числа вида $n - 1 - k(p + 1)$.
566. Если m делится на $p + 1$ без остатка, то выигрыш обеспечен начинающему игру вторым, который всякий раз оставляет число спичек, кратное $p + 1$. Если же при делении m на $p + 1$ получим остаток n , где $1 \leq n \leq p$, то всегда может выиграть начинающий, который вначале возьмет n спичек, а затем всякий раз будет брать столько спичек, чтобы для противника оставалось число спичек, кратное $p + 1$.
568. а) Если $m = 0$, то при любом n выигрывает А.
 б) Если $m = 1$, то при $n = 1$ выигрывает А; при $n = 2$ выигрывает Б; при $n > 2$ всегда выигрывает А, если берет $n - 2$ спички.
 в) Если $m = 2$, то при любом n выигрывает А.
 г) Если $m = 3$, то лишь при $n = 5$ выигрывает Б.
570. Обозначим через k число ударов, срубающих 2 головы, n — срубающих 2 хвоста и m — срубающих один хвост. Тогда $2k - n = 3$, $2n - m = 3$. Следовательно, минимально возможные значения равны $k = m = n = 3$. Одна из возможных последовательностей ударов — 2 головы, 2 хвоста, 2 головы, 1 хвост, 1 хвост 2 хвоста, 1 хвост, 2 хвоста, 2 головы.
573. Второй сомножитель равен нулю.
574. Второй сомножитель равен нулю.
575. Из равенства квадратов чисел не следует равенство этих чисел.
578. При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства нужно поменять на противоположный.
579. 2) Выражение $a - a + a - a + \dots$ не имеет смысла при $a \neq 0$.
580. Исходное равенство верно лишь при $a = b + 1$, поэтому нельзя брать $a = b = 2$
581. Неверно построено отрицание; надо «Существуют такие a и b , что $a + b \neq b + a$ ».
583. а) 10, б) 15; в) 15; г) 10; д) 10.
584. Да, если и Дворец пионеров, и пионерскую комнату посещают 7 человек.
585. Не менее 30, так как могут еще быть не лыжники, и не отличники.
586. 17. 587. 38. 588. 20. 589. 20.
590. Неудавших нет; 2 пловца. 591. 4 ученика. 592. 10 ребят.
593. Всего не решено только 140 задач, значит, самое малое, допущено на второй тур 60 человек, поэтому в любом случае они не поместятся
594. Не менее 20 % дней. Следует рассмотреть, сколько процентов дней «не было тепло», «не было облачно» и «не было ветрено».
595. 10 % преподавателей
596. Условия б) и в) могут быть заменены одним: никто не может быть одновременно членом общего и библиотечного комитетов.
597. Все высказывания истинны.
598. $|a| + a = \begin{cases} 2a, & \text{если } a \geq 0, \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$
- $\frac{|a|}{a} = \begin{cases} +1, & \text{если } a > 0, \\ \text{не имеет смысла,} & \text{если } a = 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$
599. Может, например: $1 > -5$, но $1^2 < (-5)^2$.
600. Если эти числа противоположные.

601. 1) Достаточно, но не необходимо.
 2) Необходимо и достаточно
 3) Необходимо и достаточно.
 4) Необходимо, но недостаточно.
 5) Необходимо, но недостаточно.
 6) Необходимо и достаточно.
 7) Необходимо и достаточно.
 8) Достаточно, но не необходимо.
603. а) 1; 5; б) -1 ; в) решений нет; г) если $b \geq 0$, то $x = -b$ или $x = b$, если $b < 0$, то решений нет; д) 1.
604. а) -1 при $a > 3$, $5 - 2a$ при $2 \leq a \leq 3$; 1 при $a < 2$;
 б) $-5a + 4$ при $a < -0,5$; $-a + 6$ при $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{3}$,
 $5a - 4$ при $a > \frac{5}{3}$.
605. а) $1 \leq x \leq 2$, б) $x = 1,5$.
606. Положительные и неположительные; отрицательные и неотрицательные; целые и дробные.
607. Каждому рациональному числу соответствует частное двух целых чисел, но не единственное.
608. 0,5 и -1 .
609. Не всегда выполнимы операции сложения и вычитания
610. а) Вычитание; б) вычитание, умножение и деление; в) все четыре.
615. 1) Не верно; 2) верно.
616. Ограничимся случаем двух слагаемых. Пусть a делится на b , но c не делится на b . Предположим, что их сумма $a + c$ делится на b , значит, $a + c = bq$, откуда $c = bq - a$. Так как bq делится на b и a делится на b (по условию), то и их разность c должна делиться на b , что противоречит условию. Следовательно, сумма $a + c$ не может делиться на b .
617. 0; 1.
618. *Необходимость.* Дано, что $a - c = bq$. Пусть $c = bq_1 + r$, где $0 \leq r < b$, тогда $a = c + bq = bq_1 + r + bq = b(q_1 + q) + r$, где $0 \leq r < b$, значит, r есть остаток от деления a на b .
Достаточность. Пусть $a = bq_1 + r_1$ и $c = bq_2 + r_2$, причем $r_1 = r_2$. Тогда $a - c = bq_1 + bq_2 = b(q_1 - q_2)$.
619. 1) Верно; 2) не верно.
620. Если из A следует B и известно, что A не имеет места, то ничего определенного о B сказать нельзя. Поэтому все высказывания, независимо от того, сформулировали мы верный результат или ошибочный, неправильные.
621. Оба высказывания верны.
622. Можно.
623. Если бы в каждой конюшне было по четному числу лошадей, то общая их сумма была бы четным числом.
624. По первому условию оно должно делиться на 3, а по второму условию при делении на 3 даст остаток 1.
625. б) Если хотя бы одно из чисел a или b четное, то и все произведение четное, но если оба числа $-$ и a и b $-$ нечетные, то их сумма $a + b$ $-$ число четное и тогда произведение четное.
627. Сумма не делится на 8, значит, она не разделится и на произведение: $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$. Обозначим остаток от деления этой суммы на 120, который заведомо меньше 120, но не отрицательный, через r . Так как каждое из слагаемых на 1 больше предыду-

- шего и их 120, то среди них обязательно найдется одно число, которое при делении на 120 даст в остатке число r . Если исключить именно это число, то сумма оставшихся чисел разделится на 120, а поэтому и на 3, и на 5, и на 8.
628. Пусть имеем $2n$ первых чисел натурального ряда. Их сумма равна $(2n + 1) \cdot n$ и всегда делится на $2n + 1$.
629. Обозначим общий делитель через d , тогда разность данных чисел, равная n , должна делиться на d , а значит, и 1 должна делиться на d , что возможно лишь при $d = 1$.
630. Пусть первоначальная дробь $\frac{a}{b}$, тогда вторая дробь равна $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$. Если предположить, что полученная дробь сократима, то b и $b - a$ делились бы на некоторое число, большее 1, но тогда и вычитаемое a должно было бы делиться на это же число, то есть первоначальная дробь оказалась бы сократимой.
632. 1) Произведение трех последовательных целых чисел делится и на 2, и на 3, значит, оно делится и на 6.
2) Произведение последовательных четырех целых чисел делится на 3. Среди сомножителей обязательно два четных числа $2k$ и $2k + 2$, их произведение делится на 8, ибо $2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$, где $k(k + 1)$ делится еще и на 2.
3) Произведение пяти последовательных целых чисел делится на 3, на 8 и на 5, значит, оно делится и на их произведение $3 \cdot 8 \cdot 5 = 120$.
633. а) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1) \cdot a \cdot (a + 1)$;
б) после приведения к общему знаменателю в числителе получим произведение трех последовательных целых чисел, которое делится на 6.
634. $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) + 12n$; каждое слагаемое делится на 6.
635. $820125 = 3^8 \cdot 5^3$. В произведение $19!$ число 3 входит 8 раз (по одному разу во множители 3, 6, 12 и 15 и по два раза во множители 9 и 18), значит, $19!$ делится на 3^8 . Аналогично получаем, что $19!$ делится и на 5^3 . Следовательно, $19!$ делится и на их произведение.
637. Если $n = 2k$, то $n^3 + 20n = 8k(k^2 + 5) = 8((k - 1)k(k + 1) + 6k)$.
638. б) Ни при каком натуральном n число n^2 не оканчивается ни цифрой 3, ни цифрой 8.
640. Фигуры, показанные на рисунке 47, б, г.
642. В случае всех четных вершин вычерчивание фигуры обязательно начинается и заканчивается в одной и той же вершине; при наличии двух нечетных вершин начинается в одной из них, а заканчивается во второй.
643. Нельзя, так как нечетных вершин больше двух.
644. 3-й или 7-й.
645. Можно, так как вершины 6, 8 и 12 — четные, а 3 и 15 — нечетные. В качестве начальной и конечной точек нужно использовать нечетные вершины.
646. Нет, хотя бы по одной улице придется ехать дважды.
647. Если каждую улицу схематически обозначить двумя близкими линиями, имеющими общие концы, а концы улиц, перекрестки и тупики принять за вершины, то получим сеть, в которой

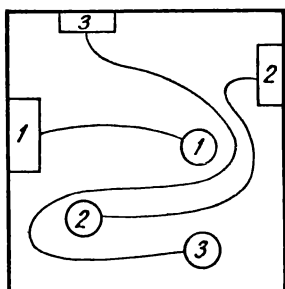


Рис. 102

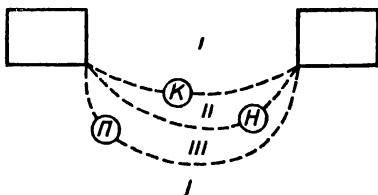


Рис. 103

все вершины будут четными, значит, такую сеть кривых можно начертить одним росчерком.

При третьем обходе мы получаем как бы еще одну сеть кривых, у которой по меньшей мере три вершины (концы улиц, переходящих в загородное шоссе) будут нечетными, а такую фигуру начертить одним росчерком невозможно.

650. Можно, ибо нечетных вершин лишь две: внешняя часть и левый островок

651. В комнате № 5. 652. С комнаты № 9. 653. См. рисунок 102.

654. Соединим левый домик с колодезем (К), навесом (Н) и погребом (П) и будем продолжать идти от них по тропинкам, ведущим к правому домику. Получим три линии между двумя домиками (рис. 103), которые делят плоскость на три области: I, II, III. Пропущенный средний домик лежит где-то в одной из этих областей. Если этот домик находится в области I, то он будет вне замкнутой линии, окружающей навес, если в области II, то он внутри замкнутой линии, не охватывающей погреб, если же в области III, то он окружен замкнутой линией, вне которой находится колодец. В первом случае от среднего домика не будет дороги к навесу, во втором — к погребу, а в третьем — к колодцу.

656. Из условия следует, что если точек самопересечения n , то число звеньев $2n$.

657. 1) Нельзя. 2) Здесь мало сказать «можно», нужно еще показать, что такую ломаную действительно построить можно. На рисунке 104 показаны два возможных способа построения.

659. а) Каждая точка соединена с пятью остальными, а всего точек 6, значит, будем иметь $6 \cdot 5 = 30$ отрезков. Но при таком подсчете каждый отрезок учитывался дважды, поэтому всего различных отрезков будет $30 : 2 = 15$.

б) $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.

в) $(1970 \cdot 1969) : 2 = 1\,939\,465$.

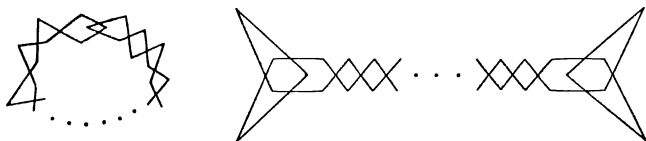


Рис. 104

660. 1) 7. 2) Не более 40.
 661. 2) Число линий было бы равно $(7 \cdot 3):2$, то есть дробному числу, чего быть не может.
 662. 2) На 4; на 6; на 6; на 7 частей.
 663. 1) $\frac{n(n-3)}{2}$; 2) шестиугольник; восьмиугольник; не существует; не существует; треугольник.
 669. Лупа не увеличивает углы, так как величины углов не зависят от длин их сторон.

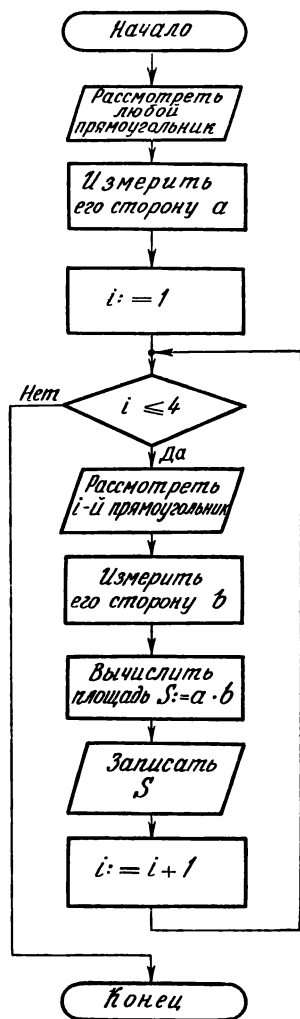


Рис. 105

670. Длина отрезка MC равна полуразности длин отрезков AC и BC .
 671. а) Существует, например, равнобедренный треугольник с основанием в 1 см и высотой, проведенной на это основание, большей 200 см; б) такого треугольника быть не может.
 672. 1) 7 см. 2) 6 см, 9 см или 12 см.
 673. 27 см.
 674. Могут, если попарно равные стороны лежат против неравных углов.
 675. Легко установить, что $\angle OMC = \angle MCA = \angle OCM$, значит $MO = OC$. Аналогично находим, что и $NO = OC$.
 676. 1) 130° ; 2) 25° и 115° .
 677. 70° , 35° или 80° , 25° .
 678. 45° .
 679. На продолжении отрезка BA отложим отрезок AK_1 , равный KC , и соединим точку K_1 с точкой D . Тогда $\angle CKD = \angle KDA = \angle AK_1D$, $\angle KDA = \angle EDK_1$, откуда $\angle AK_1D = \angle EDK_1$, значит $EK_1 = ED$.
 681. 1. Измерить длину одной стороны прямоугольника (в сантиметрах). 2. Измерить другую его сторону (в сантиметрах). 3. Перемножить найденные числа. 4. Записать полученное произведение, которое и будет искомой площадью (в сантиметрах квадратных).
 683. См. рисунок 105.
 684. 1. Задать длины всех звеньев ломаной. 2. Сложить последовательно заданные длины всех звеньев. 3. Записать полученную сумму, которая и является длиной ломаной.
 687. 1. Задать смешанное число. 2. Умножить целую часть числа

на знаменатель. 3. К полученному произведению прибавить числитель дробной части. 4. Записать ответ: в числитель — полученную сумму, в знаменатель — знаменатель дробной части заданного числа.

688. 1. Задать десятичные дроби. 2. Записать заданные числа в столбик так, чтобы каждый разряд стоял под разрядом того же наименования (при этом запятые окажутся друг под другом). 3. Сложить числа по правилу сложения целых чисел (см. ниже вспомогательный алгоритм), не обращая внимания на запятую. 4. В полученном результате запятую поставить так, чтобы она располагалась под запятыми данных чисел. 5. Записать полученную десятичную дробь, которая и является искомой суммой.

Вспомогательный алгоритм сложения целых чисел: 1. Записать данные числа в столбик так, чтобы одноименные разряды стояли друг под другом. 2. Рассмотреть одноименные разряды, начиная с крайнего справа. 3. Сложить все цифры рассматриваемого разряда и прибавить к ним число дополнительных десятков, запомненных на предыдущем шаге (на 1-м шаге число «дополнительных десятков» равно нулю). 4. Если получилось число, большее 9, то число десятков запомнить (это и есть наши «дополнительные десятки»), а число единиц записать как цифру, стоящую в искомой сумме в рассматриваемом разряде. 5. Двигаясь справа налево, повторять пункты 3, 4 пока не кончатся все разряды заданных чисел.

689. 1. Задать десятичные дроби. 2. Подсчитать суммарное количество знаков после запятой у заданных чисел, обозначить его буквой n и запомнить. 3. Не обращая внимания на запятые, перемножить заданные числа как целые (см. ниже вспомогательный алгоритм). 4. В полученном произведении отделить справа n разрядов и поставить перед ними запятую. 5. Записать полученную дробь, которая и есть искомое произведение.

Вспомогательный алгоритм умножения целых чисел: 1. Задать целые числа. 2. Повторить первый сомножитель слагаемым столько раз, сколько указывает величина второго сомножителя. 3. Записать полученную сумму, которая и будет искомым произведением.

690. Диаграмма алгоритма решения задачи изображена на рисунке 106.

691. 1) См. рисунок 107. 2) См. рисунок 108. 3) См. рисунок 109.

692. 1) Изображена схема вычисления: 1) значений функции

$$z = \frac{1}{4}x + 2y, \text{ для } x = 0, \frac{1}{2}, 1 \text{ и } y = 1, 2, 3; 2) m^n \text{ с помощью}$$

так называемого «индийского алгоритма», который по сравнению с обычным (см. рисунок 108) позволяет существенно быстрее получить требуемый результат, особенно при больших значениях показателя степени.

693. См. рисунок 110.

694. См. рисунок 111.

695. 1. Задать отрезок. 2. Из обоих концов заданного отрезка одним и тем же радиусом, большим половины длины отрезка, провести две дуги до их пересечения в двух точках. 3. Точки пересечения дуг соединить прямой. 4. Отметить точку пересечения построенной прямой и заданного отрезка, которая и является искомой серединой отрезка.

Задать $a > 0, b > 0, c > 0$			
Треугольник не существует	Нет $a + b > c$		Да
	Нет $a + c > b$		Да
	Нет $b + c > a$		Да
	Треугольник не существует		Да
		Вычислить $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$	
		Вычислить $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	
		Записать значение S	

Рис. 106

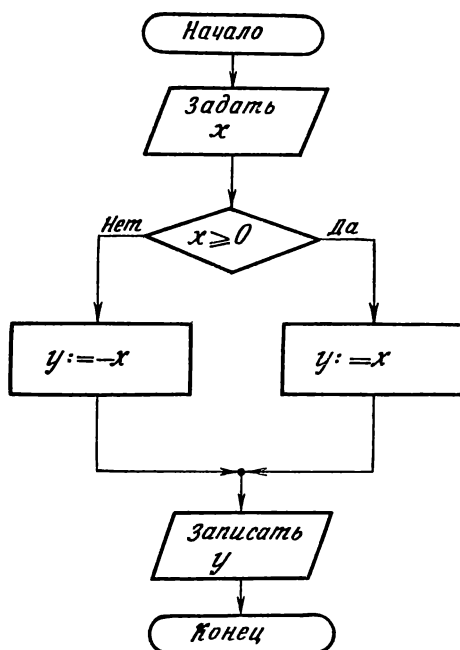


Рис. 107

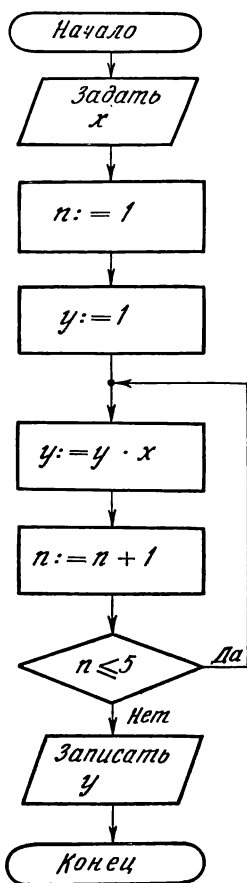


Рис. 108

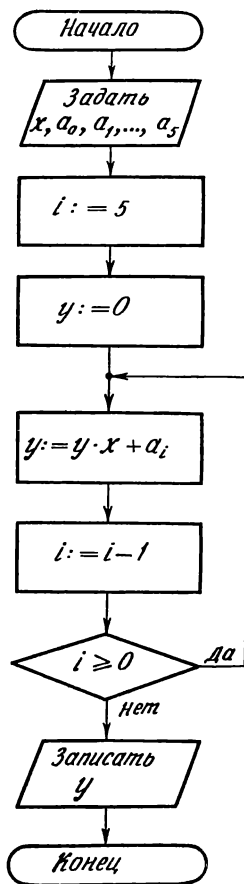


Рис. 109

696. 1. Задать угол. 2. Из вершины угла произвольным радиусом провести дугу до ее пересечения со сторонами угла. 3. Из полученных точек пересечения провести равными радиусами (большими половины расстояния между точками пересечения) две дуги до их пересечения. 4. Через точку пересечения построенных дуг и вершину угла провести прямую. 5. Выделить часть построенной прямой, лежащую внутри заданного угла (выделенная часть прямой и будет искомой биссектрисой).
697. 1. Задать прямую a и точку M вне прямой. 2. На прямой a отметить две произвольные не совпадающие точки A и B . 3. Найти середину отрезка BM с помощью алгоритма решения задачи № 695. 4. Обозначить полученную точку P . 5. Провести через точки A и P прямую. 6. На построенной прямой отложить от точки P отрезок PK , равный AP , причем точки

Задать значения a, b, c					
Нет $a = 0$			Да		
Вычислить $d = b^2 - 4ac$			Нет $b = 0$		Да
Нет $d < 0$			Вычислить $x = -\frac{c}{b}$	Нет $c = 0$	
Да			Да	Да	Да
Нет $d = 0$		Да	Корней нет	Записать значение x	Корней нет
Вычислить $x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$		Вычислить $x = -\frac{b}{2a}$			
Вычислить $x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$		Записать значение x			
Записать значения x_1, x_2					

Рис. 110

Задать a, b, c, d, f, g									
Вычислить $\Delta = ad - bc, \Delta_1 = fd - bg, \Delta_2 = ag - fc$									
Нет		$\Delta = 0$				Да			
$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$		Нет		$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$		Да			
$y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$		Решений нет	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$				Да		
			Нет		$a^2 + b^2 = 0$		Да		
			Нет		Да		Нет		
			Да		Нет		Да		
			Нет		Да		Нет		Да
		У любое, $x = \frac{f}{a} - \frac{b}{a}y$		У любое, $y = \frac{f}{b}$		У любое, $x = \frac{g}{c} - \frac{d}{c}y$		У любое, $y = \frac{g}{d}$	
		Решений нет				Решений нет		X, Y любые	

Рис. 111

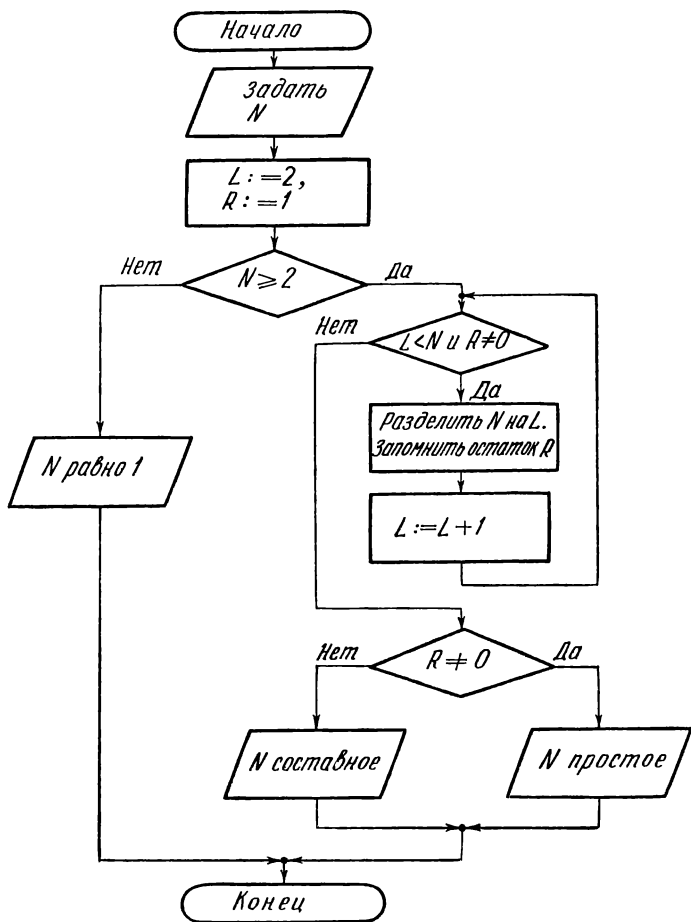


Рис. 112

А и К не должны совпадать. 7. Провести через точки К и М прямую, которая и будет искомой параллельной прямой.

698. 1. Рассмотреть равносторонний треугольник 2. Разделить каждую из сторон полученного на предыдущем шаге многоугольника (на 1-м шаге треугольника) на три равные части. 3. На средней части каждой стороны построить новый равносторонний треугольник. 4. Повторять пункты 2 и 3 до тех пор, пока не получим требуемую «снежинку».

Отметим, что после однократного выполнения пунктов 2 и 3 число сторон «снежинки» увеличивается в 4 раза. «Снежинка», изображенная на рисунке 71, б, получается после трехкратного выполнения пунктов 2 и 3.

699. См. рисунок 112.

700. См. рисунок 113.

701. Будем проверять каждое новое число на делимость не на все числа подряд, а лишь на ранее найденные простые числа, причем до тех пор, пока делитель не больше квадратного корня делимого. При этом будем запоминать все ранее найденные простые числа. Для этого нам потребуется коробка с ячейками, куда мы будем «складывать» найденные простые числа. Такая коробка в математике называется массивом, а ее ячейки — элементами массива. Обозначим весь массив

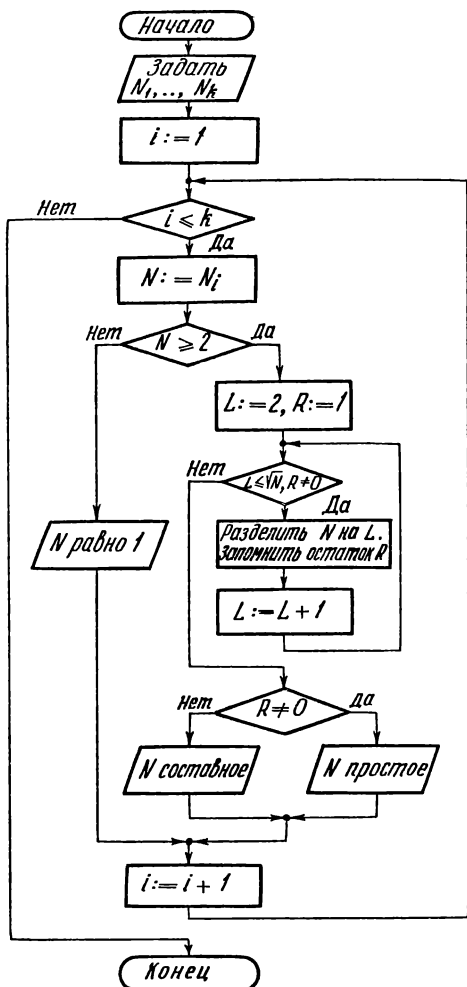


Рис. 113

буквой B , а его элементы — $B(i)$, где i соответствует номеру элемента в массиве (номеру ячейки в коробке). Схема возможного алгоритма решения задачи изображена на рисунке 114.

702. 1. Задать числа M и N . 2. Взять большее из чисел делимым, а меньшее делителем. 3. Разделить делимое на делитель. 4. Запомнить получившийся остаток. 5. Пока остаток не равен нулю, повторять пункты 3, 4, используя в качестве делимого предыдущий делитель, а в качестве делителя — остаток. 6. Записать последний, отличный от нуля остаток, который и будет являться наибольшим общим делителем заданных чисел M и N .

703. 1. Задать числа M_i , $1 \leq i \leq n$. 2. Обозначить N первое из заданных чисел. 3. Выполнять пункты 4—6 до тех пор, пока не закончатся все числа M_i . 4. Взять следующее число M_i . 5. Найти наибольший общий делитель чисел M_i и N по алгоритму Евклида, описанному выше. 6. Полученный наибольший общий делитель обозначить N . 7. Записать наибольший общий делитель последнего числа M_n и числа N , которое является наибольшим общим делителем всех предыдущих чисел M_i , $1 \leq i \leq n-1$ (записанное число и будет наибольшим общим делителем всех заданных чисел). Диаграмма алгоритма изображена на рисунке 115.

705. а) (1; 1); б) (3; 2); в) (17; 3), (12; 6), (7; 9), (2; 12); г) (131; 1), (112; 6), (93; 11), (74; 16), (55; 21), (36; 26), (17; 31).

706. Пусть по 20 к. взяли x монет, а по 15 к. — y монет, и так как получить надо в сумме $15 \cdot 20 = 300$ (к.), то $20x + 15y = 300$. Число всех монет не больше $20 = 300:15$ и не меньше $15 = 300:20$, то есть $15 \leq x + y \leq 20$. Так как $x + y$ кратно 3, то $x + y = 18$, ибо случай $x = 15$, $y = 0$ не рассматриваем. Следовательно, $x = 6$, $y = 12$.

707. Так как $x^2 = 2y^2 + 1$, то x — число нечетное. Пусть $x = 2k + 1$, тогда $2k(k + 1) = y^2$, откуда y — число четное. Но единственное простое четное число есть 2. Значит, $y = 2$, а тогда $x = 3$.

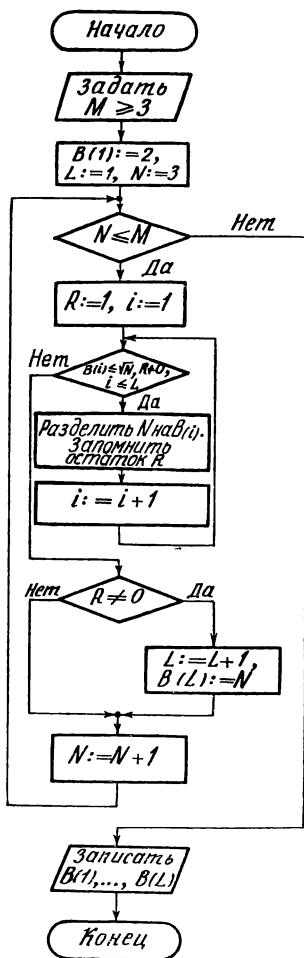


Рис. 114

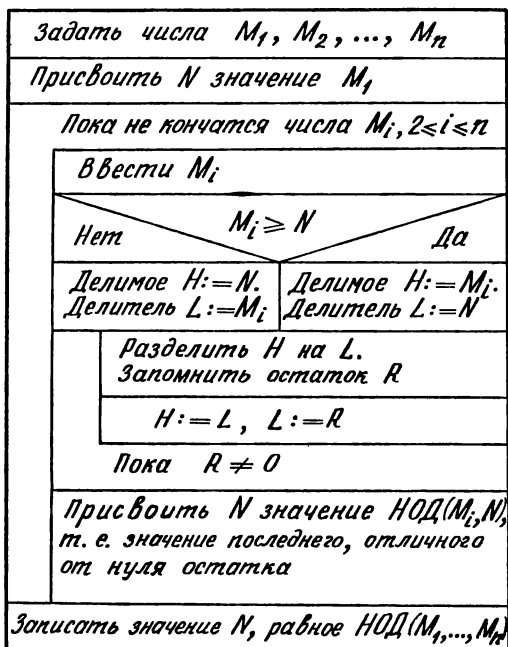


Рис. 115

708. Если $a = 2$, то $b = 2$ и $c = 3$. Если a — нечетное число, то и b — нечетное, значит, $c = 2$. Перебором простых корней уравнения $b(b + 2) = a + 8$ найдем, что b может принимать только значение 3, но тогда $a = 7$.
709. 15. 711. 91. 712. 37.
713. 5 862 068 965 517.
714. 1) 75; 2) 89; 3) 36; 4) 198.
715. $m = 85$, $n = 96$ или $m = 995$, $n = 996$.
716. Частное двузначных чисел x и y есть число однозначное, значит, $x = 7y$, тогда $8y = 13k$, где k — натуральное число.
 $10 \leq y \leq \frac{100}{7}$ и y делится на 13, следовательно, $y = 13$,
а $x = 91$.
717. Пусть всего $10x + y$ рядов, тогда в каждом ряду по $10y + x$ деревьев. Число яблонь каждого сорта подсчитаем двумя способами и получим уравнение $(10x + y - 2)(10y + x) : 3 = 2 \cdot 7 \cdot (10x + y - 2)$. После упрощений: $10y + x = 42$, но x и y — это цифры. Следовательно, $x = 2$ и $y = 4$.
Ответ: 24 ряда; грушевых деревьев 84.
718. В 198-й.
719. Из трех цифр a , b и c можно составить лишь шесть различных трехзначных чисел: abc , acb , bca , bac , cab и cba . В общей сумме этих чисел каждая цифра участвует шесть раз: дважды в значении сотен, дважды в значении десятков и дважды

в значении единиц. Следовательно, если сумму всех чисел (число 2886) разделить на число 222, получится сумма исходных цифр: $a + b + c = 13$.

Пусть $a > b > c$. Тогда $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 495$, откуда $a = c + 5$. Подставляя значение a в уравнение $a + b + c = 13$, получим $b = 8 - 2c$. Так как $b > c$, то ясно, что $c < 3$, ибо уже при $c = 3$ будет $b = 8 - 6 = 2 < 3$. Если $c = 1$, то $b = 6$ и $a = 6$, что противоречит условию (цифры должны быть различными). Если $c = 2$, то $b = 4$ и $a = 7$. Значит, $a = 7$, $b = 4$ и $c = 2$.

720. Либо 10, либо 11. **722.** 7 или 14.

723. Пусть в первом лагере было x школьников, тогда во втором — $264 - x$. Составляет уравнение $(x - a) \cdot \frac{65}{100} = 264 - x + 2a$, откуда $x = 160 + \frac{53}{33}a$. Значит, $a = 33k$, причем $x < 264$.

Если $k = 0$, то $x = 160$; если $k = 1$, то $x = 213$. Следовательно, в первом лагере могло быть 160 или 213 школьников.

724. Пусть пятерок было x штук, а рублей — y штук. По условию $(5x + y) \cdot \frac{1}{3} = 5y + x$; после упрощений $x = 7y$. Общая сумма денег составит $35y + y = 36y$, что мало отличается от 150, а это может быть лишь при $y = 4$. Значит, всего было 144 р., а за покупки уплатили 96 р.

725. 8 бидонов по 27 кг и 4 бидона по 30 кг.

727. 1) 5 книг. 2) Стульев 5, табуреток 7, книг 88 штук

728. 5 столов.

729. Можно разменять тремя способами: десятирублевая купюра — 1, пятирублевых — 0, 1, 2, трехрублевых — 5, 3, 1, рублевых — 0, 1, 2 соответственно.

730. 12, 17 и 24, всего 53 человека.

734. а) $623 - 71 = 552$ б) $888 - 71 = 817$

$$\begin{array}{r} : \quad + \quad - \\ 7 \times 49 = 343 \\ \hline 89 + 120 = 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} : \quad + \quad - \\ 37 \times 19 = 703 \\ \hline 24 + 90 = 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735. \quad 1624 : 56 = 29 \\ - \times + \\ 313 + 17 = 330 \\ \hline 1311 - 952 = 359 \end{array}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8
П. Л. Ч Е Б Ы Ш Е В

$$\begin{array}{r} 736. \quad 396 - 136 = 260 \\ : + - \\ 12 \times 7 = 84 \\ \hline 33 + 143 = 176 \end{array}$$

0 1 2 3 4 6 7 8 9
П О Н Т Р Я Г И Н

$$\begin{array}{r} 737. \quad 728 - 98 = 630 \\ : + - \\ 8 \times 49 = 392 \\ \hline 91 + 147 = 238 \end{array}$$

0 1 2 3 4 6 7 8 9
Л О М О Н О С О В

$$\begin{array}{r} 738. \quad 781 - 205 = 576 \\ : + - \\ 71 \times 5 = 355 \\ \hline 11 + 210 = 221 \end{array}$$

0 1 2 3 5 6 7 8
О Т Л И Ч Н А Я

$$\begin{array}{r} 739. \quad 287 - 95 = 192 \\ : + - \\ 7 \times 7 = 49 \\ \hline 41 + 102 = 143 \end{array}$$

0 1 2 3 4 5 7 8 9
А. М. Л Я П У Н О В

$$740. 216 - 54 = 162$$

$$\begin{array}{r} : + - \\ 8 \times 9 = 72 \\ 27 + 63 = 90 \end{array}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
К О Л М О Г О Р О В

741. 1) 165 и 561. 2) 9281 и 1829. 3) Обозначим цифры пятизначного числа соответственно через А, Б, В, Г и Д. Получим запись:

$$\begin{array}{r} + \text{ А Б В Г Д} \\ \text{Д Г В Б А} \\ \hline \text{Р Р Р Р Р} \end{array}$$

Следовательно, можно составить следующие уравнения: $Д + А = А + Д = Р$; $Г + Б = Б + Г = Р$; $В + В = Р$. Так как сумма всех цифр равна 10, то $(А + Д) + (Б + Г) + В = 2В + 2В + В = 10$, откуда $В = 2$, тогда $Р = 4$. По условию обращенное число — тоже пятизначное, поэтому $Д > 0$. Для А возможны лишь два значения: $А = 1$ или $А = 3$. Но так как число больше 20 000, то $А = 3$. Получаем два числа: 30 241 или 34 201.

742. а) $13_{10} = 31_4$; б) $46_{10} = 64_7$ или $23_{10} = 32_7$. 743. В 1954 году.

744. Так как $2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$, то Юре 13 лет, а родился он 31 июля.

745. 6834; 129. 746. 3; 6 и 18.

$$747. 0,00375 = \frac{3}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{5}{10^5}.$$

748. а) 0,111₂; б) 0,0703₈; в) 1010,11₂; г) 3005,03₈.

$$750. а) \frac{5}{9}; б) 11\frac{79}{125}; в) 9\frac{5}{16}; г) 458\frac{3}{256}.$$

752. а) 0,11₂, 0,1011₂, 100,000101₂;

б) 0,2₃, 0,12₃, 100,00122₃;

в) 0,3₈, 0,05₈, 3,1154₈.

753. а) 302,03; 37,327; б) 2,21; 21,112; в) 1; 1000,0001.

754. а) 22,12; 236,22; б) 1,021; 1,111; в) 1,1; 100,011.

755. а) 4,231; 0,11666; б) 12,122; 10,1221; в) 10,0011; 11,00011.

756. 1) Биссектриса и перпендикуляр не пересекаются внутри треугольника.

2) Выполнив аккуратно чертеж, убеждаемся, что острый угол равен разности, а прямой угол — сумме попарно равных углов. 3) Треугольники APB и DPC не являются равнобедренными. 4) Возможен еще один случай расположения треугольников, когда BP_1 проходит через точку C , причем AC у получившегося равнобедренного треугольника ABP_1 не является высотой, и тогда уже $BC \neq P_1C$.

5) Мы доказали, что отрезки A_kA_{k+1} и B_kB_{k+1} с одинаковыми индексами никогда не пересекаются, но из этого не следует, что не могут пересечься, например, отрезки A_3A_4 и B_7B_8 .

757. Из того, что точки одной окружности взаимно однозначно соответствуют точкам другой окружности, не следует равенство длин этих окружностей.

758. 1) и 2) Длина ломаной не стремится к длине отрезка.

759. 2) Серединный перпендикуляр к основанию без точки пересечения.

760. 1) Окружность концентрическая с данной, радиус которой равен половине радиуса данной окружности. 2) Окружность данного радиуса с центром в точке O .

761. Объединение двух взаимно перпендикулярных прямых, делящих пополам углы, образованные данными прямыми.
762. 2) Искомые точками являются точки пересечения данной окружности с двумя взаимно перпендикулярными прямыми, делящими пополам углы, образованные данными пересекающимися прямыми. Таких точек может быть четыре, три, две, одна или ни одной.
763. 5 см, так как $AD + DC = BD + DC = 10$ см.
764. 4) Чтобы решение задачи свести к построению треугольника, равного данному, можно соединить прямой две произвольные точки, взятые на разных сторонах угла. Правда, если получим при этом равнобедренный треугольник, то построение упрощается, причем вспомогательную прямую строить не обязательно, достаточно знать лишь точки.
766. На второй стороне данного угла, не содержащей точки B , откладываем отрезок AD длиной l и полученную точку D соединяем с точкой B . Затем строим серединный перпендикуляр к BD , точка пересечения которого с AD и есть искомая точка C . Очевидно, что при $l \leq AB$ задача решений не имеет, а при $l > AB$ имеет и притом единственное решение.
767. Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки.
770. Во втором случае целесообразно откладывать большую сторону на меньшей и рассматривать угол, смежный с данным углом.
772. Объединение двух прямых, параллельных данной и расположенных по разные от нее стороны на данном расстоянии.
773. а) и б) Параллельная данным прямым их ось симметрии.
777. Задача при $b > h$ имеет два решения, при $b = h$ — одно, при $b < h$ — ни одного.
778. Решение задачи сводится к построению треугольника по двум боковым сторонам, равным половинам диагоналей параллелограмма, и высоте, равной также половине высоты параллелограмма.
779. Окружность с центром в точке пересечения данных взаимно перпендикулярных прямых и радиусом, равным половине длины данного отрезка.
782. 1) В действительности точка D всегда принадлежит AC . 2) Точки M и K всегда совпадают. 3) Точка M обязательно принадлежит прямой n . 4) В действительности окружность пройдет через точку D .
783. 1) Диаметр, перпендикулярный к этим двум хордам. 2) Проводим диаметр OM и строим хорду, ему перпендикулярную.
787. Радиус искомой окружности равен половине расстояния между данными параллельными прямыми.
788. Центр искомой окружности есть точка пересечения биссектрисы данного угла и перпендикуляра к стороне угла в заданной на ней точке.
789. Прямая, проходящая через центр O данной окружности и точку M , исключая точки M и O .
791. Пусть мы построили окружность, которая касается данной окружности с центром O в точке M и содержит точку N . Центр искомой окружности лежит, во-первых, на OM , а во-вторых, на серединном перпендикуляре к MN . Каждую из этих фигур легко построить, а их точка пересечения O_1 будет центром искомой окружности. Легко найти и радиус искомой окружности, равный O_1M (или NO_1).

Для удобства исследования через точку касания M проводим общую касательную PQ . Если точка N не лежит на PQ , то всегда получаем одну окружность, касающуюся данной окружности внешним или внутренним образом. Если же точка N лежит на PQ , то задача решений не имеет. Случай, когда точки M и N совпадают, обычно исключается

792. Если построить касательную к данной окружности в заданной на ней точке, то центр искомой окружности лежит на линии центров и на осях симметрии данной прямой и построенной касательной.

793. Для доказательства достаточно построить на AM как на диаметре окружность, которая обязательно пройдет и через точки C и N .

795. Решение задачи сводится к построению равнобедренного треугольника ABC , основанием AC которого является данный отрезок и $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$, где α — данный угол. Вершина B этого треугольника является центром круга, сегмент которого, содержащий точку B , и будет искомым. Второй сегмент, вмещающий данный угол, симметричен построенному относительно прямой, проходящей через отрезок AC .

796. Построим на AB две дуги сегментов, вмещающих данный угол, и найдем точки пересечения этих дуг с данной прямой, которые и будут искомыми. Так как прямая не может иметь более двух общих точек с окружностью, то максимальное число решений — четыре (прямая пересекает каждую из дуг сегментов в двух точках). Очевидно, что задача может иметь три, два, одно и ни одного решения.

797. Построив основание, определим две вершины искомого треугольника. Для отыскания третьей вершины, из которой основание видно под данным углом и которая отстоит от середины основания на расстояние, равное длине данной медианы, находим точки пересечения соответствующих фигур. Заметим, что задача имеет не более одного решения, так как все получающиеся треугольники равны друг другу.

801. Можно. Юрию достались книги с номерами 1 и 3, Федору — 2 и 5, Ивану — 4 и 7, Денису — 10 и 6, Максиму — 8 и 9.

802. Номера домов возрастают последовательно на 2. Сумму таких чисел найти легко, для этого сумму крайних слагаемых нужно умножить на число слагаемых и разделить на 2. Если обозначить число домов через n , а их первый и последний номер

соответственно через a и b , то получается, что $\frac{a+b}{2} \cdot n = 333 = 3 \cdot 3 \cdot 37$. По условию $n \geq 5$, значит, $n = 9$. Теперь можно найти, что номер пятого (среднего) дома равен 37.

803. $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Единицу не рассматриваем, так как по условию возраст каждого больше 1. Возможны такие варианты:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $2 + 35 + 35 = 72$; | 2) $2 + 25 + 49 = 76$; |
| 3) $5 + 14 + 35 = 54$, | 4) $5 + 10 + 49 = 64$; |
| 5) $5 + 7 + 70 = 82$; | 6) $5 + 5 + 98 = 108$; |
| 7) $7 + 10 + 35 = 52$; | 8) $7 + 25 + 14 = 46$, |
| 9) $7 + 7 + 50 = 64$. | |

Сразу отпадают те варианты, в которых сумма чисел не делится на 4, остаются лишь варианты: 1, 2, 4, 6, 7 и 9. Ученик потребовал дополнительное условие, ибо в вариантах 4 и 9 суммы чисел одинаковы, так что неизвестно, какой из этих вариантов подходит. Но раз ученик остановился на них, то ему $64 : 4 = 16$ лет, ибо если бы подходили другие варианты, то ему

- не понадобилось бы дополнительное условие. Итак, старшему из знакомых либо 49 лет, либо 50. Учитель сказал, что все они моложе его, после чего ученик решил задачу. А это возможно лишь в том случае, когда учителю 50 лет, тогда вариант 9 отпадает. Следовательно, знакомым 5, 10, 49 лет.
804. Если из трехзначного числа вычесть 8, то получится двузначное число, кратное семи, а это может быть только 98. Убили $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ уток. До начала охоты было всего 120 патронов.
805. 1) $3 \cdot 51 = 153$; $8 \cdot 86 = 688$. 2) $\frac{16}{64}$; $\frac{19}{95}$; $\frac{49}{98}$.
806. 79 орехов.
807. 6, 18 и 54. Пусть в некоторый момент мы нашли сумму всех написанных чисел, равную a . При следующем шаге каждое из этих слагаемых складывается с соседним дважды. Значит, вновь написанные числа дадут в сумме $2a$, а сумма всех чисел будет $2a + a = 3a$.
808. 4 рубля.
809. Всего было 121 дыня. 22 дыни отданы в уплату налога на оставшиеся $121 - 22 = 99$ дынь. Поэтому налог составил 2 дыни за 9 дынь. Налог с 41 дыни Ходжи Насреддина составил бы $\frac{41}{9} \cdot 2 = 9\frac{1}{9}$. Следовательно, $\frac{1}{9}$ дыни стоит 1 таньга, т. е. дыня стоит 9 таньга.
810. В первой группе было 14 человек, во второй — 18.
811. Яблоки стоят 25 к, сливы — 50 к. 812. 50 л, 40 л и 30 л.
813. 1) $1 = a^2 - (a - 1)(a + 1)$.
2) Достаточно привести данное выражение, разложив его на множители, к виду: $(a - b)(b - c)(a - c)$.
3) $(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$.
814. 1) Умножив выражение на $2 - 1 = 1$, получим $2^{64} - 1$. Об этом числе можно прочитать в книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра» (М., 1978).
2) 5; см. решение задачи № 818 (3).
815. Так как $a^2 + a + 1 = 0$, то $a \neq 0$ и тогда, разделив на a , получим, что $a + \frac{1}{a} = -1$, $(a^2 + a + 1)(a - 1) = a^3 - 1 = 0$, значит, $a^3 = 1$.
1) $a^{1980} = a^{3 \cdot 660} = 1$, так что $1 + \frac{1}{1} = 2$;
2) $a^{1981} = a^{3 \cdot 660 + 1} = a$, но $a + \frac{1}{a} = -1$.
816. $z = (x + y + 1)^2 + 2(y - 1)^2 + 2$, значит, наименьшее возможное значение для z равно 2, которое будет при $y = 1$ и $x = -2$.
817. Если в выражении $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - 1)$ раскрыть скобки, то все числа, кроме первого и последнего, взаимно уничтожатся и получим $a_1 - 1$.
818. 2) Правильная дробь.
819. Знак равенства, так как $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.
820. а) Полагая $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = k$, будем иметь, что $x = 3k$ и $y = 4k + 1$. Подставляя найденные значения x и y во второе уравнение, найдем $k = 1$, тогда $x = 3$ и $y = 5$.
821. Пусть общий корень уравнения x_0 , тогда $x_0^3 + ax_0 = -1$ и

$x_0^4 + ax_0^2 = -1$. Разделив второе уравнение на первое почленно, получим $\frac{x_0^4 + ax_0^2}{x_0^3 + ax_0} = x_0 = 1$, тогда $1 + a \cdot 1 + 1 = 0$, $a = -2$.

822. Ваня придет в 15 ч 45 мин, а я — в 16 ч 15 мин.

823. 24 года.

824. Первое место занял спортсмен № 2, второе — № 4, третье — № 1 и четвертое — № 3.

825.

№ купе	Минск	Могилев	Брест	Гомель
1	географ А шофер футбол	историк Б тракторист бокс	инженер В комбайнер волейбол	математик Г строитель шахматы
2	математик Д комбайнер бокс	инженер Е строитель футбол	историк Ж шофер шахматы	географ З тракторист волейбол
3	историк И строитель волейбол	географ К комбайнер шахматы	математик Л тракторист футбол	инженер М шофер бокс
4	инженер Н тракторист шахматы	математик О шофер волейбол	географ П строитель бокс	историк Р комбайнер футбол

826. Петя поймал 23 рыбы, Гриша — 25, Вася — 22.

829. Если бы на нем была серая шапочка, то один из его товарищей (все сообразительные!) легко определил бы, что на нем самом белая шапочка, так как в противном случае третий из них сразу сказал бы, что у него белая, видя две серые. Но так как все думают, значит, на нем, на первом, белая шапочка.

830. Все черные. Могла быть только одна белая. Но тогда трое других юношей легко догадались бы, что у них черные.

831. Черный лежит в ящике с надписью «белый или зеленый», зеленый — с надписью «белый» и белый — в третьем ящике.

832. Вынул из ящичка с надписью «черный и белый»

833. 3 белых, так как его товарищи вынимали черные шары.

834. Возможны три надписи: «3 черных», «2 черных, 1 белый», «1 черный, 2 белых». Первый сказал, что у него остался белый, значит, у него была надпись «3 черных». Второй не смог определить цвет оставшегося шарика, вынув 2 белых, а это могло быть лишь в том случае, когда у него был ярлык «3 черных» или «2 черных, 1 белый». Но ярлык «3 черных» — у первого, поэтому у второго — «2 черных, 1 белый». А так как у него в ящичке не 3 черных, то, следовательно, 3 черных шарика в третьем ящичке.

835. Если все команды уже играли, то может быть сыграно 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7 матчей, то есть имеем 7 различных чисел, а команд 8, поэтому обязательно хотя бы у двух команд будет по одинаковому числу сыгранных матчей. Если же предположить, что хотя бы одна команда не приступала еще к розыгрышу, то и в этом случае получим не более 7 различных чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

836. Если не учитывать, что Петя знал ответ на второй вопрос, то могут представиться только четыре разные последовательности ответов: да, да, нет, да, нет; да, нет, да, да, нет; нет, да, да, нет, да; нет, да, нет, да, да. Следовательно, угадать ответы на все вопросы можно лишь в случае, когда ответ на второй вопрос будет «нет».
837. Возьмем произвольную точку A . Если все остальные 24 точки находятся от нее на расстоянии, меньшем 1 см, то утверждение доказано, ибо тогда все 25 точек будут внутри круга радиуса 1 см с центром в точке A . Пусть некоторая точка B находится от точки A на расстоянии, большем 1 см. Рассмотрим два круга радиуса 1 см с центрами в этих точках. Всякая третья точка удалена меньше чем на 1 см либо от точки A , либо от точки B и, значит, находится внутри одного из этих кругов. Итак, есть два круга радиуса 1 см, которые содержат 25 точек, но тогда в одном из них больше 12 (не меньше 13) точек.
838. Вначале был 1 пустой ящик; после первого вкладывания пустых будет $1 + (n - 1)$; после второго — $1 + 2(n - 1)$ и так далее; после k -го — $1 + k(n - 1)$.
839. Из второго условия следует, что первая цифра искомого числа есть 1, а тогда легко определить по первому условию, что искомое число есть 142 857.
840. 123 457 968. 841. 21 978.
842. Так как 1000 делится на 8, а число 444 не делится на 8, то и все число не разделится на 8.
843. 1) Не могут, поскольку квадраты целых чисел могут оканчиваться лишь цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9
2) Число делится на 3, но не делится на 9.
3) Сумма равна $\frac{k(k+1)}{2}$ и, чтобы она оканчивалась на 7, $k(k+1)$ должно оканчиваться цифрой 4, чего быть не может, так как легко проверить, что такие произведения могут оканчиваться лишь цифрой 0, 2 или 6.
844. Число $n^2 + n + 1$ расположено между квадратами двух последовательных чисел натурального ряда: n и $n + 1$, следовательно, квадратом натурального числа быть не может. Это число нечетное, ибо $n^2 + n = n(n + 1)$ — число четное.
845. Подставляем значения 0, 1 и 2, получим, что c , $a + b$ и $4a + 2b$ — целые числа, откуда следует, что $2a$ и $2b$ — числа целые. Если a и b сами числа целые, то утверждение очевидно; если же a и b оба дробные с дробной частью 0,5, то и в этом случае как при четных, так и при нечетных x сумма произведений будет числом целым.
846. Если все цифры многозначного числа делятся на некоторое число, то и само это число разделится на этот общий делитель.
847. Можно. Например, 1990 чисел вида
- $$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1990 \cdot 1991 + k,$$
- где k принимает последовательно значения 2, 3, 4, ..., 1991, не являются простыми, ибо каждое делится на k .
848. Одно из них всегда делится на 3.
849. Три числа могут иметь разные остатки, но среди любых четырех хотя бы два будут иметь равные остатки, и их разность разделится на 3.

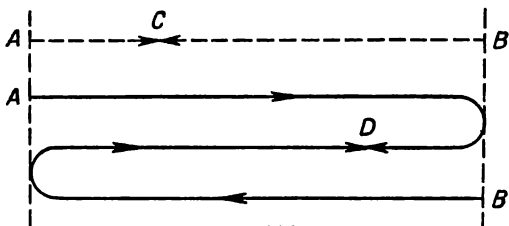


Рис. 116

850. Ящик в 29 кг. 851. 1 или 2.
852. $k^4 + 4 = k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^2 = (k^2 + 2)^2 - (2k^2) = (k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$.
853. При $n = 2k$ имеем $n^3 + 20n = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5)$. Легко проверить, что $k(k^2 + 5)$ делится и на 2, и на 3.
854. Сделав схематический рисунок движения (рис. 116), мы видим, что время от начала движения до первой встречи вдвое меньше, чем от начала движения до второй встречи, ибо оба велосипедиста прошли три таких участка пути, как до первой встречи. Но тогда и путь ABD вдвое больше, чем путь AC , значит, расстояние от A до B равно $6 \cdot 3 - 4 = 14$ (км).
855. 40 т первого сорта и 100 т второго. 856. 35 м.
857. Решение этой задачи приведено в интересной книге Л. М. Эйделяса «Избушки на дорожках» (М., 1960).
858. Примем длину одной из двух равных по длине сторон забора за x м, тогда длина стороны, параллельной стене дома, будет $(200 - 2x)$ м, а площадь участка $S = x(200 - 2x)$ м². Наибольшая площадь будет при $x = 50$ м.
859. Если даже допустить, что участок имеет форму квадрата, когда, как вы знаете, при постоянной площади периметр наименьший, то легко подсчитать, что и в этом случае выделенной суммы не хватит.
860. Построим точки M_1 и M_2 , симметричные данной точке M относительно сторон данного угла, и соединим их. Точки пересечения сторон угла с отрезком M_1M_2 и будут искомыми вершинами треугольника (если они существуют). Какие бы другие точки A и B на сторонах угла вы ни взяли, легко убедиться, что периметр нового треугольника всегда будет больше периметра построенного треугольника, достаточно лишь периметр треугольника MAV заменить равной по длине ломаной M_1ABM_2 . Расположение точек M_1 и M_2 не зависит от выбора точек A и B на сторонах угла, поэтому наименьшую длину имеет отрезок M_1M_2 .
861. Пусть путь курьера есть ломаная BDA (рис. 117). Примем длину участка CD за x км и вычислим время t (в часах), которое понадобится курьеру на этот путь. Получим уравнение

$$\frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10} = t; \quad 5\sqrt{81 + x^2} = 4x + (40t - 60).$$

Обозначим $40t - 60 = k$. Очевидно, что наименьшему значению t соответствует наименьшее значение k , и наоборот. Найдем k , при котором уравнение имеет решения:

$$25(81 + x^2) = 16x^2 + 8kx + k^2; \quad 9x^2 - 8kx + (2025 - k^2) = 0;$$

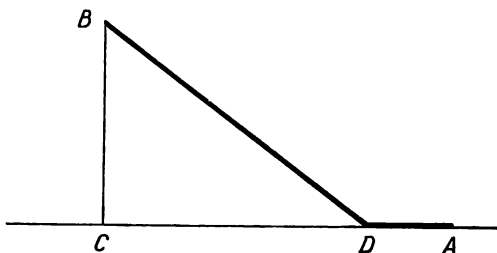


Рис. 117

$$\frac{D}{4} = 16k^2 - 9 \cdot (2025 - k^2) = 25k^2 - 9 \cdot 2025;$$

$$25k^2 - 9 \cdot 2025 \geq 0; k^2 \geq 9 \cdot 81.$$

Наименьшее возможное значение для k будет $3 \cdot 9 = 27$. Тогда $x = 12$ (км).

862. На пересечении диагоналей.

863. Пусть станция построена в некотором пункте O , отстоящем от A на x км, от B — на y км и от C — на z км. Очевидно, что $x + y \geq 4$, $x + z \geq 5$ и $y + z \geq 3$. Общее число километров $s = 300x + 200y + 100z = 200x + 200y + 100x + 100z = 200(x + y) + 100(x + z)$. Наименьшее значение для s будет тогда, когда $x + y = 4$ и $x + z = 5$, то есть станцию нужно строить в пункте A .

867. Соединив точки A и C , получим равносторонний треугольник, поэтому $\angle ABC = 60^\circ$.

868. 72° .

869. Прямой вписанный угол опирается на диаметр, и по теореме Пифагора находим, что длина гипотенузы (диаметра) равна 10 м.

870. 2,5 см. 871. 40 см.

872. 1) Надо дополнить треугольник до прямоугольника.

3) 90° ; 60° ; 30° . 4) $22,5^\circ$; $67,5^\circ$.

874. Пусть средней линией четырехугольника является отрезок AB . Проведем одну из диагоналей четырехугольника и ее середину, точку O , соединим с точками A и B . Используя свойство средней линии треугольника, вычисляем AO и OB , откуда получаем, что $AO + OB = AB$, а это может быть лишь тогда, когда точка O принадлежит отрезку AB . Следовательно, отрезок AB параллелен двум сторонам четырехугольника.

876. Так как $\triangle ABA_1 = \triangle C_1BC$, то легко установить, что $BM = BN$ и $\angle MBN = 60^\circ$.

877. Обозначим K любую точку, лежащую на продолжении стороны AB . Тогда $\angle KBE = \angle BEA + \angle A$ (как внешний угол $\triangle ABE$). $\angle KBE = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ (как половина внешнего

угла B). Поэтому $\angle BEA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) - \angle A = \frac{1}{2}(\angle C - \angle A) = 45^\circ$ и так как $BE \perp BD$, то, следовательно, прямоугольный треугольник BDE — равнобедренный, то есть $BD = BE$.

878. Если a и b — длины катетов, то $a^2 + \frac{b^2}{4} = 9$ и $\frac{a^2}{4} + b^2 = 4$.

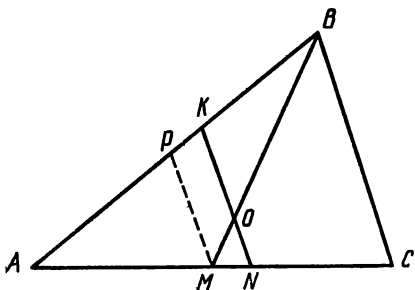


Рис. 118

Поэтому $a = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $b = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$. Следовательно, площадь треугольника равна $\frac{8\sqrt{14}}{15}$.

879. Построим среднюю линию MP треугольника ABC (рис. 118). Так как $BK = \frac{2}{5} AB$ и $BP = \frac{1}{2} AB$, то $BK:KP = \frac{2}{5} AB : \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) AB = 4:1$. Так как $KN \parallel BC \parallel PM$, то $BO:OM = BK:KP = 4:1$.

880. Проведем через точку M прямую, параллельную стороне CD , до пересечения ее в точках K и O соответственно со сторонами BC и AD (или с их продолжениями). Тогда $AM^2 - AO^2 = MO^2 = DM^2 - DO^2$ и $BM^2 - BK^2 = MK^2 = CM^2 - CK^2$. Требуемое равенство следует теперь из соотношений $CK = DO$ и $BK = AO$.

881. $S = h\sqrt{d^2 - h^2}$.

882. Дополняем данный угол до прямого, получим угол, величина которого равна 36° ; теперь достаточно разделить его пополам.

883. Решение задачи сводится к построению прямоугольного треугольника по сумме катетов, которая равна половине суммы длин диагоналей ромба и данному острому углу.

884. Решение задачи сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и сумме (разности) катетов.

885. 2) Легко построить треугольник по высоте и медиане и найти положение биссектрисы между ними. После этого нужно построить окружность, описанную около искомого треугольника, учитывая, что точка пересечения продолжения биссектрисы треугольника и перпендикуляра, проведенного к основанию треугольника через его середину, лежит на окружности, описанной около треугольника.

887. Центр X искомой окружности лежит на перпендикуляре KM , проведенном к данной прямой AB через заданную на ней точку M . С другой стороны, точка X должна быть равноудалена от точки M и неизвестной точки касания искомой и данной окружностей. Заменяя неизвестную точку касания центром данной окружности O , надо и точку M заменить точкой N ,

отстоящей от AB на расстоянии, равное длине радиуса данной окружности.

Отложив на KM по разные стороны от AB отрезки MN и MN_1 длины, равной длине радиуса данной окружности, строим множества точек, равноудаленных от точек O и N и от точек O и N_1 . Точки пересечения этих прямых с перпендикуляром KM определяют центры искомых окружностей.

Задача может иметь два или одно решение. Если же данная окружность касается AB в точке M , то задача имеет бесконечное множество решений.

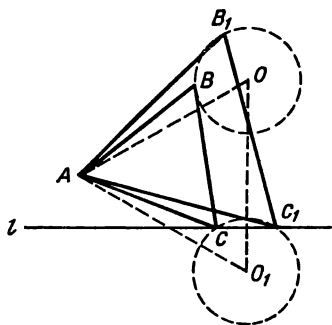


Рис. 119

888. 1) Окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий данную точку с центром данной окружности.
2) Искомым множеством будет не вся окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий данную точку с центром данной окружности, а лишь дуга этой окружности, лежащая внутри данной окружности.

889. 1) Пусть треугольник ABC искомый (рис. 119). Если провести поворот с центром в точке A на угол 60° стороны AB с окружностью O , то точка B совпадет с точкой C , а окружность перейдет в окружность с центром в точке O_1 , проходящую через точку C . Следовательно, если окружность O повернуть около точки A на угол в 60° , то найдем еще одну вершину искомого равностороннего треугольника как точку пересечения данной прямой с окружностью с центром в точке O_1 . Практически поворот окружности выполнить весьма просто, так как для этого достаточно построить равносторонний треугольник AOO_1 , сторона которого AO известна. Определив положение вершины C , найдем сторону искомого равностороннего треугольника. Дальнейшее построение элементарно.

Следует учитывать, что поворот окружности возможен и в противоположном направлении, поэтому задача может иметь четыре, три, два, одно и ни одного решения в зависимости от числа точек пересечения построенных вспомогательных окружностей с данной прямой.

2) Решение этой задачи аналогично решению предыдущей, сложнее лишь выполнить поворот одной из данных прямых на 60° .

Для этого опустим из точки A на выбранную прямую перпендикуляр и повернем его на 60° , для чего строим равносторонний треугольник со стороной, длина которой равна длине перпендикуляра. Затем через конец полученного после поворота перпендикуляра проведем требуемую прямую. Точка пересечения этой прямой со второй из данных и определит положение второй вершины искомого треугольника. Задача может иметь два, одно и ни одного решения.

891. Пусть x и y — длины катетов, а z — длина гипотенузы, причем $x \leq y < z$. По условию $x^2 + y^2 = z^2$, значит, $x^3 + y^3 \leq$

$\leq x^2y + y^3 = z^2y < z^3$, то есть куб гипотенузы больше суммы кубов катетов

892. Если из каждой вершины внутреннего многоугольника опустить перпендикуляры на стороны внешнего многоугольника, то получившиеся прямоугольники будут иметь площадь 12 см^2 . Все угловые четырехугольники перенесем в одну точку. Получим многоугольник, площадь которого больше площади круга радиуса 1 см. Следовательно, площадь многоугольника увеличивается более чем на $12 + \pi > 15 \text{ (см}^2\text{)}$.

894. Если отрезок обозначить A_1PB_1 , то треугольники $PA A_1$ и PBB_1 будут равнобедренными, причем $PA_1 = PA$ и $PB_1 = PB$.

896. Таких точек бесконечное множество около Южного полюса. Если взять точки, отстоящие от Южного полюса примерно на 1,16 км, то, пройдя на юг 1 км, мы окажемся на параллели, длина которой равна 1 км, и, пройдя ее в направлении на восток, придем в точку, из которой начали двигаться на восток.

Но это не все точки. Очевидно, что если взять параллель, находящуюся на расстоянии 1 км от параллели, длина которой равна 0,5 км, то, начав движение из любой точки первой параллели на юг, мы дважды обойдем Южный полюс, идя 1 км на восток, и вновь возвратимся в исходную точку. Заметим, что Южный полюс можно обходить и три, и четыре, и более раз.

897. Построить две окружности с центрами в точках A и B радиусами, равными AB . Эти окружности пересекаются в некоторой точке D . Затем на окружности с центром в точке B построить дуги DE и EC , равные дуге AD . Точка C — искомая.

898. в) Два раза прикладываем линейку к данной точке O под равными углами и проводим с обеих сторон линейки три параллели; на данной прямой получим две точки: A и B . Затем поворачиваем линейку так, чтобы точки A и O были на ее бортах, и проводим две параллели. Точку пересечения с одной из предыдущих параллелей соединяем с точкой O .

899. а) Искомая будет прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей с точкой пересечения продолжений боковых сторон.

900. Число треугольников зависит от положения точки A . Если точка A — центральная, то получим 24 треугольника, если A — угловая точка, то 25 треугольников, для остальных положений точки A получим 26 треугольников.

901. Число тех и других одинаково.

902. Автобус B двигался быстрее, чем A

903. 10 км. **904.** 17 ч 08 мин.

905. Если первый сеанс начался в 12 ч a мин, а второй — в 13 ч b мин, то $a + c = 60 + b$ и $a + 6c = 665$, где c — продолжительность сеанса и перерыва. Так как $0 \leq a \leq 59$, то $101 \leq c \leq 110$. С другой стороны, $5c = 605 - b$, поэтому b делится на 5 и, следовательно, $0 \leq b \leq 55$. Тогда $550 \leq 5c \leq 605$, то есть $110 \leq c \leq 121$. Таким образом, $c = 110$ мин, $a = 5$ мин, $b = 55$ мин. Начало сеансов: 1-й — 12 ч 05 мин, 2-й — 13 ч 55 мин, 3-й — 15 ч 45 мин, 4-й — 17 ч 35 мин, 5-й — 19 ч 25 мин, 6-й — 21 ч 15 мин, 7-й — 23 ч 05 мин.

906. $a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a$.

907. $(5; 6), (-6; -5), (-3; 4), (-4; 3)$. **908.** $7744 = 88^2$.

909. 4 576 36 81 16 9025

И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ

- 910.** 9-ю способами.
- 911.** Описывает определенный диаметр обруча. **913.** 14.
- 914.** Можно решить систему двух первых уравнений и непосредственной проверкой установить, что все три решения системы удовлетворяют третьему уравнению.
- 915.** Рассмотреть диаметры вписанной окружности, параллельные соответствующим сторонам треугольника.
- 916.** Рассмотреть два треугольника с общей стороной, вершинами которых являются четыре смежные вершины пятиугольника. Для четырехугольника утверждение неверно, достаточно рассмотреть произвольный прямоугольник.
- 917.** Рассмотреть подобные треугольники: CAC_1 и B_1AB ; CBC_1 и A_1BA .
- 918.** Из вершины прямого угла треугольника отрезок PQ виден под прямым углом.
- 919.** Задача имеет решение, если можно построить прямоугольный треугольник по гипотенузе PQ и катету длины p . Допустимы два решения, симметричные относительно данной прямой.
- 920.** 1 получится из тех чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 1, то есть из чисел 1, 10, 19, ..., 1000; 2 получится из чисел 2, 11, 20, ..., 992. Значит, чисел 1 на одно больше, чем чисел 2.
- 921.** Сумма всех сомножителей равна нулю, чего быть не может, если все они нечетные.
- 922.** 5, 4 и 7 соответственно.
- 923.** Достаточно построить окружность на диагонали, выходящей из острого угла, как на диаметре.
- 924.** Медиана равна половине длины гипотенузы, поэтому легко найти площадь треугольника, что определит величину высоты на гипотенузу.
- 926.** Третье утверждение следует из первых двух.
- 927.** E, D, A, C, B .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть первая

Глава I. Занимательные задачи	4
1. Задачи для проверки сообразительности и внимательности	—
2. Волшебные квадраты	17
3. Задачи, решаемые с конца	20
4. Задачи с геометрическим содержанием	26
5. Разные задачи	33
Глава II. Восстановление чисел	43
6. Сложение и вычитание	—
7. Умножение и деление	45
8. Зашифрованные действия	51
9. Числовые ребусы	53
Глава III. Логические задачи	60
10. Задачи, решаемые почти без вычислений	—
11. Кто прав?	64
12. Задачи, решаемые методом исключения с применением таблиц	70

Часть вторая

Глава IV. Системы счисления	80
13. Различные системы счисления	—
14. Переход от одной системы счисления к другой	82
15. Сложение и вычитание	88
16. Умножение и деление	92
17. Разные задачи на системы счисления	97
Глава V. Дроби	102
18. Задачи на все действия с дробями	—
19. Задачи на дроби от разных чисел	110
20. Проценты	114
Глава VI. Логические рассуждения	117
21. Необходимость и достаточность	—
22. Построение отрицания	123
23. Применение графов к решению логических задач	126

Часть третья

Глава VII. Арифметические и алгебраические задачи	133
24. Математические игры и софизмы	—
25. Круги Эйлера	140
26. Рациональные числа	144
Глава VIII. Геометрические задачи	149
27. Вычерчивание фигур одним росчерком	—
28. Задачи на первые понятия геометрии	154

Часть четвертая

Глава IX. Алгоритмы и схемы	158
Глава X. Арифметические и алгебраические задачи	169
29. Уравнения в целых числах	—
30. Систематические дроби	179
Глава XI. Геометрические задачи	182
31. Геометрические софизмы	—
32. Метод пересечения фигур	188
Глава XII. Задачи олимпиадного характера	197
Ответы, указания и решения	219

