С. Г. Михлин, Н. Ф. Морозов,
М. В. Паукшто

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ленинград 1986

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Ленинградский ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени А.А. Жданова

С. Г. Михлин, Н. Ф. Морозов,
М. В. Паукшто

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Учебное пособие

Ленинград 1986

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 539.3 : 517.968(075.8)
М 698

Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Граничные интегральные уравнения в теории упругости. Учебное пособие. Л., 1986. 88 с.

Изложены основы теории одномерных и двумерных сингулярных уравнений. Дано приложение этой теории к плоским и пространственным задачам линейной теории упругости. Решены некоторые конкретные задачи теории трещин и проиллюстрированы возникающие при этом особенности.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов по специальности "Теория упругости", "Математическая физика".

Рецензенты: проф. П.И.Перлин (Моск.физ.-техн.ин-т),
проф. Б.А.Пламеневский (Ленингр.электротехн.ин-т связи)

П р е д и с л о в и е

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций и семинаре, проходивших на математико-механическом факультете Ленинградского университета в 1983-1984 учебном году, для студентов и аспирантов, специализирующихся на кафедре теории упругости. В нем изложены основы метода граничных интегральных уравнений (г.и.у.) для решения пространственных и плоских задач теории упругости. Рассмотрены различные способы сведения краевых задач к интегральным уравнениям и проиллюстрированы особенности, возникающие при исследовании граничных интегральных уравнений для упругих областей с трещинами и остными вырезами.

Первая глава содержит основные сведения теории одномерных и двумерных сингулярных интегральных уравнений, а также некоторые замечания о численных методах их решения. Во второй главе исследуются граничные интегральные уравнения первой и второй основных задач теории упругости для тел с гладкой границей. Предложены г.и.у., позволяющие находить алгебраически по решению и краевым условиям напряжения на границе. Спектральные свойства этих уравнений дают возможность применять метод последовательных приближений. Третья глава посвящена частным случаям сингулярных интегральных уравнений, постановке и решению двух конкретных задач теории трещин. В § 5, 6 рассмотрена задача об упругой плоскости, ослабленной ветвящейся трещиной, а в § 7 приведены некоторые результаты по расчету напряженно-деформированного состояния слоистой среды с угловым вырезом.

В пособии рассмотрены стационарные задачи теории упругости, хотя метод граничных интегральных уравнений с успехом применяется для решения задач теории пластичности, механики горных пород, гидродинамики и теории теплопроводности.

Мало затронуты вопросы численной реализации метода граничных интегральных уравнений (об этом см. [7-9, 11, 12, 19]). Наряду с изложением классических результатов, содержащихся в монографиях [4-6, 8, 9, 13, 14], в настоящем пособии приводятся факты, установленные участниками семинара, в том числе результаты § 5 второй главы [36], § 5 и 7 третьей главы [31, 34].

Авторы выражают глубокую признательность профессорам П.И.Перлину и Б.А.Пламеневскому, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

Г л а в а I. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ I. УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

I°. Уравнениями Фредгольма называются интегральные уравнения вида[*]

$$\varphi(x)-\lambda\int_{\Omega}\mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\ ,\quad x\in\Omega, \tag{I.I}$$

где функция $\mathcal{K}(x,y)$ обладает некоторой минимальной гладкостью. Можно считать, что Ω - измеримое множество в конечномерном евклидовом пространстве, λ - численный параметр, $\mathcal{K}(x,y)$ и $f(x)$ - заданные в Ω функции. $\mathcal{K}(x,y)$ называется ядром, а $f(x)$ - свободным членом интегрального уравнения (I.I). Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ могут быть скалярными или векторными: соответственно ядро $\mathcal{K}(x,y)$ будет функцией скалярной или матричной. В последнем случае уравнение (I.I) является системой интегральных уравнений Фредгольма.

Обыкновенно считается, что неизвестная функция $\varphi(x)$ и свободный член $f(x)$ суть элементы некоторого банахова пространства. На ядро $\mathcal{K}(x,y)$ накладывается следующее весьма важное требование.

Ядро $\mathcal{K}(x,y)$ таково, что интегральный оператор $\mathcal{K}\varphi$, где

$$(\mathcal{K}\varphi)(x)=\int_{\Omega}\mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy \tag{I.2}$$

вполне непрерывен в том же банаховом пространстве.

2°. В развитии теории уравнений Фредгольма можно указать четыре основных этапа, связанных с именами Лиувилля-К. Неймана, Фредгольма, Гильберта-Шмидта и Ф.Риса-Шаудера.

Лиувиль рассматривал уравнение (I.I) в предположении, что Ω - замкнутая конечная область евклидова пространства R_n (в простейшем случае - отрезок на оси X), а ядро, свободный член и

---

[*] При желании можно принять за ядро произведение $\lambda\mathcal{K}(x,y)$. Выделение параметра λ весьма целесообразно при исследовании спектральных свойств уравнения (I.I).

неизвестная функция непрерывны. Он доказал, что при достаточно малых значениях параметра λ, именно, при

$$|\lambda| < \frac{1}{\max|\mathcal{K}(x,y)|\,\mu(\Omega)} \tag{I.3}$$

уравнение (I.I) имеет единственное решение, которое можно получить по методу последовательных приближений. Этот результат был использован К.Нейманом при исследовании интегральных уравнений теории потенциала.

3°. Фредгольм исследовал уравнение (I.I) в тех же предположениях, что и Лиувилль, но на значения параметра он не накладывал ограничений, допуская, что λ может быть любой точкой комплексной плоскости. Основная идея, которой руководствовался Фредгольм, состояла в том, что должна существовать аналогия между теорией интегральных уравнений и теорией линейных алгебраических систем.

Рассмотрим систему вида

$$x - \lambda A x = f, \tag{I.4}$$

где x и f - векторы из евклидова пространства R_m, A - матрица порядка $m \times m$, λ - численный параметр. Свойства системы (I.4) существенно зависят от того, обращается в нуль или нет определитель этой системы, т.е. является λ корнем характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}(I - \lambda A) = 0 \tag{I.5}$$

(I - единичная матрица) или нет. Напомним, что эти корни называются характеристическими числами матрицы A. Если значение λ не характеристическое, то система (I.4) имеет одно и только одно решение при любом свободном члене f (x). Если λ - характеристическое, то однородная система $x - \lambda A x = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная система (I.4) разрешима тогда и только тогда, когда ее свободный член f ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы $y - \bar{\lambda} A^* y = 0$; при этом, как известно, обе однородные системы - данная и сопряженная - имеют одинаковое число линейно-независимых решений.

Фредгольм распространил эти теоремы (с одним изменением, о котором будет сказано несколько ниже) на интегральные уравнения вида (I.I) при условиях непрерывности ядра и свободного члена и конечности измеримого множества. Назовем значение параметра характеристическим для ядра $\mathcal{K}(x,y)$, если однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy=0 \qquad (I.6)$$

имеет нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю решения (для ядра $\mathcal{K}(x,y)$ эти решения называются собственными функциями). Тогда справедливы следующие теоремы (теоремы Фредгольма).

I. Существует не более чем счетное множество характеристических чисел. Если это множество счетное, то оно имеет единственную точку сгущения на бесконечности.

2. Уравнение (I.I) имеет одно и только одно решение тогда и только тогда, когда значение λ – не характеристическое.

3. Если λ – характеристическое число для ядра $\mathcal{K}(x,y)$, то $\bar{\lambda}$ есть характеристическое число сопряженного ядра $\mathcal{K}^*(x,y)=\overline{\mathcal{K}(x,y)}$. Запишем для него уравнение, аналогичное (I.6)

$$\Psi(x)-\bar{\lambda}\int_G \overline{\mathcal{K}(x,y)}\,\Psi(y)dy=0. \qquad (I.7)$$

Однородные сопряженные уравнения (I.6) и (I.7) имеют одинаковое число линейно-независимых решений.

4. Если λ – характеристическое число для ядра $\mathcal{K}(x,y)$, то неоднородное уравнение (I.I) имеет решение тогда и только тогда, когда его свободный член $f(x)$ ортогонален ко всем решениям однородного сопряженного уравнения (I.7); очевидно, что это решение не единственное.

Фредгольм рассмотрел еще один класс уравнений вида (I.I), в котором ядро имеет вид

$$\mathcal{K}(x,y)=\frac{A(x,y)}{r^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<n. \qquad (I.8)$$

Здесь n – размерность области G, r – расстояние между точками x и y, α – постоянная, $A(x,y)$ – непрерывная в G функция. Интегральные уравнения вида (I) с ядром (I.8) называются уравнениями со слабой особенностью. Для них справедливы все четыре перечисленные выше теоремы Фредгольма.

С ядром $\mathcal{K}(x,y)$ Фредгольм связал две целые функции от λ, которые он обозначил через $D(\lambda)$ и $D(x,y;\lambda)$. Корни функции

$D(\lambda)$ совпадают с характеристическими числами ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Для нехарактеристических λ положим

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{I.9}$$

функция $\Gamma(x, y; \lambda)$ называется резольвентой Фредгольма. Для нехарактеристических λ решения уравнения (I.I) можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \Gamma(x,y;\lambda) f(y) dy. \tag{I.10}$$

4°. Д.Гильберт и Э.Шмидт изучали интегральное уравнение (I.I) в более частном, но очень важном случае, когда ядро $\mathcal{K}(x,y)$ симметричное, т.е.

$$\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}^*(x,y) \equiv \overline{\mathcal{K}(y,x)}. \tag{I.11}$$

Предположение о непрерывности ядра заменено более общим предположением, а именно

$$\int_G\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 dx dy < \infty, \tag{I.12}$$

соответственно предполагается, что $f, \varphi \in L_2(G)$. Сравнительно просто доказывается, что в этих предположениях остаются верными (в том числе и для несимметричных ядер) все четыре теоремы Фредгольма; при этом требование, чтобы множество G было конечным, перестает быть необходимым. Для симметричных ядер Гильберт и Шмидт доказали, что их характеристические числа вещественны, а собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Если несколько линейно-независимых собственных функций соответствуют одному и тому же характеристическому числу, то их можно ортогонализировать с помощью известного процесса Э.Шмидта. Таким образом, каждому симметричному ядру, удовлетворяющему условию (I.12), можно сопоставить последовательность характеристических чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \ldots \tag{I.13}$$

и соответствующих им собственных функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)\ldots \qquad (I.14)$$

При такой записи каждому характеристическому числу соответствует одна собственная функция, но среди характеристических чисел (I.13) могут оказаться равные.

Резольвенту уравнения (I.I) с симметричным ядром можно представить как сумму ряда

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \sum_m \frac{\varphi_m(x)\,\overline{\varphi_m(y)}}{\lambda-\lambda_m}, \qquad (I.15)$$

а решение этого уравнения – как сумму

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_m (f,\varphi_m)\,\varphi_m(x);$$

$$(f,\varphi_m) = \int_G f(y)\,\varphi_m(y)\,dy. \qquad (I.16)$$

Члены последовательностей (I.13) и (I.14) можно получить, решая некоторую последовательность вариационных задач.

5°. Ф.Рис и Ю.Шаудер описали наиболее общий класс уравнений в произвольном банаховом пространстве B вида

$$\varphi - \lambda T\varphi = f, \qquad (I.16)$$

для которых верны все четыре теоремы Фредгольма. В выражении (I.16) T – линейный оператор, отображающий B в B, λ – численный параметр, φ и f – искомый и заданный элементы пространства B. Класс уравнений Риса-Шаудера характеризуется тем, что оператор T должен быть вполне непрерывен как оператор из B в B.

Напомним два эквивалентных определения вполне непрерывного оператора:

I. Оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное.

2. Оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

6°. Выделим подкласс пространств, в которых полная непрерывность операторов сравнительно легко исследуется.

Оператор T, действующий из B в B, называется конечномерным, если его можно представить в виде суммы:

$$T\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j\, b_j(\varphi), \qquad (I.17)$$

где m - конечное число, a_j - фиксированные элементы пространства B и b_j - фиксированные линейные ограниченные функционалы в B.

Справедливо следующее утверждение.
Если оператор можно представить в виде суммы двух операторов, из которых один конечномерный, а другой имеет сколь угодно малую норму, то данный оператор вполне непрерывен.

Для некоторых пространств (например, для C или сепарабельного гильбертова пространства) верна и обратная теорема:

Всякий вполне непрерывный оператор можно представить в виде суммы двух операторов: конечномерного и сколь угодно малого по норме.

Если в уравнении (I.16) T - конечномерный оператор, то это уравнение легко сводится к линейной алгебраической системе; отсюда и вытекает справедливость теорем Фредгольма. В общем случае, когда T только вполне непрерывен, мы представим его в виде $T = T_1 + T_2$, где T_1 - конечномерный, а $\|T_2\| < 1/|\lambda|$. Подставим это в (I.16) и перенесем член с T_1 направо:

$$\varphi - \lambda T_2 \varphi = f + \lambda T_1 \varphi. \tag{I.18}$$

Временно будем рассматривать $T_1 \varphi$ как известный элемент; по теореме Банаха (может быть, правильнее сказать Лиувилля-Банаха) можно тогда применить к уравнению (I.18) метод последовательных приближений, который приведет нас к новому уравнению:

$$\varphi - \lambda (1 - \lambda T_2)^{-1} T_1 \varphi = (1 - \lambda T_2)^{-1} f. \tag{I.19}$$

Оператор $(1 - \lambda T_2)^{-1} T_1$, как нетрудно видеть, конечномерный, и уравнение (I.19) сводится к линейной алгебраической системе; отсюда опять вытекают теоремы Фредгольма. Таким путем можно получить доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывными ядрами, с ядрами, удовлетворяющими условию (I.12), и, наконец, с ядрами, имеющими слабую особенность (см. формулу (I.8)).

§ 2. ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1°. Пусть функция $f(x)$ вещественной переменной x определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ оси x всюду, кроме точки t, $a<t<b$. Рассмотрим выражение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{t-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{t+\kappa\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right), \quad \kappa=\mathrm{const}>0. \tag{1.20}$$

Если несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.21}$$

существует, то предел (1.20) существует при любом κ (и не зависит от него) и равен интегралу (1.21).

Может случиться, что при произвольном κ предел (1.20) либо зависит от κ, либо, вообще говоря, не существует - в этом последнем случае мы все же предположим, что при $\kappa=1$ предел (1.20) существует. Несобственный интеграл (1.21) в этом случае расходится. Коши назвал главным значением расходящегося интеграла (1.21) значение предела (1.20) при $\kappa=1$ (если такой предел существует). Для обозначения главного значения Коши предложил пользоваться символом $V.P.$ (начальные буквы французских слов - valeur principale - главное значение), так что

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{t-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{t+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right). \tag{1.22}$$

В настоящее время "главное значение расходящегося интеграла" принято называть "сингулярным интегралом" и обозначать его обычным символом интеграла, так что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{t-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{t+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2°. Рассмотрим расходящийся интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-t}, \quad a<t<b, \tag{1.23}$$

и докажем, что он существует как сингулярный. Действительно,

$$\int_a^b \frac{dx}{x-t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_a^{t-\varepsilon}\frac{dx}{x-t} + \int_{t+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-t}\Big] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln(t-x)\Big|_a^{t-\varepsilon} + \ln(x-t)\Big|_{t+\varepsilon}^b\Big] = \ln\frac{b-t}{t-a}.$$

Отметим, что если t попадает на край отрезка $[a,b]$, то сингулярный интеграл (I.23) не существует.

Теперь рассмотрим более общий интеграл

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-t}\,dx .$$

Пусть $f(x)$ удовлетворяет на $[a,b]$ условию Гельдера:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le A|x_1-x_2|^\alpha, \quad 0<\alpha\le 1 .$$

Тогда

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-t}\,dt = \int_a^b \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\,dx + f(t)\int_a^b \frac{dx}{x-t} .$$

Первый интеграл абсолютно сходящийся, а второй интеграл существует как сингулярный. Таким образом,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-t}\,dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\,dt + f(t)\ln\frac{b-t}{t-a} . \tag{7}$$

3°. Пусть Γ – замкнутая достаточно гладкая кривая на комплексной плоскости. Вычислим сингулярный интеграл

$$\int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi-t}, \qquad t\in\Gamma .$$

Будем считать, что контур Γ обходится против часовой стрелки. "Вырежем" точку t окружности радиуса ε и обозначим через Γ_ε часть контура Γ, лежащую вне этой окружности. Примем по определению, что

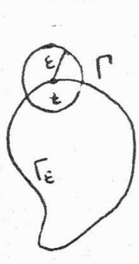

Рис. I

$$\int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi-t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{d\xi}{\xi-t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\,[\ln(\xi-t)]_{\Gamma_\varepsilon} .$$

Легко доказывается, что последний предел равен πi. Таким образом,

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\xi}{\xi - t} = 1 \quad , \; t \in \Gamma .$$

Если функция $f(\sigma)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера, то существует и более общий сингулярный интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - t}\,d\xi = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t}\,d\xi + f(t). \tag{I.24}$$

И.И.Привалов доказал, что если $f(t)$ удовлетворяет на Γ условию Гельдера с показателем, меньшим единицы, то сингулярный интеграл (I.24) удовлетворяет условию Гельдера с тем же показателем*. Сингулярный интеграл (I.24) порождает оператор, который обычно называют оператором Коши и обозначают через S:

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - t}\,d\xi .$$

Обозначим еще через $H_\alpha(\Gamma)$ класс функций, удовлетворяющих на Γ условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$. Этот класс делается банаховым пространством, если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_{H_\alpha(\Gamma)} = \max|f(t)| + \sup_{t', t'' \in \Gamma}\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^{\alpha}} .$$

Из теоремы Привалова вытекает, что оператор Коши ограничен в H_α, если $\alpha < 1$:

$$\|Sf\|_{H_\alpha(\Gamma)} \leq c\,\|f\|_{H_\alpha(\Gamma)} \quad , \quad c = const .$$

---

* Если показатель Гельдера функции $f(t)$ равен единице, то интеграл (I.24) удовлетворяет неравенству

$$|(Sf)(t_1) - (Sf)(t_2)| \leq c\,|t_1 - t_2|\cdot|\ln(t_1 - t_2)|$$

§ 3. ФОРМУЛЫ СОХОЦКОГО-ПЛЕМЕЛИ

1°. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi .$$

Этот интеграл определяет две аналитические функции: одну - внутри, другую - вне Γ. Обозначим эти функции соответственно $\varphi_i(z)$ и $\varphi_e(z)$. Заметим, что $\varphi_e(\infty)=0$. Обозначим еще предельные значения этих функций (если эти пределы существуют) при $z\to t$, $t\in\Gamma$, через $\varphi_i(t)$ и $\varphi_e(t)$.

В 70-х гг. прошлого века Ю.В.Сохоцкий получил формулы, определяющие упомянутые предельные значения:

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}(Sf)(t)\quad, \tag{I.25}$$

$$\varphi_e(t)=-\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}(Sf)(t)\,. \tag{I.26}$$

Доказательство Сохоцкого накладывало на $f(t)$ довольно жесткие условия. В начале нашего века венгерский математик Племели получил те же формулы, предполагая только, что $f\in H_\alpha(\Gamma)$.

Формулы (I.25) верны, если Γ - ляпуновская кривая и $z\to t$ по пути, не касательному к Γ.

Отметим два важных следствия из этих формул:

1) Если $f(z)$ аналитична внутри Γ, непрерывна вплоть до Γ и $f\in H_\alpha(\Gamma)$, то

$$(Sf)(t)=f(t)\quad,\quad t\in\Gamma. \tag{I.27}$$

2) Если $f(z)$ аналитична вне Γ, $f(\infty)=0$, f непрерывна вплоть до Γ и $f\in H_\alpha(\Gamma)$, то

$$(Sf)(t)=-f(t)\quad,\quad t\in\Gamma. \tag{I.28}$$

Формулам Сохоцкого-Племели можно придать вид

$$\varphi_i(t)-\varphi_e(t)=f(t)\quad,\quad \varphi_i(t)+\varphi_e(t)=(Sf)(t)\,.$$

2°. Пусть $f\in H_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$. Из формулы (I.25) и из теоремы Привалова вытекает, что аналитическая внутри Γ функция $\varphi_i(z)$ непрерывна вплоть до Γ и $\varphi_i(t)\in H_\alpha(\Gamma)$. В таком случае к функции $\varphi_i(t)$ можно применить оператор Коши, причем по формуле (I.27) $(S\varphi_i)(t)=\varphi_i(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}(Sf)(t)$. С другой стороны, применяя оператор Коши к обеим частям формулы (I.25), получим $(S\varphi_i)(t)=\frac{1}{2}(Sf)(t)+\frac{1}{2}(S^2f)(t)$. Сравнив полученные результаты, мы придем к формуле Пуанкаре-Бертрана

$$(S^2f)(t)=f(t) \tag{I.29}$$

или короче $S^2=I$ (I - тождественный оператор).

Формула (I.29) - одна из важнейших в теории сингулярных интегралов.

3°. Сингулярный оператор Коши можно рассматривать не только в пространствах $H_\alpha(\Gamma)$, но и в других банаховых пространствах. Допустим, что B - банахово пространство, такое, что пространства $H_\alpha(\Gamma)$ в него плотно вкладываются - это значит, что каждая функция из $H_\alpha(\Gamma)$ есть элемент из B, и множество этих функций плотно в B. Таковы, например, пространства $C(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, $1\le p<\infty$. Будем рассматривать S как оператор, действующий в B и имеющий областью определения множество функций, принадлежащих классу $H_\alpha(\Gamma)$. Если оператор S оказывается ограниченным в норме пространства B на функциях из $H_\alpha(\Gamma)$, то этот оператор можно расширить по непрерывности на все B, и этот расширенный оператор также будет ограничен. В этом смысле мы тогда будем говорить, что S - оператор, ограниченный в B. Разумеется, может случиться, что оператор S, определенный на функциях из $H_\alpha(\Gamma)$ неограничен в норме B; тогда его расширение по непрерывности на все пространство B невозможно.

Отметим некоторые важные частные случаи.

Теорема I.I. Оператор Коши ограничен в $L_p(\Gamma)$, если $1<p<\infty$.

Приведем доказательство теоремы I.I в простейшем случае, когда $p=2$, а Γ - окружность $|t|=1$. Любую функцию из $L_2(\Gamma)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n t^n\ ;\quad t=e^{i\theta}\in\Gamma.$$

Множество тригонометрических полиномов вида

$$f(t)=\sum_{n=-N_1}^{+N_2}a_n t^n \tag{I.30}$$

плотно в $L_2(\Gamma)$; в то же время эти полиномы принадлежат пространству $H_\alpha(\Gamma)$ при любом α, $0<\alpha\le 1$. Докажем, что на функциях (I.30) оператор Коши ограничен по норме $L_2(\Gamma)$. Имеем очевидно

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n t^n \sum_{k=-N_1}^{N_2} \bar{a}_k \bar{t}^k d\theta = 2\pi \sum_{n=-N_1}^{N_2} |a_n|^2. \tag{I.31}$$

Далее по формулам (I.27) и (I.28)

$$S t^n = \begin{cases} t^n, & n \geq 0, \\ -t^n, & n < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(Sf)(t) = \sum_{n=0}^{N_2} a_n t^n - \sum_{n=-1}^{-N_1} a_n t^n$$

и

$$\|Sf\|^2 = 2\pi \sum_{n=-N_1}^{+N_2} |a_n|^2. \tag{I.32}$$

Формулы (I.31) и (I.32) показывают, что в пространстве $L_2(\Gamma)$ оператор Коши ограничен на множестве тригонометрических полиномов и его норма равна единице. Так как множество тригонометрических полиномов плотно в $L_2(\Gamma)$, то оператор S можно продолжить на все это пространство по непрерывности, и расширенный оператор по-прежнему имеет норму, равную единице

Теорема I.2. В пространствах C, L_1, L_∞ оператор Коши неограничен. (Доказательство см. в [5, 6].)

Теорема I.3. В любом бесконечномерном пространстве оператор Коши не вполне непрерывен.

Приведем доказательство этой теоремы. Пусть она неверна, и в некотором пространстве B_1 оператор S вполне непрерывен. Тогда он ограничен в B_1, и оператор $S^2 = SS$ вполне непрерывен в B_1, как произведение ограниченного оператора S и вполне непрерывного оператора S. Но формула Пуанкаре-Бертрана означает, что есть тождественный оператор, который в любом бесконечномерном пространстве не вполне непрерывен.

4°. Будем называть сингулярными операторы вида

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (T\varphi)(t). \tag{I.33}$$

Оператор (I.33) будем рассматривать в каком-нибудь пространстве (например, в $L_2(\Gamma)$), в котором оператор Коши ограничен, и потребуем, чтобы в этом пространстве оператор T был вполне непрерывен. Рассмотрим два сингулярных оператора

$$A_k\varphi = a_k(t)\varphi(t) + b_k(t)(S\varphi)(t) + (T_k\varphi)(t)\ ,\ k=1,2.$$

Перемножим их и покажем, что в результате получится оператор того же типа. Действительно,

$$\begin{aligned} A_1A_2\varphi = a_1(t)\,[a_2(t)\varphi(t) + b_2(t)(S\varphi)(t) + (T_2\varphi)(t)] + \\ + b_1(t)S[a_2(t)\varphi(t) + b_2(t)(S\varphi)(t) + (T_2\varphi)(t)] + \\ + T_1[a_2(t)\varphi(t) + b_2(t)(S\varphi)(t) + (T_2\varphi)(t)]\ , \end{aligned}$$

в последнем слагаемом стоит произведение вполне непрерывного оператора T на ограниченный оператор A_2 , а такое произведение вполне непрерывно. Внимательнее исследуем второе слагаемое в (I.34). С этой целью рассмотрим два выражения

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(\xi)f(\xi)}{\xi - t}\,d\xi = S(cf)(t)$$

и

$$\frac{c(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t}\,d\xi = c(t)(Sf)(t).$$

Составим их разность

$$S(cf) - c(t)Sf = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(\xi)-c(t)}{\xi - t}\,f(\xi)\,d\xi .$$

Мы предположим, что $c(t)$ - гельдерова функция, но тогда $(c(\xi)-c(t))/(\xi - t)$ есть слабо сингулярное ядро, а интегральный оператор с таким ядром вполне непрерывен. Таким образом, оказывается, что функциональный множитель $c(t)$ можно вынести за знак оператора S , добавив при этом соответствующее вполне непрерывное слагаемое. Используя это обстоятельство, можно представить второе слагаемое в (I.34) так:

$$\begin{aligned} b_1(t)a_2(t)(S\varphi)(t) + b_1(t)b_2(t)S^2\varphi + T' = \\ = b_1(t)b_2(t)\varphi(t) + b_1(t)a_2(t)(S\varphi)(t) + T'\ ; \end{aligned}$$

и формула (I.34) преобразуется в следующую:

$$A_1A_2 = (a_1a_2 + b_1b_2)\varphi + (a_1b_2 + a_2b_1)S\varphi + T''\varphi,$$

где T' , T'' - вполне непрерывные операторы.

5°. Рассмотрим снова оператор $A\varphi = a\varphi + bS\varphi + T\varphi$. Для него введем новое понятие – символ Sym. Определим его как функцию двух переменных t и θ, где $t \in \Gamma$, а θ принимает только два значения: +I и –I, следовательно, $\theta^2 = 1$. По определению полагаем

$$(Sym\, A)(t, \theta) = a(t) + b(t)\theta.$$

Заметим, что сингулярный оператор восстанавливается по своему символу с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Отметим основные свойства символов:

а) при сложении операторов символы складываются;

б) при перемножении операторов символы перемножаются:

$$Sym(A_1 A_2) = a_1(t)a_2(t) + b_1(t)b_2(t) + $$
$$+ [a_1(t)b_2(t) + a_2(t)b_1(t)]\theta;$$

в) символ вполне непрерывного оператора равен нулю; обратно, оператор, символ которого равен нулю, вполне непрерывен;

г) умножение символов коммутативно: умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

I°. Рассмотрим уравнение

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (T\varphi)(t) = f(t). \qquad (I.35)$$

Такое уравнение будем называть сингулярным. Попытаемся преобразовать уравнение (I.35) в уравнение Фредгольма, точнее, в уравнение, у которого в левой части стоит сумма операторов – тождественного и вполне непрерывного – от функции φ, а в правой части – известная функция. Для этого умножим уравнение (I.35) на сингулярный оператор

$$R\varphi \equiv c(t)\varphi(t) + d(t)(S\varphi)(t) + (Q\varphi)(t)$$

с неизвестными пока коэффициентами $c(t)$ и $d(t)$. Очевидно

$$Sym\, RA = ac + bd + (ad + bc)\theta.$$

Но у уравнения Фредгольма символ оператора, стоящего в левой части тождественно равен единице, поэтому необходимо, чтобы выполнялось тождество $Sym\, RA = 1$, т. е. должно быть

$$\begin{cases} ac + bd = 1, \\ bc + ad = 0. \end{cases} \tag{I.36}$$

Равенства (I.36) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными $c(t)$ и $d(t)$; эта система разрешима при любом $t \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда ее определитель, равный $a^2(t) - b^2(t)$ нигде на Γ не обращается в нуль. Но это значит, что $a+b$ и $a-b$ не должны обращаться в нуль, или $Sym\, A$ нигде не равен нулю.

<u>Определение</u>. Символ называется вырождающимся, если при некоторых значениях переменных $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ он принимает значение нуль.

Итак, мы можем свести сингулярное уравнение к уравнению Фредгольма тогда и только тогда, когда символ исходного уравнения не вырождается, при этом

$$Sym\, R = \frac{1}{a + b\theta} = \frac{(a - b\theta)}{a^2 - b^2} = \frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a^2 - b^2}$$

и, следовательно,

$$(R\varphi)(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}\varphi(t) - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}(S\varphi)(t) + (Q\varphi)(t);$$

вполне непрерывное слагаемое $(Q\varphi)(t)$ остается произвольным. Итак, если символ уравнения (I.35) не вырождается, то оно может быть преобразовано в уравнение Фредгольма

$$RA\varphi = Rf. \tag{I.37}$$

Любое решение исходного уравнения (I.35) является решением и уравнения (I.37), но обратное не верно: могут появляться новые решения.

Оператор R назовем левым регуляризатором оператора A .

2°. В 1921 г. Ф.Нетер доказал для одномерных сингулярных уравнений следующие теоремы:

1. Если уравнение (I.35) допускает левую регуляризацию, то однородное уравнение (I.35) имеет конечное число линейно-независимых решений.

2. Если уравнение (I.35) допускает левую регуляризацию, то однородное уравнение, сопряженное с данным, тоже имеет конечное

число линейно-независимых решений. Заметим, что для уравнений Фредгольма числа решений, о которых говорится в теоремах I и 2, равны между собой. Для сингулярных уравнений такое утверждение в общем случае неверно. Добавим еще следующее. Если A – линейный оператор в гильбертовом пространстве, то сопряженный оператор A^* определяется тождеством

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi).$$

В частности, если A – сингулярный оператор (I.35), то сопряженный оператор

$$(A^*\psi)(t) = \bar{a}(t)\psi(t) + \frac{\overline{b(t)}}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + T_2\psi,$$

где T_2 – некоторый вполне непрерывный оператор.

3. Для того чтобы неоднородное уравнение (I.35) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем решениям однородного сопряженного уравнения.

Теорема Фредгольма о собственных числах неверна для сингулярных интегральных уравнений. Так, например, уравнение $S\varphi + \lambda\varphi = 0$ имеет два собственных числа $\lambda = \pm i$, но каждое из них – бесконечного ранга. Множество собственных чисел сингулярного оператора может заполнять замкнутую область.

3°. Пусть A – ограниченный линейный оператор, определенный на всем рассматриваемом гильбертовом пространстве (в частности, A может быть оператором (I.35)), α и β – число линейно-независимых решений уравнений $A\varphi = 0$ и $A^*\varphi = 0$, и пусть хотя бы одно из этих чисел конечное. Разность $\alpha - \beta$ называется в этом случае индексом оператора A:

$$\alpha - \beta = \operatorname{ind} A.$$

Очевидно, что $\operatorname{ind} A^* = \beta - \alpha = -\operatorname{ind} A$.

Перечислим основные свойства индекса:

1) Если индексы операторов A и B конечны, то (см. [6, 8])

$$\operatorname{ind} AB = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B.$$

2) Если T – вполне непрерывный оператор, и $\operatorname{ind} A$ конечен, то $\operatorname{ind}(A + T) = \operatorname{ind} A$.

3) Если оператор G ограничен и имеет достаточно малую норму, а $\operatorname{ind} A$ конечен, то $\operatorname{ind}(A+C) = \operatorname{ind} A$. В частности, если R - левый регуляризатор для оператора A, то достаточно, чтобы $\|G\| < \|R\|$.

Свойства 2) и 3) обычно формулируют так: если индекс оператора A конечен, то этот индекс устойчив относительно любых вполне непрерывных изменений оператора A и любых изменений, достаточно малых по норме.

В общем случае вычисление индекса оператора - задача большой трудности, но для сингулярного оператора вида (I.35) эта задача решается просто: если символ оператора A, входящего в уравнение (I.35), не вырождается, то [I0]

$$\operatorname{ind} A = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_\Gamma .$$

В этой формуле квадратные скобки означают приращения заключенной в них величины при обходе контура Γ в положительном направлении.

4°. Изложим один из способов регуляризации сингулярных уравнений. Оператор $a\varphi + bS\varphi$ называется характеристическим или простейшим сингулярным оператором. Уравнение (I.35) запишем в виде

$$a\varphi + bS\varphi = f - T\varphi = f_1 \tag{I.38}$$

и будем временно рассматривать f_1 как известную функцию.

Введем в рассмотрение интеграл Коши. Перепишем уравнение (I.38), пользуясь уравнениями Сохоцкого-Племели:

$$a(\Phi_i - \Phi_e) + b(\Phi_i + \Phi_e) = f_1, \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

или

$$(a+b)\Phi_i - (a-b)\Phi_e = f_1 . \tag{I.39}$$

Задачу (I.39) разные авторы называют задачей Римана, задачей Гильберта или задачей линейного сопряжения.

В случае $b = 0$

$$\Phi_i - \Phi_e = f/a . \tag{I.40}$$

Решение этого уравнения дает формула

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(\xi)}{\xi - z}\,d\xi .$$

Сведем уравнение (I.39) к (I.40). (Карлеман в 1922 г. применил этот способ рассуждений к случаю незамкнутого контура, для замкнутого контура его применил Ф.Д.Гахов.) Имеем

$$\left[\ln \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_\Gamma = 2\pi i m \quad , \qquad \text{где } \; m = \operatorname{ind} A .$$

Пусть начало координат расположено внутри контура Γ. Функция $\ln t$ при обходе контура Γ в положительном направлении получает приращение $2\pi i$, отсюда следует, что функция

$$\theta(t) = \ln \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} - m \ln t$$

при обходе контура Γ окажется однозначной. Если $a(t)$ и $b(t)$ гельдеровы, то $\theta(t)$ также будет гельдеровой функцией. Итак, можно записать

$$\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = e^{\theta(t)}t^m \; ,$$

и уравнение (I.39) переходит в следующее:

$$\Phi_i - e^{\theta(t)}t^m\Phi_e(t) = f_2(t), \quad f_2(t) = \frac{f_1(t)}{a(t)+b(t)} . \qquad (I.41)$$

Положим $\Phi(z) = \Psi(z)e^{\omega(z)}$, где $\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\theta(t)}{t-z}\,dt$.

По формулам Сохоцкого-Племели

$$\omega_i(t) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}S\theta, \quad \omega_e(t) = -\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}S\theta .$$

Отсюда

$$\Phi_i = \Psi_i e^{\omega_i(t)} = \Psi_i e^{\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}S\theta} ,$$

$$\Phi_e = \Psi_e e^{\omega_e(t)} = \Psi_e e^{-\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}S\theta} .$$

Подставив Φ_i и Φ_e в (I.41), получаем

$$\Psi_i - t^m\Psi_e = f_3 \; , \quad f_3 = f_2 e^{-\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}S\theta} . \qquad (I.42)$$

Дальнейшее преобразование зависит от индекса m оператора A . Если $m=0$, то решение уравнения (I.42) дается формулой

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f_3(t)}{t-z}\,dt.$$

Эта формула дает решение, которое, очевидно, единственно.

Пусть теперь $m<0$. Функция t^m в этом случае регулярна вне контура так же, как и Ψ_e . Введем новую функцию

$$\tilde{\Psi}=\begin{cases}\Psi_i\,, & z \text{ внутри } \Gamma\,,\\ z^m\Psi_e\,, & z \text{ вне } \Gamma\,.\end{cases} \tag{I.43}$$

Для нее в силу уравнения (I.42) $\tilde{\Psi}_i-\tilde{\Psi}_e=f_3$, и, следовательно,

$$\tilde{\Psi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f_3(\xi)}{\xi-z}\,d\xi. \tag{I.44}$$

При $z\to\infty$ функция $\Phi(z)$, а следовательно, и $\Psi(z)$ имеют нуль по крайней мере первого порядка. Так как m отрицательно, $m=-n$, $n>0$, то, как видно из (I.43), $z=\infty$ должно быть для функции $\tilde{\Psi}(z)$ нулем порядка по крайней мере $n+1$. Но формула (I.44) показывает, что в общем случае $\tilde{\Psi}(z)$ имеет при $z=\infty$ нуль не выше первого порядка. Поэтому в общем случае при $m<0$ и заданной функции $f(t)$ уравнение (I.38) не имеет решения.

Нетрудно найти условия существования такого решения. При достаточно больших z справедливо разложение

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{\xi}{z^2}-\dots-\frac{\xi^{n-1}}{z^{n}}+O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Подставим это разложение в (I.44):

$$\tilde{\Psi}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z^k}\int\limits_{\Gamma}f_3(\xi)\xi^{k-1}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\xi)O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)d\xi.$$

Последний член правой части имеет при $z=\infty$ нуль порядка не ниже чем $n+1$, предшествующие члены имеют при $z=\infty$ нуль более низкого порядка. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma} f_3(\zeta)\zeta^{k-1}d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)-(T\varphi)(\zeta)}{a(\zeta)+b(\zeta)} e^{-\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}S(\theta)}\zeta^{k-1}d\zeta = 0, \quad k=1,2,\dots,n \tag{I.45}$$

Условия (I.45) означают, что решение уравнения (I.38) существует при $m<0$ тогда и только тогда, когда его свободный член $f_1(t)$ удовлетворяет $n=-m$ условиям ортогональности. В этом случае решение единственно.

Остается рассмотреть случай $m>0$. Рассуждая, как и выше, мы опять придет к уравнению $\Psi_i - t^m\Psi_e = f_3$, только с $m>0$. На этот раз введем функцию $\tilde{\Psi}(z)$ по формуле

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{cases} \Psi_i(z), & z \text{ внутри } \Gamma; \\ z^m\Psi_e(z), & z \text{ вне } \Gamma, \end{cases}$$

и потребуем, чтобы $\tilde{\Psi}_e(\infty)=0$, т.е. чтобы $\Psi(z)$ имело на бесконечности нуль порядка $m+1$. Тогда $\tilde{\Psi}_i(t) - \tilde{\Psi}_e(t) = f_3(t)$, что дает

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_3(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta .$$

Это приведет нас к некоторому решению неоднородного уравнения (I.38). Докажем, что это решение неединственно. В данном случае однородное уравнение (I.38) имеет вид $a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = 0$, что приводится, как и выше, к соотношению $\Psi_i(t) - t^m\Psi_e(t) = 0,\ t\in\Gamma$.

Последнее тождество показывает, что функция $\Psi_i(t)$ аналитична на всей конечной комплексной плоскости и имеет на бесконечности полюс порядка не выше $m-1$. В таком случае $\Psi_i(z)$ есть полином степени не выше $m-1$:

$$\Psi_i(z) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k z^k, \quad \alpha_k = const.$$

Отсюда

$$\Psi_e(z) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_k}{z^{m-k}} .$$

Последние две формулы показывают, что при $m>0$ однородное уравнение (I.38) имеет ровно m линейно-независимых решений, соответственно решение неоднородного уравнения (I.38) неединственно.

Если $T\varphi \equiv 0$, то описанным выше путем уравнение (I.38) исследуется полностью, если же $T\varphi \neq 0$, то тем же путем сингулярное уравнение (I.38) преобразуется в некоторое уравнение Фредгольма.

§ 5. СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

1°. Мы ограничимся здесь простейшим случаем и рассмотрим уравнение

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - t}\,d\xi = f(t), \quad t \in L, \tag{I.46}$$

где L – гладкая открытая дуга без самопересечений, a и b – постоянные. Общий случай с большой полнотой изложен в монографии [10]. Будем считать, что $a^2 - b^2 \neq 0$; концы дуги L обозначим через α и β. В качестве новой неизвестной введем интеграл Коши с плотностью $\varphi(\xi)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\,d\xi, \quad z \notin L.$$

Формулы Сохоцкого-Племели остаются верными и в случае незамкнутого контура интегрирования: при этом направления i и e следует выбирать, как показано на рис. 2. Мы считаем, что дуга L обходится в направлении от α к β. Отметим еще, что в данном случае формулы Сохоцкого-Племели верны только во внутренних точках дуги L; на ее концах α и β эти формулы теряют смысл. Уравнение (I.46) переходит в следующее:

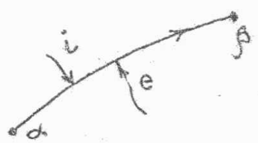

Рис. 2

$$(a+b)\Phi_i(t) - (a-b)\Phi_e(t) = f(t).$$

В данном случае легко построить решение соответствующей однородной задачи $(a+b)\omega_i(t) - (a-b)\omega_e(t) = 0$. Таким решением является, например, функция

$$\omega(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m,$$

где

$$m = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a+b}{a-b}. \tag{I.47}$$

Так как $\ln$ – функция многозначная, и ее различные значения отличаются одно от другого на целое кратное число $2\pi i$, то формула (I.47) определяет m с точностью до произвольного целого слагаемого. Выберем это слагаемое так, чтобы $0 < Re[m] < 1$. Для этого достаточно выбрать значение $\arg\frac{a+b}{a-b}$, заключенное в пределах $0 < \arg\frac{a+b}{a-b} < 2\pi$. При указанном выборе m обе функции $\omega(x)$ и $\Omega^{-1}(x)$ суммируемы на L.

Положив теперь $\Phi(z)=\Psi(z)\omega(z)$, найдем, что $\Psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_i(t)-\Psi_e(t)=\frac{f(t)}{a+b}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^m. \tag{I.48}$$

Из формул Сохоцкого-Племели сразу вытекает, что можно положить, например,

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

и, следовательно,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Отсюда Получится одно из решений уравнения (I.46). По формуле $\varphi(t)=\Phi_i(t)-\Phi_e(t)$ находим

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m\cdot \int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t}. \tag{I.49}$$

2°. Чтобы найти все решения уравнения (I.46), достаточно к функции (I.49) добавить общее решение однородного уравнения

$$a\varphi_0(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=0.$$

Применяя тот же прием, что и выше, положим

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta; \tag{I.50}$$

$$\Phi_0(z)=\omega(z)\Psi_0(z).$$

Заметим, что $\Phi_0(\infty)=\Psi_0(\infty)=0$. Вместо (I.48) мы здесь приходим к уравнению

$$\Psi_{0i}(t)-\Psi_{0e}(t)=0. \tag{I.5I}$$

Уравнение (I.5I) означает, что аналитическая функция $\Psi_0(z)$ непрерывна при переходе через линию L. Отсюда следует, что особыми точками этой функции могут быть только точки α и β. Потребуем, чтобы произведение $\varphi_0(t)\ln\frac{t-\alpha}{t-\beta}$ было суммируемо вдоль L.

Тогда из (I.50) получаем, что β - точка регулярности функции $\Psi_0(z)$, а α - либо точка регулярности, либо полюс первого порядка той же функции. Имеем

$$\Psi_0(z)=\frac{c'}{z-\alpha}, \quad c'=const; \quad \Phi_0(z)=\frac{c'}{(z-\alpha)^{1-m}(z-\beta)^m},$$

и решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (I.46), есть

$$\varphi_0(t)=\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}; \quad c=c'(1-e^{2\pi i m}).$$

Общее решение уравнения (I.46) дается формулой

$$\varphi(t)=\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}+\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-$$
$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t}, \tag{I.52}$$

где C - произвольная постоянная. Можно получить формулу для $\varphi(t)$, в которую α и β входят более симметрично:

$$\varphi(t)=\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}+\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-$$
$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\int_L\frac{(\zeta-\alpha)^{1-m}(\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta. \tag{I.53}$$

3°. Рассмотрим, в частности, уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=f(t).$$

Здесь $a=0$, $b=1$, $m=\frac{1}{2\pi i}\ln(-1)=1/2$; в соответствии с формулами (I.52) и (I.53) мы получаем две равносильные формулы для решения:

$$\varphi(t)=\frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}+\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}}\int\limits_L\sqrt{\frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}}\,\frac{f(\xi)}{\xi-t}\,d\xi , \qquad (I.54)$$

$$\varphi(t)=\frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}+\frac{1}{\pi i\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\cdot\int\limits_L\frac{\sqrt{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}{\xi-t}f(\xi)\,d\xi . \qquad (I.55)$$

Отметим, что значения c в (I.54) и (I.55), вообще говоря, разные.

§ 6. ДВОЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1°. Пусть область интегрирования – бесконечная плоскость R^2 . Рассмотрим интеграл

$$V(x)=\int\limits_{R^2}U(y)\,\frac{f(x,\theta)}{r^2}\,dy , \qquad (I.56)$$

$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $r=|x-y|$, θ – угол, образованный радиус-вектором $\vec{r}=(y-x)$ с осью X (рис. 3). Подынтегральная функция имеет две особые точки: $y=\infty$, $y=x$. Первая особая точка малоинтересна. Для простоты будем предполагать, что $u(y)$ достаточно быстро убывает на бесконечности: $u(y)=O(|y|^{-K})$, $K>0$. В таком случае интеграл (I.56) на бесконечности сходится. Будем понимать сингулярный интеграл в таком смысле:

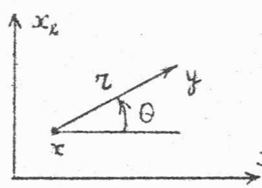

Рис. 3

$$V(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{r>\varepsilon}u(y)\,\frac{f(x,\theta)}{r^2}\,dy .$$

Докажем, что существование сингулярного интеграла (I.56) гарантируется следующим условием: в любой конечной области справедливо неравенство

$$|u(y)-u(x)|\le Ar^{\alpha}, \qquad (I.57)$$

где A и α – постоянные, которые, впрочем, могут зависеть от области. При этом $A>0$, $0<\alpha\le 1$. Заметим, что если в некоторой области неравенство (I.57) выполняется с некоторыми постоянными A и α, то оно выполняется и в любой меньшей области с теми же значениями этих постоянных.

Перепишем (I.56) в виде

$$V(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<r<1}[u(y)-u(x)]\frac{f(x,\theta)}{r^2}dy\ +$$

$$+\int\limits_{r>1}u(y)\frac{f(x,\theta)}{r^2}dy\ +u(x)\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{f(x,\theta)}{r^2}dy\,.$$

Рассмотрим предел каждого слагаемого. Второе слагаемое не зависит от ε. В первом слагаемом, используя (I.57), можно перейти к пределу. В третьем слагаемом введем полярные координаты $dy=r\,dr\,d\theta$, тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{r}\int\limits_{0}^{2\pi}f(x,\theta)d\theta=\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{2\pi}f(x,\theta)\,d\theta.$$

Так как $\ln 1/\varepsilon\to\infty$, то сингулярный интеграл существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{0}^{2\pi}f(x,\theta)\,d\theta=0\,. \qquad (I.58)$$

Формулу (I.58) получил Ф.Трикоми. Дальше мы будем считать, что условие (I.58) всегда выполнено. Функция $f(x,\theta)$ называется характеристической сингулярного интеграла, $u(y)$ – плотностью, x – полюсом сингулярного интеграла.

2°. Введем в рассмотрение класс функций $A_{\alpha,k}$; $\alpha>0$, $k>0$; $u\in A_{\alpha,k}$ – если выполнены условия:

а) при любых x и y

$$|u(y)-u(x)|<\frac{Ar^{\alpha}}{(1+|x|^2)^{k/2}}\ ;$$

б) при $y\to\infty$

$$|u(y)|<\frac{B}{(1+|y|^2)^{k/2}}\,.$$

Рассмотрим еще один класс функций: $A'_{\alpha,k}$; $\alpha>0$, $k>0$; $u\in A'_{\alpha,k}$, если выполнено условие а), а условие б) заменено таким:

$$|u(y)|\le\frac{B\ln(1+|y|^2)}{(1+|y|^2)^{k/2}}\,.$$

Ясно, что $A'_{\alpha,k}\subset A_{\alpha,k'}$, если $k'<k$.

Теорема I.4. Сингулярный оператор, у которого характеристика ограничена и дифференцируема по x и по θ, переводит функцию из класса $A_{\alpha,k}$ в класс $A'_{\alpha,k}$. Утверждение имеет место на плоскости; при интегрировании по замкнутой ограниченной достаточно гладкой поверхности (например, по сфере) справедлива более простая теорема: класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с фиксированным показателем α, $0<\alpha<1$, при тех же ограничениях на характеристику переводится сингулярным интегралом (I.56) в тот же класс гельдеровых функций.

3°. Рассмотрим интеграл со слабой особенностью

$$W(x)=\int_{R_2} u(y)\,\frac{\varphi(x,\theta)}{r}\,dy\,. \tag{I.59}$$

Пусть на бесконечности $u=O(|y|^{-k-1})$, $k>0$. Доказывается, что при определенных простых условиях, наложенных на функции $u(x)$ и $\varphi(x,\theta)$, существуют первые производные от интеграла (I.59); эти производные определяются формулой

$$\frac{\partial W}{\partial x_k}=\int_{R_2} u(y)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r}\right]dy-u(x)\int_0^{2\pi}\varphi(x,\theta)\cos(r,x_k)\,d\theta\,. \tag{I.60}$$

Первый интеграл в (I.60) – сингулярный. Доказывается, что его характеристика удовлетворяет условию (I.58), и этот сингулярный интеграл существует.

4°. Определение. Сингулярным оператором называется выражение

$$Au\equiv a_0(x)u(x)+\int_S u(y)\,\frac{f(x,\theta)}{r^2}\,dy+(Tu)(x), \tag{I.61}$$

где T – вполне непрерывный оператор в том пространстве, в котором мы изучаем сингулярный интеграл.

Определим понятие символа оператора (I.60):

1) символ вполне непрерывного оператора тождественно равен нулю;

2) символ первого слагаемого примем равным $a_0(x)$;

3) разложим характеристику в ряд Фурье

$$f(x,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n(x)\,e^{in\theta},$$

штрих означает, что свободный член отсутствует, так как интеграл от характеристики равен нулю.

Выражение

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{i^{|n|}}{|n|} a_n(x) e^{in\theta}$$

называется символом 2-го слагаемого.

Символом оператора A называется сумма символов трех упомянутых слагаемых. Обозначим символ оператора A через $\Phi_A(x,\theta)$. Тогда

$$\Phi_A(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x) e^{in\theta},$$

где

$$b_0(x) = a_0(x), \quad b_n = \frac{2\pi i^{|n|}}{|n|} a_n(x), \quad n \neq 0.$$

Доказывается, что сумме и произведению сингулярных операторов соответствуют сумма и произведение их символов.

Будем говорить, что символ не вырождается, если ни при каких x и θ не обращается в нуль, т.е.

$$\inf |\Phi_A(x,\theta)| > 0.$$

Символ - функция более гладкая, чем характеристика, а именно, если характеристика из L_2, то символ будет иметь обобщенную производную по θ; если $f \in C$, то $\Phi_A \in C^1$.

5°. Сформулируем две теоремы, касающиеся сингулярного оператора в L_2.

<u>Теорема I.5</u>. Пусть символ сингулярного оператора не зависит от полюса. Сингулярный оператор ограничен в $L_2(R_2)$ тогда и только тогда, когда

$$|\Phi_A(\theta)| \leq M = \text{const}.$$

<u>Теорема I.6</u>. Если символ $\Phi_A(x,\theta)$ удовлетворяет условиям:

1) $|\Phi_A(x,\theta)| \leq M_1$;

2) символ имеет обобщенную производную по θ, причем

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|^2 d\theta \leq M_2,$$

то сингулярный оператор ограничен в $L_2(R_2)$.

§ 7. ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1°. Рассмотрим уравнение $Au = f(x)$, где A — оператор (I.61). Если символ оператора A не вырождается, то этот оператор допускает левую регуляризацию. Докажем это.

Пусть $\inf |\Phi_A(x,\theta)| > 0$ и выполнены условия теоремы I.6. Обозначим

$$\frac{1}{\Phi_A(x,\theta)} = \Phi_B(x,\theta).$$

Сингулярный оператор B с символом $\Phi_B(x,\theta)$ существует и ограничен в $L_2(R_2)$, так как $\Phi_B(x,\theta)$ очевидно удовлетворяет условиям той же теоремы I.6. Перемножим операторы B и A. Для произведения справедливо тождество $\Phi_{BA} = 1$, а в таком случае уравнение $BAu = Bf$ имеет вид $BAu = u(x) + (T'u)(x) = Bf$, но это - фредгольмово уравнение, значит, оператор A допускает левую регуляризацию и для него верны теоремы Нетера. Таким образом, для двумерного сингулярного оператора (или уравнения) с невырождающимися символами справедливы следующие теоремы.

Теорема I.7. а) Однородное уравнение имеет конечное число α решений.

б) Сопряженное однородное уравнение имеет так же конечное число β решений, а индекс $(\alpha - \beta)$ двояко устойчив, т.е. не меняется от добавления к оператору произвольного вполне непрерывного оператора или ограниченного оператора с достаточно малой нормой.

Теорема I.8. Уравнение $Au = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда его свободный член ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения.

Теорема I.9. Индекс одного многомерного сингулярного уравнения с невырождающимся символом равен нулю.

Для системы уравнений картина существенно меняется.

2°. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk} u_k = f_j, \quad j = 1,2,\dots,n;$$

$$A_{jk} u_k = A_{0jk}(x) u_k + \int_S u_k(y) \frac{f_{jk}(x,\theta)}{r^2} dy + (T_{jk} u_k)(x). \tag{I.62}$$

Можно рассматривать эту систему, как матричное уравнение $Au = f$, где $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ и A — матрица операторов A_{jk}, $1 \le j,k \le n$.

Пусть Φ_{jk} – символ оператора A_{jk}. Матрицу

$$\Phi_A(x,\theta) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}, \ldots, \Phi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n1}, \ldots, \Phi_{nn} \end{vmatrix}$$

назовем символической матрицей системы (I.62), а определитель матрицы $\Phi_A(x,\theta)$ – символическим определителем той же системы. Символ системы не вырождается, если модуль символического определителя положительно ограничен снизу. Имеют место следующие утверждения:

I) при перемножении сингулярных операторов их символические матрицы перемножаются;

2) если символическая матрица не вырождается, то матричный оператор A допускает левую регуляризацию – регуляризатором является сингулярный матричный оператор с символической матрицей $\Phi_A^{-1}(x,\theta)$.

Следовательно, и для систем сингулярных уравнений верны теоремы Нетера. Понятие индекса весьма существенно, но вычисления его представляют большие трудности.

3°. М.Атья и И.Зингер рассмотрели класс уравнений, значительно более общий, чем сингулярные, и получили формулу для индекса, но вычисления индекса по их формулам весьма затруднительны. А.Сили и Б.В.Федосов упростили формулу Атьи-Зингера для случая сингулярных уравнений, но вычислять индекс по их формулам также чрезвычайно трудно.

Сформулируем некоторые простые условия, при которых индекс системы равен нулю.

I. Символическая матрица не зависит от полюса, а зависит только от θ.

2. Все главные диагональные миноры символической матрицы не вырождаются.

3. Символическая матрица эрмитова.

4. Собственные числа символической матрицы являются, вообще говоря, комплексными и зависящими от x и θ. Так как матрица не вырождается и ограничена, то нуль и бесконечность не являются ее собственными числами. Индекс системы равен нулю, если нуль и бесконечность на комплексной плоскости можно соединить ломаной, ко-

торая не пересекается с множеством собственных чисел символической матрицы.

§ 8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Тема эта очень велика, охватить ее сколько-нибудь полно в кратком изложении невозможно, и мы ограничимся здесь указанием на важнейшие факты и ссылками на важнейшие, по нашему мнению, монографии, приведенные в следующем ниже списке литературы по интегральным уравнениям. Следует указать, что несмотря на обилие литературы, многие вопросы, такие, как приближенное решение многомерных сингулярных уравнений, в сущности, только начали разрабатываться.

2°. На практике используются две группы приближенных методов: это различные варианты метода последовательных приближений и различные методы приближенного сведения интегрального уравнения к линейной алгебраической системе. Иногда применяются комбинации методов из обеих групп.

Методы последовательных приближений имеют ограниченную область приложений. Так, для уравнений Фредгольма с ядром, удовлетворяющим неравенству (1.12) (такое ядро необязательно в данном случае считать симметричным), обычные последовательные приближения можно применять, если параметр λ достаточно мал, точнее, если

$$|\lambda| \leq \left[\int_G\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dx\,dy\right]^{-1/2}.$$

Л.В.Канторович (см. монографию [3]) несколько расширил возможности применения этого метода. П.Н.Перлин [17] применил метод последовательных приближений к сингулярным уравнениям теории упругости, при этом он опирался на работу Фам Те Лая [11]. Метод последовательных приближений (как, впрочем, и другие методы) требует умения вычислять интегралы от известных функций. Для уравнений Фредгольма приходится вычислять обычные интегралы, и достаточными оказываются обычные квадратурные формулы. Для сингулярных уравнений понадобилось создать специальные квадратурные и кубатурные формулы, позволяющие приближенно вычислять сингулярные интегралы. Такие формулы получены, но, по-видимому, работу в этом направлении целесообразно еще продолжить.

3°. Набор методов, позволяющих свести уравнение Фредгольма к линейной алгебраической системе, довольно многообразен. К ним относятся методы: замены ядра конечномерным, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов, механических квадратур, коллокации. Большая часть этих методов применима и к сингулярным уравнениям. Приближенные методы требуют оценки различного рода погрешностей, возникающих при их реализации. Этим оценкам уделено внимание в монографиях [3, 9, I, 7, 8]. Работу по оценкам погрешностей еще нельзя считать завершенной.

Глава II. ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Имеется много алгоритмов численного решения пространственных и плоских задач теории упругости (см. обзоры [I6, I7, I9, 2I]). Удовлетворительные решения получаются в случае линейной, однородной и изотропной теории для тел, ограниченных гладкими поверхностями. При наличии ребер, трещин или острых вырезов для построения приближенного решения обычно используют кусочно-полиномиальные приближения "сшитые" с известными асимптотическими представлениями в окрестности нерегулярных точек границы. Выбор места склейки требует дополнительных исследований.

Граничные интегральные уравнения понижают "размерность" задачи на единицу и тем самым облегчают организацию вычислительного процесса. Однако вопрос о погрешности приближенных решений г.и.у. изучен недостаточно. Это связано с необходимостью более тщательного исследования взаимного влияния ошибок используемого метода, представления поверхности и вычисления интегралов от известных функций (особенно в прямых схемах).

В настоящей главе рассматриваются общие методы получения г.и.у. для основных задач теории упругости, устанавливается их разрешимость и сходимость метода последовательных приближений.

Используемые тензоры Грина и Неймана имеют ясный механический смысл и являются удобным формализмом общих решений задач теории упругости. Они (или соответствующие тензоры во вспомогательных областях) могут оказаться полезными при решении оптимизационных задач. Однако задача построения тензоров Грина и Неймана значительно сложнее решения конкретной краевой задачи.

§ I. ФОРМУЛЫ БЕТТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

Пусть в области Ω с гладкой границей $S=\partial\Omega$ задана система уравнений Ламе

$$Lu = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u \equiv (\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u = -F$$

и два типа краевых условий

$$u|_S = u_0\,, \quad T^{(n)}_u|_S \equiv \left(2\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n\,\mathrm{div}\,u + \mu n\times\mathrm{rot}\,u\right)\Big|_S = p\,.$$

Здесь $n=(n_1,n_2,n_3)$ – вектор внешней нормали к поверхности S, $u=(u_1,u_2,u_3)$ – вектор смещения, λ и μ – константы Ламе, p – вектор поверхностной нагрузки.

Для вектор-функций u и v положим

$$\mathcal{E}(u,v) = \mu u_{i,j}v_{i,j} + \alpha u_{i,j}v_{j,i} + \beta u_{i,i}v_{j,j}\,.$$

Используя формулу интегрирования по частям

$$(\alpha+\beta)\int_\Omega v_l u_{k,pq}\,dx = \alpha\int_S v_l u_{k,p}n_q\,ds + \beta\int_S v_l u_{k,q}n_p\,ds -$$

$$-\alpha\int_\Omega v_{l,q}u_{k,p}\,dx - \beta\int_\Omega v_{l,p}u_{k,q}\,dx\,,$$

получаем обобщенные формулы Бетти

$$\int_\Omega uLv\,dx + \int_\Omega \mathcal{E}(u,v)\,dx = \int_S u\cdot P^{(n)}v\,ds, \tag{2.I}$$

$$\int_\Omega (uLv - vLu)\,dx = \int_S (u\cdot P^{(n)}v - vP^{(n)}u)\,ds. \tag{2.2}$$

Вектор обобщенных напряжений

$$P^{(n)}u \equiv (\alpha+\mu)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta n\,\mathrm{div}\,u + \alpha n\times\mathrm{rot}\,u\,, \quad \alpha+\beta = \lambda+\mu$$

совпадает с вектором напряжений $T^{(n)}u$ при $\alpha=\mu$, $\beta=\lambda$. Заметим, что из соотношения (2.I) при $\lambda+\mu=0$, $\mu=1$ следует тождество

$$\int_\Omega u\Delta v\,dx + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,u\cdot\mathrm{rot}\,v + \mathrm{div}\,u\cdot\mathrm{div}\,v)\,dx =$$

$$= \int_S (u\cdot n)\,\mathrm{div}\,v\,dS - \int_S u\cdot(n\times\mathrm{rot}\,v)\,dS\,, \tag{2.3}$$

которое можно использовать для вариационной постановки краевой задачи типа задачи Н.М.Гюнтера [20]

$$\begin{cases} \Delta u = -F \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} u|_S = 0, \quad (n \times \operatorname{rot} u)|_S = p. \end{cases} \tag{2.4}$$

Из формулы (2.2) получим интегральное представление функции $u(x)$. Для этого предположим, что набор $V^k(x,y)$, $k=1,2,3$; $x,y\in\Omega$ удовлетворяет системе уравнений $L_x V^k(x,y) = -\delta(x-y)e^k$, e^k – орт k-й координатной оси. Тогда при $y\in\Omega$

$$-u_k(y) = \int_\Omega V^k(x,y) L u\, dx + \int_S (u\cdot P^{(n)} V^k - V^k P^{(n)} u)\, dS. \tag{2.5}$$

Если вспомогательные функции V^k не подчинять дополнительным условиям на границе S , то в качестве V^k можно выбрать столбцы тензора Кельвина–Сомильяни Γ^k, $k=1,2,3$:

$$\Gamma_j^k(x,y) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\Big[(\lambda+3\mu)\delta_{kj} + (\lambda+\mu)\frac{(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\Big]\frac{1}{|x-y|}.$$

Другой случай соответствует выбору в качестве V^k столбцов тензора Грина, определяемого соотношениями

$$\begin{cases} L_x G^k(x,y) = -\delta(x-y)e^k, \quad x,y\in\Omega, \\ G^k(z,y) = 0, \quad z\in S, \quad y\in\Omega. \end{cases}$$

В этом случае из (2.5) получим

$$-u_k(y) = \int_\Omega G^k(x,y) L u\, dx + \int_S u P^{(n)} G^k\, dS, \quad y\in\Omega.$$

Тензоры Кельвина–Сомильяни $\Gamma = (\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3)$ и Грина $G = (G^1, G^2, G^3)$ являются симметричными тензорами $\Gamma_j^k(x,y) = \Gamma_k^j(y,x)$, $G_j^k(x,y) = G_k^j(y,x)$. Механический смысл Γ^k – смещение упругого пространства под действием сосредоточенной силы e^k, приложенной в точке y. Механический смысл G^k – смещение упругой области Ω, жестко закрепленной по границе $S=\partial\Omega$, под действием сосредоточенной силы e^k, приложенной в точке $y\in\Omega$. Соответствующие обобщенные напряжения, действующие на площадку с нормалью n_y , равны $P^{(n_x)}\Gamma^k(x,y)$ и $P^{(n_y)}G^k(x,y)$.

При $\alpha=\mu$; $P^{(n)} = T^{(n)}$, $\Gamma_1(x,y) = T^{(n_x)}\Gamma(y,x)$ – тензор истинных напряжений; при $\alpha=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$, $P^{(n)}\cdot N^{(n)}$, $N^{(n_x)}\Gamma(y,x)$ – тензор псевдонапряжений.

Обозначим Γ_P сопряженный к $P^{(n_x)}\Gamma(y,x)$ тензор, тогда для $u(x)$, удовлетворяющего уравнению Ламе, соотношение (2.5) перепишется

$$u(x)=\int_S [\Gamma(x,y)P^{(n_y)}u(y)-\Gamma_P(x,y)u(y)]\,d_yS\,,\quad x\in\Omega\,.$$

На полученном интегральном представлении основаны классические прямые схемы метода г.и.у.

Выбрав в качестве вектор-функции $u(x)$ градиент гармонической функции $\nabla\sigma$ и $V=Fe_i^*$, F – фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Delta F=-\delta(x-y)$, из тождества (2.3) найдем

$$\nabla\sigma=\int_S \left[\frac{\partial\sigma}{\partial n}\nabla F-(\nabla\sigma\times n)\times\nabla F\right]d_yS\,,\quad x\in\Omega\,. \tag{2.7}$$

Это представление будет использовано в § 5.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ ГРИНА И НЕЙМАНА

Функции

$$V(x)=\int_S 2\Gamma_N(x,y)\psi(y)\,d_yS\,,\quad W(x)=\int_S 2\Gamma(x,y)\psi(y)\,d_yS$$

называются потенциалом двойного слоя и простого слоя соответственно. Здесь $P=N$ при $\alpha=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$, $\beta=(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)\times(\lambda+3\mu)^{-1}$. В ядро Γ_N входит лишь производная F по нормали:

$$2\Gamma^*_{k_j}(x,y)=\frac{1}{(\lambda+3\mu)\cdot 2\pi}\cdot\left[2\mu\delta_{kj}+3(\lambda+\mu)\frac{(y_k-x_k)(y_j-x_j)}{|x-y|^2}\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,.$$

<u>Лемма 2.1.</u> Потенциал простого слоя – непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$, ее производные порядка n стремятся к нулю на бесконечности как $|x|^{-n-1}$

$$N^{(n_x)}W(x)=\int_S 2\Gamma_N(y,x)\psi(y)\,d_yS\,,\quad x\notin S\,.$$

Лемма 2.2. Потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Ламе $LV(x)=0$ при $x\in\Omega$ или $x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega$, кроме того,

$$\begin{aligned} V^+(z) &= \lim_{\substack{x\to z\in S\\ x\in\Omega}} V(x) = -\psi(z)+\int_S 2\Gamma_N(z,y)\psi(y)\,dS_y,\\ V^-(z) &= \lim_{\substack{x\to z\in S\\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega}} V(x) = \psi(z)+\int_S 2\Gamma_N(z,y)\psi(y)\,dS_y. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство леммы 2.I и соотношения $LV(x)=0$ получаются непосредственной проверкой. Тождества (2.8) основаны на специальном выборе $\alpha=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$, при котором оба потенциала V и W являются интегралами со слабой особенностью.

Теорема 2.I. Тензор Грина задается формулой

$$G(x,y)=\Gamma(x,y)+2\int\Gamma_N(x,z)f(z)\,dS_z\,,\quad x,y\in\Omega, \tag{2.9}$$

где матрица-функция $f(z^S)=\{f_j^i(z)\}_{i,j=1}^3$ с непрерывными на S компонентами удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма:

$$f(z)-\int_S 2\Gamma_N(z,y)f(y)\,dS_y=\Gamma(z,y),\quad z\in S,\ y\in\Omega. \tag{2.10}$$

Доказательство. Разность $G(x,y)-\Gamma(x,y)=g(x,y)$ удовлетворяет уравнению Ламе $Lg=0$, поэтому ищем $g(x,y)$ в виде

$$g(x,y)=\int_S 2\Gamma_N(x,\xi)f(\xi)\,dS_\xi\,.$$

В результате предельного перехода на границу получаем уравнение (2.I0). Обратно, если $f(\xi)$ - удовлетворяет уравнению (2.I0), то функция $G(x,y)$, определенная соотношением (2.9), удовлетворяет уравнению Ламе (лемма 2.2) и краевому условию $G(z,y)=0,\ z\in S, y\in\Omega$.

Результат теоремы 2.I носит пока условный характер, так как еще не установлена разрешимость уравнения Фредгольма (2.I0).

Определим тензор Неймана уравнениями

$$L_x N^k(x,y)=-\delta(x-y)e^k\,,\quad x,y\in\Omega,$$
$$T^{(n_z)}N^k(z,y)=p^k(y)+q^k(y)\times z\,,\quad z\in S,\ y\in\Omega,$$

где n_z обозначает внешнюю нормаль к Ω в точке $z\in S$, $q^k\times z$ - векторное произведение, а вектор-функции p^k и q^k определяются из условия механического равновесия

$$\int_S [p^k(y) + q^k(y) \times z]\, dS_z + e^k = 0 .$$

$$\int_S [p^k(y) + q^k(y) \times z]\, dS_z + e^k \times y = 0 .$$

Пусть функция $u\,(x)$ является решением второй основной задачи теории упругости. Подставим в (2.2) вместо V функцию $N^k\,(x,y)$, тогда

$$u_k(y) = \int_S [N^k(x,y)\, T^{(n_x)} u(x) - u(x)\, T^{(n_x)} N^k(x,y)\, dS_x = \int_S N^k T^{(n_x)} u\, dS_x ,$$

т.е. вектор перемещения определяется по вектору напряжения, заданному на поверхности S. Определим матрицу-функцию $R\,(x,y)$ со столбцами $\Gamma^k(z,y) = p^k(y) + q^k(y) \times z$, каждый из которых есть вектор жесткого смещения.

Лемма 2.3. Для области Ω с границей, удовлетворяющей условию Ляпунова, и Y из пространства $H_h(S)$ вектор-функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателями $h > 0$, справедливы соотношения

$$\lim_{\substack{x \to z \in S \\ x \in \Omega}} T^{(n_x)} W(x) = Y(z) + 2 \int_S \Gamma_I(z,y)\, Y(y)\, dS_y ,$$

$$\lim_{x \to z \in S} T^{(n_x)} W(x) = -Y(z) + 2 \int_S [T^{(n_z)} \Gamma(z,y)]\, dS_y .$$

Доказательство можно найти в [16]. Отметим, что лемма (2.3) является аналогом леммы (2.2), однако ядро $\Gamma_I(x,y)$ является сингулярным:

$$4\pi e^i \Gamma_I^k(z,y) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left(n_z \cdot e^k \frac{\partial}{\partial z_j} - n_z e^i \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \frac{1}{|z-y|} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\mu \delta_{kj} + 3(\lambda + \mu) \frac{(z_k - y_k)(z_j - y_j)}{|z-y|^2} \right] \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{1}{|z-y|} .$$

Имеет место аналог теоремы (2.1).

Теорема 2.2. С точностью до векторов жесткого смещения тензор Неймана определяется формулой

$$N(x,y) = \Gamma(x,y) + 2 \int_S \Gamma(x,z)\, f(z)\, dS_z , \qquad (2.11)$$

где матрица-функция $f(z)=\{f_j^i(z)\}_{i,j=1}^3$ из $H_h(S)$ определяется из решения сингулярного интегрального уравнения

$$f(z)+2\int_S (T^{(n_z)}\Gamma(z,\xi))f(\xi)dS_\xi = R(z,y)-T^{(n_z)}\Gamma(z,y),\quad z\in S. \quad (2.12)$$

Доказательство. Тензор $N(x,y)-\Gamma(x,y)=g$ удовлетворяет уравнению Ламе $Lg=0$, поэтому ищем $g(x,y)$ в виде

$$g(x,y)=2\int_S \Gamma(x,z)f(z)dS_z.$$

В результате предельного перехода на границу получаем с учетом леммы (2.3)

$$T^{(n_z)}g(z,y)=f(z)+2\int_S \Gamma_I(z,y)f(y)dS_y.$$

Но левая часть этого соотношения равна (в силу определения тензора Неймана)

$$T^{(n_z)}g(z,y)=R(z,y)-\Gamma_I(z,y).$$

Обратно, пусть матрица-функция $f(z)$ определяется из уравнения (2.12), тогда тензор, определенный по формуле (2.11), удовлетворяет уравнению Ламе $L_x N(x,y)=-\delta(x-y)$ и граничным условиям $T^{(n_z)}N^k(z,y)=\Gamma^k$, $z\in S$, $y\in\Omega$. Значит, в силу единственности решения второй основной задачи, с точностью до векторов жесткого смещения, $N(z,y)$ – тензор Неймана.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ТЕНЗОР ГРИНА

В соответствии с физическим смыслом правые части и ядра уравнений (2.10) и (2.12) вещественны, поэтому их решения можно искать в пространствах вещественных функций. Однако удобно рассматривать интегральные уравнения в более широких классах комплекснозначных функций – это связано с возможностью применения хорошо разработанной теории функций комплексной переменной. Поясним сказанное примером.

Пусть для $x\in S=\partial\Omega$ вектор $p(x)$ лежит в касательной плоскости к S, проходящей через точку x, т.е. $p(x)\cdot n_x=0$, $x\in S$. Обозначим $L_2(TS)$ совокупность таких касательных векторных полей

$p(x)$ на S, для которых конечна величина (p, p), где

$$(p,q)=\int_S p\cdot q\, d_x S\,,\quad p\cdot n=0,\quad q\cdot n=0.$$

Если V – оператор векторного умножения на нормаль к поверхности S, т.е. $Vp=p\times n$, то сопряженный оператор относительно вещественного скалярного произведения в пространстве (TS) есть $V^*p = n\times p=-Vp$. Очевидно, что V – унитарный оператор $VV^*=V^*V=I$. Ясно также, что в пространстве вещественных функций V не имеет собственных векторов. Распространим оператор V на комплекснозначные функции по линейности $V(f+ig)=Vf+iVg$ и определим скалярное произведение формулой

$$(f_1+ig_1, f_2+ig_2)=(f_1,f_2)+i(g_1,f_2)-i(f_1,g_2)+(g_1,g_2),$$

где $f_i\cdot n=0$, $g_i\cdot n=0$, $i=1,2$. Тогда $\lambda=\pm i$ являются собственными числами V, т.е. $Vf=\lambda f$, и соответствующие собственные векторы образуют в комплексном пространстве $L_2(TS)$ подпространства X_+ и X_-. Действительно, $(f+ig)\times n=\lambda(f+ig)$ эквивалентно двум равенствам $f\times n=Re\lambda f-Im\lambda\, g$; $g\times n=Im\lambda f+Re\lambda g$. Отсюда либо $Im\lambda=0$ и $Re\lambda=0$, либо $(Re\lambda f-f\times n)\times n=(Im\lambda)^2 f+Re\lambda(Re\lambda f-f\times n)$. При $\lambda=0$ находим $f=g=0$, в противном случае $2Re\lambda(f\times n)=(|\lambda|^2-1)f$. Следовательно, $\lambda=\pm i$ – собственные числа, а

$$X_\pm=\{f+ig\in L_2(TS): f\times n=\mp g,\ g\times n=\pm f\}.$$

Легко проверить, что $X_+\perp X_-$ относительно введенного скалярного произведения. Элементы $f+ig$ из $X_+(X_-)$ можно интерпретировать как поля касательных реперов, образующих с внешней нормалью n правые (левые) тройки ортогональных векторов. Полученная таким образом информация полностью характеризует оператор V. Заметим еще, что для операторов с вещественным ядром сопряженные операторы относительно вещественного и соответствующего ему комплекснозначного скалярных произведений совпадают.

Приступим к исследованию, в пространстве $\mathbb{C}(S)\subset L_2(S)$ комплекснозначных матриц-функций, интегрального уравнения Фредгольма

$$f(z)-\gamma\int_S 2\Gamma_N(z,x)f(x)\,d_x S=g(z),\ z\in S,\ \gamma\in\mathbb{C}. \qquad (2.13)$$

Поскольку S – поверхность Ляпунова, то ядро $\Gamma_N(z,x)$ имеет слабую особенность. Уравнение с сопряженным интегральным оператором запишется в виде

$$f(z) - \gamma \int\limits_{S} 2\Gamma_N(y,z) f(y)\, dS_y = g(z)\,,\quad z \in S. \tag{2.14}$$

Напомним, что резольвентным множеством называется совокупность $\gamma \in \mathbb{C}$, для которых уравнение (2.13) однозначно разрешимо для любой функции $g \in C(S)$. Дополнение к этому множеству состоит из точек спектра соответствующего оператора.

Лемма 2.4. Спектр оператора $I - \gamma T$ соответствующего уравнению (2.13) содержится на вещественной прямой.

Доказательство. Пусть напротив $\gamma_0 = a + ib$, $b \neq 0$, точка спектра, тогда по теореме Фредгольма однородное уравнение

$$f(z) - \gamma \int\limits_{S} 2\Gamma_N(y,z) f(y)\, dS_y = 0$$

допускает решение вида $f_a(z) + i f_b(z) \neq 0$. По функциям f_a и f_b построим потенциалы простого слоя W_a и W_b. Имеем из лемм (2.1) и (2.2)

$$[N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^+ - [N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^- = f_a(z) + f_b(z),$$

$$[N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^+ + [N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^- = 2\int_S \Gamma_{II}(y,z)(f_a + i f_b)\, dS_y.$$

Следовательно,

$$[N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^- = (1-\gamma_0)(1+\gamma_0)^{-1} [N^{(n_z)} W_a(z) + i N^{(n_z)} W_b(z)]^+. \tag{2.15}$$

Подстановка потенциалов W_a и W_b в формулы Бэтти для Ω и $R^3 \setminus \overline{\Omega}$ дает

$$\int\limits_{S} \{W_a(z)[N^{(n_z)} W_b(z)]^+ - W_b(z)[N^{(n_z)} W_a(z)]^+\}\, dS_z = 0, \tag{2.16}$$

$$\int\limits_{S} \{W_a(z)[N^{(n_z)} W_b(z)]^- - W_b(z)[N^{(n_z)} W_a(z)]^-\}\, dS_z = 0.$$

Умножим обе части тождества (2.15) на $W_a(z) - iW_b(z)$ и проинтегрируем по поверхности S с учетом соотношений (2.16)

$$\begin{aligned}&\int\limits_{S} \{W_a [N^{(n_z)} W_a]^- + W_b(z)[N^{(n_z)} W_b]^-\}\, dS_z = \\ &= (1-\gamma_0)(1+\gamma_0)^{-1} \int\limits_{S} \{W_a [N^{(n_z)} W_a]^+ + W_b [N^{(n_z)} W_b]^+\}\, dS_z.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Используя первую обобщенную формулу Бэтти (2.1), получим

$$\int\limits_S W_a[N^{(n_z)}W_a]^+dS_z = \int\limits_\Omega \mathcal{E}(W_a,W_a)dx \geq 0,$$

$$\int\limits_S W_a[N^{(n_z)}W_a]^-dS_z = -\int\limits_\Omega \mathcal{E}(W_a,W_a)dx \leq 0. \tag{2.18}$$

Применимость формулы (2.I) для внешней области $R^3\setminus\bar\Omega$ следует из леммы (2.I). Соотношения, аналогичные (2.18) справедливы и для потенциала W_b. Таким образом, равенство (2.17) влечет вещественность $(1-\gamma_0)(1+\gamma_0)^{-1}$ и, значит, $b=0$. Полученное противоречие доказывает лемму (2.4).

Замечание 2.I. При доказательстве леммы (2.4) получим неравенство $(1-\gamma_0)(1+\gamma_0)^{-1} \leq 0$, где γ_0 – точка спектра. Значит, $|\gamma_0| \geq 1$ и все точки спектра оператора $\mathbb{T}^*$ по модулю не меньше единицы.

Лемма 2.5. Число $\gamma=1$ не есть точка спектра $\gamma=-1$ – точка спектра оператора $\mathbb{T}$.

Доказательство. Пусть f – собственная функция, отвечающая характеристическому числу γ, тогда так же, как и при доказательстве леммы (2.4), имеем

$$[N^{(n_z)}W(z)]^- = (1-\gamma)(1+\gamma)^{-1}[N^{(n_z)}W(z)]^+,$$

где W – потенциал простого слоя, построенный по f. При $\gamma=1$ $[N^{(n_z)}W(z)]^-=0$, но

$$\int\limits_S W(z)[N^{(n_z)}W(z)]^-dS_z = -\int\limits_{R^3\setminus\Omega}\mathcal{E}(W,W)dz,$$

значит, $W(z)$ – константа в $R^3\setminus\Omega$. Из леммы (2.I) следует, что $W(x)=0$ при всех $x\in R^3\setminus\Omega$. В частности, $W(z)=0$ для $z\in S$. Из теоремы единственности первой основной задачи теории упругости вытекает, что $W(x)=0$ при $x\in R^3$. Следовательно,

$$[N^{(n_z)}W(z)]^+ - [N^{(n_z)}W(z)]^- = 2f(z)=0.$$

Доказано, что $\gamma=1$ – не характеристическое число. Рассмотрим случай $\gamma=-1$. На основании леммы (2.2) перейдем к пределу $x\in\Omega$, $x\to z\in S$, в соотношении (2.6) с $\alpha=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$

$$u(z) = 2\int\limits_S \Gamma(z,y)N^{(n_y)}u(y)dS_y - 2\int\limits_S \Gamma_N(z,y)u(y)dS_y\ .\ z\in S.$$

Отсюда видно, что векторы $u(z)=e^k$ $(k=1,2,3)$ очевидно удовлетворяющие системе Ламе $Lu=0$, являются решением уравнения

$$f(z)+\int_S 2\Gamma_N(z,y)f(y)dS_y=0,$$

т.е. $\gamma=-1$ – характеристическое число.

Итак, уравнение (2.13) однозначно разрешимо при $\gamma=1$ в пространстве $C(S)$. Однако формальное решение в виде классического ряда Неймана расходится, так как $\gamma=-1$ – характеристическое число (радиус сходимости ряда меньше единицы). Воспользуемся тем, что характеристические числа – изолированные точки вещественной оси, значит, в малой окрестности точки $\gamma=1$ нет характеристических точек. Опишем процедуру аналитического продолжения функции, определяемой рядом Неймана в окрестности точки $\gamma=1$. Рассмотрим уравнение

$$f(z)-\frac{\gamma'}{2-\gamma'}\int_S \Gamma_N(z,y)f(y)dS_y=\frac{g(z)}{2-\gamma'}=g_1(z). \tag{2.19}$$

Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы отрезок $I_\varepsilon=[-(1+\varepsilon)/(3+\varepsilon),(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)]$ не содержал характеристических чисел оператора $\mathbb{T}$. В малой окрестности точки $\gamma=0$ решение уравнения (2.19) представимо рядом Неймана

$$\begin{aligned} f(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma'}{2-\gamma'}\right)^k(\mathbb{T}^k g_1)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma'^k}{(2-\gamma')^{k+1}}(\mathbb{T}^k g)(z)=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma'^k f_k(z), \end{aligned} \tag{2.20}$$

где
$$f_0(z)=\frac{1}{2}g(z),$$
$$f_1(z)=\frac{1}{2}[f_0(z)+(\mathbb{T}f_0)(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(z)=\frac{1}{2}[f_{n-1}(z)+(\mathbb{T}f_{n-1})(z)].$$

Известно, что решение уравнения (2.13) есть функция аналитическая по γ из круга с диаметром I_ε. Следовательно, это решение $f(z)$ – аналитическая функция по γ': $|\gamma'|<1+\varepsilon$. Поэтому радиус сходимости ряда (2.20) больше единицы и, в частности, этот ряд сходится при $\gamma'=1$. Но при $\gamma'=1$ уравнение (2.19) совпадает с уравнением (2.18) для $\gamma=1$. Тем самым доказано утверждение.

Теорема 2.3. Решение уравнения

$$f(z)-\int_S 2\Gamma_N(z,y)f(y)dS_y=g(z)\in C(S)$$

существует и единственно. Оно представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(I+\mathbb{T})^k g(z),\ z\in S.$$

В частности, получена явная формула для тензора Грина.

Теорема 2.4. Если $\mu\neq 0$, $-\infty<\nu<\frac{1}{2}$, то тензор Грина $G(x,y)$ существует, единствен и представим в виде равномерно сходящегося ряда

$$G(x,y)=\Gamma(x,y)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\int_S\Gamma_{II}(x,\xi)(I+\mathbb{T})^k\Gamma(\xi,y)dS_\xi.$$

Замечание 2.2. Если известны тензоры Грина и Неймана, то по формулам типа (2.6) определяются решения основных задач линейной теории упругости для произвольных массовых сил и граничных условий.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Вывод интегральных уравнений в § 2 основывался на теории потенциала, поэтому неизвестные функции в уравнениях (2.10) и (2.12) суть плотности потенциалов двойного и простого слоя соответственно. Другой способ получения интегральных уравнений относительно вектора смещений $u(\cdot)$ (вторая основная задача) или вектора нормальных напряжений (первая основная задача) основан на предельном переходе в интегральном представлении (2.6). Особенно прост вывод для второй основной задачи. Выберем α и β так, что $P^{(n)}=T^{(n)}$ и перейдем к пределу в (2.6) при $x\to z\in S$, $x\in\Omega$, тогда $\Gamma_I(x,y)=\Gamma_{II}(y,x)$,

$$u(z)+\int_S 2\Gamma_{II}(z,y)u(y)dS_y=\int_S\Gamma(z,y)T^{(n)}u(y)dS_y. \tag{2.21}$$

Получили граничное интегральное уравнение вида (2.12), но с другой правой частью, гладкость которой уже зависит от гладкости S

и заданных граничных условий $T^{(n_y)}u(y),\ y\in S$.

Преобразуем выражение для компонент тензора Γ_{II}

$$4\pi\Gamma^{i}_{\text{II}j}(x,y)=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\left(n_y\cdot e^{i}\frac{\partial}{\partial y_j}-n_y e^{j}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\frac{1}{|x-y|}+$$

$$+\frac{1}{\lambda+2\mu}\left[\mu\delta_{ij}+3(\lambda+\mu)\frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{|y-x|^2}\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}=$$

$$=\frac{1}{(1-\nu)}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1-2\nu}{|x-y|^3}\left\{(y_i-x_i)\delta_{jk}-(y_j-x_j)\delta_{ik}-(y_k-x_k)\delta_{ij}\right\}-\right. \tag{2.22}$$

$$\left.-3|y-x|^{-5}(y_i-x_i)(y_j-x_j)(y_k-x_k)\right]\cos(n_y,y_k)$$

(мы сделали замену $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$).

Так как

$$\sum_{k=1}^{3}(y_k-x_k)\cos(n_y,y_k)=|x-y|\cos(n_y,y-x)$$

и поверхность S удовлетворяет условию Ляпунова :

$$\cos(y-x,n_y)=O(|y-x|^{\gamma}),\quad \gamma>0,$$

то выражение

$$3\sum_{k=1}^{3}|x-y|^{-5}(y_i-x_i)(y_j-x_j)(y_k-x_k)\cos(n_y,y_k)$$

имеет порядок $|x-y|^{-2+\gamma}$ при $|x-y|\to 0$. Соответствующее слагаемое в (2.22) определяет вполне непрерывный в $L_2(S)$ оператор. Аналогично слагаемое в (2.22)

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{(y_k-x_k)}{|y-x|^3}\delta_{ij}\cdot\cos(n_y,y_k)=O(|y-x|^{-2+\gamma})$$

соответствует ядру интегрального оператора со слабой особенностью. Таким образом, сингулярная часть тензора Γ_{II} имеет вид

$$\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)|y-x|^3}\sum_{k=1}^{3}\left[(y_i-x_i)\delta_{jk}-(y_j-x_j)\delta_{ik}\right]\cos(n,y_k)\,.$$

Выберем местную декартову систему координат в некоторой фиксированной точке $x\in S$, причем одну из координатных осей направим вдоль нормали n_x к поверхности S в точке x . Если $y\in S$ лежит в малой окрестности точки x , то сингулярная часть тензора $\Gamma_{\mathrm{I}}(x,y)$ в выбранной системе координат запишется

$$\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}\,\frac{1}{|x-y|^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{y_1-x_1}{|x-y|} \\ 0 & 0 & \frac{y_2-x_2}{|y-x|} \\ -\frac{y_1-x_1}{|x-y|} & -\frac{y_2-x_2}{|x-y|} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $(\cos\theta,\sin\theta)$ – координаты единичного вектора, направленного вдоль проекции вектора $y-x$ на касательную плоскость в точке $x\in S$. Тем самым определен угол $\theta(x,y)$; $x,y\in S$ и $\frac{(y_1-x_1)}{|x-y|}=$ $=\cos\theta$, $\frac{(y_2-x_2)}{|x-y|}=\sin\theta$.

Построим символическую матрицу системы уравнений (2.2I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varkappa i\cos\theta \\ 0 & 1 & \varkappa i\sin\theta \\ -\varkappa i\cos\theta & -\varkappa i\sin\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad \varkappa=\frac{1-2\nu}{2(1-2\nu)} .$$

Ее определитель равен $1-\varkappa^2\neq 0, -1<\nu<1/2$. Итак, символическая матрица не вырождается и, значит, для системы интегральных уравнений верны теоремы Нетера. Более того, так как главные миноры этой матрицы отличны от нуля, то индекс системы (2.2I) равен нулю и, значит, справедливы теоремы Фредгольма.

Вернемся к системе дифференциальных уравнений теории упругости в смещениях

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=F,\ x\in\Omega,$$

или

$$\Delta u+\omega\operatorname{grad}\operatorname{div}u=\frac{1}{\mu}F,\quad \omega=\frac{1}{1-2\nu}. \tag{2.23}$$

Систему уравнений (2.23) с произвольным комплексным ω рассматривали братья Коссера. Оказывается, что значения параметра $\nu=1$, $3/4$, ∞, при которых вырождается определитель символической матрицы системы (2.2I) соответствуют существенно особым точкам спектра системы (2.23). Работы Коссера продолжались автором [41]. Была, в частности, доказана ортогональность в соответствующей метрике системы собственных векторов первой и второй краевых задач для пучка операторов теории упругости (2.23). Полученные в [41] результаты дают возможность строить приближенные решения задач теории упругости с помощью разложения по собственным функциям системы (2.23).

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРЯМЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛА

При нахождении тензора напряжений по известному вектору перемещений, определяемому из уравнения (2.21), используются различные приемы интерполяции или численного дифференцирования [19, 22], снижающие точность вычислений. Рассматриваемые ниже граничные интегральные уравнения второй основной задачи теории упругости, выведенные на основе новой постановки краевой задачи в напряжениях [27], позволяют определить напряжения на границе в результате решения граничных интегральных уравнений.

Для иллюстрации особенностей метода сначала обратимся к уравнению Лапласа. Умножим интегральное представление (2.7) скалярно на n_x, получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} = \int_S [(\nabla F \cdot n_x)\frac{\partial \sigma}{\partial n} - (\nabla \sigma \times n)\cdot(\nabla F \times n_x)]\, d_y S, \quad x \in \Omega,$$

переходя к пределу при $x \to z \in S$, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial n} + \int_S \frac{\partial F}{\partial n_y}\frac{\partial \sigma}{\partial n}\, d_x S = \int_S (\nabla \sigma \times n)\cdot(\nabla_y F \times n_y)\, d_x S. \qquad (2.24)$$

Из классической теории потенциала [15] следует, что уравнение (2.24) (относительно $\nabla \sigma \cdot n$) имеет единственное решение. При этом правая часть (2.24) считается заданной, если известно σ на границе (так как выражение $\nabla \sigma \times n$ содержит лишь производные по касательным к S направлениям).

Для задачи Неймана г.и.у. относительно вектора $\nabla \sigma \times n = y$ можно получить, умножив (2.7) векторно на n_x и перейдя к пределу на границу

$$y + 2\int_S (y \times \nabla F) \times n_y\, d_x S = -2\int_S \frac{\partial \sigma}{\partial n}(\nabla F \times n_y)\, d_x S. \qquad (2.25)$$

Можно показать, что (2.25) имеет единственное решение в классе $W_+ = \{y : y = (\nabla q \times n)|_S,\ q \in W_2^2(\Omega)\} \subset L_2(TS)$.

В операторной форме систему (2.25) запишем в виде $(I + \gamma T)y = f,\ \gamma \in C$.

Вычислим оператор T^* относительно скалярного произведения в $L_2(TS)$. Для этого введем в рассмотрение две локальные системы координат, связанные с точкой $x \in S:(t^1_x, t^2_x, n_x)$ и с точкой $y \in S:(t^1_y, t^2_y, n_y)$ так, что

$$(t^1_x, n_x) = (t^2_x, n_x) = 0,\ t^1_x + t^2_x,\ (t^1_y, n_y) = (t^2_y, n_y) = (t^1_y, t^2_y) = 0,$$

$$|t^1_x| = |t^2_x| = |t^1_y| = |t^2_y| = 1.$$

В этих координатах ядро оператора $\mathbb{T}$ запишется

$$(y \times \nabla F) \times n_y = \nabla F (y \cdot n_y) - y(\nabla F \cdot n_y) = [(\nabla F \cdot t^1_y) t^1_y +$$
$$+ (\nabla F \cdot t^2_y) t^2_y](y \cdot n_y) - [(y \cdot t^1_y) t^1_y + (y \cdot t^2_y) t^2_y](\nabla F \cdot n_y).$$

Умножим его скалярно на $\Psi(y) = (\Psi \cdot t^1_y) t^1_y + (\Psi, t^2_y) t^2_y$, тогда

$$((y \times \nabla F) \times n_y, \Psi) = [(\nabla F \cdot t^1_y)(t^1_y \Psi) + (\nabla F \cdot t^2_y)(t^2_y \Psi)](y \cdot n_y) -$$
$$- [(y \cdot t^1_y)(t^1_y \cdot \Psi) + (y t^2_y)(t^2_y \Psi)](\nabla F \cdot n_y) = ([(\nabla F, \Psi)(n_y -$$
$$- n_x (n_x \cdot n_y)] - (t^1_y \Psi)(\nabla F \cdot n_y)[t^1_y - n_x (t^1_y \cdot n_x)] - (t^2_y, \Psi) \times$$
$$\times (\nabla F \cdot n_y)[t^2_y - n_x (t^2_x, n_x)], y).$$

Таким образом, ядро сопряженного оператора $\mathbb{T}^*$ равно

$$\nabla_x F \times (n_y \times \Psi) - (\nabla_x F \times (n_y \times \Psi), n_x) n_x$$

и, значит, для $\Psi \in L_2(TS)$ имеем

$$\mathbb{T}^*_\Psi = \int_S \nabla_x F \times (n_y \times \Psi) d_y S - n_x \int_S (\nabla_x F, (n_y \times \Psi), n_x) d_y S.$$

Следовательно, $\mathbb{V} \mathbb{T}^*_\Psi = (\mathbb{T}^*_\Psi) \times n_x = \mathbb{T} \mathbb{V}^* \Psi = -\mathbb{T} \mathbb{V} \Psi$.

При решении уравнения (2.25) методом последовательных приближений в классе W_+ приближенное значение $\mathbb{T}^k f$ может не принадлежать этому классу, поэтому важно исследовать спектр оператора $\mathbb{T}$ в более широком пространстве $L_2(TS)$.

Теорема 2.5. Пусть $A_\gamma = I - i\gamma\sqrt{\mathbb{T}^*\mathbb{T}}$, тогда спектр $\mathbb{T}$ состоит из всех $\gamma \in \mathbb{C}$, для которых $A_\gamma u = (I - i\mathbb{V})u$, $u \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\mathbb{T}^*\mathbb{T} = \mathbb{V}^*\mathbb{T}\mathbb{V}^*\mathbb{T}$ и $\mathbb{T} = \mathbb{V}\sqrt{\mathbb{T}^*\mathbb{T}}$. Определим ортогональные проекторы $P = 1/2\,(I - i\mathbb{V})$, $Q = 1/2\,(I + i\mathbb{V})$, тогда $(I + \gamma\mathbb{T})u = (I - i\gamma(Q-P)\sqrt{\mathbb{T}^*\mathbb{T}})u = (QA_\gamma + PA_{-\gamma})u$. Отсюда, используя соотношение $PQ = 0$, имеем $A_\gamma u = 2Pu$, $A_{-\gamma} u = 2Qu$.

В частности, спектр $\mathbb{T}$ содержит все точки спектра оператора $\sqrt{\mathbb{T}^*\mathbb{T}}$, для которых соответствующие собственные функции принадлежат подпространству X_*.

Таким образом (для уравнения Лапласа), в случае задачи Дирихле уравнения относительно величин первого дифференциального порядка сводятся к г.и.у. известного типа, а в случае задачи Неймана к новым г.и.у., которые исследуются с помощью введения специальных потенциалов.

Перейдем к рассмотрению плоской задачи теории упругости. В новой постановке, предложенной Б.Е.Победрей [27], она формулируется следующим образом:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\sigma_{ij,j}\big|_S = 0, \quad \sigma_{ij} n_j\big|_S = p_i, \quad y \in S = \partial\Omega. \tag{2.26}$$

В условиях плоской деформации $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, $R_i = \sigma_{ij,j}$ имеем в области Ω

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} R_{1,1} - R_{2,2} \\ \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ R_{1,2} + R_{2,1} \end{pmatrix} = 0, \quad \sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}),$$

и на границе $R_i\big|_S = 0$, $\sigma_{ij} n_j\big|_S = p_i$, $i = 1, 2$.

Лемма 2.5. Пусть Ω ограниченная область с кусочногладкой границей $S = \partial\Omega$. Тогда справедлива формула Грина ($\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$)

$$\int_\Omega [M(\sigma)V - M^*(V)\sigma]\, dx = \int_S [V_2 \frac{\partial\sigma}{\partial n} - \sigma\frac{\partial V_2}{\partial n} -$$

$$- p_1 (V_{1,1} + V_{3,2}) + p_2 (V_{1,2} - V_{3,1})]\, dS.$$

Здесь $V = (V_1, V_2, V_3)$. $M^*(V) = M^* V$,

$$M^* = \begin{pmatrix} \partial_1^2 & \Delta & \partial_1\partial_2 \\ \partial_2^2 & \Delta & \partial_1\partial_2 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Доказательство непосредственно следует из формулы Гаусса-Остроградского.

Лемма 2.6. Фундаментальная матрица Γ_σ сопряженной системы $M^*\Gamma_\sigma^k = -\delta(x-y)e^k$ имеет вид

$$\Gamma_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\ln r & -\frac{1}{2\pi}\ln r & 0 \\ -\frac{1}{8\pi}[2\ln r+1-2e_1^2] & \frac{1}{8\pi}[2\ln r+1-2e_2^2] & -\frac{1}{4\pi}e_1e_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\pi}\ln r \end{pmatrix}.$$

где $r=|x-y|$, $e_i=(x_i-y_i)|x-y|^{-1}$.

В справедливости утверждения легко убедиться подстановкой в уравнение $M^*\Gamma_\sigma^k=\delta(x-y)e^k$.

Для получения интегральных уравнений подставим в формулу Грина (см. лемма 2.5) в качестве σ решение системы $M(\sigma)=0$, а в качестве V столбец матрицы Γ_σ^k, тогда

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{8\pi}\int_S [\sigma\frac{\partial}{\partial n}(e_2^2-e_1^2)-(e_2^2-e_1^2)\frac{\partial\sigma}{\partial n}]dS_x + Q_1,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_S [e_1e_2\frac{\partial\sigma}{\partial n}-\sigma\frac{\partial(e_1e_2)}{\partial n}]dS_x + Q_2; \qquad (2.27)$$

здесь Q_1, Q_2 – известные величины, зависящие от p_1, p_2. Кроме интегральных представлений (2.27) получим еще интегральные представления, соответствующие системе

$$\sigma_{,1}+\tau_{,2}=0, \qquad \tau=-\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu\cdot 2}(u_{2,1}-u_{1,2}),$$

$$\sigma_{,2}-\sigma_{,1}=0, \qquad \sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22},$$

уравнений равновесия, записанных в терминах σ,τ:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{e_1(\sigma n_1+\tau n_2)+e_2(\sigma n_2-\tau n_1)}{r}\,dS,$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{e_2(\sigma n_1+\tau n_2)-e_1(\sigma n_2-\tau n_1)}{r}\,dS. \qquad (2.28)$$

С учетом соотношений (2.28) и равенств

$$\frac{\partial\sigma}{\partial n}=-\frac{\partial\tau}{\partial S}, \quad \int_S e_1^2\frac{\partial\sigma}{\partial n}dS=-\int_S e_1^2\frac{\partial\tau}{\partial S}dS=\int_S\tau\frac{\partial e_1^2}{\partial S}dS$$

из (2.27) выводим

$$\sigma_{11}(y) = \frac{\sigma(y)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_S e_1(x,y)e_2(x,y)Z(x,y)ds_x + Q_1(y),$$

$$\sigma_{12}(y) = \frac{\tau(y)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_S e_2^2(x,y)Z(x,y)ds_x + Q_2(y),$$

здесь

$$Z(x,y) = \sigma(x)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial s_x} + \tau(x)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n_x}.$$

Формируем из левых частей интегральных представлений величины

$$\sigma_{11}(y)n_1(y) + \sigma_{12}(y)n_2(y) \quad \text{и} \quad \sigma_{12}(y)n_1(y) + \sigma_{22}(y)n_2(y):$$

$$2(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 - Q\cdot n) = V + \frac{1}{\pi}\int_S (e_2^2 V - e_1 e_2 W)\frac{\partial \ln r}{\partial n_y}ds_x, \qquad (2.29)$$

$$2(\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 - Qn^{\perp}) = W + \frac{1}{\pi}\int_S (-e_1 e_2 W + e_1^2 V)\frac{\partial \ln r}{\partial n_y}ds_x,$$

где $n^{\perp} = (-n_2, n_1)$, $Q = (Q_1, Q_2)$, $V = \sigma n_1 + \tau n_2$, $W = \sigma n_2 - \tau n_1$.

Теперь интегральные представления (2.29) подготовлены для предельного перехода $y \to z \in S$, $y \in \Omega$. Левая часть представлений (2.29) на границе S – известная функция, интеграл в правой части имеет слабую особенность и является частным случаем известного потенциала псевдонапряжений. Переходя к пределу, окончательно имеем ($u = (V, W)$)

$$u + \frac{2}{\pi}\int_S \begin{pmatrix} e_2^2 & -e_1e_2 \\ -e_1e_2 & e_1^2 \end{pmatrix} u \frac{\partial \ln r}{\partial n_y} ds_x = 4\left[p - \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n^{\perp}} \end{pmatrix}\right]. \qquad (2.30)$$

Полученная система уравнений сопряжена известной системе Шермана-Лауричеллы. Известно, что существует единственное решение уравнения (2.30) в классе $C(S)$, и это решение можно получить в виде ряда Неймана (см. § 3). Определение напряжений на границе сводится к простым алгебраическим операциям:

$$\sigma = Vn_1 + Wn_2, \quad \sigma_{11} = p_1 n_1 - p_2 n_2 + \sigma n_2^2,$$

$$\sigma_{22} = -p_1 n_1 + p_2 n_2 + \sigma n_1^2, \quad \sigma_{12} = p_1 n_2 + p_2 n_1 - \sigma n_1 n_2.$$

Таким образом, нет необходимости в численном дифференцировании при определении напряжений на границе.

Другое преимущество метода проявляется при численном определении функционалов типа Мазьи-Пламеневского

$$c = \int\limits_S G(x)\frac{\partial E}{\partial n}\, d_x S \ , \quad E = (e\pi)^{-1}\log|x| + e(x),$$

где $e(x)$ – ограниченное решение задачи (2.3I)

$$\Delta e(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}\ ; \quad e(x) = -(e\pi)^{-1}\log|x|, \quad x \in \partial\Omega = S. \quad (2.3I)$$

Заметим, что в функционал C входит не само решение (2.3I), а его нормальная производная на границе, поэтому г.и.у. относительно $\nabla e \cdot n$ вполне адекватны задаче определения .

В этом параграфе предполагалось, что Ω односвязная область с достаточно гладкой границей. Результаты для уравнений типа (2.30) и (2.24) в случае областей с угловыми точками имеются в работах [28, 29].

Глава Ш. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Первые две главы касались теории граничных интегральных уравнений (возникающих, в частности, в теории упругости) для областей с границей Ляпунова. Однако уже при решении простейших задач плоской теории упругости для тел с трещинами возникают специфические трудности: появление дополнительных операторов с неподвижными особенностями, соответствующими узловым точкам трещины (§ 5); вырождение символа в концевых точках трещины (§ I) и необходимость из-за этого рассматривать сингулярные интегральные уравнения в подходящих весовых классах; наличие оператора комплексного сопряжения, существенно меняющего индекс системы (§ 6). Эти трудности проиллюстрированы в третьей главе на примерах задач о растяжении упругой плоскости, ослабленной ломаной трещиной, и о трещине, упирающейся в слоистую среду. Как и в гладком случае здесь возможны два варианта исследования. Первый основывается на хорошо разработанной теории краевых задач в областях с угловыми точками. Этим методом ведутся исследования В.Г.Мазьи, С.С.Заргаряна, а также зарубежными учеными (Вендланд, Штефан и др.). Другой путь, рассмотренный здесь (§ 5, 7), сведение краевой задачи,тем или иным способом, к интегральному уравнению (или системе уравнений) с разностным ядром, с последующим использованием теории интегральных уравнений с разностным ядром на полуоси.

§ I. ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ

Простейшая механическая задача о конечной прямолинейной трещине Γ в упругой среде приводит к сингулярному интегральному уравнению в $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$, с символом вырождающимся в концевых точках трещины. Поэтому для корректной постановки задачи необходимо расширить класс $L_p(\Gamma)$ до некоторого весового пространства. Описанию таких пространств посвящен настоящий параграф.

Пусть $\Gamma\subset\mathbb{C}$ ограниченная кривая Ляпунова, $t_1, t_2, \ldots, t_n\in\Gamma$; $\beta_1, \ldots, \beta_n\in\mathbb{R}$, положим

$$\rho(t)=\prod_{1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}.$$

Обозначим $L_p(\Gamma,\rho)$ пространство функций с нормой

$$\|u\|^p_{L_p(\Gamma,\rho)}=\int_\Gamma |u(t)|^p\rho(t)\,|dt|.$$

В дальнейшем $1<p<\infty$; $-1<\beta_k<p-1$; t_k – различны $k=1,2,\ldots,n$. При этом $C(\Gamma)\subset L_p(\Gamma,\rho)\subset L_1(\Gamma)$.

Лемма 3.I. Если Γ – ограниченный контур, то непрерывные функции плотны в $L_p(\Gamma,\rho)$. Рациональные функции с полюсами в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ плотны в $L_p(\Gamma,\rho)$.

Доказательство. Пусть $y\in L_p(\Gamma,\rho)$, тогда $y\rho^{1/p}\in L_p(\Gamma)$, но непрерывные функции плотны в $L_p(\Gamma)$ при $1<p<\infty$. Значит, найдется последовательность непрерывных функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к $y\rho^{1/p}$ по норме $L_p(\Gamma)$. Выберем гладкую функцию $\eta(t), t\in\Gamma$, равную единице на множестве $t\in\Gamma$, мера которого близка к мере Γ, и равную нулю в малых окрестностях точек $t_k\in\Gamma$, $k=1,\ldots,n$. В интервальной норме $L_p(\Gamma)$ такая функция близка к функции тождественно равной единице. Теперь очевидно, что при достаточно большом n функция $\eta(t)u_n(t)\rho^{-1/p}$ приближает $y\in L_p(\Gamma,\rho)$. Второе утверждение леммы следует из того факта, что любую непрерывную функцию на Γ можно приблизить в равномерной норме рациональными функциями с полюсами в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

Лемма 3.2.(Ср. с § 2, гл. I). Сингулярный оператор Коши ограничен в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ при $1 < p < \infty$. Если Γ - замкнутый контур, то $S_\Gamma^2 = I$.

Доказательство. Первое из утверждений является обобщением теоремы М.Рисса (см. [37]). В силу леммы (3.1) второе утверждение достаточно проверить для рациональных функций с полюсами, не лежащими на Γ. Представим рациональную функцию r в виде $r = r_- + r_+$, полюса r_- и r_+ лежат соответственно внутри и вне контура Γ, причем $|r_-(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$. Имеем

$$(S_\Gamma r_+)(t) = [S_\Gamma(r_+(\cdot) - r_+(t))](t) + r_+(t)(S_\Gamma 1)(t).$$

Первое слагаемое равно нулю, так как при каждом фиксированном t функция $[r_+(z) - r_+(t)](z-t)^{-1}$ аналитична внутри контура Γ, значит, $S_\Gamma r_+ = r_+$. По формуле Сохоцкого-Племели $2S_\Gamma^\pm 1 = \pm 1 + S_\Gamma 1$, но $S_\Gamma^- 1 = 0$, поэтому получаем аналогично $S_\Gamma r_- = -r_-$. Следовательно, $S_\Gamma^2 r = S_\Gamma(r_+ - r_-) = r$. По непрерывности S_Γ это свойство распространяется на функции из $L_p(\Gamma, \rho)$.

Замечание 3.1. В случае неограниченного контура Γ вес ρ необходимо подчинить дополнительному условию, контролирующему рост ρ на бесконечности. В частности, если $\Gamma = \mathbb{R}$, то

$$\rho(t) = |t+i|^\nu \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\beta_k},$$

$$-1 < \beta_k < p-1, \quad -1 < \nu + \sum_{k=1}^n \beta_k < p-1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 3.3. Пусть $1 < p < \infty$ и a - непрерывная функция на ограниченной кривой Ляпунова Γ, тогда оператор $T = aS_\Gamma - S_\Gamma a$ вполне непрерывен в $L_p(\Gamma, \rho)$.

Доказательство. Если a_n - рациональная функция с полюсами, не лежащими на Γ, то интегральный оператор

$$(T_n \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{a_n(t) - a_n(\tau)}{t - \tau} \varphi(\tau)\, d\tau$$

имеет гладкое ядро и, следовательно, вполне непрерывен в $L_p(\Gamma, \rho)$. Для произвольной функции $a \in C(\Gamma)$ найдется последовательность рациональных функций $a_n \to a$ в метрике $C(\Gamma)$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\|(a_n - a)\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)} \le \|a_n - a\|_{C(\Gamma)} \cdot \|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)},$$

$$\| T_n - T \| \le \| S_\Gamma (a_n - a) \| + \| (a_n - a) S_\Gamma \| \le$$

$$\le 2 \| S_\Gamma \| \cdot \| a - a_n \|_{C(\Gamma)},$$

при этом использовалась лемма (3.2) и включения $C(\Gamma) \subset L_p(\Gamma, \rho)$. Осталось отметить, что предел вполне непрерывных операторов вполне непрерывен.

З а м е ч а н и е 3.2. В случае $\Gamma = \mathbb{R}$ дополнительно предполагается, что $a(-\infty) = a(+\infty)$ и ρ подчинено условию, сформулированному в замечании (3.I).

Для замкнутой ограниченной кривой Ляпунова Γ (или $\Gamma = \mathbb{R}$) из леммы (3.2) следует, что

$$P_\Gamma = \frac{1}{2} (I + S_\Gamma), \quad Q_\Gamma = \frac{1}{2} (I - S_\Gamma)$$

проекторы в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, т.е.

$$P_\Gamma^2 = P_\Gamma , \quad Q_\Gamma^2 = Q_\Gamma , \quad Q_\Gamma P_\Gamma = P_\Gamma Q_\Gamma = 0$$

Введем обозначения. Для замкнутой ограниченной кривой Γ положим $\overset{\circ}{L}{}^+_p(\Gamma, \rho) = P_\Gamma L_p(\Gamma, \rho)$, $\overset{\circ}{L}{}^-_p(\Gamma, \rho) = Q_\Gamma L_p(\Gamma, \rho)$.

Аналогично при $\Gamma = \mathbb{R}$: $L^\pm_p(\mathbb{R}) = 1/2 (I \pm S_\mathbb{R}) L_p(\mathbb{R})$. Пространства $L^\pm_p$ могут быть охарактеризованы в терминах интеграла типа Коши:

$$(\Phi_\Gamma \varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z} , \quad \varphi \in L_p(\Gamma, \rho).$$

Действительно, справедливы формулы Сохоцкого-Племели (см. § 3, гл. I):

$$(\Phi_\Gamma \varphi)^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2} (S_\Gamma \varphi)(t) = (P_\Gamma \varphi)(t),$$

$$(\Phi_\Gamma \varphi)^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2} (S_\Gamma \varphi)(t) = -(Q_\Gamma \varphi)(t). \qquad (3.I)$$

<u>Лемма 3.4</u>. Пусть $\varphi \in L_p(R)$, $1 < p < 2$, $c \in R$ и

$$q(x) = e^{-icx} (S_\mathbb{R} e^{icy} \varphi(y))(x) = \frac{1}{\pi i} \int_R \frac{e^{ic(y-x)} \varphi(y)}{y - x} dy,$$

тогда преобразование Фурье F функции q равно

$$(Fq)(x) = -\mathrm{sgn}\,(x - c) F \varphi(x) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду плотности в $L_p(\mathbb{R})$ функций с компактными носителями, можно считать, что $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$. В силу формул (3.I) имеем

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_R \Big[\frac{e^{ic(y-x)}}{y-x-i\varepsilon} + \frac{e^{ic(y-x)}}{y-x+i\varepsilon} \Big] \varphi(y)\, dy .$$

Далее

$$(Fg)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-N}^{N} e^{i\lambda x} \int_{-a}^{a} \Big[\frac{e^{ic(y-x)}}{y-x-i\varepsilon} +$$

$$+ \frac{e^{ic(y-x)}}{y-x+i\varepsilon} \Big] \varphi(y)\, dy\, dx = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-a}^{a} e^{i\lambda y} \varphi(y) +$$

$$\times \int_{-N}^{N} \Big[\frac{e^{i(\lambda-c)(x-y)}}{x-y+i\varepsilon} + \frac{e^{i(\lambda-c)(x-y)}}{x-y-i\varepsilon} \Big] dx\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} e^{i\lambda y} \varphi(y) \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-N-y}^{N-y} \Big[\frac{e^{i(\lambda-c)x}}{x+i\varepsilon} + \frac{e^{i(\lambda-c)x}}{x-i\varepsilon} \Big] dx\, dy .$$

Снова используя соотношения (3.I), получаем

$$(Fg)(\lambda) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} e^{i\lambda y} \varphi(y) \lim_{N\to\infty} \int_{-N-y}^{N-y} \frac{e^{i(\lambda-c)x}}{x}\, dx\, dy =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} e^{i\lambda y} \varphi(y) \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\sin(\lambda-c)x}{x}\, dx = -\operatorname{sgn}(\lambda-c) F\varphi(\lambda).$$

<u>Следствие 3.I.</u> Если $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, $p \in (0,2]$, то

$$(F^{\pm 1} P_R \varphi)(\lambda) = \frac{1 \mp \operatorname{sgn}\lambda}{2} F^{\pm 1}\varphi(\lambda),\ F^{\pm 1} Q_R \varphi(\lambda) = \frac{1 \pm \operatorname{sgn}\lambda}{2} F^{\pm 1}\varphi(\lambda).$$

В § 3, гл. I было введено понятие символа сингулярного оператора. Лемма 3.4 и следствие 3.I устанавливают связь между операторами S_R, P_R, Q_R и их символами, $\operatorname{sgn}\lambda = \theta$. Оказывается, что эти операторы унитарно эквивалентны своим символам, так как F — ун..тарный оператор: $FF^* = F^*F = I$ в $L_2(\mathbb{R})$.

§ 2. ОБРАЩЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Используя лемму 3.3 и следствие 3.I, найдем символ оператора $A=P_r a P_r$ в пространстве $L_p(\Gamma)$ (Γ - замкнутая кривая Ляпунова или $\Gamma=R$), $a\in C(\Gamma)$:

$$\operatorname{sym}(P_r a P_r)=\operatorname{sym}(P_r^2 a)=\operatorname{sym}P_r\cdot\operatorname{sym}a=\tfrac{1}{2}(1-\operatorname{sign}\lambda)a(x)=$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\theta)a(x),\ x\in\Gamma,\ \theta=\pm 1.$$

Очевидно, что символ A в пространстве $L_p(\Gamma)$ вырождается при $\theta=-1$, поэтому рассмотрим сужение A на подпространство $L_p^+(\Gamma)$. Оператор $A: L_p^+(\Gamma)\to L_p^+(\Gamma)$ ограничен.

Следующее утверждение устанавливает связь между сужением оператора на подпространство и некоторым оператором в исходном пространстве. Но сначала напомним некоторые обозначения: $\dim H$ - размерность конечномерного пространства H, $\operatorname{ind}A=\dim\operatorname{Ker}A-\dim\operatorname{Ker}A^*$, $\operatorname{Ker}A$ - ядро оператора A.

Лемма 3.5. Пусть B - банахово пространство, C и P - линейные непрерывные операторы, $P^2=P$. Тогда оператор $A=PCP$ в пространстве PB и операторы $T_1=CP+Q$, $T_2=PC+Q\ (Q=I-P)$ в пространстве B одновременно обратимы или нет, причем

$$\dim\operatorname{Ker}A=\dim\operatorname{Ker}T_i,\ \dim\operatorname{Ker}A^*=\dim\operatorname{Ker}T_i^*,\ i=1,2.$$

Доказательство. Легко проверить тождества

$$T_1=CP+Q=(PCP+Q)(1+QCP),$$
$$T_2=PC+Q=(1+PCQ)(PCP+Q).$$

Далее, так как $PQ=QP=0$, то операторы $D_1=(1+QCP)$ и $D_2=(1+PCQ)$ обратимы и $D_1^{-1}=(1-QCP)$, $D_2^{-1}=(1-PCQ)$. Следовательно,

$$\dim\operatorname{Ker}T_1=\dim\operatorname{Ker}(PCP+Q),\ \dim\operatorname{Ker}T_1^*=\dim\operatorname{Ker}(PCP+Q)^*.$$

Если $u\in\operatorname{Ker}A$, то $u=Pv$ и $u\in\operatorname{Ker}(PCP+Q)=\operatorname{Ker}T_1$. Обратно, если $u\in\operatorname{Ker}T_1$, то $PCPu=0$ и $Qu=0$. Следовательно, $u\in PB\cap\operatorname{Ker}A$. Аналогично доказываются остальные утверждения леммы.

В соответствии с леммой 3.5 рассмотрим оператор $aP+Q$, $x\in\Gamma$. Вычислим его символ

$$sym(aP+Q)=sym(1/2\,a(I+S_\Gamma)+1/2\,(I-S_\Gamma))=$$
$$=sym(1/2\,(a+1)+1/2\,(a-1)S_\Gamma)=1/2\,(a+1)+1/2\,(a-1)\theta.$$

Здесь были использованы результаты гл. I. Далее

$$ind\,(aP+Q)=-\frac{1}{2\pi}[arg\,(1/2\,(a+1)+1/2\,(a-1))/1]_\Gamma=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}[arg\,a]_\Gamma=-ind\,a.$$

Последняя строчка есть определение индекса функции $a(x)$, $x\in\Gamma$, в отличие от введенного ранее индекса оператора. Так как по лемме (3.5) $ind\,(aP+Q)=ind\,A$, то $ind\,A=-ind\,a$. Таким образом, естественным оказывается следующее определение.

Оператору A в пространстве $L_p^+(\Gamma)$ сопоставим символ

$$sym\,A=a(x),\quad x\in\Gamma.$$

Для построения обратного к A оператора рассмотрим вопрос о факторизации функции $a(x)$.

Обозначим D^+ часть расширенной комплексной плоскости ограниченную замкнутой кривой Ляпунова Γ, $0\in D^+$ и $D^-=\mathbb{C}\setminus(D^+\cup\Gamma)$, $G^\pm=D^\pm\cup\Gamma$. Факторизацией непрерывной функции $a(z)\neq 0$ $(z\in\Gamma)$ называется представление ее в виде

$$a(z)=a_-(z)z^{\varkappa}a_+(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.2}$$

где $\varkappa$ – некоторое целое число, а функции $a_\pm(z)$ допускают продолжения, аналитические в $D^\pm$ и непрерывные в $G^\pm$, причем

$$a_+(z)\neq 0,\ z\in G^+,\ a_-(z)\neq 0,\ z\in G^-.$$

Из представления (3.2) непосредственно следует

$$ind\,a=\frac{1}{2\pi}[arg\,a]_\Gamma=\frac{1}{2\pi}[arg\,z^{\varkappa}]_\Gamma=\varkappa,$$

кроме того, факторизация единственна. Действительно, пусть

$$a_-^1(z)z^{\varkappa}a_+^1(z)=a_-^2(z)z^{\varkappa}a_+^2(z),$$

тогда

$$a_-^1(z)[a_-^2(z)]^{-1}=a_+^2(z)[a_+^1(z)]^{-1},\quad z\in\Gamma. \tag{3.3}$$

Из аналитичности $a_-^{1,2}(z)$ в частности расширенной комплексной плоскости D следует существование констант C_1, $C_2 \neq 0$

$$a_-^1(z) \to C_1 \ , \ a_-^2(z) \to C_2 \ , \ |z| \to +\infty .$$

Соотношение (3.3) позволяет определить функцию аналитическую и ограниченную в $\mathbb{C}$, значит, найдется константа C, что $a_+^2 = c a_+^1$ и $a_-^2 = c a_-^1$.

Класс непрерывных функций $C(\Gamma)$ на замкнутой кривой Ляпунова Γ образует банахову алгебру. Это значит, что полное линейное пространство $C(\Gamma)$ является алгеброй относительно операции поточечного умножения, которое согласовано с равномерной нормой $\|a \cdot b\|_{C(\Gamma)} \leq \|a\|_{C(\Gamma)} \|b\|_{C(\Gamma)}$. Известно, что не всякая непрерывная функция допускает факторизацию (3.2). Однако для функций из некоторых подалгебр алгебры $C(\Gamma)$ возможна факторизация. Важным примером такой подалгебры служит совокупность всех, определенных на Γ комплексных функций, удовлетворяющих условию Гельдера $H^\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu < 1)$.

Теорема 3.I. Каждая функция $a \in H^\mu(\Gamma)$ $(0<\mu<1)$, нигде на не обращающаяся в нуль, допускает факторизацию (3.2), причем

$$a_\pm(t) \in H^\mu(\Gamma).$$

Доказательство. Положим для $z \in D^\pm$

$$a_\pm(z) = e^{\pm b(z)} \ , \ b(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln[t^{-\varkappa} a(t)]}{t - z} dt .$$

Так как $0 \notin \Gamma$, то

$$|\ln[t_1^{-\varkappa} a(t_1)] - \ln[t_2^{-\varkappa} a(t_2)]| \leq (dist(0,\Gamma))^{-1} |t_1^{-\varkappa} a(t_1) -$$
$$- t_2^{-\varkappa} a(t_2)| \leq (dist(0,\Gamma))^{-1} \{|t_1|^{-\varkappa} |a(t_1) - a(t_2)| + |a(t_2)| |t_1^{-\varkappa} - t_2^{-\varkappa}|\}.$$

Значит $S_\Gamma(\ln[t^{-\varkappa} a(t)]) \in H^\mu(\Gamma)$ и из формул Сохоцкого-Племели вытекает: $b_\pm(t) \in H^\mu(\Gamma)$ и $a_\pm(t) \in H^\mu(\Gamma)$.

Кроме того, имеем из (3.I)

$$b_+(t) = \frac{1}{2} \ln[t^{-\varkappa} a(t)] + \frac{1}{2} (S_\Gamma(\ln \tau^{-\varkappa} a(\tau)))(t),$$
$$b_-(t) = -\frac{1}{2} \ln[t^{-\varkappa} a(t)] + \frac{1}{2} (S_\Gamma(\ln \tau^{-\varkappa} a(\tau)))(t),$$

поэтому соотношение (3.2) выполнено.

Пусть $R(\Gamma)$ - совокупность рациональных функций, не имеющих нулей и полюсов на Γ, $\mathcal{U}(\Gamma)$ - банахова алгебра функций из $C(\Gamma)$. Пусть $R(\Gamma) \subset \mathcal{U}(\Gamma)$ и $R(\Gamma)$ плотно в $\mathcal{U}(\Gamma)$ по норме $\| \ \|_{\mathcal{U}(\Gamma)}$, тогда $\mathcal{U}(\Gamma)$ называется R-алгеброй. Обозначим $\mathcal{U}^{\pm}(\Gamma)$ замыкание рациональных функций, не имеющих полюсов и нулей соответственно внутри (вне) Γ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{U}(\Gamma)}$; $\overset{\circ}{\mathcal{U}}{}^{-}(\Gamma)$ – совокупность функций из $\mathcal{U}^{-}(\Gamma)$, на бесконечности стремящихся к нулю.

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{U}(\Gamma)$ – некоторая R-алгебра. Для того чтобы каждая функция $a(z)\in\mathcal{U}(\Gamma)$, нигде на Γ не обращающаяся в нуль, допускала факторизацию (3.2) с $a^{\pm}(z)\in\mathcal{U}^{\pm}\Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{U}(\Gamma)$ была распадающейся алгеброй, т.е. $\mathcal{U}(\Gamma)=\mathcal{U}^{+}(\Gamma)+\overset{\circ}{\mathcal{U}}{}^{-}(\Gamma)$.

Замечание 3.3. Банахова алгебра $H^{\mu}(\Gamma)$ – распадающаяся алгебра, не являющаяся R-алгеброй (множество $R(\Gamma)$ не плотно в $H^{\mu}(\Gamma)$, $0<\mu<1$. Однако по теореме 3.I каждая не обращающаяся в нуль на Γ функция из $H^{\mu}(\Gamma)$ допускает факторизацию.

Вернемся к изучению обратимости оператора $A=PaP$, а $a\in H^{\mu}(\Gamma)$, $0<\mu<1$.

Теорема 3.3. Чтобы оператор $A=PaP$ был нетеровым в $L_p^{+}(\Gamma)(1<p<\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $a(x)\neq 0$ для любых $x\in\Gamma$. Если это условие выполнено, то обратимость A согласована с числом $\operatorname{ind}A=-\operatorname{ind}a=-\varkappa$. Обратный слева A_{ℓ}^{-1} (при $\varkappa\geqslant 0$) и справа A_{r}^{-1} (при $\varkappa\leqslant 0$) имеет вид

$$A_{\ell}^{-1}=Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}+Pa_{-}^{-1}P,\qquad A_{r}^{-1}=Pa_{+}^{-1}+Pa_{-}^{-1}Px^{-\varkappa}P.$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из леммы (3.5). Докажем формулы для A_{ℓ}^{-1}, A_{r}^{-1}:

$$A_{\ell}^{-1}A=Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}\;Pa_{-}^{-1}Pa_{-}X^{\varkappa}a_{+}P=Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}Px^{\varkappa}a_{+}P-$$
$$-Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}Pa_{-}^{-1}Qa_{-}x^{\varkappa}a_{+}P=Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}x^{\varkappa}a_{+}P-$$
$$-Px^{-\varkappa}Pa_{+}^{-1}Qx^{\varkappa}a_{+}P=Px^{-\varkappa}Px^{\varkappa}P=P.$$

Здесь использованы соотношения $Pa_{-}^{-1}Q=0$, $Qx^{\varkappa}a_{+}P=0$ и $Px^{\varkappa}=x^{\varkappa}$ при $\varkappa\geqslant 0$, которые следуют из равенств (3.I), подчеркнуты части, остающиеся от оператора A_{ℓ}^{-1}. Для A_{r}^{-1} имеем аналогично

$$AA_{r}^{-1}=Pa_{-}X^{\varkappa}a_{+}PPa_{+}^{-1}Pa_{-}^{-1}Px^{-\varkappa}P=Pa_{-}x^{\varkappa}P,$$
$$a_{-}^{-1}Px^{-\varkappa}P-Pa_{-}X^{\varkappa}a_{+}Qa_{+}^{-1}Pa_{-}^{-1}Px^{-\varkappa}P=Pa_{-}x^{\varkappa}a_{-}^{-1}Px^{-\varkappa}P=P.$$

Полученные результаты могут быть использованы для решения сингулярных уравнений вида

$$a(x)u(x)+b(x)(S_\Gamma u)(x)=f(x)\,,\quad x\in\Gamma\,;\ a,b\in H^{\mu}(\Gamma).$$

Действительно, учитывая тождества $P_\Gamma+Q_\Gamma=I$ и $P_\Gamma-Q_\Gamma=S_\Gamma$, преобразуем уравнение $[(a+b)P_\Gamma+(a-b)Q_\Gamma]u=f$ к эквивалентной системе

$$[P_\Gamma(a+b)P_\Gamma+T_1]u=P_\Gamma f,\quad [Q_\Gamma(a-b)Q_\Gamma+T_2]u=Q_\Gamma f.$$

Здесь $T_1=(P_\Gamma(a-b)-(a-b)P_\Gamma)Q_\Gamma$, $T_2=[Q_\Gamma(a+b)-(a+b)Q_\Gamma]P_\Gamma$ – вполне непрерывные операторы (произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный – вполне непрерывно). При условии $a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$ на Γ теорема 3.3 позволяет строить левый или правый обратный к операторам $P_\Gamma(a+b)P_\Gamma$, $Q_\Gamma(a-b)Q_\Gamma$ в пространствах $P_\Gamma H^{\mu}(\Gamma)$ и $Q_\Gamma H^{\mu}(\Gamma)$ соответственно. Тем самым исходное сингулярное интегральное уравнение сводится к системе уравнений Фредгольма.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

Многие прикладные задачи и, в частности, некоторые статические и динамические задачи теории трещин сводятся (см. [26, 30]) к решению уравнений вида

$$g(t)-\int_0^\infty k(t-s)\,g(s)\,ds=f(t)\,,\quad 0<t<+\infty. \qquad (3.4)$$

Это уравнение аналогично рассмотренному в § 2, т.е. представимо в виде $P(1-k)*Pg=f$ с некоторым проектором $P\neq P_\Gamma$. Чтобы убедиться в этом, определим факторизацию функций $f\in C(\mathbb{R})$, имеющих конечные пределы $f(-\infty)=f(\infty)$. Скажем, что $f(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$, допускает факторизацию, если $f(\lambda(z))$ как функция по z, $|z|=1$, факторизуема. Здесь

$$\lambda=-i\,\frac{z+i}{z-i}\,,\quad z=i\,\frac{\lambda-i}{\lambda+i}$$

– конформное отображение, переводящее единичную окружность на вещественную ось $\mathbb{R}^1$, пополненную бесконечноудаленной точкой. Таким образом, роль областей $D^{\pm}$ играют соответственно верхняя $(\operatorname{Im}\lambda>0)$

и нижняя ($\Im m\lambda < 0$) полуплоскости, а под факторизацией $f(\lambda), \lambda \in R^1$, понимается представление вида

$$a(\lambda) = a_-(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa} a_+(\lambda) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

где $\varkappa$ - целое число, а функция $a_+(\lambda)$ (соответственно $a_-(\lambda)$) допускает продолжение, аналитическое в открытой полуплоскости $\Im m\lambda > 0$ (соответственно $\Im m\lambda < 0$) и непрерывное в замкнутой полуплоскости $\Im m\lambda \geqslant 0$ (соответственно $\Im m\lambda \leqslant 0$), причем

$$a_+(\lambda) \neq 0 \quad (\Im m\lambda \geqslant 0), \quad a_-(\lambda) \neq 0 \quad (\Im m\lambda \leqslant 0).$$

Аналогично R -алгеброй называется банахова алгебра $\mathcal{U}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, содержащая все рациональные функции с полюсами вне вещественной оси, которые образуют плотное множество в $\mathcal{U}(\mathbb{R})$. Очевидно, что линейная оболочка функций

$$\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^k \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.6}$$

плотна в R -алгебре $\mathcal{U}(\mathbb{R})$. Пространства $\mathcal{U}^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}^-(\mathbb{R})$, $\overset{\circ}{\mathcal{U}}{}^-(\mathbb{R})$ определяются как замыкание в норме $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ линейной оболочки функций вида (3.6) для $k = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, -1, -2, \ldots$ и $k = -1, -2, \cdots$ соответственно. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.2.

<u>Теорема 3.4.</u> Пусть $\mathcal{U}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ - некоторая R -алгебра. Для того чтобы каждая функция $a(\lambda) \in \mathcal{U}(\mathbb{R})$, не обращающаяся в нуль на вещественной оси $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty)$, допускала факторизацию вида (3.5) с $a_\pm(\lambda)$ и $a_\pm^{-1}(\lambda)$ из $\mathcal{U}^\pm(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ была распадающейся алгеброй, т.е.

$$\mathcal{U}(\mathbb{R}) = \mathcal{U}^+(\mathbb{R}) + \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}^-(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим пример распадающейся R -алгебры, связанной с уравнениями Винера-Хопфа (3.4). Через $W(\mathbb{R})$ обозначим класс функций вида $a(x) = c + F k(x)$, где $c \in \mathbb{C}$ - постоянная, $k \in L_1(\mathbb{R})$, F - преобразование Фурье.

<u>Лемма 3.6.</u> Класс Винера $W(\mathbb{R})$ образует распадающуюся банахову алгебру с нормой

$$\|a\|_W = |c| + \|k\|_{L_1}(\mathbb{R}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_i(x)=c_i+Fk_i(x)$, $i=1,2$, тогда $a_1a_2=c_1c_2+F(c_1k_2+c_2k_1)+Fk_1\cdot Fk_2$.
Известно, что $F(k_1*k_2)=Fk_1\cdot Fk_2$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k_1*k_2(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}k_1(y)k_2(y-x)\Big|\,dy\,dx\le\|k_1\|_{L_1}\|k_2\|_{L_1},$$

следовательно, $a_1a_2\in W(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$\|a_1a_2\|_W=|c_1c_2|+\|c_1k_2+c_2k_1+k_1*k_2\|_{L_1(\mathbb{R})}\le\|a_1\|_W\|a_2\|_W.$$

Проверим, что функции вида (3.6) принадлежат $W(\mathbb{R})$. Положим

$$f_1(t)=\begin{cases}2e^{-t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases},\quad f_2(t)=\begin{cases}0, & t\ge 0,\\ 2e^{t}, & t<0,\end{cases}$$

тогда

$$\frac{\lambda-i}{\lambda+i}=1-Ff_1(\lambda),\quad \frac{\lambda+i}{\lambda-i}=1-Ff_2(\lambda).$$

Заметим, что $(f_1*f_1)(\lambda)=2\lambda f_1(\lambda)$, поэтому линейная оболочка функций вида (3.6) состоит из всех функций вида

$$c-(Fr)(t),\quad r(\lambda)=f_1(\lambda)p_1(\lambda)+f_2(\lambda)p_2(\lambda), \tag{3.7}$$

где p_1, p_2 – произвольные полиномы по неотрицательным степеням λ. Множество функций $r(\lambda)$ плотно в $L_1(\mathbb{R})$, следовательно, доказано, что $W(\mathbb{R})$ является R-алгеброй. Докажем, что $W(\mathbb{R})$-распадающаяся банахова алгебра. Функции вида $F(f_1p_1)(\lambda)$ (соответственно $F(f_2p_2)(\lambda)$), где p_1, p_2 – произвольные полиномы, допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda>0$ (соответственно в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda<0$) и плотны соответственно в $W^{\pm}(\mathbb{R})$. Подалгебра $\mathring{W}^{-}(\mathbb{R})$ состоит из всех функций вида $Fk(x)$, где $k(x)\in L_1(\mathbb{R})$ и $k(x)=0$ при $x>0$. Пусть $\{a_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций вида (3.7) $a_n(t)=c_n-F[f_1p_n+f_2q_n](t)$, сходящаяся в метрике $W(\mathbb{R})$ к некоторой функции $a(t)\in W(\mathbb{R})$, $a(t)=c-Fk$. То есть $c_n\to c$ и $f_1p_n+f_2q_n\to k$ в $L_1(\mathbb{R})$ при $n\to\infty$. Тогда очевидно $f_1p_n\to k_1$ и $f_2q_n\to k_2$ при $n\to\infty$, здесь

$$k_1(t)=\begin{cases}k(t), & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad k_2(t)=k(t)-k_1(t).$$

Имеем $a=(c-Fk_1)+Fk_2$, $c-Fk_1\in W^{+}(\mathbb{R})$ и $Fk_2\in\mathring{W}^{-}(\mathbb{R})$.

Используем полученные результаты для исследования интегральных уравнений вида (3.4) с $K(t) \in L_1(\mathbb{R}^1)$. Пусть

$$\overset{o}{W}_a y(t) = F^{-1} a F y(t) = K^* y(t), \quad y \in L_p(\mathbb{R}).$$

Через W_a обозначим сужение оператора $\chi_+ \overset{o}{W}_a \chi_+$ на подпространстве $L_p(\mathbb{R}_+) \subset L_p(\mathbb{R})$, $\chi_+(t) = (1 + \operatorname{sgn} t)/2$.
В этих обозначениях уравнение (3.4) перепишется в виде

$$W_a q(t) = f(t), \quad a(\lambda) = 1 - FK(\lambda), \quad f \in L_p(\mathbb{R}_+).$$

<u>Теорема 3.5</u>. Пусть $K \in L_1(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Для того чтобы оператор W_a в пространстве L_p $(\mathbb{R}_+)$ был по крайней мере односторонне обратим, необходимо и достаточно, чтобы его символ нигде не обращался в нуль, т.е. $a(\lambda) = 1 - Fk(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$.
При этом

$$\operatorname{ind} W_a = -\operatorname{ind} a = -\frac{1}{2\pi}\left[\arg a(\lambda)\right]_{\lambda=-\infty}^{+\infty}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $K \in L_1(\mathbb{R})$, то $a = 1 - FK \in W(\mathbb{R})$. Из леммы 3.6 и теоремы 3.4 следует, что $a(\lambda)$ допускает факторизацию вида (3.5)

$$a(\lambda) = a_-(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa} a_+(\lambda),$$

где $a_\pm(\lambda) \in W^\pm(\mathbb{R})$, $a_\pm^{-1}(\lambda) \in W^\pm(\mathbb{R})$.

Следовательно, определены операторы

$$A_\pm^{-1} g(t) = g(t) - \int_0^\infty K_\pm(t-s) g(s)\, ds;$$

здесь $a_\pm^{-1}(\lambda) = 1 - FK_\pm(\lambda)$, $K_\pm(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Обозначим через V, V^{-1} операторы в пространстве L_p $(\mathbb{R}_+)$, соответствующие символам $1 - Ff_1$ и $1 - Ff_2$

$$V y(t) = y(t) - 2\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} y(s)\, ds,$$

$$V^{-1} y(t) = y(t) - 2\int_t^{+\infty} e^{t-s} y(s)\, ds.$$

Легко проверяется, что V^{-1} обратный оператор в V и справедливы соотношения

$$VP_0 = P_0VP_0\ ;\ P_0V^{-1} = P_0V^{-1}P_0\ ;\ P_0g(t) = \chi_+(t)g(t).$$

Теперь проверим, что оператор

$$W_a^{(-1)} = A_+^{-1}P_0V^{-\varkappa}P_0A_-^{-1}$$

является обратным, левым обратным или правым обратным для W_a, если число $\varkappa$ соответственно равно нулю, положительно или отрицательно. Действительно,

$$W_a g = F^{-1}a(\lambda)Fg = F^{-1}a_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}a_+(\lambda)Fg =$$

$$= F^{-1}a_-(\lambda)FF^{-1}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}FF^{-1}a_+(\lambda)Fg = A_-V^{\varkappa}A_+g,$$

и пусть, например, $\varkappa \geqslant 0$, тогда

$$(A_+^{-1}P_0V^{-\varkappa}P_0A_-^{-1})A_-V^{\varkappa}A_+g = A_+^{-1}P_0V^{-\varkappa}P_0V^{\varkappa}A_+g =$$

$$= A_+^{-1}P_0A_+g = A_+^{-1}P_0A_+P_0g = P_0g = g\ ,\quad g \in L_p(\mathbb{R}_+).$$

Здесь было использовано соотношение $P_0A_+P_0 = A_+P_0$ и тот факт, что $L_p(\mathbb{R}_+)$ рассматривается как подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$, $P_0L_p(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}_+)$. Доказательство необходимости условия теоремы см. в [38].

§ 4. ПОНЯТИЯ ОБОБЩЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ И ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Как уже отмечалось, не любая непрерывная на контуре Γ функция $a(\lambda)$ допускает факторизацию вида (3.2). В то же время для решения прикладных задач приходится рассматривать операторы $P_aP = A$ и W_a с функциями $a \in \Pi C(\mathbb{R}) \subset L_\infty(\mathbb{R})$, т.е. с функциями, имеющими конечные предельные значения в каждой точке вещественной оси, включая бесконечно удаленные точки. Например, оператор сингулярного интегрирования на $\mathbb{R}$ может быть записан в виде (см. лемма 3.4)

$$S_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x} = -F^{-1}\operatorname{sgn}(x)F\varphi(x) = -W^0_{\operatorname{sgn}}\varphi(x),$$

где $\operatorname{sgn}(x) \in \Pi C(\mathbb{R})$ и имеет разрывы в точках $x=0$, $x=\pm\infty$. В этом случае вводится понятие обобщенной P-факторизации функций $a \in \Pi C(\mathbb{R})$, которая совпадает с факторизацией a, если последняя существует. Говорят, что функция $a(\lambda)$ допускает обобщенную P-факторизацию $(1<p<\infty)$, если

$$a(\lambda) = a_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa} a_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

причем выполнены условия:

I. оператор $\widetilde{a}_+^{-1} S_{\mathbb{R}} \widetilde{a}_-^{-1} E$ ограничен в $L_p(\mathbb{R})$, где

$$\widetilde{a}_+(\lambda) = (\lambda+i)^{(2-p)/p} a_+(\lambda), \quad \widetilde{a}_-(\lambda) = (\lambda-i)^{(p-2)/p} a_-(\lambda);$$

2. $(\lambda-i)^{-2/p} a_-(\lambda) \in L_p^-(\mathbb{R})$, $(\lambda-i)^{-2/p'} a_-^{-1}(\lambda) \in L_{p'}^-(\mathbb{R})$,

$$(\lambda+i)^{-2/p} a_+(\lambda) \in L_{p'}^+(\mathbb{R}), \ (\lambda+i)^{-2/p} a_+^{-1}(\lambda) \in L_p^+(\mathbb{R}), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Напомним, что $L^{\pm}_p(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}(I \pm S_{\mathbb{R}}) L_p(\mathbb{R})$, $p' = p/(p-1)$.

Имеют место следующие свойства обобщенной p-факторизации: p-факторизация произвольной функции $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ единственна, любая функция $a \in L_\infty(\mathbb{R})$, для которой $\operatorname{ess\,inf} |a(\lambda)| > 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, допускает обобщенную p-факторизацию с $a_\pm^{\pm 1} \in L_\infty(\mathbb{R})$, при этом если $a \in W(\mathbb{R})$, то $a_+^{\pm 1}, a_-^{\pm 1} \in W(\mathbb{R})$
и

$$a_\pm = \exp \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{R}}) b, \quad b(\lambda) = \ln\left[a(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\varkappa}\right].$$

Наряду с разрывными функциями $a(\lambda)$, в приложениях часто встречается случай, когда $a(\lambda)$ – $n\times n$ – матрица-функция. Если $C_{n\times n}(\Gamma)$ обозначает банахову алгебру всех матриц порядка n, элементами которых являются непрерывные функции на Γ, и $a(\lambda) \in C_{n\times n}(\Gamma)$, то правой факторизацией $a(\lambda)$ называется представление ее в форме

$$a(\lambda) = a_-(\lambda) D(\lambda) a_+(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma, \tag{3.8}$$

с диагональной матрицей $D(\lambda) = \{\lambda^{\varkappa_j} \delta_{jk}\}_{j,k=1}^n$.

Здесь $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \ldots \geq \varkappa_n$ – некоторые целые числа и $a_\pm(\lambda)$ – квадратные матрицы порядка n, допускающие продолжения, аналитические в областях $D_\pm$ и непрерывные в $G_\pm$, причем

$$\det a_+(z) \neq 0 \quad (z \in G_+), \quad \det a_-(z) \neq 0 \quad (z \in G_-).$$

Факторизация матрицы $a(\lambda)$, получающаяся, если поменять местами множители $a_{\pm}(\lambda)$ в (3.8), называется левой факторизацией.

Теорема 3.6. Если матрица $a(\lambda)\in C_{n\times n}(\Gamma)$ допускает правую (или левую) факторизацию, то числа $\varkappa_j=\varkappa_j(a)$ $(j=1,2,\dots,n)$ однозначно определяются матрицей $a(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть наряду с факторизацией (3.8) матрица $a(\lambda)$ допускает другую факторизацию:

$$a(\lambda)=\widetilde{a}_-(\lambda)\widetilde{D}(\lambda)\widetilde{a}_+(\lambda),$$

где $\widetilde{D}(\lambda)=\{\lambda^{\widetilde{\varkappa}_j}\delta_{jk}\}_{j,k=1}^{n}$. Тогда имеем равенство $b_-(\lambda)D(\lambda)=$ $=\widetilde{D}(\lambda)b_+(\lambda)$, в котором $b_-(\lambda)=\widetilde{a}_-^{-1}a_-(\lambda)$, $b_+(\lambda)=\widetilde{a}_+(\lambda)a_+^{-1}(\lambda)$. Следовательно, для элементов $b^{\pm}_{j,k}$ матрицы $b_{\pm}(\lambda)$ имеем

$$b^-_{jk}(\lambda)\lambda^{\varkappa_k}=\lambda^{\widetilde{\varkappa}_j}b^+_{jk}(\lambda) \qquad (j,k=1,2,\dots,n).$$

Применяя теорему Лиувилля, найдем, что

$$b^-_{jk}(\lambda)=b^+_{jk}(\lambda)=0,\quad \varkappa_k<\widetilde{\varkappa}_j,\quad \lambda\in\Gamma.$$

Пусть теперь $\varkappa_r<\widetilde{\varkappa}_r$ при некотором $r\ (1\le r\le n)$, тогда $\varkappa_k<\widetilde{\varkappa}_j$ $(j=1,\dots,r;\ k=r,\dots,n)$ и по доказанному $b^+_{jk}(\lambda)=0$ при $j=1,\dots,r;\ k=r,\dots,n$. Раскладывая $\det B_+(\lambda)$ по элементам первой строки, найдем, что $\det B_+(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В соответствии с типом факторизации целые числа $\varkappa_j$ $(j=1,\dots,n)$ называются левыми или правыми частными индексами матрицы $a(\lambda)$. Из представления (3.8) вытекает, что сумма

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j=\operatorname{ind}(\det a(\lambda))$$

не зависит от типа факторизации. Число $\varkappa$ называется индексом (суммарным) матрицы $a(\lambda)$. Левые и правые частные индексы, вообще говоря, не совпадают.

Факторизация функции $a(\lambda)$ позволяет строить обратные операторы к PaP и W_a (см. теоремы 3.3 и 3.5), если только символ $a(\lambda)$ нигде на контуре Γ не обращается в нуль. Аналогичные утверждения верны и в случае $a\in\Pi C(\mathbb{R})$, нужно только распространить на такие функции понятие символа. Символом оператора $A=PaP$,

$a \in \Pi C(\mathbb{R})$, $P = 1/2(I+S_{\mathbb{R}})$, в пространстве $L_p^+(\mathbb{R}) = PL_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, назовем функцию $(x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \xi \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$:

$$A_p(x,\xi) = 1/2[\tilde{a}(x+0)+\tilde{a}(x-0)] + 1/2[\tilde{a}(x+0)-\tilde{a}(x-0)]\operatorname{cth}\Pi(\tfrac{i}{p}+\xi),$$
$$\tilde{a}(t\pm 0) = a(t\pm 0),\ t \in \mathbb{R};\ \tilde{a}(\infty \pm 0) = a(\pm\infty).$$

Это определение согласуется с определением символа в случае функций $a \in C(\mathbb{R})$. Действительно, в точках непрерывности $x \in \mathbb{R}$ функции $a \in \Pi C(\mathbb{R})$ имеем $A_p(x,\xi) = a(x)$. Образ $A_p(x,\xi)$ описывает на комплексной плоскости непрерывную замкнутую кривую. В самом деле, функция $a(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрывов первого роде $a(x_k-0) \neq a(x_k+0)$ $(x_k \in \mathbb{R}, k=1,2,\ldots)$. Эти разрывы соединяются с помощью функции $\operatorname{cth}\pi(i/p+\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, так как $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\operatorname{cth}\pi(i/p+\lambda) = \pm 1$. Из двух дуг, соединяющих точки

$a(x_k+0)$ и $a(x_k+0)$, выбираем ту, которая расположена слева (справа) от отрезка прямой, соединяющего точки $a(x_k-0)$ и $a(x_k+0)$ при $p<2$ $(p>2)$, при $p=2$ дуга совпадает с этим отрезком, ориентированным от $a(x_k-0)$ к $a(x_k+0)$. На рис. 4 изображена кривая $A_p(x,\xi)$ для функции $a(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda)$ в окрестности точки $x=0$. Жирной линией обозначена кривая $A_p(x,\xi)$ в окрестности точки разрыва x_k.

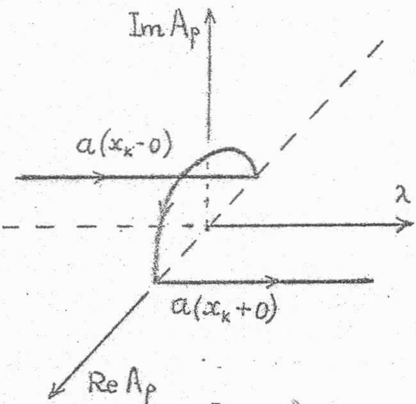

Рис.

Если для любых $x,\xi \in \mathbb{R}$ символ $A_p(x,\xi)$ не обращается в нуль, то можно определить индекс $\operatorname{ind} A_p$ функции $A_p(x,\xi)$ как приращение аргумента $(2\pi)^{-1}\arg A_p$, когда X пробегает $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ и в точках разрыва $x_k \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ параметр ξ пробегает $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ от $-\infty$ до $+\infty$.

<u>Теорема 3.7.</u> Пусть $a \in \Pi C(\mathbb{R})$. Для того чтобы оператор $A = PaP$ был нетеревым в пространстве $L_p^+(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы $\inf|A_p(x,\xi)| > 0$, $(x,\xi \in \mathbb{R})$. Если это условие выполнено, то обратимость A согласована с числом $-\operatorname{ind} A_p(x,\xi) = \operatorname{ind} A$ и для

обратных операторов имеют место формулы

$$A_\ell^{-1} = Pr_{-\varkappa} Pa_+^{-1} Pa_-^{-1} P,\ A_r^{-1} = Pa_+^{-1} Pa_-^{-1} Pr_{-\varkappa} P,\ r_n = \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n .$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [37].

Символ оператора W_a, $a \in \Pi C(\mathbb{R})$, удобнее определить следующим образом:

$$a_p(t,\xi) = \frac{1}{2}[\tilde{a}(t-0) + \tilde{a}(t+0)] + \frac{1}{2}[\tilde{a}(t-0) - \tilde{a}(t+0)]\, cth\,\pi\left(\frac{i}{p} + \xi\right).$$

Нетрудно заметить, что

$$cth\,\pi\left(\frac{i}{p} + \xi\right) = \frac{sh\, 2\pi\xi - i\sin\frac{2\pi}{p}}{ch\, 2\pi\xi - \cos\frac{2\pi}{p}} ,$$

значит, $a_p(t,\xi) = A_{p'}(t,-\xi)$, $p' = p/(p-1)$ и при $a_p(t,\xi) \neq 0$ можно определить индекс $ind\, a_p = ind\, A_{p'}$. Имеет место аналог теоремы 3.5 (см. [37]).

Теорема 3.8. Пусть $a \in \Pi C(\mathbb{R})$. Для того чтобы W_a оператор был нетерев в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\inf |a_p(t,\xi)| > 0$ при $t,\xi \in \mathbb{R}$. Если это условие выполнено, то обратимость W_a согласована с числом $ind\, a_p = -ind\, W_a$.

Утверждения (3.7) и (3.8) оправдывают выбор функций $A_p(x,\xi)$ и $a_p(x,\xi)$ в качестве символов соответствующих операторов.

Замечание 3.4. Если выполнено условие $\inf |a_p(t,\xi)| = 0$, то оператор W_a не является нормально разрешимым, т.е. неверно, что уравнение $W_a x = y$ имеет решение $x \in L_p(\mathbb{R}_+)$ для всех y, ортогональных $Ker\, W_a^*$.

Теорема 3.7 позволяет свести сингулярное интегральное уравнение с разрывными коэффициентами к уравнению Фредгольма второго рода (см. конец § 2). При этом если функция $a(\lambda)$ допускает факторизацию, то она совпадает с обобщенной p-факторизацией. Некоторые конкретные примеры будут приведены в следующих параграфах.

§ 5. ЗАДАЧА О ВЕТВЯЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЕ

Исследование напряженно-деформированного состояния упругой плоскости, ослабленной системой гладких трещин, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений на отрезке. Формальный предельный переход к совокупности трещин, имеющих общие точки, приводит к интегральным уравнениям, содержащим операторы с неподвижными особенностями в ядре, соответствующими узлам трещин (см. [35]). Расчеты показывают, что решение этих уравнений верно описывает напряженно-деформированное состояние вдали от точек слияния трещин.

В настоящем параграфе предложен строгий вывод граничного интегрального уравнения, основанный на модификации метода конформных преобразований Н.И.Мусхелишвили на случай нарушения конформности отображающей функции на границе. При этом решение предложенных уравнений правильно описывает напряженно-деформированное состояние во всех точках упругой плоскости.

Пусть на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ проведен разрез Γ (рис. 5). Считаем, что $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ – область, содержащая бесконечно удаленную точку, и в некоторой окрестности V_z каждой точки $z\in\Gamma$ разрез Γ устроен следующим образом. Либо z – регулярная точка ($\Gamma\cap V_z$ – гладкая дуга, содержащая точку z внутри), либо z – концевая точка Γ, либо z - узловая точка Γ (т.е. $\Gamma\cap V_z=(\Gamma_n+z)\cap V_z$), где Γ_n – система n разрезов, выходящих из нуля. На окружности $|t|=1$ отмечены прообразы узловых точек контура Γ: $z_0=\omega(t_j)$ и $z_k=\omega(s_k)$, $j=1,2,\dots,6$; $k=1,2,3$.

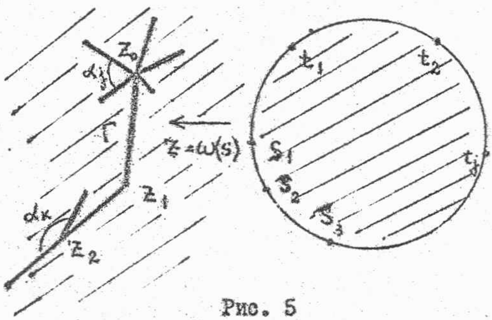

Рис. 5

Обозначим $z=\omega(s)$ – конформное преобразование единичного круга на $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

<u>Лемма 3.7</u>. Пусть $z_0\in\Gamma$ – узловая точка, α_i – углы между соседними разрезами, $t_j=\exp i\beta_j$ – прообразы узловой точки z_0, т.е. $z_0=\omega(t_j)$, $j=1,2,\dots,n$. Тогда существует аналитическая в некоторой окрестности точки t_j функция $g_j(s)$ такая, что

$$\omega(s)=z_0+(s-t_j)^{\alpha_j/\pi}g_j(s)\ ,\quad g_j(t_j)\neq 0\ ,\ j=1,2,3,\dots,n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каноническое отображение единичного круга на $\mathbb{C}\setminus(\Gamma_n+z_0)$ имеет вид

$$\omega_n(\zeta)=z_0+\frac{1}{\zeta}\prod_{j=1}^{n}(1-\zeta e^{-i\beta_j})^{\frac{\alpha_j}{\pi}}, \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=2\pi.$$

А так как по условию $\Gamma\cap V_z=(\Gamma_n+z_0)\cap V_{z_0}$, то локальные свойства функции $\omega(\zeta)$ в окрестности вершины каждого из углов раствора α_j $(j=1,..,n)$ совпадают с локальными свойствами канонического отображения $\omega_n(\zeta)$ (подробнее см. [34, с.I70, I7I]).

После замены переменных $z=\omega(\zeta)$ задача теории упругости в терминах комплексных потенциалов $\varphi(\zeta)=\varphi(\omega(\zeta))$ и $\psi(\zeta)=\psi(\omega(\zeta))$ примет вид

$$\varphi(t)+\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t), \quad |t|=1. \tag{3.8}$$

Дальнейшие рассмотрения этого параграфа основаны на специальных свойствах коэффициента при $\overline{\varphi'(t)}$.

По кривой Γ определим кусочно-постоянную неубывающую функцию $\alpha(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$, имеющую разрывы в прообразах угловых точек, равные величине соответствующего угла α_j. Для $t=e^{i\theta}$ положим $\eta(t)=exp\,2i\alpha(\theta)$, тогда функция $\eta(t)$ определена однозначно с точностью до мультипликативной постоянной. Заметим, что полная вариация функции $\alpha(\theta)$ равна $2\pi m$, где m – число узловых точек кривой Γ.

Лемма 3.8. В некоторой окрестности произвольной точки единичной окружности существует функция

$$\Phi_{t_0}(\zeta)=g_{t_0}(\zeta)\overline{h_{t_0}(\zeta)}, \quad h_{t_0}(t_0)=0,$$

для которой выполнено

$$\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}=\lim_{\substack{\zeta\to t\\ |\zeta|<1}}\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}=\frac{\omega(t_0)}{\overline{\omega'(t)}}+\eta(t)\Phi_{t_0}(t).$$

Функции $g_{t_0}(\zeta)$ и $h_{t_0}(\zeta)$ аналитичны при $\zeta=t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Временно под функцией z^{α}, $\alpha>0$, понимаем ветвь положительную на верхнем "берегу" разреза $(0,+\infty)$. Из леммы (3.7) следует, что

$$\omega'(\zeta)=(\zeta-t_j)^{\alpha_j/\pi}\cdot g_j'(\zeta)+\frac{\alpha_j}{\pi}(\zeta-t_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi}-1}\cdot g_j(\zeta)$$

в некоторой окрестности прообраза $t_0=t_j$ узловой точки контура Γ. Значит, при $\zeta\to t_j$, $|\zeta|<1$ имеем

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}-\frac{\omega(t_j)}{\overline{\omega'(\zeta)}}=\frac{(\zeta-t_j)^{\alpha_j/\pi}g_j(\zeta)}{(\bar\zeta-\bar t_j)^{\alpha_j/\pi}\overline{g_j'(\zeta)}+\frac{\alpha_j}{\pi}(\bar\zeta-\bar t_j)^{\alpha_j/\pi-1}\overline{g_j(\zeta)}}=$$

$$=\frac{(\bar\zeta-\bar t_j)g_j(\zeta)}{(\bar\zeta-\bar t_j)\overline{g_j'(\zeta)}+\frac{\alpha_j}{\pi}\overline{g_j(\zeta)}}\cdot\exp\left\{\frac{2\alpha_j}{\pi}i\arg(\zeta-t_j)\right\}.$$

Заметим, что функция $\arg(t-t_j)$, $|t|=1$, терпит разрыв первого рода в точке t_j со скачком π. Поэтому произведение

$$\exp\left\{\frac{2\alpha_j}{\pi}i\arg(t-t_j)\right\}$$ с функцией вида

$$\eta_j^{-1}(t)=\begin{cases}c_j^{-1}, & \operatorname{Im}(t-t_j)\geq 0,\ c_j\neq 0,\\ c_j^{-1}e^{-2i\alpha_j}, & \operatorname{Im}(t-t_j)<0,\end{cases}$$

совпадает на единичной окружности с ветвью функции $\zeta^{\alpha_j/\pi}$, аналитической в точке $\zeta=t_j$. Положим $g_{t_0}(\zeta)=\zeta^{\alpha/\pi}g_j(\zeta)$ и

$$h_{t_0}(\zeta)=\frac{(\zeta-t_0)}{(\zeta-t_0)g_j'(\zeta)+\frac{\alpha}{\pi}g_j(\zeta)},$$

где $\alpha=\pi$, если t_0 – прообраз регулярной точки Γ; $\alpha=\alpha_j$, если t_0 – прообраз точки, соответствующей углу α_j; $\alpha=2\pi$, если t_0 – прообраз концевой точки; $\zeta^{\alpha/\pi}$ – ветвь, аналитическая в точке t_0. Аналитичность функции $h_{t_0}(\zeta)$ следует из леммы 3.7, где установлено, что $g_j(t_j)\neq 0$. Итак, в малой окрестности произвольной точки t_0 единичной окружности выполнено соотношение

$$\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}=\frac{\omega(t_0)}{\overline{\omega'(t)}}+\eta(t)g_{t_0}(t)\overline{h_{t_0}(t)}.$$

Пусть теперь $\{V_{x_k}\}$, $|x_k|=1$ – конечное покрытие единичной окружности такое, что среди точек $\{x_k\}$ содержатся все прообразы всевозможных угловых точек контура Γ; функции $g_{x_k}(\zeta)$ и $h_{x_k}(\zeta)$ аналитичны в V_{x_k} соответственно. Различные $\varphi_{x_k}(\zeta)$, определяемые локально при $\zeta \in V_{x_k}$, связаны между собой следующим образом:

$$\Phi_{x_{k+1}}(t) = \Phi_{x_k}(t) + \frac{\omega(x_k) - \omega(x_{k+1})}{\eta(t)\,\overline{\omega}'(t)}, \quad |t| = 1, \quad t \in V_{x_k} \cap V_{x_{k+1}}.$$

Функция $\eta(t)$ нормирована условием $\eta(t_0) = 1$, t_0 – некоторая точка единичной окружности, не являющаяся прообразом узловой точки, определяется по контуру однозначно и не зависит от выбора покрытия $\{V_{x_k}\}$.

Замечание 3.6. При $\Gamma = \Gamma_n$, $\omega(\zeta) = \omega_n(\zeta)$, $z_0 = 0$,

$$\frac{\omega_n(t)}{\overline{\omega}_n'(t)} = \eta(t)\frac{P_n(t)}{Q_{n+1}(t)}; \qquad |t| = 1,$$

все нули полинома $P_n(t)$ – прообразы узловых точек; нули полинома $Q_{n+1}(t)$ – точка нуль и все прообразы концевых точек контура Γ_n.

Лемма 3.9. Пусть $\rho(t) \in H_\delta(\gamma)$, γ – простая дуга единичной окружности, $g(\zeta)$ – функция аналитическая в окрестности γ, тогда для внутренних точек $t_0 \in \gamma$ выполнено

$$\lim_{r\to 1}\int_\gamma \frac{g(t)-g(rt_0)}{(t-rt_0)^2}\rho(t)\,dt = \pi i g'(t_0)\rho(t_0) + \int_\gamma \frac{g(t)-g(t_0)}{(t-t_0)^2}\rho(t)\,dt.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что аналитические функции

$$\Phi_1(\zeta) = \int_\gamma \frac{g(t)-g(\zeta)}{(t-\zeta)^2}\rho(t)\,dt \qquad \Phi(\zeta) = \int_\gamma \left[\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right]\frac{\rho(t)}{t-\zeta}\,dt$$

имеют одинаковые радиальные пределы при $\zeta \to t_0$. Пусть $R > 0$ - радиус круга аналитичности функции $g(\zeta)$ в точке t_0. Часть дуги γ, содержащуюся в круге радиуса R с центром в точке t_0, обозначим той же буквой γ; a_n – коэффициенты ряда Тейлора функции $g(\zeta)$, $\zeta = t_0$:

$$|\Phi_1(\zeta) - \Phi(\zeta)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\gamma \frac{\rho(t)}{t-\zeta}\left[\frac{(t-t_0)^n - (\zeta-t_0)^n}{t-\zeta} - (t-t_0)^{n-1}\right]dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\gamma \frac{\rho(t)}{t-\zeta}\left[n\int_0^1 [(1-\theta)\zeta + \theta t - t_0]^{n-1}d\theta - (t-t_0)^{n-1}\right]dt\right| =$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)\int_{\gamma}\frac{\rho(t)}{t-s}\left[\int_0^1\int_r^1 [(1-\theta)\tau t_0+\theta t-t_0]^{n-2}t_0(1-\theta)d\tau d\theta\right]dt\right|.$$

Точка $[(1-\theta)\tau t_0+\theta t-t_0]$ лежит внутри круга радиуса $R_0<R$ при $\theta\in[0,1]$, $\tau\in[r,1]$, следовательно,

$$|\Phi_1(s)-\Phi(s)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n(n-1)R_0^{n-2}\max_{t\in\gamma}|\rho(t)|\int_r^1\int_{\gamma}\frac{|dt|}{|t-s|}d\tau.$$

Осталось заметить, что $|t-s|=|e^{i\theta}-re^{i\theta_0}|=$

$$=\sqrt{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}=\sqrt{(1-r)^2+2r(1-\cos(\theta-\theta_0))}\geqslant(1-r),$$

$$(1-r)\int_{\gamma}\frac{|dt|}{|t-s|}\leq\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}\frac{(1-r)d\theta}{\sqrt{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}}+|\gamma|\frac{(1-r)}{\sqrt{1-2r\cos\varepsilon+r^2}}\leq 2\varepsilon+O_{\varepsilon}(|1-r|).$$

Последнее неравенство справедливо для произвольного $\varepsilon>0$, значит, $|\Phi_1(s)-\Phi(s)|\to 0$ при $r\to 1$.

Используя леммы (3.8) и (3.9), выведем интегральное уравнение плоской задачи теории упругости для плоскости, ослабленной ветвящейся трещиной Γ. Обозначим $R_n(t)$ полином степени n, обращающийся в нуль в тех прообразах узловых точек t_j, для которых соответствующие углы $\alpha_j>\pi$ ($\omega'(t_j)=0,\omega(t_j)\neq 0$). Обе части (3.8) умножим на $\overline{R_n(t)}[2\pi i(t-s)]^{-1}$ и проинтегрируем по единичной окружности $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{S}}\overline{R_n}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\varphi(t)}{t-s}dt+\int_{\mathcal{S}}\overline{R_n(t)}\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\frac{\overline{\varphi'(t)}}{t-s}dt=\int_{\mathcal{S}}\overline{R_n(t)}\frac{f(t)}{t-s}dt=2\pi i F(s). \quad (3.9)$$

Здесь использовался произвол в выборе $\Psi(0)$, принято $\Psi(0)=0$. Первое слагаемое в левой части (3.9) равно

$$2\pi i\,\varphi(s)\overline{R_n}\left(\frac{1}{s}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}c_k s^{-k},\qquad c_k=\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\overline{R_n^{j}(0)}}{j!\,(j-k)!}\int_{|t|=1}\frac{\varphi'(t)}{t^{j-k}}dt.$$

Далее воспользуемся леммой (3.8). Пусть $\{\gamma_k\}_{k=0}^{N}$ – простые дуги единичной окружности; $\{\Phi_{x_k}(s)\}_{k=0}^{N}$, $|x_k|=1$, $g_{x_k}(s)$ и $h_{x_k}(s)$–

аналитичны в окрестности γ_k соответственно, $\eta(t)$ – постоянна при $t\in\gamma_k$, $\Phi_{x_k}(x_k)=0$, $k=0,\dots,N$. Кроме того, пусть $\bigcup\limits_{k=0}^{N}\gamma_k=S$ и различные дуги γ_k имеют не более одной общей точки из совокупности $\{x_k\}_{k=0}^{N}$. Если t_0 – внутренняя точка γ_k, то второе слагаемое в левой части (3.9) представимо в виде

$$\mathfrak{I}_k(\zeta)=\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\overline{R_n(t)}\,\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\,\frac{\overline{\varphi'(t)}}{t-\zeta}\,dt+\int\limits_{\gamma_k}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}}{t-\zeta}\left[\frac{\omega(x_k)}{\overline{\omega'(t)}}+\eta(t)\Phi_{x_k}(t)\right]dt.$$

Разделим обе части уравнения (3.9) на $\overline{R_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, продифференцируем по ζ и затем умножим на $\overline{R^2_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, тогда

$$\overline{R^2_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left\{\overline{R^{-1}_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\mathfrak{I}_k(\zeta)\right\}'_\zeta=\overline{R_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\mathfrak{I}'_k(\zeta)-\left[\overline{R_n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]'_\zeta\cdot\mathfrak{I}_k(\zeta).$$

Прежде, чем переходить к пределу при $\zeta\to t_0$, преобразуем слагаемое, содержащее $\mathfrak{I}'_k(\zeta)$:

$$\mathfrak{I}'_k(\zeta)=\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\overline{R_n(t)}\,\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\,\frac{\overline{\varphi'(t)}}{(t-\zeta)^2}\,dt-\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}\,\omega(x_k)}{\overline{\omega'(t)}(t-\zeta)^2}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\gamma_k}\frac{\eta(t)[\Phi_{x_k}(t)-\Phi_{x_k}(\zeta)]}{(t-\zeta)^2}\,\overline{R_n(t)\varphi'(t)}\,dt-\Phi_{x_k}(\zeta)\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\frac{\eta(t_0)\overline{R_n(t)\varphi'(t)}}{(t-\zeta)^2}\,dt.$$

Здесь использована аналитичность функций $\omega'(\zeta)$, $R_n(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$ при $|\zeta|<1$. Так как

$$\Phi_{x_k}(t)-\Phi_{x_k}(\zeta)=[g_{x_k}(t)-g_{x_k}(\zeta)]\overline{h_{x_k}(t)}+g_{x_k}(\zeta)[\overline{h_{x_k}(t)}-\overline{h_{x_k}(\zeta)}],$$

то достаточно установить применимость леммы 3.9 к функции $\overline{h_{x_k}(\zeta)}$. Имеем при $\zeta=r t_0$, $|t_0|=1$, $\rho(t)=\overline{R_n(t)\varphi'(t)}$

$$\int\limits_{\gamma_k}\frac{\overline{h_{x_k}(t)}-\overline{h_{x_k}(\zeta)}}{(t-\zeta)^2}\,\rho(t)\,dt=\overline{\int\limits_{\gamma_k}\frac{h_{x_k}(t)-h_{x_k}(\zeta)}{(\bar t-\bar\zeta)^2}\,\bar\rho(t)\,d\bar t}=$$

$$=-\overline{\int\limits_{\gamma_k}\frac{[h_{x_k}(t)-h_{x_k}(rt_0)]\,t^2\,\bar\rho(t)}{r^2(r^{-1}t_0-t)^2}\,dt}=-\overline{\int\limits_{\gamma_r}\frac{h_{x_k}(t)-h_{x_k}(r^{-1}t_0)}{r^2(r^{-1}t_0-t)^2}\,t^2\,\bar\rho(t)\,dt}+$$

$$+\overline{[h_{x_k}(r^{-1}t_0)-h_{x_k}(rt_0)]}\cdot\int\limits_{\gamma_k}\frac{\rho(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}.$$

Снова, учитывая аналитичность $R_n(S)\varphi'(S)$, $|S|<1$, находим, что второе слагаемое в последнем равенстве стремится к нулю при $r\to 1$. Итак, для функции $\Phi x_k(S)$ справедливо утверждение леммы 3.9. Переходя к пределу при $r\to 1$, получаем

$$\mathcal{J}'_k(t_0)=\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\overline{R_n(t)}\,\frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}}\,\frac{\overline{\varphi'(t)}}{(t-t_0)^2}\,dt-\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}\omega(x_k)}{\overline{\omega'(t)}(t-t_0)^2}\,dt\;+$$

$$+\pi i\eta(t_0)\Phi'_{x_k}(t_0)\overline{R_n(t_0)\varphi'(t_0)}+\int\limits_{\gamma_k}\frac{\eta(t_0)[\Phi x_k(t)-\Phi x_k(t_0)]}{(t-t_0)^2}\,\overline{R_n(t)\varphi'(t)}\,dt-$$

$$-\Phi x_k(t_0)\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\frac{\eta(t_0)\overline{R_n(t)\varphi'(t)}}{(t-t_0)^2}\,dt=\pi i\eta(t_0)\Phi'_{x_k}(t_0)\overline{R_n(t_0)\varphi'(t_0)}\;+$$

$$+\int\limits_{\gamma_k}\frac{\eta(t_0)[\Phi x_k(t)-\Phi x_k(t_0)]}{(t-t_0)^2}\,\overline{R_n(t)\varphi(t)}\,dt+\int\limits_{S\setminus\gamma_k}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}}{(t-t_0)^2}\Big[\frac{\omega(t)-\omega(x_k)}{\overline{\omega'(t)}}-$$

$$-\Phi x_k(t_0)\cdot\eta(t_0)\Big]dt.$$

Обозначив через $\mathbb{T}$ интегральный оператор с ограниченным ядром, имеем граничное интегральное уравнение на единичной окружности

$$\varphi'(t_0)[\overline{R_n(t_0)}]^2+\frac{1}{2}\,\overline{\varphi'(t_0)R_n(t_0)}\Big[\overline{R_n(t_0)}\eta(t_0)\Phi'_{x_k}(t_0)-(\overline{R_n(t)})'_{t_0}\frac{\omega(t_0)}{\overline{\omega'(t_0)}}\Big]+$$

$$+\frac{\overline{R_n(t_0)}}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}}{(t-t_0)^2}\Big[\frac{\omega(t)-\omega(x_k)}{\overline{\omega'(t)}}-\Phi x_k(t_0)\eta(t_0)\Big]dt-\frac{(\overline{R_n(t)})'_{t_0}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{S}\frac{\overline{R_n(t)\varphi'(t)}\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}(t-t_0)}\,dt+(\mathbb{T}'\varphi)(t_0)=[\overline{R_n(t_0)}]^2\Big[\frac{F(S)}{R_n(S^{-1})}\Big]'_{S=t_0}=G(t_0),\ t_0\in\gamma_k.$$

В частности, при $\Gamma=\Gamma_n$, $\omega(S)=\omega_n(S)$, $z_0=0$, на основании замечания (3.6) положим $\overline{R}_n(t)=\partial_{n+1}(t)$, тогда интегральное уравнение примет вид

$$(\mathbb{A}\varphi')(t_0)+(\mathbb{T}\varphi')(t_0)+\frac{P_n(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\eta(t)-\eta(t_0)}{(t-t_0)^2}\,\overline{\varphi'(t)R_n(t)}\,dt=G(t_0),\qquad(3.10)$$

где $\mathbb{A}$ – сингулярный интегральный оператор на единичной окружности, $P_n(t)$ – полином, имеющий простые нули в точках разрыва функции $\eta(t)$.

Уравнение (3.10) является сингулярным интегральным уравнением с неподвижными особенностями (в точках разрыва функции $\eta(t)$) и комплексным сопряжением. Кроме того, коэффициенты сингулярного оператора $\mathbb{A}$ содержат разрывные функции. Изложенная в § I–4 теория применима к исследованию скалярного аналога уравнения (3.I0). Наличие оператора комплексного сопряжения вносит дополнительные осложнения, рассматриваемые в следующем параграфе.

§ 6. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С СОПРЯЖЕНИЕМ

В пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$A = a(t)P + b(t)Q + (c(t)P + d(t)Q)V,$$

где a, b, c и d – непрерывные функции на контуре Γ, $V\varphi = \overline{\varphi}$ – оператор комплексного сопряжения, $P = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$, $Q = I - P$.

<u>Теорема 3.9</u>. Пусть Γ – замкнутая кривая Ляпунова. Для нетеровости оператора A с непрерывными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t)\overline{b(t)} - c(t)\overline{d(t)} \neq 0, \quad t \in \Gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых непрерывных операторов $X, Y, W, W^2 = I$ непосредственно убеждаемся в справедливости матричного тождества

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X+YW & 0 \\ 0 & X-YW \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ WIW & WXW \end{pmatrix}.$$

Если взять $X = aP + bQ$, $Y = cP + dQ$, $W = V$, то получим

$$H\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}H^{-1} = M = \begin{pmatrix} aP + bQ & cP + dQ \\ \bar{c}VPV + \bar{d}VQV & \bar{a}VPV + \bar{b}VQV \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = N^{-1}AN, \quad N\varphi = -i\varphi, \quad H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ V & -V \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что $VS_\Gamma + S_\Gamma V$ – интегральный оператор со слабой особенностью (его ядро допускает представления вида (I.8)), следовательно, он вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$. Значит, и операторы $(VS+SV)V=VSV+S$, $VPV-Q$, $VQV-P$ также вполне непрерывны.

В силу изложенного очевидно, что оператор

$$M=\begin{pmatrix} aP & cP \\ \bar{d}P & \bar{b}P \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} bQ & dQ \\ \bar{c}Q & \bar{d}Q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{c}(VPV-Q)+\bar{d}(VQV-P) & \bar{a}(VPV-Q+\bar{b}(VQV-P) \end{pmatrix}$$

лишь вполне непрерывным слагаемым T отличается от оператора

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix}P+\begin{pmatrix} b & d \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}Q.$$

Поэтому операторы A и $\widetilde{A}$ одновременного нетеровы или нет в пространствах $L_p(\Gamma)$ и $L_p^2(\Gamma)=L_p(\Gamma)\times L_p(\Gamma)$ соответственно. Символ $\widetilde{A}$ равен

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & d \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}\right]+\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & d \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}\right]\theta,\quad \theta=\pm 1.$$

и он не вырождается, если определитель символа всюду отличен от нуля, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix}=a\bar{b}-c\bar{d}\neq 0,\qquad t\in\Gamma.$$

Вычислим индекс оператора $\widetilde{A}$ в пространстве $L_p^2(\Gamma)$

$$\operatorname{Ind}\widetilde{A}=\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}=\operatorname{Ind}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}N^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}N\right)=$$

$$=\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}+\operatorname{Ind}N^{-1}+\operatorname{Ind}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}+\operatorname{Ind}N=$$

$$=\operatorname{Ind}\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}+\operatorname{Ind}\det\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}=2\operatorname{Ind}A.$$

Заметим, что условие гладкости контура Γ существенно использовалось при доказательстве полной непрерывности оператора $VS+SV$. Для полноты изложения приведем пример оператора, действующего на кусочно-гладком контуре, для которого утверждение теоремы 3.9 несправедливо. Контур Γ (рис.6) определим равенством $t=\exp(i\tau/4)\times\sqrt{2\cos(\tau/2)}$, $-\pi\le\tau\le\pi$, Γ – имеет

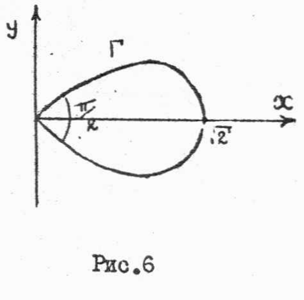

Рис.6

одну угловую точку $t = 0$. Можно доказать (см. [39]), что сингулярный оператор $A = I + \sqrt{2}\, S_\Gamma + V = (1+\sqrt{2})P_\Gamma + (1-\sqrt{2})Q_\Gamma + V$ не является нетеровым, хотя $\det(\mathrm{sym}\, A) = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - 1 = -2 \neq 0$. Важно отметить, что в скалярном случае ($c \equiv d \equiv 0$) условие нетеровости не зависит от наличия на Γ угловых точек.

На рис.7 приведены значения коэффициентов интенсивности K_I и K_{II} для двухзвенной ломаной трещины $\Gamma = \Gamma_2$. Уравнение (3.10) решалось методом механических квадратур (см. [34]).

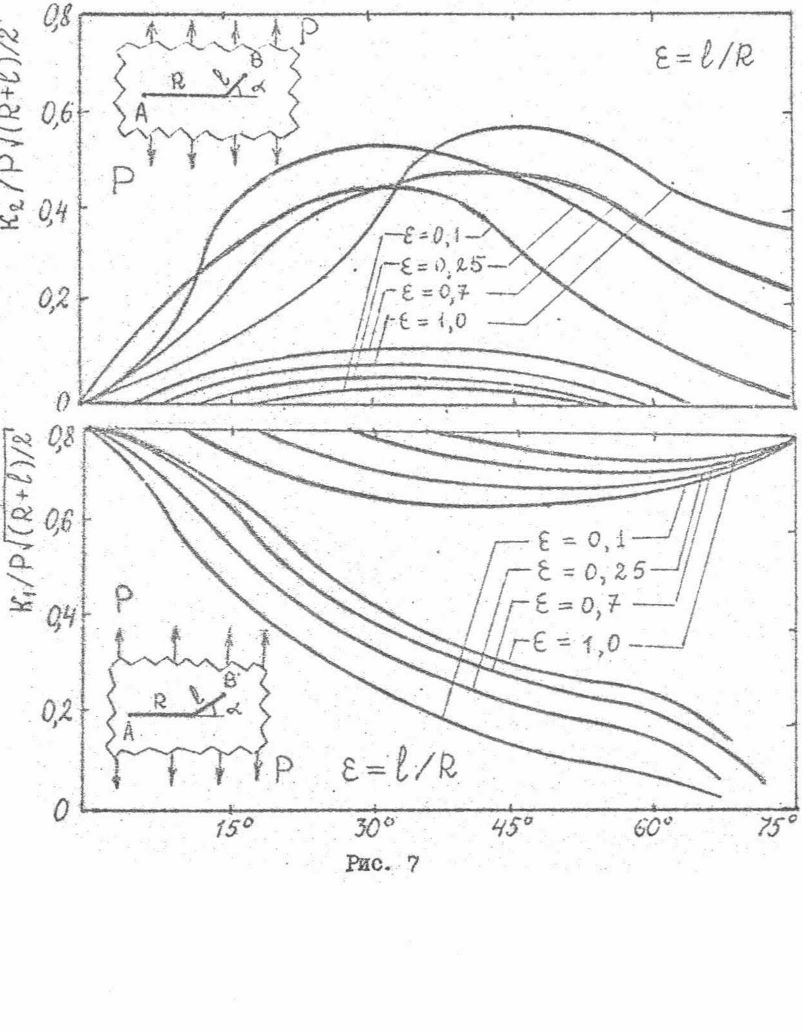

Рис. 7

§ 7. ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ, УПИРАЮЩЕЙСЯ В СЛОИСТУЮ СРЕДУ

Рассмотрим упругую среду, состоящую из нескольких слоев с различными упругими свойствами, ослабленную полубесконечной трещиной или угловым вырезом (рис.8). На границе выреза задаются условия в перемещениях, напряжениях или смешанного типа, так, что в области реализуется напряженно-деформированное состояние, плоская деформация или антиплоский сдвиг.

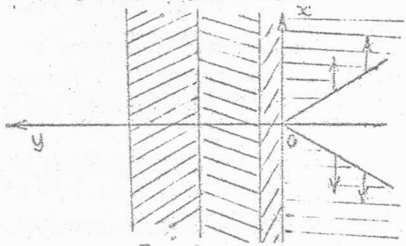

Рис.8

После применения интегральных преобразований Фурье (по x в области $y>0$) и преобразований Меллина (при $y<0$ в каждом угле) и их последующей склейке на границе $y=0$, указанные задачи теории упругости приводятся (см. [24, 3I]) к системе интегральных уравнений на полуоси ($x>0$, $y=0$) вида

$$(\mathbb{C}g)(\lambda) \equiv g(\lambda) + \int_0^\infty K(\lambda,\xi)\Psi(\lambda,\xi)L(\lambda,\xi)g(\xi)\,d\xi = f(\lambda). \qquad (3.\mathrm{II})$$

Здесь K, L – измеримые на $\mathbb{R}^2_+$ матрицы-функции n-го порядка, $\Psi(\lambda,\xi)$ – однородная степени -1 матрица-функция той же размерности $\Psi(\lambda,\xi)=\tau\Psi(\tau\lambda,\tau\xi)$, $\tau\geqslant 0$, удовлетворяющая при некоторых α, $\beta\in\mathbb{R}$ и любых i, j = I,2,... n, условиям:

$$\int_0^\infty |\Psi_{ij}(t,1)|\,\rho_{\alpha,\beta}(t)\frac{dt}{t}<\infty, \quad \rho_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}t^{\alpha}, & 0<t<1,\\ t^{\beta}, & 1<t<\infty.\end{cases}$$

Оператор $\mathbb{C}$ рассматривается в пространстве вектор-функций $L_{p,\rho}(\mathbb{R}_+)$ $\rho=\rho_{\alpha,\beta}$, с нормой

$$\|u\|^p_{p,\rho} = \sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty |u_j(\xi)|^p\rho^p_{\alpha,\beta}(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \quad 1\leq p<\infty.$$

Пусть P_1 и Q – характеристические функции промежутков (0, I) и (I ∞) соответственно $Q_1^a = P + Q_1 t^{-a}$, $Q_2^a = t^a P_1 + t^{-a} Q_1$

$$\omega_{\beta-\alpha}(\xi,\lambda)=\rho_{\alpha,\beta}(\lambda)\left[\rho_{\alpha,\beta}(\xi)\rho_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)\right]^{-1}.$$

Лемма 3.10. При $0 \le \xi, \lambda < \infty$ справедливо тождество

$$\omega_{\beta-\alpha}(\xi, \lambda) = P_1(\lambda)P_1(\xi)\,\Theta_1^{\beta-\alpha}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) + Q_1(\lambda)Q_2(\xi)Q_1^{\beta-\alpha}\left(-\frac{\xi}{\lambda}\right) + $$
$$+ [P_1(\lambda)Q_1(\xi) + Q_1(\lambda)P_1(\xi)]\,Q_2^{\beta-\alpha}(\xi).$$

Доказательство следует из определения $\omega_{\beta-\alpha}$. Введем в рассмотрение множество $\mathcal{L}$, являющееся замыканием по норме пространства $L_\infty(\mathbb{R}^2_+)$ функций вида

$$f(\lambda, \xi) = \sum_{i=1}^{N} f_{1i}(\lambda) f_{2i}(\xi) f_{3i}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right), \quad f_{ji} \in L_\infty(\mathbb{R}^1_+),\ j = 1, 2, 3.$$

Пусть далее $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ выделяется условием

$$\lim_{\lambda, \xi \to \infty} \sup |f(\lambda, \xi)| = 0.$$

Теорема 3.10. Если выполнено условие

$$\|\Psi_{ij}\|_{1,g} \cdot \omega_{\beta-\alpha} \cdot K_{qi} \cdot L_{jr} \in \mathcal{L}_0 \quad (i, j, q, r = 1, 2, \ldots, n),$$

то оператор $\mathbb{C} - I$ вполне непрерывен в $L_{p,g}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 3.11. Если функции $\|\Psi_{ij}\|_{1,g}\ \omega_{\beta-\alpha}\ K_{q,i} \cdot L_{jr}$ $(i, j, q, l = 1, \ldots, n)$ представимы в виде

$$P_1(\lambda)P_1(\xi)K_1\left(\frac{1}{\xi}\right) + Q_1(\lambda)Q(\xi)K_2\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) + K_3(\xi, \lambda),$$

где $K_1, K_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^1_+)$, $K_3 \in \mathcal{L}_0$, то существует замена переменных, при которой ограниченный в $L_{p,g}(\mathbb{R}^1_+)$ оператор $\mathbb{C}$ с точностью до вполне непрерывного слагаемого представим в виде парного интегрального оператора на вещественной оси: $PC_1 + QC_2$ $(Q = I - P)$, C_1 и C_2 – ограниченные операторы в $L_p(\mathbb{R})$, P – оператор умножения на характеристическую функцию промежутка $(0, +\infty)$.

Доказательства теорем можно найти в работе [31]. Теория парных интегральных уравнений хорошо разработана [32], используя ее результаты для каждого конкретного случая, проверяется нетеровость уравнения (3.11), устанавливается асимптотика решения и применимость проекционных методов численного решения.

В частности, задача об антиплоском сдвиге трещины, упирающегося в слоистую среду (см.рис.9) сводится к решению интегрального уравнения (3.II) с оператором

$$(\mathbb{C}g)(1) = \frac{\mu}{\pi}\int_0^\infty K(\lambda,\xi)\Psi(\lambda,\xi)g(\xi)d\xi \;, \; \lambda>0.$$

Здесь $K(\lambda,\xi)$ – некоторая непрерывная функция $K(0, 0) = I$, $|K(\lambda,\xi)| \leq M\exp(-2\xi h_1)$, $\lambda,\xi>0$, $h_1>0$ – ширина первой полосы,

$$\Psi(\lambda,\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)^s \frac{ds}{\varkappa-\cos\pi s} \;, \quad \lambda,\xi>0,$$

константы μ и $\varkappa$ зависят от упругих постоянных среды (подробнее см.[3I]). В силу общей теоремы 3.II существует замена переменных, приводящая уравнение (3.II) с данными K и Ψ к виду

$$g(t) + \frac{\mu}{\pi}\int_0^\infty \Psi(e^{-(t-s)},1)g(s)ds + (\mathbb{K}g)(t) = f(t),$$

где $\mathbb{K}$ – некоторый вполне непрерывный оператор, определяемый по функциям $K(\lambda,\xi)$ (см.[3I]).

Такого вида интегральные уравнения рассматривались в § 3, гл.Ш. Символ соответствующего оператора W_a равен

$$a(t) = 1-\mu N(t) \;, \quad N(t) = (ch\pi t - \varkappa)^{-1}.$$

Очевидно, что при $\mu<1-\varkappa$ на вещественной прямой нет корней уравнения $1-\mu N(t)=0$. А так как при достаточно малых $|\mu|$ уравнение имеет единственное решение в классе $L_p(\mathbb{R}_+)$, то по теореме 3.5 индекс соответствующего оператора W_a равен нулю. При $\mu \geqslant 1-\varkappa$ комплексные корни уравнения $1-\mu N(z)=0$ имеют вид

$$z_k^{\pm} = \pi^{-1}\ln\left(\varkappa+\mu \pm \sqrt{(\varkappa+\mu)^2-1}\right) + 2ik \;, \quad k=0,\pm1,\dots \;.$$

Из механических соображений значение параметра μ не превосходит величины $1-\varkappa$.

Приведем примеры вычисления коэффициента интенсивности K_{III} в задаче об антиплоском сдвиге среды, изображенной на рис. 9 (см. табл.). Расчеты проводились проекционным методом, на каждом шаге интегральный оператор (3.I2) дискретизировался на промежутке $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$ по методу Симпсона в логарифмической шкале. Контролировалось вычисление нормы оператора $\mathbb{C}$ и относительная погрешность коэффициента интенсивности.

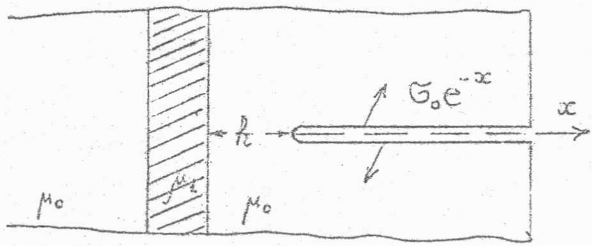

Рис. 9

	h	$\|C\|_{1,p,0}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_0}K_{III}$	$\frac{\Delta K_{III}}{K_{III}}$	$1/\varepsilon$	t, мин
$\mu_1=40\mu_0$	I0	0,5	0,159I74	0,00I5	$3{,}2\cdot 10^4$	I2
	I	0,5	0,160366	0,0032	$3{,}2\cdot 10^4$	II,5
	0,I	0,5	0,I7925	0,022	$3{,}2\cdot 10^4$	I2
	0,0I	0,5	0,27387	0,0I7	$6{,}4\cdot 10^4$	I4
$\mu_0=40\mu_1$	I0	0,5	0,I59I3	0,00I9	$3{,}2\cdot 10^4$	II
	I	0,5	0,I57964	0,00I5	$3{,}2\cdot 10^4$	II
	0,I	0,5	0,I4I9677	0,00I9	$1{,}6\cdot 10^4$	9,5
	0,02	0,5	0,095	$5\cdot 10^{-3}$	10^4	9

ЛИТЕРАТУРА

I. ГАБДУЛХАЕВ Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, I980.

2. ГУРСА Э. Курс математического анализа. Т.III. Ч.2 /Пер. с франц. М.;Л., I934.

3. КАНТОРОВИЧ Л.В., КРЫЛОВ В.И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 3-е. М.; Л., I949.

4. МИХЛИН С.Г. Интегральные уравнения и их приложения. М.;Л., I949.

5. МИХЛИН С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., I959.

6. МИХЛИН С.Г. Многомерные сингулярные интегральные уравнения. М., I962.

7. МИХЛИН С.Г. Погрешности вычислительных процессов. Тбилиси, 1983.

8. MICHLIN S.G., PRÖSDORF S. Singuläre Integraloperatoren, Berlin, 1980.

9. МИХЛИН С.Г., СМОЛИЦКИЙ Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.

10. МУСХЕЛИШВИЛИ Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.,1968.

11. ПАРТЕН В.З., ПЕРЛИН П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977.

12. PRÖSDORF S., SILBERMANN B. Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen. Leipzig,1977.

13. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики. Т.IV. М.;Л., 1951.

14. ТРИКОМИ Ф.ДЖ. Интегральные уравнения /Пер. с англ. М., 1960.

15. ГЮНТЕР Н.М. Теория потенциала и ее применение к задачам математической физики. М.;Л., 1953.

16. КУПРАДЗЕ В.Д., ГЕГЕЛИЯ Т.Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ М.О., БУРЧУЛАДЗЕ Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., 1976.

17. ПАРТОН В.В., ПЕРЛИН П.И. Методы математической теории упругости. М., 1981.

18. КОНДРАТЬЕВ В.А., ОЛЕЙНИК О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях.- Успехи мат.наук, 1983, т.38, № 2 (230), с. 3-76.

19. ЛАЗАРЕВ М.И. Метод граничных интегральных уравнений. Алгоритмы и их решения. Препринт НИВЦ АН СССР, Пущино, 1984, 53 с.

20. ГЮНТЕР Н.М. О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде.- Журн.Ленингр.физ.-мат.об-ва, 1926, т.I, вып.I, с.12-36.

21. Метод граничных интегральных уравнений /Под ред. Р.В.Гольдштейна. М., 1978.

22. ВЕРЮЖСКИЙ Ю.В. Применение метода потенциала для решения задач теории упругости. Киев, 1975.

23. МАЗЬЯ В.Г., ПЛАМЕНЕВСКИЙ Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек.- Докл. АН СССР, 1974, т.219, № 2, с.286-289.

24. МОРОЗОВ Н.Ф. Нематические вопросы теории трещин. М., 1984.

25. МОРОЗОВ Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.

26. ЛИНЬКОВ А.М. Задачи теории упругости для плоскости с конечным числом криволинейных разрезов.- В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Вып.II. Л., 1976, с. 3-II.

27. ПОБЕДРЯ Б.Е. Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях. Докл. АН СССР, т.253, № 2, 1980, с.295-297.

28. МАЗЬЯ В.Г. О свойствах решений трехмерных задач теории упругости в областях с коническими точками.- В кн.: Аннотация докладов школы-конференции по теории упругости. Телави-Тбилиси, 1981, с.55-56.

29. ЗАРГАРЯН С.С. Интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для многосвязных областей с углами. - Изв. АН СССР, МТТ, 1982, № 3, с.87-98.

30. ХРАПКОВ А.А. Задачи об упругом равновесии бесконечного с несимметричным разрезом в вершине, разрешаемые в замкнутом виде. - Прикл.матем.мех., 1971, т.35, вып.6, с.1062-1069.

31. МИШУРИС Г.С., ПАУКШТО М.В. Об антиплоском сдвиге клина упирающегося в слоистую среду. - В кн.: Колебания и устойчивость механических систем. Л., 1982, с.215-221.

32. КРЕЙН М.Г. Интегральные уравнения на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов, - Успехи мат.наук, 1958, т.13, вып.5 (83), с.3-120.

33. НАЗАРОВ С.А., ПАУКШТО М.В. Дискретные модели и осреднения в задачах теории упругости. Уч.пособие. Л., 1984.

34. АФЯН Б.А , ПАУКШТО М.В. О методе Н.Н.Мусхелишвили в теории ветвящихся трещин. - В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тбилиси, 1984, с. 14-15.

35. САВРУК М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, 1978.

36. МАТЕХИН Н.А., МОРОЗОВ Н.Ф., ПАУКШТО М.В. О некоторых прямых схемах метода потенциала.- Докл. АН СССР, 1986, т.288, № 2.

37. РЯБЕНЬКИЙ В.С. Граничные уравнения с проекторами.- Успехи мат. наук, 1985, т.40, вып.2, с.121-149.

38. ДУДУЧАВА Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики.- В кн.: Тр.Тбил.матем.ин-та, 1979, т.60, 135 с.

39. НЯГА В.И. О сингулярных интегральных уравнениях с сопряжением на контуре с угловой точкой.- В кн.: Мат.исследования, вып.73, Кишенев, 1983, с.47-50.

40. ПРЕСДОРФ З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.

41. МИХЛИН С.Г. Спектр пучка операторов теории упругости.- Успехи мат.наук, т.28, вып.3, 1973, с.43-82.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие 3

Глава I. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 4

§ I. Уравнения Фредгольма . . . . –

§ 2. Одномерные сингулярные интегралы I0

§ 3. Формулы Сохоцкого-Племели. I3

§ 4. Одномерные сингулярные уравнения на замкнутом контуре. I7

§ 5. Сингулярные уравнения на разомкнутом контуре. 24

§ 6. Двойные сингулярные интегралы. 27

§ 7. Двумерные сингулярные уравнения. 3I

§ 8. Приближенные решения интегральных уравнений. 33

Глава II. ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ 34

§ I. Формулы Бетти и интегральные представления решений основных задач 35

§ 2. Некоторые свойства потенциалов. Интегральные уравнения для тензоров Грина и Неймана. 37

§ 3. Исследование граничного интегрального уравнения определяющего тензор Грина . . . 40

§ 4. Исследование граничных интегральных уравнений второй основной задачи теории упругости. 45

§ 5. Некоторые прямые схемы метода потенциала . 48

Глава III. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН. 53

§ I. Одномерные сингулярные операторы в весовых классах. 54

§ 2. Обращение сингулярных операторов и факторизация функций 58

§ 3. Интегральные уравнения Винера-Хопфа. . . . 62

§ 4. Понятия обобщенной факторизации и факторизации матриц-функций 66

§ 5. Задача о ветвящейся трещине. 70

§ 6. Сингулярные интегральные операторы с сопряжением. 78

§ 7. Задача о трещине, упирающейся в слоистую среду 8I

ЛИТЕРАТУРА 84