С. Г. МИХЛИН

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

С. Г. МИХЛИН

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
М 69
УДК 519.3

Вариационные методы в математической физике. Михлин С. Г., изд. 2-е, переработанное и дополненное.

В книге изложено современное состояние общей теории вариационных методов для линейных задач и дан ряд приложений этой теории к более конкретным классам задач математической физики и теории упругости. Изложение базируется на элементах теории гильбертовых пространств; необходимые факты этой теории сообщаются без доказательств. Развивается энергетический метод для положительных и положительно определенных задач; этот метод конкретизируется для ряда одно- и многомерных задач математической физики. Изложен процесс Ритца для краевых задач и для задач о спектре; подробно исследована сходимость процесса Ритца.

Даны априорные и апостериорные оценки погрешности приближенного решения. Апостериорные оценки связаны с использованием «встречных методов», из которых обстоятельно рассмотрены метод ортогональных проекций и метод Трефтца. Существенно расширен вопрос о двусторонних оценках собственных чисел. Здесь большое внимание уделено весьма интересным результатам Г. Фикера и А. Вайнштейна.

Глава о численных примерах пополнена более сложной задачей трехмерной теории упругости, при решении которой использовано большое число (до 90) координатных векторов, выбранных так, чтобы обеспечить устойчивость вычислительного процесса.

Последние две главы (дополненные по сравнению с первым изданием) посвящены методу Бубнова — Галеркина и методу наименьших квадратов.

По сравнению с первым изданием книга содержит три новые главы: о только положительных операторах, об априорной оценке погрешности и о двусторонних оценках собственных чисел. Исключена стоявшая особняком глава о «методе прямых».

В книге 17 рис., библ. 202 названия.

Соломон Григорьевич Михлин

Вариационные методы в математической физике

М., 1970 г., 512 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 23/IV 1970 г. Подписано к печати 20/X 1970 г. Бумага 60×90 1/16. Физ. печ. л. 32. Усл. печ. л. 32. Уч.-изд. л. 29,18. Тираж 12 000 экз. Т-15455. Цена книги 2 р. 04 к. Заказ № 605.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

2-2-3
133—70

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

За двенадцать лет, протекших с момента написания первого издания, появилось много работ, посвященных вариационным методам, и изменились некоторые точки зрения.

Часть новых работ освещена в книге [26] автора, вышедшей в 1966 г.; другие работы, идейно более тесно связанные с данной книгой, заставили меня внести в новое издание ряд добавлений; в частности, написаны три новые главы: об энергетическом методе для только положительных операторов, об априорной оценке погрешности приближенного решения, о двусторонних оценках собственных чисел.

В первом варианте настоящей книги, написанном в 1948 г. и вышедшем в 1950 г. под названием «Прямые методы в математической физике», вариационные методы строились на базе теории операторов в гильбертовом пространстве. Изложений этой теории, достаточно доступных, скажем, для читателя с техническим образованием, тогда, по-видимому, еще не было, поэтому в упомянутый вариант была включена глава, в которой были даны элементы теории операторов.

Через некоторое время мне удалось найти способ изложить вариационные методы на значительно более элементарной основе. Так был написан второй вариант — первое издание настоящей книги, подготовленное в 1956 г. и вышедшее из печати в 1957 г.

За прошедшие с тех пор годы произошел ряд изменений. Повысился уровень математического образования инженеров-исследователей; одновременно появились более доступные изложения теории операторов. С другой стороны, хотя по-прежнему приближенное решение задач математической физики и механики деформируемых сред является острой необходимостью для инженеров, но развитие и распространение техники ЭВМ привело к тому, что фактическое решение таких задач все чаще осуществляют люди с математическим образованием, знакомые с функциональным анализом и теорией операторов.

Ко всему этому следует добавить, что появилось, особенно за последнее время, много интересных работ, которые не всегда хорошо укладываются в рамки элементарного изложения.

Перечисленные обстоятельства привели к тому, что я в значительной мере вернулся к точке зрения первого варианта книги. В настоящем издании вариационные методы вновь базируются на теории операторов в гильбертовом пространстве. Мне показалось удобным для читателя сохранить главу о теории операторов, но в сильно переработанном и сокращенном виде: в ней сохранены лишь определения и формулировки основных теорем и приведены поясняющие примеры, но полностью исключены доказательства.

Отказ от элементарного изложения позволил включить в книгу новый важный материал, в основном сконцентрированный в новых гл. V, VII, IX, но частично содержащийся и в других главах.

Новое изложение сделало ненужным часть материала первого издания. Я уже отметил, что сокращается глава о теории операторов; кроме того, первые две главы старого издания заменяются одной, посвященной понятию энергетического пространства.

Из нового издания исключена глава о конечно-разностных методах. Эта глава содержала обзорный параграф по методу сеток и несколько параграфов, посвященных «методу прямых».

Метод сеток имеет обширнейшую литературу, и один обзорный параграф немного даст читателю сегодня. Вместо него в гл. III введен параграф о вариационно-разностных схемах метода сеток; в этом параграфе устанавливается связь между методом Ритца и некоторыми сеточными схемами; эта связь, по-видимому, была впервые установлена Р. Курантом [2].

Что же касается метода прямых, то он не является вариационным; как теперь ясно, он является предельным случаем «метода интегральных соотношений», который восходит к Т. Карману и в последнее время разрабатывался А. А. Дородницыным и его учениками. Как мне кажется, метод интегральных соотношений заслуживает того, чтобы о нем написать особую книгу.

В новом издании по-прежнему теория вариационных методов строится только для линейных задач. Аналогичная теория для нелинейных задач изложена в последних главах книги автора [26].

В предисловии к первому изданию было указано, что для понимания основного материала книги достаточно знакомства с тт. 1 и 2 «Курса высшей математики» В. И. Смирнова (они обозначаются в тексте индексами С1 и С2). Для настоящего издания этот список необходимо несколько расширить: понадобится еще знание элементов линейной алгебры (линейные преобразования в конечномерных пространствах, матрицы, квадратичные формы). Необходимые сведения по этим разделам можно найти в книгах Ф. Р. Гантмахера [1], И. М. Гельфанда [1], Р. Куранта и Д. Гильберта [1], В. И. Смирнова [1].

Исторический очерк несколько расширен. Помимо работ, вышедших в промежутке между двумя изданиями, отмечены и некоторые старые работы, не названные в первом издании. В частности, кратко излагается содержание интересной работы順 Планшереля, о которой я, к сожалению, не знал до последнего времени.

С. Михлин

Ленинград,
октябрь 1969 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет результат существенной переработки книги автора, вышедшей в 1950 г. под названием «Прямые методы в математической физике». Переработка в основном произведена в двух направлениях. Прежде всего, важнейший из вариационных методов — энергетический — изложен для основных задач математической физики на более элементарной математической базе, без привлечения теории операторов в гильбертовом пространстве. Более общая точка зрения, естественно возникающая на основе уже накопленного материала, дается только в гл. VI. Автор надеется, что такая перестройка изложения сделает книгу доступной для более широкого круга читателей.

Другое изменение, которое кажется автору весьма важным, состоит в следующем. За последние несколько лет и у нас, и за границей появилось много работ, в которых изучается погрешность приближенного решения. Наличие этих работ позволяет изложить с необходимой для практики полнотой вопрос об оценке погрешности приближенного решения, даваемого энергетическим методом. Этому вопросу, который в книге «Прямые методы» был только намечен, в настоящей книге отводится особая большая глава.

Кроме указанных выше коренных изменений, выполнен еще ряд довольно важных, хотя и не столь значительных переделок.

Автор решил изменить название книги, так как почти вся она посвящена именно вариационным методам.

Прямым методам, которые не принадлежат к числу вариационных, а именно конечно-разностным, уделено совсем немного места: по отношению к методу сеток, хорошо освещенному в монографической литературе, автор ограничился перечислением основных результатов и литературными ссылками; что же касается «метода прямых», то он изложен только применительно к уравнению Лапласа и к бигармоническому уравнению. В таком виде метод прямых изложен лишь в журнальных статьях, поэтому автор сохранил соответствующую главу, хотя она и стоит особняком от остальных глав.

С. Михлин

Ноябрь 1956 г.

ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Задачи математической физики, а также теории упругости, гидродинамики и т. д. обычно сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных, реже — к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые надлежит интегрировать при соответствующих данной задаче начальных или краевых условиях. С прикладной точки зрения значительный интерес представляет вычисление численных, хотя бы и приближенных, значений искомых величин. Пожалуй, лучше всего для этой цели приспособлены так называемые *прямые методы*. Трудно дать определение, которое точно ограничивало бы эту группу методов. По определению С. Л. Соболева[1]) *прямыми называются такие методы приближенного решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений.* Из числа известных нам это определение является наиболее общим и полным; мы на нем и остановимся, хотя некоторые из методов, о которых будет идти речь ниже и которые мы считаем прямыми, трудно подвести под данное выше определение. Таков, например, метод Л. В. Канторовича (см. § 18).

В теории и в практике применения прямых методов мы часто сталкиваемся с одним фактом, имеющим первостепенное значение. Заключается этот факт в том, что во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения можно заменить равносильной задачей об отыскании функции, сообщающей некоторому интегралу наименьшее значение. Задачи такого типа называются *вариационными*; таким образом, упомянутый выше факт заключается в том, что во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения можно заменить некоторой равносильной вариационной задачей. Так, например, при обычных краевых условиях можно свести интегрирование уравнений статической теории упругости к отысканию минимума потенциальной энергии упругого тела. Методы,

[1]) См. курс С. Л. Соболева [1], изд. 1-е, 1947.

позволяющие свести задачу об интегрировании дифференциального уравнения к равносильной вариационной задаче, носят общее название *вариационных*. Наиболее важный из вариационных методов известен в технической литературе под названием *энергетического*. Это название кажется нам удачным, и мы будем его придерживаться. Подробно об энергетическом методе будет сказано в гл. III—VI.

Оказывается, что многие прямые методы удобнее применять не к дифференциальному уравнению непосредственно, а к равносильной вариационной задаче. Это относится прежде всего к известному методу Ритца, который является приближенным методом решения вариационных задач. Сказанным объясняется та тесная связь, которая существует между прямыми и вариационными методами.

Исторически впервые вариационный метод был сформулирован в виде так называемого «принципа Дирихле». Согласно этому принципу среди всех функций, которые принимают заданные значения на границе некоторой области Ω, та функция, которая сообщает так называемому «интегралу Дирихле»

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \tag{1}$$

наименьшее значение, является гармонической в Ω [1]).

Принцип Дирихле широко был использован Риманом в его работах по теории функций комплексной переменной. Риман считал очевидным, что функция, сообщающая интегралу Дирихле наименьшее значение, существует. Это вызвало критические замечания Вейерштрасса [1], который на простом примере показал, что *наименьшее значение интеграла может и не достигаться.*

Именно, Вейерштрасс рассмотрел следующую задачу [2]): среди функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющих на концах этого отрезка условиям

$$y(-1) = -1, \quad y(+1) = +1, \tag{2}$$

найти ту функцию, которая доставляет наименьшее значение интегралу

$$J(y) = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\,dx. \tag{3}$$

Значение интеграла $J(y)$ зависит от выбора функции $y(x)$; очевидно, $J(y) \geqslant 0$, так что интеграл (3) ограничен снизу (Cl, 39) и потому имеет

---

[1]) Для простоты мы рассматриваем случай плоской задачи.

[2]) Пример Вейерштрасса нами несколько упрощен в несущественных деталях.

точную нижнюю границу (Cl, 42). Докажем, что эта граница равна нулю; для этого достаточно убедиться, что можно найти такую функцию $y(x)$, которая удовлетворяет перечисленным выше условиям и которая сообщает интегралу $J(y)$ значение, меньшее, чем любое наперед заданное положительное число. Зададим число $\varepsilon > 0$ и положим

$$y_\varepsilon = \frac{\operatorname{arctg}(x/\varepsilon)}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)}.$$

Очевидно, функция y_ε непрерывна и непрерывно дифференцируема на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяет условиям (2). Далее,

$$J(y_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} x^2 y_\varepsilon'^2\,dx < \int_{-1}^{1} (x^2+\varepsilon^2)\,y_\varepsilon'^2\,dx = \frac{\varepsilon^2}{(\operatorname{arctg}(1/\varepsilon))^2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)}.$$

Отсюда видно, что $J(y_\varepsilon)$ будет сколь угодно малым, если ε достаточно мало. По определению точная нижняя граница интеграла $J(y)$ равна нулю. Однако не существует функции, непрерывной и непрерывно дифференцируемой на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющей условиям (2), которая обращала бы в нуль интеграл $J(y)$. Действительно, пусть $J(y) = 0$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то она должна тождественно равняться нулю. Тогда $y' = 0$ и $y = \text{const}$, что противоречит условиям (3).

Итак, может случиться, что интеграл не достигает своей нижней границы и соответствующая вариационная задача тогда не имеет решения. Это обстоятельство поставило принцип Дирихле под сомнение.

Значительно позже Адамар дал пример другого рода, показывающий, что принцип Дирихле может не иметь места по той простой причине, что гармоническая функция может обращать интеграл Дирихле в бесконечность. Приведем этот пример.

Нетрудно видеть, что ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2^{2n}}}{2^n}\cos(2^{2n}\vartheta); \qquad x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta \tag{4}$$

равномерно сходится в круге $\rho \leqslant 1$; его сумма гармонична внутри этого круга и непрерывна вплоть до контура. Однако интеграл Дирихле этой функции, взятый по кругу $\rho \leqslant r < 1$, равен

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} \infty.$$

Таким образом, гармоническую функцию (4) нельзя получить как решение вариационной задачи на основе принципа Дирихле.

Возражения Вейерштрасса привели к тому, что принцип Дирихле был надолго заброшен. Интерес к этому принципу и к вариационному методу вообще пробудился опять в начале

XX в. в связи с работами Гильберта и особенно после того, как В. Ритц [1] опубликовал в 1908 г. свой прием приближенного решения минимальных задач; интерес этот был особенно проявлен представителями прикладных наук, которым метод Ритца давал в руки удобное орудие для решения задач, до того совершенно недоступных. Появилось много работ, в которых с помощью метода Ритца строились приближенные решения тех или иных задач математической физики. В тех случаях, когда представлялась возможность сравнить такое приближенное решение с точным или с результатами эксперимента, совпадение обычно оказывалось удовлетворительным. Особенно хорошие результаты получались тогда, когда решалась краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения.

Ритц излагает свой метод следующим образом. Пусть поставлена вариационная задача для интеграла

$$J(w)=\int_a^b f(x,\ w,\ w',\ w'',\ \ldots,\ w^{(k)})\,dx. \tag{5}$$

Эта задача, как известно, состоит в следующем: рассматривается некоторый класс функций, обычно называемых допустимыми; в этом классе следует найти ту функцию, которая сообщает интегралу (5) меньшее значение, нежели любая другая допустимая функция.

Зададимся некоторой последовательностью функций

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n,\ \ldots, \tag{6}$$

которую подчиним двум требованиям: 1) при любом натуральном n и при любых значениях численных коэффициентов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ функция

$$w_n=\psi_0+a_1\psi_1+a_2\psi_2+\ \ldots\ +a_n\psi_n \tag{7}$$

принадлежит к классу допустимых; 2) какова бы ни была допустимая функция w, можно выбрать натуральное число n и численные коэффициенты $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ так, чтобы функция w_n, определяемая формулой (7), достаточно мало отличалась от функции w. Заметим тут же, что требование 2), обычно называемое *условием полноты*, нуждается в более точной формулировке. Ритц приводит необходимое уточнение для тех конкретных задач (см. ниже), к которым он применяет свой метод. Функции (6) Ритц назвал *координатными*.

В интеграл (5) подставим w_n вместо w, тогда J превращается в функцию чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Выберем эти числа так, чтобы $J(w_n)$ приобрело наименьшее значение; как известно, для этого необходимо, чтобы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial J(w_n)}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_n} = 0. \qquad (8)$$

Решив уравнения (8) и подставив полученные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в (7), получим функцию w_n, которую Ритц рассматривает как приближенное решение вариационной задачи.

То обстоятельство, что w зависит только от одной переменной x, не играет, очевидно, никакой роли: вычислительный процесс развивается так же и в том случае, когда w есть функция любого числа независимых переменных и, в соответствии с этим, интеграл $J(w)$ будет кратным.

В общем случае построение приближенного решения w_n наталкивается на довольно значительные вычислительные трудности, именно, на необходимость решать систему (8). Однако, если функция f под знаком интеграла (5) есть многочлен второй степени относительно w и ее производных, то уравнения (8) оказываются линейными и их решение представляет собой задачу сравнительно простую. Это имеет место каждый раз, когда вариационная задача связана с какой-либо *линейной* задачей математической физики.

В связи с методом Ритца необходимо разрешить следующий вопрос: в какой мере можно рассматривать w_n как приближение к истинному решению вариационной задачи? Этот вопрос об обосновании метода вряд ли можно решить в общем виде. Ниже, в гл. III—VI, обоснование метода Ритца будет дано для достаточно широкого класса линейных задач математической физики и теории упругости.

Сам Ритц хорошо понимал необходимость обоснования своего метода. В цитированной работе [1] Ритц кратко формулирует свой метод в общем виде и затем подробно исследует его сходимость для трех задач: 1) изгиб жестко закрепленной по краю упругой пластинки под действием нормального давления; 2) задача Дирихле для уравнения Лапласа; 3) краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В конце статьи дается применение метода к задаче о собственных колебаниях струны. Здесь автор не останавливается на вопросе о законности применения его метода, но показывает, что получаемые по этому методу приближенные значения собственных частот струны весьма близки к хорошо известным точным значениям. Заметим тут же, что в применении к задачам теории колебаний метод Ритца является далеко идущим обобщением так называемого «метода Релея» (см. Релей [1]). Более сложная по вычислениям задача о собственных колебаниях квадратной пластинки рассмотрена Ритцем в его статье [2].

Подробнее изложим одну из задач, изученных Ритцем, именно задачу о пластинке. В отдельных местах мы будем делать несущественные отступления от рассуждений или обозначений Ритца. Кроме того, кое-где придется уточнить сделанные им допущения. Мы будем также опускать некоторые даже и не очень очевидные детали доказательства, чтобы иметь возможность отчетливее выделить основные идеи.

Пусть в состоянии равновесия пластинка занимает область Ω плоскости (x, y), и пусть S — контур этой области. Пусть пластинка жестко закреплена по краю и подвержена действию нормального давления интенсивности $q(x, y)$. Нормальный прогиб пластинки, который мы обозначим через $w(x, y)$, удовлетворяет известному дифференциальному уравнению Софи Жермен

$$\Delta^2 w = f(x, y); \quad f(x, y) = \frac{1}{D} q(x, y) \tag{9}$$

внутри области Ω и краевым условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \tag{10}$$

на контуре S. Здесь ν — направление нормали к контуру, а D — жесткость пластинки при изгибе. Известно[1]), что задача об интегрировании уравнения (9) при краевых условиях (10) может быть сведена к следующей вариационной задаче: среди функций, удовлетворяющих краевым условиям (10)[2]), найти ту, которая сообщает наименьшее значение интегралу

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - fw\right] d\Omega. \tag{11}$$

Интеграл (11) только постоянным множителем отличается от потенциальной энергии изогнутой пластинки. Решая только что поставленную вариационную задачу, примем, что $f(x, y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема внутри и на контуре области пластины.

Пусть (x, y) и (ξ, η) — две точки этой области, и r — расстояние между ними.

Положим в (11) $w = w_1 + w_2$, где

$$w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{12}$$

---

[1]) Подробно см. ниже, § 30.

[2]) Это и будут допустимые функции нашей вариационной задачи.

Путем несложных тождественных преобразований устанавливается, что для любой допустимой функции $w(x, y)$ имеет место тождество

$$J(w) = J_0 + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_2)^2 \, dx \, dy, \tag{13}$$

где J_0 — некоторая постоянная. Так как интеграл в (13) очевидно неотрицателен, то

$$J(w) \geqslant J_0. \tag{14}$$

Таким образом, интеграл $J(w)$ ограничен снизу, если функция $w(x, y)$ принадлежит к классу допустимых, и потому этот интеграл имеет точную нижнюю границу. Наша вариационная задача состоит в отыскании такой допустимой функции, которая сообщает интегралу $J(w)$ значение, равное его точной нижней границе.

Чтобы построить приближенное решение задачи, выберем последовательность координатных функций

$$\psi_1(x, y), \ \psi_2(x, y), \ \ldots, \ \psi_n(x, y), \ \ldots, \tag{15}$$

подчиненных следующим требованиям:

1) функции $\psi_n(x, y)$ и их производные вида[1])

$$\frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k \, \partial y^l}, \quad k \leqslant 3, \ l \leqslant 3,$$

непрерывны внутри и на контуре области Ω;

2) координатные функции удовлетворяют краевым условиям (10);

3) пусть ζ — произвольная функция, непрерывная вместе со своими главными производными внутри и на контуре области Ω и равная тождественно нулю вне некоторого прямоугольника ρ, который целиком вместе со своим контуром лежит внутри Ω. Тогда можно подобрать такое целое число m и такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что имеют место неравенства

$$\left| \zeta - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \psi_i \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \, \partial y^l} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i}{\partial x^k \, \partial y^l} \right| < \varepsilon, \quad k \leqslant 3, \ l \leqslant 3, \tag{16}$$

где ε — сколь угодно малое заранее заданное положительное число (*условие полноты*).

Приближенное решение задачи ищем в виде

$$w_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \ldots + a_n \psi_n,$$

[1]) Эти производные Ритц называет *главными*.

где число слагаемых n выбирается по произволу, а постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — из условия, чтобы величина

$$J_n = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\Delta w_n)^2 - f w_n\right] dx\,dy$$

имела наименьшее значение. Уравнения (8) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где

$$A_{ik} = \iint\limits_{\Omega} \Delta\psi_i\, \Delta\psi_k\, dx\,dy, \qquad B_i = \iint\limits_{\Omega} f\psi_i\, dx\,dy. \tag{18}$$

Опираясь на теорию квадратичных форм, Ритц доказывает, что система (17) имеет решение, и притом только одно. Подставив это решение в выражение w_n, мы и получим приближенное, по Ритцу, решение задачи.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ суть какие угодно постоянные числа. Положим

$$\zeta_n = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_n\psi_n.$$

Умножим уравнение (17) на b_i и результат просуммируем по всем i. Используя формулы (18), можно привести полученное равенство к виду

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n\, \Delta\zeta_n - f\zeta_n)\, dx\,dy = 0. \tag{19}$$

Решение уравнений (17), будучи подставлено в интеграл J_n, сообщает ему минимальное значение, которое обозначим через $J_n^{(0)}$. Нетрудно доказать, что

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n)^2\, dx\,dy.$$

С возрастанием n величина $J_n^{(0)}$ убывает или по крайней мере не возрастает[1]); в то же время эта величина ограничена снизу, так как она не меньше точной нижней границы интеграла (11). По известной теореме о монотонной переменной величина $J_n^{(0)}$ стремится к некоторому пределу. На основании признака Коши существования предела (Cl, 42), по заданной положительной величине η, как бы она ни была мала, можно найти такое число

[1]) Подробнее об этом см. § 17.

N, что при $n > N$ и при произвольном m выполняется неравенство

$$0 \leqslant J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} < \frac{1}{2}\eta. \tag{20}$$

Обозначим $(w_{m+n} - w_n)/\sqrt{\eta} = \varphi(x, y)$. Используя тождество (19), в котором n заменено на $m + n$, и произведя некоторые тождественные преобразования, приведем неравенство (20) к виду

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy < 1. \tag{21}$$

К функции $\varphi(x, y)$ применим известную формулу[1])

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S} \left(\varphi \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) dS + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \cdot \ln r\, d\xi\, d\eta.$$

Как нетрудно видеть, $\varphi(x, y)$ есть линейная комбинация координатных функций и потому удовлетворяет условиям (10). Вследствие этого контурный интеграл в последней формуле исчезает, и мы получаем

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \cdot \ln r\, d\xi\, d\eta. \tag{22}$$

К интегралу (22) применим неравенство Буняковского, из которого в данном случае следует

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2\, d\xi\, d\eta \right\}^{1/2} \left\{ \iint\limits_{\Omega} \ln^2 r\, d\xi\, d\eta \right\}^{1/2}.$$

Первый интеграл меньше единицы по неравенству (21), второй же, как легко доказать (мы на этом не останавливаемся), не превосходит некоторого постоянного числа. Но тогда и $|\varphi(x, y)|$ не превосходит некоторого постоянного числа; обозначив его буквой K, имеем

$$|\varphi(x, y)| \leqslant K.$$

Теперь

$$|w_{m+n}(x, y) - w_n(x, y)| \leqslant K\sqrt{\eta}, \qquad n > N;$$

на основании критерия Коши (С1, 42) приближенные решения w_n сходятся к некоторой предельной функции равномерно в замкнутой области[2]) $\Omega + S$. Предельная функция, которую мы

[1]) См., например, С2, 193, формула (11).

[2]) Замкнутой областью называется такая совокупность точек, которая состоит из точек области и из точек ее границы.

обозначим через $w(x, y)$, непрерывна в $\Omega + S$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций w_n (C1, 145) и равна нулю на контуре S.

Ритц замечает, что утверждать равномерную сходимость производных от w_n нельзя; тем не менее он доказывает, что предельная функция $w(x, y)$ имеет внутри области Ω производные до четвертого порядка включительно и удовлетворяет уравнению Софи Жермен. Мы уже видели, что $w(x, y)$ удовлетворяет первому из краевых условий (10); в цитированной статье Ритц пытается доказать, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет и второму из краевых условий (10), однако его рассуждения неточны. Последующие рассуждения Р. Куранта, К. Фридрихса и С. Л. Соболева позволили установить, что при общей постановке задачи о равновесии пластинки нельзя требовать, чтобы условие

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0$$

выполнялось в обычном смысле; на самом деле это условие выполняется в некотором обобщенном смысле [1]).

Коротко скажем о решении задачи Дирихле, данном Ритцем. Им было рассмотрено уравнение Пуассона

$$\Delta w = f(x, y), \tag{23}$$

которое надлежало проинтегрировать в конечной области Ω плоскости (x, y) при условии, что на контуре S этой области выполняется равенство

$$w|_S = 0. \tag{24}$$

Применяя опять свой метод, Ритц строит последовательность приближенных решений w_n, $n = 1, 2, \ldots$ На этот раз в общем случае нельзя утверждать, что эта последовательность сходится равномерно. Удается только доказать существование такой функции w, что интегралы

$$\int_\alpha^x w_m(\xi, y)\, d\xi, \quad \int_\beta^y w_m(x, \eta)\, d\eta$$

равномерно сходятся к интегралам

$$\int_\alpha^x w(\xi, y)\, d\xi, \quad \int_\beta^y w(x, \eta)\, d\eta.$$

---

[1]) См. Р. Курант и Д. Гильберт [2] и С. Л. Соболев [2].

Далее доказывается, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению (23). Что касается краевого условия (24), то здесь Ритц допускает неточность, аналогичную упомянутой выше.

В работах Фридрихса, Реллиха и Куранта энергетический метод и проблема его обоснования получили дальнейшее развитие. Эти авторы изучали вариационные задачи, отвечающие уравнениям более общего типа; изучение сходимости приближенных решений по Ритцу они заменили изучением более общей проблемы сходимости *минимизирующей последовательности*[1]). В работах названных авторов нашла также строгую постановку и довольно полное решение проблема собственных значений оператора Лапласа и некоторых других, ему родственных. Многие результаты работ перечисленных ученых изложены в книге Р. Куранта и Д. Гильберта [1, 2].

Одна из первых работ по обоснованию метода Ритца принадлежит順順Планшерелю [1], который рассматривал задачу Дирихле для уравнения, несколько более общего, чем уравнение Лапласа. Планшерель исследовал только случай двух независимых переменных. Он доказал сходимость производных от приближенных решений, а также и самих приближенных решений, в норме L_2; им доказана также сходимость приближенных собственных чисел и собственных функций. По существу в статье Планшереля доказана и сходимость метода Бубнова — Галеркина (см. ниже) для задачи Дирихле в случае уравнения вида $\Delta u + g(x, y)u = f(x, y)$, где g — произвольная непрерывная функция.

К сожалению, работа Планшереля осталась почти неизвестной.

Важную роль для обоснования вариационных методов сыграли известные «теоремы вложения» С. Л. Соболева. Эти теоремы и их приложения к задачам математической физики даны С. Л. Соболевым в его монографии [2].

В работах автора настоящей книги дано представление решения вариационных задач, к которым сводятся обычные задачи математической физики, в виде ряда и установлена связь метода Ритца с этим представлением; дано обоснование вариационного метода для некоторых новых классов уравнений, в частности, для уравнений, эллиптичность которых нарушается на границе области; исследованы условия сходимости старших производных в методе Ритца, доказана сходимость собственных чисел. В ряде работ последнего времени автором поставлен и исследован вопрос об устойчивости вычислительных процессов

[1]) См. ниже, § 15.

и особенно процесса Ритца. Этот вопрос изложен в книге автора [26].

Наряду с энергетическим методом развивался тесно связанный с ним так называемый «метод Галеркина», или, более точно, «метод Бубнова — Галеркина».

В 1913 г. был напечатан отзыв И. Г. Бубнова [1] о работах С. П. Тимошенко, применявшего метод Ритца к исследованию устойчивости пластинок и балок. И. Г. Бубнов отмечает в этом отзыве, что уравнения, к которым приводит метод Ритца, можно получить, не прибегая к составлению потенциальной энергии системы и не решая вариационной задачи. Замечая, что Тимошенко ищет перемещение в виде

$$W = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \ldots, \tag{25}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — данные функции, $a_1, a_2, \ldots$ — коэффициенты, подлежащие определению, Бубнов пишет: «...Весьма простые решения можно получить и обычным путем, т. е. не прибегая к рассмотрению энергии системы, если только сходимость ряда для W достаточно велика. При этом простой подстановкой разложения для W в общее дифференциальное уравнение равновесия, затем умножением полученного выражения на $\varphi_k\,dx\,dy$ и интегрированием по всему объему тела, мы получим уравнение, связывающее коэффициент a_k со всеми другими, если только функции φ выбраны так, что

$$\int\int \varphi_n\varphi_k\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad n \neq k.$$

Это равенство имеет место почти во всех задачах рассматриваемой работы, так как автор обычно берет выражение W в виде тригонометрических рядов, где это условие выполнено; если же почему-либо желательно разложение по целым рациональным функциям — их можно заменить шаровыми. Написав из полученного соотношения столько уравнений, сколько членов ряда мы желаем сохранить, и уравнивая нулю определитель из множителей при коэффициентах, мы сведем задачу о нахождении критической нагрузки к определению наименьшего корня целой рациональной функции, высшая степень которой равна числу сохраненных членов». Далее И. Г. Бубнов пишет: «Заметим, что получаемые таким образом результаты не требуют решения дифференциального уравнения равновесия... и будут тождественны с найденными проф. Тимошенко».

Если приведенные высказывания Бубнова перевести на язык формул, то получится следующее. Решение задач об устойчивости обычно сводится к интегрированию дифференциального уравнения вида

$$Lw - \lambda M w = 0, \tag{26}$$

где w — перемещение, L и M — некоторые дифференциальные операторы и λ — неизвестный численный параметр. Перемещение w удовлетворяет не только дифференциальному уравнению (26), но и некоторым однородным краевым условиям. Так, например, если дело идет об устойчивости пластинки, жестко закрепленной по краю, то перемещение w должно удовлетворять еще условиям (10). При произвольно взятом λ поставленная задача имеет только тривиальное решение $w = 0$; дело сводится к нахождению тех значений λ, при которых уравнение (26) имеет решение, не равное тождественно нулю; наименьшее из этих λ и определяет критическую нагрузку, за которой пластинка теряет устойчивость. Как мы увидим ниже (§ 40), при известных условиях это наименьшее λ равно минимуму отношения

$$\frac{\iint\limits_{\Omega} w \cdot Lw \, dx \, dy}{\iint\limits_{\Omega} w \cdot Mw \, dx \, dy}; \tag{27}$$

используя граничные условия, можно обычно представить отношение (27) в несколько иной форме, которую и использовали в своих работах В. Ритц и С. П. Тимошенко. Минимум отношения (27) можно искать по методу Ритца, что приводит к системе уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} (A_{ik} - \lambda B_{ik}) a_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

где a_k — коэффициенты выражения (25), в котором мы берем n членов, A_{ik} и B_{ik} — некоторые числа, определенным образом зависящие от координатных функций φ_k. Чтобы приближенное решение (25) было отлично от тождественного нуля, необходимо и достаточно, чтобы числа a_k, удовлетворяющие системе (28), не все равнялись нулю; для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы обратился в нуль определитель системы (28):

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & A_{12} - \lambda B_{12} & \ldots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ A_{21} - \lambda B_{21} & A_{22} - \lambda B_{22} & \ldots & A_{2n} - \lambda B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & A_{n2} - \lambda B_{n2} & \ldots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Очевидно, уравнение (29) представляет собой алгебраическое уравнение степени n относительно λ; наименьший корень этого уравнения доставляет приближенное значение минимума отношения (27). Описанный здесь прием по существу и применял Тимошенко в работе, рецензированной Бубновым. Последний заметил, однако, что *систему* (28) *можно получить другим, более простым путем*: достаточно в уравнение (26) подставить вместо w его приближенное значение (25), в котором будет сохранено n членов, полученное выражение умножить на φ_k, проинтегрировать по области пластины (по длине стержня, если решается задача об устойчивости стержня, и т. п.) и результат приравнять нулю. В качестве условия для применимости своего приема И. Г. Бубнов выставляет требование ортогональности координатных функций, что на самом деле не обязательно.

Заметка И. Г. Бубнова положила начало новому прямому методу, развитие и широкое применение которого тесно связано с именем Б. Г. Галеркина. В своей работе [1], опубликованной в 1915 г., Б. Г. Галеркин решает ряд задач на равновесие и устойчивость стержней и пластин. Метод, примененный им, по форме совпадает с тем методом, которым И. Г. Бубнов получал в упомянутом выше отзыве уравнения Тимошенко; однако существенно новым было то, что Галеркин не связывал свой метод ни с какой вариационной задачей, так что его можно было применять к любому дифференциальному (и не только дифференциальному) уравнению, и не требовал ортогональности координатных функций.

Как уже было упомянуто, Галеркин опубликовал свою статью в 1915 г. С тех пор напечатано большое количество работ, в которых метод Бубнова — Галеркина широко применялся к практическому решению самых разнообразных прикладных задач. Появились даже работы, в которых этот метод был, и не без успеха, применен к решению нелинейных задач. Однако обоснование метода оказалось делом сравнительно трудным.

По-видимому, первой в этом направлении была упомянутая выше работы Планшереля [1]. Насколько автору известно, первый результат общего характера был получен в 1940 г. Ю. В. Репманом [1], который доказал сходимость процесса Бубнова — Галеркина для интегральных уравнений Фредгольма. В том же 1940 г. Г. И. Петров [1] получил аналогичный результат для некоторого специального обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Вскоре М. В. Келдыш [1] обобщил результат Г. И. Петрова на случай обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка, а также доказал сходимость метода Бубнова — Галеркина в случае простейшей краевой задачи для общего уравнения эллиптического типа второго порядка.

Автором [4, 8] был получен довольно общий достаточный признак сходимости процесса Бубнова — Галеркина (включая и сходимость собственных чисел) и дано приложение этого признака к ряду задач математической физики.

Из общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича [2] вытекает некоторая общая схема построения приближенных методов; в эту схему во многих случаях укладываются методы Ритца, Бубнова — Галеркина и некоторые их обобщения, метод наименьших квадратов. Указанная схема была отчетливо сформулирована И. К. Даугаветом [1, 2]. Необходимо отметить работы Н. И. Польского [1—5]. В этих работах исследовано обобщение метода Бубнова — Галеркина, которое в общей форме, по-видимому, было впервые сформулировано в работе Г. И. Петрова [1], хотя в частных формах такое обобщение появлялось в работах украинских математиков (см. М. Ф. Кравчук [1]). Н. И. Польский ввел еще более общее понятие проекционных методов и доказал ряд теорем об их сходимости.

Отметим, что к числу проекционных относится метод коллокации, предложенный в 1934 г. Л. В. Канторовичем [1] под названием «интерполяционного метода» и исследованный в работах Э. Б. Карпиловской [1—3] и Г. М. Вайникко [6, 7].

В работах Н. И. Польского, И. К. Даугавета, А. В. Джишкариани и Г. М. Вайникко получен ряд оценок скорости сходимости процесса Бубнова — Галеркина. Эти же и некоторые другие авторы занимались также оценками приближения собственных функций с помощью процессов Ритца и Бубнова — Галеркина.

М. А. Красносельский [1, 3] обосновал метод Бубнова — Галеркина для некоторого класса нелинейных уравнений; метод М. А. Красносельского был использован И. И. Воровичем в его работе [1] по теории оболочек.

Весьма интересные приложения метода Бубнова — Галеркина к нелинейным эллиптическим уравнениям даны в работе [8] М. И. Вишика.

Метод Бубнова — Галеркина распространен и на нестационарные уравнения. Из многочисленных относящихся сюда работ отметим статью М. И. Вишика [7].

В заключение отметим недавно вышедшую книгу И. В. Свирского [2], большая часть которой посвящена исследованию процесса Бубнова — Галеркина для нелинейных задач.

Методу Бубнова — Галеркина посвящена гл. XI настоящей книги.

Из других вариационных методов заслуживает внимания метод наименьших квадратов. Этот метод был применен М. Пиконе [1] к решению задачи Дирихле; другие его приложения даны в работах Н. М. Крылова, М. Ф. Кравчука и др.[1]). Общие условия сходимости метода наименьших квадратов и ряд его приложений даны в работах автора [3, 6].

Отметим диссертацию Р. С. Андерсена [1], в которой метод наименьших квадратов применен к решению краевых задач для параболических уравнений, а также вышедший под редакцией Р. С. Андерсена и М. Р. Осборна [1] сборник статей, в котором тот же метод применен к ряду задач геофизики и др.

Подробное изложение метода наименьших квадратов будет дано в гл. XII.

Важнейшую роль играет вопрос об оценке погрешности приближенного решения, полученного, скажем, процессом Ритца для того или иного вариационного метода. Существуют два типа таких оценок. Можно строить *априорные* оценки, дающие асимптотику погрешности в зависимости от выбранной системы кооординатных функций, от числа этих функций, входящих в приближенное решение, и от аналитических свойств данных задачи и ее искомого решения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такого рода оценки получали Н. М. Крылов [1], автор [11], В. П. Ильин [1], И. К. Даугавет [1, 2], Г. М. Вайникко [1—3]. В работах А. В. Джишкариани [2—4] получены некоторые априорные оценки для задач, сформулированных в абстрактной операторной форме, и даны приложения к дифференциальным уравнениям — обыкновенным и в частных производных. Априорные оценки для уравнений в частных производных строились в работах В. П. Ильина [2], И. Ю. Харрик [1] и автора [27]. Вопросу об априорных оценках посвящена гл. VII.

Апостериорные оценки — это оценки уже вычисленного приближения. Их получение основано на применении вариационных методов, которые я называю «встречными» по отношению к данному, потому что они дают оценку «функционала энергии» с другой стороны. Зная два приближенных решения одной и той же задачи, одно из которых построено по данному методу, а другое — по встречному, можно оценить погрешности обоих приближений. Для энергетического метода встречным является метод ортогональных проекций, разработанный в статьях С. Зарембы [1, 2], Г. Вейля [2] и М. И. Вишика [1—3], а также метод Трефтца [1], получивший дальнейшее развитие в работах М. Ш. Бирмана [3, 5, 6]. Встречным для энергетического оказывается и метод, связанный с преобразованием Фридрихса;

[1]) Подробнее об этом см. М. Ф. Кравчук [1].

достаточно подробное изложение этого преобразования дано в книге Р. Куранта и Д. Гильберта [1].

Апостериорным оценкам погрешности посвящена гл. VIII.

Особую трудность представляет двусторонняя оценка собственных чисел. Для дифференциальных операторов метод Ритца дает приближение к собственным числам сверху, тогда как для большинства приложений важно знать также хорошие приближения снизу. Частные результаты такого рода получены Н. М. Крыловым [1], автором [11], И. Ю. Харрик [1], А. В. Джишкариани [1], Г. М. Вайникко [4, 5, 8] и др. Общий подход к проблеме двусторонних оценок собственных чисел намечен А. Вайнштейном в его многочисленных публикациях, из которых мы здесь укажем только две [1, 2]. Работы А. Вайнштейна и его учеников, а также примыкающие сюда работы Н. Ароншайна подробно изложены в книге С. Х. Гулда [1]. К этому же направлению относится и работа И. В. Свирского [1], который несколько позднее, но независимо, получил часть результатов Н. Ароншайна. Другой общий подход к той же проблеме нашел Г. Фикера [1, 2]. Перечисленные здесь вопросы будут изложены в гл. IX.

Во всей книге рассматриваются только линейные задачи; некоторые нелинейные задачи рассмотрены в книге автора [26]. За исключением гл. I и XI, а также за исключением отдельных мест, которые будут особо оговариваться каждый раз, всюду в книге рассматриваются только вещественные функции одной или нескольких вещественных переменных.

ГЛАВА I
ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Исследование вариационных методов базируется на теории *гильбертова пространства.* Полное изложение этой теории дано, например, в книгах Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1], Ф. Риса и Б. Секефальви-Надя [1], В. И. Смирнова [4]. Сравнительно элементарное и более или менее достаточное для целей настоящей книги изложение теории гильбертова пространства дано в книге Б. З. Вулиха [1].

В настоящей главе формулируются без доказательств (их можно найти в книгах, процитированных выше) те факты теории гильбертовых пространств, которые нам понадобятся в дальнейшем. Основную роль в последующем будут играть функциональные гильбертовы пространства, т. е. пространства, элементы которых суть функции одной или нескольких вещественных переменных. Теория функциональных гильбертовых пространств тесно связана с понятием интеграла Лебега, с которого мы и начнем изложение.

Достаточно полное изложение теории лебеговых интегралов читатель найдет, например, в книгах В. И. Смирнова [4] и И. П. Натансона [1].

§ 1. Интеграл Лебега

Построение интеграла Лебега опирается на понятие «лебеговой меры» точечного множества. Для простоты рассмотрим некоторое множество A точек, расположенное на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$. Условимся говорить, что множество B *покрывает* множество A, если A есть часть B. Пусть B — *открытое множество* (т. е. объединение конечного или счетного множества интервалов), покрывающее данное множество A. Составим сумму длин интервалов, входящих в B. Точная нижняя граница этих сумм по всевозможным покрытиям A открытыми множествами называется *внешней мерой* A и обозначается $\mu_e(A)$.

Рассмотрим теперь множество A_1 тех точек сегмента $a \leqslant x \leqslant b$, которые не входят в A (так называемое *дополнение* к A). Разность $\mu_i(A) = b - a - \mu_e(A_1)$ называется *внутренней* *мерой* A. Можно доказать, что внутренняя мера множества не превосходит его внешней меры. Множество называется *измеримым*, если его внутренняя и внешняя меры совпадают. Общая величина внутренней и внешней мер измеримого множества называется его *лебеговой мерой*. Меру множества A мы будем обозначать символом μA. В последующем, говоря о точечном множестве, мы всегда будем предполагать его измеримым.

Мера множества обладает рядом свойств, присущих длине, обобщением понятия которой является понятие меры. Так, если два множества не пересекаются (т. е. не имеют общих точек), то мера объединения[1]) множеств равна сумме их мер; мера объединения двух пересекающихся множеств равна сумме их мер минус мера их общей части, и т. д.

Понятие меры естественным образом распространяется на точечные множества, расположенные на плоскости или в трехмерном пространстве. Здесь понятие меры естественно обобщает понятие площади или объема. Нетрудно также распространить понятие меры и на точечные множества в многомерных пространствах.

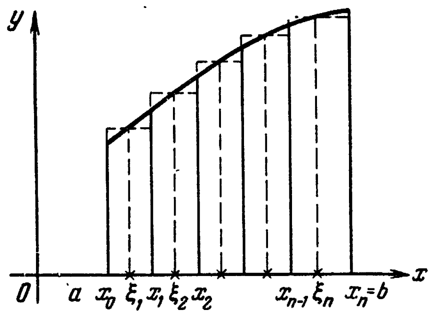

Рис. 1.

Существуют множества с мерой, равной нулю. Это, очевидно, те множества, которые можно покрыть открытыми множествами сколь угодно малой меры. Таковы, как нетрудно показать, конечные и счетные множества точек. Существуют и несчетные множества меры нуль. Принято говорить, что некоторое свойство имеет место *почти везде*, если оно может не иметь места лишь на множестве меры нуль.

Обратимся теперь к понятию интеграла. Напомним, что по определению, восходящему к Коши и Риману, определенный интеграл рассматривается как предел интегральных сумм (значения символов даны на рис. 1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{1}$$

[1]) Объединением двух множеств называется третье множество, в которое входят все элементы как первого, так и второго множества; если некоторый элемент принадлежит обоим слагаемым множествам, то в объединение он входит только один раз.

где λ — наибольшая из длин промежутков (x_{k-1}, x_k). Если выбрать достаточно мелкое деление основного отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ и отбросить справа в (1) знак предела, то получится приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{2}$$

которому геометрически соответствует следующее: площадь узкой полоски, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, отрезком (x_{k-1}, x_k) оси абсцисс и двумя ординатами, проведенными в точках x_{k-1} и x_k, заменяется площадью прямоугольника, основание которого есть отрезок (x_{k-1}, x_k), а высота — ордината кривой, проведенная в произвольно выбранной точке ξ_k указанного отрезка. Ошибка приближенного равенства (2) невелика, если ордината кривой $y = f(x)$ меняется не слишком быстро; при этом тот или иной выбор точек ξ_k существенно на величине ошибки не отражается.

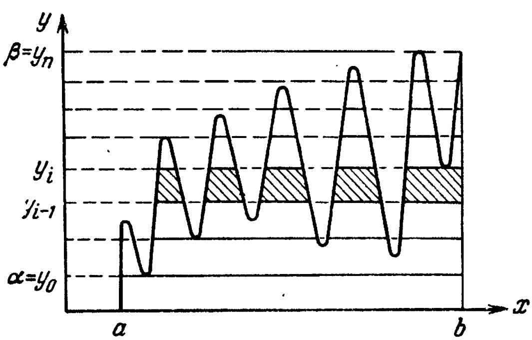

Рис. 2.

Формула (2) делается, однако, ненадежной, если функция $f(x)$ быстро колеблющаяся (рис. 2), хотя бы она и оставалась непрерывной. Очевидно, мы получим совершенно различные результаты, в зависимости от того, будем ли брать в качестве ξ_k точку с наибольшей, наименьшей или некоторой промежуточной ординатой. В этом случае целесообразнее вычислять площадь иначе. На оси ординат откладываем наименьшее и наибольшее значение функции[1]). Пусть это будут точки α и β. Отрезок $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ оси ординат разобьем на малые участки, вставляя точки деления $y_0 = \alpha, y_1, y_2, \ldots, y_n = \beta$. Через точки деления проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Интересующая нас площадь окажется разбитой на фигуры, напоминающие прямоугольники с малыми высотами; эти «прямоугольники» располагаются в горизонтальных полосах между прямыми $y = y_{i-1}$ и $y = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Подсчитаем сумму площадей «прямоуголь-

[1]) Точнее говоря, нижнюю и верхнюю грани значений функции.

ников», заключенных в такой полосе, причем за основания «прямоугольников» примем, например, стороны их, лежащие на верхней стороне полосы ($y = y_i$). Указанная сумма площадей приближенно равна произведению высоты $y_i - y_{i-1}$ на сумму длин оснований. В каждой точке основания, очевидно, ордината $f(x) \geqslant y_i$. Таким образом, сумму оснований «прямоугольников» можно охарактеризовать как множество значений x, в которых $f(x) \geqslant y_i$, а сумму длин оснований — как меру этого множества[1]). Обозначим указанную меру через μ_i. Тогда площадь части фигуры, заключенной в полосе $y_{i-1} < y \leqslant y_i$ (на рис. 2 эта часть заштрихована), приближенно равна $\mu_i(y_i - y_{i-1})$, а площадь всей фигуры приближенно равна $\mu_0 y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(y_i - y_{i-1})$. Интересно отметить, что точность этого приближенного равенства мало зависит от того, будет ли функция $f(x)$ непрерывной или разрывной, если только она остается ограниченной. Смысл этого утверждения делается совершенно ясным из сопоставления рис. 2 и 3, на первом из которых изображен график непрерывной функции, а на втором — график функции, имеющей разрывы в точках c_1, c_2, c_3. Приближенное вычисление площади как суммы

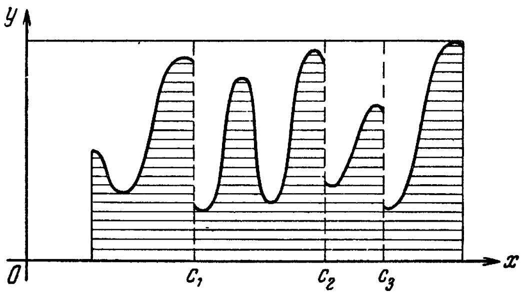

Рис. 3.

$$\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1}) \tag{3}$$

дает в обоих случаях погрешность одного и того же порядка.

Будем теперь уменьшать промежутки (y_{i-1}, y_i) так, чтобы длина наибольшего из них стремилась к нулю. Если при этом сумма (3) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *лебеговым интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Обобщая это построение на случай функций, не обязательно непрерывных, мы приходим к следующему определению лебегова интеграла:

---

[1]) Само собой разумеется, мы предполагаем измеримость этого множества при любом значении y_i. Если все такие множества измеримы, то сама функция $f(x)$ также называется измеримой. Во всем последующем рассматриваются только измеримые функции.

Интегралом Лебега ограниченной функции $f(x)$ *по отрезку* $a \leqslant x \leqslant b$ *называется предел*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ \mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1}) \right\}; \qquad \lambda = \max (y_i - y_{i-1}),$$

где μ_i — *мера множества значений* x, *для которых* $f(x) \geqslant y_i$, *а* $\alpha = y_0$ *и* $\beta = y_n$ — *числа, между которыми заключены все значения* $f(x)$.

Совершенно аналогично определяется интеграл Лебега от функции двух и большего числа независимых переменных.

Можно доказать, что интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции всегда существует. Если существует определенный интеграл функции $f(x)$ в обычном (римановом) смысле, то, как можно доказать, он совпадает с лебеговым интегралом. Поэтому нет нужды в особом символе для обозначения лебегова интеграла, и мы будем пользоваться обычными символами

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy,$$

и т. п.

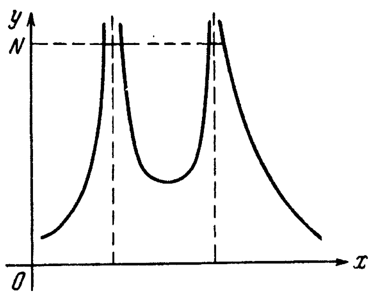

Рис. 4.

Дадим теперь определение лебегова интеграла от неограниченной функции. Допустим сперва, что функция $f(x)$ неотрицательная. Обозначим через N произвольное положительное число и введем новую функцию $f_N(x)$, полагая (см. рис. 4)

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N, \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Функция $f_N(x)$ ограничена, так как, очевидно, $0 \leqslant f_N(x) \leqslant N$, поэтому ее лебегов интеграл

$$\int_a^b f_N(x)\,dx \tag{4}$$

существует. С возрастанием N этот интеграл не убывает и потому стремится, при безграничном возрастании N, к определенному, конечному или бесконечному, пределу. *Если существует конечный предел интеграла* (4) *при* $N \to \infty$, *то этот предел называется лебеговым интегралом неограниченной неотрицатель-*

ной функции $f(x)$. Таким образом, по определению, если функция $f(x) \geqslant 0$ и не ограничена, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_b^b f_N(x).$$

Неограниченная неотрицательная функция, для которой существует интеграл Лебега в пределах от a до b, называется *суммируемой* на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Аналогично определяется функция, суммируемая в m-мерной $(m \geqslant 2)$ области.

Пусть теперь $f(x)$ может иметь какой угодно знак. Ее можно представить как разность двух неотрицательных функций. Действительно, если положить

$$f_1(x) = \{|f(x)| + f(x)\}/2, \quad f_2(x) = \{|f(x)| - f(x)\}/2,$$

то $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) \geqslant 0$ и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. *Мы будем считать $f(x)$ суммируемой тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суммируема, и в этом случае положим по определению*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ суммируема, то суммируема также и функция $|f(x)| = f_1(x) + f_2(x)$. Таким образом, интеграл Лебега всегда абсолютно сходящийся.

Если функция $f(x)$ — комплексная, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, то мы полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + i\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

По определению интеграл слева существует тогда и только тогда, когда существуют оба интеграла справа. Интеграл Лебега от комплексной функции также абсолютно сходящийся.

Основные свойства интеграла Римана остаются в силе и для интеграла Лебега. Отметим также три свойства, характерные для интеграла Лебега и играющие важную роль во всем последующем. Доказательства их читатель найдет в цитированных в начале главы курсах.

1. Значение интеграла Лебега не изменится, если изменить значение подынтегральной функции на множестве меры нуль. Более того, лебегов интеграл сохраняет смысл, если на множестве меры нуль значения функции остаются неопределенными. Как следствие, отсюда вытекает, что лебегов интеграл равен нулю, если подынтегральная функция почти везде равна нулю.

2. Если интеграл от неотрицательной функции равен нулю, то эта функция равна нулю почти везде.

3. Если $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ суммируема, то $f(x)$ также суммируема.

Рассмотрим семейство функций, принимающих, вообще говоря, комплексные значения, определенных почти везде в некоторой конечной области Ω m-мерного евклидова пространства и обладающих тем свойством, что их квадраты суммируемы в Ω. Для краткости будем такие функции называть *квадратично суммируемыми*. Условимся здесь, как и везде в последующем, считать совпадающими две функции, если они совпадают почти везде в Ω.

Будем говорить, что последовательность квадратично суммируемых в Ω функций $\varphi_n(P)$ *сходится в среднем* к квадратично суммируемой в Ω функции $\varphi(P)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 \, d\Omega = 0.$$

Теорема Риса — Фишера. *Если квадратично суммируемые в Ω функции $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию*

$$\lim_{k, n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_k(P) - \varphi_n(P)|^2 \, d\Omega = 0,$$

то существует квадратично суммируемая в Ω функция $\varphi(P)$, к которой последовательность $\varphi_n(P)$ сходится в среднем.

§ 2. Гильбертово пространство

Множество элементов произвольной природы называется *линейным*, если его элементы можно складывать между собой и умножать на числа, причем в результате этих действий получаются элементы того же множества; при этом предполагается, что упомянутые здесь действия сложения и умножения подчиняются обычным законам арифметики.

Различают линейные множества *комплексные* и *вещественные* в зависимости от того, умножение на какие числа считается допустимым.

Линейное множество иногда называют *линеалом*. В линейном множестве существует один и только один элемент «нуль» или «нулевой элемент», обладающий тем свойством, что его прибавление к любому другому элементу не меняет последнего. Произведение любого элемента множества на число нуль, а также произведение любого числа на нулевой элемент, равно нулевому элементу множества. Нулевой элемент мы будем обозначать обычным символом 0.

Линейное множество называется *гильбертовым пространством*, если каждой паре φ и ψ элементов этого множества приведено в соответствие число (φ, ψ), удовлетворяющее следующим аксиомам:

A. $$(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)},$$

B. $$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2, \psi) = \lambda_1(\varphi_1, \psi) + \lambda_2(\varphi_2, \psi),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ — элементы линеала, λ_1 и λ_2 — постоянные.

C. $(\varphi, \varphi) \geqslant 0$.

D. Если $(\varphi, \varphi) = 0$, то $\varphi = 0$.

Число (φ, ψ) называется *скалярным произведением* элементов φ и ψ.

В § 3 мы подчиним гильбертово пространство еще одному важному требованию.

Наряду с определенным здесь «комплексным» пространством можно рассматривать и «вещественные» гильбертовы пространства. Они строятся на основе вещественного линейного множества, и аксиома А заменяется следующей:

A′. $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$.

Из аксиом А и В вытекает, что скалярное произведение, сомножители в котором представляют собой суммы, можно составлять по правилу умножения многочленов, с той, однако, разницей, что численный коэффициент при втором сомножителе должен быть, при вынесении его за знак скалярного произведения, заменен комплексно сопряженной величиной. В частности, если φ и ψ — элементы гильбертова пространства, а λ — число, то $(\varphi, \lambda\psi) = \bar{\lambda}(\varphi, \psi)$. Если пространство вещественное, то скалярное произведение раскрывается просто по правилу умножения многочленов.

Неотрицательное число $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ называется *нормой* элемента φ и обозначается символом $\|\varphi\|$, так что

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}; \tag{1}$$

норма разности двух элементов называется *расстоянием* между ними. Будем говорить, что формула (1) определяет *метрику* в гильбертовом пространстве.

Элемент гильбертова пространства, норма которого равна единице, называется *нормированным*.

Норма в гильбертовом пространстве обладает следующими свойствами:

а) Нулевой и только нулевой элемент пространства имеет норму, равную нулю.

б) Если λ — число, а φ — элемент пространства, то

$$\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\|. \tag{2}$$

в) Для любой пары φ, ψ элементов пространства справедливо так называемое *неравенство Коши — Буняковского*

$$|(\varphi, \psi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \tag{3}$$

г) Норма суммы элементов не превосходит суммы их норм

$$\|\varphi + \psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|. \tag{4}$$

Неравенство (4) называется *неравенством треугольника.* Оно, очевидно, распространяется на любое число слагаемых, так что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|,$$

каково бы ни было число слагаемых n.

Гильбертово пространство, элементы которого суть функции одной или нескольких числовых переменных, называется *функциональным.*

Приведем некоторые примеры гильбертовых пространств:

а) Пространство $L_2(\Omega)$. Пусть Ω — измеримое множество евклидова пространства размерности m; в приложениях чаще всего $m = 1, 2, 3$. Переменную точку евклидова пространства будем обозначать буквой P, элемент меры (объема, площади, длины) — через $d\Omega$. Как известно, множество функций, определенных почти везде в Ω и квадратично суммируемых в Ω, есть линеал. Определим на этом линеале скалярное произведение, полагая

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(P)\, \overline{\psi(P)}\, d\Omega. \tag{5}$$

Интеграл (5) существует, как это следует из свойства 3 § 1 и из неравенства $|\varphi\bar{\psi}| \leqslant \frac{1}{2}\{|\varphi|^2 + |\psi|^2\}$. Выражение (5), очевидно, удовлетворяет аксиомам A — C; оно будет удовлетворять также аксиоме D, если, как это обычно делается, считать тождественно равными две функции, равные между собой почти везде, и, в частности, не отличать от тождественного нуля функцию, равную нулю почти везде.

Введя скалярное произведение, мы превратили наш линеал в гильбертово пространство; его обычно обозначают символом $L_2(\Omega)$. Если Ω есть отрезок прямой $a \leqslant x \leqslant b$, то пишут $L_2(a, b)$.

Норма в $L_2(\Omega)$ определяется равенством

$$\|\varphi\|^2=\int_\Omega|\varphi^2(P)|\,d\Omega. \tag{6}$$

Неравенство (2) переходит здесь в известное неравенство Буняковского

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\,d\Omega\right|^2\leqslant\int_\Omega|\varphi^2(P)|\,d\Omega\int_\Omega|\psi^2(P)|\,d\Omega.$$

б) Другим важным примером функциональных гильбертовых пространств является пространство $L_2(\Omega;\sigma)$. Элементы его суть функции, для которых существует интеграл

$$\int_\Omega \sigma(P)|\varphi^2(P)|\,d\Omega. \tag{7}$$

Здесь $\sigma(P)$ — некоторая, одна и та же для всех элементов пространства, неотрицательная функция. Мы считаем при этом тождественными две функции $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$, если

$$\int_\Omega \sigma(P)|\varphi_1(P)-\varphi_2(P)|^2\,d\Omega=0.$$

Скалярное произведение в $L_2(\Omega;\sigma)$ задается формулой

$$(\varphi,\ \psi)=\int_\Omega \sigma(P)\,\varphi(P)\,\overline{\psi(P)}\,d\Omega, \tag{8}$$

а норма, как это вытекает из (1), — формулой

$$\|\varphi\|^2=\int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi^2(P)|\,d\Omega. \tag{9}$$

Мы определили здесь комплексные пространства $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega;\sigma)$. Ниже большую роль будет играть вещественное пространство $L_2(\Omega)$, элементы которого суть вещественные функции, квадратично суммируемые в Ω. Для вещественного пространства $L_2(\Omega)$ приведенные выше формулы естественным образом упрощаются; в частности, скалярное произведение и норма в этом пространстве определяются соотношениями

$$(\varphi,\ \psi)=\int_\Omega \varphi(P)\,\psi(P)\,d\Omega, \tag{5_1}$$

$$\|\varphi\|^2=\int_\Omega \varphi^2(P)\,d\Omega. \tag{6_1}$$

Большой интерес представляют также вещественные пространства $L_2(\Omega; \sigma)$.

в) Векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Пусть Ω имеет то же значение, что и выше. Рассмотрим линеал векторных функций, каждая из которых имеет m составляющих, принадлежащих классу $L_2(\Omega)$. На этом линеале введем скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sum_{k=1}^m \varphi_k(P)\overline{\psi_k(P)}\,d\Omega = \int_\Omega \varphi(P)\cdot\overline{\psi(P)}\,d\Omega, \tag{10}$$

где φ_k, ψ_k — составляющие векторов φ, ψ, а точка означает обычное скалярное умножение векторов. Тем самым наш линеал превращен в гильбертово пространство, которое мы будем обозначать через $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Норма в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ определяется формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega \sum_{k=1}^m |\varphi_k|^2\,d\Omega. \tag{11}$$

Если рассматриваемые векторные функции вещественные, то мы получаем вещественное векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$; скалярное произведение и норма в нем определяются более простыми формулами

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\cdot\psi\,d\Omega; \qquad \|\varphi\|^2 = \int_\Omega \varphi^2\,d\Omega,$$

где $\varphi\cdot\psi$ означает обычное скалярное произведение векторов, а φ^2 означает квадрат длины вектора φ.

г) Пространство $L_2(\Gamma)$ определяется аналогично пространству $L_2(\Omega)$. Пусть Γ — поверхность в m-мерном евклидовом пространстве, P — ее переменная точка, $d\Gamma$ — элемент площади поверхности на Γ. Пространство $L_2(\Gamma)$ состоит из функций, квадратично суммируемых на Γ; скалярное произведение и норма в этом пространстве задаются формулами

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(P)\overline{\psi(P)}\,d\Gamma, \tag{12}$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Gamma |\varphi(P)|^2\,d\Gamma. \tag{13}$$

Аналогично можно построить пространства $L_2(\Gamma, \sigma)$ и $\mathbf{L}_2(\Gamma)$.

д) Обозначим через S границу области Ω. Рассмотрим множество функций, которые непрерывны в замкнутой области

$\overline{\Omega} = \Omega + S$ вместе со всеми своими производными до порядка r включительно.

Нетрудно видеть, что это множество есть линеал. Мы его превратим в гильбертово пространство, если зададим в нем скалярное произведение следующей формулой:

$$(\varphi, \psi) = \\ = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=k} \int_{\Omega} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \frac{\partial^k \bar{\psi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} d\Omega. \quad (14)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — декартовы координаты переменной точки из Ω. Это пространство обозначается символом $L_2^{(r)}(\Omega)$; при $r = 0$ оно переходит в пространство $L_2(\Omega)$. Как это видно из формулы (14), норма в $L_2^{(r)}(\Omega)$ определяется равенством

$$\| \varphi \|^2 = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=k} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right|^2 d\Omega. \quad (15)$$

е) Пространство l_2. Рассмотрим множество числовых последовательностей

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

обладающих тем свойством, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2$$

сходится. Нетрудно проверить, что это множество линейное. Введем на нем скалярное произведение по следующей формуле: если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ суть последовательности из нашего множества, то

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k; \quad (16)$$

сходимость ряда (16) вытекает из неравенства $2|a_k \bar{b}_k| \leqslant |a_k|^2 + |b_k|^2$. Полученное таким образом гильбертово пространство обозначается через l_2. Норма в l_2 определяется формулой, вытекающей из формулы (16):

$$\| a \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2.$$

Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ гильбертова пространства называются *линейно зависимыми*, если можно найти постоянные числа

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, так, чтобы выполнялось равенство

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n = 0.$$

Указанные элементы называются *линейно независимыми*, если последнее равенство осуществляется только при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Теорема. *Для того чтобы элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ гильбертова пространства были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю определитель*

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Определитель (17) называется *определителем Грама* элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

§ 3. Предельный переход в гильбертовых пространствах

Пусть дано гильбертово пространство H, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots, \varphi_n, \ldots$ — последовательность[1]) его элементов. Будем говорить, что эта последовательность сходится или стремится к φ, если φ есть элемент H и

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \varphi \| = 0. \tag{1}$$

Элемент φ называется *пределом* последовательности $\{\varphi_n\}$. Мы будем записывать это обстоятельство, пользуясь обычной символикой

$$\varphi_n \to \varphi, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Поясним наше определение на примерах.

а) В пространстве $L_2(\Omega)$ сходимость $\varphi_n \to \varphi$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| \varphi_n(P) - \varphi(P) \|^2 \, d\Omega = 0,$$

т. е. что $\varphi_n(P)$ сходится к $\varphi(P)$ в среднем.

б) Точно так же сходимость в $L_2(\Omega; \sigma)$ есть сходимость в среднем с весом $\sigma(P)$.

---

[1]) Для обозначения последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ мы часто будем пользоваться символом $\{\varphi_n\}$.

в) Сходимость в $L_2^{(r)}(\Omega)$, как легко видеть, означает сходимость в среднем функций последовательности и всех их производных, до порядка r включительно, к предельной функции и соответствующим ее производным.

Теорема 1. *Если* $\varphi_n \to \varphi$ *и* $\psi_n \to \psi$, *то* $(\varphi_n, \psi_n) \to (\varphi, \psi)$.

Следствие 1. *Если* $\varphi_n \to \varphi$, *то* $(\varphi_n, \psi) \to (\varphi, \psi)$.

Следствие 2. *Если* $\varphi_n \to \varphi$, *то* $\|\varphi_n\| \to \|\varphi\|$.

Вернемся к общему понятию сходимости. Пусть в гильбертовом пространстве H дана сходящаяся к элементу φ последовательность $\{\varphi_n\}$. По определению $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$. Это значит, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$. Пусть $k \geqslant n_0(\varepsilon/2)$ и $n \geqslant n_0(\varepsilon/2)$. Тогда

$$\|\varphi_k - \varphi\| < \varepsilon/2 \text{ и } \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon/2.$$

Оценим норму разности $\|\varphi_k - \varphi_n\|$. По неравенству треугольника

$$\|\varphi_k - \varphi_n\| = \|(\varphi_k - \varphi) - (\varphi_n - \varphi)\| \leqslant \|\varphi_k - \varphi\| + \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, в силу произвольности ε, равносильно равенству

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \|\varphi_k - \varphi_n\| = 0. \tag{2}$$

Таким образом, если $\varphi_n \to \varphi$, то необходимо выполняется равенство (2). Возникает вопрос: верно ли обратное утверждение, т. е. можно ли утверждать существование предела последовательности $\{\varphi_n\}$, если она удовлетворяет равенству (2). В общем случае ответ на этот вопрос приходится давать отрицательный.

Чтобы выяснить это, рассмотрим такой пример. Рассмотрим линеал, составленный из функций $\varphi(x)$, непрерывных на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Превратим этот линеал в гильбертово пространство, задав скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Построенное нами пространство, которое мы обозначим через N, не совпадает с $L_2(-1, 1)$, так как элементами последнего могут служить не только непрерывные, но и разрывные функции.

Возьмем последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, & -1/n \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 1, & 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

График такой функции изображен на рис. 5. Будучи непрерывными, функции $\varphi_n(x)$ принадлежат N. Простое вычисление показывает, что

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \|\varphi_k - \varphi_n\|^2 = \lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \int_{-1}^{1} [\varphi_k(x) - \varphi_n(x)]^2\, dx = 0.$$

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ стремится в каждой точке к разрывной функции, которую мы обозначим через $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

причем стремление к пределу — равномерное в каждом из отрезков $-1 \leqslant x \leqslant -\varepsilon$ и $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, где ε — любое положительное число, меньшее единицы. Отсюда нетрудно усмотреть, что

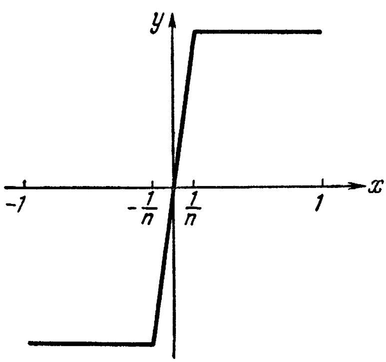

Рис. 5.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [\varphi_n(x) - \varphi_0(x)]^2\, dx = 0,$$

т. е. что в среднем $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$. Функция $\varphi_0(x)$ разрывна, более того, ее нельзя сделать непрерывной, изменяя ее значения только на множестве меры нуль. Так как предел в смысле сходимости в среднем единственный, то в пространстве N не существует элемента, предельного для $\{\varphi_n(x)\}$, хотя эта последовательность удовлетворяет условию (2). Напротив, в пространстве $L_2(\Omega)$ равенство (2) влечет за собой существование предельного элемента — это непосредственно следует из теоремы Риса — Фишера (§ 1). В нашем примере этот предельный элемент есть функция $\varphi_0(x)$.

Гильбертово пространство называется полным, если всякая последовательность его элементов, удовлетворяющая условию (2), *имеет предел*, в противном случае оно называется *неполным*. Из сказанного выше следует, что пространство N — неполное, $L_2(\Omega)$ — полное. Можно доказать также, что пространство $L_2(\Omega;\, \sigma)$ — полное.

Неполное гильбертово пространство можно сделать полным, добавив к нему некоторые новые элементы, подобно тому, как множество рациональных чисел дополняется до всей числовой прямой введением иррациональных чисел. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (2), но не имеет предела. Припишем последовательности $\{\varphi_n\}$ в качестве предела новый элемент φ, называемый *предельным* или *идеальным*.

Пусть предельные элементы φ и ψ определяются последовательностями $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ соответственно. Мы примем, что $\varphi = \psi$, если

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \psi_n \| = 0.$$

Скалярное произведение предельных элементов определим формулой

$$(\varphi, \psi) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, \psi_n); \tag{3}$$

тогда, очевидно,

$$\| \varphi \| = \lim_{n\to\infty} \| \varphi_n \|; \tag{4}$$

существование обоих пределов нетрудно доказать. Можно доказать, что присоединение к H всех предельных элементов делает H полным пространством. Конкретный характер предельных элементов зависит от пополняемого пространства. Так, пополнение пространства N приводит к $L_2(-1; 1)$; предельными элементами здесь оказываются квадратично суммируемые на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ разрывные функции. Пополнение пространства $L_2^{(r)}(\Omega)$ связано с понятием *обобщенных частных производных*; мы не можем здесь останавливаться на этом подробнее[1]).

В дальнейшем, говоря о гильбертовом пространстве, мы будем предполагать его полным.

Введем следующее, важное для дальнейшего, понятие. Множество M будем называть *плотным* в гильбертовом пространстве H, если каждый элемент $\varphi \in H$ может быть получен как предел последовательности $\varphi_n \in M$.

Если пространство H получено пополнением неполного пространства H', то H' плотно в H.

Последовательность, удовлетворяющая условию (2), называется *фундаментальной*. В полном пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится.

Множество M элементов гильбертова пространства называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Иначе говоря, множество M замкнуто, если из соотношений $\varphi_n \in M$ и $\varphi_n \to \varphi$ следует, что $\varphi \in M$.

---

[1]) О понятии обобщенной производной см. С. Л. Соболев [2], а также В. И. Смирнов [4]. Определение этого понятия см. ниже, стр. 133.

Обозначим через $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ множество функций, бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и обращающихся в нуль в некоторой окрестности (своей для каждой функции) границы S области Ω. Оказывается, что множество $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ (доказательство см., например, в книге автора [28]). Отсюда сразу следует, что в $L_2(\Omega)$ плотно множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющих на S любым однородным краевым условиям; здесь k — любое неотрицательное целое число. Доказательство очень просто: указанное множество содержит плотное множество $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$.

§ 4. Ортогональность и ортогональные ряды. Подпространства

Два элемента гильбертова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Конечная или бесконечная последовательность попарно ортогональных элементов называется *ортогональной системой*. Если все элементы ортогональной системы нормированы, т. е. норма каждого элемента равна единице, то система называется *ортонормированной*. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет соотношениям

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{1}$$

Ортогональную систему, не содержащую нулевого элемента, легко превратить в ортонормированную: для этого достаточно каждый элемент системы разделить на его норму.

Элементы ортонормированной системы линейно независимы; действительно, если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ попарно ортогональны и нормированы, то в их определителе Грама диагональные элементы равны единице, а боковые — нулю. Но тогда определитель Грама равен единице. По теореме § 2 элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы.

Если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$, и слагаемые попарно ортогональны, то

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \ldots + \|\varphi_n\|^2. \tag{2}$$

Пусть H — гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная в нем система. Мы будем называть эту систему *полной* в H, если не существует элемента H, кроме тождественного нуля, который был бы ортогонален ко всем элементам системы; в противном случае система называется *неполной*.

Если система $\{\varphi_n\}$ полная, то из равенств

$$(\varphi_n, \omega) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

вытекает, что $\omega = 0$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H и φ — произвольный элемент из H. Числа

$$a_k = (\varphi, \varphi_k) \tag{3}$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента φ по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$. Зададим натуральное число n и поставим задачу: выбрать коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы норма $\|\varphi - s_n\|$, где $s_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$, была минимальной. Как известно, решение этой задачи получится, если принять $\alpha_k = a_k$, где a_k — коэффициенты Фурье (3). При этом справедливо тождество

$$\|\varphi - s_n\| = \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2,$$

откуда вытекает *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|\varphi\|^2. \tag{4}$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)\,\varphi_k \tag{5}$$

называется *рядом Фурье*, или *ортогональным рядом*, элемента φ по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$. Если данное гильбертово пространство H полное, то ряд (5) всегда сходится; если s — сумма ряда (5), то разность $\varphi - s$ ортогональна ко всем φ_n, $n = 1, 2, \ldots$

Допустим теперь, что ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ полная. В этом случае элемент $\varphi - s$, ортогональный ко всем элементам системы, равен нулю и, следовательно,

$$\varphi = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k. \tag{6}$$

Мы приходим таким образом к следующей теореме:

Теорема 1. *Если пространство полное, то ряд Фурье любого его элемента по любой полной ортонормированной системе сходится к этому элементу, и справедливо так называемое уравнение замкнутости*

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2. \tag{7}$$

Большое значение в теории ортогональных рядов имеет так называемый *процесс ортогонализации Э. Шмидта*, позволяющий преобразовать любую последовательность линейно независимых элементов гильбертова пространства в ортонормированную. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность элементов гильбертова пространства, и пусть при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы. Положим

$$\psi_1 = \varphi_1, \qquad \omega_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|};$$

$$\psi_n = \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k)\,\omega_k; \qquad \omega_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}, \qquad n > 1.$$

Последовательность $\omega_1, \omega_2 \ldots$ ортонормирована; при этом, как нетрудно видеть, ω_n линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, а φ_n линейно выражается через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Теорема 2. *Пусть постоянные a_k таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, и пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

сходится (в смысле сходимости в рассматриваемом гильбертовом пространстве); постоянные a_k суть коэффициенты Фурье его суммы, и для этой суммы имеет место уравнение замкнутости.

Приведем одну лемму, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма. *Элемент, ортогональный ко всем элементам плотного множества, равен нулю.*

Особо важными оказываются те гильбертовы пространства, которые имеют плотное счетное множество. Такие пространства называются *сепарабельными*. Весьма важное для приложений пространство $L_2(\Omega)$ сепарабельно.

Теорема 3. *Для того чтобы в гильбертовом пространстве существовала полная счетная или конечная ортонормированная система, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было сепарабельным.*

Переходим к понятию *подпространства* и к связанным с ним понятиям *проекции* и *ортогональных подпространств*.

По определению, подпространство гильбертова пространства H есть линейное замкнутое множество элементов из H. Каждое подпространство само есть некоторое новое полное гильбертово пространство. Приведем несколько примеров подпространств пространства $L_2(\Omega)$.

Примеры. 1. Множество функций, удовлетворяющих равенству

$$(u,\ 1)=\int_{\Omega} u\,d\Omega=0,$$

очевидно, линейно и представляет собой подпространство функций, средние значения которых по области Ω равны нулю.

2. Подпространство образует также функции, тождественно равные постоянной (своей для каждой функции).

3. Пусть Ω совпадает с отрезком $(0, 2\pi)$ оси x. Множество функций, ряды Фурье которых содержат только синусы, образуют подпространство; очевидно, функции этого подпространства характеризуются тем, что они ортогональны к функциям $\cos nx$, $n=0, 1, 2, \ldots$

4. В пространстве $L_2(\Omega)$ векторных функций, определенных в трехмерной области Ω, рассмотрим три линейных множества векторов:

α) множество векторов, дивергенции которых равны нулю;

β) множество градиентов скалярных функций;

γ) множество градиентов таких скалярных функций, которые обращаются в нуль на границе области Ω.

Присоединив к каждому из этих множеств его предельные точки, получим подпространство.

Само гильбертово пространство H можно рассматривать как подпространство. Множество, содержащее только нулевой элемент, также является подпространством. Последние два подпространства называются *тривиальными*. Все подпространства примеров 1—4 нетривиальны.

Пусть даны гильбертово пространство H и его подпространство H_1. Пусть φ — произвольный элемент из H. Доказывается, что в H_1 существует один и только один элемент φ_1, обладающий тем свойством, что

$$\|\varphi-\varphi_1\|=\min_{\psi\in H_1}\|\varphi-\psi\|.$$

При этом элемент $\varphi_2=\varphi-\varphi_1$ ортогонален к любому элементу подпространства H_1 или, как говорят короче, ортогонален к подпространству H_1. Элемент φ_1 называется *ортогональной проекцией* элемента φ на подпространство H_1; слово «ортогональная» часто опускают и говорят просто «проекция». Таким образом, любой элемент $\varphi\in H$ разлагается в сумму $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где $\varphi_1\in H_1$ есть проекция φ на H_1, а φ_2 ортогонально к H_1.

Если $\varphi\in H_1$, то $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=0$; элементы подпространства совпадают со своими проекциями на это же подпространство.

Если пространство H сепарабельно, то его подпространства также сепарабельны, и проекцию можно строить так: если $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — ортонормированная система, полная в H_1, то

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\ \psi_k)\,\psi_k. \tag{8}$$

Пусть H_2 — совокупность всех элементов из H, ортогональных к подпространству H_1. Эта совокупность также есть подпространство. Любые два элемента ψ_1, ψ_2, где $\psi_1 \in H_1$ и $\psi_2 \in H_2$, ортогональны между собой; это коротко формулируют так: *подпространства H_1 и H_2 ортогональны.* Далее, как мы видели, любой элемент $\varphi \in H$ имеет вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_k \in H_k$; $k = 1, 2$. Этот факт формулируют, говоря, что H есть *ортогональная сумма подпространств* H_1 и H_2. Говорят также, что каждое из подпространств H_1 и H_2 есть *ортогональное дополнение* другого подпространства.

Если некоторое гильбертово пространство H представляет собой ортогональную сумму подпространств H_1 и H_2, то пишут

$$H = H_1 \oplus H_2.$$

Эту символическую формулу пишут также в виде

$$H_1 = H \ominus H_2; \qquad H_2 = H \ominus H_1.$$

Легко заметить полную аналогию между теорией проекций, изложенной в настоящем параграфе, и теорией проекций в обычном трехмерном пространстве. Подпространствами трехмерного пространства служат прямые или плоскости, проходящие через начало координат. Если данное подпространство представляет собой, например, прямую, то проходящая через начало координат плоскость, нормальная к этой прямой, есть ортогональное к ней подпространство; очевидно, трехмерное пространство есть ортогональная сумма из любой прямой и нормальной к ней плоскости, если и прямая и плоскость проходят через начало координат. В частности, например, трехмерное пространство есть ортогональная сумма плоскости XOY и оси OZ.

Любое подпространство, если оно содержит хотя бы два линейно независимых элемента, можно в свою очередь разложить в ортогональную сумму двух ортогональных подпространств; так, плоскость XOY есть ортогональная сумма осей OX и OY. Таким образом, можно прийти к понятию о разложении данного гильбертова пространства в ортогональную сумму любого (даже бесконечного) числа ортогональных подпространств. Так, трехмерное пространство есть ортогональная сумма осей OX, OY, OZ.

Нетрудно видеть, что подпространства примеров 1 и 2 настоящего параграфа ортогональны, и их ортогональная сумма дает пространство $L_2(\Omega)$. Как мы увидим ниже, подпространства α и γ примера 4 также ортогональны; их ортогональная сумма дает все векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

§ 5. Функционалы и операторы

Будем говорить, что на множестве M, принадлежащем гильбертову пространству H, определен функционал $l\varphi$, если каждому элементу $\varphi \in M$ приведено в соответствие некоторое число $l\varphi$. Множество M называется *областью определения функционала* l и обозначается через D_l.

Простейшим примером функционала является норма элемента. Функционалом является также скалярное произведение (φ, ψ), в котором второй множитель ψ фиксирован.

Функционал называется *линейным*, если M есть линеал и

$$l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 l\varphi_1 + a_2 l\varphi_2, \tag{1}$$

линейный функционал называется *ограниченным*, если

$$|l\varphi| \leqslant N\|\varphi\|. \tag{2}$$

Здесь a_1, a_2, N — постоянные, φ_1, φ_2, φ — элементы гильбертова пространства. Скалярное произведение (φ, ψ), где ψ фиксировано, дает пример линейного ограниченного функционала. Его линейность вытекает из аксиомы В § 2, а ограниченность — из неравенства Коши — Буняковского, которое показывает, что можно положить $N = \|\psi\|$. Норма элемента — функционал нелинейный.

Если l — линейный функционал, то, очевидно, $l0 = 0$.

Наименьшее из чисел N, удовлетворяющих неравенству (2), называется нормой ограниченного функционала $l\varphi$ и обозначается через $\|l\|$. Таким образом,

$$|l\varphi| \leqslant \|l\| \cdot \|\varphi\|, \tag{3}$$

причем $\|l\|$ нельзя заменить меньшим числом.

Функционал $l\varphi$ называется *непрерывным*, если

$$\lim_{\varphi \to \psi} l\varphi = l\psi. \tag{4}$$

Норма элемента есть непрерывный функционал. Это следует из теоремы 1 § 3.

Всякий линейный ограниченный функционал, определенный на всем пространстве, непрерывен. Действительно, пусть $\varphi \to \psi$. Пользуясь линейностью функционала и неравенством (2), найдем

$$|l\varphi - l\psi| = |l(\varphi - \psi)| \leqslant N\|\varphi - \psi\| \xrightarrow[\varphi \to \psi]{} 0. \tag{5}$$

Из доказанного, между прочим, вытекает непрерывность скалярного произведения. Можно доказать и обратное утверждение: всякий линейный и непрерывный функционал ограничен.

Теорема 1 (*теорема Ф. Риса*). *Всякий ограниченный в гильбертовом пространстве H функционал l имеет вид скалярного произведения*

$$l\varphi = (\varphi, \psi), \tag{6}$$

где ψ — фиксированный элемент пространства H. Элемент ψ определяется единственным образом.

Часто возникает задача о расширении функционала, т. е. об определении функционала на более широком множестве. Во многих таких случаях большую роль играет следующая

Теорема 2. *Заданный на плотном множестве линейный ограниченный функционал можно, и притом лишь единственным образом, расширить на все пространство с сохранением нормы.*

Важную роль в последующем будут играть *билинейные* и *квадратичные* функционалы. Пусть в гильбертовом пространстве H задано плотное линейное множество M, и пусть каждой паре φ, ψ его элементов приведено в соответствие одно и только одно число $\Phi(\varphi, \psi)$. Будем называть $\Phi(\varphi, \psi)$ билинейным функционалом, если: 1) при фиксированном ψ функционал Φ — линейный; 2) справедливо тождество

$$\Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}. \tag{7}$$

Если $\Phi(\varphi, \psi)$ — билинейный функционал, то функционал

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi, \varphi) \tag{8}$$

называется *однородным квадратичным функционалом* или *квадратичной формой*. Квадратичная форма удовлетворяет тождеству

$$\Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\varphi, \psi) + \overline{\Phi(\varphi, \psi)} + \Phi(\psi). \tag{9}$$

Если $\Phi(\varphi)$ — квадратичная форма, а l — линейный функционал, то выражение

$$F(\varphi) = \Phi(\varphi) - l\varphi - \overline{l\varphi} + \text{const} \tag{10}$$

называется *квадратичным функционалом.*

В случае вещественного гильбертова пространства соотношения (7), (9) и (10) заменяются следующими:

$$\Phi(\varphi, \psi) = \Phi(\psi, \varphi), \tag{7_1}$$

$$\Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi) + 2\Phi(\varphi, \psi) + \Phi(\psi), \tag{9_1}$$

$$F(\varphi) = \Phi(\varphi) - 2l\varphi + \text{const}. \tag{10_1}$$

Будем говорить, что на некотором множестве D_A элементов гильбертова пространства H определен *оператор* A, если каждому элементу $\varphi \in D_A$ приведен в соответствие по некоторому закону один и только один элемент ψ гильбертова пространства. Мы будем писать $\psi = A\varphi$. Множество D_A называется *областью определения* оператора $A\varphi$, а множество R_A всевозможных элементов ψ — *областью значений* того же оператора. Можно сказать, что $A\varphi$ есть функция, которая переводит элемент $\varphi \in D_A$ в элемент $\psi \in R_A$.

Необходимо отметить, что в определение оператора существенно входит его область определения. Два оператора A и B считаются равными, если совпадают их области определения и если для каждого элемента φ, входящего в область их определения, $A\varphi = B\varphi$. Если D_A есть часть D_B и для каждого элемента $\varphi \in D_A$ имеет место равенство $A\varphi = B\varphi$, то оператор B называется *расширением* оператора A.

Оператор A называется *линейным*, если его область определения есть линеал и (a_1, a_2 — постоянные)

$$A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2. \tag{11}$$

Если A — линейный оператор, то $A0 = 0$. Оператор называется *непрерывным*, если

$$\lim_{\varphi \to \psi} A\varphi = A\psi, \tag{12}$$

и *ограниченным*, если он линейный и

$$\| A\varphi \| \leqslant C \| \varphi \|, \qquad C = \text{const}. \tag{13}$$

Наименьшая из постоянных C, удовлетворяющих неравенству (13), называется *нормой* ограниченного оператора A и обозначается символом $\|A\|$. Очевидно,

$$\| A\varphi \| \leqslant \| A \| \cdot \| \varphi \|. \tag{14}$$

Линейный ограниченный оператор непрерывен. Справедливо и обратное утверждение: линейный непрерывный оператор ограничен.

В последующем мы будем рассматривать только линейные операторы; говоря об операторе, мы всегда будем подразумевать, что он линейный.

Теорема, аналогичная теореме 2 для функционалов, справедлива и для операторов:

Теорема 3. *Заданный на плотном множестве линейный ограниченный оператор можно расширить на все пространство с сохранением нормы.*

Оператор, который переводит каждый элемент пространства в себя самого, называется *тождественным*. Мы будем обозначать его через E, так что $E\varphi \equiv \varphi$. Оператор, который переводит каждый элемент пространства в нулевой элемент, называется *нулевым*, или *оператором аннулирования*. Оба эти оператора линейные и ограниченные; норма тождественного оператора равна единице, норма нулевого оператора — нулю.

Суммой и произведением операторов A и B называются операторы $A+B$ и AB, определяемые соотношениями

$$(A+B)\varphi = A\varphi + B\varphi, \qquad AB\varphi = A(B\varphi).$$

Вообще говоря, $AB \neq BA$; так, например, если

$$A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}; \qquad B\varphi = x\int_a^b \varphi(s)\,ds,$$

то

$$AB\varphi = \int_a^b \varphi(s)\,ds,$$

$$BA\varphi = x\int_a^b \varphi'(s)\,ds = x[\varphi(b) - \varphi(a)] \neq AB\varphi.$$

Принято обозначать $AA = A^2$, $AA^2 = A^3$ и т. д.; вообще, $A^n = AA^{n-1}$. Очевидно, $A^mA^n = A^{m+n}$.

Пусть операторы A и B ограничены. По неравенству треугольника

$$\|(A+B)\varphi\| \leqslant \|A\varphi\| + \|B\varphi\|,$$

и, в силу ограниченности A и B,

$$\|(A+B)\varphi\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|\varphi\|.$$

Отсюда по определению нормы оператора

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{15}$$

Аналогично

$$\|AB\varphi\| = \|A(B\varphi)\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\varphi\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|\varphi\|$$

и, следовательно,

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|. \tag{16}$$

Важную роль во всем последующем играет понятие *обратного оператора.*

Пусть D_A есть область определения оператора A и R_A — его область значений. По определению каждому элементу D_A отвечает один и только один элемент R_A. С другой стороны, каждому элементу R_A отвечает по крайней мере один элемент D_A. Допустим, что каждому элементу R_A соответствует только один элемент D_A; это соответствие определяет некоторый оператор B, имеющий R_A своей областью определения и D_A — своей областью значений. Оператор B называется обратным по отношению к A. Очевидно также, что оператор A обратный по отношению к B. Мы будем писать $B = A^{-1}$; вместо $(A^{-1})^n$ пишут A^{-n}.

Из определения обратного оператора вытекает следующее: если A и B — взаимно обратные операторы и $\varphi \in D_A$, то имеет место равенство $BA\varphi = \varphi$; точно так же, если $\psi \in D_B$, то $AB\psi = \psi$. Очевидно, что оператор, обратный линейному, также линейный.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор A имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$A\varphi = 0$$

имело единственное решение $\varphi = 0$.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор A^{-1} был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $k > 0$ такая, что при всех $\varphi \in D_A$*

$$\| A\varphi \| \geqslant k \| \varphi \|.$$

Оператор A называется *симметричным*, если он определен на плотном множестве и если для любых элементов φ и ψ из области определения этого оператора имеет место тождество

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi). \tag{17}$$

Следующая теорема дает простой критерий симметричности оператора в комплексном гильбертовом пространстве; в вещественном пространстве этот критерий, очевидно, неверен.

Теорема 6. *Для того чтобы оператор A, определенный на плотном множестве, был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(A\varphi, \varphi)$ было вещественным для любого $\varphi \in D_A$.*

Симметричный оператор называется *самосопряженным*, если выполнены следующие условия: пусть ψ и ψ^* — элементы пространства, обладающие тем свойством, что для любого элемента $\varphi \in D_A$ справедливо тождество

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*);$$

тогда $\psi \in D_A$ и $A\psi = \psi^*$.

Пусть H — гильбертово пространство, H_1 — его подпространство. Оператор, который каждому элементу $\varphi \in H$ сопоставляет его ортогональную проекцию на H_1, называется *оператором ортогонального проектирования*, а также *ортогональным проектором*, или просто *проектором* на H_1. Ортогональный проектор P характеризуется тремя свойствами: 1) $D_P = H$; 2) P — самосопряженный оператор; 3) $P^2 = P$. Ортогональный проектор ограничен: если H_1 состоит только из нулевого элемента, то $\|P\| = 0$; во всех остальных случаях $\|P\| = 1$.

Иногда рассматривают операторы *косого проектирования*. Если Q — такой оператор, то он также приводит в соответствие каждому элементу $\varphi \in H$ некоторый элемент $\varphi' \in H_1$, где H_1 — заданное подпространство; при этом $D_Q = H$ и $Q^2 = Q$. Норма оператора косого проектирования может быть сколь угодно большой.

§ 6. Вполне непрерывные операторы

Оператор A называется *вырожденным* или *конечномерным*, если он может быть представлен в виде

$$Au = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \varphi_k, \tag{1}$$

где число n конечное, а φ_k и ψ_k — данные элементы рассматриваемого гильбертова пространства. Оператор A называется *вполне непрерывным*[1]), если этот оператор может быть представлен в виде

$$Au = A'_\varepsilon u + A''_\varepsilon u, \tag{2}$$

где A'_ε — вырожденный оператор, а норма оператора A''_ε может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Отметим некоторые свойства вполне непрерывных операторов.

а) *Всякий вырожденный оператор вполне непрерывен.* Действительно, вырожденный оператор можно представить в форме (2) — достаточно положить $A''_\varepsilon = 0$.

б) *Вполне непрерывный оператор ограничен.*

в) *Сумма конечного числа вполне непрерывных операторов вполне непрерывна.*

г) *Если оператор A ограничен, а оператор B вполне непрерывен, то операторы BA и AB вполне непрерывны.*

Важным примером вполне непрерывного в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора является интегральный оператор Фредгольма

$$Ku = \int_\Omega K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q, \tag{3}$$

ядро которого $K(P, Q)$ подчинено условию

$$B^2 = \int_\Omega \int_\Omega |K^2(P, Q)|\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty. \tag{4}$$

---

[1]) Обычно принимается другое определение вполне непрерывного оператора, эквивалентное данному (см. ниже теорему 1).

Другой важный пример оператора, вполне непрерывного в $L_2(\Omega)$, это *интегральный оператор со слабой особенностью*. Так называется оператор вида

$$\int\limits_{\Omega} \frac{A(P, Q)}{r^{\alpha}} u(Q)\, d_Q\Omega,$$

где Ω — конечная область m-мерного пространства, $A(P, Q)$ — ограниченная измеримая функция, α — постоянная, причем $\alpha < m$.

Доказательство полной непрерывности оператора Фредгольма и оператора со слабой особенностью можно найти, например, в книге автора [20].

Понятие вполне непрерывного оператора тесно связано с понятием *компактного множества*. Множество элементов гильбертова пространства называется компактным, если из любой бесконечной части этого множества можно выделить сходящуюся последовательность.

Основное свойство вполне непрерывного оператора, которое обычно и принимается за его определение, дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Для того чтобы оператор был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он преобразовывал любое ограниченное множество в компактное.*

Рассмотрим уравнение

$$u - \lambda T u = f, \tag{5}$$

где u — искомый, а f — данный элемент некоторого гильбертова пространства H, T — вполне непрерывный в этом пространстве оператор и λ — численный параметр. Чтобы решить это уравнение, поступим следующим образом. Будем считать, что λ может принять любое фиксированное значение, по модулю не превосходящее некоторого постоянного R, так что $|\lambda| \leqslant R$. По формуле (2) положим $T = T' + T''$, где оператор T' — вырожденный, а относительно оператора T'' потребуем, чтобы

$$\| T'' \| \leqslant 1/(2R).$$

Тогда

$$\| u - \lambda T'' u \| \geqslant \| u \| - |\lambda| \| T'' u \| \geqslant \| u \|/2,$$

из теоремы 5 § 5 вытекает, что *оператор* $(E - \lambda T'')^{-1}$ *существует и ограничен*. Нетрудно установить его вид, именно непосредственная проверка показывает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k (E - \lambda T'') u = (E - \lambda T'') \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k u = u$$

и, следовательно,

$$(E-\lambda T'')^{-1}u=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k (T'')^k u. \tag{6}$$

Ряд (6) сходится, каков бы ни был элемент u. Действительно, по формуле (16) § 5

$$\|\lambda^n (T'')^n u\| \leqslant |\lambda|^n \cdot \|(T'')^n\| \cdot \|u\| \leqslant |\lambda|^n \cdot \|T''\|^n \cdot \|u\|.$$

Но $|\lambda| \leqslant R$, а $\|T''\| \leqslant 1/(2R)$, поэтому

$$\|\lambda^n (T'')^n u\| \leqslant \frac{1}{2^n}\|u\|,$$

и сходимость ряда вытекает из того, что его общий член не превосходит общего члена сходящейся прогрессии. Заметим, что оператор $(E-\lambda T'')^{-1}$ определен на всем пространстве, поскольку ряд (6) сходится при любом u. Наконец,

$$\|(E-\lambda T'')^{-1}u\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n (T'')^n u\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda^n (T'')^n u\| \leqslant$$
$$\leqslant \|u\| \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\|u\|;$$

последнее неравенство означает, что $\|(E-\lambda T'')^{-1}\| \leqslant 2$.

Уравнение (5) перепишем в виде

$$u-\lambda T''u-\lambda T'u=f.$$

Применив к его обеим частям оператор $(E-\lambda T'')^{-1}$, мы преобразуем это уравнение в ему эквивалентное

$$u-\lambda (E-\lambda T'')^{-1} T'u = F_\lambda; \quad F_\lambda=(E-\lambda T'')^{-1} f. \tag{7}$$

Далее, пусть

$$T'u=\sum_{k=1}^{n}(u, \psi_k)\varphi_k;$$

элементы φ_k, так же как и элементы ψ_k, можно считать линейно независимыми. Теперь

$$(1-\lambda T'')^{-1}T'u=\sum_{k=1}^{n}(u, \psi_k)\omega_{\lambda, k}; \quad \omega_{\lambda, k}=(E-\lambda T'')^{-1}\varphi_k. \tag{8}$$

Элементы $\omega_{\lambda, k}$ линейно независимы. Действительно, пусть постоянные α_k таковы, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = 0$. Тогда

$$(E - \lambda T'') \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (E - \lambda T'') \omega_{\lambda, k} = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0.$$

Так как φ_k линейно независимы, то $\alpha_k = 0$, что и требовалось доказать.

Обозначим $C_k = (u, \psi_k)$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_{\lambda, k} = F_\lambda, \tag{9}$$

и дело сводится к определению постоянных C_k.

Пользуясь формулой (8), приведем уравнение (7) к виду

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k) \omega_{\lambda, k} = F_\lambda.$$

Заменяя здесь u его выражением из (9) и пользуясь линейной независимостью $\omega_{\lambda, k}$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_k:

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(\lambda) C_k = b_m(\lambda), \qquad m = 1, 2, \ldots, a, \tag{10}$$

эквивалентную уравнению (5). Здесь положено

$$a_{mk}(\lambda) = (\omega_{\lambda, k}, \psi_m), \qquad b_m(\lambda) = (F_\lambda, \psi_m).$$

Очевидно, коэффициенты a_{mk}, а следовательно, и определитель

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

суть функции от λ, голоморфные в круге $|\lambda| \leqslant R$ комплексной λ-плоскости[1]. Отсюда следует, что в круге $|\lambda| \leqslant R$ определитель $D_R(\lambda)$ может иметь только конечное число корней.

[1]) При этом $D_R(\lambda) \neq 0$, так как, очевидно, $D_R(0) = 1$.

Если $D_R(\lambda)=0$, то однородная система, получаемая из (10) заменой правых частей нулями, имеет нетривиальное решение, т. е. такое решение, в котором не все C_m равны нулю. Тогда, очевидно, однородное уравнение

$$u-\lambda Tu=0$$

имеет нетривиальное решение, и рассматриваемое λ есть величина, обратная собственному числу оператора T. Такие λ называются также *характеристическими* числами. Если же $D_R(\lambda)\neq 0$, то система (10), а с ней и уравнение (5) имеют единственное решение, так что существует оператор $(E-\lambda T)^{-1}$. Мы будем обозначать его через Γ_λ. Значения λ, для которых Γ_λ существует, будем называть *правильными*.

Для уравнения (5), содержащего вполне непрерывный оператор, сохраняет силу так называемая *альтернатива Фредгольма*: либо неоднородное уравнение разрешимо, и притом единственным образом, при любом свободном члене f, и тогда соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение $u=0$, либо неоднородное уравнение разрешимо не при любом свободном члене, и тогда соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения Первая часть альтернативы имеет место, если λ правильное, вторая, если λ характеристическое.

Как мы видим, в круге любого радиуса $|\lambda|\leqslant R$ содержится только конечное число характеристических чисел уравнения (5); отсюда следует, что этих чисел самое большее счетное множество на всей комплексной λ-плоскости. Все остальные значения λ правильные.

Если оператор Γ_λ существует, то он ограничен. Докажем это. Решив систему (10) и подставив ее решение в (9), мы найдем после простых преобразований

$$u=\Gamma_\lambda f=(E-\lambda T'')^{-1}f+\frac{1}{D_R(\lambda)}\sum_{k,\,m=1}^{n}\Delta_{km}(\lambda)\left((E-\lambda T'')^{-1}f,\ \psi_k\right)\omega_{\lambda,\,m}, \tag{11}$$

где $\Delta_{km}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении k-й строки и m-го столбца в определителе $D_R(\lambda)$.

Выше мы видели, что $\|(E-\lambda T'')^{-1}\|\leqslant 2$. Теперь формула (11) дает

$$\|\Gamma_\lambda f\|\leqslant 2\|f\|+\sum_{k,\,m=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right|\cdot\left|\left((E-\lambda T'')^{-1}f,\ \psi_k\right)\right|\cdot\|\omega_{\lambda,\,m}\|.$$

Но по неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\left((E-\lambda T'')^{-1}f,\ \psi_k\right)\right| \leqslant \left\|(E-\lambda T'')^{-1}f\right\|\cdot\|\psi_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|(E-\lambda T'')^{-1}\right\|\cdot\|f\|\cdot\|\psi_k\| \leqslant 2\|\psi_k\|\cdot\|f\|.$$

Отсюда

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leqslant 2\left\{1+\sum_{k,\ m=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right|\cdot\|\omega_{\lambda,\ m}\|\cdot\|\psi_k\|\right\}\|f\|,$$

и, следовательно,

$$\|\Gamma_\lambda\| \leqslant 2\left\{1+\sum_{k,\ m=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right|\cdot\|\omega_{\lambda,\ m}\|\cdot\|\psi_k\|\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\{T_n\}$ — вполне непрерывные операторы в некотором гильбертовом пространстве H, которые стремятся к вполне непрерывному оператору T, в том смысле, что*

$$\|T-T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пусть, далее, f_n — элементы того же пространства, стремящиеся к некоторому элементу f. Если λ — правильное значение уравнения

$$u-\lambda Tu=f, \tag{12}$$

то при достаточно большом n это же λ будет правильным и для уравнения

$$u_n-\lambda T_n u_n=f_n, \tag{13}$$

при этом решение уравнения (13) *стремится, при $n\to\infty$, к решению уравнения* (12).

Рассмотрим уравнение

$$v-\lambda T_n v=g, \tag{14}$$

где g — произвольный элемент из H. Уравнение (14) запишем в виде

$$v-\lambda Tv-\lambda(T_n-T)v=g. \tag{15}$$

По условию теоремы существует оператор Γ_λ; применив его к обеим частям уравнения (15), получим

$$v-\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)v=\Gamma_\lambda g. \tag{16}$$

Имеем, далее,

$$\|\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)\| \leqslant |\lambda|\cdot\|\Gamma_\lambda\|\cdot\|T_n-T\|, \tag{17}$$

что по условию теоремы будет сколь угодно малым при n достаточно большом. Пусть n настолько велико, что

$$\|\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)\| < \frac{1}{2}.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, относящиеся к ряду (6), убедимся, что оператор $[E-\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)]^{-1}$ существует, определен на всем пространстве и его норма не превосходит 2.

Теперь из (16) находим решение уравнения (14):

$$v=[E-\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)]^{-1}\Gamma_\lambda g.$$

Отсюда видно, что при указанных n существует оператор

$$\Gamma_{n\lambda}=(E-\lambda T_n)^{-1}=[E-\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)]^{-1}\Gamma_\lambda; \tag{18}$$

этим доказано, что рассматриваемое значение λ — правильное для уравнения (13).

Чтобы установить вторую часть теоремы, докажем сперва, что $\|\Gamma_{n\lambda}-\Gamma_\lambda\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Для краткости обозначим

$$\lambda\Gamma_\lambda(T_n-T)=B_n;$$

из (17) видно, что $\|B_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Теперь по формулам (18) и (6)

$$\Gamma_{n\lambda}u=\sum_{k=0}^{\infty}B_n^k\Gamma_\lambda u,$$

откуда

$$\Gamma_{n\lambda}u-\Gamma_\lambda u=\sum_{k=1}^{\infty}B_n^k\Gamma_\lambda u$$

и

$$\|\Gamma_{n\lambda}-\Gamma_\lambda\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|B_n\|^k\cdot\|\Gamma_\lambda\|=\frac{\|B_n\|\cdot\|\Gamma_\lambda\|}{1-\|B_n\|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{19}$$

Теперь легко доказать вторую часть теоремы. Имеем

$$u_n-u=\Gamma_{n\lambda}f_n-\Gamma_\lambda f=(\Gamma_{n\lambda}-\Gamma_\lambda)f_n+\Gamma_\lambda(f_n-f).$$

Отсюда

$$\|u_n-u\|\leqslant\|\Gamma_{n\lambda}-\Gamma_\lambda\|\cdot\|f_n\|+\|\Gamma_\lambda\|\cdot\|f_n-f\|.$$

Так как $\|f_n\|\to\|f\|$, то $\|f_n\|$ ограничена; в силу (19) первое слагаемое стремится к нулю. Стремление к нулю второго слагаемого очевидно. Окончательно $\|u_n-u\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $\|T_n-T\|\to 0$, где T и T_n — вполне непрерывные операторы, то характеристические числа уравнения $u-\lambda Tu=0$ получаются предельным переходом, при $n\to\infty$, из характеристических чисел уравнения $u_n-\lambda T_n u_n=0$.*

Доказательство основано на простом замечании, что при достаточно малом изменении оператора T сколь угодно мало изменяются элементы определителя $D_R(\lambda)$, а следовательно, и сам определитель. Пусть λ_0 — какой-либо корень $D_R(\lambda)$, лежащий в круге $|\lambda|\leqslant R$, и пусть p — его кратность. Окружим λ_0

кругом достаточно малого радиуса ρ. Тогда внутри и на окружности этого круга других корней $D_R(\lambda)$, кроме λ_0, не будет. В частности, на окружности $|\lambda-\lambda_0|=\rho$ определитель $D_R(\lambda)$ отличен от нуля. Обозначим

$$q=\min_{|\lambda-\lambda_0|=\rho}|D_R(\lambda)|,\qquad q>0.$$

Выберем теперь N столь большим, чтобы при $n\geqslant N$ на окружности $|\lambda-\lambda_0|=\rho$ было

$$|D_R(\lambda)-D_R^{(n)}(\lambda)|<q,$$

где $D_R^{(n)}(\lambda)$ — определитель (9), соответствующий оператору T_n. По теореме Руше[1]) $D_R^{(n)}(\lambda)$ имеет в круге $|\lambda-\lambda_0|<\rho$ ровно p корней. Обозначим их $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{np}$. Очевидно,

$$|\lambda_{nj}-\lambda_0|<\rho,\qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,p,\ n\geqslant N.$$

Так как ρ можно выбрать сколь угодно малым, то последнее неравенство равносильно утверждению, что

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{nj}=\lambda_0,\qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,p.$$

Важную роль играет вопрос о характеристических числах симметричного вполне непрерывного оператора. Сформулируем некоторые относящиеся сюда предложения.

1. Характеристические числа симметричного вполне непрерывного оператора вещественны (ср. ниже, § 39).

2. Пусть T — вполне непрерывный оператор, и пусть существует хотя бы один элемент u' такой, что $(Tu',u')>0$. Тогда наименьшее положительное характеристическое число λ_1 оператора T определяется формулой

$$\lambda_1=\inf\frac{\|u\|^2}{(Tu,\ u)};\tag{20}$$

нижняя грань берется по всем элементам u таким, что $(Tu,u)>0$.

3. Аналогично, пусть оператор T вполне непрерывен, и пусть существует хотя бы один элемент u такой, что $(Tu,u)<0$. Тогда наименьшее по абсолютной величине отрицательное характеристическое число λ_{-1} оператора T определяется формулой

$$\lambda_{-1}=\sup\frac{\|u\|^2}{(Tu,\ u)};\tag{21}$$

верхняя грань берется по множеству тех элементов u, для которых $(Tu,u)<0$.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов [2].

ГЛАВА II
ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 7. Краевая задача и ее оператор

Уравнения в частных производных математической физики распадаются на два больших класса. Уравнения первого класса описывают процессы, в которых интересующие исследователя искомые величины заметно меняются с течением времени, так что эти искомые суть функции координат и времени. Наиболее простой и важный представитель этого класса — волновое уравнение (С2, **171**), частным случаем которого является уравнение колебаний струны. Другой важный пример уравнений того же класса представляет собой уравнение теплопроводности (С2, **203**). Такими уравнениями мы в данной книге заниматься почти не будем. Уравнения второго класса описывают явления стационарные, в которых интересующие исследователя величины с течением времени не изменяются или по крайней мере изменяются пренебрежимо мало. Чаще всего такие уравнения принадлежат к так называемому *эллиптическому типу*[1]. Рассмотрим одну из простейших стационарных задач математической физики.

Пусть некоторое тело неравномерно нагрето, так что его температура, которую мы обозначим через U, есть функция координат переменной точки тела. Если внутри тела нет источников тепла, то эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа с тремя независимыми переменными (С2, **112**)

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0; \tag{1}$$

если мы хотим узнать распределение температур внутри тела, то надо это уравнение проинтегрировать, т. е. надо найти функцию удовлетворяющую этому уравнению. Нетрудно, однако, видеть, что уравнению Лапласа удовлетворяет бесчисленное множество функций, между тем физически ясно, что в данном теле, находящемся в данных условиях, распределение температур должно быть вполне определенным. Это значит, что при реше-

---

[1]) См., например, И. Г. Петровский [1].

нии нашей задачи мы не можем исходить только из уравнения Лапласа: к нему следует добавить еще некоторые дополнительные условия. К этим условиям можно прийти, например, так: мы имеем возможность непосредственно измерить температуру в любой точке поверхности данного тела. Допустим, что мы измерили температуру во многих точках, достаточно густо расположенных на поверхности тела. Можно тогда практически принять, что нам известна температура в любой точке поверхности тела — это и может служить дополнительным условием при интегрировании уравнения Лапласа. Обозначим буквой Ω пространственную область, заполненную нагретым телом, буквой S — его поверхность. Пусть, далее, P означает произвольную точку на поверхности S и $f(P)$ — известную нам температуру тела в точке P его поверхности. Наше дополнительное условие можно записать так:

$$U = f(P) \quad \text{на } S,$$

или, несколько более сжато,

$$U|_S = f(P). \tag{2}$$

Задачу о распределении температур можно теперь математически сформулировать так: *найти функцию $U(x, y, z)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа внутри области и принимает заданные значения на ее границе S*; в математической физике эта задача известна под названием *задачи Дирихле*. Условие, что искомая функция принимает на S заданные значения, называется *граничным*, или *краевым условием*, так как оно относится к поведению искомой функции на границе области.

Краевые условия могут быть и иного типа, чем в задаче Дирихле. Так, допустим, что нам известна температура U_0 окружающей среды, и пусть тепло испускается в эту среду через границу тела S. По закону теплопроводности, сформулированному Ньютоном, поток тепла через границу пропорционален разности температур внешней среды и границы тела. Этот закон приводит нас к краевому условию вида

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} + h(U - U_0) = 0 \quad \text{на } S,$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности S, h — некоторый коэффициент. Полагая $hU_0 = \varphi(P)$, можно новое краевое условие записать в виде

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \nu} + hU\right]_S = \varphi(P). \tag{3}$$

Задачу интегрирования уравнения Лапласа при краевом условии (3) часто называют *смешанной задачей*.

Если в левой части условия (3) положить $h = 0$, то получится новое краевое условие

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_S = \varphi(P); \tag{4}$$

задачу интегрирования Лапласа при этом условии обычно называют *задачей Неймана.*

Задача Неймана играет большую роль не только в теории теплопроводности, но и в ряде других случаев. Так, например, задача кручения упругих стержней сводится к отысканию функции двух переменных $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет «двумерному» уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

в области основания стержня, а на границе этой области удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y).$$

К задаче Неймана сводятся также задачи об изгибе упругого стержня поперечной силой, об обтекании твердого тела потоком идеальной жидкости и многие другие.

Итак, мы выяснили, что относительно уравнения Лапласа целесообразно ставить и решать три задачи, которые различаются только краевыми условиями, сопутствующими уравнению; это суть задачи Дирихле, Неймана и смешанная. Иногда их называют просто первой, второй и третьей краевыми задачами.

Уравнение Лапласа — простейший и наиболее важный представитель класса эллиптических уравнений. В математической физике часто встречаются и другие уравнения этого же класса. Так, если внутри неравномерно нагретого тела распределены источники тепла интенсивности $f(x, y, z)$, то температура $U(x, y, z)$ этого тела удовлетворяет уже не уравнению Лапласа, а так называемому *уравнению Пуассона* (или *неоднородному уравнению Лапласа*)

$$\Delta U = -\frac{1}{k} f(x, y, z), \tag{5}$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности. Может случиться, что тело неоднородно, так что k есть не постоянная, а функция координат, тогда уравнение (5) заменяется следующим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -f(x, y, z); \tag{5_1}$$

коэффициенты этого уравнения уже переменные. Уравнению (5) или (5_1) может сопутствовать краевое условие одного из типов

(2), (3) или (4). Можно ставить для названных уравнений и другие краевые условия, но их значение невелико, и мы ими здесь заниматься не будем; отметим только тот случай, встречающийся на практике, когда граница области распадается на части, на каждой из которых задано одно из условий вида (2). (3) или (4). Задача интегрирования дифференциального уравнения при тех или иных краевых условиях называется *краевой задачей.*

В прикладных вопросах часто приходится интегрировать дифференциальные уравнения эллиптического типа с двумя или тремя независимыми переменными, роль которых обычно играют декартовы координаты переменной точки пространства. Как мы увидим ниже, ни постановка основных задач, ни развиваемые в настоящей книге методы их решения не зависят сколько-нибудь существенно от числа измерений пространства. Поэтому, чтобы упростить изложение, мы будем говорить о пространстве m измерений, допуская при этом, что m может равняться двум или трем; во многих случаях, впрочем, искомая функция зависит только от одной независимой переменной, и тогда $m=1$. Отметим тут же, что с теоретической точки зрения число m измерений пространства может быть каким угодно.

Уравнений второго порядка эллиптического типа недостаточно для того, чтобы изучать даже важнейшие стационарные явления. Так, теория изгиба тонких пластинок приводит к уравнению *четвертого* порядка

$$\Delta(\Delta w) = \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = f(x, y);$$

для его интегрирования искомую функцию $w(x, y)$ подчиняют тем или иным краевым условиям в зависимости от способа закрепления края пластинки. Эти условия будут подробнее рассмотрены в § 30. В ряде случаев приходится прибегать к *системам* дифференциальных уравнений в частных производных. Так, в теории упругости мы имеем дело с системой трех уравнений второго порядка с тремя независимыми переменными; три уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, но только с двумя независимыми переменными, определяют смещения точек тонкой упругой оболочки. Число таких примеров нетрудно увеличить.

С краевой задачей математической физики можно связать некоторый оператор — «оператор данной краевой задачи», действующий в подходящем гильбертовом пространстве; при этом данная задача может быть записана в виде уравнения

$$Au = f, \tag{6}$$

где A — оператор краевой задачи, u и f — элементы гильбертова пространства, первый искомый, а второй данный. Поясним это утверждение на примере.

Пусть в области Ω требуется найти решение неоднородного уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(P) \tag{7}$$

при однородном краевом условии задачи Дирихле

$$u|_S = 0; \tag{8}$$

здесь Ω означает область в m-мерном евклидовом пространстве, P — переменную точку этой области, S — ее границу. Для простоты допустим, что функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ (см. § 1). Очевидно, свободный член f уравнения (7) принадлежит этому пространству; будем считать, что ему принадлежит и искомая функция u. В пространстве $L_2(\Omega)$ выделим множество M функций, обладающих следующими свойствами: 1) функции из множества M непрерывны в $\bar{\Omega}$ вместе со своими первыми и вторыми производными; 2) функции из множества M обращаются в нуль на S. На множестве M зададим оператор, который обозначим через A и который действует по формуле

$$Au = -\Delta u. \tag{9}$$

Ясно, что задачу (7)—(8) можно теперь записать в виде (6).

Аналогично можно строить операторы и других краевых задач, если их краевые условия однородны. В случае неоднородных краевых условий построение несколько усложняется; мы не станем его проводить, так как в дальнейшем мы им не будем пользоваться.

При исследовании дифференциальных операторов математической физики играют большую роль *формула интегрирования по частям* и *формулы Грина*.

Формула интегрирования по частям для кратных интегралов получается как простое следствие из формулы Остроградского (см. С2, 63). Для случая двойного интеграла она переходит в формулу Грина (см. С2, 69). Формула Остроградского имеет следующий вид:

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) d\Omega = \int_S (\varphi \cos(\nu x) + \psi \cos(\nu y) + \omega \cos(\nu z))\, dS;$$

область Ω предполагается трехмерной. Здесь dS — элемент площади поверхности S (длины дуги кривой S, если область Ω плоская), ν — внешняя нормаль к S. Если φ, ψ, ω трактовать как составляющие некоторого вектора $\mathbf{w}$, то формулу Остроградского можно представить в форме

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{w}\, d\Omega = \int_S w_\nu\, dS,$$

которую будем называть векторной формой формулы Остроградского; через w_ν обозначена проекция вектора $\mathbf{w}$ на направление внешней нормали к S. Положим $\psi = \omega = 0$, $\varphi = uv$. Выполнив дифференцирование под знаком объемного интеграла и перенеся направо одно из слагаемых, мы и получим формулу интегрирования по частям:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\nu x)\, dS.$$

Если область Ω — не обязательно трехмерная, а, вообще говоря, m-мерная, где m может быть как больше, так и меньше трех, и если декартовы координаты обозначить через $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то формулу интегрирования по частям в общем случае можно записать так:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\nu x_i)\, dS. \tag{10}$$

Формула интегрирования по частям верна, если, например, обе функции u, v и их первые производные непрерывны в замкнутой области $\Omega + S$, а граница S — кусочно гладкая.

Формулу интегрирования по частям применим к выводу так называемых *формул Грина*, играющих большую роль в математической физике. Пусть $u(P)$ и $v(P)$ — функции, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области Ω, а в остальном — произвольные. Пусть, далее, $A_{ik}(P)$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$, — данные функции, непрерывные вместе со своими производными в той же замкнутой области; буквой m, как обычно, мы обозначили число измерений пространства. Примем еще, что

$$A_{ik}(P) = A_{ki}(P),$$

каковы бы ни были значки i и k. Рассмотрим дифференциальное выражение[1])

$$Lu = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\, u,$$

[1]) Причина, по которой мы считаем удобным ставить знак минус в выражении Lu, будет выяснена в § 27.

где $C(P)$ — функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Мы будем также записывать это короче в виде

$$Lu = -\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu. \tag{11}$$

Составим интеграл

$$\int_\Omega vLu\,d\Omega = -\sum_{i,\,k=1}^{m}\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Omega + \int_\Omega Cuv\,d\Omega. \tag{12}$$

В формуле (10) заменим u на v и v — на $A_{ik}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Мы получим тогда формулу, которую назовем *первой формулой Грина:*

$$\int_\Omega vLu\,d\Omega = \int_\Omega \sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega + \int_\Omega Cuv\,d\Omega - \\ - \int_S v\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\,x_i)\,dS. \tag{13}$$

Положив $v(P) \equiv u(P)$, получим *вторую формулу Грина*

$$\int_\Omega uLu\,d\Omega = \\ = \int_\Omega\left[\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]d\Omega - \int_S u\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\,x_i)\,dS. \tag{14}$$

В первой формуле Грина поменяем местами буквы u и v и полученный результат вычтем из (13):

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\,d\Omega = \int_\Omega\left\{\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right\}d\Omega - \\ - \int_S\left\{v\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu x_i) - u\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\nu,\,x_i)\right\}dS.$$

Докажем, что объемный интеграл справа равен нулю. Во второй сумме под знаком интеграла будем писать i вместо k и k вместо i, что, очевидно, допустимо. Тогда подынтегральная функция примет вид $\sum\limits_{i,\,k=1}^{m}(A_{ik} - A_{ki})\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \equiv 0$, так как $A_{ki} \equiv A_{ik}$.

Обозначая теперь для краткости

$$\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu x_i) = Nu, \tag{15}$$

получаем *третью формулу Грина*

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)\,d\Omega = \int_{S} (uNv - vNu)\,dS. \tag{16}$$

Рассмотрим частный случай. Пусть

$$A_{ii} = 1; \quad A_{ik} = 0, \quad i \neq k; \quad C = 0.$$

Тогда $Lu = -\Delta u$ (Δ — оператор Лапласа) и $Nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Мы получаем таким образом *формулы Грина для оператора Лапласа:*

$$-\int_{\Omega} v\,\Delta u\,d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega - \int_{S} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS; \tag{17}$$

$$-\int_{\Omega} u\,\Delta u\,d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_{S} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS; \tag{18}$$

$$\int_{\Omega} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\Omega = \int_{S} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS. \tag{19}$$

Сходные формулы, которые обычно также называют формулами Грина, можно построить и для дифференциальных операторов порядка выше второго. Мы будем выводить такие формулы ниже по мере надобности.

§ 8. Положительные и положительно определенные операторы

Симметричный оператор A называется *положительным*, если для любого элемента $u \in D_A$ имеет место неравенство

$$(Au,\ u) \geqslant 0, \tag{1}$$

причем равенство $(Au, u) = 0$ выполняется только тогда, когда $u = 0$.

Замечание. Если данное гильбертово пространство комплексное, то оговорка о симметричности оператора не нужна: достаточно потребовать, чтобы оператор имел плотную область определения; тогда его симметричность вытекает из неравенства (1) и теоремы 6 § 5.

Пример 1. Пусть оператор B определен в вещественном пространстве $L_2(0, 1)$ на множестве функций, которые имеют непрерывные вторые производные на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяют краевым условиям

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Допустим, что этот оператор действует по формуле

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3}$$

Докажем, что оператор B положителен. Установим прежде всего его симметричность. Область определения нашего оператора плотна в $L_2(0, 1)$, так как она содержит множество $C_0^{(\infty)}[0, 1]$, плотное в $L_2(0, 1)$ (см. § 3), и достаточно установить тождество

$$(Bu,\ v) = (u,\ Bv), \qquad u,\ v \in D_B.$$

Имеем

$$(Bu,\ v) = -\int_0^1 v\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

Проинтегрируем это по частям:

$$(Bu,\ v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx - v\,\frac{du}{dx}\Big|_0^1.$$

Функция $v \in D_B$ удовлетворяет краевым условиям (2), поэтому внеинтегральный член справа исчезает, и мы получаем

$$(Bu,\ v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx. \tag{4}$$

Точно так же найдем

$$(u,\ Bv) = -\int_0^1 u\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx. \tag{4$_1$}$$

Формулы (4) и (4_1) показывают, что оператор B симметричен.

Положив в формуле (4) $v = u$, получим

$$(Bu,\ u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0. \tag{5}$$

Допустим теперь, что $(Bu, u) = 0$. Это означает, что

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0.$$

Подынтегральная функция неотрицательна, и из обращения в нуль интеграла вытекает, что $du/dx = 0$ и, следовательно, $u(x) = \mathrm{const}$. Краевые условия (2) тогда показывают, что $u \equiv 0$. Из всего сказанного следует, что оператор B положителен.

Пример 2. В том же вещественном пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор C, который, как и оператор B, действует по формуле

$$Cu = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

а область его определения D_C отличается от области D_B только краевыми условиями: пусть функции из D_C удовлетворяют краевым условиям

$$u'(0) - \alpha u(0) = 0, \quad u'(1) + \beta u(1) = 0; \quad \alpha, \beta = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Множество D_C плотно в $L_2(0, 1)$ (см. § 3). Далее, пусть $u, v \in D_C$. Имеем

$$(Cu, v) = -\int_0^1 v \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx + v(0)\, u'(0) - v(1)\, u'(1).$$

Исключая $u'(0)$ и $u'(1)$ с помощью соотношений (6), получаем

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx + \alpha u(0)\, v(0) + \beta u(1)\, v(1).$$

Правая часть симметрична относительно u и v, поэтому $(Cu, v) = (Cv, u) = (u, Cv)$ и оператор C симметричен. При произвольных значениях α и β трудно судить о положительности оператора C; легко, однако, указать для этого простые достаточные условия: оператор C положителен, если $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, причем хотя бы одна из постоянных α или β отлична от нуля. Действительно, пусть, например, $\beta \geqslant 0$ и $\alpha > 0$. Тогда

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geqslant 0. \tag{*}$$

Если $(Cu, u) = 0$, то, как легко видеть, необходимо $u(0) = 0$ и $du/dx \equiv 0$. Из последнего равенства следует, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$, а так как $u(0) = 0$, то, очевидно, $u(x) \equiv 0$.

Если обе постоянные α и β равны нулю, то оператор C неположителен. Действительно, в этом случае условия (6) принимают вид

$$u'(0) = u'(1) = 0; \tag{7}$$

кроме того,

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Функция $u \equiv 1$ удовлетворяет краевым условиям (7) и потому принадлежит области определения оператора C; при этом $(Cu, u) = 0$.

Рассмотрим более сложный пример. Пусть Δ означает оператор Лапласа; функции, образующие область его определения, подчиним краевому условию

$$u|_S = 0, \tag{8}$$

где S — граница той области Ω, в которой функция u определена. Кроме того, потребуем, чтобы в замкнутой области $\bar{\Omega}$ эти функции были непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными.

Докажем, что при такой области определения оператор $-\Delta$ положителен. Имеем

$$(-\Delta u,\ u) = -\int_{\Omega} u\,\Delta u\,d\Omega = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_{S} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS;$$

здесь мы воспользовались формулой (18) § 7. По условию (8) интеграл по поверхности исчезает и

$$(-\Delta u,\ u) = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geqslant 0. \tag{9}$$

При этом, если $(-\Delta u, u) = 0$, то необходимо $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv 0$, так как подынтегральная функция в последнем интеграле неотрицательна. Но тогда $u = \text{const}$ и, в силу краевого условия (8), $u \equiv 0$.

Попытаемся выяснить физический смысл понятия положительного оператора. С этой целью рассмотрим закрепленную по краю мембрану, изогнутую под действием некоторой стационарной поперечной нагрузки. Пусть в ненагруженном состоянии мембрана занимает некоторую область Ω в плоскости (x, y), и пусть $u(x, y)$ означает прогиб мембраны. Через T обозначим натяжение мембраны и через q — поперечную нагрузку, рассчитанную на единицу площади. Как известно[1]), стационарный прогиб мембраны удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\Delta u = q/T; \tag{10}$$

то обстоятельство, что край мембраны закреплен, выражается краевым условием (8), в котором S теперь обозначает контур мембраны. С другой стороны, в данном случае выражение

$$(-\Delta u, u) = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

только постоянным множителем отличается от потенциальной энергии деформации изогнутой мембраны[2]). Теперь ясно, что в задаче о стационарном изгибе мембраны положительность оператора $-\Delta$ выражает тот физически очевидный факт, что потенциальная энергия деформации мембраны, изогнутой как угодно, положительна, иначе говоря, что невозможно изогнуть мембрану, не затратив на это энергии.

---

[1]) Уравнение стационарного прогиба мембраны выведено, например, у С. П. Тимошенко [2].

[2]) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт [1], гл. IV, § 10, стр. 238.

Многочисленные примеры (некоторые из них будут рассмотрены на протяжении этой книги) показывают следующее. Пусть некоторая физическая система под действием внешней причины, характеризуемой некоторой функцией $f(P)$, приобретает смещение $u(P)$, и пусть эти две функции связаны уравнением

$$Au = f,$$

где A — положительный оператор. Тогда, как часто оказывается, *величина* (Au, u) *пропорциональна величине энергии, которую необходимо затратить, чтобы сообщить системе смещение* $u(P)$. Если это так, то положительность оператора выражает тот факт, что невозможно сообщить системе никакого смещения, не затратив для этого некоторой энергии.

Если оператор A положителен, то, имея в виду только что указанный физический смысл величины (Au, u), будем далее называть эту величину *энергией функции* $u \in D_A$.

Симметричный оператор A называется положительно определенным, если для любой функции $u \in D_A$ справедливо неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \tag{11}$$

где γ — положительная постоянная.

Очевидно, всякий положительно определенный оператор в то же время и положителен. Обратное заключение, как мы увидим на примере, неверно. Этот пример $Ax = tx$ на $[0,1]$.

Пример 3. Рассмотрим оператор $Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}$, где функции $u(x)$ определены при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяют краевым условиям $u(0) = u(1) = 0$. Выше мы видели, что оператор B — положительный. Докажем, что он также и положительно определенный.

Так как $u(0) = 0$, то

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt.$$

К интегралу применим неравенство Буняковского. Это дает

$$u^2(x) \leqslant \int_0^x 1^2 \cdot dt \int_0^x u'^2(t)\, dt = x \int_0^x u'^2(t)\, dt.$$

Так как x заключено между нулем и единицей, то усилим последнее неравенство, заменив верхний предел интеграла единицей. Таким образом,

$$u^2(x) \leqslant x \int_0^1 u'^2(t)\, dt.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от нуля до единицы, найдем

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2(t)\,dt. \tag{12}$$

По определению нормы в $L_2(0, 1)$

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx = \|u\|^2,$$

а для рассматриваемого в нашем примере оператора B

$$\int_0^1 u'^2(t)\,dt = (Bu, u).$$

Неравенство (12) дает теперь

$$(Bu, u) \geqslant 2\|u\|^2.$$

Таким образом, оператор B положительно определенный, и для этого оператора можно принять $\gamma = \sqrt{2}$. В последующем будет показано, что во многих важных случаях операторы математической физики обладают свойством положительной определенности.

Рассмотрим еще один пример. Пусть в пространстве $L_2(0, 1)$ задан оператор L формулой

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right), \quad 0 < x < 1. \tag{13}$$

Функции $u(x) \in D_L$ подчиним одному краевому условию $u(1) = 0$. Потребуем еще, чтобы на сегменте $[0, 1]$ эти функции имели непрерывные вторые производные. Нетрудно видеть, что оператор L положителен. Действительно,

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \left[u\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{dv}{dx}\right) - v\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]dx = \left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0,$$

так как при $x = 0$ обращается в нуль множитель x^3, а при $x = 1$ — функции $u(x)$ и $v(x)$. Теперь $(Lu, v) = (u, Lv)$, и оператор L симметричен. Далее,

$$(Lu, u) = -\int_0^1 u\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right)dx.$$

Интегрируя по частям и пользуясь условием $u(1) = 0$, найдем, что

$$(Lu, u) = \int_0^1 x^3\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0. \tag{14}$$

При этом, если $(Lu, u) = 0$, то $\frac{du}{dx} \equiv 0$, $u = \text{const}$, и, так как $u(1) = 0$, то $u \equiv 0$. Таким образом, оператор L положителен.

Докажем теперь, что этот оператор не положительно определенный. Неравенство (11) запишем в виде

$$\frac{(Au, u)}{\| u \|^2} \geqslant \gamma^2.$$

Отсюда видно, что для положительно определенного оператора последнее отношение не делается меньше фиксированной положительной постоянной γ^2. Если мы установим, что для оператора L аналогичное отношение можно сделать сколь угодно малым, то тем самым будет доказано, что оператор L свойством положительной определенности не обладает.

Пусть δ — число, заключенное между нулем и единицей. Положим

$$u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ 0, & \delta < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $u_\delta(x)$ равна нулю при $x = 1$ и непрерывна, так же как и ее первые две производные, при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Но тогда u_δ входит в область D_L определения оператора L. Составим отношение

$$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\| u_\delta \|^2} = \frac{\int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du_\delta}{dx}\right)^2 dx}{\int\limits_0^1 u_\delta^2 \, dx} = \frac{9 \int\limits_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 \, dx}{\int\limits_0^\delta (\delta - x)^6 \, dx},$$

так как $u_\delta \equiv 0$ при $x > \delta$, и соответствующие интегралы исчезают. Произведя несложные вычисления, найдем

$$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\| u_\delta \|^2} = \frac{9}{40} \delta,$$

что может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом δ.

§ 9. Энергетическое пространство положительно определенного оператора[1])

Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в полном гильбертовом пространстве H. На множестве элементов $M = D_A$ — области определения оператора A — введем новое скалярное произведение (для отличия от старого мы будем его обозначать квадратными скобками), полагая по определению

$$[u, v] = (Au, v). \tag{1}$$

---

[1]) Основные результаты настоящего параграфа получены К. Фридрихсом [2].

Докажем, что такое определение законно, т. е. что оно удовлетворяет аксиомам А — D § 2.

Аксиома А. Оператор A, будучи положительно определенным, симметричен; поэтому, если $u \in M$ и $v \in M$, то

$$[u, v] = (Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}. \qquad (2)$$

Аксиома В.

$$[a_1u_1 + a_2u_2, v] = (A(a_1u_1 + a_2u_2), v) =$$
$$= a_1(Au_1, v) + a_2(Au_2, v) = a_1[u_1, v] + a_2[u_2, v]. \qquad (3)$$

Аксиомы С и D. $(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2 \geqslant 0$; если $(Au, u) = 0$, то необходимо $\|u\| = 0$ и, следовательно, $u = 0$.

Введя новое скалярное произведение, мы превратили M в гильбертово пространство. Норму в этом пространстве мы будем обозначать через $|u|$, так что

$$|u|^2 = [u, u] = (Au, u), \qquad u \in M. \qquad (4)$$

При этом, в силу неравенства (11) § 8,

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u|. \qquad (5)$$

Наше новое гильбертово пространство может оказаться неполным — в таком случае мы обычным способом дополним его, введя предельные элементы. Это дополненное гильбертово пространство будем обозначать через H_A. Пространство H_A будем называть *энергетическим пространством* оператора A. Величины $[u, v]$ и $|u|$ будем называть соответственно *энергетическим произведением* элементов $u, v \in H_A$ и *энергетической нормой* элемента $u \in H_A$.

В тех случаях, когда важно будет подчеркнуть, что вводимые величины связаны с оператором A, будем писать $[u, v]_A$, $|u|_A$ вместо $[u, v]$, $|u|$.

Если u есть элемент пространства H_A, то, как это следует из определения, либо $u \in M$, либо существует такая последовательность $u_n \in M$, что $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда следует, что линеал M плотен в H_A.

Теорема 1. *Все элементы пространства H_A принадлежат также и пространству H.*

Точнее говоря, каждому элементу из H_A можно привести в соответствие один и только один элемент из H, причем разным элементам из H_A соответствуют разные элементы из H.

Наше утверждение очевидно, если $u \in M$, — достаточно элементу u привести в соответствие тот же элемент. Остается рассмотреть случай, когда u есть предельный элемент пространства

H_A. В этом случае, по определению, существует такая последовательность $u_n \in M$, что $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. По неравенству треугольника

$$|u_n - u_m| \leqslant |u_n - u| + |u_m - u|$$

и, следовательно, $|u_n - u_m| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0$. Из неравенства (5), которое пока установлено для элементов линеала M, следует, что $\|u_n - u_m\| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0$. Это значит, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве H к некоторому его элементу u', так что $\|u' - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отождествив u и u', мы установим первую часть нашего утверждения. Докажем теперь его вторую часть.

Описанное только что соответствие между элементами u и u' пространств H_A и H линейно. Действительно, пусть элементам $u_1 \in H_A$ и $u_2 \in H_A$ отвечают соответственно элементы $u_1' \in H$ и $u_2' \in H$. Это означает следующее: существуют такие две последовательности $\{u_{1n}\}$ и $\{u_{2n}\}$ элементов из D_A, что

$$|u_{kn} - u_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \|u_{kn} - u_k'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \qquad k = 1, 2.$$

Пусть a_1 и a_2 — постоянные. Тогда

$$|a_1u_{1n} + a_2u_{2n} - (a_1u_1 + a_2u_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| \cdot |u_{1n} - u_1| + |a_2| \cdot |u_{2n} - u_2| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$
$$\|a_1u_{1n} + a_2u_{2n} - (a_1u_1' + a_2u_2')\| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| \cdot \|u_{1n} - u_1'\| + |a_2| \cdot \|u_{2n} - u_n'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последние соотношения означают, что элементу $(a_1u_1 + a_2u_2) \in H_A$ соответствует элемент $(a_1u_1' + a_2u_2') \in H$ — это и требовалось доказать.

Пусть теперь элементам $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ из H_A отвечает один и тот же элемент из H. В силу линейности соответствия элементу $u = (u^{(1)} - u^{(2)}) \in H_A$ отвечает нулевой элемент пространства H. Докажем, что u — нулевой элемент из H_A. Пусть u есть предел (в смысле сходимости в H_A) последовательности $u_n \in M$, так что $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Так как элементу u в пространстве H отвечает нулевой элемент, то по установленному выше закону соответствия $\|u_n\| \to 0$. Отсюда следует, что $(f, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, где f — любой фиксированный элемент из H. Действительно, по неравенству Коши—Буняковского

$$|(f, u_n)| \leqslant \|f\| \cdot \|u_n\| \to 0.$$

Возьмем в линеале M произвольный элемент φ и положим $f = A\varphi$. Тогда $(A\varphi, u_n) \to 0$. Но $(A\varphi, u_n) = [\varphi, u_n]$, так как оба элемента φ и u_n входят в M; отсюда $[\varphi, u_n] \to 0$. Переходя здесь к пределу, получим $[\varphi, u] = 0$.

Таким образом, в пространстве H_A элемент u ортогонален ко всем элементам линеала M, плотного в H_A. По лемме § 4 u есть нулевой элемент из H_A.

Заметим, что неравенство (5) выполняется не только в M, но во всем пространстве H_A. Действительно, пусть u есть элемент H_A, не входящий в M. Тогда существует последовательность $u_n \in M$ такая, что $|u_n - u| \to 0$. Как это следует из доказательства теоремы 1, при этом $\|u_n - u\| \to 0$. Отсюда вытекает, что $|u_n| \to |u|$ и $\|u_n\| \to \|u\|$. Так как $u_n \in M$, то для u_n неравенство (5) справедливо: $\|u_n\| \leqslant |u_n|/\gamma$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$\|u\| \leqslant |u|/\gamma.$$

Сходимость в энергетическом пространстве будем называть сходимостью по энергии; иногда мы будем обозначать такую сходимость символом $\xrightarrow{э}$. О системе элементов, полной в энергетическом пространстве, будем говорить, что она полна по энергии. Из неравенства (5) вытекает следующая теорема:

Теорема 2. *Если A — положительно определенный оператор и $u_n \to u$ по энергии, то одновременно $u_n \to u$ в метрике исходного пространства H.*

Условие теоремы означает, что $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. По неравенству (5) $\|u_n - u\| \leqslant |u_n - u|/\gamma$ и, следовательно, $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть B — оператор, рассмотренный в § 8, так что

$$Bu = -d^2u/dx^2, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{6}$$

и функции из области D_B определения оператора B непрерывны на сегменте $[0, 1]$ вместе со своими первыми двумя производными. Найдем энергетическое пространство H_B оператора B. Пусть $u \in H_B$. Тогда, прежде всего, $u \in H = L_2(0, 1)$, т. е. $u(x)$ есть функция, суммируемая с квадратом на интервале $(0, 1)$. Далее, существует последовательность функций $u_n \in D_B$ такая, что $|u_n - u|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из первого соотношения вытекает, что

$$|u_n - u_k|_B \leqslant |u_n - u|_B + |u_k - u|_B \xrightarrow[k,\, n\to\infty]{} 0.$$

Но $(u_n - u_k) \subset D_B$; по формуле (4) $|u_n - u_k|_B^2 = (B(u_n - u_k),\ u_n - u_k)$ и, далее, по формуле (5) § 8

$$|u_n - u_k|_B^2 = \int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \xrightarrow[k,\, n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, последовательность производных $\{du_n/dx\}$ является фундаментальной в пространстве $L_2(0, 1)$; так как оно полное, то в нем существует функция $v(x)$ такая, что $\| du_n/dx - v \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt.$$

Но $u_n \in D_B$, поэтому $u_n(0) = 0$ и, следовательно,

$$u_n(x) = \int_0^x u_n'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, нетрудно найти, что

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{7}$$

Из формулы (7) сразу следует, что $u(0) = 0$. Далее,

$$u(1) = \int_0^1 v(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} [u_n(1) - u_n(0)] = 0.$$

Напомним теперь известное определение: если функция $u(x)$ допускает на сегменте $[a, b]$ представление

$$u(x) = c + \int_a^x v(t)\,dt,$$

где c — постоянная, а v — суммируемая функция, то говорят, что функция u *абсолютно непрерывна* на сегменте $[a, b]$. При этом по известной теореме Лебега почти всюду на $[a, b]$ существует производная $u'(x)$ и $u'(x) = v(x)$.

Из сказанного следует: если функция u принадлежит энергетическому пространству оператора (6), то эта функция на сегменте $[0, 1]$ абсолютно непрерывна, на его концах обращается в нуль и, наконец, на том же сегменте производная $u'(x)$ суммируема с квадратом.

Обратное утверждение также справедливо [1]).

Пример 2. Найдем энергетическое пространство оператора C, рассмотренного в § 8. Пусть u — элемент пространства H_C. Прежде всего, u принадлежит исходному пространству $H = L_2(0, 1)$. Далее, существует такая последовательность $u_n \in D_C$, что $|u_n - u|_C \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но тогда $|u_n - u_k|_C \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0$. К функциям $u_n, u_k \in D_C$ применима формула (*) § 8 и, следовательно,

$$\int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx + \alpha\,[u_n(0) - u_k(0)]^2 + \beta\,[u_n(1) - u_k(1)]^2 \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0,$$

[1]) См. книгу автора [28].

Для определенности примем, что $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0, \\ &|u_n(0) - u_k(0)| \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Второе из соотношений (8) показывает, что существует предел числовой последовательности $\{u_n(0)\}$; пусть

$$\lim_{n\to\infty} u_n(0) = c_0.$$

Первое из соотношений (8) означает, что производные du_n/dx сходятся в среднем к некоторому пределу $v \in L_2(0, 1)$. Переходя в формуле Ньютона — Лейбница

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt$$

к пределу, видим, что

$$u(x) = c_0 + \int_0^x v(t)\,dt.$$

Таким образом, если $u \in H_C$, то $u(x)$ — функция, абсолютно непрерывная на сегменте $[0, 1]$, с квадратично суммируемой первой производной. Можно доказать и обратное утверждение: любая функция, абсолютно непрерывная на сегменте $[0, 1]$ и имеющая на этом сегменте суммируемую с квадратом производную, принадлежит энергетическому пространству оператора C.

Коротко наметим доказательство. Пусть $u(x)$ — функция с описанными здесь свойствами, определенная на сегменте $[0, 1]$ Продолжим ее за этот сегмент так, чтобы продолженная функция осталась непрерывной. Полученную функцию усредним [1]), взяв радиус усреднения h достаточно малым. Тогда можно добиться того, чтобы

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx}\right)^2 dx + \alpha\,[u(0) - u_h(0)]^2 + \beta\,[u(1) - u_h(1)]^2 < \varepsilon/4, \tag{9}$$

где $u_h(x)$ — средняя функция, а ε — произвольно заданное положительное число.

Зафиксируем h. Сегмент $[0, 1]$ разобьем на три: $[0, 1/n]$, $[1/n, (n-1)/n]$, $[(n-1)/n, 1]$. Построим функцию $w_n(x)$ по следующим условиям:

1) функция w_n непрерывна вместе с двумя своими первыми производными на сегменте $[0, 1]$;

2) на сегменте $[1/n, (n-1)/n]$ $w_n(x) = u_h(x)$;

3) $w_n(0) = u_h(0)$, $w_n'(0) - \alpha w_n(0) = 0$;

4) $w_n(1) = u_h(1)$, $w_n'(1) + \beta w_n(1) = 0$.

[1]) Об операции усреднения и ее свойствах см. С. Л. Соболев [2], а также книгу автора [28].

Можно удовлетворить этим условиям, взяв на сегментах $[0, 1/n]$ и $[(n-1)/n, 1]$ в качестве $w_n(x)$ полиномы четвертой степени. Выбрав n достаточно большим, можно добиться того, чтобы

$$\int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} - \frac{dw_n}{dx}\right)^2 dx + \alpha\,[u_h(0) - w_n(0)]^2 + \beta\,[u_h(1) - w_n(1)]^2 < \varepsilon/4. \qquad (10)$$

Теперь из (9) и (10) следует, что

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{dw_n}{dx}\right)^2 dx + \alpha\,[u(0) - w_n(0)]^2 + \beta\,[u(1) - w_n(1)]^2 < \varepsilon.$$

Одновременно можно добиться того, чтобы было

$$\int_0^1 (u - w_n)^2\, dx < \varepsilon.$$

Из двух последних соотношений следует, что $u \in H_C$. Интересно отметить, что функции из пространства H_C не обязаны удовлетворять никаким краевым условиям.

§ 10. Энергетическое пространство только положительного оператора

Оператор положительный, но не положительно определенный, будем называть *только положительным*. С только положительным оператором A также можно связать энергетическое пространство H_A, если задать энергетическое произведение и норму прежними формулами (1) и (4) § 9. Важное отличие от случая положительно определенного оператора заключается в том, что на этот раз не все элементы энергетического пространства принадлежат исходному пространству. Можно доказать[1]) следующее: *элемент $u \in H_A$ принадлежит исходному пространству H тогда и только тогда, когда существует такая последовательность элементов $u_n \in D_A$, что $|u - u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|u_k - u_n\| \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0$.* При этом последовательность $\{u_n\}$ стремится к тому же элементу u и в пространстве H:

$$\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пример 1. Исходя из формулы (14) § 8, можно доказать, что энергетическое пространство H_L оператора L (формула (13) § 8) состоит из функций $u(x)$, обладающих следующими свойствами:

1) $u(x)$ абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\delta, 1]$, где $0 < \delta < 1$;
2) $u(1) = 0$;

[1]) См. книгу автора [11].

3) интеграл $\int\limits_0^1 x^3 u'^2(x)\,dx$ сходится.

Пространство H_L содержит некоторые функции, не принадлежащие исходному пространству $L_2(0, 1)$; такова, например, функция $u(x) = x^{-1} - 1$.

§ 11. О сепарабельности энергетического пространства

Теорема. *Для того чтобы энергетическое пространство положительного оператора было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы было сепарабельным исходное гильбертово пространство.*

Эта теорема играет важнейшую роль во всем последующем. Ее доказательство дано в книге автора [28]. Ниже будем предполагать, что исходное пространство H сепарабельно. В приложениях обычно исходное пространство совпадает с L_2, пространством квадратично суммируемых функций, которое, как было указано в § 4, сепарабельно.

§ 12. Главные и естественные краевые условия

Рассмотрим некоторую область Ω в m-мерном евклидовом пространстве; пусть S — граница этой области. В области Ω рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение, которое мы символически запишем в виде

$$Lu = f(x), \tag{1}$$

и пусть этому уравнению сопутствуют однородные краевые условия

$$B_j u|_S = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Как обычно, эта краевая задача порождает некоторый оператор, который мы обозначим через A; будем считать, что он действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. За область $D(A)$ определения оператора A примем множество всех функций, которые в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$ имеют столько непрерывных производных, каков порядок уравнения (1), и которые удовлетворяют краевым условиям (2).

Допустим, что оператор A, построенный таким образом, положительный. Введем в рассмотрение его энергетическое пространство H_A; примеры § 9 показывают, что в одних случаях функции из энергетического пространства обязательно удовлетворяют краевым условиям задачи, в других случаях — нет. Краевые условия, которым обязательно удовлетворяют функции из области определения оператора и необязательно — функции из энергетического пространства H_A, называются есте-

ственными для дифференциального оператора A. Краевые условия, которым обязательно удовлетворяют функции из энергетического пространства, иногда называют *главными*[1]). Так, примеры § 9 показывают, что для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, $0 < x < 1$, условия $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ главные, а условия $u'(0) - \alpha u(0) = 0$, $u'(1) + \beta u(1) = 0$ естественные.

Как мы увидим ниже, уменье отличить естественные условия от главных оказывается важным для практического применения вариационных методов. Поэтому возникает необходимость указать простые признаки, которые позволяли бы отличать естественные краевые условия от главных.

Можно указать прием, позволяющий в каждом конкретном случае проверить, является ли данное краевое условие естественным или нет. Прием этот состоит в следующем. Выражение $(Au, v) = [u, v]$, в котором u и v суть функции из D_A и удовлетворяют, следовательно, всем краевым условиям, путем интегрирования по частям и использования краевых условий преобразуем к виду, симметричному относительно u и v; такое преобразование возможно, так как оператор A симметричен и $(Au, v) = (u, Av)$. Положив в полученном выражении $v = u$, получим некоторое выражение для величины $[u, u]$. Допустим, что, как это часто бывает, оно имеет смысл и остается положительным также и для таких функций, которые не удовлетворяют интересующему нас краевому условию. Упомянутое выражение для $[u, u]$ подставим в $F(u)$ и допустим, что существует функция u_0, которая реализует минимум этого функционала в классе функций, данному условию, вообще говоря, не удовлетворяющих. Обычными средствами вариационного исчисления[2]) можно найти необходимые условия, которым должна удовлетворять функция u_0. Если к их числу принадлежит и данное краевое условие, то оно естественное.

Рассмотрим пример. Докажем, что для уравнения $-\Delta u = f(P)$ краевое условие смешанной задачи

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_S = 0, \qquad \sigma \geqslant 0, \tag{3}$$

естественное. Пусть функции u и v удовлетворяют условию (3). Тогда

$$(-\Delta u, v) = -\int_{\Omega} v\, \Delta u\, d\Omega,$$

[1]) В теории упругости главные краевые условия обычно называют *геометрическими*, или *кинематическими*, а естественные условия — *динамическими*.

[2]) См., например, В. И. Смирнов [3], гл. II.

и по формуле Грина

$$(-\Delta u,\ v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS.$$

В силу условия (3) $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = -\sigma u|_S$, и окончательно

$$(-\Delta u,\ v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, d\Omega + \int_S \sigma u v\, dS;$$

правая часть последнего равенства симметрична относительно u и v. Теперь

$$[u,\ u] = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega + \int_S \sigma u^2\, dS,$$

причем последнее выражение имеет смысл и положительно для любой непрерывно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$ функции, независимо от того, удовлетворяет она условию (3) или нет.

Функционал $F(u)$ можно теперь представить в виде

$$F(u) = [u,\ u] - 2(f,\ u) = \int_\Omega [(\operatorname{grad} u)^2 - 2fu]\, d\Omega + \int_S \sigma u^2\, dS.$$

Будем рассматривать этот функционал на множестве всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, не предполагая, что эти функции удовлетворяют каким-либо краевым условиям, и пусть функция $u_0(P)$ реализует минимум $F(u)$ на указанном множестве. Обозначим через t произвольное вещественное число и через $\eta(P)$ — произвольную функцию, дважды непрерывно дифференцируемую в $\bar{\Omega}$. Очевидно, $F(u_0 + t\eta) \geqslant F(u_0)$. Если функция η фиксирована, то $F(u_0 + t\eta)$ есть функция независимой переменной t; последнее неравенство означает, что эта функция имеет минимум при $t = 0$. Но тогда необходимо

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + t\eta)|_{t=0} = 0.$$

Легко находим

$$F(u_0 + t\eta) = F(u_0) + 2t\left\{\int_\Omega (\operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta - f\eta)\, d\Omega + \int_S \sigma u_0 \eta\, dS\right\} + t^2\left\{\int_\Omega (\operatorname{grad} \eta)^2\, d\Omega + \int_S \sigma \eta^2\, dS\right\}.$$

Дифференцируя по t, полагая $t = 0$ и приравнивая нулю полученный результат, найдем

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta - f\eta)\, d\Omega + \int_S \sigma u_0 \eta\, dS = 0. \tag{4}$$

По формуле Грина

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \eta \, \Delta u_0 \, d\Omega + \int\limits_{S} \eta \frac{\partial u_0}{\partial \nu} dS,$$

и равенство (4) принимает вид

$$-\int\limits_{\Omega} \eta (\Delta u_0 + f) \, d\Omega + \int\limits_{S} \eta \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \sigma u_0 \right) dS = 0.$$

В силу произвольности функции $\eta(P)$ получаем

$$\Delta u_0 + f = 0 \text{ в } \Omega \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \sigma u_0 = 0 \text{ на } S,$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА III
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 13. Теорема о функционале энергии

Теорема 1. *Если оператор A положителен в гильбертовом пространстве H, то уравнение*

$$Au=f, \qquad f \in H \tag{1}$$

имеет в этом пространстве не более одного решения.

В самом деле, пусть упомянутое уравнение имеет два решения, u_1 и u_2, так что $Au_1 = f$, $Au_2 = f$. Положим $u_1 - u_2 = \tilde{u}$. Вычитая и пользуясь линейностью оператора A, получим $A\tilde{u} = 0$. Умножив это скалярно на $\tilde{u}$, имеем $(A\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$. Но оператор A положительный, поэтому необходимо $\tilde{u} \equiv 0$, и, следовательно, $u_1 \equiv u_2$.

Теорема 2. *Пусть A — положительный оператор. Если уравнение* (1) *имеет решение, то это решение сообщает функционалу*

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) \tag{2}$$

наименьшее значение. Обратно, элемент гильбертова пространства, реализующий минимум функционала (2), *удовлетворяет уравнению* (1).

Заметим прежде всего, что области определения оператора Au и функционала $F(u)$ совпадают. Это непосредственно вытекает из вида выражения (2). Далее, $F(u) = (Au, u) - 2\,\mathrm{Re}\,(u, f)$, и так как A — положительный оператор, то $F(u)$ принимает только вещественные значения.

Пусть теперь u_0 удовлетворяет уравнению (1):

$$Au_0 - f = 0.$$

Пусть, далее, v — произвольный элемент из области D_A определения оператора A. Положим $v - u_0 = \eta$, так что $v = u_0 + \eta$. Имеем

$$F(v) = (A(u_0+\eta), u_0+\eta) - (u_0+\eta, f) - (f, u_0+\eta).$$

Раскрывая скобки и пользуясь симметричностью A, мы легко найдем, что

$$F(v) = F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (\eta, Au_0 - f) + (A\eta, \eta).$$

Но $Au_0 - f = 0$, поэтому $F(v) = F(u_0) + (A\eta, \eta)$ и, в силу положительности оператора A, $F(v) > F(u_0)$, т. е. функционал $F(u)$ принимает наименьшее значение при $u = u_0$.

Обратно, пусть u_0 реализует минимум функционала $F(u)$. Пусть η — произвольный элемент из D_A. Множество D_A как область определения линейного оператора есть линеал, поэтому $\lambda\eta$, где λ — постоянное число, также входит в D_A; по той же причине также и $u_0 + \lambda\eta \in D_A$. По предположению

$$F(u_0 + \lambda\eta) \geqslant F(u_0).$$

Будем считать число λ вещественным. Последнее неравенство легко, используя симметричность A, привести к виду

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2 (A\eta, \eta) \geqslant 0.$$

Это возможно только тогда, когда

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0.$$

Заменив η на $i\eta$, получим

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0.$$

Отсюда следует, что $(Au_0 - f, \eta) = 0$. Элемент $Au_0 - f$ гильбертова пространства ортогонален, в силу последнего равенства, ко всем элементам плотного множества D_A. По лемме § 4 $Au_0 - f = 0$, т. е. u_0 удовлетворяет уравнению (1).

Замечание. Если данное гильбертово пространство вещественное, то $(u, f) = (f, u)$, и функционал (2) принимает более простую форму

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Функционал (2) будем называть *функционалом энергии*, а теорему 2 — *теоремой о функционале энергии*.

Только что доказанная теорема 2 позволяет утверждать, что задача о решении уравнения (1) эквивалентна задаче об отыскании минимума функционала (2).

По поводу сказанного необходимо сделать два замечания:

1. Наше утверждение предполагает существование элемента, удовлетворяющего уравнению (1) или реализующего минимум функционала (2), тогда как для нас важно доказать самое существование такого элемента и найти способы, приближенные или точные, его определения. Это уже невозможно сделать,

предполагая оператор A только положительным; *в данной главе мы будем считать его положительно определенным.*

2. Может случиться, что оператор определен на недостаточно широком линеале. В таком случае задача о минимуме функционала (2) может не иметь решения, которое, однако, будет существовать, если линеал M, а с ним и оператор должным образом расширить. Ниже мы покажем, что для положительно определенного оператора всегда возможно такое расширение линеала M, при котором задача о минимуме функционала $F(u)$ имеет решение[1]).

Что расширение оператора вызывается существом дела, легко пояснить таким примером. Пусть S — плоская область, ограниченная контуром L. Рассмотрим оператор $\Delta^2 w$. Чтобы сделать его вполне определенным, нужно задать область его определения, иначе говоря, охарактеризовать то множество функций, на котором этот оператор задан; для этого укажем краевые условия, которым эти функции удовлетворяют, и количество непрерывных производных, которыми они обладают. Пусть функции из области определения нашего оператора удовлетворяют краевым условиям

$$w|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0.$$

С точки зрения механической дело идет о пластинке с жестко закрепленным краем. Поскольку в оператор Δ^2 входят четвертые производные, естественно потребовать, чтобы эти производные были непрерывны. Сделаем это и поставим задачу о прогибе пластинки под действием нормальной нагрузки, которая меняется *разрывно*. Это сводится к интегрированию, при упомянутых выше краевых условиях, уравнения

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

где $q(x, y)$ — разрывная функция. Но это уравнение не имеет решения в определенной выше области оператора Δ^2, так как у решения нашего уравнения по крайней мере одна из производных четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

разрывна. Если мы хотим найти решение нашего уравнения как

---

[1]) Общее решение этой задачи впервые было получено К. Фридрихсом [2]. Наше решение (см. статьи автора [4] и [8]) отличается от решения Фридрихса как по форме, так и по способу доказательства.

элемент области определения оператора Δ^2, то, очевидно, эту область предварительно необходимо как-то расширить таким образом, чтобы она содержала и некоторые из функций, имеющие разрывные производные четвертого порядка.

Придумать, что это за [illegible]

§ 14. Обобщенное решение задачи о минимуме функционала энергии

Пусть A — оператор, положительно определенный в гильбертовом пространстве H, и пусть требуется решить уравнение $Au = f$, $f \in H$. Для этого достаточно найти элемент, реализующий минимум функционала (2) § 13. Но, как мы видели в § 13, эта задача в общем случае не имеет решения. Чтобы сделать ее разрешимой, мы несколько изменим ее постановку. Прежде всего, если $u \in D_A$, то $(Au, u) = [u, u]_A$. Далее, если f — фиксированный элемент из H, а u — произвольный элемент энергетического пространства H_A, то скалярное произведение (u, f) есть функционал, ограниченный в H_A. Действительно, по неравенству Коши—Буняковского (неравенство (3) § 2)

$$|(u, f)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\|.$$

Далее, по неравенству (5) § 9 $\|u\| \leqslant |u|_A/\gamma$ и, следовательно, $|(u, f)| \leqslant \|f\| \cdot |u|_A/\gamma$.

Величины $\|f\|$ и γ суть постоянные, и последнее неравенство означает, что функционал (u, f) ограничен в H_A. Но тогда по теореме Ф. Риса (теорема 1 § 5) существует единственный элемент $u_0 \in H_A$ такой, что для любого элемента $u \in H_A$ справедливо тождество

$$(u, f) = [u, u_0]_A. \tag{1}$$

Теперь функционал F можно представить в виде

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0]_A - [u_0, u]_A. \tag{2}$$

Формула (2) установлена для элементов множества $M = D_A$, но ее правая часть определена на всем энергетическом пространстве H_A. Пользуясь формулой (2), *расширим функционал $F(u)$ на все пространство H_A и будем искать минимум H_A на этом пространстве.* Как мы сейчас увидим, видоизмененная таким образом вариационная задача решается совсем просто. Прибавив и отняв справа в формуле (2) выражение $[u_0, u_0]_A$, мы приведем эту формулу к виду

$$F(u) = [u - u_0, u - u_0]_A - [u_0, u_0]_A = |u - u_0|_A^2 - |u_0|_A^2. \tag{3}$$

Из формулы (3) ясно, что минимум $F(u)$ достигается тогда и только тогда, когда $u = u_0$. При этом

$$F_{\min} = F(u_0) = -|u_0|_A^2. \tag{4}$$

Элемент u_0 назовем *обобщенным решением* уравнения $Au = f$.

Если, как мы это всегда предполагаем, пространство H сепарабельно, то (§ 11) пространство H_A также сепарабельно, и в нем можно найти полную ортонормированную систему (см. теорему 3 § 4). Обозначим ее через $\{\omega_n\}$. Обобщенное решение u_0 разложим по этой системе в ортогональный ряд:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]_A \omega_n. \tag{5}$$

Положив в формуле (1) $u = \omega_n$, получим

$$[u_0, \omega_n]_A = (f, \omega_n).$$

Вместе с формулой (5) это приводит к представлению обобщенного решения в виде ортогонального (в энергетическом пространстве) ряда

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \omega_n. \tag{6}$$

Ряд (6) сходится как в энергетической метрике, так и в метрике исходного пространства H.

Пример. Рассмотрим задачу о кручении стержня, основание которого есть прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Функция кручения $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta\psi = 2G\theta, \tag{7}$$

где G — модуль сдвига, θ — угол закручивания на единицу длины стержня; кроме того, эта функция обращается в нуль на сторонах прямоугольника $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Ниже (см. § 24) будет показано, что оператор $-\Delta$ положительно определенный, если функции из области его определения все равны нулю на границе области. В нашем случае энергетическое произведение двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ выражается формулой

$$[u, v] = -\int_0^a \int_0^b v(x, y)\, \Delta u(x, y)\, dx\, dy;$$

соответственно для энергетической нормы имеем

$$|u|^2 = -\int_0^a\int_0^b u(x, y)\,\Delta u(x, y)\,dx\,dy.$$

Функции

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз и обращаются в нуль на контуре прямоугольника и потому входят в область определения оператора нашей задачи. Они ортогональны по энергии; чтобы проще доказать это, заметим, что

$$\Delta\varphi_{mn}(x, y) = -\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} =$$
$$= -\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)\,\varphi_{mn}(x, y).$$

Теперь

$$[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = -\int_0^a\int_0^b \varphi_{mn}\,\Delta\varphi_{rs}\,dx\,dy =$$
$$= \pi^2(r^2/a^2 + s^2/b^2)\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{r\pi x}{a}\,dx\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{s\pi y}{b}\,dy.$$

Если выполняется хотя бы одно из неравенств $m \neq r$ или $n \neq s$, то $[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = 0$, что и требовалось доказать. Полагая $r = m$ и $s = n$, найдем

$$|\varphi_{mn}|^2 = \frac{\pi^2(b^2m^2 + a^2n^2)}{4ab},$$

так что система (8) не нормированная. Поделив $\varphi_{mn}(x, y)$ на $|\varphi_{mn}|$, получим систему

$$\psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{9}$$

ортонормированную по энергии.

По формуле (6) функция кручения представляется рядом

$$\psi(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty}(2G\theta, \psi_{mn})\,\psi_{mn}(x, y). \tag{10}$$

Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$(2G\theta,\ \psi_{mn}) = \int_0^a \int_0^b 2G\theta\psi_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{4G\theta}{\pi}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2+a^2n^2}} \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\,dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2+a^2n^2}}\,[1-(-1)^m]\,[1-(-1)^n].$$

Отсюда видно, что коэффициенты ряда (10) равны нулю, если хотя бы одно из чисел m или n четное; если же эти числа оба нечетные, то

$$(2G\theta,\ \psi_{mn}) = \frac{16abG\theta}{\pi^3 mn}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2+a^2n^2}}.$$

Подставив это в (10), получим окончательно

$$\psi(x,\ y) = \frac{32G\theta a^2b^2}{\pi^4} \sum_{m,\ n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\,(b^2m^2+a^2n^2)}. \tag{11}$$

§ 15. Минимизирующая последовательность и ее сходимость

Пусть $\Phi(u)$ — некоторый функционал, значения которого ограничены снизу. Тогда существует точная нижняя граница d функционала $\Phi(u)$:

$$d = \inf \Phi(u).$$

Введем определение: последовательность u_n, $n = 1, 2, \ldots$, функций, принадлежащих области определения функционала $\Phi(u)$, называется *минимизирующей* для этого функционала, если

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = d.$$

Пусть A — положительно определенный оператор и u_0 — обобщенное решение уравнения

$$Au = f. \tag{1}$$

Функционал энергии, как мы видели, приводится к виду (3) § 14, и для этого функционала минимизирующая последовательность характеризуется равенством

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = -|u_0|_A^2. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если оператор A — положительно определенный, то всякая последовательность, минимизирующая для функционала энергии, сходится по энергии к обобщенному решению соответствующего уравнения* (1).

Доказательство очень просто: если последовательность u_n, $n = 1, 2, \ldots$, минимизирующая для функционала энергии, то из формулы (2) настоящего параграфа и формулы (3) § 14 следует

$$F(u_n) = |u_n - u_0|_A^2 - |u_0|_A^2 \to -|u_0|_A^2.$$

Отсюда $|u_n - u_0| \to 0$, т. е. $u_n \xrightarrow{э} u_0$. Одновременно $u_n \to u$ в норме исходного пространства H.

Теорема 1 лежит в основе многих прямых методов. Именно, чтобы решить уравнение (1) (предполагая, что его решение существует), достаточно для интеграла (2) построить минимизирующую последовательность; любой ее член представляет собой приближенное решение данного уравнения. В различное время были предложены многие способы построения минимизирующей последовательности. По существу один такой способ содержится в предшествующем параграфе: если через u_n обозначить частные суммы ряда (6) § 14:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \omega_k)\, \omega_k,$$

то $u_n \xrightarrow{э} u$. Известным недостатком этого способа является трудоемкость процесса ортогонализации. Наиболее важным методом построения минимизирующей последовательности является метод Ритца; укажем еще метод Куранта [1], метод Л. В. Канторовича «приведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений»[1]), также принадлежащий Л. В. Канторовичу «метод наискорейшего спуска»[2]). С большей или меньшей степенью подробности перечисленные методы будут изложены в ближайших параграфах настоящей главы. Упомянем еще о методе наименьших квадратов, которому посвящена гл. XI настоящей книги. Этот метод применим и к таким уравнениям вида (1), где оператор A неположителен и даже несимметричен, но в случае положительного A метод наименьших квадратов, как это будет показано в своем месте, приводит к минимизирующей последовательности.

Теорема 1 верна и для оператора, только положительного, если соответствующее уравнение (1) имеет решение, принадлежащее энергетическому пространству.

---

[1]) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1].

[2]) См. Л. В. Канторович [2], гл. III, а также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XV.

§ 16. Расширение положительно определенного оператора

Внимательно изучим обобщенное решение, построенное в § 14. Формула (1) § 14 приводит в соответствие каждому элементу f из H некоторый, единственный элемент $u = u_0 \in H_A$, реализующий минимум функционала энергии. Тем самым формула (1) § 14 определяет оператор $u_0 = Gf$, область определения которого совпадает с данным гильбертовым пространством H, а область значений есть часть[1]) H_A. С помощью оператора G можно упомянутую формулу представить в таком виде:

$$(u, f) = [u, Gf], \qquad u \in H_A. \tag{1}$$

Докажем, что оператор G — ограниченный и положительный. Прежде всего этот оператор линейный. Действительно, если $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$, то

$$(u, f) = \bar{a}_1 (u, f_1) + \bar{a}_2 (u, f_2) = \bar{a}_1 [u, Gf_1] + \bar{a}_2 [u, Gf_2] = [u, a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2].$$

С другой стороны, $(u, f) = [u, Gf]$. Сравнив оба выражения для (u, f), мы найдем, что

$$[u, Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2] = 0; \qquad u \in H_A.$$

По лемме § 4 $Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2 = 0$ или

$$G(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2,$$

т. е. оператор G линейный. Далее, по неравенству Коши — Буняковского

$$|[u, Gf]| = |(u, f)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\|$$

или, если воспользоваться неравенством (5) § 9,

$$|[u, Gf]| \leqslant \|f\| \cdot |u| / \gamma.$$

Положим здесь $u = Gf$. Тогда

$$|Gf|^2 \leqslant \|f\| \cdot |Gf| / \gamma,$$

или

$$|Gf| \leqslant \|f\| / \gamma. \tag{*}$$

Но по неравенству (5) $\|Gf\| \leqslant |Gf| / \gamma$. Подставив это в (*), получим

$$\|Gf\| \leqslant \|f\| / \gamma^2,$$

откуда

$$\|G\| \leqslant 1/\gamma^2. \tag{2}$$

[1]) В частных случаях область значений Gf может совпасть с H_A.

т. е. оператор G ограничен. Наконец, по формуле (1)

$$(Gf, f) = [Gf, Gf] = |Gf|^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство показывает, что оператор Gf положительный.

Замечание. Будем считать, что $f \in H_A$. Тем самым мы рассматриваем Gf как оператор, определенный в пространстве H_A. Нетрудно видеть, что при этом он остается ограниченным. Действительно, заменим в (*) $\|f\|$ большей величиной $|f|/\gamma$. Тогда $|Gf| \leqslant |f|/\gamma^2$ или $|G| \leqslant 1/\gamma^2$. Далее, по формуле (1) $[Gf, f] = [f, Gf] = (f, f) \geqslant 0$. Отсюда, как и выше, вытекает положительность Gf, на этот раз в пространстве H_A.

Если $Gf = 0$, то формула (1) дает $(u, f) = 0$. Элемент f, таким образом, ортогонален в H ко всем элементам H_A и, в частности, ко всем элементам исходного линеала M, плотного в H. По лемме § 4 имеем $f = 0$. Таким образом, уравнение $Gf = 0$ имеет единственное решение $f = 0$; отсюда по теореме 2 § 6 существует оператор G^{-1}, обратный оператору G.

Теорема 1. *Оператор G^{-1} есть расширение оператора A.* Достаточно доказать, что $G^{-1}u = Au$, если $u \in M$. Пусть u_0 — произвольный элемент из M. Обозначим Au_0 через f, тогда $Au_0 = f$. По теореме 2 § 13 u_0 реализует минимум функционала энергии; по доказанному в этом параграфе $u_0 = Gf$. Отсюда $f = G^{-1}u_0$ и, следовательно, $G^{-1}u_0 = Au_0$, что доказывает теорему.

Построенное нами решение задачи о минимуме функционала энергии может входить в $D_A = M$; тогда по теореме 2 § 13 это решение одновременно является и решением уравнения $Au = f$. Если же оно не входит в M, то мы все же будем рассматривать его как решение (обобщенное) этого уравнения. Тем самым мы расширяем оператор A. Можно доказать, что при таком расширении оператор A остается положительно определенным. Подробнее об этом см. книгу автора [11].

§ 17. Процесс Ритца

Процесс Ритца дает один из методов построения минимизирующей последовательности. Он был изложен во введении применительно к конкретным задачам, рассмотренным самим Ритцем; здесь будет дано его изложение для довольно общего класса задач. Для упрощения выкладок ограничимся случаем вещественного гильбертова пространства H; результаты переносятся на комплексное пространство без изменений.

Пусть A — положительно определенный оператор в пространстве H. Задача о построении обобщенного решения уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

равносильна задаче о построении элемента энергетического пространства, который реализует минимум функционала

$$F(u)=[u, u]_A-2(u, f) \tag{2}$$

в энергетическом пространстве. Эту последнюю задачу будем приближенно решать следующим образом.

Выберем последовательность элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{3}$$

удовлетворяющих следующим трем условиям:

1) все элементы $\varphi_n \in H_A$;
2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы;
3) последовательность (3) полна в H_A.

Элементы (3), следуя Ритцу, будем называть *координатными*. Совокупность координатных элементов назовем *координатной системой*.

Построим линейную комбинацию первых n координатных элементов

$$u_n=\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j \tag{4}$$

с произвольными численными коэффициентами a_j. Подставим u_n вместо u в функционал (2); это превратит $F(u)$ в функцию n независимых переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$F(u_n)=\left[\sum_{j=1}^{n} a_jA\varphi_j, \sum_{k=1}^{n} a_kA\varphi_k\right]-2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, f\right)=$$
$$=\sum_{j, k=1}^{n} [\varphi_j, \varphi_k]\, a_ja_k-2\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, f)\, a_k. \tag{5}$$

Выберем коэффициенты a_j так, чтобы функция (5) приняла минимальное значение. Как мы сейчас увидим, это приводит к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Функция (5) достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль ее первые производные [1]:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

[1] Уравнения (6) дают, как известно, необходимые условия минимума $F(u_n)$. Однако, используя положительность оператора A, можно доказать, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие системе (6), реализуют минимум величины $F(u_n)$. Это же замечание остается в силе и для задачи о собственных числах (§ 42).

Производные (6) легко вычисляются:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 2\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]\, a_k - 2(f, \varphi_j). \tag{7}$$

Приравняв эти производные нулю, получим систему Ритца:

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]\, a_k = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

или, в более подробной записи,

$$\left.\begin{array}{l} [\varphi_1, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_1, \varphi_2]\, a_2 + \ldots + [\varphi_1, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_1), \\ [\varphi_2, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_2, \varphi_2]\, a_2 + \ldots + [\varphi_2, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\varphi_n, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_n, \varphi_2]\, a_2 + \ldots + [\varphi_n, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_n). \end{array}\right\} \tag{8_1}$$

Координатные элементы (3) можно выбрать из области D_A; тогда $[\varphi_k, \varphi_j] = (A\varphi_k, \varphi_j)$, и система Ритца принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} (A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1), \\ (A\varphi_2, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A\varphi_n, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_n, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n). \end{array}\right\} \tag{8_2}$$

Определитель системы (8)

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] & [\varphi_1, \varphi_2] & \ldots & [\varphi_1, \varphi_n] \\ [\varphi_2, \varphi_1] & [\varphi_2, \varphi_2] & \ldots & [\varphi_2, \varphi_n] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\varphi_n, \varphi_1] & [\varphi_n, \varphi_2] & \ldots & [\varphi_n, \varphi_n] \end{vmatrix} \tag{9}$$

есть определитель Грама линейно независимых элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и потому отличен от нуля. Отсюда следует, что система уравнений Ритца всегда разрешима, если оператор A положительный. Найдя коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и подставив их в (4), получим элемент u_n, который будем называть *приближенным решением уравнения* (1) *по Ритцу*.

Выясним связь между точным решением минимальной задачи, определяемым формулой (6) § 14, и приближенным решением, к которому приводит процесс Ритца. Пусть элементы φ_n заменены новыми элементами ψ_n по формулам

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_{11}\varphi_1, \\ \psi_2 &= \alpha_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2, \\ \psi_n &= \alpha_{n1}\varphi_1 + \alpha_{n2}\varphi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\varphi_n, \end{aligned}$$

в которых все постоянные a_{kk} отличны от нуля. Отыскивая u_n в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

или в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k,$$

придем к одному и тому же результату, потому что выражение

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=1}^{k} a_{km} \varphi_m = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m \sum_{k=m}^{n} a_{km} b_k$$

есть линейная комбинация элементов φ_k, а выражение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

в свою очередь есть линейная комбинация элементов ψ_k. Имея это в виду, подвергнем координатную систему $\{\varphi_n\}$ ортогонализации по энергии. Новые элементы, полученные в результате ортогонализации, обозначим через ω_n. Теперь

$$[\omega_k, \omega_j] = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \tag{10}$$

и система (8) принимает особенно простой вид

$$a_j = (f, \omega_j).$$

Но тогда

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \omega_k)\, \omega_k, \tag{11}$$

т. е. приближенное решение задачи о минимуме функционала энергии, получаемое процессом Ритца, совпадает с частной суммой ряда (6) § 14, представляющего точное решение.

Как было отмечено в § 14, ряд (6) § 14 сходится по энергии. Отсюда и из формулы (11) сразу вытекает следующая теорема:

Теорема. *Если A — положительно определенный оператор, то приближенные по Ритцу решения уравнения* (1) *сходятся к точному обобщенному решению этого уравнения как по энергии, так и в метрике исходного пространства.*

Легко видеть, что последовательность приближенных решений по Ритцу — минимизирующая для функционала энергии.

Приближенное по Ритцу решение u_n тем ближе (в смысле близости по энергии) к точному, чем больше n. Для достижения высокой точности приходится брать большое n, т. е. большое число координатных функций. Это приводит к необходимости решать систему (8) с большим числом уравнений и неизвестных. Для ознакомления с практическими методами решения таких систем отсылаем читателя к книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1]. Отметим только, что решение системы (8) облегчается ее симметричностью.

Использование большого числа координатных элементов может, в случае их неудачного подбора, привести к большим ошибкам из-за неизбежных погрешностей вычислений. Об этом см. книгу автора [26]. Краткое изложение относящихся сюда результатов см. ниже, § 82.

Замечание 1. Если система (8) уже построена и по тем или иным причинам желательно получить менее точное приближение, не содержащее некоторых из координатных функций, то коэффициенты a_k, соответствующие этому менее точному приближению, найдутся из системы, которая получается из системы (8) *усечением*, т. е. вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих отброшенным координатным функциям. Аналогичное замечание справедливо и в проблеме собственных значений (см. § 42).

Пусть по-прежнему ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, означает координатные элементы, ортонормированные по энергии, так что имеют место соотношения (10). Обозначая для краткости $c_i = (f, \omega_i)$, имеем

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i, \qquad u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \omega_i.$$

Мы уже видели (формула (4) § 14), что $F(u_0) = -|u_0|^2$. Докажем, что если u_n — приближенное решение уравнения (1), построенное по методу Ритца, то

$$F(u_n) = -|u_n|^2. \tag{12}$$

Действительно, $F(u_n) = |u_n|^2 - 2(u_n, f)$, но

$$(u_n, f) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i,\ f\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\omega_i, f) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Далее, элементы ω_n ортонормированы в энергетической норме; по формуле (2) § 4

$$|u_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Отсюда следует, что

$$(u_n, f) = |u_n|^2 \tag{13}$$

и $F(u_n) = -|u_n|^2$. Перейдя в (13) к пределу при $n \to \infty$, найдем также, что

$$(u_0, f) = |u_0|^2. \tag{14}$$

Из формулы (7) § 4 вытекает, что

$$|u_0|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2;$$

отсюда видно, что с возрастанием n величина $|u_n|$ возрастает, причем

$$|u_n| \leqslant |u_0|; \quad |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |u_0|. \tag{15}$$

Пусть $n > k$. Вычислим величину $|u_n - u_k|^2$. Имеем

$$u_n - u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i - \sum_{i=1}^{k} c_i\omega_i = \sum_{i=k+1}^{n} c_i\omega_i;$$

по уже упоминавшейся формуле (2) § 4

$$|u_n - u_k|^2 = \sum_{i=k+1}^{n} c_i^2$$

или

$$|u_n - u_k|^2 = |u_n|^2 - |u_k|^2. \tag{16}$$

Аналогично

$$|u_0 - u_k|^2 = |u_0|^2 - |u_k|^2. \tag{17}$$

Пусть u — произвольный отличный от нулевого элемент энергетического пространства. Элемент $\varphi_1 = u/|u|$ нормирован в энергетической метрике. Будем рассматривать φ_1 как первый член некоторой ортонормированной в энергетической метрике системы и будем искать приближенное по Ритцу решение уравнения (1), полагая в формуле (4) $n = 1$. Тогда $u_1 = c_1\varphi_1$, где $c_1 = (f, \varphi_1)$ и $|u_0|^2 \geqslant |u_1|^2 = c_1^2$. Но $c_1 = (f, \varphi_1) = (f, u)/|u|$, и мы приходим к полезному неравенству

$$|u_0|^2 \geqslant \frac{(f, u)^2}{|u|^2}. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е 2. Требование полноты координатной системы не вполне необходимо. Действительно, нет необходимости в том, чтобы любой элемент энергетического пространства можно было аппроксимировать координатными элементами — достаточно, чтобы такую аппроксимацию допускало обобщенное решение. Поэтому, если заранее известно, что искомое решение принадлежит некоторому классу, более узкому, чем D_A, то достаточно, чтобы координатная система была полна в этом классе. Например, если известно, что искомая функция четная относительно какого-либо из независимых переменных, то можно брать в качестве координатных только четные функции той же переменной, и достаточно, чтобы выбранная система координатных функций была полной относительно четных функций из H_A.

§ 18. Другие методы построения минимизирующей последовательности

Метод Ритца является важнейшим, но не единственным методом построения минимизирующей последовательности. В настоящем параграфе мы коротко изложим еще три таких метода: один из них указан Р. Курантом [1], а два других Л. В. Канторовичем (см. Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1], Л. В. Канторович [2], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1]).

Метод Куранта. Р. Курант [1] предложил метод построения минимизирующей последовательности, которая, при известных условиях сходится не только в среднем, но и равномерно вместе с последовательностями производных до некоторого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

и требуется найти его решение, определенное в некоторой конечной области Ω m-мерного пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и удовлетворяющее на границе S этой области некоторым однородным краевым условиям. Допустим, что оператор A положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи. Это решение реализует минимум функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Предположим теперь, что данная функция f имеет непрерывные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до некоторого порядка k включительно. Составим новый функционал

$$\Phi(u) = F(u) + \sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=j} \left\| \frac{\partial^j (Au-f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\|^2. \tag{2}$$

Очевидно, $\Phi(u) \geqslant F(u)$. Далее, функция u, реализующая минимум $F(u)$, реализует также минимум $\Phi(u)$, так как эта функция делает наименьшим в (2) как первое слагаемое, так и второе, которое она обращает в нуль. Отсюда следует, что решение нашей краевой задачи можно найти, отыскивая решение задачи о минимуме $\Phi(u)$. Построим для этого функционала минимизирующую последовательность $\{u_n\}$, например по методу Ритца. Тогда, очевидно,

$$\left\| \frac{\partial^j (Au_n - f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k; \tag{3}$$

соотношения (3) позволяют сделать дополнительные заключения о сходимости минимальной последовательности.

Рассмотрим для примера уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f$$

на плоскости при краевом условии $u|_S = 0$. Положим в (2) $k = 0$. Тогда

$$\Phi(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f) + \|\Delta u + f\|^2 =$$
$$= \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf + (\Delta u + f)^2 \right\} d\Omega.$$

Построим минимизирующую последовательность u_n. Тогда, очевидно,

$$\int_\Omega (\Delta u_n + f)^2 \, d\Omega \to 0. \tag{4}$$

По формуле Грина

$$u_n(x, y) - u(x, y) = -\int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u_n + f)\, d\Omega,$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина[1]) для оператора Лапласа. Отсюда по неравенству Буняковского

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}\; \sqrt{\int_\Omega (\Delta u + f)\, d\xi\, d\eta}. \tag{5}$$

Функция Грина удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant G(x, y; \xi, \eta) \leqslant a|\ln r| + b, \tag{6}$$

где a и b — постоянные; отсюда легко усмотреть, что первый множитель справа в (5) ограничен:

$$\sqrt{\int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta} < C, \qquad C = \text{const}.$$

---

[1]) Относительно функции Грина и последующей оценки (6) см., например, В. И. Смирнов [3], 220—224.

Теперь из (5) следует, что $u_n(x, y) \to u(x, y)$ *равномерно* в $\bar{\Omega} = \Omega + S$.

Введение добавочных слагаемых в $\Phi(u)$ усложняет вычисления; это усложнение, однако, может быть оправдано, если по смыслу задачи желательно получить равномерно сходящуюся последовательность.

К. Н. Шевченко [1] применил метод Куранта к трехмерной статической задаче теории упругости.

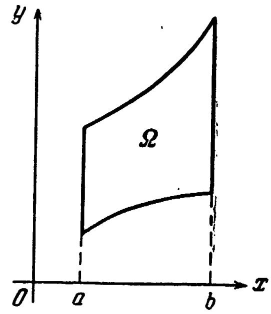

Рис. 6.

Метод Л. В. Канторовича приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Л. В. Канторович предложил метод решения минимальных задач, существенно отличный от метода Ритца. Этот метод подробно изложен в монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1]; здесь мы ограничимся некоторыми пояснениями.

Для простоты допустим, что область Ω плоская и имеет вид, изображенный на рис. 6, и что требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение (1) при условии $u|_S = 0$. Пусть оператор A положителен на множестве функций, удовлетворяющих указанному краевому условию. В этом случае наша задача сводится к задаче об отыскании минимума функционала $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$.

Положим

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x, y) f_k(x),$$

где $\chi_k(x, y)$ — известные функции, равные нулю на S, кроме, может быть, прямых $x = a$ и $x = b$. Функции одной переменной $f_k(x)$ определим из требования, чтобы функционал $F(u_n)$ имел минимальное значение. Обычными для вариационного исчисления методами[1]) мы получаем для $f_k(x)$ систему дифференциальных уравнений; к ним добавляются краевые условия при $x = a$ и $x = b$, вытекающие из краевых условий задачи:

$$f_k(a) = f_k(b) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Как мы видим, сущность метода Л. В. Канторовича состоит в том, что он сводит (приближенно) интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов [3], гл. II.

Метод наискорейшего спуска. Этот метод непосредственно применим только к таким симметричным операторам, которые удовлетворяют двойному неравенству

$$m\|u\|^2 \leqslant (Au, u) \leqslant M\|u\|^2, \tag{7}$$

где m и M — положительные постоянные. Такие операторы принадлежат к классу ограниченных операторов. Дифференциальные операторы в этот класс не входят, поэтому применение метода наискорейшего спуска к дифференциальному уравнению требует такого предварительного преобразования этого уравнения, чтобы оператор, стоящий в его левой части, оказался ограниченным.

Итак, пусть оператор A удовлетворяет неравенству (7); из этого неравенства, между прочим, следует, что A — положительно определенный оператор. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{8}$$

где u — искомая, а f — данная функция. По теореме о функционале энергии (§ 13) решение этого уравнения равносильно решению задачи о минимуме функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Возьмем произвольную функцию u_1. Может случиться, что $Au_1 = f$, тогда задача решена. Если же $Au_1 \neq f$, то примем u_1 за первое приближение к искомому решению. Для построения второго приближения положим $Au_1 - f = v_1$ и выберем число a так, чтобы выражение $F(u_1 - av_1)$ приняло наименьшее значение. Раскрывая скобки, легко найдем

$$F(u_1 - av_1) = F(u_1) - 2a[(Au_1, v_1) - (f, v_1)] + a^2(Av_1, v_1).$$

Приравняв нулю производную этого выражения по a, получим

$$(Av_1, v_1)a - [(Au_1, v_1) - (f, v_1)] = 0.$$

Это уравнение можно несколько упростить, так как

$$(Au_1, v_1) - (f, v_1) = (Au_1 - f, v_1) = (v_1, v_1) = \|v_1\|^2.$$

Теперь

$$(Av_1, v_1)a - \|v_1\|^2 = 0 \quad \text{и} \quad a = \frac{\|v_1\|^2}{(Av_1, v_1)} = a_1.$$

За второе приближение примем функцию $u_2 = u_1 - av_1$. Повторив процесс, получим третье приближение u_3 и т. д.

Быстрота сходимости метода наискорейшего спуска оценивается неравенством

$$|u_{n+1}-u_0| \leqslant |u_1-u_0| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n,$$

где u_0 — точное решение уравнения (8).

О методе наискорейшего спуска см. также М. Ш. Бирман [1, 2].

§ 19. Метод сеток. Вариационно-разностные схемы

Мы не будем излагать здесь основные понятия и приемы метода сеток, которые мы предполагаем известными читателю. Цель настоящего параграфа — показать, что некоторые сеточные схемы можно получить из энергетического метода, если несколько видоизменить процесс Ритца. Это обстоятельство было указано в работе Р. Куранта [2], о которой ниже будет сказано чуть подробнее.

1°. Об одном видоизменении процесса Ритца. Как было описано в § 17, при переходе от приближения по Ритцу с номером n к приближению с номером $n+1$ мы сохраняем все ранее использованные координатные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и лишь присоединяем к ним один новый элемент φ_{n+1}. Но можно поступать и иначе. Вместо координатной системы (3) § 17 введем последовательность наборов элементов

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \ldots, & \varphi_{1k_1}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}, & \ldots, & \varphi_{2k_2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}, & \varphi_{n2}, & \ldots, & \varphi_{nk_n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{1}$$

которые подчиним следующим условиям:

1) все элементы (1) принадлежат энергетическому пространству рассматриваемого положительно определенного оператора;

2) при любом n элементы n-й строки $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nk_n}$ линейно независимы;

3) система (1) полна в энергетическом пространстве в следующем смысле: пусть u — произвольный элемент энергетического пространства; каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое натуральное число $N(u, \varepsilon)$, что при любом $n > N$ можно найти постоянные $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_{k_n}^{(n)}$, удовлетворяющие неравенству

$$\left| u - \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_k^{(n)} \varphi_{nk} \right|_A < \varepsilon. \tag{2}$$

Приближенное решение задачи о минимуме функционала энергии будем искать в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_k \varphi_{nk}; \tag{3}$$

числа a_k подберем так, чтобы выражение

$$F(u_n) = [u_n, u_n]_A - 2(u_n, f) \tag{4}$$

имело минимальное значение. Как и в § 17, мы придем к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{k_n} a_k [\varphi_{nk}, \varphi_{nj}]_A = (f, \varphi_{nj}), \tag{5}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k_n.$$

По-прежнему определитель этой системы отличен от нуля как определитель Грама линейно независимых элементов $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots$ $\ldots, \varphi_{nk_n}$; решение системы (5) существует, единственно и доставляет наименьшее значение величине (4).

Построенные таким образом приближенные решения (3) сходятся к обобщенному решению u_0 задачи. Действительно,

$$F(u_n) = |u_0 - u_n|_A^2 - |u_0|_A^2;$$

отсюда видно, что построенное нами приближенное решение сообщает минимальное значение величине

$$\left| u_0 - \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_k \varphi_{nk} \right|_A, \qquad \alpha_k = \text{const}.$$

Далее, по данному $\varepsilon > 0$ определим $N(u_0, \varepsilon)$, возьмем $n > N$ и подберем $\alpha_k^{(n)}$ так, чтобы выполнялось неравенство (2). Теперь

$$|u_0 - u_n|_A \leqslant \left| u_0 - \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_k^{(n)} \varphi_{nk} \right| < \varepsilon, \qquad n > N,$$

что и требовалось доказать.

2°. Вариационно-разностные схемы. Как было указано в начале параграфа, видоизменение процесса Ритца, описанное в п. 1°, позволяет строить некоторые сеточные схемы; эти схемы носят название вариационно-разностных. Их построение мы поясним на самом простом примере. Рассмотрим задачу

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x); \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{6}$$

Как мы видели в § 8, в пространстве $L_2(0, 1)$ оператор задачи (6) положительно определенный. Положим $k_n = n$ и зададим функции $\varphi_{nk}(x)$ формулой

$$\varphi_{nk}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant (k-1)/n, \\ n(x-(k-1)/n), & (k-1)/n \leqslant x \leqslant k/n, \\ n((k+1)/n - x), & k/n \leqslant x \leqslant (k+1)/n, \\ 0, & (k+1)/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (7)$$

График функции $\varphi_{nk}(x)$ показан на рис. 7. Функции (7), очевидно, удовлетворяют условиям 1) и 2) настоящего пара-

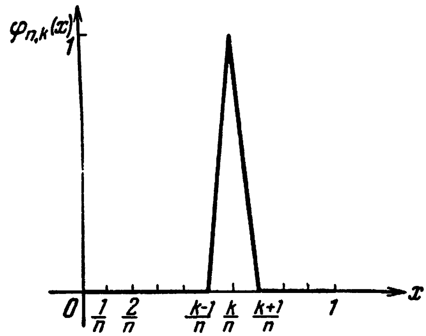

Рис. 7.

графа; можно показать, что они удовлетворяют и условию 3).

Приближенное решение $u_n(x)$ имеет вид

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{nk}(x);$$

отсюда $a_k = u_n(k/n)$. Таким образом, коэффициенты a_k суть значения приближенного решения в узлах сетки.

Система (5) принимает следующий вид:

$$2n^2 u(j/n) - n^2[u((j-1)/n) + u((j+1)/n)] =$$
$$= n\left\{\int_{(j-1)/n}^{j/n} \left(x - \frac{j-1}{n}\right) f(x)\,dx + \int_{j/n}^{(j+1)/n} \left(\frac{j+1}{n} - x\right) f(x)\,dx\right\}, \qquad (8)$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для упрощения записи мы заменили обозначение u_n на u.

Систему (8) можно несколько упростить и привести к более обычному виду. Для этого обозначим $h = 1/n$, $x_j = j/n$ и разделим обе части уравнения на 2. Далее, предполагая функцию f

непрерывной, можно в правых частях уравнений (8) приближенно заменить под знаком интеграла $f(x)$ на $f(x_j)$. В результате получится обычная сеточная система

$$-\frac{u(x_{j-1})-2u(x_j)+u(x_{j+1})}{h^2}=f(x_j), \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Р. Курант [2] изложил идею вариационно-разностных схем применительно к задаче об изгибе мембраны, а также к некоторым другим плоским задачам. В задаче об изгибе мембраны Р. Курант предлагает построить квадратную сетку, а затем каждый квадрат сетки разбить диагоналями на прямоугольники; в качестве координатных выбираются непрерывные функции, линейные в каждом таком треугольнике и равные нулю вне квадрата и на его сторонах.

Вариационно-разностным схемам посвящена большая литература. Из работ последнего времени отметим следующие: Л. А. Оганесян [1—2], Ю. А. Гусман и Л. А. Оганесян [1], Ю. К. Демьянович [1—3], Ж. П. Обэн [1], В. К. Демьянович и Ю. К. Демьянович [1]. Методам решения уравнений вариационно-разностных схем посвящена статья С. К. Годунова и Г. П. Прокопова [1].

Вариационно-разностные схемы можно проще получать следующим путем[1]. Если, например, исходное гильбертово пространство $H=L_2(\Omega)$, то функционал энергии обычно есть некоторый интеграл. Заменим его конечной суммой по какой-нибудь квадратурной формуле и будем искать минимум этой суммы. Таким путем мы придем к сеточной системе, которая в качестве неизвестных по-прежнему содержит приближенные значения искомой функции в узлах сетки, а коэффициенты и свободные члены системы соответственно зависят от значений коэффициентов и свободного члена данного дифференциального уравнения в тех же узлах.

Следует отметить, что при таком подходе нельзя обосновать сходимость процесса ссылкой на результаты п. 1° настоящего параграфа.

§ 20. Более общая задача о минимуме квадратичного функционала

Основные результаты настоящей главы мы получили, исходя из рассмотрения задачи о минимуме функционала энергии

$$F(u)=[u, u]-2(u, f).$$

[1]) Первой в этом направлении была известная работа Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [1].

Такая вариационная задача обычно соответствует неоднородному дифференциальному уравнению при однородных краевых условиях. Неоднородные краевые условия чаще приводят, как мы увидим ниже, к более общей задаче, к изложению которой мы и переходим.

Пусть в гильбертовом пространстве H задан положительно определенный оператор A. Пусть, далее, l линейный, но, может быть, неограниченный в H функционал. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\tilde{F}(u) = |u|_A^2 - 2lu. \tag{1}$$

Она решается в общем по той же схеме, что и задача о минимуме функционала энергии. Допустим, что функционал l ограничен в H_A. Тогда по теореме Ф. Риса (теорема 1 § 5) $lu = [u, u_0]_A$, где u_0 — вполне определенный элемент пространства H_A. Теперь

$$\tilde{F}(u) = [u, u]_A - 2[u, u_0]_A = |u - u_0|_A^2 - |u_0|_A^2.$$

Последнее равенство показывает, что в пространстве H_A функционал (1) достигает минимума при $u = u_0$ и этот минимум равен $-|u_0|_A^2$.

Если функционал l не ограничен в H_A, то функционал $\tilde{F}$ не ограничен снизу, и задача о его минимуме не имеет смысла. Действительно, если функционал l не ограничен в H_A, то при любом натуральном n можно найти такой элемент u_n, что $|u_n|_A = 1$ и $lu_n > n$, а тогда $\tilde{F}(u_n) < -2n + 1$ и $\inf \tilde{F}(u) = -\infty$.

Результаты настоящего параграфа будут использованы ниже, в § 25.

ГЛАВА IV

ВАЖНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

§ 21. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Многие задачи математической физики приводят к отысканию решения обыкновенного дифференциального уравнения, причем это решение должно удовлетворять на концах данного отрезка некоторым условиям, которые всегда можно сделать однородными. Мы сможем применить развитые в предыдущей главе методы к нашей задаче, если сможем установить, что при тех или иных ограничениях оператор рассматриваемой задачи, определяемый левой частью дифференциального уравнения и краевыми условиями, симметричный и положительно определенный. Этим мы и займемся в настоящем параграфе.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)u = f(x). \tag{1}$$

Будем искать его интеграл, непрерывный вместе со своей первой производной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющий на концах этого отрезка краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} \alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \\ \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где α, β, γ, δ — постоянные.

Относительно данных мы сделаем следующие допущения:

а) на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ $p(x)$, $p'(x)$ и $r(x)$ непрерывны [1];

б) на том же отрезке $p(x) \geqslant 0$, $r(x) \geqslant 0$;

в) функция $p(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, но так, чтобы интеграл

$$A = \int\limits_a^b \frac{dx}{p(x)} \tag{3}$$

[1]) Эти требования можно ослабить.

сходился; требование это, в частности, всегда выполняется, если $p(x)$ нигде в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ не обращается в нуль;

г) постоянные α, β, γ, δ неотрицательны, причем α и β, а также γ и δ, не обращаются одновременно в нуль.

За область D_L определения оператора L примем множество функций, которые на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными и которые удовлетворяют краевым условиям (2). Докажем, что оператор L симметричен.

Область D_L плотна[1]) в $L_2(a, b)$ (см. § 4), и нам достаточно проверить только тождество $(Lu, v) = (u, Lv)$. С этой целью составим скалярное произведение (Lu, v), где обе функции u, $v \in D_L$, в частности, обе функции удовлетворяют условиям (2). Имеем

$$(Lu, v) = -\int_a^b v \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)dx + \int_a^b r(x)\, u(x)\, v(x)\, dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям и воспользуемся условием (2):

$$(Lu, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + r(x)\, uv\right]dx + \\ + \frac{\beta}{\alpha}\, p(a)\, u(a)\, v(a) + \frac{\delta}{\gamma}\, p(b)\, u(b)\, v(b); \qquad (4)$$

мы предполагаем при этом, что $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Если $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, то $u(a) = 0$ или $u(b) = 0$, и соответствующие слагаемые справа в (4) надо отбросить. В частности, если $\alpha = \gamma = 0$, так что условия (2) принимают вид

$$u(a) = u(b) = 0, \qquad (2_1)$$

то

$$(Lu, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + ruv\right]dx. \qquad (4_1)$$

Выражение справа в (4) симметрично относительно u и v; отсюда легко заключить, что $(Lu, v) = (u, Lv)$, т. е., что оператор L симметричен.

---

[1]) Аналогичное обстоятельство имеет место во всех остальных параграфах настоящей главы. В последующем мы его особо отмечать не будем.

Полагая в (4) $v(x)=u(x)$, найдем, что

$$(Lu,\ u)=\int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+r(x)\,u^2(x)\right]dx+$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u^2(a)+\frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b). \qquad (5)$$

Докажем, что если хотя бы одно из чисел β и δ отлично от нуля, то оператор L положительно определенный. Рассмотрим сперва более простой частный случай, когда краевые условия имеют вид (2_1), а $p(x)\geqslant p_0$, где p_0 положительная постоянная. В этом случае формула (5) упрощается:

$$(Lu,\ u)=\int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+r(x)\,u^2(x)\right]dx. \qquad (5_1)$$

В формуле (5_1) справа отбросим неотрицательное второе слагаемое и заменим $p(x)$ меньшим постоянным значением p_0. Равенство (5_1) тогда перейдет в неравенство

$$(Lu,\ u)\geqslant p_0\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx=p_0\left\|\frac{du}{dx}\right\|^2. \qquad (6)$$

Остается оценить $\left\|\frac{du}{dx}\right\|$. Так как $u(a)=0$, то

$$u(x)=\int_a^x u'(t)\,dt, \qquad u'(t)=\frac{du(t)}{dt}.$$

По неравенству Буняковского при $a\leqslant x\leqslant b$

$$u^2(x)\leqslant(x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt\leqslant(x-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt=(x-a)\,\|u'\|^2.$$

Интегрируя это в пределах от a до b, находим, что

$$\|u\|^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\,\|u'\|^2. \qquad (7)$$

Подставив это в (6), получим неравенство

$$(Lu,\ u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2;\qquad \gamma^2=2p_0/(b-a)^2,$$

которое показывает, что оператор L положительно определенный.

Обратимся к общему случаю. Допустим, что $\beta>0$. В формуле (5) справа отбросим второе слагаемое под интегралом и второе внеинтегральное слагаемое. От этого правая часть в (5), вообще говоря, уменьшится, и мы получим неравенство

$$(Lu, u) \geqslant \int_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) \geqslant B \left[\int_a^b pu'^2 dx + u^2(a)\right], \quad (8)$$

где B — меньшее из чисел $\frac{\beta}{\alpha} p(a)$ и 1.

Имеем

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\, dt.$$

В силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ имеем

$$u^2(x) \leqslant 2u^2(a) + 2\left(\int_a^x u'(t)\, dt\right)^2.$$

Далее,

$$\left(\int_a^x u'(t)\, dt\right)^2 = \left(\int_a^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \sqrt{p(t)}\, u'(t)\, dt\right)^2,$$

и по неравенству Буняковского

$$\left(\int_a^x u'(t)\, dt\right)^2 \leqslant \int_a^x \frac{dt}{p(t)} \int_a^x p(t) u'^2(t)\, dt.$$

Увеличив справа верхний предел интегрирования, мы можем только усилить неравенство, поэтому заменим справа x его наибольшим значением b. Тогда получим

$$\left(\int_a^x u'(t)\, dt\right)^2 \leqslant \int_a^b \frac{dt}{p(t)} \int_a^b p(t) u'^2(t)\, dt = A \int_a^b p(t) u'^2(t)\, dt$$

и, следовательно,

$$u^2(x) \leqslant 2A \int_a^b p(t) u'^2(t)\, dt + 2u^2(a).$$

Интегрируя это по x в пределах от a до b, найдем

$$\| u \|^2 \leqslant C\left[\int_a^b p(t) u'^2(t)\, dt + u^2(a)\right], \quad (9)$$

где C — большее из чисел $2A(b-a)$ и $2(b-a)$. Сравнение неравенств (8) и (9) показывает, что

$$(Lu, u) \geqslant \frac{B}{C} \| u \|^2, \tag{10}$$

т. е. что оператор L положительно определенный.

Выше было предположено, что $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Если одно из чисел α и γ или оба эти числа обращаются в нуль, то утверждение о положительной определенности оператора L остается в силе, причем рассуждения даже упрощаются. Пусть, например, $\alpha = 0$. Первое из краевых условий (2) тогда принимает вид $u(a) = 0$. Вместо (8) и (9) получаются более простые неравенства

$$(Lu, u) \geqslant \int_a^b p(x) u'^2(x)\, dx, \quad \| u \|^2 \leqslant A(b-a) \int_a^b p(x) u'^2(x)\, dx,$$

а отсюда вытекает неравенство (10), в котором следует только заменить $\frac{B}{C}$ через $\frac{1}{A(b-a)}$.

В силу теоремы о функционале энергии (§ 13) задача об интегрировании уравнений (1) при краевых условиях (2) сводится, если $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, к отысканию функции, реализующей минимум функционала

$$F(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b) + \\ + \int_a^b \left[p(x) u'^2(x) + r(x) u^2(x) - 2f(x) u(x) \right] dx. \tag{11}$$

Если $\alpha \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, то соответствующее краевое условие (2), как об этом было сказано в § 12, естественное; если же $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, то соответствующее краевое условие главное. В силу результатов § 14 наша краевая задача имеет решение; оно может быть построено, приближенно или точно, одним из методов, изложенных в §§ 17—18.

Пусть $u_0(x)$ — точное решение задачи, а $u_n(x)$ — ее приближенное решение, построенное так, как только что указано. Тогда, как мы знаем, $u_n \xrightarrow{э} u$. Выясним характер сходимости по энергии в данном случае.

Ограничимся допущением, что в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ выполнено неравенство $p(x) \geqslant p_0$, где p_0 положительная постоянная.

По формуле (5) имеем

$$|u|^2=\int_a^b\left[p(x)u'^2(x)+r(x)u^2(x)\right]dx+\frac{\beta}{\alpha}p(a)u^2(a)+\frac{\delta}{\gamma}p(b)u^2(b).$$

Как было указано, $u_n \xrightarrow{э} u_0$, или, что то же,

$$\lim_{n\to\infty}|u_n-u_0|=0.$$

По неравенству треугольника (§ 2)

$$|u_n-u_m|\leqslant|u_n-u_0|+|u_m-u_0|$$

и, следовательно,

$$\lim_{n,\,m\to\infty}|u_n-u_m|^2=0.$$

Пользуясь формулой (11), этому можно придать вид

$$\lim_{n,\,m\to\infty}\left\{\int_a^b\left[p(x)\left(u_n'(x)-u_m'(x)\right)^2+r(x)\left(u_n(x)-u_m(x)\right)^2\right]dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{\alpha}p(a)\left[u_n(a)-u_m(a)\right]^2+\frac{\delta}{\gamma}p(b)\left[u_n(b)-u_m(b)\right]^2\right\}=0.$$

Слагаемые слева неотрицательны и потому каждое из них в отдельности стремится к нулю; в частности,

$$\lim_{n,\,m\to\infty}\int_a^b p(x)\left[u_n'(x)-u_m'(x)\right]^2dx=0;\quad \lim\left[u_n(a)-u_m(a)\right]=0. \tag{12}$$

Имеем, очевидно,

$$\int_a^b\left[u_n'(x)-u_m'(x)\right]^2dx\leqslant\frac{1}{p_0}\int_a^b p(x)\left[u_n'(x)-u_m'(x)\right]^2dx;$$

отсюда

$$\lim_{n,\,m\to\infty}\int_a^b\left[u_n'(x)-u_m'(x)\right]^2dx=0. \tag{13}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае из сходимости функций $u_n(x)$ по энергии вытекает сходимость в среднем их первых производных.

8*

Рассмотрим теперь разность

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(a) - u_m(a) + \int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)]\,dt.$$

В силу неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ и неравенства Буняковского

$$[u_n(x) - u_m(x)]^2 \leqslant 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2\left\{\int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)]\,dt\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2(x-a)\int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)]^2\,dt.$$

Заменив справа x через b, мы неравенство усилим:

$$[u_n(x) - u_m(x)]^2 \leqslant 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2(b-a)\int_a^b [u_n'(t) - u_m'(t)]^2\,dt. \tag{14}$$

Отсюда видно, что последовательность $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно к некоторой предельной функции $\bar{u}(x)$, так как правая часть неравенства (14) не зависит от x и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Нетрудно видеть, что $\bar{u}(x) = u_0(x)$. Действительно, так как $u_n(x) \xrightarrow{\text{э}} u_0(x)$, то одновременно[1] $u_n(x) \xrightarrow{\text{ср.}} u_0(x)$. С другой стороны, из равномерной сходимости также вытекает сходимость в среднем, так что $u_n(x) \xrightarrow{\text{ср.}} \bar{u}(x)$, а так как одна и та же последовательность не может сходиться в среднем к двум разным пределам, то $\bar{u}(x) \equiv u_0(x)$.

Таким образом, если $p(x) \geqslant p_0 > 0$, то сходимость по энергии означает равномерную сходимость самих функций и сходимость в среднем их первых производных.

Замечание. Если отказаться от требования, что $p(x) \geqslant p_0 > 0$, но подчинить $p(x)$ условию, что интеграл (3) сходится, то по-прежнему можно доказать, что $u_n(x) \to u_0(x)$ равномерно, но вместо равенства (13) мы сможем получить только более слабое равенство (12), из которого можно в свою очередь получить, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\,[u_n'(x) - u_0'(x)]^2\,dx = 0.$$

[1]) Символом $\xrightarrow{\text{ср.}}$ здесь обозначена сходимость в L_2.

Переходя к уравнению произвольного четного порядка

$$Lu=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^ku}{dx^k}\right]=f(x), \tag{15}$$

мы ограничимся простейшими краевыми условиями

$$u(a)=u'(a)=\ldots=u^{(m-1)}(a)=$$
$$=u(b)=u'(b)=\ldots=u^{(m-1)}(b)=0. \tag{16}$$

Коэффициенты $p_k(x)$, $k=0, 1, 2, \ldots, m-1$, будем считать неотрицательными, $p_m(x)$ — строго положительным; будем также считать, что $f(x)\in L_2(a, b)$. Интегрируя по частям и используя условия (16), найдем, что

$$(Lu, u)=\sum_{k=0}^{m}\int_a^b p_k(x)\left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^2dx\geqslant\int_a^b p_m(x)\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)^2dx\geqslant p_0\|u^{(m)}\|^2, \tag{17}$$

где на этот раз

$$p_0=\min p_m(x);$$

мы полагаем, что $p_0>0$.

Неравенство (7) справедливо для всякой функции, равной нулю при $x=a$. Функции $u(x)$, $u'(x)$, $\ldots$, $u^{m-1}(x)$ этому требованию удовлетворяют, и поэтому имеют место неравенства

$$\|u\|\leqslant\frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|,\qquad \|u'\|\leqslant\frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u''\|,\ \ldots,\ \|u^{(m-1)}\|\leqslant\frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u^{(m)}\|,$$

откуда легко следует, что $\|u^{(m)}\|\geqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m\|u\|$. Подставив это в (17), получим

$$(Lu, u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2,\qquad \gamma=\sqrt{p_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m.$$

Последнее неравенство показывает, что при условиях (16) оператор (15) положительно определенный; отсюда вытекает, как уже не раз упоминалось, существование решения и сходимость минимизирующей последовательности. Выясним характер этой сходимости.

Неравенству (17) можно придать вид

$$|u|\geqslant\sqrt{p_0}\|u^{(m)}\|. \tag{18}$$

Пусть $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, — минимизирующая последовательность. По теореме 1 § 15 $|u_n-u_0|\to 0$, где $u_0(x)$ — точное решение задачи. По неравенству треугольника (§ 2) имеем

$$|u_n - u_k| \leqslant |u_n - u_0| + |u_k - u_0|$$

и, следовательно,

$$\lim_{k,\, n\to\infty} |u_n - u_k| = 0. \tag{19}$$

В силу условий (16) $u_n^{(m-1)}(a) = u_k^{(m-1)}(a) = 0$, отсюда

$$u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) = \int_a^x \left[u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right] dt$$

и по неравенству Буняковского

$$\left| u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) \right|^2 \leqslant (x-a) \int_a^x \left[u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right]^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant (b-a) \int_a^b \left[u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right]^2 dt = (b-a) \left\| u_n^{(m)} - u_k^{(m)} \right\|^2.$$

Теперь из (18) и (19) следует, что $(m-1)$-е производные от $u_n(x)$ сходятся равномерно. Но тогда по теореме Вейерштрасса об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей (CI, **145**) будут равномерно сходиться как сами приближенные решения $u_n(x)$, так и их производные до порядка $m-1$ включительно. Из соотношений (18) и (19) вытекает также, что m-е производные от $u_n(x)$ сходятся в среднем.

§ 22. Изгиб балки переменного сечения, лежащей на упругом основании

Уравнение изгиба балки, лежащей на упругом основании, имеет вид

$$Lw = \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right] + Kw = q(x). \tag{1}$$

Здесь w — прогиб балки в сечении с абсциссой x, $I(x)$ — момент инерции этого сечения. $I(x)$ будет постоянной или функцией от x в зависимости от того, постоянно или переменно сечение балки. Примем, что ни одно из поперечных сечений балки не вырождается в точку или в линию, так что момент инерции $I(x)$ нигде не обращается в нуль. Далее, E — модуль Юнга материала балки, K — коэффициент податливости основания, $q(x)$ — интенсивность нормальной нагрузки. Длину балки обозначим буквой l. Если концы балки жестко закреплены, то должны выполняться краевые условия

$$w(0)=w(l)=0; \qquad w'(0)=w'(l)=0. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) суть частные случаи (при $m=2$) уравнений (15) и (16) предшествующего параграфа. Отсюда заключаем, что оператор, определяемый левой частью уравнения (1) и краевыми условиями (2), положительно определенный, и задача об изгибе балки, лежащей на упругом основании и имеющей жестко закрепленные концы, сводится к задаче о минимуме функционала

$$F(w)=(Lw,\ w)-2(w,\ q)$$

в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Если воспользоваться формулой (17) предыдущего параграфа, то $F(w)$ можно привести к виду

$$F(w)=\int_a^b \left[EI(x)\,w''^2+Kw^2-2q(x)\,w\right]dx. \tag{3}$$

Решение задачи о минимуме функционала (3) можно получить по методу Ритца, для чего необходимо выбрать полную по энергии систему координатных функций $\varphi_n(x)$; так как условия (2) — главные; то координатные функции необходимо должны им удовлетворять. Если, например, положить

$$\varphi_k(x)=(l-x)^2\,x^{k+1}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

то можно доказать, что система (4) полна по энергии. Приближенное решение нашей задачи получим, положив

$$w_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)=(l-x)^2\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1} \tag{5}$$

и определив коэффициенты из системы (8) § 17, которую запишем так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{ik}=b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6}$$

Здесь

$$b_k=(q,\ \varphi_k)=\int_0 q(x)\,(l-x)^2\,x^{k+1}\,dx; \tag{7}$$

коэффициенты A_{ik} можно представить в одной из двух форм, соответствующих системам (8_1) и (8_2) § 17:

$$A_{ik}=(L\varphi_i,\ \varphi_k)=\int_0^l \varphi_k\cdot L\varphi_i\,dx=\int_0^l \varphi_k\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\right)+K\varphi_i\right]dx;$$

$$A_{ik}=[\varphi_i,\ \varphi_k]=\int_0^l\left(EI(x)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\frac{d^2\varphi_k}{dx^2}+K\varphi_i\varphi_k\right)dx. \qquad (8)$$

Обозначим точное решение нашей задачи через $w_0(x)$. Из общих соображений, изложенных в конце предшествующего параграфа, следует, что $w_n(x)\to w_0(x)$ и $w_n'(x)\to w_0'(x)$ равномерно, а $w_n''(x)\xrightarrow{\text{ср.}} w_0''(x)$.

Если какой-либо из концов балки свободен, то условия (2) заменяются условиями обращения в нуль величин $\frac{d^2w}{dx^2}$ и $\frac{d}{dx}\left(EI(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ на соответствующем конце. Например, если конец $x=0$ жестко закреплен, а конец $x=l$ свободен, то краевые условия таковы:

$$w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w''(l)=0,\quad \frac{d}{dx}\left[EI(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=l}=0. \qquad (9)$$

Нетрудно проверить, что при этих условиях оператор в левой части уравнения (1) по-прежнему будет положительно определенным. Проверку этого и вывод проистекающих отсюда следствий относительно разрешимости задачи и применимости приближенных методов ее решения предоставляем читателю.

Результаты настоящего параграфа остаются в силе и в том случае, когда коэффициент K податливости основания переменный.

§ 23. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Ограничимся рассмотрением системы уравнений второго порядка вида

$$-\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dx}\left(p_{jk}(x)\frac{du_k}{dx}\right)-q_{jk}(x)u_k\right]=f_j(x);$$

$$-\infty<a<x<b<+\infty,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s. \qquad (1)$$

Будем считать, что $p_{jk}(x)$, $dp_{jk}(x)/dx$, $q_{jk}(x)$ непрерывны; на самом деле эти требования можно ослабить.

Пусть краевые условия имеют простейшую форму

$$u_j(a) = u_j(b) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2}$$

Совокупности данных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ и искомых функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_s(x)$ можно трактовать как векторы $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ с s составляющими. Введя еще матрицы $\boldsymbol{P}(x) = \| p_{jk}(x) \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=s}$, $\boldsymbol{Q}(x) = \| q_{jk}(x) \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=s}$, можно записать систему уравнений (1) и краевых условий (2) в виде одного уравнения

$$-\frac{d}{dx}\left(\boldsymbol{P}(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right) + \boldsymbol{Q}(x)\,\mathbf{u} = \mathbf{f}(x) \tag{1_1}$$

и одной пары краевых условий

$$\mathbf{u}(a) = \mathbf{u}(b) = 0. \tag{2_1}$$

Введем теперь в рассмотрение вещественное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(a, b)$ s-компонентных векторных функций, обладающих тем свойством, что интеграл

$$\int_a^b |\mathbf{u}(x)|^2\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{s} u_k^2(x)\,dx$$

сходится. Скалярное произведение и норма в $\mathbf{L}_2(0, 1)$ определяются формулами

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \mathbf{u}(x)\cdot\mathbf{v}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{s} u_k(x)\,v_k(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_a^b |\mathbf{u}(x)|^2\,dx. \tag{4}$$

Левые части уравнений (1) и (2) определяют в пространстве $\mathbf{L}_2(a, b)$ оператор, который мы обозначим через $\mathbf{A}$; за область его определения $D_{\mathbf{A}}$ можно принять совокупность s-компонентных вектор-функций, имеющих на сегменте $[a, b]$ непрерывные вторые производные и удовлетворяющих условиям (2).

Теорема 1. *Если матрицы $\boldsymbol{P}(x)$ и $\boldsymbol{Q}(x)$ симметричны, то оператор $\mathbf{A}$ симметричен.*

Пусть $u, v \in D_{\mathbf{A}}$. Имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int_a^b \mathbf{v}(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\boldsymbol{P}(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right)dx + \int_a^b \mathbf{v}(x)\cdot\boldsymbol{Q}(x)\,\mathbf{u}(x)\,dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям; вектор $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет условиям (2), поэтому внеинтегральные члены исчезнут, и мы получим

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = \int_a^b \left[\boldsymbol{P}\frac{d\mathbf{u}}{dx} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dx} + \boldsymbol{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right] dx. \tag{5}$$

Далее,

$$\boldsymbol{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j,\,k=1}^{s} q_{jk} u_k v_j.$$

Матрица $\boldsymbol{Q}$ симметрична, поэтому $q_{jk} = q_{kj}$; меняя обозначения j и k местами, найдем

$$\boldsymbol{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j,\,k=1}^{s} q_{kj} u_j v_k = \sum_{j,\,k=1}^{s} q_{jk} v_j u_k = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{Q}\mathbf{v}.$$

Таким образом, выражение $\boldsymbol{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ симметрично относительно $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Аналогично устанавливается симметричность первого слагаемого в (5). Отсюда $(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Av})$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Если матрицы $\boldsymbol{P}(x)$ и $\boldsymbol{Q}(x)$ симметричны, причем на сегменте $[a, b]$ матрица $\boldsymbol{P}(x)$ положительно определенная, а матрица $\boldsymbol{Q}$ неотрицательная, то оператор $\mathbf{A}$ положительно определен в пространстве $\mathbf{L}_2(a, b)$.*

Обозначим через $\lambda_1(x)$ наименьшее собственное число матрицы $\boldsymbol{P}(x)$; по условию теоремы $\lambda_1(x) > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. При этом для любого вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{P}(x)\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \sum_{j,\,k=1}^{s} p_{jk}(x) t_j t_k \geqslant \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{s} t_k^2. \tag{6}$$

На сегменте $[a, b]$ матрица $\boldsymbol{P}(x)$ непрерывна, а тогда на том же сегменте непрерывны и все ее собственные числа. Непрерывная и положительная функция $\lambda_1(x)$ имеет на этом сегменте положительную точную нижнюю границу (Cl, 35). Существует, следовательно, такая постоянная $\bar{\lambda} > 0$, что $\lambda_1(x) \geqslant \bar{\lambda}$, $a \leqslant x \leqslant b$. Теперь из неравенства (6) следует

$$\boldsymbol{P}(x)\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} \geqslant \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{s} t_k^2. \tag{7}$$

Одновременно по условию теоремы

$$\boldsymbol{Q}(x)\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \sum_{j,\,k=1}^{s} q_{jk}(x) t_j t_k \geqslant 0. \tag{8}$$

Положим теперь в тождестве (5) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_a^b \left[P \frac{d\mathbf{u}}{dx} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dx} + Q\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] dx \geqslant \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^s \left(\frac{du_k}{dx} \right)^2 dx.$$

В силу краевых условий (2), к функции u_k можно применить неравенство (7) § 21, и мы получим

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \frac{2\lambda}{(b-a)^2} \int_a^b \sum_{k=1}^s u_k^2(x)\, dx = \frac{2\lambda}{(b-a)^2} \| \mathbf{u} \|^2.$$

Теорема доказана.

В условиях теоремы 2 задача (1)—(2) равносильна задаче о минимуме интеграла

$$\int_a^b \left\{ \sum_{j,\,k=1}^s \left[p_{jk} \frac{du_j}{dx} \frac{du_k}{dx} + q_{jk} u_j u_k \right] - 2 \sum_{k=1}^s f_k u_k \right\} dx \tag{9}$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). В качестве координатных функций здесь следует выбирать вектор-функции $\varphi_n(x) = (\varphi_{1n}(x), \varphi_{2n}(x), \ldots, \varphi_{sn}(x))$, удовлетворяющие краевым условиям $\varphi_{jn}(a) = \varphi_{jn}(b) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$; $n = 1, 2, \ldots$

Приближенное по Ритцу решение имеет вид

$$\mathbf{u}_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x),$$

или, более подробно,

$$u_{jn}(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{jk}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Коэффициенты a_k определяются из системы Ритца (8) § 17; в данном случае

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \int_a^b \left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^s p_{\alpha\beta} \frac{d\varphi_{\alpha j}}{dx} \frac{d\varphi_{\beta k}}{dx} + q_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha j} \varphi_{\beta k} \right] dx;$$

$$(\mathbf{f}, \varphi_j) = \int_a^b \sum_{\alpha=1}^s f_\alpha \varphi_{\alpha j}\, dx.$$

Можно указать и другие краевые условия, при которых дифференциальный оператор (1_1) будет положительно определенным. Так будет, например, в случае условий вида

$$\mathbf{u}'(a) - M_1 \mathbf{u}(a) = 0, \qquad \mathbf{u}'(b) + M_2 \mathbf{u}(b) = 0, \tag{10}$$

если M_1 и M_2 — симметричные неотрицательные матрицы и хотя бы одна из них — положительно определенная.

Сходные результаты можно сформулировать и для системы уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\boldsymbol{P}_k(x)\frac{d^k\mathbf{u}}{dx^k}\right)=\mathbf{f}(x). \tag{11}$$

Мы не станем останавливаться на этом подробнее.

§ 24. Основные краевые задачи для неоднородного уравнения Лапласа

Неоднородное уравнение Лапласа имеет вид

$$-\Delta u = f(P), \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

$P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — точка m-мерного пространства (в приложениях чаще всего $m=2$ или $m=3$) и $f(P)$ — заданная функция. В литературе неоднородное уравнение Лапласа чаще называют *уравнением Пуассона*.

Поставим задачу: проинтегрировать уравнение (1) в конечной области Ω при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

где S — граница области Ω. Будем рассматривать оператор $-\Delta$ как оператор, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$. За область определения оператора Лапласа примем линейное множество (обозначим его буквой M) функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) они непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области $\bar\Omega = \Omega + S$; 2) они равны нулю на S. Нетрудно видеть, что на линеале M оператор $-\Delta$ положителен. Воспользуемся формулой (18) § 7. Поверхностный интеграл в этой формуле пропадает, потому что на границе $u=0$. Отсюда

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega \geqslant 0. \tag{3}$$

Остается показать, что $u \equiv 0$, если $(-\Delta u, u) = 0$. Но это очевидно: если $(-\Delta u, u) = 0$, то, как это следует из (3), $\operatorname{grad} u \equiv 0$, откуда вытекает, что u — постоянная. Будучи равной нулю на S, эта постоянная равна нулю.

Из сказанного следует, что сформулированная нами задача Дирихле равносильна задаче о минимуме функционала

$$F(u)=(-\Delta u,\ u)-2(u,\ f) \tag{4}$$

или, если воспользоваться формулой (3), функционала

$$F(u)=\int_\Omega \{(\operatorname{grad} u)^2-2uf\}\,d\Omega \tag{5}$$

на множестве функций, равных нулю на S.

К уравнению (1) с краевым условием (2) сводится, как известно, задача о прогибе мембраны, закрепленной по краю, под действием нормальной нагрузки; функция $f(P)$ пропорциональна этой нагрузке. Функционал (5) пропорционален потенциальной энергии изогнутой мембраны (см. Е. Трефтц [2], n° 26); мы здесь имеем дело, следовательно, с частным случаем принципа минимума потенциальной энергии.

Сходный результат получится, если вместо (2) поставить краевое условие смешанной задачи

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma(P)\,u\right]_S=0, \tag{6}$$

где $\sigma(P)$ — неотрицательная функция, отличная от тождественного нуля. На этот раз мы должны в качестве области определения оператора Лапласа ввести линеал M_σ функций, удовлетворяющих краевому условию (6) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции линеала M. Нетрудно видеть, что на M_σ оператор $-\Delta u$ также положителен. Действительно, по формуле (3) и краевому условию (6)

$$(-\Delta u,\ u)=-\int_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS+\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega=$$
$$=\int_S \sigma u^2\,dS+\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega\geqslant 0;$$

при этом, если $(-\Delta u, u)=0$, то необходимо

$$\int_S \sigma u^2\,dS=0,\qquad \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega=0.$$

Из второго равенства вытекает, что $u=C=\text{const}$. Подставив это в первое равенство, получим

$$C^2\int_S \sigma\,dS=0,$$

Функция $\sigma(P)$ неотрицательная, кроме того, $\sigma(P)$ не равна тождественно нулю. Отсюда следует, что $\int\limits_S \sigma\,dS > 0$, но тогда необходимо $C=0$ и $u(P)\equiv 0$. Таким образом, на линеале M_σ оператор $-\Delta u$ положительный. Задачу интегрирования уравнения (1) Пуассона при краевом условии (6) можно заменить задачей о минимуме функционала

$$F(u) = (-\Delta u,\ u) - 2(u,\ f) = \int\limits_\Omega \{(\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\}\,d\Omega + \int\limits_S \sigma u^2\,dS \qquad (7)$$

на линеале M_σ. Краевое условие (6) естественное.

Особо рассмотрим задачу Неймана для уравнения (1). Пусть ищется решение уравнения (1), непрерывное и непрерывно дифференцируемое в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0. \qquad (8)$$

Можно аналогично предыдущему выделить линеал M_0, образованный функциями, удовлетворяющими краевому условию (8) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции линеала M. Однако оператор $-\Delta u$ не будет положительным на этом линеале. Действительно, по формулам (3) и (8) $(-\Delta u,\ u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega$, что представляет величину неотрицательную. Но из равенства $(-\Delta u, u)=0$ не следует, что $u\equiv 0$. В самом деле, функция $u\equiv 1$, очевидно, входит в линеал M_0 и $(-\Delta u, u)=0$.

Чтобы обойти это затруднение, поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что задача Неймана неразрешима при произвольной функции $f(P)$, и нетрудно найти условие, которому эта функция необходимо должна удовлетворять. Проинтегрируем (1) по Ω: $-\int\limits_\Omega \Delta u\,d\Omega = \int\limits_\Omega f\,d\Omega$; полагая $v\equiv 1$ в формуле (17) § 7, получим

$$\int\limits_\Omega \Delta u\,d\Omega = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS,$$

что равно нулю в силу (8).

Таким образом, для разрешимости задачи Неймана необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Omega f(P)\,d\Omega = 0.$$

Далее, если задача Неймана разрешима, то она имеет бесчисленное множество решений, различающихся между собой на постоянную. Эту постоянную выберем так, чтобы решение $u(P)$ удовлетворяло тому же условию, что и данная функция $f(P)$:

$$\int_{\Omega} u(P)\,d\Omega = 0. \tag{9}$$

Очевидно, такое решение задачи Неймана единственное.

Рассматривая задачу Неймана для уравнения (1), примем за область определения оператора Лапласа линейное множество функций, которые: 1) непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными в $\bar{\Omega}$, 2) удовлетворяют краевому условию (8), 3) удовлетворяют уравнению (9). Это множество обозначим через $\tilde{M}_0$. Выше было сказано, что мы будем каждый раз искать решение задачи Неймана, удовлетворяющее условию (9) — это можно сформулировать, говоря, что мы будем искать решение задачи Неймана, принадлежащее линеалу $\tilde{M}_0$. Докажем, что на линеале $\tilde{M}_0$ оператор $-\Delta$ положителен.

Действительно, мы по-прежнему найдем

$$(-\Delta u,\ u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega \geqslant 0; \tag{4'}$$

если $(-\Delta u, u) = 0$, то $u = \text{const}$, но постоянная, удовлетворяющая равенству (9), необходимо равна нулю.

Задача Неймана может быть заменена следующей вариационной задачей: в линеале $\tilde{M}_0$ найти функцию, реализующую минимум функционала

$$F(u) = (-\Delta u,\ u) - 2(f,\ u),$$

или, в силу краевого условия (8),

$$F(u) = \int_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u)^2 - 2fu\}\,d\Omega. \tag{10}$$

Краевое условие (8) естественное, поэтому нет нужды ему удовлетворять заранее, отыскивая минимум функционала (10).

Выше мы установили положительность оператора $-\Delta$ на каждом из множеств M, M_σ и $\tilde{M}_0$ — этого было достаточно, чтобы свести каждую из рассмотренных нами краевых задач к равносильной вариационной задаче. Докажем теперь, что на каждом из перечисленных множеств оператор $-\Delta$ также и положительно определенный; отсюда будет следовать, что каждая из наших трех краевых задач имеет обобщенное решение.

Начнем с задачи Дирихле. В этом случае

$$(-\Delta u,\ u)=\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega, \tag{11}$$

где m — число измерений области Ω. Для простоты вычислений примем, что Ω — плоская область, расположенная в плоскости x, y; переход к любому числу измерений не представит никаких затруднений.

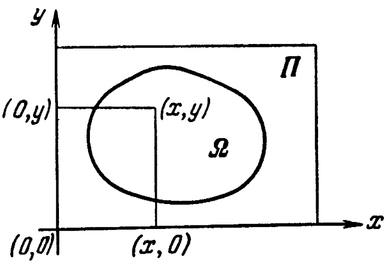

Рис. 8.

При $m=2$ формула (11) принимает более простой вид:

$$(-\Delta u,\ u)=\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega.$$

Напомним еще, что область Ω предполагается конечной.

Заключим Ω внутрь некоторого прямоугольного П. Оси координат направим по двум его сторонам; стороны прямоугольника обозначим через a и b (рис. 8). Пусть $u(x, y)$ — достаточно гладкая[1]) функция, равная нулю на S. Продолжим $u(x, y)$ на весь прямоугольник, полагая ее равной нулю вне Ω; при таком продолжении она будет непрерывной в П. Возьмем в П произвольную точку (x_1, y_1). Имеем, очевидно,

$$\int\limits_{0}^{x_1}\frac{\partial u(x,\ y_1)}{\partial x}\,dx=u(x_1,\ y_1)-u(0,\ y_1).$$

Но точка $(0, y_1)$ лежит вне Ω, и потому $u(0, y_1)=0$. Таким образом,

$$u(x_1,\ y_1)=\int\limits_{0}^{x_1}\frac{\partial u(x,\ y_1)}{\partial x}\,dx.$$

Применяя неравенство Буняковского, имеем

$$u^2(x_1,\ y_1)\leqslant x_1\int\limits_{0}^{x_1}\left[\frac{\partial u(x,\ y_1)}{\partial x}\right]^2 dx\leqslant a\int\limits_{0}^{a}\left[\frac{\partial u(x,\ y_1)}{\partial x}\right]^2 dx.$$

---

[1]) Под «достаточно гладкой» функцией мы понимаем функцию, имеющую достаточное число производных, непрерывных в замкнутой области. В данном случае достаточно непрерывности первых производных функции $u(x, y)$.

Проинтегрируем это неравенство в пределах $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant y_1 \leqslant b$

$$\int_{\Pi} u^2(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \leqslant a^2 \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \leqslant a^2 \int_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Интегрирование достаточно производить по Ω, так как $u \equiv 0$ вне Ω. Обозначив еще $a^2 = \frac{1}{\varkappa}$, мы придем к важному неравенству

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \geqslant \varkappa \int_{\Omega} u^2\, d\Omega, \tag{12}$$

известному под названием *неравенства Фридрихса* [1]. Оно во всяком случае справедливо, как мы установили, если функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема и равна нулю на S. В общем случае m-мерного пространства неравенство Фридрихса имеет вид

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geqslant \varkappa \int_{\Omega} u^2\, d\Omega, \qquad u|_S = 0; \tag{12$_1$}$$

при $m = 1$ оно, по существу, переходит в неравенство (12) § 8.

Из неравенства (12) следует

$$(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \qquad \gamma = \sqrt{\varkappa} > 0, \tag{13}$$

откуда вытекает, что оператор $-\Delta u$ положительно определенный на линеале M достаточно гладких функций, равных нулю на S.

Рассмотрим теперь оператор $-\Delta u$ на линеале функций, удовлетворяющих краевому условию (6). Примем, что $\sigma(P) \geqslant \sigma_0 = \text{const} > 0$. Доказательство положительной определенности на этот раз опирается на неравенство, также установленное Фридрихсом:

$$\int_{\Omega} u^2\, d\Omega \leqslant C \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega + \int_{S} u^2\, dS \right\}, \tag{14}$$

где C — положительная постоянная. Чтобы получить это неравенство, поступим следующим образом. Поместим опять Ω в прямоугольник Π и положим $u = fv$, где f — функция, которую мы выберем ниже. Из легко проверяемого тождества

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - v^2 f\, \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

мы найдем, отбрасывая первое слагаемое справа,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geqslant - v^2 f\,\Delta f+\frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

Проинтегрируем это по Ω; интегралы от второго и третьего членов справа преобразуем по формуле Остроградского (§ 7):

$$\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega \geqslant -\int_\Omega v^2 f\,\Delta f\, d\Omega+\int_S v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS.$$

Отсюда

$$-\int_\Omega v^2 f\,\Delta f\, d\Omega \leqslant \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega-\int_S v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS$$

и тем более

$$-\int_\Omega v^2 f\,\Delta f\, d\Omega \leqslant \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega+\left|\int_S v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS\right|. \qquad (15)$$

Возьмем $f=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$. Тогда $\Delta f = -\pi^2(1/a^2+1/b^2)f$, и f нигде в Ω не обращается в нуль. В последнем неравенстве интеграл слева обращается в

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_\Omega u^2\, d\Omega;$$

второй интеграл справа оценивается так:

$$\left|\int_S v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS\right| = \left|\int_S u^2\,\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS\right| \leqslant \int_S u^2\,\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| dS.$$

На контуре S величина $\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|$, очевидно, ограничена; пусть $\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| \leqslant C' = \text{const}$ на S. Тогда

$$\left|\int_S v^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS\right| \leqslant C' \int_S u^2\, dS,$$

и неравенство (14) получится из (15), если через C обозначить меньшее из чисел $\pi^{-2}(1/a^2+1/b^2)^{-1}$ и $C'\pi^{-2}(1/a^2+1/b^2)^{-1}$.

Оценим теперь скалярное произведение $(-\Delta u, u)$. Имеем

$$(-\Delta u,\ u) = -\int_\Omega u\,\Delta u\, d\Omega = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega-\int_S u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS,$$

или, если воспользоваться равенством (6),

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + \int\limits_{S} \sigma u^2\, dS \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + \sigma_0 \int\limits_{S} u^2\, dS,$$

где, как уже было указано, σ_0 есть нижняя грань $\sigma(P)$.

Положим $\sigma_1 = \min(\sigma_0, 1)$; тогда, очевидно,

$$(-\Delta u, u) \geqslant \sigma_1 \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega + \int\limits_{S} u^2\, dS \right\}. \qquad (16)$$

Сравнив это с (14), окончательно получим

$$(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \qquad \gamma = \sqrt{\sigma_1 / C}. \qquad (17)$$

Обратимся теперь к задаче Неймана. Существенную роль в исследовании этой задачи играет известное *неравенство Пуанкаре*

$$\int\limits_{\Omega} u^2\, d\Omega \leqslant A \int\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + B \left(\int\limits_{\Omega} u\, d\Omega \right)^2, \qquad (18)$$

где $A > 0$ и $B > 0$ — постоянные. Мы приведем доказательство этого неравенства для того случая, когда область Ω — прямоугольник; доказательство для областей более общего вида можно найти, например, в книге Куранта и Гильберта [2], гл. VII, а также в книге С. Л. Соболева [2]. В. Г. Мазья [1, 2] получил необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять область Ω для того, чтобы неравенство Пуанкаре имело место.

Пусть Ω — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Возьмем в Ω две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Имеем, очевидно,

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\, dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\, dy.$$

Возведя это в квадрат и используя неравенство Буняковского, получим

$$u^2(x_1, y_1) + u^2(x_2, y_2) - 2u(x_1, y_1)\,u(x_2, y_2) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{\left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\,dy\right)^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{|x_2 - x_1| \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int\limits_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{a \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + b \int\limits_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\}.$$

Полученное неравенство проинтегрируем по x_1, y_1, x_2, y_2, предполагая, что каждая точка (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пробегает прямоугольник Ω. Мы получим тогда

$$2ab \int\limits_\Omega u^2\,d\Omega - 2\left(\int\limits_\Omega u\,d\Omega\right)^2 \leqslant 2ab\left\{a^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega + b^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d\Omega\right\}.$$

Разделив на $2ab$ и положив $A = \max(a^2, b^2)$, $B = 1/ab$, мы придем к неравенству Пуанкаре для прямоугольника. Распространение на случай большего числа измерений не встречает никаких трудностей.

Коль скоро неравенство Пуанкаре установлено, делается нетрудным доказать положительную определенность оператора $-\Delta$ на множестве $\tilde{M}_0$. Мы уже видели выше, что для функций этого множества

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega.$$

Так как функция $u(P)$ удовлетворяет еще условию (9), то для этой функции неравенство Пуанкаре упрощается и принимает вид

$$\int\limits_\Omega u^2\,d\Omega \leqslant A \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega = A \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega.$$

Теперь очевидно, что $(-\Delta u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2$, $\gamma = 1/\sqrt{A}$.

Из формул (4) и (4′) нетрудно усмотреть, что для функций из области определения оператора задачи Дирихле или задачи

Неймана энергетическое произведение и энергетическая норма определяются одними и теми же формулами:

$$[u, v] = \int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\Omega, \tag{19}$$

$$|u|^2 = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega. \tag{20}$$

Остановимся на свойствах функций, входящих в энергетическое пространство задачи Дирихле или задачи Неймана; знание этих свойств понадобится нам в гл. VIII. Предварительно введем понятие обобщенных производных. Пусть $u(P)$ и $v_j(P)$ — две функции, суммируемые в Ω, и пусть $\psi(P)$ — функция, бесконечно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{\Omega}$ и равная нулю в окрестности ее границы S, а в остальном произвольная. Допустим, что для любой такой функции $\psi(P)$ справедливо тождество

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} d\Omega = -\int_\Omega v_j \psi \, d\Omega. \tag{21}$$

Тогда функция v_j называется *обобщенной производной* первого порядка по координате x_j от функции u; обозначается обобщенная производная обычным символом $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Аналогично вводятся обобщенные производные высших порядков.

Можно доказать, что обобщенная производная данного вида единственна. Отсюда, между прочим, следует, что обобщенная производная совпадает с обычной, если данная функция $u(P)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области.

Подробное изложение теории обобщенных производных можно найти в книгах С. Л. Соболева [2] или В. И. Смирнова [4].

Обозначим через $\mathfrak{A}$ оператор задачи Дирихле для уравнения Лапласа; соответствующее энергетическое пространство следует тогда обозначить через $H_\mathfrak{A}$.

Пусть $u \in H_\mathfrak{A}$. По определению энергетического пространства существует последовательность функций $u_n \in D_\mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\| u_n - u \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{22}$$

$$| u_n - u_k |_\mathfrak{A} \xrightarrow[n,\, k \to \infty]{} 0. \tag{23}$$

По формуле (20)

$$|u_n - u_k|_\mathfrak{A}^2 = \int_\Omega (\operatorname{grad} u_n - \operatorname{grad} u_k)^2 \, d\Omega = \sum_{j=1}^m \int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega.$$

Из соотношения (23) следует, что

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega = \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\|^2 \xrightarrow[n,\, k\to\infty]{} 0,$$

т. е. что каждая из последовательностей $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$, $n = 1; 2, \ldots,$ — фундаментальная в пространстве $L_2(\Omega)$. Но это пространство полное, поэтому существуют такие функции $v_j \in L_2(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, что

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - v_j \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{24}$$

Докажем, что функции v_j суть обобщенные производные от u: $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Пусть $\psi(P)$ — функция с описанными выше свойствами. Для функций $u_n(P)$ верна обычная формула интегрирования по частям, которая в данном случае дает

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, d\Omega = -\int \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, \psi\, d\Omega$$

или, что то же,

$$\left(u_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = -\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}, \psi\right).$$

В последнем тождестве можно перейти к пределу под знаком скалярного произведения в силу его непрерывности и соотношений (22) и (24). Мы получим тогда

$$\left(u, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = -(v_j, \psi),$$

или

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, d\Omega = -\int_\Omega v_j \psi\, d\Omega,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если функция $u \in H_{\mathfrak{A}}$, то эта функция имеет первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом в Ω. Нетрудно видеть, что аналогичное утверждение верно и для энергетического пространства задачи Неймана и что формулы (19) и (20) верны для любой функции из энергетического пространства как задачи Дирихле, так и задачи Неймана.

Читатель легко сформулирует аналогичные заключения о существовании обобщенных производных соответствующих порядков от функций, входящих в энергетические пространства задач, рассматриваемых в последующих параграфах.

Труднее решается вопрос о краевых условиях. Оказывается, что функции из энергетического пространства задачи Дирихле удовлетворяют условию (2) в некотором обобщенном смысле; если, в частности, такая функция непрерывна в $\bar{\Omega}$, то она удовлетворяет условию (2) в обычном смысле. Функции, входящие в энергетическое пространство задачи Неймана, никаким краевым условиям удовлетворять не обязаны (краевое условие задачи Неймана — естественное). В частности, любая функция, непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$, принадлежит энергетическому пространству задачи Неймана.

§ 25. Случай неоднородных краевых условий

Рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

при неоднородном краевом условии

$$u|_S = \varphi(P), \qquad P \in S. \tag{2}$$

Здесь S — граница конечной области Ω; примем, что S есть совокупность конечного числа кусочно гладких поверхностей.

Допустим, что существует хотя бы одна функция $\psi(P)$, удовлетворяющая следующим требованиям[1]):

1) эта функция непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$;

2) производные $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, непрерывны в Ω;

3) интеграл $\int\limits_\Omega (\operatorname{grad} \psi)^2 \, d\Omega$ сходится;

4) $\psi(P)|_S = \varphi(P)$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega. \tag{3}$$

За область D_Φ его определения примем множество функций, удовлетворяющих тем же четырем требованиям, которым мы подчинили функцию $\psi(P)$. Множество D_Φ непусто — оно содержит функцию $\psi(P)$; оно содержит также всевозможные функции вида $\psi(P) + \eta(P)$, где функция $\eta(P)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям 1), 2), 3) и кроме того, условию

$$\eta(P)|_S = 0. \tag{4}$$

[1]) Эти требования можно ослабить (см. Л. Н. Слободецкий [1]).

Поставим задачу о минимуме функционала (3) на множестве D_Φ. Допустим, что эта задача имеет решение, которое мы обозначим через $u_0(P)$. Докажем, что если функция $u_0(P)$ имеет в Ω непрерывные вторые производные, то она решает задачу (1)—(2). Достаточно доказать, что $u_0(P)$ удовлетворяет уравнению (1).

Пусть функция $\eta(P)$ удовлетворяет требованиям 1)—3) и краевому условию (4). Если t — произвольное вещественное число, то $(u_0+t\eta)\in D_\Phi$ и $\Phi(u_0)\leqslant\Phi(u_0+t\eta)$. Это значит, что функция $\Phi(u_0+t\eta)$ вещественной переменной t имеет минимум при $t=0$. Но тогда

$$\frac{d}{t}\Phi(u_0+t\eta)\Big|_{t=0}=0.$$

Отсюда легко получаем

$$\int\limits_\Omega \operatorname{grad} u_0 \operatorname{grad}\eta\, d\Omega=0.$$

Применяя формулу Грина (формула (17) § 7) и используя краевое условие (4), получим

$$\int\limits_\Omega \eta\,\Delta u_0\, d\Omega=0.$$

Множество функций η плотно в $L_2(\Omega)$ (см. § 4), и из последнего равенства следует, что $\Delta u_0=0$.

Докажем теперь, что задача о минимуме функционала (3) имеет решение, если область определения этого функционала должным образом расширить. Указанное решение будем рассматривать как обобщенное решение задачи Дирихле (1)—(2).

Построим функцию $\psi(P)$, о которой сказано в начале параграфа, и положим в (3) $u=\psi-v$. Тогда

$$v\,|_S=0, \tag{4$_1$}$$

а функционал (3) принимает вид

$$\Phi(u)=\Phi(\psi-v)=\int\limits_\Omega(\operatorname{grad} v)^2\,d\Omega-2\int\limits_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\,d\Omega+C,$$

где C — постоянная, равная

$$C=\int\limits_\Omega(\operatorname{grad}\psi)^2\,d\Omega.$$

Краевое условие (4_1) позволяет рассматривать v как элемент энергетического пространства оператора задачи Дирихле, рассмотренного в предшествующем параграфе. Поставленную выше вариационную задачу заменим следующей: в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ найти минимум функционала

$$F(v)=\int_{\Omega}(\operatorname{grad} v)^2\,d\Omega-2\int_{\Omega}\operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad}\psi\,d\Omega=$$
$$=|v|_{\mathfrak{A}}^2-2\int_{\Omega}\operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad}\psi\,d\Omega. \tag{5}$$

Линейный функционал

$$lv=\int_{\Omega}\operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad}\psi\,d\Omega \tag{6}$$

ограничен в $H_{\mathfrak{A}}$. Действительно, по неравенствам Коши и Буняковского

$$|lv|^2\leqslant\int_{\Omega}(\operatorname{grad} v)^2\,d\Omega\int_{\Omega}(\operatorname{grad}\psi)^2\,d\Omega=C\int_{\Omega}(\operatorname{grad} v)^2\,d\Omega,$$

или $|lv|\leqslant\sqrt{C}|v|_{\mathfrak{A}}$. Теперь из результатов § 20 следует, что задача о минимуме функционала (5) в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ имеет решение.

Можно доказать[1]), что это решение — обобщенное решение задачи (1)—(2) — есть функция, гармоническая в Ω.

Мы не станем столь же подробно исследовать задачу Неймана и смешанную краевую задачу: укажем лишь те вариационные задачи, к которым они сводятся.

Краевое условие задачи Неймана имеет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S=h(P); \tag{7}$$

для разрешимости задачи необходимо, чтобы

$$\int_S h(P)\,dS=0. \tag{8}$$

Соответствующая вариационная задача состоит в отыскании минимума функционала

$$\int_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega-2\int_S hu\,dS \tag{9}$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega}u(P)\,d\Omega=0, \tag{10}$$

---

[1]) См. книги С. Л. Соболева [2] или автора [28].

но не обязанных удовлетворять никаким краевым условиям; условие (7) естественное для функционала (9).

В случае краевого условия смешанной задачи

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_S = g(P), \tag{11}$$

где $\sigma(P) \geqslant 0$ и $\sigma(P) \not\equiv 0$, задача сводится к нахождению минимума функционала

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int_S [\sigma u^2 - 2gu] \, dS; \tag{12}$$

функции $u(P)$ никаким краевым условиям не подчинены.

§ 26. Задачи о кручении стержня и об изгибе стержня поперечной силой [1])

Обозначим через Ω нормальное сечение стержня и через S — контур сечения. В общем случае задача кручения сводится к отысканию функции $\varphi_0(x, y)$, которая удовлетворяет в области сечения уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

а на границе S — краевому условию

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu} = ly - mx. \tag{2}$$

Здесь ν — внешняя нормаль к S, $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$.

Таким образом, функция $\varphi_0(x, y)$ есть решение задачи Неймана для уравнения Лапласа при неоднородном краевом условии (2). Применяя относящиеся к этой задаче результаты предшествующего параграфа, находим, что задачу кручения можно свести к отысканию функции, реализующей минимум функционала

$$\iint_\Omega (\operatorname{grad}\varphi)^2 \, d\Omega - 2\int_S \varphi(ly - mx) \, dS = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - 2\int_S \varphi(ly - mx) \, dS. \tag{3}$$

[1]) Предполагаем, что читатель знаком с теорией кручения и изгиба стержней, например, по курсам Л. С. Лейбензона [2] или С. П. Тимошенко [1]. Приложению энергетического метода к задачам кручения и изгиба уделено много места в монографии Л. С. Лейбензона [1], где содержатся некоторые из приводимых ниже формул и рассмотрено большое количество примеров.

Функции $\varphi(x, y)$ не подчиняются заранее никаким краевым условиям, так как условие (2) естественное для функционала (3). В выражении (3) контурный интеграл преобразуем по формуле Остроградского

$$\int_S [\varphi y \cos(\nu x) - \varphi x \cos(\nu y)]\, dS = \iint_\Omega \left[\frac{\partial(\varphi y)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi x)}{\partial y}\right] dx\, dy = \\ = \iint_\Omega \left(y \frac{\partial\varphi}{\partial x} - x \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Подставив это в (3), легко приведем наш функционал к виду

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\, dy - \iint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Второй интеграл, равный моменту инерции сечения относительно начала координат, есть величина постоянная, поэтому дело сводится к отысканию минимума более простого функционала, который мы обозначим через $D(\varphi)$:

$$D(\varphi) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\, dy. \qquad (4)$$

Функционал $D(\varphi)$ имеет простой механический смысл, именно, как известно,

$$D(\varphi_0) = C/G, \qquad (5)$$

где C — жесткость стержня при кручении, G — модуль сдвига материала стержня и φ_0, как об этом было сказано выше, — функция, решающая задачу кручения.

Доказательство формулы (5) довольно просто. Имеем (см., например, Л. С. Лейбензон [2], стр. 242)

$$\frac{C}{G} = \iint_\Omega \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) dx\, dy.$$

С другой стороны, раскрывая скобки, легко найдем

$$D(\varphi_0) = \frac{C}{G} + \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2 - y \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + x \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right] dx\, dy.$$

По формуле Грина

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\iint_\Omega \varphi_0 \Delta\varphi_0\, dx\, dy + \int_S \varphi_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial \nu}\, dS,$$

или, в силу уравнений (1) и (2),

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_S \varphi_0 (ly - mx)\,dS,$$

что, как мы уже видели, равно

$$\iint_\Omega \left(y\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Подставив это в $D(\varphi_0)$, получим формулу (5).

Функция φ_0 доставляет функционалу $D(\varphi)$ наименьшее значение, поэтому, какова бы ни была функция $\varphi(x, y)$, имеет место хорошо известное неравенство

$$C \leqslant G \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\,dy. \tag{6}$$

Это неравенство дает возможность оценить сверху жесткость при кручении; если в качестве φ взять функцию, приближенно решающую задачу о минимуме функционала $D(\varphi)$ (например, построить эту функцию по методу Ритца), то оценка, даваемая формулой (6), может быть сколь угодно точной. Простую, хотя и грубую оценку для жесткости при кручении получим, положив $\varphi \equiv 0$. Это дает неравенство

$$C \leqslant GI, \tag{7}$$

где I — момент инерции сечения стержня относительно начала координат.

Можно получить и несколько более точную оценку жесткости C. С этой целью положим в (6) $\varphi = \alpha xy$, где постоянную α выберем так, чтобы правая часть неравенства (6) приняла наименьшее значение. Совсем простые вычисления приводят к оценке

$$C \leqslant 4GI_xI_y/I, \tag{7_1}$$

более точной, чем оценка (7). Через I_x и I_y обозначены моменты инерции сечения стержня относительно осей x и y соответственно.

Задачу кручения можно свести к другой вариационной задаче, которая позволит получить для жесткости при кручении оценку снизу.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда область сечения Ω односвязная. Тогда, как известно, задачу кручения можно свести к интегрированию уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа)

$$\Delta\psi = -2G\theta$$

при краевом условии

$$\psi|_S = 0;$$

здесь θ — постоянная, называемая степенью кручения. Если положить $\psi(x, y) = 2G\theta u(x, y)$, то получим дифференциальное уравнение

$$-\Delta u = 1 \tag{8}$$

и краевое условие

$$u|_S = 0. \tag{9}$$

Из результатов § 24 вытекает, что задача (8)—(9) равносильна задаче об отыскании минимума функционала

$$F(u) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right] dx\, dy \tag{10}$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию (9). Пусть $u_0(x, y)$ — точное решение нашей задачи, а $u_n(x, y)$ — ее приближенное решение по Ритцу. По формуле (15) § 17 $|u_n|^2 \leqslant |u_0|^2$. В нашей задаче $f(x, y) \equiv 1$ и формулы (13) и (14) § 17 дают

$$\iint_\Omega u_0(x, y)\, dx\, dy \geqslant \iint_\Omega u_n(x, y)\, dx\, dy.$$

Как известно, жесткость при кручении только множителем $4G$ отличается от интеграла, написанного слева. Отсюда вытекает оценка снизу для C:

$$C \geqslant 4G \iint_\Omega u_n(x, y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

Если воспользоваться формулой (18) § 17, то получим оценку, вообще говоря, более грубую, но более простую:

$$C \geqslant \frac{4G\left(\iint_\Omega u\, dx\, dy\right)^2}{\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}. \tag{12}$$

Здесь $u(x, y)$ — любая функция, непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ и обращающаяся в нуль на S.

Пусть теперь область Ω многосвязная, и пусть кривая S_0 ограничивает эту область извне, а кривые $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — изнутри. Обозначим через γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, площадь области, заключенную внутри кривой S_i. Функция $u(x, y) = \psi(x, y)/2G\theta$ удовлетворяет уравнению (8) и краевым условиям

$$u = \begin{cases} 0 & \text{на } S_0, \\ \alpha_i & \text{на } S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь α_i — постоянные, которые заранее не известны; в силу известной теоремы Бредта они связаны соотношениями

$$\int_{S_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = -\gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \tag{14}$$

ν, как обычно, означает нормаль к S_i, внешнюю по отношению к Ω и, следовательно, внутреннюю по отношению к замкнутой кривой S_i.

Пусть $\tilde{u}(x, y)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая условиям (13) и (14); допустим еще, что в $\overline{\Omega}$ эта функция непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными. Положим $u - \tilde{u} = v$. Тогда функция v удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v = 1 + \Delta \tilde{u} \tag{15}$$

и краевым условиям

$$v = \begin{cases} 0 & \text{на } S_0, \\ \beta_i & \text{на } S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \end{cases} \tag{16}$$

$$\int_{S_i} \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{17}$$

Здесь β_i — произвольные постоянные. Функции, удовлетворяющие условиям (16) и (17), образуют, как нетрудно видеть, линеал. Докажем, что на этом линеале оператор $-\Delta$ положителен. В самом деле, если какая-либо функция $v(x, y)$ удовлетворяет упомянутым условиям, то

$$(-\Delta v, v) = -\iint_{\Omega} v \Delta v \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy + \int_{S} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

Контурный интеграл исчезает, так как

$$\int\limits_S v\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\int\limits_{S_i}\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS=0$$

и

$$(-\Delta v,\ v)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy\geqslant 0.$$

Аналогично доказывается симметричность нашего оператора.

По теореме о функционале энергии (§ 13) дело сводится к отысканию функции $v(x, y)$, реализующей минимум функционала

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-2\,(1+\Delta\tilde{u})\,v\right]dx\,dy \tag{18}$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям (16) и (17).

Вернемся к функции $u=v+\tilde{u}$. Отбрасывая в (18) постоянные слагаемые, найдем, что интегрирование уравнения (8) при условиях (13) и (14) равносильно отысканию функции, реализующей, при тех же условиях, минимум функционала

$$Q(u)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2\,(1+\Delta\tilde{u})\,u\right]dx\,dy-$$
$$-2\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Второй интеграл возьмем по формуле Грина и воспользуемся краевыми условиями:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint\limits_{\Omega}u\,\Delta\tilde{u}\,dx\,dy+\int\limits_S u\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\,dS=$$
$$=-\iint\limits_{\Omega}u\,\Delta\tilde{u}\,dx\,dy+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\gamma_i.$$

Подставив это в $Q(u)$, найдем окончательное выражение функционала $Q(u)$:

$$Q(u)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]dx\,dy-2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\gamma_i. \tag{19}$$

Приемом, указанным в § 12, нетрудно доказать, что условие (14) — естественное для функционала $Q(u)$, поэтому его минимум можно искать на множестве функций, удовлетворяющих только условию (13). По-прежнему обозначим через $u_0(x, y)$ функцию, решающую задачу кручения; она реализует минимум $Q(u)$. Выясним связь между $Q(u_0)$ и C — жесткостью при кручении. Исходим из известной формулы

$$C = 4G\left\{\iint\limits_{\Omega} u_0\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)}\gamma_i\right\}; \tag{20}$$

через $\alpha_i^{(0)}$ обозначены значения постоянных α_i для функции u_0. Так как $\Delta u_0 = -1$, то интеграл в (20) преобразуется следующим образом:

$$\iint\limits_{\Omega} u_0\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Omega} u_0\,\Delta u_0\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy -$$

$$- \int\limits_{S} u_0\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\,dS = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{(0)}\gamma_i.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} u_0\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{(0)}\gamma_i.$$

Заменив в (19) u на u_0 и воспользовавшись последним равенством, найдем

$$Q(u_0) = -\iint\limits_{\Omega} u_0\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{(0)}\gamma_i.$$

Сравнив это с (20), получим

$$C = -4GQ(u_0). \tag{21}$$

Пусть u — любая функция, удовлетворяющая условиям (13). Подберем постоянный множитель a так, чтобы $Q(au)$ приняло минимальное значение. Имеем

$$Q(au) = a^2\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - 2a\left[\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\gamma_i\right].$$

Продифференцировав это по a и приравняв производную нулю, найдем

$$a = \frac{\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\gamma_i}{\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy}.$$

Теперь легко найти

$$Q(au) = -\frac{\left(\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}. \tag{22}$$

Очевидно, $Q(u_0) \leqslant Q(au)$, так как au удовлетворяет условиям (13) (в которых постоянные α_i заменены на $a\alpha_i$). Теперь из формул (21) и (22) вытекает оценка снизу для жесткости при кручении

$$C \geqslant 4G \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}. \tag{23}$$

Оценка (23) приведена в статье Линь Хун-суна [1].

Коротко скажем о задаче изгиба стержней. Она, как известно, сводится к нахождению функции $\chi(x, y)$, гармонической в области сечения Ω и удовлетворяющей краевому условию

$$\left.\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right|_S = -\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) y^2\right] l - (2+\sigma)\, xym; \tag{24}$$

σ — постоянная Пуассона. По доказанному в предшествующем параграфе эта задача сводится к определению функции, реализующей минимум функционала

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy +$$
$$+ \int\limits_{S} \chi \left\{\left[\sigma x^2 + (2-\sigma)\, y^2\right] l + 2(2+\sigma)\, xym\right\} dS;$$

так как условие (24) — естественное, то на функцию χ можно никаких краевых условий не накладывать.

§ 27. Уравнения с переменными коэффициентами

Немаловажную роль в различных вопросах математической физики играют дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами — так называются линейные уравнения, коэффициенты которых суть заданные функции независимых переменных задачи, в частности координат. Так, уравнения равновесия, а также колебаний упругих оболочек представляют собой систему уравнений с переменными коэффициентами; прогиб пластинки переменной толщины определяется некоторым уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами; к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами приводится задача о колебаниях уровня жидкости в бассейне[1]). Особое значение имеют линейные уравнения с переменными коэффициентами при исследовании нелинейных уравнений. С одной стороны, разные методы линеаризации часто приводят к уравнениям с переменными коэффициентами; таково, например, происхождение столь важного для газовой динамики уравнения Чаплыгина [1]. С другой стороны, применение различных методов последовательных приближений к нелинейным уравнениям часто приводит к тому, что каждое приближение получается как решение некоторого линейного уравнения с переменными коэффициентами; так обычно бывает при использовании так называемого «метода Ньютона», разработанного Л. В. Канторовичем [2].

Переход от постоянных коэффициентов к переменным создает серьезные трудности при использовании таких методов, как метод интегральных уравнений или метод функции Грина, и, особенно, при отыскании элементарных частных решений. Но для большинства вариационных методов, в том числе и для энергетического, переход к переменным коэффициентам не связан с заметными дополнительными трудностями, и результаты § 24, с соответствующими изменениями, переносятся на уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами. Этому мы и посвятим настоящий параграф.

Будем рассматривать уравнение

$$Lu = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\,u = f(P); \quad A_{jk} = A_{kj}, \tag{1}$$

при краевых условиях одного из трех типов

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

$$[N(u) + \sigma(P)\,u]_S = 0, \tag{3}$$

$$N(u)|_S = 0, \tag{4}$$

где

$$N(u) = \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j);$$

---

[1]) См., например, Л. Н. Сретенский [1].

здесь, как обычно, S — граница некоторой конечной области Ω, ν — внешняя нормаль к S. По аналогии со случаем уравнения Лапласа краевую задачу для уравнения (1) при условиях (2), (3) или (4) называют соответственно задачей Дирихле, смешанной задачей или задачей Неймана. Выбор специального вида уравнения (1) (общее уравнение второго порядка к этому виду не приводится) объясняется тем, что при любом из краевых условий (2), (3) или (4) оператор L оказывается симметричным. Действительно, по формуле Грина [формула (16) § 7]

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)\, d\Omega = -\int_{S} [vN(u) - uN(v)]\, dS. \tag{5}$$

Если обе функции удовлетворяют условию (2) или условию (4), то функция под знаком поверхностного интеграла очевидным образом обращается в нуль. Если же обе функции удовлетворяют условию (3), то на S

$$N(u) + \sigma u = 0, \quad N(v) + \sigma v = 0.$$

Умножая первое равенство на v, второе на u и вычитая, найдем, что

$$[vN(u) - uN(v)]_S = 0,$$

так что и в этом случае функция под знаком интеграла по S исчезает. Итак, во всех случаях правая, а следовательно, и левая часть равенства (15) обращается в нуль:

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)\, d\Omega = (Lu,\ v) - (u,\ Lv) = 0,$$

а это значит, что оператор L симметричен на соответствующих множествах функций.

Оператор L, а с ним и уравнение (1), называется *эллиптическим в замкнутой области* $\overline{\Omega}$, если коэффициенты $A_{jk}(P)$ обладают следующим свойством: существует такая положительная постоянная μ_0, что каковы бы ни были вещественные числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и какова бы ни была точка $P \in \overline{\Omega}$, имеет место неравенство[1])

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(P)\,t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2; \tag{6}$$

на коэффициент C никаких ограничений не накладывается.

Рассмотрим для примера оператор

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Здесь $m=2$. Если положить $x=x_1$, $y=x_2$, то

$$A_{11}=1+x_2^2,\quad A_{12}=A_{21}=-x_1x_2,\quad A_{22}=1+x_1^2.$$

Левая часть формулы (6) в данном случае имеет вид

$$\left(1+x_2^2\right)t_1^2-2x_1x_2t_1t_2+\left(1+x_1^2\right)t_2^2=t_1^2+t_2^2+\left(x_2t_1-x_1t_2\right)^2.$$

Отбросив последнее слагаемое справа, получим

$$\left(1+x_2^2\right)t_1^2-2x_1x_2t_1t_2+\left(1+x_1^2\right)t_2^2\geqslant t_1^2+t_2^2.$$

Независимо от значений x_1 и x_2 неравенство (6) выполняется с постоянной $\mu_0=1$. Отсюда следует, что наш оператор эллиптический в любой области изменения переменных x и y.

Рассмотрим еще «оператор Трикоми»

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $A_{11}=x_2$, $A_{12}=A_{21}=0$, $A_{22}=1$, и левая часть формулы (6) имеет вид $x_2t_1^2+t_2^2$. Если $x_2\geqslant\delta>0$, то $x_2t_1^2+t_2^2\geqslant\delta t_1^2+t_2^2\geqslant$ $\geqslant\delta'\left(t_1^2+t_2^2\right)$, где δ' означает меньшее из чисел 1 и δ; неравен

---

[1]) Это определение остается в силе и для общего линейного дифференциального оператора второго порядка

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu \tag{*}$$

и для соответствующего дифференциального уравнения; название эллиптического в замкнутой области естественно сохраняется за оператором L, если у последнего изменить знаки его коэффициентов, так что вместо (6) мы будем иметь неравенство

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(P)\,t_j t_k\leqslant-\mu_0\sum_{k=1}^{m} t_k^2.$$

ство (6) выполнено с постоянной $\mu_0 = \delta'$, и оператор $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ эллиптический в любой замкнутой области, которая вместе со своей границей целиком расположена в верхней полуплоскости. Если область целиком или частью расположена в нижней полуплоскости, то оператор Трикоми в этой области не будет эллиптическим [1]). Если область лежит в верхней полуплоскости, но ее граница имеет общую часть (даже одну общую точку) с осью x, то в замкнутой области оператор Трикоми принадлежит к классу так называемых *вырождающихся* эллиптических операторов, о которых будет идти речь в следующем параграфе.

Будем предполагать, что уравнение (1) эллиптическое в $\overline{\Omega}$, так что неравенство (6) выполняется при некоторой положительной постоянной μ_0. Выясним условия, обеспечивающие положительную определенность оператора (1) на каждом из множеств функций, удовлетворяющих краевому условию (2), (3) или (4); как мы знаем, это гарантирует как существование обобщенного решения соответствующей краевой задачи, так и возможность приближенного вычисления этого решения с помощью методов гл. III. Во всех случаях будем предполагать, что $C(P) \geqslant 0$. Случая, когда $C(P)$ может принимать отрицательные значения, мы здесь рассматривать не будем.

По формуле Грина [формула (14) § 7]

$$(Lu, u) = \int_\Omega uLu\,d\Omega = \int_\Omega \left\{\sum_{j,k=1}^m A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right\} d\Omega - \int_S uN(u)\,dS.$$

Если дано краевое условие (2) или (4), то поверхностный интеграл исчезает, и

$$(Lu, u) = \int_\Omega \left\{\sum_{j,k=1}^m A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right\} d\Omega; \tag{7}$$

если же дано условие (3), то на S будет $N(u) = -\sigma u$, и

$$(Lu, u) = \int_\Omega \left\{\sum_{j,k=1}^m A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right\} + \int_\Omega \sigma u^2\,dS; \tag{8}$$

будем предполагать, что функция $\sigma(P)$ ограничена снизу некоторым положительным числом σ_0, так что $\sigma(P) \geqslant \sigma_0 > 0$.

Если коэффициент $C(P)$ ограничен снизу некоторым положительным числом, то оператор L положительно определенный

[1]) В нижней полуплоскости оператор Трикоми гиперболический.

при любом из условий (2)—(4). Действительно, по неравенству (6)

$$\int_{\Omega} \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega \geqslant \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega, \tag{9}$$

и интеграл в левой части формулы (9) неотрицателен. В формулах (7) и (8) отбросим этот интеграл, а в формуле (8) отбросим еще и неотрицательный поверхностный интеграл. В обоих случаях мы придем к неравенству

$$(Lu, u) \geqslant \int_{\Omega} C(P) u^2 \, d\Omega.$$

По предположению $C(P) \geqslant C_0$, где C_0 — некоторая положительная постоянная, но тогда из последнего неравенства сразу следует, что

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega = \gamma^2 \| u \|^2; \qquad \gamma = \sqrt{C_0},$$

т. е. что L — положительно определенный оператор.

Если коэффициент $C(P)$ может обращаться в нуль где-либо в $\overline{\Omega}$, то приведенное выше доказательство непригодно, тем не менее для краевых условий (2) и (3) оператор L остается положительно определенным. Рассмотрим случай краевого условия (2). Под интегралом в формуле (7) отбросим неотрицательное слагаемое Cu^2; оставшийся интеграл оценим по неравенству (9). В результате получим

$$(Lu, u) \geqslant \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

Функция $u(P)$ обращается в нуль на границе области Ω и потому удовлетворяет неравенству Фридрихса [формула (12_1) § 24]. Воспользовавшись им, получим

$$(Lu, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \qquad \gamma = \sqrt{\varkappa \mu_0},$$

что и требовалось доказать.

Обратимся к условию (3). В формуле (8) отбросим Cu^2 под знаком интеграла, а под знаком поверхностного интеграла заменим σ на σ_0. Оставшийся объемный интеграл оценим по неравенству (9). Все это дает

$$(Lu, u) \geqslant \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega + \sigma_0 \int_{S} u^2 \, dS.$$

Пусть α — меньшее из чисел μ_0 и σ_0. Тогда, очевидно,

$$(Lu,\ u) \geqslant \alpha \left\{ \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega + \int_S u^2\, dS \right\}.$$

Теперь неравенство (14) § 24, которое просто обобщается на случай любого m, даст

$$(Lu,\ u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha C}.$$

Обращаясь к краевому условию (4), ограничимся простейшим и в то же время наиболее интересным случаем, когда $C(P) \equiv 0$. Задача сводится к интегрированию уравнения

$$L_0 u = - \sum_{j,\,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(P) \tag{10}$$

при краевом условии (4). Нетрудно видеть, что эта задача не всегда имеет решение. Чтобы убедиться в этом, проинтегрируем по Ω обе части уравнения (10):

$$- \int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega = \int_\Omega f\, d\Omega.$$

Применяя к левой части последнего равенства формулу Остроградского, найдем

$$- \int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega = - \int_S \sum_{j,\,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu,\ x_j)\, dS = 0,$$

что обращается в нуль в силу уравнения (4). Таким образом, если задача Неймана имеет решение, то необходимо

$$\int_\Omega f\, d\Omega = 0.$$

С другой стороны, если решение существует, то оно не единственно: вместе с u решением будет и $u + C$, где C — произвольная постоянная. Мы устраним этот произвол, потребовав, чтобы искомое решение удовлетворяло равенству

$$\int_\Omega u\, d\Omega = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь множество функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми и вторыми производными и удовлетворяющих равенствам (4) и (11). Докажем, что оператор L_0

положительно определенный на этом множестве. Действительно,

$$(L_0 u, u) = -\int_\Omega u \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega.$$

Интегрируя по частям и используя условие (4), получаем

$$(L_0 u, u) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega. \qquad (12)$$

Общее неравенство Пуанкаре (см. § 24)

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leqslant A \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + B\left(\int_\Omega u\, d\Omega\right)^2$$

при условии (11) даст

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega > \frac{1}{A}\int_\Omega u^2\, d\Omega = \frac{1}{A}\|u\|^2.$$

Подставив это в (12), получим

$$(L_0 u, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \qquad \gamma = \sqrt{\mu_0/A}.$$

§ 28. Вырождающиеся эллиптические уравнения

Дифференциальный оператор второго порядка

$$-\sum_{j,k=1}^m A_{jk}(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} + \sum_{j=1}^m B_j(P)\frac{\partial u}{\partial x_j} + C(P)\, u$$

будем называть *вырождающимся эллиптическим оператором в данной конечной области* Ω, если неравенство

$$\sum_{j,k=1}^m A_{jk}(P)\, t_j t_k > 0 \qquad (1)$$

имеет место, какова бы ни была точка $P \in \Omega$ и каковы бы ни были не равные одновременно нулю вещественные числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$, и если неравенство (6) § 27

$$\sum_{j,k=1}^m A_{jk}(P)\, t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{j=1}^m t_j^2$$

нарушается в некоторых точках $P \in \overline{\Omega}$ и для некоторых значений $t_1, t_2, \ldots, t_m$, какова бы ни была положительная постоянная μ_0. Одним из простейших операторов такого рода является рассмотренный в предшествующем параграфе оператор Трикоми.

Дифференциальное уравнение вида $Lu = f(P)$, где $f(P)$ — данная функция, а L — вырождающийся эллиптический оператор, будем называть *вырождающимся эллиптическим уравнением*. Ряд важных результатов, относящихся к частным типам вырождающихся уравнений, получили С. А. Чаплыгин [1], Ф. Трикоми [1] и др. (библиография работ этого направления содержится у Ф. Трикоми [1], С. Бергмана и М. Шиффера [1]). Начало общей теории вырождающихся эллиптических уравнений было положено работами М. В. Келдыша [2], М. И. Вишика [4—6] и автора [13, 15, 16]; в работах автора исследован вопрос о применимости вариационных методов к вырождающимся эллиптическим уравнениям; этому вопросу и посвящен настоящий параграф. Упомянем еще работу М. Ш. Бирмана [4]. За последние годы появилось много работ по теории вырождающихся эллиптических уравнений. Довольно обстоятельное изложение современного состояния этой теории дано в книге М. М. Смирнова [1].

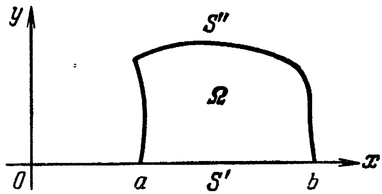

Рис. 9.

Подробнее рассмотрим случай двух независимых переменных (см. статью автора [13]). Пусть в полуплоскости $y>0$ дана конечная область Ω (рис. 9), граница которой состоит из отрезка (a, b) оси x (мы будем обозначать его через S') и кривой S'', которая целиком, кроме концов a и b, лежит в верхней полуплоскости. Обозначая, как обычно, границу области Ω через S, имеем $S = S' + S''$. Пусть функция $\varphi(y)$ определена и, скажем, непрерывна на отрезке $0 \leqslant y \leqslant Y$, где Y не меньше, чем наибольшая из ординат точек кривой S'', и пусть $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(y) > 0$ при $y > 0$. На том же отрезке $0 \leqslant y \leqslant Y$ пусть будет дана еще непрерывная функция $\omega(y)$, относительно которой мы предположим, что $\omega(y) \geqslant k$, где k — положительная постоянная.

Рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор

$$-\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

вырождающийся в области Ω; этот оператор переходит в оператор Трикоми при $\varphi(y) \equiv y$, $\omega(y) \equiv 1$. Поставим задачу об интегрировании в области Ω уравнения

$$-\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y), \tag{3}$$

где $f(x, y)$ — данная функция, при однородных краевых условиях одного из двух типов:

$$\text{I} \qquad u|_S = 0, \tag{4}$$

$$\text{II} \qquad u|_{S''} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{S''} = 0. \tag{5}$$

Оператор (2), рассматриваемый на множестве функций, дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющих краевым условиям (4) или (5), будем обозначать через L_I или L_{II} соответственно. Докажем, что *операторы L_I и L_{II} — положительно определенные.*

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — две функции, которые одновременно принадлежат либо области D_{L_I} определения оператора L_I, либо области $D_{L_{II}}$ определения оператора L_{II}. В частности, обе функции удовлетворяют одновременно либо краевому условию (4), либо краевым условиям (5). Понимая под i какой-либо из индексов I и II, составим скалярное произведение

$$(L_i u, v) = -\iint\limits_{\Omega} v\left[\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dx\, dy.$$

Применив к последнему интегралу формулу Грина, найдем

$$(L_i u, v) = \iint\limits_{\Omega}\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy -$$

$$- \int\limits_{S} v\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu, x) + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu, y)\right] dS; \tag{6}$$

ν, как обычно, означает внешнюю нормаль к S. Нетрудно видеть, что контурный интеграл равен нулю. Действительно, как при условии (4), так и при условии (5) на кривой S'' функция v исчезает, и контурный интеграл в (6) достаточно брать по отрезку S' оси x. Если дано условие (4), то $v|_{S'} = 0$, и интеграл по S' равен нулю; если же дано условие (5), то $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ и, кроме того, $\cos(\nu, x) = 0$ и по-прежнему интеграл по S' исчезает. Теперь

$$(L_i u, v) = \iint\limits_{\Omega}\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy; \quad i = I,\ II; \tag{7}$$

формула (7) показывает, что операторы L_I и L_{II} симметричны, так как правая часть упомянутой формулы не меняется при перестановке функций u и v. Положив в (7) $v \equiv u$, найдем

$$(L_i u, u) = \iint\limits_{\Omega}\left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy; \quad i = I,\ II. \tag{8}$$

Из формулы (8) сразу вытекает, что операторы L_I и L_{II} положительны. Чтобы доказать их положительную определенность, заключим Ω в прямоугольник (рис. 10), определяемый неравенствами $a' \leqslant x \leqslant b'$, $0 \leqslant y \leqslant Y$; очевидно, $a' \leqslant a$ и $b' \geqslant b$. Этот прямоугольник обозначим буквой П. Пусть дана функция $u(x, y)$ из области определения оператора L_I или оператора L_{II}, т. е. дважды непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющая на S либо условию (4), либо условиям (5). Доопределим функцию $u(x, y)$ в прямоугольнике П, полагая ее равной нулю вне Ω. При таком доопределении эта функция будет непрерывной в прямоугольнике, а ее первые производные будут разрывны только на кривой S'', где они испытывают конечный скачок. Пусть (x, y) — точка внутри прямоугольника. Имеем

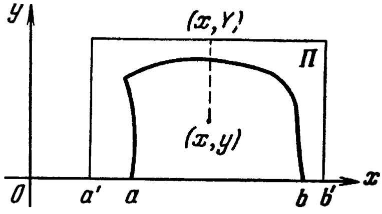

Рис. 10.

$$\int_y^Y \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta = u(x, Y) - u(x, y).$$

Но точка (x, Y) лежит вне Ω, и потому в этой точке функция u обращается в нуль. Отсюда

$$u(x, y) = -\int_y^Y \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta.$$

По неравенству Буняковского

$$u^2(x, y) \leqslant (Y - y) \int_y^Y \left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leqslant Y \int_0^Y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Y}{k} \int_0^Y \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dy.$$

Проинтегрировав это неравенство по прямоугольнику П, получим

$$\iint_{П} u^2 dx\, dy \leqslant \frac{Y^2}{k} \iint_{П} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

В области $\Pi - \Omega$ имеем $u(x, y) \equiv 0$; отбросив равные нулю интегралы по этой области, придем к неравенству

$$\iint_{\Omega} u^2 d\Omega \leqslant \frac{Y^2}{k} \iint_{\Omega} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{9}$$

Сравнение формул (8) и (9) дает

$$(L_i u, u) \geqslant \frac{k}{Y^2} \iint_{\Omega} u^2\, dx\, dy = \frac{k}{Y^2} \| u \|^2; \quad i = I, II,$$

а это и означает, что операторы L_I и L_{II} положительно определенные.

Опираясь на результаты §§ 13, 14 и 25, можно высказать следующие утверждения:

1) Решение вырождающегося эллиптического уравнения (3) при краевых условиях (4) или (5) существует (по крайней мере как обобщенное) и может быть получено как решение задачи о минимуме функционала

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf\right] dx\, dy \tag{10}$$

на множестве таких функций, что либо $u|_S = 0$, если дано условие (4), либо $u|_{S'} = 0$, если дано условие (5); в этом последнем случае условие $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{S'} = 0$ естественное.

2) Решение однородного уравнения

$$\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{11}$$

при неоднородном краевом условии

$$u|_S = g_1(s), \tag{12}$$

где s — длина дуги контура S, сводится к отысканию минимума функционала

$$\iint_{\Omega} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{13}$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию (12), если существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая условию (12) и сообщающая интегралу (13) конечное значение.

3) Решение уравнения (11) при краевых условиях

$$u|_{S'} = g_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{S''} = g_2(s) \tag{14}$$

сводится к отысканию минимума функционала

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - 2\int\limits_a^b u(x)\,g_2(x)\,dx \quad (15)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию $u|_{S'} = g_1(x)$, если существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая этому условию и сообщающая функционалу (14) конечное значение; условие $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{S''} = g_2(s)$ для этого функционала естественное.

Особенно важным частным случаем уравнения (11) является уравнение Чаплыгина [1]

$$\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right] = 0. \quad (16)$$

Здесь β — положительная постоянная, связанная соотношением $\beta = (\gamma - 1)^{-1}$ с отношением теплоемкостей γ. По смыслу задачи величина τ строго положительна; значениям $\tau < (2\beta + 1)^{-1}$ соответствуют скорости частиц газа, меньшие скорости звука; при $\tau = (2\beta + 1)^{-1}$ скорость соответствующей частицы газа совпадает со скоростью звука. Уравнение Чаплыгина эллиптического типа в области дозвуковых скоростей; оно вырождается в плоскости (θ, τ) на прямой $\tau = (2\beta + 1)^{-1}$, т. е. там, где скорости частиц газа достигают скорости звука. Уравнение (16) преобразуется к виду (11), если положить $x = \theta$, $y = 1/(2\beta + 1) - \tau$.

Из сказанного выше следует, что уравнение Чаплыгина можно решить, пользуясь энергетическим методом, если течение газа дозвуковое (причем допустим переход к скорости звука) и если даны область Ω изменения переменных θ и τ и, скажем, значения неизвестной функции ψ на контуре этой области. Как обычно, при этом следует допустить, что существует функция, принимающая на контуре области Ω заданные значения и сообщающая конечное значение интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2\right] d\theta\,d\tau.$$

Вернемся к оператору (2). Картина оказывается несколько более сложной, если вырождение этого оператора обусловлено обращением в нуль функции $\omega(y)$. Не вдаваясь в подробности, по поводу которых мы отсылаем читателя к цитированным выше работам М. И. Вишика и автора, отметим здесь только основные результаты. По-прежнему будем считать, что область имеет вид, изображенный на рис. 9. Допустим, что при

$0 \leqslant y \leqslant Y$ функция $\varphi(y) \geqslant 0$, а $\omega(y) = y^{\alpha}\omega_1(y)$, $\omega_1(y) \geqslant k$; α и k — положительные постоянные. Если $\alpha < 1$, то можно задавать значение искомой функции на всем контуре S; при этом оператор (2) оказывается положительно определенным и, следовательно, соответствующая краевая задача имеет единственное решение, которое можно найти с помощью энергетического метода. Если $\alpha \geqslant 1$, то на линии вырождения S' задавать ничего нельзя. При этом, если $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, то оператор (2) оказывается положительно определенным на множестве функций, равных нулю на S'', и задача об интегрировании уравнения (3) при краевом условии

$$u|_{S''} = 0 \tag{17}$$

всегда имеет решение, и притом единственное; если же $\alpha > 2$, то оператор (2) при краевом условии (17) оказывается только положительным, но не положительно определенным, и задача об интегрировании уравнения (3) при краевом условии (17) оказывается в общем случае неразрешимой, если требовать, чтобы искомая функция сообщала интегралу энергии конечное значение.

Коротко скажем о более общих вырождающихся эллиптических уравнениях, рассмотренных в статье автора [16]. Будем рассматривать уравнение вида

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P). \tag{18}$$

При этом неравенство (1) необходимо нарушается (переходит в равенство) для некоторых значений $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и в некоторых точках границы области Ω; совокупность этих точек границы называется *множеством вырождения* данного уравнения (*поверхностью*, или *линией вырождения*, если это множество представляет собой поверхность или линию).

Допустим, что подходящим преобразованием независимых переменных удалось добиться того, чтобы $A_{jm} \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$, так что уравнение на самом деле имеет вид

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A_{mm}(P)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = f(P), \tag{18$_1$}$$

и пусть поверхность вырождения S' лежит в плоскости $x_m = 0$, а остальная часть границы, S'', — в полупространстве $x_m > 0$.

Примем, что на части S'' границы выполняется условие

$$u|_{S''}=0; \tag{19}$$

о краевых условиях на поверхности вырождения скажем ниже.

Как оказывается, для характеристики свойств вырождающегося оператора (18_1) наиболее важно поведение коэффициента $A_{mm}(P)$ при $x_m \to 0$. Примем следующее допущение: существует такая непрерывная неотрицательная функция $p(x_m)$ и такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1 \leqslant \frac{A_{mm}(P)}{p(x_m)} \leqslant c_2. \tag{20}$$

Очевидно, $p(x_m)>0$ при $x_m>0$; если $p(0)>0$ и оператор (18_1) вырождается при $x_m=0$, то при этом значении x_m необходимо вырождается квадратичная форма от $m-1$ переменных

$$\sum_{j,\ k=1}^{m-1} A_{jk}(P)\,t_j t_k.$$

Обозначим через a наибольшее значение координаты x_m в $\bar{\Omega}$ и положим

$$k=\int_0^a \frac{dt}{p(t)}. \tag{21}$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор L, который действует по формуле, определяемой левой частью уравнения (18_1):

$$Lu=-\sum_{j,\ k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_m}\left(A_{mm}\frac{\partial u}{\partial x_m}\right).$$

За область D_L определения оператора L примем множество функций, обладающих следующими свойствами:

а) функции

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant m-1;\quad p(x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(p(x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$$

непрерывны в $\bar{\Omega}$;

б) функция u удовлетворяет условию (19);

в) если $k < \infty$, то

$$u\,|_{S'} = 0; \tag{22}$$

если $k = \infty$, то никаких условий на S' ставить не следует.

Справедлива следующая теорема (в статье автора [16] она дана в несколько менее общей форме).

Теорема 1. *Если произведение*

$$t \int_t^a \frac{d\tau}{p(\tau)} \tag{23}$$

ограничено, то оператор L положительно определенный. Он будет положительно определенным и тогда, когда произведение (23) *не ограничено, но при этом существует такой индекс r* ($1 \leqslant r \leqslant m-1$), *что в $\overline{\Omega}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{j,\,k=1}^{m-1} A_{jk}(P)\,t_j t_k \geqslant C t_r^2, \qquad C = \text{const} > 0.$$

Рассмотрим еще оператор L', определенный только, если $k < \infty$, и отличающийся от оператора L лишь тем, что условие (22) заменено краевым условием

$$\lim_{x_m \to 0} p(x_m) \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0. \tag{24}$$

Доказывается, что в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор L' также положительно определенный.

§ 29. Принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ — вектор смещений, $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ — составляющие напряжений, $\mathbf{K}(X, Y, Z)$ — вектор объемных сил. Далее мы будем обозначать через ε_x относительное удлинение в направлении оси x и через γ_{xy} — сдвиг в плоскости xy; аналогично определяются ε_y, ε_z, γ_{xz}, γ_{yz}. Величины ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} будем называть, хотя это и не совсем точно, составляющими деформаций. Они связаны с вектором смещений $\mathbf{u}$ соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{1}$$

и четырьмя им аналогичными. В упругом теле составляющие напряжений и деформаций связаны уравнениями обобщенного закона Гука

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz},\\
\sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{xz} + a_{36}\gamma_{yz},\\
\tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{xz} + a_{46}\gamma_{yz},\\
\tau_{xz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{xz} + a_{56}\gamma_{yz},\\
\tau_{yz} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{yz}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величины a_{jk} не зависят от деформированного состояния тела и являются механическими характеристиками материала. Они называются *константами упругости* данного материала.

Следует, впрочем, отметить, что a_{jk} будут постоянными только для однородного тела, в общем случае тела неоднородного они будут функциями координат x, y, z.

Величины a_{jk} связаны важным соотношением

$$a_{jk} = a_{kj}, \tag{3}$$

которое вытекает из существования упругого потенциала, т. е. такой функции составляющих деформаций $W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{yz})$ что

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \ \ldots, \ \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}.$$

Из формул (2) и (3) нетрудно усмотреть, что

$$2W = \varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz}. \tag{4}$$

В последующем мы будем обозначать упругий потенциал через $W(\mathbf{u})$. Заменяя составляющие напряжений по формулам (2), найдем, что W — квадратичная форма относительно составляющих деформации. В теории упругости доказывается, что эта форма — положительно определенная, т. е. что $W \geqslant 0$, причем $W = 0$ тогда и только тогда, когда все составляющие деформации равны нулю[1]). Уравнения (2) справедливы для самого общего случая анизотропной среды. Если упругая среда изотропная, уравнения (2) сильно упрощаются и сводятся к известным

---

[1]) Подробное изложение перечисленных здесь вопросов см., например, Л. С. Лейбензон [2].

уравнениям Ляме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}, \\ & & \theta &= \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Здесь λ и μ — так называемые константы Ляме.

Известные уравнения равновесия, которые мы запишем в форме:

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) &= X, \\ -\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right) &= Y, \\ -\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right) &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

можно рассматривать как одно векторное уравнение относительно вектора смещений $\mathbf{u}$. Для этого достаточно в левые части уравнений (5), рассматриваемых как составляющие некоторого вектора, подставить вместо σ_x, τ_{xy}, ..., τ_{yz} их выражения (2) и далее заменить составляющие деформаций по формулам (1). Указанный вектор обозначим через $\mathbf{Au}$, а его составляющие — через $A_x\mathbf{u}$, $A_y\mathbf{u}$, $A_z\mathbf{u}$. Система (5) записывается теперь в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{Au} = \mathbf{K}. \tag{6}$$

Заметим, что в наиболее важном случае изотропной среды оператор $\mathbf{A}$ имеет сравнительно простой вид, именно:

$$\mathbf{Au} = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}.$$

Пусть $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$ — два вектора упругих смещений, отвечающих объемным силам $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{K}''$. Напомним известные формулы Бетти [1])

$$\int_\Omega \mathbf{u}'\mathbf{Au}''\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')\,d\Omega - \int_S \mathbf{u}'\mathbf{t}''^{(\nu)}\,dS, \tag{7}$$

$$\int_\Omega \mathbf{uAu}\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathbf{u})\,d\Omega - \int_S \mathbf{ut}^{(\nu)}\,dS, \tag{8}$$

$$\int_\Omega (\mathbf{u}'\mathbf{Au}'' - \mathbf{u}''\mathbf{Au}')\,d\Omega = -\int_S \left(u'\mathbf{t}''^{(\nu)} - \mathbf{u}''\mathbf{t}'^{(\nu)}\right)dS. \tag{9}$$

---

[1]) См., например, Е. Трефтц [2].

Здесь мы пользуемся следующими обозначениями:

1) одним штрихом (соответственно, двумя штрихами) обозначаем величины, связанные с вектором $\mathbf{u}'$ (соответственно, с вектором $\mathbf{u}''$);

2) $\mathbf{t}^{(\nu)}$ — вектор напряжений, действующих на поверхность тела;

3) $W(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \frac{1}{2}(\varepsilon'_x\sigma''_x + \varepsilon'_y\sigma''_y + \varepsilon'_z + \gamma'_{xy}\tau''_{xy} + \gamma'_{xz}\tau''_{xz} + \gamma'_{yz}\tau''_{yz})$; как известно, $W(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = W(\mathbf{u}'', \mathbf{u}')$.

Обратимся теперь к задаче интегрирования уравнений теории упругости. Краевые условия, сопутствующие этим уравнениям, будем считать однородными.

Наиболее простые и важные типы краевых условий в теории упругости следующие:

а) граница S закреплена:

$$\mathbf{u}|_S = 0; \tag{10}$$

б) граница тела свободна от действия внешних сил:

$$\mathbf{t}^{(\nu)}|_S = 0; \tag{11}$$

в) граница тела состоит из двух частей, S_1 и S_2, из которых первая закреплена, а вторая свободна от действия внешних сил:

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \qquad \mathbf{t}^{(\nu)}|_{S_2} = 0. \tag{12}$$

Задачу в) часто называют смешанной задачей теории упругости.

Докажем, что все перечисленные задачи равносильны задаче о минимуме интеграла

$$\int_\Omega \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\mathbf{K}\}\, d\Omega \tag{13}$$

при тех или иных условиях. Это предложение представляет собой известный принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости, так как интеграл (13) равен потенциальной энергии упругого тела, подверженного действию объемной силы $\mathbf{K}$.

Оператор $\mathbf{A}$ будем рассматривать в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ векторных функций, суммируемых с квадратом в Ω. При любом из краевых условий (10)—(12) правая часть формулы (9) обращается в нуль, и эта формула показывает, что при любом из упомянутых условий оператор симметричен.

Теперь составим выражение

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u}\, d\Omega.$$

Применим к этому интегралу формулу (8) и заметим, что при любом из условий (10) или (12) подынтегральная функция в поверхностном интеграле исчезает. Таким образом,

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\int_{\Omega} W(\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant 0. \qquad (14)$$

Далее, если $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, то $W(\mathbf{u}) \equiv 0$, и так как W есть положительно определенная квадратичная форма относительно составляющих деформаций, то эти последние тождественно равны нулю. Но тогда $\mathbf{u}$ есть вектор малого жесткого смещения тела; если закреплена граница тела [условие (10)], или часть границы [условие (12)], то жесткое смещение невозможно, и $\mathbf{u} \equiv 0$. Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ положительный на каждом из множеств, определяемых условиями (10) или (12). По теореме о функционале энергии отыскание интеграла уравнения (6) (или, что то же, системы уравнений теории упругости) при одном из условий (10) или (12) равносильно отысканию вектора, удовлетворяющего тому же краевому условию и реализующего минимум функционала

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2(\mathbf{K}, \mathbf{u}) = 2\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{K}\mathbf{u}\}\, d\Omega.$$

Таким образом, принцип минимума потенциальной энергии доказан применительно к задачам а) и в).

Остановимся на задаче б), роль которой в теории упругости такая же, как и роль задачи Неймана в теории гармонических функций. На линеале векторов, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми и вторыми производными и удовлетворяющих краевому условию (11), оператор $\mathbf{A}$ не будет положительным. Действительно, формула (14) остается в силе и на этот раз, так что $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0$. Однако $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ может равняться нулю не только при $\mathbf{u} \equiv 0$ — достаточно взять за $\mathbf{u}$ произвольный вектор малого жесткого смещения. Как и в задаче Неймана, мы сделаем $\mathbf{A}$ положительным, рассматривая его на более узком множестве векторов.

Задача б) не всегда имеет решение, и нетрудно найти необходимые условия ее разрешимости. Они состоят в том, что совокупность сил, приложенных к упругому телу, должна быть статически эквивалентна нулю. Так как поверхностные силы отсутствуют [условие (11)], то должны быть статически эквивалентны нулю объемные силы:

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\, d\Omega = 0, \qquad \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{K}\, d\Omega = 0.$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор переменной точки области Ω, а косой крестик означает векторное умножение векторов. Далее, по условию (11) вектор смещений определяется не единственным образом — два вектора упругих смещений, отвечающих одним и тем же объемным силам и одному и тому же условию (11), могут различаться на произвольный вектор малого жесткого смещения. Этот произвольный вектор можно зафиксировать, подчинив, например, искомое решение тем же равенствам

$$\int_\Omega \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{u}\, d\Omega = 0. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что вектор малых жестких смещений, удовлетворяющий уравнениям (15), равен нулю. Действительно, составляющие $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ вектора малых жестких смещений имеют вид

$$u_x^{(0)} = a + \gamma y - \beta z,$$
$$u_y^{(0)} = b - \gamma x + \alpha z,$$
$$u_z^{(0)} = c + \beta x - \alpha y,$$

где a, b, c, α, β, γ — постоянные. Как известно, если вектор удовлетворяет уравнениям (15) в некоторой системе координат, то он удовлетворяет им и в любой другой системе. Мы примем поэтому за оси координат главные центральные оси инерции тела Ω. При таком выборе статические моменты равны нулю, и первое уравнение (15) дает сразу $a = b = c = 0$.

Далее, проектируя второе уравнение (15) на ось x, получим

$$0 = \int_\Omega \left(y u_z^{(0)} - z u_y^{(0)}\right) d\Omega = -\alpha I_{xx} + \beta I_{xy} + \gamma I_{xz}.$$

Произведения инерции I_{xy}, I_{xz} равны нулю, и из последнего равенства вытекает, что $\alpha = 0$. Точно так же доказывается, что $\beta = \gamma = 0$.

Рассмотрим теперь линеал векторов смещений, удовлетворяющих не только условию (11), но также и условиям (15). Нетрудно видеть, что на этом линеале оператор $\mathbf{A}$ положителен. Достаточно доказать, что на этот раз из равенства $(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = 0$ следует, что $\mathbf{u} = 0$. Но, как было уже указано выше, из этого равенства следует, что $\mathbf{u}$ есть вектор малого жесткого смещения, и так как этот вектор удовлетворяет уравнениям (15), то он равен нулю.

Таким образом, принцип минимума потенциальной энергии остается в силе и для задачи б), если считать, что как решение дифференциальных уравнений теории упругости, так и вектор, реализующий минимум функционала (13), удовлетворяют уравнениям (15).

Краевое условие (11) естественное, и ему можно заранее не удовлетворять при отыскании минимума.

Рассуждая, как в § 25, можно легко найти форму интеграла энергии и в случае неоднородных краевых условий.

В общем случае смешанной задачи этот интеграл имеет вид

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega - \int_{S_2} \mathbf{ut}^{(\nu)}\, dS. \qquad (16)$$

Здесь $\mathbf{t}^{(\nu)}$ — заданный на части S_2 поверхности S вектор напряжений. В частности, если на всей поверхности заданы смещения, то интеграл энергии принимает вид

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega, \qquad (17)$$

если же на всей поверхности задан вектор напряжений, то интеграл (16) переходит в следующий:

$$\int_{\Omega} \{W(\mathbf{u}) - \mathbf{uK}\}\, d\Omega - \int_{S} \mathbf{ut}^{(\nu)}\, dS. \qquad (18)$$

Краевым условиям следует удовлетворять заранее только на той части поверхности, на которой заданы смещения.

Выше было установлено, что оператор **A**, входящий в уравнения теории упругости, положителен на множестве векторов смещений, удовлетворяющих условиям (10), (12) или (11) и (15). Можно доказать, что на каждом из этих множеств оператор **A** положительно определенный. Подробные формулировки и доказательства соответствующих теорем, а также и библиографические указания читатель найдет в книге автора [11]. Для случая закрепленной границы положительная определенность оператора **A** будет доказана ниже, в § 51.

§ 30. Изгиб тонких пластинок

1. В предшествующих параграфах этой главы мы исходили из дифференциальных уравнений и краевых условий данной задачи и сводили ее к задаче о минимуме некоторого функционала. В настоящем параграфе мы покажем, как можно получить дифференциальное уравнение и естественные краевые условия, исходя из вариационной задачи.

Как известно, теорию тонких пластинок можно построить, опираясь на формулированные ниже гипотезы [1]. Как обычно, мы располагаем плоскость (x, y) в серединной плоскости пластинки; через h обозначается толщина пластинки.

Гипотезы: 1) точки серединной плоскости пластинки испытывают только нормальные смещения; 2) ввиду малости толщины пластинки смещения u_x и u_y можно считать линейными функциями от z, а смещение u_z — не зависящим от z; 3) в точках серединной плоскости сдвиги в вертикальных плоскостях равны нулю; 4) по сравнению с σ_x, σ_y, τ_{xy} напряжения τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z пренебрежимо малы; 5) для изогнутой пластинки сохраняет силу принцип минимума потенциальной энергии в форме, о которой будет сказано ниже.

Обозначим через $w(x, y)$ нормальное смещение точки (x, y) серединной плоскости. В силу гипотез 1) и 2) $u_x = z\tilde{u}(x, y)$, $u_y = z\tilde{v}(x, y)$, где $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ — некоторые функции от x и y. По гипотезе 3) при $z = 0$ имеем $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; отсюда $\tilde{u} = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\tilde{v} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ и, следовательно,

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Опираясь на гипотезу 4), положим $\sigma_z \equiv 0$. Из уравнений Ляме находим тогда $\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = 0$, откуда

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Подставив это в первые два уравнения Ляме и используя известные соотношения между упругими постоянными изотропного тела, находим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_x + \sigma\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_y + \sigma\varepsilon_x), \tag{2}$$

где E — модуль Юнга и σ — постоянная Пуассона материала пластинки. Отметим еще уравнение Ляме, связывающее τ_{xy} и γ_{xy}:

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\gamma_{xy}. \tag{3}$$

Обозначим через Ω пространственную область, занятую пластинкой, через S и S_1 — ее верхнее и нижнее основания и через

---

[1] Эти гипотезы в несколько иных выражениях сформулированы Кирхгофом [1].

Σ — ее боковую поверхность. Как обычно, примем, что на верхнее основание S действует нормальная нагрузка интенсивности $q(x, y)$, а нижнее основание S_1 свободно от действия внешних сил. Действием объемных сил на пластинку пренебрежем. Если край Σ пластинки жестко закреплен, то в соответствии с формулой (16) предшествующего параграфа заключаем, что задача об изгибе пластинки сводится к задаче о минимуме функционала

$$\iiint_{\Omega} W(\mathbf{u})\, d\Omega - \iint_{S} q u_z\, dS \tag{4}$$

при соответствующих краевых условиях. Примем, что *форма* (4) *функционала энергии сохраняется и в случае, когда часть края или весь край пластинки свободен или свободно оперт*; будем далее, в целях упрощения выкладок, ограничиваться тем случаем, когда часть края пластинки жестко закреплена, а другая часть края свободно оперта.

Упростим функционал (4). Имеем

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right).$$

Гипотеза 4) позволяет пренебречь последними тремя слагаемыми по сравнению с первыми тремя; используя еще формулы (1)—(3), получим

$$W(\mathbf{u}) = \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)}\left\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}.$$

Отсюда

$$\iiint_{\Omega} W(\mathbf{u})\, d\Omega = \iint_{S} dS \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W(\mathbf{u})\, dz =$$

$$= \frac{D}{2}\iint_{S}\left\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\} dS; \tag{5}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Для дальнейшего важно, что интеграл

$$\iint_{S}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS$$

можно преобразовать в интеграл, взятый по контуру области S; этот контур обозначим через L. Интегрируя по частям, найдем

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dS = -\iint\limits_S \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}dS - \int\limits_L \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}dx,$$

$$\iint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dS = -\iint\limits_S \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}dS + \int\limits_L \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy.$$

Вычитая последние равенства, получим

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = -\int\limits_L \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)ds; \tag{6}$$

ds — дифференциал дуги контура L.

Контурный интеграл возьмем по частям. Так как контур L замкнутый, а функция w и ее производные, очевидно, однозначны, то внеинтегральный член пропадет, и мы получим

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = \int\limits_L \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)ds.$$

Из двух последних равенств вытекает, что

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = \frac{1}{2}\int\limits_L \left[\frac{\partial w}{dy}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]ds. \tag{6_1}$$

Заметим, что если функция $w(x, y)$ удовлетворяет на контуре L условиям (8) (см. ниже), то

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = 0. \tag{6_2}$$

В силу гипотезы 2) можно во втором интеграле в (4) положить $u_z = w(x, y)$. Учтя формулы (5) и (6), получим для потенциальной энергии изогнутой пластинки выражение

$$\frac{D}{2}\iint\limits_S \left[(\Delta w)^2 - \frac{2q}{D}w\right]dS - {}$$
$$- \frac{D(1-\sigma)}{2}\int\limits_L \left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]ds. \tag{7}$$

Выясним краевые условия, которым следует подчинить функцию w. Если боковая поверхность пластинки жестко закреплена, то на этой поверхности

$$u_x = u_y = u_z = 0.$$

Учитывая формулы (1), а также отмеченное выше тождество $u_z \equiv w$, найдем, что условия на жестко закрепленном крае пластинки имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

что можно заменить двумя равносильными равенствами

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \tag{8}$$

которые необходимо выполняются на жестко закрепленной части контура L; на свободно опертой части контура L одно из краевых условий имеет вид

$$w = 0, \tag{9}$$

другое краевое условие мы получим как естественное для функционала (7). Заметим еще, не вдаваясь в подробности, что на свободной части контура получаются два естественных условия.

Выведем уравнение равновесия изогнутой пластинки. Допустим, что часть L_1 контура L жестко закреплена, а остальная его часть L_2 свободно оперта. Тогда на всем контуре L выполняется условие $w = 0$; кроме того $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ на L_1.

Пусть функция $w(x, y)$ реализует минимум функционала (7), который для краткости обозначим через $\Psi(w)$, и пусть η — функция, достаточное число раз дифференцируемая и удовлетворяющая условиям (8) и (9), а в остальном произвольная, и t — произвольное вещественное число. Функция $w + t\eta$ удовлетворяет тем же условиям (8) и (9), поэтому

$$\Psi(w + t\eta) \geqslant \Psi(w).$$

Если функция $\eta(x, y)$ фиксирована, то $\Psi(w + t\eta)$ есть функция от t, которая, как показывает последнее неравенство, имеет минимум при $t = 0$. Но тогда необходимо

$$\frac{d}{dt} \Psi(w + t\eta)\big|_{t=0} = 0;$$

произведя простые выкладки, приведем это уравнение к виду

$$\iint \left(\Delta w \, \Delta\eta - \frac{q}{D}\,\eta\right) dS + \frac{1-\sigma}{2} \int\limits_L \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \right\} ds = 0.$$

Далее, по формуле Грина

$$\iint\limits_S \Delta w\, \Delta\eta\, dS = \iint\limits_S \eta\Delta^2 w\, dS + \int\limits_L \left(\Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu} - \eta \frac{\partial \Delta w}{\partial\nu}\right) ds =$$
$$= \iint\limits_S \eta\Delta^2 w\, dS + \int\limits_L \Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\, ds,$$

так как $\eta|_L = 0$. Окончательно получаем

$$\iint\limits_S \eta\left(\Delta^2 w - \frac{q}{D}\right) dS + \int\limits_L \Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\, ds + \frac{1-\sigma}{2}\int\limits_L \left\{\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right\} ds = 0. \qquad (10)$$

Контурный интеграл в (10) достаточно брать по L_2, так как интеграл по L_1 исчезает в силу условий (8), которым удовлетворяют обе функции w и η. Если весь край пластинки жестко закреплен, то контурный интеграл в (10) отсутствует. Допустим, что $\eta(x, y)$ удовлетворяет условиям (8) не только на L_1, но и на всем контуре L. Тогда контурный интеграл в (10) исчезает, и это равенство дает

$$\iint\limits_S \eta\left(\Delta^2 w - \frac{q}{D}\right) dS = 0.$$

Множество функций η, удовлетворяющих краевым условиям (8), плотно в $L_2(S)$, поэтому выражение в скобках под знаком интеграла равно нулю, и мы получаем известное дифференциальное уравнение равновесия изогнутой пластинки

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \qquad (11)$$

впервые полученное Софи Жермен в 1811 г.

2. Выведем теперь второе краевое условие на свободно опертой части края изогнутой пластинки. В силу уравнения (11) двойной интеграл в (10) исчезает, а контурный интеграл, как было сказано, достаточно брать по L_2. Уравнение (10) принимает вид

$$\int\limits_{L_2} \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\Delta w\, ds + \frac{1-\sigma}{2}\int\limits_{L_2} \left\{\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right\} ds = 0. \qquad (12)$$

В произвольно выбранной точке кривой L_2 проведем к ней касательную, которую направим так, чтобы оси ν и s были ориентированы так же, как и оси x и y (рис. 11), и обозначим через ϑ угол между осями x и s. Положим еще

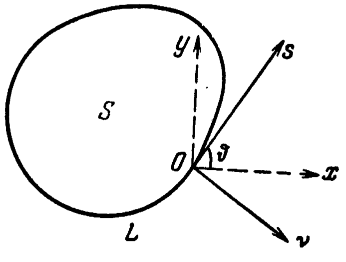

Рис. 11.

$$\alpha = \cos\vartheta = \cos(s,\ x) = -\cos(\nu,\ y),$$
$$\beta = \sin\vartheta = \cos(s,\ y) = \cos(\nu,\ x).$$

На кривой L_2 функция w обращается в нуль, поэтому на этой кривой также

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(s, y) = 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu,\ x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(\nu,\ y).$$

Решая эти два уравнения относительно $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$, найдем, что на L_2

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta\frac{\partial w}{\partial \nu}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\alpha\frac{\partial w}{\partial \nu}.$$

Аналогично на L_2

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \beta\frac{\partial \eta}{\partial \nu}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\alpha\frac{\partial \eta}{\partial \nu}.$$

Подставив это в (12) и выполнив дифференцирование под знаком второго интеграла, получим

$$\int_{L_2} \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\left\{\Delta w + (1-\sigma)\frac{\partial w}{\partial \nu}\left(\beta\frac{d\alpha}{ds} - \alpha\frac{d\beta}{ds}\right)\right\} ds = 0.$$

Но

$$\beta\frac{d\alpha}{ds} - \alpha\frac{d\beta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны кривой L_2. Отсюда

$$\int_{L_2} \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\left(\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) ds = 0.$$

В качестве $\frac{\partial \eta}{\partial \nu}$ можно взять любую непрерывную на L_2 функцию. Выражение $\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}$, будучи ортогональным на L_2 к любой непрерывной функции, должно быть тождественным нулем на L_2, и мы получаем интересующее нас краевое условие в виде

$$\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad L_2. \tag{13}$$

Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что условие (13) совпадает с условием отсутствия изгибающих моментов на свободно опертом крае.

Аналогичным путем, исходя из принципа минимума потенциальной энергии, можно получить дифференциальные уравнения равновесия упругих оболочек и соответствующие краевые условия [1]). Выкладки при этом, естественно, усложняются. Принцип минимума потенциальной энергии может быть положен также в основу ряда других приближенных теорий упругого состояния.

Не останавливаясь на их выводе [2]), приведем краевые условия на свободном крае пластинки. Введем в рассмотрение двумерные векторы

$$U = \left\{ w\,|_L; \; -\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_L \right\}, \qquad U_\nu = \left\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu}\Big|_L; \; \Delta w\,|_L \right\}.$$

В терминах векторов U и U_ν условие на свободном крае пластинки имеет вид

$$U_\nu - (1-\sigma) \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} \frac{d}{ds}, & \frac{d^2}{ds^2} \\ \frac{d^2}{ds^2}, & -\frac{1}{\rho} \end{pmatrix} U = 0.$$

3. Можно доказать, что бигармонический оператор, входящий в уравнение Софи Жермен, симметричный и положительно определенный в пространстве $L_2(S)$ на множестве функций, которые удовлетворяют на L_1 условиям (8) жесткого закрепления, а на L_2 — условиям (9) и (13) свободного опирания. Здесь мы ограничимся теми двумя случаями, когда контур L пластинки целиком либо жестко закреплен, либо свободно оперт.

Пусть контур L жестко закреплен. Чтобы проверить симметричность бигармонического оператора в этом случае, допустим, что функции $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ обе удовлетворяют условиям (8). Полагая в формуле (19) § 7 $u = \Delta w_1$, $v = w_2$, получим

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \iint_S w_2 \Delta^2 w_1 \, dS =$$
$$= \iint_S \Delta w_2 \Delta w_1 \, dS + \int_L \left(w_2 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial \nu} - \Delta w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} \right) ds.$$

---

[1]) См. работу автора [17].
[2]) См. М. Ш. Бирман [6].

Контурный интеграл исчезает в силу условий (8), поэтому

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \iint_S \Delta w_2 \Delta w_1 \, dS. \tag{14}$$

Так как правая часть формулы (14) симметрична относительно w_1 и w_2, то $(\Delta^2 w_1, w_2) = (w_1, \Delta^2 w_2)$, т. е. оператор Δ^2 симметричен на множестве функций, удовлетворяющих условиям (8). Положим в (14) $w_1 = w_2 = w$. Это дает

$$(\Delta^2 w, w) = \iint_S (\Delta w)^2 \, dS. \tag{15}$$

Умножив теперь равенство (6_2) на 2 и прибавив к (15), получим

$$(\Delta^2 w, w) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dS. \tag{16}$$

Как мы уже отмечали, условия (8) равносильны таким:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad L.$$

В таком случае к обеим первым производным можно применить неравенство Фридрихса (см. § 24):

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS \leqslant \frac{1}{\varkappa} \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dS,$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS \leqslant \frac{1}{\varkappa} \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS. \tag{17}$$

Неравенство Фридрихса можно применить и к самой функции w, так как $w|_L = 0$. Но тогда

$$\iint_S w^2 \, dS \leqslant \frac{1}{\varkappa} \iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa^2} \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS,$$

или

$$(\Delta^2 w, w) \geqslant \varkappa^2 \| w \|^2,$$

что и означает положительную определенность оператора Δ^2. Отсюда вытекает, что задача о равновесии жестко закрепленной пластинки имеет (и притом единственное) решение, которое можно построить, используя методы гл. III. В частности, если w_n, $n = 1, 2, \ldots$, — какая-либо минимизирующая последовательность[1]), то она сходится по энергии к точному решению. Выясним подробнее характер сходимости по энергии в данном случае. Из формулы (16) следует, что

$$|w|^2=\iint_S\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dS. \tag{18}$$

Так как последовательность функций w_n сходится по энергии, то

$$|w_n-w_m|\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0$$

или, более подробно,

$$\iint_S\left\{\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2\right\}dS\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0.$$

Отсюда следует, очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}&\iint_S\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2dS\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0,\\&\iint_S\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial y}\right)^2dS\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0,\\&\iint_S\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2dS\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

т. е. последовательности вторых производных от приближенных решений сходятся в среднем. Неравенства (4) и (5) показывают теперь, что последовательности первых производных от w_n, а также сами w_n, сходятся в среднем. Докажем теперь, что *последовательность* $\{w_n\}$ *сходится равномерно*[2]) *в замкнутой области* $\overline{\Omega}$.

Условия (8) главные, поэтому функции w_n этим условиям необходимо удовлетворяют. Будем также считать, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые производные в $\overline{S}=S+L$ — этого всегда можно добиться. Поместим S внутрь некоторого прямоугольника П (рис. 8) и доопределим функции $w_n(x, y)$ в П, положив их равными нулю вне S. Тогда

[1]) Например, построенная по методу Ритца.

[2]) Эта теорема является частным случаем так называемой «теоремы вложения» С. Л. Соболева; см. С. Л. Соболев [2].

эти функции, так же, как и их первые производные, непрерывны в Π. Возьмем в $\bar{S}$ произвольную точку (x, y) и вычислим интеграл

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta, \qquad u = w_n - w_m.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0).$$

Точки $(x, 0)$, $(0, y)$ и $(0, 0)$ лежат на сторонах прямоугольника Π, где $u = 0$, поэтому $u(x, 0) = u(0, y) = u(0, 0) = 0$ и, следовательно,

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta.$$

Отсюда

$$|u(x, y)| = \left| \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta \right| \leqslant \int_{\Pi} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} \right| d\xi\,d\eta,$$

или, так как $u \equiv 0$ вне S,

$$|u(x, y)| \leqslant \int_S \left| \frac{d^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} \right| d\xi\,d\eta.$$

Теперь по неравенству Буняковского

$$u^2(x, y) \leqslant |S| \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} \right)^2 dS,$$

где через $|S|$ обозначена площадь области S. Но $u = w_n - w_m$, поэтому

$$|w_n(x, y) - w_m(x, y)| \leqslant \sqrt{|S|} \left\{ \int_S \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial\xi\,\partial\eta} \right)^2 dS \right\}^{1/2}.$$

В силу неравенств (19) выражение справа стремится к нулю при $m, n \to \infty$. По определению (С1, **144**) последовательность w_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно в $\bar{S}$.

4. Допустим теперь, что контур L свободно оперт, так что прогиб пластинки удовлетворяет условиям (9) и (13). Рассмотрим оператор Δ^2, заданный на множестве функций, подчиненных упомянутым условиям, и докажем, что этот оператор симметричный и положительно определенный.

Пусть $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ удовлетворяют условиям (9) и (13), так что на L

$$w_1 = w_2 = 0, \quad \Delta w_1 - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \Delta w_2 - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0.$$

Тогда, как и в п. 3 настоящего параграфа,

$$(\Delta^2 w_1,\ w_2) = \iint_S w_2 \Delta^2 w_1\, dS =$$
$$= \iint_S \Delta w_2 \Delta w_1\, dS + \int_L \left(w_2 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial \nu} - \Delta w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu}\right) ds,$$

что, в силу краевых условий, принимает вид

$$(\Delta^2 w_1,\ w_2) = \iint_S \Delta w_2 \Delta w_1\, dS - (1-\sigma)\int_L \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\frac{\partial w_2}{\partial \nu}\, ds. \qquad (20)$$

Тот же результат получим, исходя из скалярного произведения $(\Delta^2 w_2, w_1)$. Отсюда $(\Delta^2 w_1, w_2) = (\Delta^2 w_2, w_1)$, т. е. рассматриваемый оператор симметричен. Чтобы установить его положительную определенность, поступим следующим образом.

а) Проделаем в обратном порядке выкладки п. **2**, заменив в них η через w_1 и w через w_2. Тогда найдем, что

$$\int_L \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\frac{\partial w_2}{\partial \nu}\, ds = -\frac{1}{2}\int_L \left\{\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\right\} ds.$$

Подставим это в (20) и положим там $w_1 = w_2 = w$. Это приведет нас к равенству

$$(\Delta^2 w,\ w) = \iint_S (\Delta w)^2\, dS + (1-\sigma)\int_L \left\{\frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} ds,$$

или, если воспользоваться формулой (6_1),

$$(\Delta^2 w,\ w) = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dS. \qquad (21)$$

Интересно отметить, что интеграл в (21) только постоянным множителем $D/2$ отличается от выражения [формула (5)]

$$\iiint_\Omega W(\mathbf{u})\, d\Omega,$$

равного потенциальной энергии деформации пластинки.

б) Имеем тождество

$$\xi^2 + 2\sigma\xi\eta + \eta^2 - (1-\sigma)(\xi^2+\eta^2) = \sigma(\xi+\eta)^2.$$

Считая, что $\sigma \geqslant 0$, находим отсюда, что

$$\xi^2 + 2\sigma\xi\eta + \eta^2 \geqslant (1-\sigma)(\xi^2+\eta^2).$$

Полагая $\xi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\eta = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, получаем из (21) неравенство[1])

$$(\Delta^2 w, w) \geqslant (1-\sigma) \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right\} dS. \tag{22}$$

в) К производной $\frac{\partial w}{\partial x}$ применим неравенство Пуанкаре [формула (18) § 24], которое в этом случае даст

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS \leqslant A \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right\} dS + B\left(\iint_S \frac{\partial w}{\partial x}\, dS\right)^2. \tag{23}$$

По формуле Остроградского

$$\iint_S \frac{\partial w}{\partial x}\, dS = \int_L w \cos(\nu, x)\, ds = 0, \tag{24}$$

и неравенство (23) принимает вид

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS \leqslant A \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right\} dS.$$

Аналогично найдем

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS \leqslant A \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS.$$

Сложив последние неравенства, получим

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS \leqslant A \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS.$$

Сопоставление с неравенством (22) дает

$$(\Delta^2 w, w) \geqslant \frac{1-\sigma}{A} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS. \tag{25}$$

---

[1]) Если бы было $\sigma < 0$, то мы получили бы аналогичное неравенство с заменой множителя $1-\sigma$ на $1+\sigma$.

Условие (9) позволяет применить к функции w неравенство Фридрихса

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS \geqslant \varkappa \iint_S w^2\, dS=\varkappa \| w \|^2.$$

Подставив это в (25), приходим к неравенству

$$(\Delta^2 w,\ w) \geqslant \gamma^2 \| w \|^2, \quad \gamma^2=(1-\sigma)\varkappa/A, \tag{26}$$

которое и означает, что рассматриваемый оператор положительно определенный.

Предоставляем читателю формулировку вытекающих из этого факта следствий. Заметим только, что и в этом случае можно доказать равномерную сходимость минимизирующей последовательности, если воспользоваться упомянутой выше «теоремой вложения» С. Л. Соболева. Однако такое доказательство выходит за рамки настоящей книги.

5. К задаче, сходной с вариационной задачей для случая жестко закрепленной по краю пластины, сводится плоская задача теории упругости при заданных внешних силах в случае, когда область S, заполненная упругой средой, конечная и односвязная. В этом случае, как известно, задачу можно свести к интегрированию бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u=0 \tag{27}$$

при краевых условиях

$$u\,|_L=f_1(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L=f_2(s), \tag{28}$$

где $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — известные функции. Если $\psi(x, y)$ — произвольная четырежды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (28), то, полагая $u-\psi=w$, мы найдем, что w удовлетворяет краевым условиям (8) и уравнению (11), в котором $\frac{q}{D}=-\Delta^2\psi$. Функцию w можно найти, решая задачу о минимуме функционала

$$F(w)=(\Delta^2 w,\ w)+2(\Delta^2\psi,\ w).$$

Полагая здесь $w=u-\psi$, легко найдем

$$F(w)=\Phi(u)+\Phi(\psi)-2\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dS+2\iint_S u\Delta^2\psi\, dS-2\iint_S \psi\,\Delta\psi\, dS, \tag{29}$$

где для краткости положено

$$\Phi(u)=\iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS.$$

Заметим, что в правой части равенства (29) второй и пятый члены суть постоянные. Интеграл в третьем члене возьмем дважды по частям. Из формул (28) следует, что $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_L$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_L$ известны, поэтому контурные интегралы, возникающие при интегрировании по частям, суть известные постоянные. Учтя это, мы получим

$$\iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) dS=\iint_S u\,\Delta^2\psi\,dS+\text{const}.$$

Подставив это в (29), найдем, что $F(w)=\Phi(u)+\text{const}$. Таким образом, плоская задача теории упругости при упомянутых выше условиях сводится к задаче о минимуме функционала $\Phi(u)$ на множестве функций $u(x, y)$, которые вместе со своими нормальными производными принимают заданные значения (28). При отыскании минимума можно $\Phi(u)$ заменить более простым функционалом

$$\Phi_0(u)=\iint_S (\Delta u)^2\,dS.$$

Действительно, по формуле (6)

$$\Phi_0(u)-\Phi(u)=2\int_L \frac{\partial u}{\partial x}\,d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

что, в силу краевых условий (28), есть известная постоянная.

§ 31. Изгиб тонких сжатых пластинок

Пусть пластинка находится под одновременным действием нормальной нагрузки $q(x, y)$ и напряжений T_x, T_{xy}, T_y, действующих в серединной плоскости пластинки. Будем считать, что объемные силы отсутствуют. Тогда T_x, T_{xy}, T_y связаны однородными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}=0. \qquad (*)$$

Если прогиб $w(x, y)$ пластинки мал, то можно приближенно считать, что он удовлетворяет известному уравнению[1])

$$\Delta^2 w - \frac{h}{D}\left[T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = \frac{q}{D}; \tag{1}$$

как и в предшествующем параграфе, здесь h означает толщину пластинки и D — ее жесткость. Так же, как и в § 30, краевые условия на жестко закрепленной части края имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \tag{2}$$

а на свободно опертой части края

$$w = 0, \quad \Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \tag{3}$$

Докажем, что оператор в левой части уравнения (1) симметричен в пространстве $L_2(S)$ на каждом из множеств функций, удовлетворяющих либо условиям (2), либо условиям (3)[2]). Симметричность бигармонического оператора была установлена в § 30; чтобы доказать наше утверждение, достаточно теперь убедиться, что оператор

$$Tw = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

симметричен на множестве функций, удовлетворяющих краевому условию

$$w\,|_L = 0, \tag{5}$$

которое удовлетворяется в обоих отмеченных выше случаях. С этой целью заметим, что оператор T можно, пользуясь уравнениями равновесия (*), преобразовать к виду

$$Tw = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Составим теперь скалярное произведение (Tw_1, w_2), полагая при этом, что обе функции w_1 и w_2 удовлетворяют краевому условию (5). Интегрируя по частям и имея в виду, что, в силу

---

[1]) См., например, П. Ф. Папкович [1], стр. 522, или С. П. Тимошенко [2], стр. 289.

[2]) На это обстоятельство обратил внимание автора М. Ш. Бирман.

упомянутого условия, контурный интеграл исчезает, найдем

$$(Tw_1, w_2) = \iint_S w_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial w_1}{\partial x} + T_{xy}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{xy}\frac{\partial w_1}{\partial x} + T_y\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\right] dS = -\iint_S \left[T_x\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + T_{xy}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + T_y\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right] dS. \qquad (6)$$

Так как в последний интеграл w_1 и w_2 входят симметрично, то тот же результат получится, очевидно, если исходить из скалярного произведения (w_1, Tw_2). Отсюда $(Tw_1, w_2) = (w_1, Tw_2)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Если напряжения T_x, T_{xy}, T_y достаточно малы по абсолютной величине, то оператор в левой части уравнения* (1) *положительно определенный в пространстве $L_2(S)$ на каждом из множеств функций, которые на всем контуре удовлетворяют либо условиям* (2), *либо условиям* (3).

Составим скалярное произведение

$$\left(\Delta^2 w - \frac{h}{D}Tw,\ w\right) = (\Delta^2 w,\ w) - \frac{h}{D}(Tw,\ w). \qquad (7)$$

Если весь край пластинки жестко закреплен [условия (2)], то по формулам (16) и (18) § 30

$$(\Delta^2 w,\ w) \geqslant \varkappa \iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS,$$

если же весь край свободно оперт [условия (3)], то справедливо неравенство (25) § 30. Обозначая через C величину $\varkappa$ в случае жестко закрепленного края и величину $\frac{1-\sigma}{A}$ — в случае свободно опертого края, имеем в обоих случаях

$$(\Delta^2 w,\ w) \geqslant C \iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS. \qquad (8)$$

Оценим теперь величину (Tw, w). В формуле (6) положим $w_1 = w_2 = w$. Получим тогда

$$(Tw,\ w) = -\iint_S \left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS. \qquad (9)$$

Пусть N — наибольший из максимумов величин T_x, T_{xy}, T_y, так что

$$|T_x| \leqslant N, \quad |T_{xy}| \leqslant N, \quad T_y \leqslant N.$$

Тогда

$$|(Tw,\ w)|\leqslant N\iint\limits_S\left\{\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|\right\}^2 dS,$$

или, если воспользоваться неравенством $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$,

$$|(Tw,\ w)|\leqslant 2N\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dS\ ^{1)}. \tag{10}$$

С помощью соотношений (8) и (10) получаем из формулы (7)

$$\left(\Delta^2 w-\frac{h}{D}Tw,\ w\right)\geqslant\left(C-\frac{2Nh}{D}\right)\iint\limits_S\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dS. \tag{11}$$

Так как $w|_L=0$, то справедливо неравенство Фридрихса

$$\iint\limits_S\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dS\geqslant\varkappa\|w\|^2.$$

Пусть напряжения T_x, T_{xy}, T_y столь малы, что

$$N<CD/(2h). \tag{12}$$

Тогда правая часть неравенства (11) положительна и мы усилим неравенство, заменив интеграл справа на $\varkappa\|w\|$. Теперь

$$\left(\Delta^2 w-\frac{h}{D}Tw,\ w\right)\geqslant\left(C-\frac{2Nh}{D}\right)\varkappa\|w\|^2, \tag{13}$$

и теорема 1 верна, если максимум напряжений удовлетворяет неравенству (12).

Из только что доказанной теоремы, а также из результатов §§ 14 и 30 вытекают следующие заключения:

Пусть пластинка находится под одновременным действием некоторой нормальной нагрузки $q(x,y)$ и действующих в серединной плоскости пластинки напряжений T_x, T_{xy}, T_y, и пусть весь край пластинки либо жестко закреплен, либо свободно оперт. Если максимум напряжений T_x, T_{xy}, T_y удовлетворяет неравенству (12), *то задача о равновесии пластинки имеет решение*[2]*, и притом единственное, которое можно получить как*

---

1) Неравенство (10) остается в силе, если под $2N$ понимать максимум большего из главных нормальных напряжений, действующих в плоскости пластинки.

2) Как будет показано в § 49, в общем случае эта задача может не иметь решения.

функцию, реализующую минимум функционала

$$F(w)=\iint\limits_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{D}\left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2q}{D}w\right\}dS. \qquad (14)$$

Если край пластинки жестко закреплен, то функционал (14) можно упростить и привести к любой из двух форм[1]):

$$F(w)=\iint\limits_S \left\{(\Delta w)^2+\frac{h}{D}\left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2q}{D}w\right\}dS; \qquad (15_1)$$

$$F(w)=\iint\limits_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{D}\left[T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2q}{D}w\right\}dS. \qquad (15_2)$$

Решение задачи о минимуме функционала $F(w)$ можно построить как предел минимизирующей последовательности, в частности, последовательности приближенных решений по Ритцу, а также в виде ортогонального ряда (6) § 14. Если w_n, $n=1, 2, \ldots,$ — минимизирующая последовательность, а w — точное решение, то $w_n \to w$ равномерно в $\bar{S}=S+L$, а первые и вторые производные от w_n сходятся в среднем к соответствующим производным от w.

Опираясь на неоднократно упомянутые выше «теоремы вложения», можно доказать положительную определенность оператора $\Delta^2-\frac{h}{D}T$, при выполнении условия типа (12), и в том случае, когда край пластинки частью жестко закреплен, частью свободно оперт, а также при некоторых других условиях закрепления.

Отметим один простой и важный случай, когда оператор $\Delta^2-\frac{h}{D}T$ оказывается положительно определенным и все только что перечисленные заключения имеют место при том, что неравенство (12) может и не выполняться. Это — тот случай, когда в любой точке пластинки *напряжения* T_x, T_{xy}, T_y *растягивающие в обоих главных направлениях.* По-прежнему предполагаем, что край пластинки целиком либо жестко закреплен, либо свободно

---

[1]) Тождественность функционалов (14), (15_1) и (15_2) в случае жестко закрепленного края вытекает из формулы (6_2) § 30.

оперт. Чтобы доказать наше утверждение, достаточно установить, что $(-Tw, w) \geqslant 0$, коль скоро $w|_L = 0$.

Прежде всего заметим, что выражение под знаком интеграла (9) инвариантно относительно поворота осей координат; в этом легко убедиться путем несложных преобразований. Имея это в виду, возьмем произвольную точку в S и повернем оси координат так, чтобы они совпали с главными осями напряжений T_x, T_{xy}, T_y в выбранной точке. Тогда в этой точке подинтегральная функция в (9) примет вид

$$T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2,$$

где x_1, x_2 — главные оси напряжений и T_1, T_2 — главные нормальные напряжения. По предположению напряжения T_1, T_2 растягивающие и, следовательно, положительные; отсюда вытекает, что в выбранной точке области S подинтегральная функция в (9) неотрицательна; так как точка была выбрана произвольно, то и во всей области S указанная функция неотрицательна. Отсюда следует, что

$$(-Tw, w) \geqslant 0$$

и

$$\left(\Delta^2 w - \frac{h}{D} Tw, w\right) \geqslant (\Delta^2 w, w) \geqslant C \| w \|^2,$$

что и требовалось доказать.

§ 32. Метод минимальных поверхностных интегралов

В настоящем параграфе мы изложим еще один метод решения задачи Неймана и смешанной задачи для однородного уравнения Лапласа. Метод этот, впрочем, может быть применен и к некоторым другим задачам математической физики.

Будем рассматривать конечную область Ω; границу S этой области будем предполагать состоящей из конечного числа достаточно гладких поверхностей. Рассмотрим множество M гармонических в Ω функций, непрерывных вплоть до контура. Мы можем превратить это множество в вещественное гильбертово пространство, введя скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_S u(Q) v(Q) dS, \qquad u, v \in M. \tag{1}$$

Легко видеть, что аксиомы A — D (§ 2) при этом выполнены. Можно доказать, что построенное гильбертово пространство неполное — пополним его; полученное таким образом полное гильбертово пространство обозначим через H. В качестве элементов пространства H можно рассматривать, если угодно, не гармонические в Ω функции, а предельные значения этих функций на S; при такой точке зрения пространство H совпадает с $L_2(S)$ — гильбертовым пространством функций, квадратично суммируемых на S.

В пространстве H рассмотрим оператор

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q)\, u, \tag{2}$$

где $\sigma(Q)$ — непрерывная положительная на S функция. Нетрудно видеть, что оператор (2) — положительно определенный. Действительно, исходя из формулы Грина, легко проверить, что Au — симметричный оператор. Далее,

$$(Au, u) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) + (\sigma u, u).$$

По формуле Грина (18) § 7

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int\limits_S u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + \int\limits_\Omega u\, \Delta u\, d\Omega.$$

Но u — гармоническая функция, поэтому $\Delta u = 0$ и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geqslant 0. \tag{3}$$

Далее,

$$(\sigma u, u) = \int\limits_S \sigma(Q)\, u^2(Q)\, dS \geqslant \sigma_0 \int\limits_S u^2(Q)\, dS = \sigma_0 \| u \|^2,$$

где $\sigma_0 = \min \sigma(Q)$; из наших предположений вытекает, что $\sigma_0 > 0$. Теперь, очевидно,

$$(Au, u) \geqslant \sigma_0 \| u \|^2,$$

т. е. оператор (2) положительно определенный. В силу теоремы о функционале энергии (§ 13), задача о построении гармонической в Ω функции, удовлетворяющей на S условию

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q)\, u = f(Q), \tag{4}$$

равносильна задаче о минимуме функционала

$$(Au, u) - 2(u, f) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u, u\right) - 2(u, f).$$

Эта последняя задача имеет решение, которое можно построить по методу Ритца или как предел любой другой минимизирующей последовательности.

Выясним характер стремления минимизирующей последовательности $u_n(P)$ к точному решению $u(P)$. Во всяком случае по теореме 1 § 15 $\|u_n - u\| \to 0$. Далее,

$$u(P) - u_n(P) = \int_S [u(Q) - u_n(Q)] \frac{\partial G}{\partial \nu} dS, \tag{5}$$

где G — функция Грина (С2, 198) области Ω и ν — внешняя нормаль к S.

Рассмотрим замкнутую область Ω', которая целиком лежит внутри Ω. Если $P \in \Omega'$, а $Q \in S$, то функция $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ остается ограниченной; пусть $\frac{\partial G}{\partial \nu} < C$ [1]. Теперь по неравенству Буняковского

$$\begin{aligned} |u(P) - u_n(P)|^2 \leqslant C^2 \left[\int_S |u(Q) - u_n(Q)| dS \right]^2 \leqslant \\ \leqslant C^2 |S| \int_S [u(Q) - u_n(Q)]^2 dS, \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$|u(P) - u_n(P)| \leqslant C \sqrt{|S|} \, \|u - u_n\|; \tag{7}$$

здесь $|S|$ — площадь поверхности S (длина контура S, если область Ω двумерная). Было отмечено, что $\|u - u_n\| \to 0$; теперь из неравенства (7) следует, что *приближенные решения стремятся к точному равномерно во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри* Ω. Точно так же можно доказать, что производные любого порядка от приближенных решений равномерно стремятся к соответствующей производной точного решения в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω.

Обратимся к задаче Неймана. Обозначим

$$A_0 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}. \tag{8}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда S состоит из одной замкнутой поверхности, которую предполагаем по-прежнему достаточно гладкой.

---

[1] Нетрудно убедиться, что $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ положительна, поэтому мы опускаем знак абсолютной величины.

Обозначим через $\tilde{H}$ подпространство H, ортогональное к единице, так что

$$(u,\ 1)=\int_S u\,dS=0, \qquad u\in\tilde{H}. \tag{9}$$

Оператор A_0 зададим на множестве функций, гармонических в Ω, дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющих условию (9). Нашей конечной целью является доказательство того, что оператор A_0 положительно определенный в $\tilde{H}$. Прежде всего заметим, что оператор A_0 действует из $\tilde{H}$ в $\tilde{H}$ — это вытекает из известного тождества

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS=0,$$

верного для гармонических в Ω функций.

Доказательство положительной определенности оператора $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ будет основано на некоторой оценке величины

$$\|u\|^2=\int_S u^2\,dS.$$

Построим функции $a_j(P)$, непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$ и совпадающие с $\cos(\nu, x_j)$ на S. Пусть $v(P)$ — произвольная функция, непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_S v^2\,dS&=\int_S v^2\sum_{j=1}^m \cos^2(\nu,\ x_j)\,dS=\int_S v^2\sum_{j=1}^m a_j\cos(\nu,\ x_j)\,dS=\\&=\int_\Omega v^2\sum_{j=1}^m\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\,d\Omega+2\int_\Omega v\sum_{j=1}^m a_j\frac{\partial v}{\partial x_j}\,d\Omega.\end{aligned}\tag{10}$$

Обозначим

$$C'=\max_{P\in\bar{\Omega}}\left|\sum_{j=1}^m\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right|, \qquad C''=\max_j\max_{P\in\bar{\Omega}}|a_j(P)|.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\int_S v^2\,ds\leqslant(C'+C'')\int_\Omega v^2\,d\Omega+C''m\int_\Omega\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega. \tag{11}$$

Неравенство (11) применим к функции $v = u - c$, где u — рассматриваемая гармоническая функция, а c — ее среднее значение по Ω:

$$c = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} u \, d\Omega$$

и $|\Omega|$ есть объем области Ω. При этом по неравенству Пуанкаре

$$\int\limits_{\Omega} (u - c)^2 \, d\Omega \leqslant C''' \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega,$$

и мы получаем

$$\int\limits_{S} (u - c)^2 \, dS \leqslant C \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega; \qquad C = \text{const}. \tag{12}$$

Интеграл

$$\int\limits_{S} (u - a)^2 \, dS,$$

в котором u — любая функция, суммируемая на S с квадратом, а a — постоянная, принимает наименьшее значение при

$$a = \frac{1}{|S|} \int\limits_{S} u \, dS, \tag{13}$$

где $|S|$ — площадь поверхности S; так как $u \in \mathfrak{H}$, то в нашем случае величина (13) равна нулю, и

$$\int\limits_{S} u^2 \, dS \leqslant \int\limits_{S} (u - c)^2 \, dS,$$

что вместе с неравенством (12) дает искомую оценку:

$$\| u \|^2 \leqslant C \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega. \tag{14}$$

Теперь легко доказать, что оператор $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ положительно определенный в $\mathfrak{H}$. Заменяя правую часть формулы (14) по соотношению (3), получаем окончательно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{C}}, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

По теореме о функционале энергии задача Неймана равносильна задаче о минимуме функционала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) - 2(u, f) = \int\limits_S \left(u \frac{\partial u}{\partial \nu} - 2fu\right) dS \tag{16}$$

в пространстве $\tilde{H}$; f — заданное значение нормальной производной. Обобщенное решение последней задачи существует и может быть построено процессом Ритца. Как и выше, можно показать, что приближенные по Ритцу решения сходятся равномерно, вместе с производными любого порядка, в любой замкнутой области, целиком лежащей в Ω.

ГЛАВА V
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ТОЛЬКО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 33. Решения с конечной энергией

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

в котором искомый элемент u и данный элемент f принадлежат некоторому гильбертову пространству H и A только положительный оператор, действующий в этом пространстве. По теореме о функционале энергии можно искать не решение уравнения (1), а решение задачи о минимуме функционала энергии

$$F(u) = (Au,\ u) - 2(u,\ f). \tag{2}$$

Введя энергетическое пространство H_A оператора A, представим $F(u)$ в виде

$$F(u) = |u|^2 - 2(u,\ f). \tag{3}$$

Оператор A только положителен, и его энергетическое пространство H_A «не вкладывается» в исходное пространство H: существуют идеальные элементы пространства H_A, не входящие в H. Поэтому в выражении (3) будем рассматривать (u, f) как функционал, заданный на D_A — области определения оператора A, которая принадлежит обоим пространствам H и H_A и плотна в каждом из них. Дальше можно рассуждать так же, как в § 20. Если функционал (u, f), заданный на D_A, не ограничен в энергетической метрике, то функционал (3) не ограничен снизу, и задача о его минимуме лишена смысла. Если же заданный на D_A функционал (u, f) ограничен в энергетической метрике, то его можно продолжить по непрерывности на все пространство H_A. Продолженный функционал обозначим через l; он ограничен в H_A и по теореме Риса (теорема 1 § 5) допускает представление $lu = [u, u_0]_A$, где u_0 — вполне определенный элемент пространства H_A.

Теперь

$$F(u) = |u|_A^2 - 2lu = |u|_A^2 - 2[u, u_0]_A = |u - u_0|_A^2 - |u_0|_A^2; \tag{4}$$

в таком виде функционал F определен на всем энергетическом пространстве H_A и достигает минимума при $u = u_0$.

Элемент u_0, вообще говоря, не принадлежит исходному пространству H, но он принадлежит пространству H_A, и величина $|u_0|_A^2$ существует и конечна; с физической точки зрения это допускает такое истолкование: *состояние, описываемое элементом* u_0, *имеет конечную энергию*. Это дает повод назвать элемент u_0 *обобщенным решением с конечной энергией*, или просто *решением с конечной энергией* для уравнения (1).

Если исходное пространство H сепарабельно, то энергетическое пространство H_A также сепарабельно, и решение с конечной энергией можно представить в виде ортогонального ряда, аналогичного ряду (6) § 14. Пусть $\{\omega_n\}$ — система, ортонормированная и полная в H_A. Тогда

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]_A \omega_n.$$

Но $[u_0, \omega_n]_A = [\omega_n, u_0]_A = l\omega_n$ и

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} l\omega_n \cdot \omega_n. \tag{5}$$

Это и есть искомое представление. Если $\omega_n \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$, то $l\omega_n = (f, \omega_n)$, и мы приходим к представлению

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \omega_n, \tag{6}$$

которое по форме тождественно с представлением (6) § 14.

§ 34. Процесс Ритца

Процесс Ритца для только положительных операторов развивается почти так же, как и в случае положительно определенного оператора. Пусть уравнение (1) § 33 имеет решение с конечной энергией, которое обозначим через u_0. Выберем последовательность координатных элементов $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющую обычным требованиям:

1) $\varphi_n \in H_A$;
2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы;
3) координатная последовательность полна в H_A.

Будем искать приближенное решение в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{1}$$

и выберем коэффициенты a_k так, чтобы выражение

$$F(u_n) = |u_n|_A^2 - 2lu_n$$

достигало минимума. Это приводит к системе Ритца

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]_A a_k = l\varphi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Если $\varphi_n \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$, то систему Ритца можно записать в виде (8_2) § 17.

Как и для положительно определенных операторов, справедливы соотношения:

1) $|u_n - u_0|$ монотонно стремится к нулю;

2) $|u_n| \leqslant |u_0|$;

3) если координатные элементы подвергнуть ортогонализации и построить разложение (5) § 33, то n-е приближенное решение по Ритцу совпадает с n-й частной суммой ряда (5) § 33.

§ 35. Эллиптические уравнения в бесконечной области

Этот вопрос довольно подробно рассмотрен в книге автора [26], поэтому здесь мы ограничимся некоторыми простейшими указаниями.

Пусть Ω — бесконечная область, расположенная вне одной или нескольких замкнутых поверхностей, образующих границу S рассматриваемой области. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P) \tag{1}$$

при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Допустим, что коэффициенты A_{jk} ограничены и что уравнение (1) невырождающееся. Тогда существуют такие положительные постоянные μ_0 и μ_1, что

$$\mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P) t_j t_k \leqslant \mu_1 \sum_{k=1}^{m} t_k^2. \tag{3}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — любые вещественные числа. Задача (1) — (2) порождает оператор, который обозначим через A и который действует по формуле

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right);$$

за область его определения примем множество функций, которые в $\overline{\Omega}$ имеют непрерывные вторые производные и которые обращаются в нуль как на границе S, так и в точках, достаточно удаленных от начала координат. Для таких функций верны формулы Грина. Оператор A только положительный; задача (1)—(2) имеет решение с конечной энергией тогда и только тогда, когда существует вектор $\mathbf{g}(P)$ со следующими свойствами [1]):

$$f(P) = \operatorname{div}\mathbf{g}(P); \qquad \int_\Omega |\mathbf{g}(P)|^2\, d\Omega < \infty. \tag{4}$$

При этом, если u_0 — названное решение, то

$$|u_0|_A^2 \leqslant C\int_\Omega |\mathbf{g}(P)|^2\, d\Omega; \qquad C = \text{const}. \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) выражение $\operatorname{div}\mathbf{g}$ понимается в смысле «обобщенной дивергенции», которая определяется следующим образом (ср. определение обобщенной производной в § 24). Говорят, что суммируемая функция $f(P)$ есть *обобщенная дивергенция* суммируемого вектора $\mathbf{g}(P)$, если справедливо тождество

$$\int_\Omega f(P)\,\varphi(P)\, d\Omega = -\int_\Omega \mathbf{g}(P)\cdot\operatorname{grad}\varphi(P)\, d\Omega, \tag{*}$$

в котором $\varphi(P)$ — произвольная функция, бесконечно дифференцируемая в Ω и равная нулю вблизи S и в окрестности бесконечно удаленной точки (последнее условие ставится, если область Ω бесконечная).

Можно указать более простое достаточное условие: если размерность пространства $m \geqslant 3$, то задача (1)—(2) имеет решение с конечной энергией при условии

$$\int_\Omega |P|^2 f^2(P)\, d\Omega < \infty; \tag{6}$$

$|P|$ — расстояние от точки P до начала координат. В этом случае верна оценка

$$|u_0|_A^2 \leqslant C_1\int_\Omega |P|^2 f^2(P)\, d\Omega; \qquad C_1 = \text{const}. \tag{7}$$

[1]) См. статьи автора [14] и [19].

Достаточно, в частности, чтобы правая часть уравнения $f(P)$ была отлична от нуля только в конечной области и чтобы

$$\int_{\Omega} f^2(P)\, d\Omega < \infty.$$

Заметим, что это условие достаточно и при $m = 2$.

Пусть теперь условие (2) заменено условием задачи Неймана

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu,\ x_j)\right]_S = 0. \tag{8}$$

Оператор задачи и в этом случае только положителен. Условия (4) остаются необходимыми для существования решения с конечной энергией; достаточным является требование, чтобы формула интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} uf\, d\Omega = -\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{g}\, d\Omega + \int_{S} u g_\nu\, dS \tag{9}$$

была верна для любой функции $u(P)$ из энергетического пространства, равной нулю во всех точках, достаточно удаленных от начала; в формуле (9) g_ν означает проекцию вектора $\mathbf{g}$ на направление нормали ν.

Можно доказать, что энергетическое пространство задачи Дирихле (условие (2)) состоит из функций, которые обращаются в нуль на S и имеют в Ω обобщенные первые производные, суммируемые с квадратом. Энергетические произведение и норма определяются формулами

$$[u,\ v] = \int_{\Omega} \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, d\Omega,$$

$$|u|^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega. \tag{10}$$

Те же формулы определяют энергетические произведение и норму в случае задачи Неймана (условие (8)); в этом случае энергетическое пространство состоит из всех функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом.

Если при условии (2) или условии (8) уравнение (1) имеет решение с конечной энергией, то это решение можно получить как элемент соответствующего энергетического пространства, реализующий минимум функционала энергии

$$\int_{\Omega} \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega - 2lu; \tag{11}$$

приближенно это решение можно построить процессом Ритца. В формуле (11) lu есть расширение функционала (u, f) с области определения оператора задачи на энергетическое пространство. В случае задачи Неймана lu определяется формулой (9):

$$lu = -\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{g}\, d\Omega + \int_{S} u g_{\nu}\, dS;$$

в случае задачи Дирихле второй член справа исчезает, и

$$lu = -\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{g}\, d\Omega.$$

Если сходится интеграл (6), то lu можно задать исходной формулой

$$lu = \int_{\Omega} u(P) f(P)\, d\Omega,$$

так как в этом случае последний интеграл сходится для любой функции из энергетического пространства задачи Дирихле.

Коротко скажем об уравнениях теории упругости в бесконечной области. Для простоты ограничимся случаем, когда граница упругой области жестко закреплена. Пусть $\mathbf{K} = (X, Y, Z)$ — вектор объемных сил. Решение с конечной энергией существует тогда и только тогда, когда существует симметричный тензор

$$g = \begin{pmatrix} g_{xx}, & g_{xy}, & g_{xz} \\ g_{xy}, & g_{yy}, & g_{yz} \\ g_{xz}, & g_{yz}, & g_{zz} \end{pmatrix}$$

такой, что

$$\int_{\Omega} \left(g_{xx}^2 + g_{yy}^2 + g_{zz}^2 + 2g_{xy}^2 + 2g_{xz}^2 + 2g_{yz}^2\right) d\Omega < \infty$$

и что справедливы соотношения

$$\frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial g_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial g_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{zz}}{\partial z} + Z = 0.$$

В этом случае имеет место обычный принцип минимума потенциальной энергии (§ 29).

Решение с конечной энергией существует, например, если нагрузка $\mathbf{K}=(X, Y, Z)$ сосредоточена лишь в некоторой конечной области и

$$\int_{\Omega}(X^2+Y^2+Z^2)\,d\Omega<\infty.$$

Мы не станем здесь доказывать это утверждение — сходные утверждения мы докажем ниже, в §§ 36 и 37.

§ 36. Вырождающиеся эллиптические уравнения в конечной области

Вырождающиеся уравнения были рассмотрены в § 28, где были указаны условия положительной определенности оператора задачи. Здесь мы укажем условия, при которых этот оператор только положителен.

Рассмотрим задачу, заданную уравнениями (18) и (19) § 28; сохраним допущения § 28 о характере области Ω, о поверхности вырождения и о поведении коэффициента A_{mm} (формула (20) § 28). Оператор задачи по-прежнему обозначим через L и сохраним данное в § 28 описание области D_L.

Теорема 1. *Пусть $p(t)\leqslant Ct^{\beta}$, где C и β постоянные и $\beta>2$. Если существует такая непрерывная функция $\psi(x_m)$, что $\psi(0)=0$ и*

$$\sum_{j,k=1}^{m-1} A_{jk}(P)\,t_j t_k\leqslant\psi(x_m)\sum_{k=1}^{m-1} t_k^2, \tag{1}$$

то оператор L только положителен в $L_2(\Omega)$.

Если $u\in D_L$, то легко установить тождество

$$(Lu,\ u)=\int_{\Omega}\left\{\sum_{j,k=1}^{m-1} A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{mm}(P)\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2\right\}d\Omega, \tag{2}$$

из которого сразу вытекает, что L — положительный оператор. Остается доказать, что он не положительно определенный, т. е. что

$$\inf_{\substack{u\in D_L\\ u\neq 0}}\frac{(Lu,\ u)}{(u,\ u)}=0. \tag{3}$$

Из неравенства (1) настоящего параграфа и (20) § 28 следует, что

$$(Lu,\ u) \leqslant \int\limits_{\Omega} \left\{ \psi(x_m) \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + Cc_2 x_m^{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 \right\} d\Omega. \tag{4}$$

Вырежем из области Ω параллелепипед Π, определяемый неравенствами

$$p_k \leqslant x_k \leqslant q_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-1; \qquad 0 \leqslant x_m \leqslant \delta,$$

где p_k, q_k и δ — постоянные, $\delta > 0$. Положим

$$u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x_m)^3 \prod\limits_{k=1}^{m-1} \sin^3 \dfrac{\pi (x_k - p_k)}{q_k - p_k}, & x \in \Pi, \\ 0, & x \notin \Pi. \end{cases}$$

Очевидно, $u_\delta \in D_L$. Простые вычисления показывают, что при достаточно малых δ

$$(Lu_\delta,\ u_\delta) = O\left(\delta^6 \int\limits_0^\delta \psi(x_m)\, dx\right) + O(\delta^{\beta+5}) = o(\delta^7); \qquad \| u_\delta \|^2 \geqslant k\delta^7,$$

где k — положительная постоянная, которая не зависит от δ. Отсюда

$$\frac{(Lu_\delta,\ u_\delta)}{\| u_\delta \|^2} = o(1) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

и точная нижняя граница отношения (3) равна нулю.

Теорема 2. *Задача* (18)—(19) § 28 *имеет решение с конечной энергией тогда и только тогда, когда*:

1) $f(P) = \operatorname{div} \mathbf{g}(P)$ [1];

2) *для любой функции* $u \in D_L$ *справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_{\Omega} u(P) f(P)\, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \operatorname{grad} u\, d\Omega; \tag{5}$$

[1]) Дивергенцию $\operatorname{div} \mathbf{g}$ можно здесь понимать как обобщенную (§ 35); таким образом, если $\varphi(P)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая в $\overline{\Omega}$ функция, которая тождественно равна нулю в некоторой окрестности границы области Ω, то справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\, \varphi(P)\, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \mathbf{g}(P) \cdot \operatorname{grad} \varphi(P)\, d\Omega.$$

3) *сходится интеграл*

$$\int_\Omega \mathbf{g} \cdot A^{-1}\mathbf{g}\, d\Omega, \tag{6}$$

в котором матрица $A = \| A_{jk} \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$.

Если обозначить $A^{-1}\mathbf{g} = \boldsymbol{\varphi}$, то условие 3) можно сформулировать так: сходится интеграл

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} g_k \varphi_k \, d\Omega,$$

где φ_k определены из системы

$$\sum_{k=1}^{m} A_{jk}\varphi_k = g_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Необходимость. Если решение $u_0(P)$ с конечной энергией существует, то можно положить

$$g_j = -\sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k}.$$

При этом $\varphi_k = -\frac{\partial u_0}{\partial x_k}$. Формула (5) совпадает с формулой энергетического произведения функций u и u_0; она верна, так как $u_0 \in H_L$ и $u \in D_L$ [1]). Интеграл (6) сходится, так как

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} g_k\varphi_k \, d\Omega = \int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\Omega = |u_0|^2 < \infty.$$

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены, и $u \in D_L$. По формуле (5),

$$(u,\ f) = \int_\Omega uf \, d\Omega = \int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{g}\, d\Omega = -\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} g_k \, d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\varphi_j \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega.$$

Квадратичный функционал

$$\int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\psi_j\psi_k \, d\Omega$$

---

[1]) См. книгу автора [11], § 5.

неотрицателен, и для него верно неравенство Коши — Буняковского. Отсюда

$$|(u, f)| \leqslant \left\{ \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \varphi_j \varphi_k \, d\Omega \right\}^{1/2} = $$
$$= |u| \left\{ \int_\Omega \sum_{k=1}^m g_k \varphi_k \, d\Omega \right\}^{1/2}.$$

Последнее неравенство показывает, что функционал (u, f), заданный на множестве D_L, ограничен в энергетическом пространстве; отсюда вытекает существование решения с конечной энергией.

Теорема 3. *Задача* (18)—(19) § 28 *имеет решение с конечной энергией, если* $f(P) = 0$ *при* $x_m < \delta$, *где* δ — *положительная постоянная, и*

$$C^2 = \int_\Omega f^2(P)\, d\Omega < \infty.$$

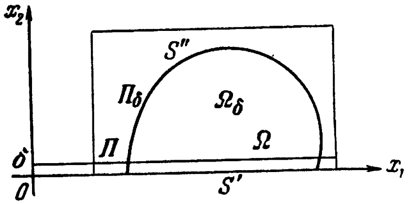

Рис. 12.

Пусть $u \in D_L$. Тогда во всяком случае $u|_{S''} = 0$ и существуют непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k}$. Поместим область Ω внутрь параллелепипеда П (на рис. 12 изображен случай двух измерений). Доопределим функцию $u(P)$, положив ее равной нулю вне Ω. Тогда она будет непрерывной в П; ее первые производные в П терпят разрыв первого рода на поверхности S''.

Имеем

$$|(u, f)|^2 = \left| \int_\Omega u(P) f(P)\, d\Omega \right|^2 = \left| \int_{\Omega_\delta} u(P) f(P)\, d\Omega \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Omega_\delta} f^2(P)\, d\Omega \int_\Omega u^2(P)\, d\Omega = C^2 \int_{П_\delta} u^2(P)\, d\Omega;$$

через Ω_δ и $П_\delta$ соответственно обозначены части областей Ω и П, в которых $x_m > \delta$.

Пользуясь тем, что на верхней грани параллелепипеда П $u(P) = 0$, и применяя те же рассуждения, что и при выводе неравенства Фридрихса (§ 24), найдем, что

$$\int_{П_\delta} u^2(P)\, d\Omega \leqslant c_1' \int_{П_\delta} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = c_1' \int_{\Omega_\delta} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega; \qquad c_1' = \text{const}.$$

В области Ω_δ уравнение (18) § 28 не вырождается; существует, следовательно, такая положительная постоянная $\mu_0 > 0$, что

$$\sum_{j,\,k=1}^{m-1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2; \qquad x_m \geqslant \delta.$$

Теперь

$$\int\limits_{\Pi_\delta} u^2(P)\,d\Omega \leqslant \frac{c_1'}{\mu_0}\int\limits_{\Omega_\delta}\left\{\sum_{j,\,k=1}^{m-1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2\right\}d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1'}{\mu_0}\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{j,\,k=1}^{m-1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right\}d\Omega = \frac{c_1'}{\mu_0}|u|^2.$$

Окончательно

$$|(u,f)| \leqslant c\sqrt{\frac{c_1'}{\mu_0}}\,|u|,$$

заданный на D_L функционал (u, f) ограничен в энергетическом пространстве, и решение с конечной энергией существует.

Замечание. При некоторых дополнительных условиях для существования решения с конечной энергией достаточно потребовать, чтобы при $x_m \to 0$ функция $f(P)$ с некоторой определенной скоростью стремилась к нулю. См. книгу автора [26].

§ 37. Пластинка переменной толщины с острым краем

С естественными изменениями результаты предшествующего параграфа можно распространить на вырождающиеся уравнения более высоких порядков. Проиллюстрируем это на примере упругой пластинки переменной толщины[1].

Как обычно, за плоскость (x, y) примем серединную плоскость пластинки; через S обозначим область, вырезанную пластинкой из плоскости (x, y). Толщину пластинки в точке (x, y) обозначим через $2h(x, y)$, интенсивность нормальной нагрузки — через $q(x, y)$, прогиб пластинки — через $w(x, y)$. Принимая гипотезы Кирхгофа, найдем, как и в § 30, следующее выражение потенциальной энергии деформации пластинки:

$$W = \frac{E}{24(1-\sigma^2)}\iint\limits_S h^3\left[w_{xx}^2+2\sigma w_{xx}w_{yy}+w_{yy}^2+2(1-\sigma)\,w_{xy}^2\right]dx\,dy; \tag{1}$$

[1]) См. Е. В. Маховер [1].

здесь E — модуль Юнга, σ — постоянная Пуассона; индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Обычными средствами вариационного исчисления (ср. § 30) выводится дифференциальное уравнение равновесия упругой пластинки переменной толщины:

$$(h^3 w_{xx})_{xx} + \sigma (h^3 w_{yy})_{xx} + \sigma (h^3 w_{xx})_{yy} + (h^3 w_{yy})_{yy} + 2(1-\sigma)(h^3 w_{xy})_{xy} = \\ = p(x, y) = \frac{12(1-\sigma^2)}{E} q(x, y). \quad (2)$$

Выражение в левой части уравнения (2) обозначим для краткости через $J(w)$.

Примем, что область S расположена в верхней полуплоскости и что часть L' контура этой области лежит на оси x (рис. 13). Допустим, что $h(x, y)$ удовлетворяет неравенствам

$$c_1 y^\alpha \leqslant h(x, y) \leqslant c_2 y^\alpha; \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0, \quad (3)$$

так что на L' толщина пластинки равна нулю; будем называть L' *острым краем* пластинки. Пусть остальная часть контура, L'', жестко закреплена, так что

$$w\,|_{L''} = \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{L''} = 0. \quad (4)$$

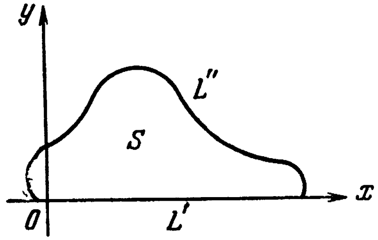

Рис. 13.

Условия на остром крае мы сформулируем несколько ниже; пока же подчиним их такому требованию: если интеграл

$$\iint_S wJ(w)\,dx\,dy$$

дважды взять по частям, то контурные интегралы должны исчезнуть.

Дифференциальное выражение $J(w)$ будем рассматривать, предполагая, что w удовлетворяет условиям (4) и что в замкнутой области $\bar{S} = S + L' + S''$ функции

$$w,\ w_x,\ w_y,\ h^{3/2} w_{xx},\ h^{3/2} w_{xy},\ h^{3/2} w_{yy},\ (h^3 w_{xx})_x,\ (h^3 w_{xx})_y,\ \ldots \\ \ldots,\ (h^3 w_{yy})_y,\ (h^3 w_{xx})_{xx},\ \ldots,\ (h^3 w_{yy})_{yy} \quad (5)$$

непрерывны.

Составим интеграл

$$(J(w), w) = \iint_S wJ(w)\,dx\,dy = \iint_S w\,\{(h^3 w_{xx})_{xx} + \sigma (h^3 w_{yy})_{xx} + \\ + \sigma (h^3 w_{xx})_{yy} + (h^3 w_{yy})_{yy} + 2(1-\sigma)(h^3 w_{xy})_{xy}\}\,dx\,dy.$$

Взяв его один раз по частям и приняв во внимание, что контурный интеграл по L'' исчезнет в силу условий (4), получим

$$(J(w),\ w) = -\iint_S \{w_x (h^3 w_{xx})_x + \sigma w_x (h^3 w_{yy})_x + \sigma w_y (h^3 w_{xx})_y + \\ + w_y (h^3 w_{yy})_y + (1-\sigma)[w_x (h^3 w_{xy})_y + w_y (h^3 w_{xy})_x]\}\, dx\, dy - \\ - \int_{L'} w(x,\ 0)\{\sigma p_1(x) + p_2(x) + (1-\sigma) p_3(x)\}\, dx. \qquad (6)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$p_1(x) = \lim_{y\to 0} (h^3 w_{xx})_y, \qquad p_2(x) = \lim_{y\to 0} (h^3 w_{yy})_y, \qquad p_3(x) = \lim_{y\to 0} (h^3 w_{xy})_x.$$

Простой анализ показывает, что если в неравенстве (3) $\alpha \geqslant {}^2/_3$, то $p_1(x) = p_2(x) = p_3(x) \equiv 0$; если $\alpha \geqslant {}^1/_3$, то $p_1(x) = p_3(x) \equiv 0$, а $p_2(x)$ произвольна; если $\alpha < {}^1/_3$, то $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ произвольны. Поясним это на примере функции $p_2(x)$. Пусть $x_0 \in L'$ и $p(x_0) = a \neq 0$. Для определенности пусть $a > 0$. Тогда при y, достаточно малых, справедливо неравенство $(h^3 w_{yy})_y > a/2$. Интегрируя, находим

$$h^3 w_{yy}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y>0}} > ay/2.$$

Деля на h^3 и используя неравенство (3), получим $w_{yy} > ay^{1-3\alpha}/2c_2$. Если $\alpha \geqslant {}^2/_3$, то, интегрируя по y, видим, что $w_y \xrightarrow[y\to 0]{} \infty$, вопреки предположению; если же $\alpha < {}^2/_3$, то w_y может быть и ограниченным.

Если $\alpha \geqslant {}^2/_3$, то в тождестве (6) интеграл по L' исчезает; при этом на функцию w на L' не надо накладывать никаких условий; если же $\alpha < {}^2/_3$, то поставим условие

$$w\big|_{L'} = 0. \qquad (7)$$

В обоих случаях

$$(J(w),\ w) = -\iint_S \{w_x (h^3 w_{xx})_x + \sigma w_x (h^3 w_{yy})_x + \sigma w_y (h^3 w_{xx})_y + \\ + w_y (h^3 w_{yy})_y + (1-\sigma)[w_x (h^3 w_{xy})_y + w_y (h^3 w_{xy})_x]\}\, dx\, dy.$$

Последний интеграл опять возьмем по частям. Анализ, аналогичный проведенному выше, показывает следующее: контурный интеграл, полученный в результате интегрирования по частям, исчезает, если $\alpha \geqslant {}^1/_3$; если $\alpha < {}^1/_3$, то для этого надо дополнительно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{L'} = 0. \qquad (8)$$

И в том, и в другом случае

$$(J(w),\ w)=\iint\limits_S h^3\left[w_{xx}^2+2\sigma w_{xx}w_{yy}+w_{yy}^2+2(1-\sigma)\,w_{xy}^2\right]dx\,dy. \qquad (9)$$

Выражение $J(w)$ будем теперь рассматривать как оператор, действующий в пространстве $L_2(S)$; его область определения D_J есть множество функций $w(x, y)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) функции (5) непрерывны в замкнутой области;
2) выполнены краевые условия (4);
3) если $\alpha < 2/3$, то выполнено условие (7);
4) если $\alpha < 1/3$, то выполнено условие (8).

Легко проверить, что оператор J симметричен; из формулы (9), очевидно, вытекает также, что он положителен.

Теорема 1. *Если $\alpha > 4/3$, то оператор J только положителен.*

Вырежем из области S прямоугольник П, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$, и положим

$$w_\delta(x, y)=\begin{cases}(\delta-y)^5\sin^5\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}, & (x,\ y)\in \Pi,\\ 0, & (x,\ y)\notin \Pi.\end{cases}$$

Очевидно, $w_\delta \in D_J$. Простой подсчет показывает, что

$$\frac{(J(w_\delta),\ w_\delta)}{\|w_\delta\|^2}=O\left(\delta^{3\alpha-4}\right)$$

и, следовательно, при $\alpha > 4/3$ оператор J только положителен.

Теорема 2. *Если $\alpha \leqslant 4/3$, то оператор J положительно определенный.*

Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма 1[1]). *Пусть функция $u(t)$ вещественной переменной t удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$u(t)$ и $u'(t)$ абсолютно непрерывны на сегменте* $[0, 1]$;
2) $t^2u''(t) \in L_2(0, 1)$;
3) $u(1) = u'(1) = 0$.

Тогда

$$\int_0^1 t^4(u'')^2\,dt \geqslant \frac{9}{16}\int_0^1 u^2\,dt. \qquad (10)$$

[1]) См. статью Л. Б. Стефановой [1], где получено более общее неравенство.

Пусть функция $v(t)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[0, 1]$, $v(1) = 0$ и $tv'(t) \in L_2(0, 1)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 (4t^2(v')^2 - v^2)\,dt = \int_0^1 (2tv' + v)^2\,dt - \int_0^1 (4tvv' + 2v^2)\,dt.$$

Первый интеграл справа неотрицателен, а второй, как легко видеть, равен нулю. Отсюда

$$\int_0^1 t^2(v')^2\,dt \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 v^2\,dt. \tag{11}$$

Положим в неравенстве (11) $v = tu'$:

$$\int_0^1 t^2[(tu')']^2\,dt \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 t^2(u')^2\,dt.$$

Далее,

$$\int_0^1 t^2[(tu')']^2\,dt = \int_0^1 t^4(u'')^2\,dt + 2\int_0^1 t^3u'u''\,dt + \int_0^1 t^2(u')^2\,dt,$$

или если второй интеграл взять по частям, то

$$\int_0^1 t^2[(tu')']^2\,dt = \int_0^1 t^4(u'')^2\,dt - 2\int_0^1 t^2(u')^2\,dt.$$

Отсюда

$$\int_0^1 t^4(u'')^2\,dt \geqslant \frac{9}{4}\int_0^1 t^2(u')^2\,dt.$$

Неравенство (11), очевидно, верно и для функции $u(t)$, и это приводит к соотношению (10).

Перейдем к доказательству теоремы 2. Область S поместим в прямоугольник П, одна из сторон которого лежит на оси x. За единицу длины выберем длину вертикальной стороны прямоугольника П, который, следовательно, определяется неравенствами вида

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Ограничимся случаем, когда $\sigma > 0$ — этому ограничению удовлетворяют все известные упругие среды. По формуле (9) имеем

$$(J(w),\ w) = \iint_S h^3\left[\sigma(\Delta w)^2 + (1-\sigma)\left(w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2\right)\right] dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant (1-\sigma)\iint_S h^3 w_{yy}^2\,dx\,dy.$$

Воспользовавшись неравенствами (3) и приняв во внимание, что $\alpha \leqslant {}^4/_3$, получим

$$(J(w),\ w) \geqslant c_2(1-\sigma)\iint_S y^{3\alpha} w_{yy}^2\,dx\,dy \geqslant c_2(1-\sigma)\iint_S y^4 w_{yy}^2\,dx\,dy.$$

Доопределим функцию w, положив ее равной нулю вне S. Тогда последнему соотношению можно придать вид

$$(J(w),\ w) \geqslant c_2(1-\sigma)\int_a^b \int_0^1 y^4 w_{yy}^2\,dx\,dy. \tag{12}$$

Функция w удовлетворяет условиям последней леммы; по формуле (10)

$$\int_0^1 y^4 w_{yy}^2\,dy \geqslant \frac{9}{16}\int_0^1 w^2\,dy.$$

Проинтегрируем это неравенство по x в пределах от a до b. Воспользовавшись соотношением (12), найдем

$$(J(w),\ w) \geqslant \gamma^2 \iint_\Pi w^2\,dx\,dy = \gamma^2 \iint_S w^2\,dx\,dy = \gamma^2 \| w \|^2;$$

$$\gamma^2 = \frac{9}{16}\,c_2(1-\sigma).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $q(x, y) = 0$ при $y > \delta$, где δ — положительная постоянная, то задача о равновесии пластинки с острым краем имеет решение с конечной энергией.*

Доказательство такое же, как в теореме 3 § 36.

ГЛАВА VI
ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

§ 38. Задача о собственных числах; ее связь с задачами о собственных колебаниях и об устойчивости системы

Коротко напомним понятия собственных чисел и собственных элементов уравнения или оператора. Пусть дано уравнение

$$Au - \lambda Bu = 0, \tag{1}$$

где A и B — некоторые линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, а λ — численный множитель. Элемент $u = 0$, удовлетворяющий уравнению (1) при любом λ, называется *тривиальным решением* этого уравнения. Значения λ, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от нулевого) решения уравнения (1), называются его *собственными числами*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными элементами, соответствующими* (или *отвечающими*) данному собственному числу.

Если пространство H функциональное, то собственные элементы уравнения (1) называются также его *собственными функциями.*

Особенно важен случай, когда B есть тождественный оператор. Уравнение (1) тогда принимает вид

$$Au - \lambda u = 0. \tag{2}$$

Собственные числа и собственные элементы уравнения (2) называются также собственными числами и собственными элементами оператора A. Совокупность всех собственных чисел оператора называется его *собственным спектром.*

Если $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — собственные элементы уравнения (1), отвечающие одному и тому же собственному числу, а постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ таковы, что элемент $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k$ отличен от нулевого, то этот элемент собственный для уравнения (1) и отвечает тому же собственному числу. Достаточно поэтому знать только линейно независимые собственные элементы.

Число линейно независимых элементов, отвечающих данному собственному числу, называется его *рангом.* Ранг собственного числа может быть и бесконечным.

К отысканию собственных чисел и собственных функций приводят обычно задачи о собственных колебаниях механических систем. Рассмотрим для примера однородную натянутую струну длины l, которая в состоянии равновесия занимает отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$ оси x. Поперечные колебания такой струны определяются уравнением (С2, **163**)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{3}$$

Здесь $U(x, t)$ — отклонение струны от положения равновесия в точке x и в момент времени t, T — натяжение струны и ρ — ее масса на единицу длины; предполагается, что на струну не действуют никакие внешние силы, так что колебания обусловлены только начальным отклонением и начальным импульсом, сообщенными струне. Если концы струны неподвижно закреплены, то

$$U(0, t) = U(l, t) = 0. \tag{4}$$

Собственными колебаниями струны называют колебания, при которых отклонение $U(x, t)$ имеет вид

$$U(x, t) = u(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \omega t, \qquad \omega = \mathrm{const}.$$

Подставив это в (5) и (6), находим, что $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d^2u/dx^2 + \lambda u = 0, \qquad \lambda = \omega^2/a^2 = \omega^2\rho/T \tag{5}$$

и краевым условиям

$$u(0) = u(l) = 0. \tag{6}$$

По смыслу задачи $u(x) \not\equiv 0$ — в противном случае не было бы колебаний струны, и задача о собственных колебаниях струны свелась к задаче о собственных числах и собственных функциях оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ при краевых условиях (6). Если струна неоднородная, то $\rho = \rho(x)$ есть функция от x. В этом случае задача о собственных колебаниях струны приводит к тем же краевым условиям (6) и к уравнению

$$d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0, \tag{7}$$

но на этот раз $\lambda = \omega^2/T$. Уравнение (7) есть частный случай уравнения (1), в котором $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, а B есть оператор умножения на функцию $\rho(x)$; оба оператора определены для функций, обращающихся в нуль на концах струны.

Рассмотрим еще собственные колебания мембраны. Если мембрана не подвержена действию внешних сил, то уравнение ее поперечных колебаний имеет вид (С2, **176**)

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Пусть мембрана в состоянии равновесия занимает в плоскости (x, y) область Ω, ограниченную контуром S. Если край мембраны неподвижно закреплен, то

$$U|_S = 0. \tag{9}$$

Собственные колебания мембраны имеют вид

$$U(x, y, t) = u(x, y) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega t;$$

их отыскание сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad \lambda = \omega^2/a^2 \tag{10}$$

в области Ω, при краевом условии

$$u|_S = 0. \tag{11}$$

Так как необходимо $u(x, y) \not\equiv 0$, то наша задача сводится к отысканию собственных чисел и собственных функций оператора $-\Delta$ при краевом условии (11).

Известен еще один класс задач, которые также сводятся к задаче о собственных числах и собственных функциях. Это задачи об устойчивости механических систем. Мы не будем формулировать эту задачу в общем виде, а поясним ее на одном примере. Рассмотрим изгиб тонкой пластинки, на которую действуют усилия, приложенные к ее срединной плоскости и пропорциональные некоторому параметру λ; пусть эти усилия создают напряжения λT_x, λT_{xy}, λT_y. Пусть нормальная нагрузка отсутствует, и пусть, для определенности, край пластинки жестко закреплен. Прогиб пластинки определяется (см. § 31) однородным, так как $q(x, y) \equiv 0$, дифференциальным уравнением

$$\Delta^2 w - \frac{\lambda h}{D}\left[T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{12}$$

и однородными же краевыми условиями

$$w|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0. \tag{13}$$

Система уравнений (12) и (13) имеет тривиальное решение $w \equiv 0$; его наличие означает, что возможна неизогнутая форма равновесия пластинки. Если λ достаточно мало, именно [см. формулу (12) § 31] если

$$|\lambda| < CD/(2Nh), \tag{14}$$

где N — наибольший из максимумов напряжений T_x, T_{xy}, T_y, то тривиальное решение единственно и, значит, неизогнутая форма равновесия единственная; очевидно при этом, что достаточно малые изменения λ не нарушают неравенства (14) и, следовательно, не нарушают неизогнутой плоской формы равновесия, которая тем самым оказывается *устойчивой* по отношению к малым изменениям параметра λ. Если же λ не удовлетворяет неравенству (14), то не исключено, что при некоторых значениях λ, называемых *критическими*, уравнение (12) будет иметь *нетривиальное* решение, удовлетворяющее краевым условиям (13). В этом случае возможна, помимо плоской, также и изогнутая форма равновесия; при значениях λ, близких к критическому, плоская форма равновесия становится неустойчивой. В связи с этим делается важным отыскание критических значений параметра (особенно наименьшего критического значения), что в свою очередь сводится к отысканию собственных чисел уравнения (12) при краевых условиях (13).

В общем случае задачу устойчивости сводят к задаче о собственных числах линейного уравнения, исходя из нелинейных уравнений данной задачи. Строгое математическое обоснование такого приема дано в работах М. А. Красносельского [2, 3]. Для упругих систем такая постановка задачи устойчивости подробно проведена в книге В. В. Новожилова [1], который, исходя из нелинейных уравнений теории упругости, приходит к задаче о собственных числах некоторого линейного уравнения (или системы уравнений).

§ 39. Собственные числа и собственные элементы симметричного оператора

Теорема 1. *Собственные числа симметричного оператора вещественны.*

Пусть λ_0 и φ_0 суть собственное число и отвечающий ему собственный элемент симметричного оператора A. Тогда

$$A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0.$$

Умножив это скалярно на φ_0, найдем

$$\lambda_0 = (A\varphi_0, \varphi_0)/\|\varphi_0\|^2. \tag{1}$$

Оператор A симметричен, поэтому $(A\varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, A\varphi_0)$. С другой стороны, по аксиоме А (§ 2) $(\varphi_0, A\varphi_0) = (A\varphi_0, \varphi_0)$. Число $(A\varphi_0, \varphi_0)$ равно своему сопряженному и потому вещественно; по формуле (1) λ_0 вещественно.

Замечание. Собственные числа положительного, а значит, и положительно определенного оператора положительны. Это непосредственно вытекает из формулы (1).

Теорема 2. *Собственные элементы симметричного оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны между собой.*

Пусть λ_1 и λ_2 — не равные между собой собственные числа симметричного оператора A, φ_1 и φ_2 — отвечающие им собственные элементы. Тогда

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2. \tag{2}$$

Первое равенство умножим скалярно на φ_2 и второе — на φ_1. Вычитая, получим

$$(A\varphi_1, \varphi_2) - (\varphi_1, A\varphi_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2).$$

Левая часть последнего равенства равна нулю, потому что оператор A симметричен; так как еще $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Если данному собственному числу отвечают несколько собственных элементов, то их можно сделать ортогональными, пользуясь процессом ортогонализации (§ 4). Это позволяет в последующем считать без оговорок, что *совокупность всех собственных элементов симметричного оператора образует ортонормированную систему.*

Теорема 3. *Система собственных элементов положительного оператора ортогональна по энергии.*

Пусть λ_1 и φ_1 — собственное число и собственный элемент положительного оператора A так, что

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \tag{3}$$

и φ_2 — отличный от φ_1 собственный элемент того же оператора. По сказанному выше φ_1 и φ_2 ортогональны в обычном смысле: $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Умножив скалярно равенство (3) на φ_2, найдем $(A\varphi_1, \varphi_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Часто оказывается, что система собственных элементов не только ортогональна, но и полна по энергии. Тогда эту систему можно использовать, чтобы построить решение уравнения

$$Au = f \tag{4}$$

в виде ортогонального ряда, как об этом сказано в § 14.

Пусть система собственных элементов положительно определенного оператора A полна по энергии и, в соответствии со сказанным выше, ортонормирована в обычном смысле.

Обозначая через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, собственные элементы оператора A и через λ_n соответствующие собственные числа [1]), имеем

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m; \end{cases} \qquad [\varphi_m, \varphi_n] = 0, \qquad n \neq m, \quad A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Умножив скалярно последнее равенство на φ_n, получим еще

$$(A\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = \lambda_n. \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что элементы φ_n по энергии не нормированы. Положив $\psi_n = \varphi_n / \sqrt{\lambda_n}$ получим систему элементов, ортонормированную по энергии и по предположению полную по энергии. В соответствии с формулой (6) § 14 решение уравнения (4) можно представить в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n)\, \psi_n$$

или, заменяя ψ_n ее выражением через φ_n,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n. \tag{6}$$

Разложение (6) в ряд по собственным элементам данного оператора имеет одно преимущество перед общим рядом (6) § 14. Сохраним в каком-либо из этих рядов только N первых членов и обозначим полученную таким образом конечную сумму через u_N. Если подставить u_N в уравнение (4), то, вообще говоря, левая его часть не будет близка к правой; точнее говоря, в общем случае нельзя утверждать [2]), что $Au_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f$. Но если исходить из ряда (6) и положить

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n,$$

то $Au_N \to f$. Доказательство основано на следующем утверждении: если оператор положительно определенный и некоторая система полна в энергетическом пространстве этого оператора, то она полна и в исходном гильбертовом пространстве [3]). Это утверждение применимо к системе φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, собственных

---

[1]) Если одному и тому же собственному числу отвечает несколько собственных элементов, то среди чисел λ_n будут встречаться равные между собой.

[2]) См. ниже, стр. 219, п. 5.

[3]) Там же, § 12, стр. 58.

элементов, которая, по предположению, полна в энергетическом пространстве. Так как эта система еще и ортонормирована, то любой элемент исходного пространства разлагается в соответствующий ортогональный ряд. В частности,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

С другой стороны,

$$Au_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} A\varphi_n.$$

Но φ_n есть собственная функция оператора A, отвечающая собственному числу λ_n, поэтому $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ и

$$Au_N = \sum_{n=1}^{N} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

Отсюда следует, что $Au_N \to f$. Таким образом, если построить приближенное решение уравнения (4), исходя из ряда (6), то при достаточно большом N это приближенное решение удовлетворяет в среднем уравнению (4) с любой наперед заданной степенью точности.

§ 40. Энергетические теоремы в проблеме собственных чисел

Проблема собственных значений при известных условиях может быть сведена к некоторой вариационной задаче. Пусть симметричный оператор A удовлетворяет неравенству

$$(Au, u) \geqslant k \| u \|^2, \tag{1}$$

где k — некоторое вещественное число, необязательно положительное; такой оператор называется *ограниченным снизу*. В частности, ограничен снизу всякий положительный оператор, так как он удовлетворяет неравенству (1) при $k = 0$.

Если A — ограниченный снизу оператор, то $(Au, u)/(u, u) \geqslant k$. Величина $(Au, u)/(u, u)$, будучи ограниченной снизу, имеет нижнюю грань d. Очевидно, $d \geqslant k$.

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный снизу симметричный оператор, и пусть d означает точную нижнюю границу значений функционала*

$$(Au, u)/(u, u). \tag{2}$$

Если существует элемент $u_0 \in D_A$ такой, что

$$(Au_0, u_0)/(u_0, u_0) = d, \tag{3}$$

то d есть наименьшее собственное число оператора A, а u_0 — соответствующий собственный элемент.

Пусть η — произвольный элемент из области D_A и t — произвольное вещественное число. Функция вещественной переменной t

$$\varphi(t) = \frac{(A(u_0 + t\eta), u_0 + t\eta)}{(u_0 + t\eta, u_0 + t\eta)} = \frac{t^2(A\eta, \eta) + 2t(Au_0, \eta) + (Au_0, u_0)}{t^2(\eta, \eta) + 2t(u_0, \eta) + (u_0, u_0)}$$

достигает минимума при $t = 0$. Но тогда $\varphi'(0) = 0$. Вычисляя $\varphi'(0)$, легко придем к уравнению

$$(u_0, u_0)(Au_0, \eta) - (Au_0, u_0)(u_0, \eta) = 0,$$

или, если воспользоваться равенством (3),

$$(Au_0 - du_0, \eta) = 0. \tag{4}$$

Множество D_A плотно в исходном гильбертовом пространстве, и из формулы (4) следует, что $Au_0 - du_0 = 0$, т. е. что d и u_0 — собственное число и собственная функция оператора A.

Что d — наименьшее собственное число оператора A, вытекает из формулы (1) § 39. Действительно, если λ_1 и u_1 — какое-либо собственное число и ему соответствующая собственная функция оператора A, то

$$\lambda_1 = (Au_1, u_1)/(u_1, u_1) \geqslant \min (Au, u)/(u, u) = d. \tag{5}$$

Доказанная здесь теорема 1 сводит задачу о нахождении наименьшего собственного числа симметричного ограниченного снизу оператора к следующей вариационной задаче: *найти элемент, реализующий минимум функционала* (2).

Дадим этой задаче еще одну формулировку, которая часто оказывается более удобной. Положим $\psi = u/\|u\|$. Тогда

$$\|\psi\| = 1$$

и

$$(Au, u)/(u, u) = (A\psi, \psi). \tag{6}$$

Заменяя опять букву ψ на u, мы можем нашу вариационную задачу сформулировать так: *найти минимум функционала*

$$(Au, u) \tag{7}$$

при дополнительном условии

$$(u, u) = 1. \tag{8}$$

Укажем теперь способ определения следующих собственных чисел

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ суть n непосредственно следующих друг за другом первых собственных чисел симметричного ограниченного снизу оператора A и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — соответствующие им ортонормированные собственные элементы. Пусть существует элемент $u = u_{n+1} \not\equiv 0$, реализующий минимум функционала* (5) *при дополнительных условиях*

$$(u, u_1) = 0, \qquad (u, u_2) = 0, \ \ldots, \ (u, u_n) = 0. \tag{9}$$

Тогда u_{n+1} есть собственный элемент оператора A, соответствующий собственному числу

$$\lambda_{n+1} = (Au_{n+1}, u_{n+1})/(u_{n+1}, u_{n+1}). \tag{10}$$

Это собственное число — ближайшее, следующее за λ_n.

Пусть ζ — произвольный элемент из области D_A определения оператора A. Положим

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, u_k) u_k.$$

Тогда ζ удовлетворяет условиям (9). Действительно,

$$(\eta, u_m) = (\zeta, u_m) - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, u_k)(u_k, u_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

По доказанному в § 39 u_k ортогональны, как собственные элементы симметричного оператора. Далее, по условию теоремы, u_k нормированы. Поэтому

$$(u_k, u_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(\eta, u_m) = (\zeta, u_m) - (\zeta, u_m) = 0.$$

Вместе с η условию (9) удовлетворяет и произведение $t\eta$, где t — любое число, а также и сумма $u_{n+1} + t\eta$. Функция от t

$$(A(u_{n+1} + t\eta), u_{n+1} + t\eta)/(u_{n+1} + t\eta, u_{n+1} + t\eta)$$

достигает минимума при $t = 0$. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, мы найдем, что

$$(Au_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \eta) = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим величину

$$(Au_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \zeta).$$

По формулам (11) и (12)

$$(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\ \zeta)=$$
$$=(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\ \eta)-\sum_{k=1}^{n}(u_k,\ \zeta)(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\ u_k)=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}(u_k,\ \zeta)(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\ u_k).$$

Далее,

$$(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\ u_k)=(Au_{n+1},\ u_k)-\lambda_{n+1}(u_{n+1},\ u_k).$$

Нетрудно видеть, что это выражение равно нулю. Действительно, второй член справа исчезает в силу условий (9). Первый же равен

$$(Au_{n+1},\ u_k)=(u_{n+1},\ Au_k).$$

Но u_k, как собственный элемент оператора A, удовлетворяет уравнению $Au_k-\lambda_k u_k=0$. Таким образом, $Au_k=\lambda_k u_k$,

$$(Au_{n+1},\ u_k)=\lambda_k(u_{n+1},\ u_k)=0.$$

Отсюда следует, что $(Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1},\zeta)=0$.

Здесь ζ — произвольный элемент плотного множества D_A, поэтому $Au_{n+1}-\lambda_{n+1}u_{n+1}=0$, т. е. λ_{n+1} есть собственное число оператора, а u_{n+1} — соответствующий собственный элемент. Остается доказать, что λ_{n+1} — наименьшее собственное число, следующее за λ_n. Пусть λ' — собственное число оператора A, большее, чем λ_n, и u' — соответствующий собственный элемент. По теореме 2 § 39 u' удовлетворяет условиям (9). Далее, по формуле (1) § 39

$$\lambda'=(Au',\ u')/(u',\ u')\geqslant\lambda_{n+1},$$

так как λ_{n+1} есть минимум функционала (4) при условиях (9).

Как и в случае наименьшего собственного числа, нахождение λ_{n+1} может быть сведено к такой вариационной задаче: *найти минимум функционала* (7) *при дополнительных условиях* (8) *и* (9).

Предшествующие теоремы носят условный характер — они дают способ построения собственных чисел, если существование их установлено другими средствами. Ниже будет сформулирована теорема, устанавливающая условия существования собственных чисел у положительно определенного оператора.

Теорема 3. *Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и пусть всякое множество элементов, ограниченное по энергетической норме, компактно в H. Тогда оператор A:*

а) *имеет бесконечное множество собственных чисел*

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots,\quad \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty;$$

б) *соответствующие собственные элементы образуют систему, полную как в H, так и в H_A.*

Доказательство. 1) Положим

$$\varphi(u) = |u|^2/\|u\|^2, \qquad u \in H_A, \tag{13}$$

и обозначим через λ_1 точную нижнюю границу функционала $\varphi(u)$. Очевидно, $\lambda_1 \geqslant \gamma^2$, где γ^2 — постоянная неравенства (11) § 8. Докажем, что существует элемент u_1, удовлетворяющий равенству $\varphi(u_1) = \lambda_1$.

По определению точной нижней границы, каково бы ни было целое положительное число n, можно найти такой элемент $v_n \in H_A$, что

$$\lambda_1 \leqslant \varphi(v_n) \leqslant \lambda_1 + 1/n.$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \lambda_1.$$

Функционал $\varphi(u)$ не изменяется при умножении u на постоянную. Умножая v_n на $\|v_n\|^{-1}$, можно считать, что $\|v_n\| = 1$. Но тогда $\varphi(v_n) = |v_n|^2$ и

$$|v_n|^2 \to \lambda_1. \tag{14}$$

Пусть теперь η — произвольный элемент из H_A и t — произвольное вещественное число. Очевидно,

$$\frac{|v_n + t\eta|^2}{\|u_n + t\eta\|^2} \geqslant \lambda_1.$$

Заменяя квадрат нормы скалярным произведением (соответственно, энергетическим произведением) и используя то, что $\|v_n\| = 1$, мы легко приведем последнее неравенство к виду

$$t^2\{|\eta|^2 - \lambda_1\|\eta\|^2\} + 2t\{[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta)\} + \{|v_n|^2 - \lambda_1\} \geqslant 0.$$

Если квадратный трехчлен не меняет знака, то его дискриминант неположителен. Отсюда

$$|[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta)| \leqslant \sqrt{|\eta|^2 - \lambda_1\|\eta\|^2}\,\sqrt{|v_n|^2 - \lambda_1} \leqslant$$
$$\leqslant |\eta|\sqrt{|v_n|^2 - \lambda_1}. \tag{15}$$

Пусть $|\eta| < c = \text{const}$, а в остальном η произвольна. Из (14) и (15) следует тогда, что

$$[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{16}$$

Так как $|v_n|^2 \to \lambda_1$, то $|v_n| < C$, где C — некоторая постоянная. Поэтому, если мы положим $\eta = v_n - v_m$, то $|\eta| \leqslant |v_n| + |v_m| < 2C$ и, в силу неравенства (16),

$$[v_n, v_n - v_m] - \lambda_1(v_n, v_n - v_m) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Меняя местами n и m и складывая, получим

$$|v_n - v_m|^2 - \lambda_1 \| v_n - v_m \|^2 \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0. \tag{17}$$

Неравенство $|v_n| < C$ означает, что последовательность v_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена по энергетической норме. По условию теоремы эта последовательность компактна в H. Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в H; чтобы не вводить новых символов, обозначим эту подпоследовательность по-прежнему через v_n. Пусть $\|v_n - u_1\| \to 0$. Тогда $\| v_n - v_m \| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0$. Из (17) следует, что $|v_n - v_m| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0$. Но это означает, что последовательность v_n сходится к некоторому пределу и в H_A. Очевидно, что этот предел также равен u_1, так что $|v_n - u_1| \to 0$. Очевидно также, что $\| u_1 \| = \lim\limits_{n \to \infty} \| v_n \| = 1$ и $|u_1| = \lim\limits_{n \to \infty} |v_n| = \lambda_1$, так что $\varphi(u_1) = \lambda_1$.

Докажем теперь, что $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Переходя в (16) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$[u_1, \eta] - \lambda_1 (u_1, \eta) = 0, \qquad \eta \in D_A. \tag{18}$$

Найдем элемент, реализующий минимум функционала

$$[u, u] - 2(u, \lambda_1 u_1). \tag{19}$$

Как мы знаем, такой элемент является решением (может быть, обобщенным) уравнения $Au = \lambda_1 u_1$. Из равенства (18), в котором мы заменим букву η на u, следует, что последний функционал равен

$$[u, u] - 2[u, u_1] = |u - u_1|^2 - |u_1|^2.$$

Отсюда ясно, что минимум этого функционала реализует элемент u_1. Но тогда, как только что было отмечено, этот элемент удовлетворяет уравнению $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Тем самым доказано, что λ_1 и u_1 суть собственное число и собственный элемент оператора A. Из теоремы 1 следует, что λ_1 есть его наименьшее собственное число.

2) Обозначим теперь через λ_2 точную нижнюю границу функционала $\varphi(u)$ при дополнительном условии $(u, u_1) = 0$. Поскольку это условие сужает класс элементов, на которых ищется минимум, то $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Повторяя с некоторыми изменениями предшествующие рассуждения, найдем, что λ_2 есть второе собственное число оператора A и что этому числу отвечает нормированный собственный элемент u_2, ортогональный к u_1. Продолжая этот процесс, построим возрастающую последовательность собственных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, которые, очевидно, положительны, и соответствующую им ортонормированную последовательность собственных элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

3) Докажем, что $\lambda_n \to \infty$. Допустим противное, и пусть $\lambda_n \leqslant C = \text{const}$. По формуле (5) § 39 $|u_n| = \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{C}$, т. е. собственные элементы ограничены в совокупности в H_A. По условию теоремы последовательность собственных элементов тогда компактна в H и из нее можно выделить сходящуюся в H подпоследовательность u_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\lim_{k, l \to \infty} \|u_{n_k} - u_{n_l}\|^2 = 0.$$

Это, однако, невозможно, потому что собственные элементы в H ортонормированы и, следовательно,

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|^2 = (u_{n_k} - u_{n_l},\ u_{n_k} - u_{n_l}) = \|u_{n_k}\|^2 - 2(u_{n_k},\ u_{n_l}) + \|u_{n_l}\|^2 = 2.$$

4) Система собственных элементов $\{u_n\}$ полна в H_A. Чтобы в этом убедиться, заметим, что коль скоро собственные элементы ортогональны в H_A (теорема 3 § 39), то λ_n можно определить как точную нижнюю границу функционала $\varphi(u)$ на множестве элементов, удовлетворяющих условиям

$$[u,\ u_1] = 0,\ [u,\ u_2] = 0,\ \ldots,\ [u,\ u_{n-1}] = 0.$$

Если бы наша система была неполна в H_A, то нашлись бы элементы пространства H_A, отличные от нулевого и ортогональные в H_A ко всем u_n. Обозначая через $\bar{\lambda}$ точную нижнюю границу $\varphi(u)$ на указанных элементах, мы нашли бы, что $\bar{\lambda}$ — собственное число оператора A, большее, чем все λ_n. Последнее невозможно, потому что $\lambda_n \to \infty$.

5) Докажем теперь, что система собственных элементов u_n, $n = 1, 2, \ldots$, полна в исходном гильбертовом пространстве H. Множество элементов энергетического пространства H_A шире, чем множество D_A, которое плотно в H. Отсюда следует, что множество элементов энергетического пространства плотно в H. Имея это в виду, возьмем произвольный элемент $f \in H$ и подберем элемент $g \in H_A$ так, чтобы $\|f - g\| < \varepsilon/2$, где ε — произвольно заданное положительное число. Элемент g аппроксимируем суммой $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ так, чтобы $|g - (a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots$ $\ldots + a_nu_n)| < \varepsilon\gamma/2$, где γ — постоянная неравенства (11) § 8. Теперь

$$\|f - (a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n)\| < \|f - g\| + \left\|g - \sum_{i=1}^{n} a_iu_i\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - g\| + \frac{1}{\gamma}\left|g - \sum_{i=1}^{n} a_iu_i\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Определение. *Если оператор обладает свойствами* а) *и* б) *теоремы* 3, *то говорят, что он имеет дискретный спектр.*

Теорему 3 можно теперь сформулировать так:

Если положительно определенный оператор таков, что любое множество, ограниченное по энергетической норме, компактно в исходном пространстве, то спектр этого оператора дискретен.

Замечание. Теорема 3 верна и тогда, когда об операторе A известно только, что он положителен. Чтобы доказать это, нам достаточно будет установить, что из условия теоремы вытекает положительная определенность оператора A. Допустим противное, и пусть A только положителен. Тогда существует последовательность элементов $u_n \in D_A \subset H$ со свойствами

$$|u_n|_A \to 0, \qquad \|u_n\| = 1.$$

Последовательность чисел $|u_n|_A$, имеющая предел, ограничена. По условию теоремы последовательность $\{u_n\}$ компактна в H, и существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такая, что

$$|u_{n_k}|_A \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \|u_{n_k} - u_{n_l}\| \xrightarrow[k,\, l\to\infty]{} 0.$$

Как об этом сказано в начале § 10, $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = 0$. Это, однако, невозможно, потому что

$$\left\| \lim_{k\to\infty} u_{n_k} \right\| = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\| = 1.$$

Справедлива теорема, обратная теореме 3:

Теорема 4. *Если положительный оператор имеет дискретный спектр, то любое множество, ограниченное по энергетической норме данного оператора, компактно в исходном пространстве.*

Пусть A — данный оператор, λ_n и u_n, $n = 1, 2, \ldots$, — его собственные числа и соответствующие им собственные элементы, которые мы, как обычно, считаем ортонормированными в исходном пространстве H. Система $\{u_n\}$ полна в H, поэтому любой элемент $u \in H$ разлагается в ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n. \tag{20}$$

Если при этом $u \in D_A$, то

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au, u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, Au_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, u_n) u_n. \tag{21}$$

Отсюда

$$(Au, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, u_n)^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)^2 = \lambda_1 \|u\|^2. \tag{22}$$

Собственные числа положительного оператора положительны (см. § 39), и неравенство (22) показывает, что оператор A на самом деле положительно определенный.

Если $u \in H_A$, то равенство (20), переписанное в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\,(u,\ u_n)\, u_n / \sqrt{\lambda_n},$$

представляет собой разложение элемента $u \in H_A$ в ряд по системе $\{u_n / \sqrt{\lambda_n}\}$, ортонормированной в H_A. Отсюда, между прочим, следует, что

$$\sqrt{\lambda_n}\,(u,\ u_n) = [u,\ u_n / \sqrt{\lambda_n}]$$

и

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u,\ u_n)^2. \tag{23}$$

Пусть теперь $M \subset H_A$ — множество, ограниченное по энергетической норме:

$$|u| \leqslant C = \text{const}, \qquad u \in M.$$

Тождество (23) показывает, что одновременно ограничены и множества чисел $(u, u_n)^2$:

$$(u,\ u_n)^2 \leqslant C^2/\lambda_1. \tag{24}$$

По теореме Больцано — Вейерштрасса[1]) из множества M можно выделить такую последовательность, обозначим ее $\{u^{1k}\}$, чтобы существовал предел

$$a_1 = \lim_{k \to \infty} (u^{1k},\ u_1).$$

Из последовательности $\{u^{1k}\}$ выделим подпоследовательность $\{u^{2k}\}$ так, чтобы существовал предел

$$a_2 = \lim_{k \to \infty} (u^{2k},\ u_2)$$

и т. д. Составим теперь «диагональную» последовательность $\{u^{kk}\}$ и докажем, что она сходится в H. Легко видеть, что при любом n существует предел

$$\lim_{k \to \infty} (u^{kk},\ u_n) = a_n.$$

---

[1]) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], гл. III, § 5.

Обозначим $\sqrt{\lambda_n}\,(u^{kk}, u_n) = \alpha_n^{(k)}$. Имеем

$$\| u^{kk} - u^{ll} \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2.$$

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем N столь большим, чтобы

$$1/\lambda_{N+1} < \varepsilon^2/(8C^2).$$

Тогда

$$\frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8C^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{8C^2} \left| u^{kk} - u^{ll} \right|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

При любом n существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_n^{(k)} = a_n / \sqrt{\lambda_n},$$

и остается выбрать число $k_0(\varepsilon)$ столь большим, чтобы при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ и $l \geqslant k_0(\varepsilon)$ было

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \left(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Теперь

$$\| u^{kk} - u^{ll} \| < \varepsilon, \qquad k, l \geqslant k_0(\varepsilon),$$

и последовательность $\{u^{kk}\}$ сходится в H. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если A — положительно определенный оператор с дискретным спектром, то обратный ему оператор $G = A^{-1}$ вполне непрерывен.*

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — ортонормированные собственные элементы оператора A и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — соответствующие им собственные числа. Напомним, что $\lambda_n \to \infty$, если $n \to \infty$. Пусть $Au = f$, тогда $u = Gf$. По формуле (6) § 39

$$Gf = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k.$$

Положим

$$G'f = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \qquad G''f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k,$$

так что $G = G' + G''$. Оператор G' — вырожденный, и нам достаточно доказать, что норма оператора G'' может быть сделана сколь угодно малой.

Элементы φ_k ортонормированы, поэтому

$$\| G''f \|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k^2}. \tag{25}$$

Как обычно, считаем, что собственные числа расположены в порядке возрастания. В ряде (25) заменим λ_k наименьшим из них λ_{n+1}, что приведет к неравенству

$$\| G''f \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2,$$

или, если воспользоваться неравенством Бесселя,

$$\| G''f \| \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \| f \|.$$

В этом соотношении знак равенства достигается при $f = \varphi_{n+1}$, и постоянную $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ нельзя заменить меньшей. По определению нормы оператора $\| G'' \| = \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, что сколь угодно мало при n достаточно большом.

§ 41. Минимаксимальный принцип[1])

1. Пусть A — положительно определенный оператор с дискретным спектром, действующий в некотором гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные числа оператора A, расположенные в порядке возрастания, и через $u_1, u_2, \ldots, u_n$ соответствующие собственные элементы, ортонормированные в H. По определению дискретного спектра система $\{u_n\}$ полна в H, поэтому если u — любой элемент пространства H, то его можно разложить в ортогональный ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \qquad a_n = (u, u_n). \tag{1}$$

Если одновременно $u \in H_A$, то по формуле (23) § 40

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \tag{2}$$

[1]) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт [1].

Формула (2) является основой для нового способа вычисления чисел λ_n. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ — произвольные элементы пространства H. Обозначим через $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ нижнюю грань функционала $|u|^2$ при условиях

$$\| u \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{3}$$

и

$$(u, v_1) = (u, v_2) = \ldots = (u, v_{k-1}) = 0. \tag{4}$$

Докажем, что

$$\lambda (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqslant \lambda_k \tag{5}$$

и что знак равенства в (5) достигается при некотором специальном выборе элементов $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$.

Разложим $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ по элементам u_n

$$v_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} u_n, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6}$$

Условия (4) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} a_n = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{7}$$

Возьмем элемент $\bar{u}$ вида

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n. \tag{8}$$

Для такого элемента условия (7) приводятся к однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{k} b_{in} a_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{9}$$

относительно неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_k$, в которой число $k-1$ уравнений меньше числа k неизвестных. Как хорошо известно, такая система имеет бесчисленное множество решений, из которых по крайней мере одно можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{k} a_n^2 = 1,$$

тогда $\|\bar{u}\| = 1$. При этом, в силу соотношений (2),

$$| \bar{u} |^2 = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2.$$

Заменяя здесь все λ_n наибольшим из них λ_k, получим

$$|\bar{u}|^2 \leqslant \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_n^2 = \lambda_k.$$

Таким образом, при некотором выборе элемента $u \in H_A$, удовлетворяющего условиям (3) и (4), а именно при $u = \bar{u}$, имеем $|u|^2 \leqslant \lambda_k$. Но тогда и нижняя грань величины $|u|^2$ при упомянутых условиях также не превосходит λ_k. Этим доказано, что $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqslant \lambda_k$.

Легко доказать, что знак равенства достигается. Действительно, достаточно положить $v_i = \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, тогда условия (6) переходят в условия (9) § 40, с помощью которых и определяется число λ_k.

Из сказанного вытекает способ определения собственных чисел, известный под названием *минимаксимального принципа*: *k-е собственное число λ_k положительно определенного оператора с дискретным спектром равно максимуму величины $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ при всевозможных изменениях элементов $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$.* В свою очередь $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ есть нижняя грань величины $|u|^2$ при условиях (4) и (5).

2. Пусть A и B — положительно определенные операторы, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$, если любой элемент энергетического пространства H_A принадлежит также пространству H_B и справедливо неравенство $|u|_A \geqslant |u|_B$, $u \in H_A$.

Теорема 1. *Пусть A и B — положительно определенные операторы, и пусть $A \geqslant B$ и спектры обоих операторов дискретны. Тогда, при любом k, k-е собственное число оператора B не превосходит k-го собственного числа оператора A.*

Обозначим через λ_k и μ_k собственные числа операторов A и B соответственно. Далее, через $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ и $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ обозначим минимумы величин $|u|_A^2$ и $|u|_B^2$ при условиях (3) и (4).

Соотношение $A \geqslant B$ означает, что для любого элемента $u \in H_A$ справедливо неравенство $|u|_A \geqslant |u|_B$; это неравенство останется справедливым, если мы дополнительно подчиним элемент u условиям (3) и (4). Но тогда, очевидно, и минимумы величин $|u|_A^2$ и $|u|_B^2$ связаны тем же неравенством, т. е.

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqslant \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}).$$

Отсюда следует, что и

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqslant \max \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}),$$

или, что то же, $\lambda_k \geqslant \mu_k$.

Поясним нашу теорему примером. Пусть даны две упругие пластинки из одинакового материала и одинаковой толщины, жестко закрепленные по своим краям. Обозначим через S_1 и S_2 основания пластинок и допустим, что S_1 целиком укладывается в S_2 (рис. 14); обозначим еще через L_1 и L_2 контуры областей S_1 и S_2. Далее, пусть A означает бигармонический оператор, определенный на функциях, удовлетворяющих краевым условиям

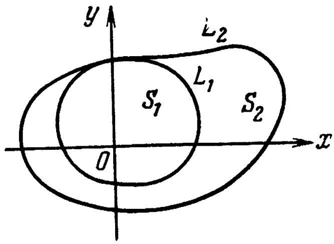

Рис. 14.

$$w\,|_{L_1}=0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{L_1}=0; \tag{10}$$

точно так же пусть B означает бигармонический оператор, определенный на функциях, которые удовлетворяют условиям

$$w\,|_{L_2}=0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{L_2}=0. \tag{11}$$

Тогда квадраты частот собственных колебаний пластинок S_1 и S_2 пропорциональны собственным числам операторов A и B. Докажем, что $A \geqslant B$. Заметим прежде всего, что

$$|\,w\,|_A^2=\iint\limits_{S_1}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dS, \tag{12}$$

$$|\,w\,|_B^2=\iint\limits_{S_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dS, \tag{13}$$

причем в первом интеграле w удовлетворяет условиям (10), а во втором — условиям (11).

Пусть w удовлетворяет условиям (10) и сообщает конечное значение интегралу (12). Тогда $w \in H_A$. Доопределим функцию w в S_2, положив ее равной нулю вне S_1. Доопределенная таким образом функция w удовлетворяет условиям (11) и принадлежит пространству H_B, причем, очевидно, $|\,w\,|_A^2=|\,w\,|_B^2$. В соответствии с данным выше определением $A \geqslant B$. Теперь из теоремы 1 следует:

Если две упругие пластинки одинаковой толщины и одинакового материала таковы, что срединная область одной из них целиком умещается в срединной области другой, и края обеих пластинок жестко закреплены, то, при любом k, k-я частота собственных колебаний меньшей пластинки больше, чем k-я частота большей пластинки.

Еще проще доказывается, что частоты собственных колебаний пластинки с жестко закрепленным краем больше соответствующих частот колебаний такой же пластинки, край которой полностью или частично оперт или свободен.

Число таких примеров весьма нетрудно увеличить.

§ 42. Процесс Ритца в проблеме собственных чисел

Пусть A — ограниченный снизу оператор:

$$(Au, u) \geqslant k \| u \|^2.$$

Нахождение собственных чисел оператора A легко сводится к отысканию собственных чисел положительно определенного оператора. Действительно, пусть c — любое число, большее $|k|$. Уравнение

$$Au - \lambda u = 0,$$

определяющее собственные числа оператора A, перепишем в виде

$$\tilde{A}u - \tilde{\lambda}u = 0,$$

где $\tilde{A}u = Au + cu$, $\tilde{\lambda} = \lambda + c$. Оператор $\tilde{A}$ положительно определенный, так как

$$(\tilde{A}u, u) = (Au, u) + c(u, u) \geqslant (c + k) \| u \|^2,$$

а $c + k > 0$. Если $\tilde{\lambda}$ — собственное число оператора $\tilde{A}$, то $\lambda = \tilde{\lambda} - c$ — собственное число оператора A, и наоборот. Поэтому в последующем мы будем считать, что A — положительно определенный оператор. Положим

$$d = \inf_{u \in D_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{1}$$

По теореме 1 § 40 d есть наименьшее собственное число оператора A, если существует элемент u_0 такой, что

$$d = (Au_0, u_0)/(u_0, u_0).$$

Если допустить, что такой элемент существует, то определение наименьшего собственного числа оператора A сводится к определению точной нижней границы функционала (1) или, что то же, к определению точной нижней границы функционала

$$(Au, u) \tag{2}$$

при дополнительном условии

$$(u, u) = 1. \tag{3}$$

Покажем, что эту задачу можно решить процессом Ритца. Возьмем последовательность координатных элементов φ_n,

$n=1, 2, \ldots,$ подчиненных трем требованиям: 1) $\varphi_n \in D_A$, $n=1, 2, \ldots,$ 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы; 3) система $\{\varphi_n\}$ полна по энергии. Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k,$$

где a_k — постоянные коэффициенты. Выберем эти коэффициенты так, чтобы u_n удовлетворяло соотношению (3) и чтобы величина (Au_n, u_n) была минимальной. Дело сводится к тому, чтобы найти минимум функции n переменных

$$(Au_n,\ u_n) = \sum_{k,\ m=1}^{n} (A\varphi_k,\ \varphi_m)\, a_k a_m, \tag{4}$$

связанных уравнением

$$(u_n,\ u_n) = \sum_{k,\ m=1}^{n} (\varphi_k,\ \varphi_m)\, a_k a_m = 1. \tag{5}$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа (CI, **167**). Составим функцию $\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$, где λ — неопределенный пока численный множитель, и приравняем нулю ее частные производные по коэффициентам a_m. Это приведет нас к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[(A\varphi_k,\ \varphi_m) - \lambda(\varphi_k,\ \varphi_m)\right] = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6}$$

Система (6) линейная однородная относительно неизвестных, которые не могут одновременно обратиться в нуль — в противном случае было бы нарушено уравнение (5). Отсюда следует, что определитель системы (6) должен обратиться в нуль; это дает нам уравнение для λ:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Если последовательность $\{\varphi_n\}$ ортонормирована, то уравнение (7) упрощается и принимает вид

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Как было отмечено выше, при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы; тогда уравнение (7) будет точно n-й степени, так как коэффициент при $(-1)^n\lambda^n$ есть определитель Грама элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Отсюда следует, что уравнение (7) имеет ровно n корней. Пусть λ_0 — какой-либо из этих корней. Подставив его в систему (6), мы сделаем ее определитель равным нулю, и эта система будет иметь нетривиальные решения. Пусть $a_k^{(0)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, — такое решение. Тогда $\mu a_k^{(0)}$, где μ — произвольный численный множитель, также удовлетворяет системе (6). Подставив $\mu a_k^{(0)}$ в (5), мы найдем значение μ. Заменив теперь обозначение $\mu a_k^{(0)}$ на $a_k^{(0)}$, мы можем в последующем под $a_k^{(0)}$ понимать то решение системы (6), которое удовлетворяет уравнению (5). Подставив в (6) $\lambda=\lambda_0$ и $a_k=a_k^{(0)}$, мы получим тождество, которое запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}\left(A\varphi_k, \varphi_m\right)=\lambda_0 \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}\left(\varphi_k, \varphi_m\right), \qquad m=1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Умножим его на $a_m^{(0)}$ и просуммируем по всем m. Мы получим тогда

$$\sum_{k, m=1}^{n}\left(A\varphi_k, \varphi_m\right) a_k^{(0)} a_m^{(0)}=\lambda_0 \sum_{k, m=1}^{n}\left(\varphi_k, \varphi_m\right) a_k^{(0)} a_m^{(0)}.$$

В силу уравнения (5) правая часть последнего равенства равна λ_0; левая его часть равна $\left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right)$, где

$$u_n^{(0)}=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k.$$

Таким образом,

$$\lambda_0=\left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right). \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что *уравнение* (7) *имеет только вещественные корни, если оператор A симметричный*. Далее, одна из функций $u_n^{(0)}$ реализует минимум величины (4). Формула (10) показывает теперь, что *этот минимум равен наименьшему из корней уравнения* (7).

С возрастанием n указанный минимум, который мы ниже будем обозначать через $\lambda_n^{(0)}$, не возрастает; в то же время он не меньше величины d. Отсюда следует, что при $n\to\infty$ величина $\lambda_n^{(0)}$ стремится к пределу, который больше или равен d. Докажем, что этот предел равен d; этим будет оправдано применение метода Ритца в проблеме собственных значений по крайней мере для того случая, когда дело идет об определении наименьшего собственного числа. Введем энергетические произведение и норму, полагая, как обычно,

$$[u, v] = (Au, v); \qquad |u|^2 = (Au, u).$$

По определению точной нижней границы при любом $\varepsilon > 0$ существует функция $u' \in D_A$ такая, что $(u', u') = 1$ и

$$d \leqslant (Au', u') < d + \varepsilon,$$

или, что то же,

$$\sqrt{d} \leqslant |u'| < \sqrt{d+\varepsilon}.$$

Так как последовательность $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, полна по энергии, то можно найти элемент u'_N вида

$$u'_N = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_k, \qquad b_k = \mathrm{const},$$

так, чтобы $|u' - u'_N| < \sqrt{\varepsilon}$.

Отсюда

$$|u'_N| \leqslant |u'| + \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}$$

или

$$(Au'_N, u'_N) < \left(\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right)^2.$$

Из (1) следует, что $\|u'_N - u'\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{d}} |u'_N - u'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$. Отсюда $\|u'_N\| \geqslant \|u'\| - \sqrt{\varepsilon/d} = 1 - \sqrt{\varepsilon/d}$ и, следовательно,

$$d \leqslant \frac{(Au'_N u'_N)}{(u'_N, u'_N)} = \frac{|u'_N|^2}{\|u'_N\|^2} < \frac{(\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon})^2}{(1 - \sqrt{\varepsilon/d})^2} = d + \eta,$$

где η стремится к нулю вместе с ε. Далее, $\lambda_N^{(0)}$ есть минимум выражения вида $(Au_N, u_N)/(u_N, u_N)$, $u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$, поэтому, в частности,

$$d \leqslant \lambda_N^{(0)} \leqslant \frac{(Au'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} < d + \eta.$$

Если $n \geqslant N$, то $\lambda_n^{(0)} \leqslant \lambda_N^{(0)}$, и, следовательно $d \leqslant \lambda_n^{(0)} < d + \eta$. Последнее неравенство показывает, что

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{(0)} = d, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Займемся теперь определением следующих собственных чисел. Чтобы получить приближенное значение второго собственного числа, будем искать минимум скалярного произведения (4) при дополнительных условиях $(u_n, u_n) = 1$ и

$$\left(u_n^{(0)}, u_n\right) = \sum_{k, m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^{(0)} a_m = 0, \tag{12}$$

где $u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$ есть приближенное значение первой нормированной собственной функции оператора A. По методу Лагранжа составляем выражение

$$(Au_n, u_n) - \lambda (u_n, u_n) - 2\mu \left(u_n, u_n^{(0)}\right)$$

и приравниваем нулю его частные производные по a_k. Это приводит нас к системе

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)\right] - \mu (\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^{(0)}\right\} = 0. \tag{13}$$

Обе части уравнения (13) умножим на $a_m^{(0)}$ и просуммируем по m:

$$\sum_{k, m=1}^{n} a_k a_m^{(0)} \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)\right] - \mu \sum_{k, m=1}^{n} a_k^{(0)} a_m^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = 0. \tag{14}$$

Вторая сумма, как нетрудно видеть, равна $\left(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right) = 1$. В первой сумме заменим индекс m на k и обратно и будем суммировать сперва по k, затем по m. Мы приведем тогда первую сумму к виду

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(A\varphi_m, \varphi_k) - \lambda (\varphi_m, \varphi_k)\right] \tag{15}$$

Внутренняя сумма равна

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(\varphi_k, A\varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)\right]$$

или, так как оператор A симметричный,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)\right].$$

В силу уравнений (6), которым удовлетворяют числа $a_k^{(0)}$ при $\lambda=\lambda_n^{(0)}$, последнее выражение равно

$$(\lambda_n^{(0)}-\lambda)\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}(\varphi_k,\ \varphi_m)=(\lambda_n^{(0)}-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)}\varphi_k,\ \varphi_m\right)=$$
$$=(\lambda_n^{(0)}-\lambda)(u_n^{(0)},\ \varphi_m)=(\lambda_n^{(0)}-\lambda)(\varphi_m,\ u_n^{(0)}).$$

Выражение (15) принимает вид

$$(\lambda_n^{(0)}-\lambda)\sum_{m=1}^{n} a_m(\varphi_m,\ u_n^{(0)})=(\lambda_n^{(0)}-\lambda)(u_n,\ u_n^{(0)}),$$

что равно нулю в силу (12). Теперь из (14) следует, что $\mu=0$, и система (13) совпадает с системой (6). Отсюда, как и выше, заключаем, что искомый минимум равен λ, которое является корнем уравнения (7). Нетрудно видеть, что на этот раз нужно взять второй по величине корень указанного уравнения.

Аналогично можно строить приближенные значения следующих собственных чисел; все они суть корни уравнения (7).

Вопрос о сходимости приближенных значений последующих собственных чисел к их точным значениям будет исследован ниже, в § 94.

§ 43. Другая форма процесса Ритца; случай естественных краевых условий

Пусть по-прежнему A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Наименьшее собственное число (если оно существует) этого оператора определяется, в силу теоремы 1 § 40, формулой

$$\lambda_1=\inf_{u\in D_A}\frac{(Au,\ u)}{(u,\ u)},\tag{1}$$

что можно представить еще и в таком виде:

$$\lambda_1=\inf_{u\in D_A}\frac{|u|^2}{\|u\|^2}.\tag{2}$$

Отношение в формуле (1) имеет смысл только для элементов из области определения оператора A, тогда как в формуле (2) отношение может быть определено и на более широком классе элементов энергетического пространства. Докажем, что при этом точная нижняя граница указанного отношения не меняется, так что

$$\lambda_1=\inf_{u\in H_A}\frac{|u|^2}{\|u\|^2}.\tag{3}$$

При расширении множества точная нижняя граница может разве лишь уменьшиться, поэтому во всяком случае

$$\inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \leqslant \lambda_1.$$

Обозначим для краткости

$$\delta = \inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2}$$

и допустим, что $\delta < \lambda_1$. По определению точной нижней границы, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти такой элемент $\bar{u} \in H_A$, что

$$\delta \leqslant |\bar{u}|^2/\|\bar{u}\|^2 < \delta + \varepsilon.$$

Отношение $|u|^2/\|u\|^2$ не изменится, если u умножить на любую постоянную, поэтому можно считать, что $\|\bar{u}\| = 1$, и тогда

$$\delta \leqslant |\bar{u}|^2 < \delta + \varepsilon.$$

Множество D_A плотно в энергетическом пространстве, поэтому найдется такой элемент $u' \in D_A$, что $|u' - \bar{u}| < \varepsilon$, и, следовательно, $\|u' - \bar{u}\| < \varepsilon/\gamma$, где γ — постоянная неравенства (11) § 8.

Оценим отношение $|u'|^2/\|u'\|^2$. По неравенству треугольника имеем

$$\frac{|u'|^2}{\|u'\|^2} \leqslant \left\{ \frac{|\bar{u}| + |u' - \bar{u}|}{\|\bar{u}\| - \|u' - \bar{u}\|} \right\}^2 < \left\{ \frac{\sqrt{\delta + \varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon/\gamma}} \right\}^2 = \delta + \eta,$$

где η стремится к нулю вместе с ε. Выбрав ε столь малым, чтобы было $\delta + \eta < \lambda_1$, мы придем в противоречие с формулой (2). Но тогда неравенство $\delta < \lambda_1$ невозможно, и равенство (3) доказано. Очевидно, что точная нижняя граница в (3) достигается, если $u = u_1$, где u_1 — собственный элемент оператора A, отвечающий собственному числу λ_1.

Процесс Ритца можно развить и для отыскания минимума отношения $|u|^2/\|u\|^2$. Для этого выберем последовательность координатных элементов φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, подчиненных условиям 2) и 3) § 42; условие 1) § 42 заменим следующим:

1a) $\varphi_n \in H_A$.

Как и в § 42, положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

причем потребуем, чтобы

$$\| u_n \|^2 = \sum_{k,\ m=1}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1 \tag{4}$$

и

$$| u_n |^2 = \sum_{k,\ m=1}^{n} a_k a_m [\varphi_k, \varphi_m] = \min. \tag{5}$$

Повторяя рассуждения § 42, придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda (\varphi_1, \varphi_1) & [\varphi_2, \varphi_1] - \lambda (\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & [\varphi_n, \varphi_1] - \lambda (\varphi_n, \varphi_1) \\ [\varphi_1, \varphi_2] - \lambda (\varphi_1, \varphi_2) & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & [\varphi_n, \varphi_2] - \lambda (\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\varphi_1, \varphi_n] - \lambda (\varphi_1, \varphi_n) & [\varphi_2, \varphi_n] - \lambda (\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (6) совпадает с уравнением (7) § 42, если координатные элементы выбраны из области D_A определения оператора A.

Если координатная система ортонормирована в H, то уравнение (6) принимает вид

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda & [\varphi_2, \varphi_1] & \ldots & [\varphi_n, \varphi_1] \\ [\varphi_1, \varphi_2] & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda & \ldots & [\varphi_n, \varphi_2] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\varphi_1, \varphi_n] & [\varphi_2, \varphi_n] & \ldots & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Отсюда, между прочим, ясно, что в этом случае приближенные по Ритцу собственные числа λ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n$, суть собственные числа квадратичной формы (5).

Как и в предшествующем параграфе, можно доказать, что корни уравнения (6) дают приближенные значения собственных чисел оператора и что при $n \to \infty$ наименьший корень уравнения (6) стремится к наименьшему собственному числу оператора.

Форма (6) уравнения для приближенных значений собственных чисел приобретает особое значение в том случае, когда функции, входящие в область D_A определения оператора, удовлетворяют в числе других и естественным краевым условиям. Как нам уже известно (§ 12), функции из энергетического пространства этим условиям удовлетворять не обязаны. Отсюда вытекает такой практически важный результат: если уравнение для приближенного определения собственных чисел писать в форме (6), а не в форме (7) § 42, то необязательно заботиться о том, чтобы координатные функции удовлетворяли естественным краевым условиям.

§ 44. Уравнения вида $Au - \lambda Bu = 0$

Рассматривая уравнение

$$Au - \lambda Bu = 0, \qquad (1)$$

будем предполагать, что оба оператора A и B положительно определенные и что D_A составляет часть D_B. Для всякого элемента, входящего в D_A, можно тогда двояко определить энергию, связывая ее либо с оператором A, либо с оператором B. Мы будем различать эти два вида энергии, говоря об «энергии оператора A» или «энергии оператора B».

В настоящем параграфе мы сформулируем ряд теорем, относящихся к собственным числам и собственным функциям уравнения (1). Доказательств приводить не будем, так как они почти дословно повторяют аналогичные доказательства для уравнения $Au - \lambda u = 0$.

Теорема 1. *Собственные числа уравнения* (1) *вещественные.*

Заметим, что если λ_0 и u_0 — собственное число и собственный элемент уравнения (2), то

$$\lambda_0 = (Au_0, u_0)/(Bu_0, u_0) = |u_0|_A^2/|u_0|_B^2. \qquad (2)$$

Отсюда, между прочим, следует, что собственные числа уравнения (1) не только вещественные, но и положительные.

Теорема 2. *Собственные элементы уравнения* (1), *отвечающие различным собственным числам, ортогональны по энергии оператора B.*

Таким образом, если λ_1 и λ_2 — различные собственные числа уравнения (1), а u_1 и u_2 — отвечающие им собственные функции, то

$$(Bu_1, u_2) = [u_1, u_2]_B = 0. \qquad (3)$$

Как и в § 39, отсюда вытекает, что совокупность всех собственных элементов уравнения (1) можно считать ортонормированной в H_B. В таком случае имеет место

Теорема 3. *Система собственных элементов уравнения* (1) *ортогональна в H_A (по энергии оператора A).*

Теорема 4. *Пусть операторы A и B таковы, что всякое множество, ограниченное в H_A, компактно в H_B. Тогда*

а) *уравнение* (1) *имеет бесконечное множество собственных чисел $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$;*

б) *соответствующие собственные элементы образуют систему, ортонормированную в H_B, ортогональную в H_A и полную в обоих пространствах.*

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5. *Пусть d есть точная нижняя граница функционала*

$$(Au, u)/(Bu, u). \tag{4}$$

Если существует такой элемент u_0, что

$$(Au_0, u_0)/(Bu_0, u_0) = d,$$

то d есть наименьшее собственное число уравнения (1), *а u_0 — соответствующий собственный элемент этого уравнения.*

Теорема 6. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть следующие в порядке возрастания n первых собственных чисел уравнения* (1) *и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — соответствующие им собственные элементы. Пусть существует элемент u_{n+1}, реализующий минимум функционала* (4) *при дополнительных условиях*

$$(Bu, u_1) = 0, \quad (Bu, u_2) = 0, \ \ldots, \ (Bu, u_n) = 0. \tag{5}$$

Тогда u_{n+1} есть собственный элемент уравнения (1), *соответствующий собственному числу*

$$\lambda_{n+1} = (Au_{n+1}, u_{n+1})/(Bu_{n+1}, u_{n+1}). \tag{6}$$

Это собственное число — ближайшее, следующее за λ_n.

Теорема 5 сводит нахождение наименьшего собственного числа уравнения (1) к следующей вариационной задаче:

Найти минимум функционала (Au, u) при дополнительном условии

$$(Bu, u) = 1. \tag{7}$$

Точно так же отыскание $n+1$-го собственного числа сводится к такой задаче:

Найти минимум функционала (Au, u) при дополнительных условиях (7) и (5).

Мы не будем подробно останавливаться на применении процесса Ритца к уравнению (1). Укажем только, что координатные элементы следует подчинить трем условиям, из которых условия 1) и 2) такие же, как в § 42, а условие 3) таково: координатная система полна в H_A. Уравнения (6) и (7) § 42 заменяются такими:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (B\varphi_k, \varphi_m)\right] = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n; \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Условие 1) можно ослабить, потребовав, чтобы $\varphi_n \in H_A$. Можно доказать, что тогда и $\varphi_n \in H_B$. Вместо уравнений (8) и (9) мы получим следующие уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \{[\varphi_k, \varphi_m]_A - \lambda [\varphi_k, \varphi_m]_B\} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{8_1}$$

и

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_1]_B & [\varphi_2, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_1]_B & \ldots & [\varphi_n, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_1]_B \\ [\varphi_1, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_2]_B & [\varphi_2, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_2]_B & \ldots & [\varphi_n, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_2]_B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\varphi_1, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_n]_B & [\varphi_2, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_n]_B & \ldots & [\varphi_n, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_n]_B \end{vmatrix} = 0. \tag{9_1}$$

Остается в силе замечание о естественных условиях (§ 43).

§ 45. Собственные числа обыкновенного дифференциального уравнения

В настоящем параграфе будет исследован вопрос о собственных числах обыкновенного дифференциального уравнения. Мы рассмотрим подробнее случай уравнения второго порядка, которое будет изучено при различных типах краевых условий. Для уравнения порядка выше второго мы ограничимся простейшим типом краевых условий (см. ниже, формула (28)); краевые условия иных типов будут рассмотрены в следующем параграфе для частного случая задачи об устойчивости стержня при продольном сжатии.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + r(x)\,u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ задана на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$.

Будем считать, что коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ подчинены условиям § 21, в частности,

$$p(x) \geqslant 0, \quad r(x) \geqslant 0, \quad A = \int_a^b \frac{dx}{p(x)} < \infty, \tag{2}$$

и что $u(x)$ удовлетворяет[1]) таким краевым условиям, которые гарантируют положительную определенность оператора (1). Поставим задачу о собственных числах и собственных функциях оператора A.

[1]) См. § 21.

2. Исследуем сперва более простой случай, когда на одном из концов сегмента $a \leqslant x \leqslant b$, скажем, на левом конце, удовлетворяется краевое условие

$$u(a) = 0, \tag{3}$$

а на правом конце имеет место условие общего вида

$$\gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \tag{4}$$

причем $\gamma \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и хотя бы одна из величин γ и δ отлична от нуля.

Для решения нашей задачи полезно будет прежде всего дать некоторую оценку энергии, определяемой оператором A. Имеем (см. формулу (5) § 21)

$$|u|^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right) dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b);$$

если $\gamma = 0$, то последнее слагаемое нужно отбросить. Во всяком случае оно неотрицательно. Отбросив его, а также неотрицательное второе слагаемое под знаком интеграла, получим искомую оценку

$$|u|^2 \geqslant \int_a^b p(x) u'^2(x) \, dx. \tag{5}$$

Второй шаг связан с использованием теоремы (см. § 6), в силу которой оператор Фредгольма, ядро которого квадратично суммируемо по обеим переменным, вполне непрерывен в L_2. Такой оператор, следовательно, преобразует любое множество, ограниченное в норме L_2, в новое множество, компактное в той же норме.

Пусть некоторая функция $u(x)$ удовлетворяет условию (3) и абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда, очевидно,

$$u(x) = \int_a^x u'(t) \, dt. \tag{6}$$

Положив

$$v(x) = \sqrt{p(x)}\, u'(x), \quad K_0(x, t) = \begin{cases} 1/\sqrt{p(t)}, & a \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & x < t \leqslant b, \end{cases} \tag{7}$$

можем представить равенство (6) в виде

$$u(x) = \int_a^b K_0(x, t)\, v(t) \, dt. \tag{8}$$

Можно убедиться, что равенство (8) справедливо, если функция u принадлежит энергетическому пространству H_A оператора A, определяемого формулами (1), (3) и (4).

Нетрудно видеть, что интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K_0^2(x, t)\,dx\,dt$$

конечен. Действительно, из формулы (7) видно, что при всевозможных значениях x и t из сегмента $[a, b]$

$$0 \leqslant K_0(x, t) \leqslant 1/\sqrt{p(t)},$$

поэтому

$$\int_a^b \int_a^b K_0^2(x, t)\,dx\,dt \leqslant \int_a^b \int_a^b \frac{dx\,dt}{p(t)} = A(b-a) < \infty.$$

Пусть теперь дано множество функций $u(x)$, энергетические нормы которых в совокупности ограничены: $|u(x)| \leqslant C = \text{const}$. По формуле (5)

$$\int_a^b p(x)\,u'^2(x)\,dx \leqslant C^2,$$

или, если ввести функции $v(x)$ по формуле (7), $\| v \| \leqslant C$. По теореме 1 настоящего параграфа множество функций $u(x)$ компактно. Но тогда выполнено условие теоремы 3 § 40; отсюда следует, что *оператор* (1) *при краевых условиях* (3) и (4) *имеет дискретный спектр.*

Сформулируем этот результат более подробно: существует бесконечно возрастающая последовательность положительных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ и соответствующих им функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$-\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du_n}{dx}\right) + ru_n - \lambda u_n = 0 \tag{9}$$

и краевым условиям (3) и (4). Функции $u_n(x)$ ортонормированы в обычном смысле:

$$(u_n, u_m) = \int_a^b u_n(x)\,u_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \tag{10}$$

и ортогональны по энергии

$$[u_n, u_m] = \int_a^b (pu_n' u_m' + ru_n u_m)\, dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u_n(b)\, u_m(b) = 0, \qquad n \neq m; \tag{11}$$

кроме того,

$$|u_n|^2 = \int_a^b \left(pu_n'^2 + ru_n^2\right) dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u_n^2(b) = \lambda_n; \tag{12}$$

система функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, полна как по энергии, так и в смысле сходимости в среднем.

Может случиться, что функция $r(x)$ принимает и отрицательные значения. Допустим, что эта функция все же остается ограниченной: $|r(x)| \leqslant c$. Тогда оператор $A_c u = Au + (c+1)u$ удовлетворяет условиям настоящего параграфа. Отсюда следует существование бесконечной последовательности положительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ у оператора A_c. Но в таком случае оператор A имеет бесконечное множество собственных чисел $\lambda_1 - c - 1$, $\lambda_2 - c - 1$, $\ldots$, $\lambda_n - c - 1$, $\ldots$; среди них может оказаться конечное число отрицательных или равных нулю.

3. Пусть теперь оператор (1) задан на функциях, удовлетворяющих краевым условиям общего вида

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \qquad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \tag{13}$$

причем $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и хотя бы один из коэффициентов β и δ отличен от нуля. Пусть для определенности $\beta > 0$. Докажем, что и в этом случае выполнено условие теоремы 3 § 40, так что оператор (1) и при краевых условиях (13) имеет дискретный спектр, если только $p(a) > 0$.

По формуле (5) § 21 в данном случае

$$|u|^2 = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)\, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)\, u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u^2(b);$$

отбросив под интегралом неотрицательное слагаемое ru^2, а вне интеграла — также неотрицательное слагаемое $\frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u^2(b)$, найдем, что

$$|u|^2 \geqslant \int_a^b pu'^2\, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)\, u^2(a). \tag{14}$$

Пусть дано множество M функций с ограниченными в совокупности энергетическими нормами:

$$|u| \leqslant C = \text{const}, \quad u \in M.$$

Из неравенства (14) следует

$$\int_a^b pu'^2\,dx \leqslant C^2, \tag{15}$$

$$|u(a)| \leqslant C\sqrt{\frac{\alpha}{\beta p(a)}}. \tag{16}$$

Напишем тождество

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt;$$

если воспользоваться обозначениями (7), его можно представить в виде

$$u(x) = u(a) + \int_a^b K_0(x, t)\,v(t)\,dt. \tag{17}$$

В силу неравенства (15) $\|v\| \leqslant C$; можно из множества M выбрать такую последовательность $u_n(x)$, чтобы функции

$$\int_a^b K_0(x, t)\,v_n(t)\,dt, \quad v_n(t) = \sqrt{p(t)}\,u_n(t) \tag{18}$$

сходились в среднем. Далее, в силу неравенства (16) значения $|u_n(a)|$ ограничены; по теореме Больцано — Вейерштрасса из последовательности $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выбрать частичную последовательность $u_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, такую, что последовательность $u_{n_k}(a)$ сходится. Теперь из тождества (17) вытекает, что последовательность $\{u_{n_k}(x)\}$ сходится в среднем.

4. Обратимся к случаю, который мы пока оставляли в стороне, и рассмотрим теперь оператор (1) при краевых условиях

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{19}$$

Всегда можно считать, что $r(x) \geqslant 1$ — достаточно для этого оператор Au заменить на $Au + cu$, где c — достаточно большая положительная постоянная; от этого все собственные числа оператора A просто увеличатся на c. При условиях (19) имеем

$$|u|^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right) dx. \tag{20}$$

Пусть дано множество M функций с ограниченными в совокупности энергетическими нормами: $|u| \leqslant C$, $u \in M$. Тогда, как это следует из (20),

$$\int_a^b pu'^2\, dx \leqslant C^2 \tag{21}$$

и, так как $r \geqslant 1$,

$$\int_a^b u^2\, dx \leqslant C^2. \tag{22}$$

Полагая $v(x) = \sqrt{p(x)}\, u'(x)$, придем опять к тождеству (17); по-прежнему убедимся на основании неравенства (21) в возможности выбора такой последовательности функций $\{u_n(x)\}$, чтобы последовательность (18) сходилась в среднем. Докажем теперь, что значения $u_n(a)$ ограничены в совокупности. Обозначая интеграл в (17) через $w_n(x)$, имеем $u_n(a) = u_n(x) - w_n(x)$. Отсюда

$$u_n^2(a) \leqslant 2u_n^2(x) + 2w_n^2(x);$$

интегрируя это неравенство в пределах от a до b, найдем

$$u_n^2(a) \leqslant \frac{2}{b-a} \int_a^b u_n^2(x)\, dx + \frac{2}{b-a} \int_a^b w_n^2(x)\, dx. \tag{23}$$

В силу неравенства (22) первый интеграл в (23) не превосходит C^2; докажем, что второй интеграл в (23) также ограничен. Действительно, по неравенству Буняковского

$$w_n^2(x) \leqslant \int_a^b K_0^2(x, t)\, dt \int_a^b v_n^2(t)\, dt.$$

По неравенству (21)

$$\int_a^b v_n^2(t)\, dt = \int_a^b p(t)\, u_n'^2(t)\, dt \leqslant C^2.$$

Далее, по формуле (8) $0 \leqslant K_0(x, t) \leqslant 1/\sqrt{p(t)}$, и потому

$$\int_a^b K_0^2(x, t)\, dt \leqslant \int_a^b \frac{dt}{p(t)} = A.$$

Таким образом, $w_n^2(x) \leqslant AC^2$ и, следовательно,

$$\int_a^b w_n^2(x)\,dx \leqslant AC^2(b-a).$$

Теперь

$$u_n^2(a) \leqslant 2C^2/(b-a) + 2AC^2,$$

и величины $|u_n(a)|$ ограничены в совокупности. Применяя опять теорему Больцано — Вейерштрасса и повторяя рассуждения конца п. 3, убедимся, что из множества M можно выделить последовательность, сходящуюся в среднем. Отсюда, на основании теоремы 3 § 40, вытекает, что при условиях (19) оператор (1) имеет дискретный спектр.

5. Выводы предшествующих пунктов настоящего параграфа легко распространяются на уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + r(x)\,u - \lambda\rho(x) = 0, \tag{24}$$

в котором $p(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют условиям п. 1, а $\rho(x)$ удовлетворяет неравенствам $\rho_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_1$, где ρ_0, ρ_1 — некоторые положительные постоянные. Для определенности остановимся на простейших краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{25}$$

хотя не представляет затруднений рассмотреть условия и других типов. Уравнение (24) принадлежит к типу, изученному в § 44; действительно, оператор $Bu = \rho(x)\,u$ положительно определенный, так как

$$(Bu,\ u) = \int_a^b \rho(x)\,u^2(x)\,dx \geqslant \rho_0 \int_a^b u^2(x)\,dx = \rho_0\,\|u\|^2.$$

Чтобы доказать, что уравнение (24) имеет дискретный спектр, достаточно убедиться, что выполнены условия теоремы 4 § 44. В нашем случае

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left(pu'^2 + ru^2\right)dx, \quad |u|_B^2 = \int_a^b \rho u^2\,dx. \tag{26}$$

Из формулы (8) следует

$$\sqrt{\rho(x)}\,u(x) = \int_a^b K_1(x,\ t)\,v(t)\,dt, \quad K_1(x,\ t) = \sqrt{\rho(x)}\,K_0(x,\ t).$$

Так как функция $\rho(t)$ ограничена, то интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K_1^2(x, t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_a^b \rho(x) K_0^2(x, t)\,dx\,dt$$

конечен, поэтому из каждого множества функций $v(x)$ с ограниченными в совокупности нормами можно выделить такую последовательность $\{v_n(x)\}$, что последовательность соответствующих функций $\{u_n(x)\sqrt{\rho(x)}\}$ сходится в среднем, или, что то же, последовательность $u_n(x)$ сходится по энергии оператора B. Пусть теперь дано множество функций $u(x)$, для которых $|u|_A \leqslant C$. Тогда, как это видно из (26),

$$\| v \| = \left\{ \int_a^b p(x) u'^2(x)\,dx \right\}^{1/2} \leqslant C,$$

и, как только что было сказано, из данного множества функций $u(x)$ можно выбрать последовательность, сходящуюся по энергии оператора B. Тем самым доказано, что уравнение (24) имеет дискретный спектр, т. е. что существует последовательность отличных от тождественного нуля функций $u_n(x)$ и соответствующих им, очевидно, положительных чисел λ_n, удовлетворяющих уравнению (24) и краевым условиям (25); функции $u_n(x)$ ортонормированы по энергии оператора B [1])

$$[u_n, u_m]_B = \int_a^b \rho(x) u_n(x) u_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

и ортогональны по энергии оператора A; при этом

$$[u_n, u_m]_A = \int_a^b (p u'_m u'_n + r u_m u_n)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \lambda_n, & m = n. \end{cases}$$

Мы доказывали дискретность спектра оператора (1) [а также уравнения (24)] в предположении, что интеграл $\int_a^b \frac{dx}{p(x)}$ конечен. На самом деле можно доказать дискретность спектра и в более слабых предположениях. Так, достаточно предположить, что остается конечным интеграл $\int_a^b \frac{(x-a)\,dx}{p(x)}$, при этом в некоторых

1) То есть ортонормированы с весом $\rho(x)$.

случаях приходится изменять характер краевых условий в точке $x = a$. Подробно об этом см., например, статью автора [15].

6. Обратимся теперь к уравнению произвольного четного порядка:

$$Au - \lambda Bu = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] - \\ - \lambda \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\rho_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] = 0, \tag{27}$$

в котором $s < m$. Будем рассматривать это уравнение при простейших краевых условиях

$$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(m-1)}(a) = \\ = u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(m-1)}(b) = 0. \tag{28}$$

Для упрощения рассуждений примем, что все коэффициенты $p_k(x)$ и $\rho_k(x)$ неотрицательны и ограничены и что $p_m(x) \geqslant p_0$, $\rho_s(x) \geqslant \rho_0$, где p_0 и ρ_0 — положительные постоянные. В этих предположениях операторы A и B в уравнении (27) положительно определенные [1]), причем

$$|u|_A^2 = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx, \tag{29}$$

$$|u|_B^2 = \int_a^b \sum_{k=0}^{s} \rho_k(x)\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx. \tag{30}$$

Заметим еще, что сходимость по энергии оператора B означает сходимость в среднем как самих функций, так и их производных порядка до s включительно.

Докажем, что при перечисленных условиях уравнение (27) имеет дискретный спектр. Для этого достаточно установить, что выполняются условия теоремы 4 § 44.

а) Пусть дано множество M функций, ограниченное по энергии оператора $A: |u|_A \leqslant C$, $u \in M$, или, более подробно,

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \leqslant C^2.$$

---

[1]) См. § 21.

Тогда

$$\int_a^b \left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^2 dx \leqslant \frac{C^2}{p_0}. \tag{31}$$

б) В точке a функция $u(x)$ и ее производные порядка $\leqslant m-1$ обращаются в нуль. Отсюда [С2, **15**, формула (23)]

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-1} u^{(m)}(t)\, dt. \tag{32}$$

Дифференцируя это k раз, $k = 1, 2, \ldots, s$, получим

$$u^{(k)}(x) = \frac{1}{(m-k-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-k-1} u^{(m)}(t)\, dt. \tag{33}$$

Интегралы (32) и (33) подходят под общую форму (6); достаточно положить

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}, & a \leqslant t \leqslant x. \\ 0, & x < t \leqslant b. \end{cases}$$

Применяя теорему о полной непрерывности оператора Фредгольма (§ 6) к интегралу (32), убедимся, что из множества M можно выделить последовательность $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся в среднем. Подставим $u_n(x)$ вместо $u(x)$ в (33) и положим там $k = 1$. В силу той же теоремы из последовательности $\{u_n(x)\}$ можно выделить такую частичную последовательность $\{u_{n1}(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, что не только она сама, но и ее первые производные сходятся в среднем. Подставим теперь в (33) $u_{n1}(x)$ вместо $u(x)$, положим $k = 2$ и опять применим теорему, упомянутую выше. Продолжая этот процесс, придем к заключению, что из данного множества M можно выделить последовательность, которая сходится в среднем вместе со своими производными порядка до s включительно. Как уже было отмечено, отсюда вытекает дискретность спектра уравнения (27) при краевых условиях (28).

§ 46. Устойчивость сжатого стержня

Рассмотрим стержень переменного, вообще говоря, сечения, сжатого двумя продольными силами величины P, приложенными к его концам. Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$E \frac{d^2}{dx^2}\left(I(x) \frac{d^2 y}{dx^2}\right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \tag{1}$$

где E — модуль Юнга материала стержня и $I(x)$ — момент инерции его сечения с абсциссой x. К этому уравнению следует присоединить краевые условия, определяющие характер закрепления концов стержня. Ограничимся здесь двумя типами закрепления:

1) оба конца стержня жестко закреплены. Допуская, что ось стержня в неизогнутом состоянии занимает отрезок $[0, l]$ оси x, имеем в этом случае

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0; \tag{2}$$

2) оба конца стержня шарнирно закреплены; в этом случае

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0. \tag{3}$$

Исследование других типов закрепления не привносит существенных трудностей.

Задача об устойчивости сжатого стержня состоит в отыскании значений «критических нагрузок», при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее соответственно краевым условиям (2) или (3). Особый интерес представляет наименьшая критическая нагрузка.

Уравнение (1) подходит под тип (27) § 45; роль параметра λ играет P. При этом

$$Ay = E\frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad By = -\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Нетрудно интегрированием по частям показать, что как при условиях (2), так и при условиях (3)

$$|y|_A^2 = (Ay, y) = E\int_0^l I(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

$$|y|_B^2 = (By, y) = \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Задача об устойчивости сжатого стержня сводится к задаче об отыскании собственных чисел (особенно наименьшего собственного числа) уравнения (1) при краевых условиях (2) или (3). Случай краевых условий (2), в сущности, разобран в предшествующем параграфе. Если ни одно из сечений стержня не вырождается в точку или в линию, так что $I(x)$ нигде не обращается в нуль, то существует бесконечное множество критических нагрузок; наименьшая из них определяется формулой

$$P_1 = \min \frac{|y|_A^2}{|y|_B^2} = E \cdot \min \frac{\int\limits_0^l I(x)\, y''^2(x)\, dx}{\int\limits_0^l y'^2(x)\, dx}; \tag{4}$$

минимум ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям (2).

Случай шарнирного закрепления концов можно также исследовать, опираясь на теорему 4 § 44; наименьшая критическая нагрузка определяется по-прежнему формулой (4), но на этот раз минимум можно искать в более широком классе функций, удовлетворяющих только условиям $y(0) = y(l) = 0$; условия $y''(0) = y''(l) = 0$ оказываются естественными. Расширение класса функций, вообще говоря, уменьшает минимум; отсюда следует, что при шарнирном закреплении концов стержня наименьшая критическая нагрузка меньше, чем при жестком закреплении.

Задачу об устойчивости стержня с шарнирно закрепленными концами нетрудно свести к отысканию собственных чисел некоторого дифференциального уравнения второго порядка. Положим $Iy'' = u$. Функция $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{5}$$

и дифференциальному уравнению

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{P}{I}u = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) подходит под тип (24) § 45 при $p(x) = E$, $r(x) = 0$, $\rho(x) = \frac{1}{I}$. Наименьшее собственное число этого уравнения по теореме 5 § 44 равно минимуму отношения $E \cdot \int\limits_0^l u'^2\, dx \Big/ \int\limits_0^l \frac{u^2}{I}\, dx$ или, что то же, минимуму функционала $E\int\limits_0^l u'^2\, dx$ при дополнительном условии $\int\limits_0^l \frac{u^2}{I}\, dx = 1$; минимум ищется в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям (5).

Заметим, что если сечение стержня постоянное, то уравнение (6) переходит в известное уравнение Эйлера.

§ 47. Собственные числа невырождающихся эллиптических операторов

1. В настоящем параграфе будут рассмотрены дифференциальные эллиптические операторы второго порядка в конечной области. Распространение на операторы более высоких порядков не представляет особого труда, как это видно из рассмотренного в данном параграфе примера бигармонического оператора.

2. Для определенности будем считать, что Ω — область трехмерного пространства. Пусть $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — точки области Ω. Рассмотрим некоторую функцию $u(Q)$, непрерывно дифференцируемую в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$[1]) и равную нулю на S. Вырежем точку P сферой S_ε с центром в P и достаточно малым радиусом ε так, чтобы вся эта сфера оказалась внутри Ω; оставшуюся часть области Ω обозначим через Ω_ε. Составим интеграл

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \operatorname{grad} u \, d\Omega_Q = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \zeta} \right) d\Omega_Q$$

и применим к нему формулу (17) § 7; следует иметь при этом в виду, что граница области Ω_ε состоит из двух поверхностей, S и S_ε, поэтому наша формула будет содержать два поверхностных интеграла, и мы получим

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \zeta} \right) d\Omega_Q =$$
$$= - \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \frac{1}{r} \, d\Omega_Q + \int_S u \frac{\partial (1/r)}{\partial \nu} \, dS + \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial (1/r)}{\partial \nu} \, dS_\varepsilon.$$

Хорошо известно (это легко проверить и непосредственно), что $\Delta \frac{1}{r} = 0$. Кроме того, по условию $u|_S = 0$, поэтому первые два интеграла справа исчезают, и мы получаем

$$\int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial (1/r)}{\partial \nu} \, dS_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \zeta} \right) d\Omega.$$

В формуле (17) § 7, которую мы здесь использовали, ν означает нормаль, внешнюю по отношению к области, поэтому нормаль к сфере S_ε направлена к ее центру и

$$\frac{\partial (1/r)}{\partial \nu} = - \left. \frac{\partial (1/r)}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

---

[1]) Как обычно, через S обозначена граница области Ω.

На сфере S_ε введем сферические координаты θ и φ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда $dS_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и $\xi = x + \varepsilon \sin\theta \cos\varphi$, $\eta = y + \varepsilon \sin\theta \sin\varphi$, $\zeta = z + \varepsilon \cos\theta$. Подставив это в последнее равенство, приведем его к виду

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x + \varepsilon \sin\theta \cos\varphi,\ y + \varepsilon \sin\theta \sin\varphi,\ z + \varepsilon \cos\theta) \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \zeta} \right) d\Omega.$$

Перейдем теперь к пределу, полагая $\varepsilon \to 0$. В правой части равенства это приведет просто к замене области интегрирования Ω_ε на Ω, левая же часть в результате предельного перехода примет вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x, y, z) \sin\theta\, d\theta = u(x, y, z) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 4\pi u(x, y, z) = 4\pi u(P).$$

Поделив обе части равенства на 4π, получим важную формулу

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial (1/r)}{\partial \zeta} \right) d\Omega, \qquad (1)$$

верную, если функция u обращается в нуль на границе области Ω.

Интеграл в (1) естественным образом распадается на три; нетрудно видеть, что ядро каждого из них имеет слабую особенность. Так, например,

$$\frac{\partial (1/r)}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{r^3} = \frac{x - \xi}{r} \cdot \frac{1}{r^2};$$

здесь функция $A(P, Q) = (x - \xi)/r$ ограничена (так как $|x - \xi| \leqslant r$ и потому $|A(P, Q)| \leqslant 1$), а показатель $\alpha = 2$ меньше числа измерений пространства.

Формулу, аналогичную формуле (1), можно построить и тогда, когда число измерений пространства не равно 3; в частности, если Ω — плоская область и функция $u(x, y)$ обращается в нуль на ее границе, то

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \ln (1/r)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \ln (1/r)}{\partial \eta} \right) d\Omega. \qquad (1_1)$$

Если $m > 3$, то формула (1) заменяется следующей:

$$u(P)=\frac{\Gamma(m/2)}{2(m-2)\pi^{m/2}}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u(Q)}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_Q\Omega. \tag{1_2}$$

Здесь Γ — эйлерова гамма-функция, P и Q — точки m-мерного евклидова пространства с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ соответственно, r — расстояние между этими точками.

3. Поставим теперь задачу о собственных числах дифференциального оператора эллиптического типа

$$Lu=-\sum_{j,\,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu \tag{2}$$

при условии, что на границе рассматриваемой области Ω выполнено условие $u=0$; относительно коэффициентов A_{jk} и C сохраним требования § 27, так что оператор L положительно определенный. В частном случае, когда $A_{jj}=1$, $A_{jk}=0$, $j\neq k$, мы получим задачу о собственных числах оператора Лапласа. Докажем[1]), что для оператора (2) выполнено условие теоремы 3 § 40. По формулам (7) и (9) § 27 имеем

$$|u|^2=(Lu,\,u)\geqslant\mu_0\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\right)^2 d\Omega.$$

Полагая для определенности число измерений пространства $m=3$, запишем последнее неравенство в виде

$$|u|^2\geqslant\mu_0\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\Omega. \tag{3}$$

Пусть дано множество M функций с ограниченными в совокупности энергетическими нормами: $|u|\leqslant C$, $u\in M$. Из неравенства (3) тогда вытекает, что

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|=\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 d\Omega\right\}^{1/2}\leqslant\frac{C}{\sqrt{\mu_0}};\quad \left\|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right\|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\mu_0}},\quad \left\|\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right\|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\mu_0}}. \tag{4}$$

Так как $\dfrac{\partial(1/r)}{\partial\xi}$ есть ядро со слабой особенностью, а нормы функций $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ ограничены в совокупности, если u — любая функция из множества M, то (см. § 6) из множества M можно

[1]) Приводимое ниже доказательство дано автором в [12].

выделить такую последовательность $u_{1n}(P)$, $n=1,2,\ldots$, чтобы интегралы

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_{1n}}{\partial\xi}\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi}\,d\Omega \tag{5}$$

сходились в среднем к некоторому пределу. Нормы функций $\frac{\partial u_{1n}}{\partial\eta}$ ограничены в совокупности, так как $u_{1n}\in M$, и потому, в силу неравенств (4), $\left\|\frac{\partial u_{1n}}{\partial\eta}\right\|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\mu_0}}$.

Как и выше, найдем, что из последовательности $u_{1n}(P)$ можно выделить частичную последовательность $u_{2n}(P)$ так, чтобы интегралы

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_{2n}}{\partial\eta}\frac{\partial(1/r)}{\partial\eta}\,d\Omega$$

сходились в среднем; при этом, очевидно, и последовательность

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_{2n}}{\partial\xi}\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi}\,d\Omega,$$

составляющая часть последовательности (5), также сходится в среднем — ее предел совпадает с пределом последовательности (5). Аналогично найдем, что из последовательности u_{2n} можно выделить такую новую частичную последовательность — мы обозначим ее просто через $u_n(P)$, $n=1,2,\ldots$, что все три интеграла

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi}\,d\Omega,\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_n}{\partial\eta}\frac{\partial(1/r)}{\partial\eta}\,d\Omega,\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_n}{\partial\zeta}\frac{\partial(1/r)}{\partial\zeta}\,d\Omega \tag{6}$$

сходятся, при $n\to\infty$, к некоторым пределам. Но тогда из формулы (1) видно, что и сами функции $u_n(P)$ сходятся в среднем к пределу, который равен сумме пределов интегралов (6). Таким образом, из множества M функций, ограниченных по энергии, нам удалось выделить последовательность функций $u_n(P)$, сходящуюся в среднем; на основании теоремы 3 § 40 заключаем теперь, что *при условии $u|_S=0$ невырождающийся эллиптический оператор* (2) *имеет в конечной области Ω дискретный спектр*; *наименьшее собственное число этого оператора определяется по формуле*

$$\lambda_1=\min\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{j,\,k=1}^{m}A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right)d\Omega,$$

причем минимум ищется в классе функций, обращающихся в нуль на границе области и удовлетворяющих равенству

$$\int_\Omega u^2\,d\Omega = 1.$$

В частности, наименьшее собственное число оператора $-\Delta$ (Δ — оператор Лапласа) равно минимуму интеграла

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

на только что упомянутом классе функций.

4. Задача о собственных частотах изгибных колебаний пластинки с жестко закрепленным или опертым краем приводится к задаче о собственных числах бигармонического оператора Δ^2; соответствующие собственные функции удовлетворяют краевым условиям

$$w\,|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0, \tag{7}$$

если край пластинки жестко закреплен, и условиям

$$w\,|_L = 0, \quad \left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_L = 0, \tag{8}$$

если край свободно оперт. Из формул (16), (17) и (25) § 30 вытекает, что при обоих условиях закрепления имеет место неравенство

$$|\,w\,|^2 \geqslant c \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS, \tag{9}$$

где c — положительная постоянная, равная $\varkappa$ при условиях (7) и $(1-\sigma)/A$ — при условиях (8); как и в § 30, через S мы обозначаем область, занятую пластинкой, и через L ее контур.

Пусть дано множество M функций, энергетические нормы которых ограничены в совокупности: $|\,w\,| \leqslant C$, $w \in M$. По неравенству (9)

$$\|\partial w/\partial x\| \leqslant C/\sqrt{c}, \quad \|\partial w/\partial y\| \leqslant C/\sqrt{c};$$

формула (1_1) показывает теперь, что множество M компактно в $L_2(\Omega)$. Из теоремы 3 § 40 вытекает тогда, что *как в случае жестко закрепленного края, так и в случае свободно опертого края бигармонический оператор имеет дискретный спектр.*

5. Сделаем теперь следующее замечание. Обозначим оператор Δ^2 при условиях (7) жесткого закрепления через A, а при

условиях (8) свободного опирания — через B. По формуле (21) § 30 имеем

$$|w|_B^2 = \iint_S \left[w_{xx}^2 + 2\sigma w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + 2(1-\sigma) w_{xy}^2\right] dx\,dy. \quad (10)$$

Далее, по формуле (16) § 30

$$|w|_A^2 = \iint_S \left(w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2\right) dx\,dy. \quad (11)$$

Если выполнены краевые условия (7) настоящего параграфа, то правая часть равенства (6_1) § 30 обращается в нуль. Имея это в виду, умножим упомянутое равенство на -2σ и сложим его с равенством (11); мы убедимся тогда, что величину $|w|_A^2$ можно вычислять и по формуле (10).

Второе из условий (8) естественное. Поэтому функции из энергетического пространства H_A подчинены двум условиям $w|_S = 0$, $\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0$, а функции из пространства H_B — только первому из этих условий. Отсюда нетрудно усмотреть, что все элементы пространства H_A принадлежат и пространству H_B. Кроме того, как мы выяснили, если $w \in H_A$, то $|w|_A = |w|_B$. В соответствии с определением § 41 имеем $A \geqslant B$, и из минимаксимального принципа вытекает следующее утверждение: если обозначить соответственно через $\omega_{n,A}$ и $\omega_{n,B}$ расположенные в порядке возрастания собственные частоты колебаний пластинки с жестко закрепленными и со свободно опертым краем, то $\omega_{n,A} \geqslant \omega_{n,B}$.

6. Можно доказать, что эллиптический невырожденный оператор в случае конечной области, удовлетворяющей так называемому «условию конуса» С. Л. Соболева (см. ниже, § 55), имеет дискретный спектр и при других краевых условиях, рассмотренных в § 27. Доказательство для этого случая приведено, например, в книге автора [11].

7. Нетрудно привести примеры дифференциальных операторов, не имеющих дискретного спектра. Так, недискретен спектр задачи Дирихле для оператора Лапласа, если область представляет собой внешность замкнутой поверхности. При некоторых условиях не имеют дискретного спектра вырождающиеся эллиптические операторы в случае конечной области; см. по этому поводу статью автора [16].

§ 48. Собственные числа вырождающегося эллиптического оператора [1])

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A_{mm}(P)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \quad (1)$$

[1]) См. статью автора [16].

в области Ω, описанной в § 28; эта область расположена, следовательно, в полупространстве $x_m > 0$, но часть ее границы, S', лежит в плоскости $x_m = 0$. Как и в § 28, примем допущение о существовании функции $p(x_m)$, удовлетворяющей неравенству (20) § 28. Оператор L будем рассматривать при краевых условиях

$$u|_{S''} = 0, \tag{2}$$

и, если интеграл (21) § 28 сходится,

$$u|_{S'} = 0; \tag{3}$$

S'' — часть границы области Ω, лежащая в полупространстве $x_m > 0$. Напомним, что в интеграле (21) § 28 a есть наибольшее значение координаты x_m в Ω.

Теорема 1. *Если сходится интеграл*

$$\int_0^a \frac{t\,dt}{p(t)}, \tag{4}$$

то оператор L имеет дискретный спектр.

Доказательство проведем в предположении, что интеграл (21) § 28 сходится; общий случай описан в статье автора [16].

а) Обозначим через $\lambda_0(P)$ наименьшее собственное число матрицы $\| A_{jk}(P) \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m-1}$ и положим

$$\chi(t) = \frac{1}{c_1} \inf_{\substack{P \in \Omega \\ x_m \geqslant t}} \lambda_0(P); \tag{5}$$

здесь c_1 — постоянная, входящая в неравенство (20) § 28. Очевидно, $\chi(t) > 0$, если $t > 0$.

Поместим Ω в параллелепипед Π, определяемый неравенствами

$$p_j \leqslant x_j \leqslant q_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m-1; \qquad 0 \leqslant x_m \leqslant a.$$

Введем в рассмотрение оператор L_0, действующий в пространстве $L_2(\Pi)$ по формуле

$$L_0 u = -\chi(x_m) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(p(x_m) \frac{\partial u}{\partial x_m}\right); \tag{6}$$

за область его определения примем множество функций, удовлетворяющих следующим условиям (ср. § 28):

1) функции

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant m-1;\ p(x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m},\ \frac{\partial}{\partial x_m}\left(p(x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$$

непрерывны в $\overline{\Pi}$;

2) на границе параллелепипеда $u = 0$.

Из теоремы 1 § 28 следует, что оператор L_0 положительно определенный.

б) Докажем, что спектр оператора L_0 дискретен. Собственные числа и собственные функции этого оператора удовлетворяют уравнению

$$\chi(x_m)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(p(x_m)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) + \lambda u = 0 \tag{7}$$

и равны нулю на границе параллелепипеда. Решения уравнения (7) будем искать в виде

$$u(x) = v(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{n_k\pi(x_k - p_k)}{q_k - p_k}; \tag{8}$$

условия на боковой поверхности параллелепипеда при этом оказываются выполненными. Функция $v(t)$, $t = x_m$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dv}{dt}\right] + v\pi^2\chi(t)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{n_k^2}{(q_k - p_k)^2} = \lambda v \tag{9}$$

и краевым условиям

$$v(0) = v(a) = 0. \tag{10}$$

По доказанному в § 45 спектр оператора задачи (9)—(10) дискретен; собственные числа и собственные функции этого оператора зависят от значков $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$, поэтому их естественно обозначить через $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_{m-1} n_m}$ и $v_{n_1 n_2 \ldots n_{m-1} n_m}(t)$, $n_m = 1, 2, \ldots$. При фиксированных $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ система собственных функций полна в $L_2(0, a)$.

Очевидно, функции

$$u_{n_1 n_2 \ldots n_m}(P) = v_{n_1 n_2 \ldots n_m}(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{n_k\pi(x - p_k)}{q_k - p_k} \tag{11}$$

суть собственные функции оператора L_0, соответствующие собственным числам $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m}$, $n_1, n_2, \ldots, n_m = 1, 2, \ldots$. Нетрудно видеть, что система (11) полна в $L_2(\Pi)$. Докажем, что собственные числа $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ сгущаются только на бесконечности.

Прежде всего заметим, что названные числа не убывают при возрастании любого из индексов $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ — это прямо вытекает из минимаксимального принципа. Ясно также, что они не убывают и при возрастании индекса n_m. Допустим теперь, что числа $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ имеют точку сгущения не на бесконечности. Тогда существует последовательность $\lambda_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_m^{(i)}}$, сходящаяся к конечному пределу:

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_m^{(i)}} = \lambda_0 < \infty. \tag{12}$$

Могут встретиться два случая.

1. Индексы $n_m^{(i)}$ не ограничены в совокупности. Выбрав подпоследовательность, можно считать, что $n_m^{(i)} \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$. Но

$$\lambda_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_{m-1}^{(i)} n_m^{(i)}} \geqslant \lambda_{1,\, 1,\, \ldots,\, 1,\, n_m^{(i)}} \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty,$$

и первый случай невозможен.

2. Индексы $n_m^{(i)}$ ограничены в совокупности. Выбрав подпоследовательность, можно считать, что $n_m^{(i)} = n_m = \text{const}$. Теперь

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_{m-1}^{(i)} n_m} = \lambda_0 < \infty. \tag{13}$$

Обозначим для краткости

$$\lambda_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_{m-1}^{(i)} n_m} = \lambda_i, \quad v_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_{m-1}^{(i)} n_m}(t) = v_i(t).$$

Имеем

$$\lambda_i v_i(t) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dv_i}{dt}\right) + v_i(t)\,\pi^2 \chi(t) \sum_{k=1}^{m-1} n_k^{(i)^2} / (q_k - p_k)^2.$$

Умножим это равенство скалярно на функцию $v_i(t)$, которую мы считаем, как всегда, нормированной в $L_2(0, a)$.

Первый интеграл справа возьмем по частям. Приняв во внимание условия (10), получим

$$\lambda_i = \int_0^a p(t)\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 dt + \pi^2 \sum_{k=1}^{m} \left(n_k^{(i)^2} / (q_k - p_k)^2\right) \int_0^a \chi(t)\, v_i^2(t)\, dt. \tag{14}$$

Из формулы (13) вытекает, что оба члена справа в (14) ограничены. В частности,

$$\int_0^a p(t)\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 dt \leqslant C = \text{const}. \tag{15}$$

Оператор $-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right)$ при условиях (10) имеет дискретный спектр (см. § 45); неравенство (15) означает, что в энергетической норме этого оператора функции $v_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности. В силу теоремы 4 § 40 множество этих функций компактно в $L_2(0, a)$. Выделим из этого множества сходящуюся последовательность v_{i_s}, $s = 1, 2, \ldots$, и пусть в смысле сходимости в $L_2(0, a)$ $\lim\limits_{s\to\infty} v_{i_s}(t) = \bar{v}(t)$. Тогда

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^a \chi(t)\, v_{i_s}^2(t)\, dt = \int_0^a \chi(t)\, \bar{v}^2(t)\, dt. \tag{16}$$

Второе слагаемое в (14) справа ограничено, а из чисел $n_k^{(i)}$ хотя бы одно стремится к бесконечности, поэтому необходимо

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^a \chi(t)\, v_i^2(t)\, dt = 0.$$

Из соотношения (16) следует теперь, что $\bar{v}(t) = 0$. Но это противоречит тому, что

$$\int_0^a \bar{v}^2(t)\, dt = \lim_{s\to\infty}\int_0^a v_{i_s}^2(t)\, dt = 1.$$

Итак, соотношение (13), а с ним и соотношение (12), невозможно. Этим доказано, что оператор L_0 имеет дискретный спектр. В силу теоремы 4 § 40 всякое множество функций из энергетического пространства H_{L_0}, ограниченное в норме этого пространства, компактно в $L_2(\Omega)$.

в) Пусть теперь M — множество функций, принадлежащих энергетическому пространству H_L оператора (1) — (3) и ограниченных в норме этого пространства, так что

$$|u|_L^2 = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,\,k=1}^{m-1} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 \right\} d\Omega \leqslant C = \text{const}, \tag{17}$$
$$u \in M.$$

Под знаком интеграла (17) заменим сумму меньшей величиной

$$c_1\chi(x_m)\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2,$$

а коэффициент A_{mm} — меньшей величиной $c_1 p(x_m)$. Это приведет нас к неравенству

$$\int_\Omega\left[\chi(x_m)\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2+p(x_m)\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2\right]d\Omega\leqslant\frac{C}{c_1}. \tag{18}$$

Доопределим функции множества M, положив их равными нулю вне Ω. Нетрудно доказать, что доопределенные таким образом функции принадлежат пространству H_{L_0}. Неравенству (18) можно придать вид

$$\int_\Pi\left[\chi(x_m)\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2+p(x_m)\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2\right]d\Omega\leqslant\frac{C}{c_1},$$

или короче $|u|^2_{L_0}\leqslant C/c_1$.

Таким образом, множество M ограничено в норме H_{L_0}. Но тогда оно компактно в $L_2(\Omega)$. По теореме 3 § 40 оператор L имеет дискретный спектр.

Точно так же доказывается дискретность спектра оператора L', определенного соотношениями (1) и (2) настоящего параграфа и соотношением (24) § 28.

§ 49. Устойчивость сжатой пластинки

1. Будем рассматривать изгиб пластинки, в плоскости которой действуют напряжения T_x, T_{xy}, T_y. Будем считать эти напряжения сжимающими, понимая под этим, что в любой точке пластинки главные нормальные напряжения T_1 и T_2 сжимающие: $T_1<0$, $T_2<0$. Мы допустим также, что как T_1, так и T_2 всегда остаются по абсолютной величине больше некоторой положительной постоянной T_0, так что

$$T_1\leqslant-T_0,\quad T_2\leqslant-T_0.$$

В § 31 было отмечено, что выражение

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

инвариантно относительно поворота координатных осей; повернув оси координат так, чтобы они совпали с главными осями напряжений, найдем

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 =$$
$$= T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 \leqslant -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right].$$

Выражение

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 = (\operatorname{grad} w)^2$$

также инвариантно относительно поворота осей, отсюда

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

и окончательно

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \leqslant -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]. \quad (1)$$

Будем предполагать, что край пластинки жестко закреплен:

$$w\,|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0. \quad (2)$$

Неравенство (1) вместе с формулами (4) и (9) § 31 показывают, что оператор $-T$ положительно определенный.

Допустим теперь, что напряжения, оставаясь сжимающими, изменяются пропорционально некоторому параметру λ, который, следовательно, должен быть положительным. Как было выяснено в § 38, потеря устойчивости пластинки возможна при тех значениях λ, которые служат собственными числами уравнения (12) § 38; если ввести обозначение

$$\tilde{T}w = -\frac{h}{D}Tw, \quad (3)$$

то это уравнение можно записать в виде

$$\Delta^2 w - \lambda\tilde{T}w = 0. \quad (4)$$

Заметим, что оператор $\tilde{T}$ положительно определенный.

Докажем теперь, что уравнение (4) имеет при условиях (2) бесконечное множество положительных собственных чисел. Отсюда будет следовать, что существует бесконечное множество значений параметра, при которых пластинка с жестко закрепленным краем теряет устойчивость.

Уравнение (4) подходит под общий тип уравнений § 44, если положить $A = \Delta^2$, $B = \tilde{T}$. Мы докажем наше утверждение, если, в соответствии с теоремой 4 § 44, докажем, что всякое множество, ограниченное по энергии оператора A, компактно в смысле сходимости по энергии оператора B.

В § 30 было установлено [формула (16)], что

$$|w|_A^2 = \iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dS. \tag{5}$$

Далее,

$$|w|_B^2 = (\tilde{T}w,\ w) = -\frac{h}{D}(Tw,\ w).$$

По формуле (10) § 31 имеем теперь

$$|w|_B^2 \leqslant \frac{2Nh}{D} \iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS, \tag{6}$$

где N обозначает наибольший из максимумов величин $|T_x|$, $|T_{xy}|$, $|T_y|$.

Пусть теперь дано множество M функций, удовлетворяющих условиям (2), и пусть $|w|_A \leqslant C$, если $w \in M$. Из формулы (5) легко заключаем тогда, что

$$\iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 \right\} dS \leqslant C^2, \tag{7}$$

$$\iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dS \leqslant C^2. \tag{8}$$

Из условий (2) вытекает, что

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_L = 0. \tag{9}$$

Пусть Δ, как обычно, означает оператор Лапласа. Рассмотрим положительно определенный оператор $-\Delta$, заданный на функциях, которые обращаются в нуль на контуре L. Из (9) видно, что если $w \in M$, то $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ входят в область определения оператора $-\Delta$, а неравенства (7) и (8) показывают, что эти производные ограничены в совокупности по энергии этого оператора. Из результатов § 47 следует тогда, что множества производных $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ компактны в $L_2(\Omega)$. Таким образом, из множества M

можно выделить такую последовательность w_n, $n = 1, 2, \ldots$, что соответствующие последовательности $\frac{\partial w_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_n}{\partial y}$ сходятся в $L_2(\Omega)$. Но тогда

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \iint\limits_S \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = 0,$$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \iint\limits_S \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 dx\, dy = 0.$$

Теперь из неравенства (6) следует, что

$$|w_n - w_m|_B^2 \leqslant \frac{2Nh}{D} \iint\limits_S \left\{\left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2\right\} dS \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0,$$

а это означает, что последовательность $w_n, n = 1, 2, \ldots$, сходится по энергии оператора B, и наше утверждение доказано.

Наименьшее критическое значение параметра λ можно найти как минимум интеграла (5) при условии

$$|w|_B^2 = -\frac{h}{D} \iint\limits_S \left\{T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS = 1. \qquad (10)$$

Минимум ищется на множестве функций, удовлетворяющих условиям (2) жесткого закрепления края. Используя теоремы вложения С. Л. Соболева [2], можно доказать существование бесконечного множества критических значений параметра и при других обычно встречающихся условиях закрепления края.

2. Рассмотрим теперь более общий случай. Допустим, что в некоторой точке пластинки хотя бы одно из главных напряжений — сжимающее, и докажем, что тогда уравнение (4) имеет и положительные собственные числа. Отсюда будет следовать, что при увеличении параметра пластинка может потерять устойчивость. Обозначим оператор Δ^2 при краевых условиях жесткого закрепления через A. Докажем, что оператор $P = A^{-1}\tilde{T}$ вполне непрерывен в H_A. Пусть M — множество, ограниченное в H_A:

$$|u| \leqslant C, \qquad u \in M.$$

Это значит, что

$$\iint\limits_S (w_{xx}^2 + 2w_{xy}^2 + w_{yy}^2)\, dx\, dy \leqslant C^2.$$

В таком случае множество $\tilde{T}M$ ограничено в $L_2(S)$: если $u \in M$, то

$$\|\tilde{T}u\| \leqslant \frac{Nh}{D}(\|w_{xx}\| + 2\|w_{xy}\| + \|w_{yy}\|) \leqslant \frac{4NhC}{D}.$$

Оператор A^{-1} вполне непрерывен в $L_2(S)$ и переводит множество $\tilde{T}M$ в компактное: можно выделить из M такую последовательность $\{u_n\}$, что

$$\| Pu_n - Pu_m \| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0.$$

Теперь

$$|Pu_n - Pu_m|^2 = [A^{-1}\tilde{T}(u_n - u_m),\ P(u_n - u_m)] =$$
$$= (\tilde{T}(u_n - u_m),\ Pu_n - Pu_m) \leqslant \| \tilde{T}u_n - \tilde{T}u_m \| \cdot \| Pu_n - Pu_m \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8NhC}{D} \| Pu_n - Pu_m \| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0.$$

Таким образом, оператор P переводит множество M, ограниченное в H_A, в множество PM, компактное в том же пространстве. Это значит, что оператор P вполне непрерывен в H_A.

Оператор P также симметричен в H_A, так как, в силу симметричности оператора $\tilde{T}$ в $L_2(S)$,

$$[Pw_1,\ w_2] = [A^{-1}\tilde{T}w_1,\ w_2] = (\tilde{T}w_1,\ w_2) = (w_1,\ \tilde{T}w_2) = [w_1,\ Pw_2].$$

Уравнение (4) равносильно следующему:

$$w - \lambda P w = 0. \tag{11}$$

Пусть T_1, T_2 — главные напряжения, и пусть $T_1 < 0$ в некоторой точке области S. Тогда найдется такая окрестность S' упомянутой точки, в которой $T_1 \leqslant -\alpha$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Имеем

$$[Pw,\ w] = (\tilde{T}w,\ w) = -\frac{h}{D}(Tw,\ w) =$$
$$= -\frac{h}{D}\iint_S (T_x w_x^2 + 2T_{xy} w_x w_y + T_y w_y^2)\, dx\, dy =$$
$$= -\frac{h}{D}\iint_S \left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] dx\, dy;$$

x_1, x_2 — главные направления.

Возьмем функцию $w(x, y) \in C^{(2)}(\bar{S})$, тождественно равную нулю вне S'. Тогда

$$[Pw,\ w] = -\frac{h}{D}\iint_{S'} \left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{12}$$

Возможны два случая. Если в области S' напряжение $T_2 \leqslant 0$, то $[Pw, w] \geqslant 0$, причем существуют функции, на которых $[Pw, w] > 0$. Тогда $\sup \frac{[Pw,\ w]}{|w|^2} > 0$; как об это сказано в § 6, среди собственных чисел оператора P есть положительные, и наше утверждение доказано. Если же в S' найдется точка, в которой $T_2 > 0$, то в такой точке $T_1 \neq T_2$; это неравенство выполняется и в некоторой окрестности S'' указанной точки. В таком случае в каждой точке упомянутой окрестности главные направления, как известно, определяются единственным образом, и траектории главных напряжений образуют правильную сетку. Возьмем функцию $w(x, y)$ равной нулю вне S'' и в интеграле (12) введем x_1 и x_2 в качестве криволинейных координат. Положим $\left|\frac{D(x, y)}{D(x_1, x_2)}\right| = J$ и обозначим образ области S'' в плоскости (x_1, x_2) через σ. Теперь

$$[Pw_1, w_2] = -\frac{h}{D}\iint\limits_{\sigma}\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] J\,dx_1\,dx_2.$$

Уже было сказано, что $T_1 \leqslant -\alpha$. Пусть еще $T_2 \leqslant \beta$, где β — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$[Pw, w] \geqslant \frac{h}{D}\iint\limits_{\sigma}\left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 - \beta\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] J dx_1\,dx_2. \tag{13}$$

Поместим начало координат внутри σ. В области σ выделим эллипс $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$ и введем координаты ρ, θ, полагая

$$x_1 = a\rho\cos\theta, \quad x_2 = b\rho\sin\theta.$$

Эллипс возьмем столь малым, чтобы в нем было $J = J_0 + \eta$, где $J_0 = \text{const}$, а η — достаточно малая величина. Пусть еще $\alpha/a^2 - \beta/b^2 > 0$. Возьмем функцию w равной

$$w = \begin{cases} (\rho^2 - 1)^3 & \text{внутри эллипса,} \\ 0 & \text{вне и на границе эллипса.} \end{cases}$$

Если точка (x_1, x_2) лежит внутри эллипса, то

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{6\rho(\rho^2-1)^2\cos\theta}{a}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{6\rho(\rho^2-1)^2\sin\theta}{b}.$$

Кроме того,

$$dx_1 dx_2 = ab\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Теперь по неравенству (13)

$$[Pw, w] \geqslant \frac{36abh}{D}\int\limits_0^1 \rho^3(\rho^2-1)^4(J_0+\eta)\,d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\beta\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3\pi abhJ_0}{5D}\left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{b^2}\right) - c|\eta|\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{b^2}\right); \qquad c = \text{const} > 0.$$

Полуоси a и b можно выбрать так, чтобы было $\alpha/a^2=2\beta/b^2$. Отсюда видно, что выражение $[Pw, w]$ принимает и положительные значения, и, следовательно, среди собственных чисел оператора P есть положительные. Наше утверждение доказано полностью.

§ 50. Собственные частоты пластинки с острым краем [1]

Сохраняем предположения и обозначения § 37. Уравнение колебаний пластинки имеет вид

$$(h^3 w_{xx})_{xx}+\sigma(h^3 w_{yy})_{xx}+\sigma(h^3 w_{xx})_{yy}+(h^3 w_{yy})_{yy}+2(1-\sigma)(h^3 w_{xy})_{xy}=$$
$$=-\frac{12(1-\sigma^2)\gamma}{E}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \qquad (1)$$

здесь γ — плотность материала пластинки.

Положим $w=u(x, y)e^{i\omega t}$, где ω — частота собственных колебаний пластинки. Это приводит нас к следующему уравнению для амплитуды $u(x, y)$:

$$(h^3 u_{xx})_{xx}+\sigma(h^3 u_{yy})_{xx}+\sigma(h^3 u_{xx})_{yy}+$$
$$+(h^3 u_{yy})_{yy}+2(1-\sigma)(h^3 u_{xy})_{xy}=\lambda h u, \qquad (2)$$

где

$$\lambda=12(1-\sigma^2)\gamma\omega^2/E. \qquad (3)$$

Будем считать, что прогиб w удовлетворяет краевым условиям (4) § 37 и, при соответствующих значениях «показателя вырождения» α, также условиям (7), (8) § 37. Тем же условиям удовлетворяет и амплитуда u, так что

$$u\big|_{L''}=\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{L''}=0, \qquad (4)$$

$$u\big|_{L'}=0, \qquad 0<\alpha<2/3, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{L'}=0, \qquad 0<\alpha<1/3. \qquad (6)$$

Уравнение (2) вместе с соответствующими условиями (4) — (6) можно записать в виде

$$J(u)-\lambda h u=0, \qquad (7)$$

где J — оператор, введенный в § 37. Уравнение (7) принадлежит к типу уравнений, рассмотренному в § 44 с той, однако, существенной разницей, что операторы $A=J$ и B — оператор

[1]) См. Е. В. Маховер [2].

умножения на h — могут оказаться не положительно определенными, а только положительными. Наша задача — выяснить, при каких показателях вырождения спектр собственных частот, т. е. спектр уравнения (7), будет дискретным. Мы ограничимся здесь случаем, когда область S — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant 1$; переход к более общему случаю без особого труда совершается на основании минимаксимального принципа.

Теорема. *Если показатель вырождения $\alpha < 2$, то спектр собственных частот пластинки с острым краем дискретен.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть A, A_1, B, B_1 — положительные операторы, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве, и пусть $A_1 \leqslant A$ и $B_1 \geqslant B$. Если спектр уравнения*

$$(A_1 - \lambda B_1) u = 0 \tag{8}$$

дискретен, то уравнение

$$(A - \lambda B) u = 0 \tag{9}$$

также имеет дискретный спектр.

Пусть M — ограниченное множество в пространстве H_A: $|u|_A \leqslant C$, $u \in M$. В силу соотношения $A_1 \leqslant A$, множество $M \subset H_{A_1}$ и $|u|_{A_1} \leqslant C$, $u \in M$. Спектр уравнения (8) дискретен, а в таком случае (см. теорему 4 § 40; она справедлива и для уравнений вида (8) или (9)) множество M компактно в пространстве H_{B_1}: можно выделить такую последовательность $\{u_n\} \subset M$, что $|u_n - u_k|_{B_1} \xrightarrow[n,\,k \to \infty]{} 0$. Теперь из соотношения $B \leqslant B_1$ следует, что $|u_n - u_k|_B \xrightarrow[n,\,k \to \infty]{} 0$, т. е. что последовательность $\{u_n\}$ сходится в H_B. Таким образом, любое множество, ограниченное в H_A, компактно в H_B; по теореме 4 § 44, уравнение (9) имеет дискретный спектр.

Переходим к доказательству теоремы. В уравнении (7) $A = J$, а B есть оператор умножения на функцию $h(x, y)$. Из неравенства (3) § 37 ясно, что $B \leqslant B_1$, где через B_1 обозначен оператор умножения на $c_2 y^\alpha$. Построим еще оператор $J_1 \leqslant J$. Это построение мы проведем в несколько шагов.

Обозначим через J_0 оператор, в который переходит оператор J при $\sigma = 0$. Из формулы (9) § 37 легко вытекает, что при $\sigma \geqslant 0$

$$(1 - \sigma) J_0 \leqslant J \leqslant (1 + \sigma) J_0; \tag{10}$$

при $\sigma < 0$ неравенство (10) заменяется обратным. Пусть, например, $\sigma > 0$, тогда $(1 - \sigma) J_0 \leqslant J$. Далее, из формул (3) и (9) § 37 ясно, что оператор J_0 уменьшится, если заменить $h(x, y)$ на $c_1 y^\alpha$. Наконец, условия жесткого закрепления вертикальных сторон пластинки $x=0$ и $x=a$ заменим условиями свободного опирания:

$$u\,|_{x=0}=u\,|_{x=a}=0; \qquad \Delta u\,|_{x=0}=\Delta u\,|_{x=a}=0,$$

или, что то же,

$$u\,|_{x=0}=u\,|_{x=a}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=a}=0. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что такая замена приводит к уменьшению оператора.

Обозначим построенный таким образом оператор через $\tilde{J}_0$; он действует по формуле

$$\tilde{J}_0(u)=c_1^3\left\{\left(y^{3\alpha}u_{xx}\right)_{xx}+2\left(y^{3\alpha}u_{xy}\right)_{xy}+\left(y^{3\alpha}u_{yy}\right)_{yy}\right\}$$

и задан на функциях, обладающих определенными дифференциальными свойствами (см. § 37) и удовлетворяющих условиям (4) (при $y=1$), (5) и (6) (при $y=0$) и (11). Из сказанного выше ясно, что если положить $J_1=(1-\sigma)\tilde{J}_0$, то $J_1\leqslant J_0$.

В силу доказанной выше леммы нам достаточно установить, что при указанных краевых условиях уравнение

$$y^{3\alpha}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(y^{3\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^{3\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\mu y^{\alpha}u \tag{12}$$

имеет дискретный спектр.

Для определенности примем, что $\alpha>2/3$, тогда условия (5) и (6) отпадают. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Собственные функции уравнения (12) при условиях (4) и (11) будем искать в виде $u(x,y)=v(y)\sin(n\pi x/a)$, где n — натуральное число; условия (11) при этом выполнены. Функция $v(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(y^{3\alpha}\frac{d^2 v}{dy^2}\right)-\frac{2n^2\pi^2}{a^2}\frac{d}{dy}\left(y^{3\alpha}\frac{dv}{dy}\right)+\frac{n^4\pi^4}{a^4}y^{3\alpha}v=\mu y^{\alpha}v \tag{13}$$

и краевым условиям

$$v(1)=v'(1)=0; \tag{14}$$

кроме того, $v(y)$ и $v'(y)$ должны быть ограничены при $y\to 0$.

Оператор в левой части уравнения (13) заменим меньшим, сохранив только первое слагаемое. Мы приходим к задаче о спектре уравнения

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(y^{3\alpha}\frac{d^2 v}{dy^2}\right)=\mu y^{\alpha}v \tag{15}$$

при сформулированных выше условиях. Пусть $G(y,\eta)$ — функция Грина оператора $\frac{d^2}{dy^2}\left(y^{3\alpha}\frac{d^2}{dy^2}\right)$ и $\varphi(y)=y^{\alpha/2}v(y)$. Тогда $\varphi(y)$

удовлетворяет интегральному уравнению с симметричным ядром

$$\varphi(y)=\mu\int_0^a y^{\alpha/2}\eta^{\alpha/2}G(y,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta. \tag{16}$$

Функция Грина[1]) $G(y,\eta)$ определяется, как известно, следующими условиями: она непрерывна вместе с первой производной по y при $0\leqslant y,\ \eta\leqslant 1$, а ее вторая производная по y непрерывна при $0<y,\eta\leqslant 1$. Третья производная по y терпит при $y=\eta$ скачок, равный $\eta^{-3\alpha}$. Наконец, в каждом из интервалов $(0,\eta)$ и $(\eta,1)$ функция G удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^{3\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)=0.$$

Из общих соображений известно также, что функция Грина симметрична: $G(y,\eta)=G(\eta,y)$. Всем этим условиям удовлетворяет функция, которая при $y\leqslant\eta$ определяется формулой

$$G(y,\ \eta)=A_0(\eta)\,y+A_1(\eta);$$

$$A_0(\eta)=\frac{1}{(2-3\alpha)(1-3\alpha)}\left[\eta^{2-3\alpha}+(3\alpha-2)\,\eta+1-3\alpha\right],$$

$$A_1(\eta)=-\frac{1}{(2-3\alpha)(3-3\alpha)}\left[\eta^{3-3\alpha}+(3\alpha-3)\,\eta+2-3\alpha\right],$$

а при $y>\eta$ — по симметрии.

Ядро уравнения (16) суммируемо с квадратом. Действительно, так как это ядро симметрично, то

$$\int_0^1\int_0^1 y^\alpha\eta^\alpha G^2(y,\ \eta)\,dy\,d\eta=2\int_0^1\eta^\alpha\left\{\int_0^\eta y^\alpha\left[A_0(\eta)\,y+A_1(\eta)\right]^2dy\right\}d\eta=$$

$$=2\int_0^1\eta^\alpha\left[\frac{\eta^{\alpha+3}}{\alpha+3}A_0^2(\eta)+\frac{2\eta^{\alpha+2}}{\alpha+2}A_0(\eta)\,A_1(\eta)+\frac{\eta^{\alpha+1}}{\alpha+1}A_1^2(\eta)\right]d\eta.$$

При $\eta>0$ подынтегральная функция непрерывна, а вблизи $\eta=0$ она имеет порядок $O(\eta^{7-4\alpha})$ и потому суммируема, если $7-4\alpha>-1$, или $\alpha<2$.

Теперь при $\alpha<2$ для уравнения (16) справедлива классическая теория интегральных уравнений с симметричным ядром, и это уравнение имеет счетную последовательность стремящихся к бесконечности характеристических чисел и соответствующую полную в $L_2(0,1)$ систему собственных функций. Это означает, что уравнение (15) имеет дискретный спектр. В силу леммы

[1]) О функции Грина и ее свойствах см., например, М. А. Наймарк [1].

настоящего параграфа, это же заключение справедливо и для уравнения (13). Обозначим его собственные числа через $\lambda_{n,k}$, а соответствующие собственные функции — через $v_{n,k}(y)$. Тогда числа $\lambda_{n,k}$, $n, k = 1, 2, \ldots$, суть собственные числа уравнения (12), и им соответствуют собственные функции $v_{n,k}(y)\sin(n\pi x/a)$. Легко видеть, что система этих функций полна в $L_2(y^\alpha, S)$. Числа $\lambda_{n,k}$ сгущаются только на бесконечности — это доказывается так же, как в § 48, и спектр уравнения (12) дискретен. Но тогда дискретен и спектр уравнения (7). Теорема доказана.

§ 51. Собственные колебания упругих тел

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачу о собственных колебаниях упругого тела с закрепленной границей и докажем, что такое тело имеет бесконечное множество собственных частот. Для упрощения записи откажемся от обозначений § 29 и будем пользоваться следующими обозначениями: Ω — конечная область трехмерного евклидова пространства, S — граница области Ω, $\overline{\Omega} = \Omega + S$, P и Q — точки с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 и ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно. Далее, $\mathbf{u}$ — вектор смещений; составляющие этого вектора по осям x_1, x_2, x_3 декартовых координат обозначим через u_1, u_2, u_3. Положим еще

$$s_{ik} = s_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right); \tag{1}$$

величины s_{ik} равны поделенным на 2 составляющим тензора деформаций. Составляющие тензора напряжений будем обозначать через τ_{ik}; они удовлетворяют уравнениям обобщенного закона Гука

$$\tau_{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} s_{lm} = \tau_{ki}; \tag{2}$$

коэффициенты упругости c_{iklm} подчинены известным соотношениям симметрии $c_{iklm} = c_{kilm} = c_{ikml} = c_{lmik}$, так что различных коэффициентов c_{iklm} не более 21. Составляющие напряжений удовлетворяют известным уравнениям движения

$$\gamma\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - K_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где t — время, γ — плотность упругой среды, K_i — составляющие вектора объемных сил $\mathbf{K}$. Подставив сюда значения τ_{ik} из (2), мы получим уравнения, которым удовлетворяет вектор упругих смещений. Запишем эти уравнения в виде одного векторного уравнения

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{K} = 0, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = - \sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (c_{iklm} s_{lm}) \mathbf{x}_i^{(0)}; \tag{4}$$

$\mathbf{x}_i^{(0)}$ — орт оси x_i. Если среда однородная, то

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = - \sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{iklm} \frac{\partial s_{lm}}{\partial x_k} \mathbf{x}_i^{(0)}.$$

В случае равновесия $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$, и мы приходим к уравнению упругого равновесия

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{K}. \tag{5}$$

Уравнение свободных колебаний получим, предполагая, что $\mathbf{K} \equiv 0$, и заменяя $\mathbf{u}$ через $\mathbf{u}(P) e^{i\omega t}$. Мы получим тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda \mathbf{u} = 0, \qquad \lambda = \gamma\omega^2. \tag{6}$$

Оператор $\mathbf{A}$ будем называть оператором теории упругости.

Введем в рассмотрение симметричный тензор V, составляющие которого суть

$$v_{ik} = \frac{1}{12\pi} \left\{ \frac{5}{r} \delta_{ik} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}, \tag{7}$$

где r — расстояние между точками $P(x_1, x_2, x_3)$ и $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

V есть частный случай известного тензора Сомильяна [1]; каждый столбец $\mathbf{v}_i$ тензора V удовлетворяет однородному уравнению теории упругости изотропной среды, постоянные Ляме которой имеют значения $\lambda = 0$ и $\mu = 1/2$. Соответствующий оператор теории упругости мы будем обозначать через $\mathbf{A}_0$, так что $\mathbf{v}_i$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{v}_i = 0. \tag{8}$$

Точку P вырежем сферой радиуса ε и к оставшейся части Ω_ε области Ω применим первую формулу Бетти, полагая $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}'' = \mathbf{v}_i$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ и понимая под $\mathbf{u}$ любой вектор, обращающийся в нуль на границе области Ω. При этом интеграл по S пропадет; точно так же исчезнет интеграл и в левой части формулы Бетти

---

[1]) См., например, Е. Трефтц [2].

в силу уравнения (8), и мы придем к равенству

$$\int_{\Omega_\varepsilon} w(\mathbf{u},\ \mathbf{v}_i)\,d\Omega + \int_{S_\varepsilon} \mathbf{t}_{i,\,\varepsilon}\,\mathbf{u}\,dS = 0, \tag{9}$$

где S_ε — поверхность упомянутой выше сферы радиуса ε и с центром в P, а $\mathbf{t}_{i,\,\varepsilon}$ — вектор напряжений на площадку сферы S_ε, соответствующий смещению $\mathbf{v}_i$. Полагая в (9) $\varepsilon \to 0$, мы, как и в § 47, получим $u_i(P) = \int\limits_\Omega W(\mathbf{u},\ \mathbf{v}_i)\,d\Omega$. Нетрудно видеть, что при $\lambda = 0$, $\mu = 1/2$ будет $W(\mathbf{u},\ \mathbf{v}_i) = \sum\limits_{l,\ m=1}^{3} s_{lm}s_{lm}^{(i)}$, где $2s_{lm}$ и $2s_{lm}^{(i)}$ суть составляющие деформации, отвечающие смещениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}^{(i)}$. Таким образом,

$$u_i(P) = \int_\Omega \sum_{l,\ m=1}^{3} s_{lm}s_{lm}^{(i)}\,d\Omega. \tag{10}$$

Интеграл (10) есть сумма интегралов вида

$$\psi_{lm}^{(i)}(P) = \int_\Omega s_{lm}s_{lm}^{(i)}\,d\Omega, \tag{11}$$

ядра которых имеют оценку $|s_{lm}^{(i)}| \leqslant C/r^2$, $C = \mathrm{const}$ и принадлежат, следовательно, к классу ядер со слабой особенностью. Как было отмечено в § 6, интегральный оператор (11) вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$ и, следовательно, переводит всякое ограниченное в этом пространстве множество функций s_{lm} в компактное множество функций $\psi_{lm}^{(i)}$.

Вполне непрерывный оператор (11) ограничен в $L_2(\Omega)$. Отсюда следует неравенство $\|\psi_{kl}^{(i)}\| \leqslant C_1 \|s_{kl}\|$, $C_1 = \mathrm{const}$. Суммируя, найдем

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant C_2 \sum_{i,\ k,\ l=1}^{3} \|\psi_{k,\,l}^{(i)}\|^2 \leqslant C_3 \sum_{k,\ l=1}^{3} \|s_{kl}\|^2.$$

Опираясь на положительность величины $W(\mathbf{u})$, можно доказать, что $\sum\limits_{k,\ l=1}^{3} \|s_{kl}\|^2 \leqslant C_4 W(\mathbf{u})$. Но тогда

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant 2C_5 \int_\Omega W(\mathbf{u})\,d\Omega, \quad 2C_5 = C_3C_4,$$

или по формуле (14) § 29 $\|\mathbf{u}\|^2 \leqslant C_5(\mathbf{Au}, \mathbf{u})$, откуда

$$(\mathbf{Au},\ \mathbf{u}) \geqslant \|\mathbf{u}\|^2/C_5 \tag{12}$$

т. е *в случае закрепленной границы тела оператор теории упругости положительно определенный.*

Уже было отмечено, что оператор (11) переводит ограниченное множество функций в компактное. Из формулы (10) следует тогда, что множество векторов смещений, равных нулю на границе тела, будет компактным, если соответствующие им интегралы энергии ограничены в совокупности. Теперь из теоремы 3 § 40 вытекает дискретность спектра оператора теории упругости в случае жестко закрепленной границы тела.

Оператор теории упругости имеет дискретный спектр и при других обычно употребляемых краевых условиях. Подробное изложение относящихся сюда вопросов дано в книге автора [11]. Здесь мы ограничимся некоторыми библиографическими справками. Для произвольной кусочно гладкой границы дискретность спектра оператора теории упругости была установлена К. Фридрихсом [1]) [3] в случае жестко закрепленной или свободной границы. Д. М. Эйдус [1, 2] дал другое, значительно более простое, чем у К. Фридрихса, доказательство для случая свободной границы и распространил его на некоторые другие краевые задачи теории упругости. Приведенное в тексте доказательство принадлежит автору [12].

В заключение отметим, что наименьшее собственное число оператора теории упругости при условии жесткого закрепления границы тела равно минимуму удвоенной потенциальной энергии деформации

$$2\int_\Omega W(\mathbf{u})\,d\Omega \tag{13}$$

при условии, что

$$\int_\Omega \mathbf{u}^2\,d\Omega = 1. \tag{14}$$

Минимум ищется на векторах смещений, которые на границе области обращаются в нуль. Укажем еще, не приводя доказательства, что наименьшее собственное число оператора теории упругости в случае свободной границы тела также равно минимуму интеграла (13), но векторы смещений на этот раз удовлетворяют, кроме равенства (14), еще и равенствам ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки P)

$$\int_\Omega \mathbf{u}\,d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega \mathbf{R}\times\mathbf{u}\,d\Omega = 0;$$

краевым условиям можно эти векторы не подчинять, так как условие на свободной границе естественное.

---

[1]) В предположении достаточной гладкости границы этот результат был значительно ранее получен Г. Вейлем [1].

ГЛАВА VII

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

В практике применения любых приближенных методов фундаментальную роль играет вопрос об оценке погрешности приближенного решения задачи. Такие оценки могут быть двух родов: априорные и апостериорные. Первые дают возможность оценить погрешность еще до того, как приближенное решение построено. Для процесса Ритца априорные оценки удается строить, если координатные функции принадлежат тому или иному специальному классу функций и если точное решение задачи обладает некоторыми специальными свойствами, например, если оно обладает достаточно большим числом производных.

Как правило, априорные оценки суть оценки асимптотические — они дают порядок убывания погрешности при бесконечном возрастании числа n координатных элементов, входящих в приближенное решение.

Апостериорная оценка — это оценка погрешности уже построенного приближенного решения.

В настоящей главе исследуется вопрос об априорных оценках для решений неоднородных задач типа $Au = f$, где A — положительно определенный оператор (иногда мы будем рассматривать более общий случай, когда A — линейный оператор, имеющий обратный A^{-1}), f — данный, u — искомый элемент некоторого гильбертова пространства. В гл. VIII изучаются апостериорные оценки для задач того же типа, в гл. IX — оценки для собственных чисел и, отчасти, собственных функций.

§ 52. Оценки через наилучшее приближение

Идея построения таких оценок проста. Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\{\varphi_n\}$ — координатная система, u_0 — обобщенное решение уравнения $Au = f$ и, наконец,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{1}$$

— приближенное решение данного уравнения по Ритцу. Элемент u_n реализует минимум функционала энергии $F(u) = = |u - u_0|^2 - |u_0|^2$ или, что то же, минумум величины $|u - u_0|$ на элементах вида (1). Иначе говоря, элемент u_n реализует наилучшее приближение по энергетической норме точного решения u_0 линейными агрегатами координатных элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. В ряде случаев удается найти оценку такого наилучшего приближения, тем самым оказывается построенной оценка погрешности приближенного решения по Ритцу в энергетической норме.

Сказанное поясним двумя примерами.

1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x) \tag{2}$$

при краевых условиях

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3}$$

Допустим, что функции p, p', q, f непрерывны на сегменте $[0, 1]$ и что $p(x) \geqslant p_0 = \mathrm{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Оператор задачи (2)—(3) положительно определенный в $L_2(0, 1)$, и эта задача имеет единственное обобщенное решение $u_0(x)$, принадлежащее энергетическому пространству задачи.

Можно доказать (см., например, книгу автора [28]), что при $f \in L_2(0, 1)$ обобщенное решение задачи (2)—(3) непрерывно на сегменте $[0, 1]$ вместе со своей первой производной, имеет почти всюду вторую производную $u'' \in L_2(0, 1)$ и почти всюду удовлетворяет уравнению (2). Но в нашем случае функция $f(x)$ не только суммируема с квадратом, но просто непрерывна, и из уравнения (2), записанного в виде

$$u_0''(x) = \frac{1}{p(x)}\left[q(x)u_0(x) - p'(x)u_0'(x)\right],$$

видно, что вторая производная $u_0''(x)$ также непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В качестве координатных возьмем функции $\varphi_k(x) = \sin k\pi x$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $u_n(x)$ есть тригонометрический полином.

На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ разложим $u_0(x)$ в ряд Фурье по синусам; дифференцируя, получим ряд Фурье функции $u_0'(x)$ по косинусам.

Оценим коэффициенты Фурье функции $u_0(x)$ и ее производной. Пусть

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x. \tag{4}$$

Тогда

$$u_0'(x) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cos k\pi x.$$

При этом

$$a_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin k\pi x \, dx;$$

интегрируя по частям и принимая во внимание, что $u_0(x)$ удовлетворяет условиям (2), найдем

$$a_k = -\frac{2}{k^2\pi^2} \int_0^1 u_0''(x) \sin k\pi x \, dx = \frac{\alpha_k}{k^2}, \tag{5}$$

где α_k суть коэффициенты Фурье функции $-\pi^{-2} u_0''(x)$.

Энергетическая норма в нашем случае определяется формулой

$$|u|^2 = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2) \, dx, \tag{6}$$

которая по существу совпадает с формулой (5_1) § 21.

Величину (6) будем оценивать следующим образом. Функции p и q, непрерывные на сегменте, ограничены. Пусть $p(x) \leqslant p_1$, $q(x) \leqslant q_1$, где p_1 и q_1 — постоянные. Тогда

$$|u|^2 \leqslant \int_0^1 (p_1 u'^2 + q_1 u^2) \, dx.$$

По неравенству (12) § 8 $\int_0^1 u^2 \, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 \, dx$. Отсюда

$$|u|^2 \leqslant c \int_0^1 u'^2(x) \, dx; \qquad c = p_1 + \frac{1}{2} q_1. \tag{7}$$

В неравенстве (7) положим $u = u_0 - v_n$, где v_n — произвольный тригонометрический полином n-го порядка по синусам,

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin k\pi x.$$

Мы получим тогда

$$|u_0 - v_n|^2 \leqslant c \int_0^1 (u_0' - v_n')^2 \, dx.$$

В качестве v_n возьмем n-ую частичную сумму ряда (5). При этом интеграл справа примет наименьшее значение. Оценим его. По уравнению замкнутости

$$\int_0^1 (u_0' - v_n')^2 \, dx = \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 a_k^2 = \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 = o(n^{-2}).$$

Отсюда $|u_0 - v_n|^2 = o(n^{-2})$.

Приближенное решение по Ритцу, $u_n(x)$, по самому определению таково, что оно сообщает минимум величине

$$\left| u_0 - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \sin k\pi x \right|,$$

где γ_k — произвольные постоянные коэффициенты. Отсюда следует, что $|u_0 - u_n| \leqslant |u_0 - v_n|$, и это приводит к искомой оценке

$$|u_0 - u_n| = o(n^{-1}). \tag{8}$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче оценка энергетической нормы дает сразу же равномерную оценку разности $u_0(x) - u_n(x)$. Действительно, в силу условий (2),

$$u_0(x) - u_n(x) = \int_0^x [u_0'(t) - u_n'(t)] \, dt.$$

По неравенству Буняковского

$$|u_0(x) - u_n(x)|^2 \leqslant x \int_0^x [u_0'(t) - u_n'(t)]^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 [u_0'(t) - u_n'(t)]^2 \, dt \leqslant \frac{1}{p_0} |u_0 - u_n|^2;$$

здесь мы использовали соотношения (6) и свойства коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$. Теперь

$$|u_0(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p_0}} |u_0 - u_n|, \tag{9}$$

и если верна оценка (8), то

$$|u_0(x) - u_n(x)| = o(n^{-1}).$$

Оценку (8) можно улучшить, если предположить, что на сегменте [0, 1] функции $p'(x), q(x)$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда существует непрерывная третья производная $u_0'''(x)$. Интегрируя еще раз по частям в формуле (5), находим, что $|a_k| \leqslant c_1 k^{-3}$. Отсюда

$$\int_0^1 (u_0' - v_n')^2 dx = \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 a_k^2 \leqslant c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-4}.$$

По интегральному признаку сходимости рядов

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-4} < \int_n^{\infty} k^{-4} dk = \frac{1}{3n^3}.$$

Сопоставив это с неравенством (7), найдем, что $|u_0 - v_n| = O(n^{-3/2})$, и окончательно

$$|u_0 - u_n| = O(n^{-3/2}). \tag{10}$$

В силу соотношения (9) такая же оценка верна и для величины $|u_0(x) - u_n(x)|$. Последние две оценки были получены Н. М. Крыловым [1].

Дальнейшее улучшение аналитических свойств функций $p(x), q(x), f(x)$ не улучшает коэффициентов a_k и потому не улучшает оценки (10). Такое улучшение возможно, например, в следующем направлении [1]).

Введя новую независимую переменную

$$t = a \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}$$

и выбрав подходящим образом постоянную a, мы приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + r(t)u = F(t), \tag{11}$$

причем t будет меняться на том же сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$; краевые условия (3) остаются неизменными. Выполним еще замену неизвестной функции по формуле $u = \tilde{u} + t(1-t)(\alpha t + \beta)$. При подходящем выборе постоянных α и β можно добиться того,

---

[1]) См. книгу автора [11].

чтобы в преобразованном уравнении свободный член обращался в нуль при $t = 0$ и $t = 1$. Пусть уравнение (11) уже обладает этим свойством. Тогда $u''(0) = u''(1) = 0$; если $r(t)$ и $F(t)$ трижды непрерывно дифференцируемы, то функция $u_0(x)$ имеет пять непрерывных производных, и $a_k = O(k^{-5})$. Как и выше, отсюда следуют оценки

$$|u_0 - u_n| = O(n^{-7/2}), \quad |u_0(x) - u_n(x)| = O(n^{-7/2}). \tag{12}$$

Если функции $r(t)$ и $F(t)$ имеют $2s—1$ непрерывных производных, а $r(t) \geqslant r_0 = \text{const} > 0$, то можно усилить сходимость процесса Ритца следующим образом. В уравнении (11) положим

$$u = \tilde{u} + \sum_{j=1}^{s-1} t^j (1-t)^j (\alpha_j t + \beta_j). \tag{13}$$

Коэффициенты α_j и β_j выберем так, чтобы

$$\left.\frac{d^{2\nu}}{dt^{2\nu}} \frac{F(t)}{r(t)}\right|_{t=0,\,1} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s-2. \tag{14}$$

Тогда $\tilde{u}^{(2\nu)}(0) = \tilde{u}^{(2\nu)}(1) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, и существует непрерывная производная $\tilde{u}^{(2s+1)}(t)$. Коэффициенты Фурье функции $\tilde{u}$ имеют оценку $O(n^{-2s-1})$; если $\tilde{u}_n$ — приближенное решение по Ритцу, то, повторив предшествующие рассуждения, получим

$$\left.\begin{aligned} |\tilde{u}_0 - \tilde{u}_n| &= O(n^{-s-1/2}), \\ |\tilde{u}_0(x) - \tilde{u}_n(x)| &= O(n^{-s-1/2}). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2. Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\,u = f(P), \qquad P \in \Omega, \tag{16}$$

$$u|_S = 0. \tag{17}$$

Область Ω предполагается конечной, а ее граница S — достаточно гладкой. Формула (7) § 27 показывает, что в данном случае

$$|u|^2 = \int_\Omega \left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(P)\,u^2\right] d\Omega.$$

Пусть $\{\varphi_n(P)\}$ — координатная система, и пусть E_n, $E_n^{(l)}$ означают наилучшие среднеквадратические приближения функций u_0, $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_l}$ линейными агрегатами функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}$ соответственно. Если обозначить еще через $\lambda_n(P)$ наибольшее собственное число матрицы коэффициентов $A_{jk}(P)$ и положить $N = \max\{\max\limits_{P\in\overline{\Omega}}\lambda_n(P), \max\limits_{P\in\overline{\Omega}} C(P)\}$, то

$$|u_0 - u_n|^2 \leqslant N\left\{\sum_{k=1}^{n} E_n^{(i)^2} + E_n^2\right\}. \tag{18}$$

Здесь, как и выше, u_0 — точное решение задачи (16)—(17), u_n — ее приближенное решение по Ритцу. Та же оценка, но с другой постоянной N, верна, если E_n, $E_n^{(i)}$ означают не среднеквадратические, а равномерные чебышевские наилучшие приближения.

В своей статье [1] И. Ю. Харрик пришла к следующим результатам [1]).

Пусть граница S определяется уравнением $\varphi(P) = 0$, причем функция φ r раз непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$; внутри области Ω она положительна, а на границе S ее градиент по абсолютной величине строго положителен:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 > 0, \qquad P \in S.$$

Пусть, далее, функция $u(P)$ r раз непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ и обращается в нуль на границе S. Тогда существует последовательность полиномов $R_n(P)$ степени $\leqslant n$ по каждой из координат такая, что

$$|D^s[u(P) - \varphi(P)R_n(P)]| \leqslant C\sigma_n/n^{r-s}, \qquad s = 0, 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Здесь D^s означает любую из производных порядка s, C — постоянная, σ_n — величина, которая зависит только от n и стремится к нулю при $n \to \infty$.

В качестве координатных функций для задачи (16)—(17) возьмем функции

$$\varphi(P)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}; \qquad k_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{20}$$

Несколько изменяя наши обычные обозначения, будем под $u_n(x)$ понимать такое приближенное решение по Ритцу, которое содержит функции (20) со всевозможными показателями $k_j \leqslant n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

---

[1]) В целях простоты изложения мы приводим здесь результаты И. Ю. Харрик в несколько менее общем и полном виде.

Из неравенства (19) легко вытекает, что при таком выборе координатных функций $E_n^{(i)} = o(n^{-r+1})$, $E_n = o(n^{-r})$, и окончательно

$$|u_n - u_0| = o(n^{-r+1}). \tag{21}$$

Эта оценка также содержится в статье И. Ю. Харрик [1]; там же приведены некоторые равномерные оценки разности $u_0(P) - u_n(P)$.

§ 53. Проекционная схема

Из общей теории приближенных методов, разработанной Л. В. Канторовичем ([2]; см. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], гл. XIV), вытекает некоторая общая схема (будем называть ее «проекционной») построения и исследования класса процессов, которые являются обобщениями процессов Ритца и Бубнова—Галеркина. С полной отчетливостью эта схема была сформулирована в работах И. К. Даугавета [1, 2]; она использована в работе автора [27] [1]).

Здесь мы изложим проекционную схему в условиях не самых общих, но достаточных для того, чтобы из этой схемы можно было получить и процесс Ритца.

Пусть в уравнении

$$Au = f \tag{1}$$

A есть линейный оператор, который взаимно однозначно и непрерывно переводит некоторое гильбертово пространство H_1 в такое же пространство H_2, так что $D_A = H_1$, $R_A = H_2$ и оба оператора A и A^{-1} ограничены [2]). Норму и скалярное произведение в H_k, $k = 1, 2$, будем соответственно обозначать через $(\, , \,)_k$ и $\| \; \|_k$.

Построим последовательность конечномерных подпространств $H_1^{(n)}$ пространства H_1, обладающую тем свойством, что для любого элемента $u \in H_1$ справедливо соотношение

$$E_n(u) = \inf_{v_n \in H_1^{(n)}} \| u - v_n \|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{2}$$

Обозначим через $H_2^{(n)}$ то подпространство пространства H_2, в которое оператор A переводит подпространство $H_1^{(n)}$. Коротко будем это записывать так: $H_2^{(n)} = AH_1^{(n)}$.

---

[1]) Отметим, что близкая схема, но в несколько иных условиях была ранее И. К. Даугавета сформулирована Н. И. Польским [9.] Подробнее об этом см ниже, гл. XI, § 100.

[2]) Ограниченность операторов A и A^{-1} здесь означает следующее: существуют такие постоянные c', c'', что $\| A\varphi \|_2 \leqslant c' \| \varphi \|_1$, $\| A^{-1}\psi \|_1 \leqslant c'' \| \psi \|_2$. Наименьшее значение c' называется *нормой* оператора A и обозначается через $\| A \|$. Аналогично определяется $\| A^{-1} \|$.

Для каждого n выберем оператор Q_n, проектирующий (вообще говоря, косо, см. § 5) H_2 на $H_2^{(n)}$. Приближенное решение уравнения (1) будем строить как элемент $u_n \in H_1^{(n)}$, удовлетворяющий уравнению

$$Au_n = Q_n f. \tag{3}$$

Если обозначить $P_n = A^{-1}Q_nA$, то $u_n = P_nu_0$, где u_0 — точное решение уравнения (1). Покажем, что оператор P_n проектирует H_1 на подпространство $H_1^{(n)}$. Действительно, если $u \in H_1$, то

$$P_nu = A^{-1}Q_nAu \in A^{-1}Q_nH_2 = A^{-1}H_2^{(n)} = H_1^{(n)},$$

и остается проверить, что $P_n^2 = P_n$. Пусть $u \in H_1$, тогда $P_nu \in H_1^{(n)}$. Положим $P_nu = v_n$, $P_n^2u = P_nv = w_n$. Имеем $w_n = A^{-1}Q_nAv_n$. Отсюда $Q_nAv_n = Aw_n$. Но $Av_n \in AH_1^{(n)} = H_2^{(n)}$, поэтому $Q_nAv_n = Av_n$. Теперь $Av_n = Aw_n$ и $v_n = w_n$, что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать, что

$$\| u_0 - u_n \|_1 \leqslant (1 + \| P_n \|) E_n(u_0). \tag{4}$$

Действительно, если v_n — произвольный элемент подпространства $H_1^{(n)}$, то

$$\| u_0 - u_n \|_1 \leqslant \| u_0 - v_n \|_1 + \| v_n - u_n \|_1 =$$
$$= \| u_0 - v_n \|_1 + \| P_n(v_n - u_0) \|_1 \leqslant (1 + \| P_n \|) \| u_0 - v_n \|_1. \tag{5}$$

Подпространство $H_1^{(n)}$ конечномерно, поэтому в нем существует такой элемент $\tilde{v}_n$, что $E_n(u_0) = \|u_0 - \tilde{v}_n\|_1$. Положив в (5) $v_n = \tilde{v}_n$, получим формулу (4).

Из неравенства (4) вытекает такой достаточный признак сходимости $u_n \to u_0$: если $\| P_n \| E_n(u_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\| u_0 - u_n \|_1 \to 0$. Заметим, что

$$\| P_n \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| Q_n \| \cdot \| A \| = \mathrm{const} \cdot \| Q_n \|, \tag{6}$$

поэтому достаточно, чтобы

$$\| Q_n \| E_n(u_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е. Если $\| u_n - u_0 \|_1 \to 0$, то

$$\| Au_n - f \|_2 = \| A(u_n - u_0) \|_2 \leqslant \| A \| \cdot \| u_n - u_0 \|_1 \to 0.$$

Таким образом, условие (7) достаточно для того, чтобы «невязка» $Au_n - f$ стремилась к нулю в метрике H_2.

§ 54. Применение к процессу Ритца

Кроме пространств H_1 и H_2 введем в рассмотрение еще одно гильбертово пространство H, и пусть все элементы пространства H_1 принадлежат пространству H_2 и образуют в нем плотное множество, а все элементы пространства H_2 принадлежат пространству H и также образуют в нем плотное множество. Символически будем записывать это так: $H_1 \subset H_2 \subset H$. Скалярное произведение и норму в H будем обозначать через $(\ ,\ )$ и $\|\ \|$, а в H_k — через $(\ ,\ )_k$ и $\|\ \|_k$.

Допустим, что для любого элемента $u \in H_1$ справедливы неравенства

$$\|u\| \leqslant c_2 \|u\|_2 \leqslant c_1 \|u\|_1, \tag{1}$$

где c_2 и c_1 — положительные постоянные. Отсюда и из сделанных выше предположений следует, что множество элементов пространства H_1 плотно в H.

Выберем полную в H_1 координатную систему $\{\varphi_n\}$. За $H_1^{(n)}$ примем подпространство, натянутое на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т. е. подпространство элементов вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, где α_k — постоянные. Тогда подпространство $H_2^{(n)}$ будет натянуто на $A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$. Проекторы Q_n определим соотношениями

$$(f - Q_n f,\ \varphi_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Допустим, что оператор A положительно определенный в пространстве H. Тогда система (2) есть система Ритца для уравнения (1) § 53 в пространстве H. Действительно, элемент $Q_n f$ имеет вид $Q_n f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k$, $a_k = \mathrm{const}$, и соотношения (2) принимают форму (8_2) § 17:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k,\ \varphi_j) = (f,\ \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу уравнения (3) § 53

$$u_n = A^{-1} Q_n f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{3}$$

и, следовательно, u_n есть приближенное решение уравнения (1) § 53 по Ритцу в пространстве H.

Оценим величину $\|Q_n\|$. Имеем

$$\|Q_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k \right\|_2^2 = \sum_{j,\,k=1}^{n} (A\varphi_k,\ A\varphi_j)_2\, a_j a_k.$$

Обозначим через $\Lambda_n^{(n)}$ наибольшее собственное число матрицы скалярных произведений

$$(A\varphi_k,\ A\varphi_j)_2, \quad j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда

$$\|Q_n f\|_2^2 \leqslant \Lambda_n^{(n)} \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{4}$$

Как обычно, символами $[\,,]$ и $|\ |$ обозначим энергетическое произведение и энергетическую норму оператора A; через $\lambda_1^{(n)}$ обозначим наименьшее собственное число матрицы Ритца, т. е. матрицы скалярных произведений $(A\varphi_k, \varphi_j)$, $j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$|u_n|^2 = \sum_{j,\ k=1}^{n} (A\varphi_k,\ \varphi_j) a_k a_j \geqslant \lambda_1^{(n)} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Но (см. формулу (15) § 17) $|u_n| \leqslant |u_0|$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} |u_0|^2.$$

По неравенству (*) § 16 $|u_0| \leqslant \|f\|/\gamma$, и потому $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \|f\|^2/(\lambda_1^{(n)}\gamma^2)$. Далее, в силу неравенства (1), $\|f\| \leqslant c_2 \|f\|_2$. Теперь

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant c_2^2 \|f\|_2^2/(\lambda_1^{(n)}\gamma^2).$$

Подставив это в (4), получим

$$\|Q_n\| \leqslant C_3 \sqrt{\Lambda_n^{(n)}/\lambda_1^{(n)}}. \tag{5}$$

Если числа $\lambda_1^{(n)}$ ограничены снизу положительным числом [1]), то оценка упрощается:

$$\|Q_n\| \leqslant C_4 \sqrt{\Lambda_n^{(n)}}. \tag{6}$$

В силу соотношений (4) и (6) § 53

$$\|u_0 - u_n\|_1 \leqslant C_5 \sqrt{\Lambda_n^{(n)}/\lambda_1^{(n)}}; \tag{7}$$

[1]) Это будет, если координатная система сильно минимальна в энергетическом пространстве. См. книгу автора [26].

если числа $\lambda_1^{(n)}$ ограничены снизу положительным числом, то

$$\| u_0 - u_n \|_1 \leqslant C_6 \sqrt{\Lambda_n^{(n)}}. \tag{8}$$

Всюду выше через C с различными индексами обозначены некоторые постоянные.

Формулы (7) и (8) дают априорную оценку погрешности приближенного решения по Ритцу в норме H_1.

§ 55. О норме производной полинома [1])

Пусть $R_n(x)$ — полином степени n, и

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | R_n(x) |.$$

Хорошо известно неравенство А. А. Маркова [2])

$$| R_n'(x) | \leqslant 2Mn^2/(b-a), \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Это неравенство обобщается на полиномы от многих независимых переменных: если $R_n(P) = R_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — полином, степень которого по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не превосходит n, и Ω — конечная область в пространстве этих переменных, удовлетворяющая так называемому «условию конуса», то [3])

$$| \operatorname{grad} R_n(P) | \leqslant Cn^2 \max_{Q \in \overline{\Omega}} | R_n(Q) |, \qquad C = \mathrm{const}, \qquad P \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

Из неравенства (2) вытекает очевидное следствие: если D^k означает любую производную порядка k, то

$$| D^k R_n(P) | \leqslant C_k n^{2k} \max_{Q \in \overline{\Omega}} | R_n(Q) |, \qquad C_k = \mathrm{const}, \qquad P \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

В книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1] для полиномов, зависящих от двух переменных, и для случая круга установлено неравенство

$$| R_n(x_1, x_2) | \leqslant C_0 n^2 \| R_n \|_{L_2(\Omega)},$$

---

[1]) Результаты, сформулированные в настоящем параграфе, будут использованы в §§ 56 и 57.

[2]) См., например, И. П. Натансон [2].

[3]) Область Ω удовлетворяет условию конуса, если существует прямой шаровой конус фиксированных размеров, обладающий следующим свойством: совместив вершину конуса с произвольной точкой $P_0 \in \overline{\Omega}$, можно затем повернуть его так, что он весь, кроме, может быть, точки P_0, будет лежать в Ω. Доказательство неравенства (2) дано в статье автора [29]. В книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1] неравенство (2) сообщено без вывода и без каких-либо предположений о характере области Ω для случая двух независимых переменных.

верное, если точка $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$. Рассуждение обобщается на любое число m переменных и приводит к неравенству

$$\max_{P \in \overline{\Omega}} |R_n(P)| \leqslant C_0 n^m \| R_n \|_{L_2(\Omega)}, \tag{4}$$

верному для области, удовлетворяющей условию конуса. Для любой непрерывной функции $g(P)$ имеем

$$\| g \|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} g^2(P)\, d\Omega \leqslant |\Omega| \max_{P \in \overline{\Omega}} |g(P)|^2,$$

где через $|\Omega|$ обозначен объем области Ω. Отсюда и из неравенства (2) следует

$$\left\| \frac{\partial R_n}{\partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{|\Omega|} \max_{P \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial R_n}{\partial x_k} \right| \leqslant C' n^2 \max_{P \in \overline{\Omega}} |R_n(P)|,$$

что в соединении с неравенством (4) приводит к важному соотношению

$$\left\| \frac{\partial R_n}{\partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C'' n^{m+2} \| R_n \|_{L_2(\Omega)}. \tag{5}$$

Для производных более высокого порядка аналогично имеем

$$\| D^k R_n \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{|\Omega|} \max_{P \in \overline{\Omega}} |D^k R_n(P)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{|\Omega|}\, C_k n^{2k} \max_{P \in \overline{\Omega}} |R_n(P)| \leqslant C''' n^{m+2k} \| R_n(P) \|_{L_2(\Omega)}. \tag{6}$$

При $m = 1$ удается получить лучшую оценку. Этот случай мы и рассмотрим.

Обозначим, как обычно, через $P_n(x)$ полином Лежандра[1]) степени n; через $p_n(x)$ обозначим нормированный полином Лежандра $p_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2}\; P_n(x)$; $\| p_n \|_{L_2(-1,1)} = 1$. Вычислим величину $\| p_n' \|_{L_2(-1,1)}$. Имеем

$$\| p_n' \|^2_{L_2(-1,1)} = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} P_n'^2(x)\, dx =$$
$$= \frac{2n+1}{2} P^n(x) P_n'(x) \Big|_{-1}^{1} - \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_n''(x)\, dx.$$

Интеграл справа равен нулю, потому что полином $P_n(x)$ ортогонален к полиному $P_n''(x)$, степень которого ниже n. Далее,

[1]) О полиномах Лежандра см., например, В. И. Смирнов [3] или Е. В. Гобсон [1].

$P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$, а значения производной мы найдем из соотношения

$$P_n'(x)=(2n-1)P_{n-1}^{(x)}+(2n-5)P_{n-3}^{(x)}+(2n-9)P_{n-5}(x)+\ldots,$$

которое дает $P_n'(\pm 1)=O(n^2)$. Теперь (значок $L_2(-1,1)$ у нормы опускаем) $\|p_n'\|=O(n^{3/2})$.

Пусть $R_n(x)$ — одномерный полином степени n. Разложим его по нормированным полиномам Лежандра $R_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kp_k(x)$. Тогда $\|R_n\|^2=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^2$. В то же время

$$R_n'^2(x)=\left[\sum_{k=0}^{n}a_kp_k'(x)\right]^2\leqslant\sum_{k=0}^{n}a_k^2\sum_{k=0}^{n}p_k'^2(x)=\|R_n\|^2\sum_{k=0}^{n}p_k'^2(x).$$

Интегрируя, находим

$$\|R_n'\|^2\leqslant\|R_n\|^2\sum_{k=0}^{n}\|p_k'\|^2\leqslant C^2\|R_n\|^2\sum_{k=0}^{n}k^3\leqslant C_1^2n^4\|R_n\|^2.$$

Окончательно[1])

$$\|R_n'\|\leqslant C_1n^2\|R_n\|,\qquad C_1=\mathrm{const}. \tag{7}$$

Отсюда вытекает неравенство для высших производных:

$$\|R_n^{(k)}\|\leqslant C_2n^{2k}\|R_n\|,\qquad C_k=\mathrm{const}. \tag{8}$$

§ 56. Полиномиальные приближения для обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу (15), (16) § 21; сохраним все предположения относительно уравнения (15) § 21. В качестве координатной системы возьмем систему полиномов

$$\varphi_n(x)=(x-a)^m(x-b)^mR_{n-1}(x),\qquad n=1,\,2,\,\ldots, \tag{1}$$

где $R_n(x)$ — полином степени n. Приближенное по Ритцу решение $u_n(x)$ есть тогда полином степени $n+2m-1$.

Допустим, что коэффициенты $p_k(x)$ и свободный член $f(x)$ имеют на сегменте $[a,b]$ достаточно много непрерывных производных. Легко показать тогда, что точное решение задачи, которое мы обозначим через $u_0(x)$, имеет сколь угодно много производных. Будем считать, что оно имеет на сегменте $[a,b]$ непре-

---

[1]) Неравенство (7) легко получить, также как частный случай известных более общих неравенств; см., например, Н. К. Бари [1].

рывные производные до порядка r включительно, где число r достаточно велико.

Выясним, как производные приближенного решения сходятся к производным точного решения. Для этого воспользуемся результатами предыдущих параграфов. Возьмем $H = L_2(a, b)$. Чтобы выбрать пространства H_1 и H_2, введем в рассмотрение класс гильбертовых пространств $W_2^{(l)}(a, b)$[1]. Элементы пространства $W_2^{(l)}(a, b)$ суть функции, $l-1$ раз непрерывно дифференцируемые на сегменте $[a, b]$ и имеющие почти всюду l-ую производную, суммируемую с квадратом на том же сегменте; кроме того, если $u \in W_2^{(l)}(a, b)$, то

$$u^{(l-1)}(x) = u^{(l-1)}(a) + \int_a^x u^{(l)}(t)\,dt.$$

Норма в $W_2^{(l)}(a, b)$ может быть задана формулой

$$\| u \|_l^2 = \| u \|_{W_2^{(l)}}^2 = \sum_{k=0}^{l} \| u^{(k)} \|_{L_2}^2; \tag{2}$$

допустима любая другая норма, эквивалентная[2] норме (2). В соответствии с формулой (2) определяется и скалярное произведение в $W_2^{(l)}(a, b)$:

$$(u, v)_l = (u, v)_{W_2^{(l)}} = \sum_{k=0}^{l} (u^{(k)}, v^{(k)}). \tag{2_1}$$

Данное здесь определение пригодно для любого натурального l. Принято обозначать $W_2^{(0)}(a, b) = L_2(a, b)$.

Теперь положим $H_1 = \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(a, b)$, $H_2 = W_2^{(l)}(a, b)$, где $l \geqslant 0$ и $s = 2m + l \leqslant r$; нолик сверху означает, что рассматривается подпространство пространства $W_2^{(s)}(a, b)$, определяемое условиями (16) § 21. Нетрудно убедиться, что при этом выполнены все требования предшествующего параграфа, наложенные на оператор данной задачи.

---

[1]) Вводимые здесь пространства $W_2^{(l)}(a, b)$ являются частным случаем введенных С. Л. Соболевым [2] пространств $W_2^{(l)}(\Omega)$, где Ω — произвольная область в пространстве любого числа измерений.

[2]) Две нормы $\| \; \|_1$ и $\| \; \|_2$ называются *эквивалентными*, если они определены на одном и том же множестве элементов и если для любого элемента u из этого множества справедливо неравенство

$$c_1 \| u \|_1 \leqslant \| u \|_2 \leqslant c_2 \| u \|_1,$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, не зависящие от u.

Можно считать, что координатные функции (1) ортонормированы в $W_2^{(m)}(a, b)$; на значении приближенного решения u_n это не отразится (см. § 17). Тогда, как можно доказать[1]), собственные числа матриц Ритца ограничены снизу положительным числом, и для нормы $\|Q_n\|$ справедлива оценка (6) § 54.

Оценим величину $\Lambda_n^{(n)}$. Обозначая через A оператор нашей задачи, имеем

$$\Lambda_n^{(n)} = \max_{\|t\|=1} \sum_{j,\, k=1}^{n} (A\varphi_j,\ A\varphi_k)_l t_j t_k = \max_{\|t\|=1} \left\| A \sum_{k=1}^{n} t_k \varphi_k \right\|_l^2. \tag{3}$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \varphi_k(x) = \Phi_n(x,\ t). \tag{4}$$

Выражение $\Phi_n(x, t)$ — полином степени не выше $n + 2m + 1$ по каждой из координат. Очевидно также, что, каков бы ни был вектор t, $\Phi_n \in \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(a,\ b)$.

Нетрудно убедиться, что для любой функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(a,\ b)$ справедливо неравенство

$$\| Au \|_l \leqslant C \| u \|_s, \qquad C = \text{const}.$$

В частности, $\| A\Phi_n \|_l \leqslant C \| \Phi_n \|_s$.

Формулу для нормы в $W_2^{(s)}$ можно записать в виде

$$\| u \|_s^2 = \sum_{\sigma=0}^{m+l} \sum_{\tau=0}^{m} \left\| \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} \frac{d^\tau u}{dx^\tau} \right\|_{L_2}^2.$$

По формуле (8) § 55

$$\| \Phi_n \|_s^2 \leqslant C_1 n^{4(m+l)} \sum_{\tau=0}^{m} \left\| \frac{d^\tau \Phi_n}{dx^\tau} \right\|_{L_2}^2 = C_1 n^{4(m+l)} \| \Phi_n \|_m^2.$$

Припоминая, что функции φ_k ортонормированы в $W_2^{(m)}$, найдем $\| \Phi_n \|_m^2 = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 = 1$. Отсюда $\| \Phi_n \|_s^2 \leqslant C_1 n^{4(m+l)}$ и

$$\Lambda_n^{(n)} \leqslant C \max_{\|t\|=1} \| \Phi_n \|_s^2 \leqslant C_2 n^{4(m+l)}.$$

---

[1]) См. по этому поводу книгу автора [26].

Оценку величины $E_n(u_0)$ можно получить как частный случай основной теоремы И. Ю. Харрик [3]:

$$E_n(u_0) \leqslant C_3 n^{-r+s}\sigma_n; \quad \sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь по формуле (8) § 54

$$\| u_0 - u_n \|_s \leqslant C_4 n^{-r+4m+3l}\sigma_n. \tag{5}$$

Формула (5) дает априорную оценку погрешности в норме L_2 для производных порядка $\geqslant 2m$.

Замечание. Интересные априорные оценки погрешности для задачи настоящего параграфа содержатся в работе В. П. Ильина [1].

§ 57. Полиномиальные приближения в многомерных пространствах[1])

Рассмотрим задачу Дирихле для системы вида

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{2k} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(P) D^\beta u) = f(P), \quad P \in \Omega, \tag{1}$$

$$D^\gamma u|_S = 0, \quad 0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1. \tag{2}$$

Здесь P — точка конечной области Ω, гомеоморфной шару и лежащей в m-мерном евклидовом пространстве, α, β и γ — мультииндексы, т. е. наборы m целых неотрицательных чисел: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и т. п.; если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс, то принято обозначать $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. Через D^α здесь обозначается производная

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Мы предполагаем, что граница S области Ω определяется уравнением $\varphi(P) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, где φ — полином[2]). Будем считать, что $\varphi(P) > 0$ внутри Ω и $\operatorname{grad}\varphi(P) \neq 0$, если $P \in S$. Примем также, что коэффициенты $A_{\alpha\beta}(P)$ и свободный член $f(P)$ имеют достаточное число производных, непрерывных в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Допустим еще, что уравнение (1) эллиптическое, не вырождающееся в Ω, и что оператор задачи (1)—(2) положительно определенный в $L_2(\Omega)$.

---

[1]) Для полного понимания настоящего параграфа необходимо знакомство с основными фактами теории соболевских пространств. См. книги С. Л. Соболева [2], В. И. Смирнова [4] и автора [11].

[2]) Если должным образом обобщить результаты статьи И. Ю. Харрик [2], то можно рассмотреть и тот случай, когда $\varphi(P)$ — произвольная достаточно гладкая функция. См. статью автора [29].

В перечисленных условиях точное решение $u_0(P)$ задачи (1)—(2) может иметь сколь угодно много непрерывных производных. Будем считать, что оно имеет в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные до порядка r включительно, где число r достаточно велико.

В качестве координатных функций возьмем произведения

$$\varphi_n^{(j)}(P) = \varphi^k(P) R_n^{(j)}(P), \tag{3}$$

где $R_n^{(j)}(P)$ — полиномы степени $\leqslant n$ по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, причем хотя бы одна из этих степеней равна n. Приближенное решение по Ритцу будем строить в виде

$$u_n(P) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{j} a_q^{(j)} \varphi_q^{(j)}(P). \tag{4}$$

Пусть p — степень полинома $\varphi(P)$. Тогда $u_n(P)$ есть полином, степень которого по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не превосходит $n + kp$.

Возьмем

$$H_1 = \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(\Omega), \qquad H_2 = W_2^{(l)}(\Omega), \qquad H = L_2(\Omega),$$

где $l \geqslant 0$, $s = 2k + l \leqslant r$; нолик сверху означает, как и в § 56, что рассматривается подпространство пространства $W_2^{(s)}(\Omega)$, определяемое условиями (2).

Координатные функции будем считать ортонормированными в $W_2^{(k)}(\Omega)$. Тогда можно доказать, что собственные числа $\lambda_1^{(n)}$ (см. § 54) ограничены снизу положительным числом, и для нормы $\|Q_n\|$ верна оценка (6) § 54.

Оценим величину $\Lambda_n^{(n)}$. Обозначим через N число координатных функций, входящих в приближенное решение (4). Рассуждая, как в § 56, найдем $\Lambda_n^{(n)} = \max\limits_{\|t\|=1} \| A\Phi_n \|_l^2$, где A — оператор задачи (1)—(2) и

$$\Phi_n(P, t) = \sum_{j=1}^{N} t_j \varphi_j(P);$$

здесь, как и в предшествующем параграфе, значок внизу означает номер соответствующего соболевского пространства. Как и в § 56, для любой функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\| Au \|_l \leqslant C \| u \|_s, \qquad C = \text{const}.$$

В частности, $\Phi_n \in \overset{0}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$ и, следовательно,

$$\| A\Phi_n \|_l \leqslant C \| \Phi_n \|_s.$$

Норму в $W_2^{(s)}(\Omega)$ можно задать формулой

$$\| u \|_s^2 = \sum \| D^\sigma D^\tau u \|_{L_2(\Omega)}^2;$$

суммирование производится по всем мультииндексам σ и τ таким, что $|\sigma| \leqslant k + l$ и $|\tau| \leqslant k$. Если воспользоваться оценкой нормы производной полинома (формула (6) § 55), то получим

$$\| \Phi_n \|_s^2 \leqslant C_1 n^{4(k+l)+2m} \sum_{|\tau| \leqslant k} \| D^\tau \Phi_n \|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant C_1 n^{4(k+l)+2m} \| \Phi_n \|_k^2.$$

Координатные функции ортонормированы в $W_2^{(k)}(\Omega)$, поэтому

$$\| \Phi_n \|_k^2 = \sum_{j=1}^N t_j^2 = 1, \tag{5}$$

и окончательно

$$\Lambda_n^{(n)} \leqslant C_2 n^{4(k+l)+2m}. \tag{6}$$

Оценку величины $E_n(u_0)$ дает основная теорема статьи [2] И. Ю. Харрик. В силу этой теоремы

$$E_n(u_0) = O(n^{-r+s}\sigma_n); \qquad \sigma_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Теперь по формуле (8) § 54

$$\| u_0 - u_n \|_s \leqslant C_3 n^{-r+4k+3l+m} \sigma_n. \tag{7}$$

В частности, «невязка» $Au_n - f$ в уравнении (1) стремится к нулю в метрике $L_2(\Omega)$, если $r \geqslant 4k + m$.

Замечание. Для эллиптического уравнения второго порядка и для бигармонического уравнения В. П. Ильин [2] получил оценку лучшую, чем оценка (7), используя разработанный им аппарат так называемых мультипликативных неравенств. Построения В. П. Ильина выходят за рамки настоящей книги.

§ 58. Применение собственных элементов сходного оператора

1. Понятие о невязке. Если дано уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

и u_n — какое-либо его приближенное решение, то разность $Au_n - f$ называется *невязкой* этого приближенного решения. Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и u_n — приближенное решение уравнения (1) по Ритцу. Будем считать, что координатные элементы принадлежат области D_A определения оператора A, тогда $u_n \in D_A$ и выражение $Au_n - f$ — невязка — имеет смысл. Интересен вопрос, при каких условиях невязка стремится к нулю. Это очевидно, если A — ограниченный оператор; если u_0 — точное решение уравнения (1), то по доказанному в § 17 $\| u_n - u_0 \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и потому

$$\| Au_n - f \| = \| A(u_n - u_0) \| \leqslant \| A \| \cdot \| u_n - u_0 \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В общем случае невязка не стремится к нулю. Можно доказать (см. книгу автора [11]), что если невязка стремится к нулю при любом $f \in H$ и при любом выборе координатной системы, то A — ограниченный оператор. Однако при некотором специальном выборе координатной системы невязка может стремиться к нулю: мы видели это в §§ 56, 57. Ниже будет указан еще один способ выбора координатной системы, при котором невязка приближенного решения по Ритцу стремится к нулю.

2. Сходные операторы[1]). Самосопряженные положительно определенные операторы A и B, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве, мы называем *сходными*, если $D_A = D_B$. Если A и B — сходные операторы, то произведения $A^{-1}B$, BA^{-1}, $B^{-1}A$, AB^{-1} ограничены.

В теории операторов в гильбертовом пространстве доказывается такое утверждение: если A — положительно определенный оператор, то существует один и только один положительно определенный оператор $\sqrt{A} = A^{1/2}$, квадрат которого равен A; если γ_0^2 — нижняя грань оператора A, то γ_0 — нижняя грань оператора $A^{1/2}$. Можно доказать[2]), что $D_{\sqrt{A}} = H_A$ и что $|\varphi| = \| \sqrt{A}\varphi \|$, где φ — любой элемент пространства H_A. Отсюда, между прочим, следует, что $[\varphi, \psi] = (\sqrt{A}\varphi, \sqrt{A}\psi)$; $\varphi, \psi \in H_A$.

Если A и B — сходные операторы, то $A^{1/2}$ и $B^{1/2}$ — также сходные[3]). Отсюда следует, что операторы $A^{-1/2}B^{1/2}$, $B^{1/2}A^{-1/2}$, $B^{-1/2}A^{1/2}$, $A^{1/2}B^{-1/2}$ ограничены.

3. Теорема о невязке[4]). *Пусть A и B — сходные положительно определенные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть оператор B имеет дискретный спектр. Если систему $\{\varphi_k\}$ собственных элементов оператора B принять за координатную для уравнения* (1) *и если*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{2}$$

---

[1]) Подробно о сходных операторах см. книгу автора [26], где приведены также доказательства приводимых здесь утверждений.

[2]) См. книгу автора [11].

[3]) Это вытекает из результатов статьи Е. Хайнца [1].

[4]) См. статью автора [18] и статью Г. М. Вайникко [9]. В книге автора [26] теорема о невязке дана в ослабленной форме.

есть n-е приближение по Ритцу к точному решению уравнения (1), *то невязка $Au_n - f$ стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Пусть μ_k — собственное число оператора B, соответствующее собственному элементу φ_k, так что $B\varphi_k = \mu_k\varphi_k$. Как обычно, числа μ_k считаем расположенными в порядке возрастания. Обозначим через P_n оператор ортогонального в H проектирования на подпространство H_n элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, и пусть $P^{(n)} = E - P_n$. Из известных теорем теории операторов в гильбертовом пространстве следует, что при любом $\alpha > 0$ операторы B^α и P_n перестановочны и что

$$\|B^\alpha P_n\| = \mu_n^\alpha, \qquad \|B^{-\alpha}P^{(n)}\| = \mu_{n+1}^{-\alpha}. \tag{3}$$

Пусть u_0 — точное решение уравнения (1). Как было сказано в § 52, приближенное по Ритцу решение u_n дает в H_n наилучшее в H_A приближение к u_0, поэтому

$$|u_0 - u_n|_A \leqslant |u_0 - P_n u_0|_A = |P^{(n)}u_0|_A = \|A^{1/2}P^{(n)}u_0\| \leqslant \leqslant \|A^{1/2}B^{-1/2}\| \cdot \|B^{1/2}P^{(n)}u_0\|.$$

Далее,

$$\|B^{1/2}P^{(n)}u_0\| = \|B^{-1/2}P^{(n)}P^{(n)}Bu_0\| \leqslant \leqslant \|B^{-1/2}P^{(n)}\| \cdot \|P^{(n)}Bu_0\| = \mu_{n+1}^{-1/2}\|P^{(n)}Bu_0\|.$$

Отсюда

$$|u_0 - u_n|_A \leqslant \mu_{n+1}^{-1/2}\|A^{1/2}B^{-1/2}\| \cdot \|P^{(n)}Bu_0\|.$$

С другой стороны,

$$\|B^{1/2}(u_0 - u_n)\| \leqslant \|B^{1/2}A^{-1/2}\| \cdot \|A^{1/2}(u_0 - u_n)\| = \|B^{1/2}A^{-1/2}\| \cdot |u_0 - u_n|_A.$$

Сопоставив это с предыдущим неравенством, получим

$$\|B^{1/2}(u_0 - u_n)\| \leqslant c\mu_{n+1}^{-1/2}\|P^{(n)}Bu_0\|; \tag{4}$$

здесь для краткости положено $c = \|A^{1/2}B^{-1/2}\| \cdot \|B^{1/2}A^{-1/2}\|$. Если $u \in H_n$, то $P^{(n)}u = 0$, поэтому

$$B(u_0 - u_n) = B(P_n + P^{(n)})(u_0 - u_n) = = B^{1/2}P_nB^{1/2}(u_0 - u_n) + BP^{(n)}u_0.$$

Отсюда по формулам (3) и (4)

$$\|B(u_n - u_0)\| \leqslant \left[c\sqrt{\mu_n/\mu_{n+1}} + 1\right]\|P^{(n)}Bu_0\| \leqslant (c+1)\|P^{(n)}Bu_0\|$$

и, следовательно,

$$\|Au_n - f\| = \|A(u_n - u_0)\| \leqslant \|AB^{-1}\| \cdot \|B(u_n - u_0)\| \leqslant \leqslant (c+1)\|AB^{-1}\| \cdot \|P^{(n)}Bu_0\|. \tag{5}$$

Элемент $P^{(n)}Bu_0$ есть остаток ортогонального ряда, дающего разложение элемента Bu_0 по полной ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$. Отсюда следует, что $\| P^{(n)}Bu_0 \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и теорема доказана. Одновременно неравенство (5) дает оценку нормы невязки через наилучшее приближение элемента Bu_0 линейным агрегатом элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Это наилучшее приближение есть величина $\| P^{(n)}Bu_0 \|$.

Примеры. 1. При краевом условии задачи Дирихле (S — граница области Ω) $u|_S = 0$ операторы $Bu = -\Delta u$ и

$$Au = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\,u$$

— сходные, если только оператор A невырожденный. Поэтому при решении задачи Дирихле для уравнения

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)\,u = f(P)$$

целесообразно в качестве координатных брать собственные функции оператора Лапласа для области Ω, удовлетворяющие краевому условию $u|_S = 0$.

2. При краевом условии задачи Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$$

положительно определенные операторы $-\Delta u + u$ и $-\Delta u + C(P)\,u$, где $C(P) > 0$, — сходные. При решении задачи Неймана для уравнения $-\Delta u + C(P)\,u = f(P)$ целесообразно в качестве координатных брать собственные функции (удовлетворяющие краевому условию $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$) оператора $-\Delta u + u$ или, что то же, оператора Лапласа для данной области Ω.

Дальнейшие результаты содержатся в работе А. В. Джишкариани [3].

Пусть v — произвольный элемент пространства H. Система $\{\varphi_k\}$ собственных элементов оператора B ортонормирована и полна в H, поэтому, обозначая $A^{-1} = G$, имеем $Gv = \sum_{j=1}^{\infty} (Gv, \varphi_j)\,\varphi_j$ и одновременно $v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, \varphi_k)\,\varphi_k$. Из второго равенства находим

$$(Gv, \varphi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} (G\varphi_k, \varphi_j)(v, \varphi_k).$$

Подставив это в первое равенство и вводя обозначение $(G\varphi_k, \varphi_j) = c_{jk}$, получаем

$$Gv = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} c_{jk}(v, \varphi_k)\varphi_j. \tag{6}$$

Положим

$$G_n v = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(v, \varphi_k)\varphi_j. \tag{7}$$

Систему Ритца для уравнения (1) можно представить в виде

$$(Au_n - f, \varphi_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда

$$G_n\delta_n = 0, \qquad \delta_n = Au_n - f. \tag{8}$$

Если u_0 — точное решение уравнения (1), то $\delta_n = A(u_n - u_0)$. Отсюда

$$u_n - u_0 = A^{-1}\delta_n = G\delta_n = (G - G_n)\delta_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{jk}(\delta_n, \varphi_k)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(A^{-1}\varphi_k, \varphi_j\right)(\delta_n, \varphi_k)\varphi_j.$$

Далее, $B\varphi_k = \mu_k\varphi_k$ и, следовательно,

$$u - u_n = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(A^{-1}B\varphi_k, \varphi_j\right)(\delta_n, \varphi_k)}{\mu_k}\varphi_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta_n, \varphi_k)}{\mu_k} A^{-1}B\varphi_k, \varphi_j\right)\varphi_j,$$

и так как система $\{\varphi_j\}$ ортонормирована и полна, то

$$u_n - u_0 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta_n, \varphi_k)}{\mu_k} A^{-1}B\varphi_k = A^{-1}B \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta_n, \varphi_k)}{\mu_k}\varphi_k.$$

Отсюда

$$\|u_0 - u_n\| \leqslant \|A^{-1}B\| \cdot \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta_n, \varphi_k)}{\mu_k}\varphi_k \right\| =$$

$$= \|A^{-1}B\| \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta_n, \varphi_k)^2}{\mu_k^2} \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\|A^{-1}B\|}{\mu_{n+1}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (\delta_n, \varphi_k)^2 \right\}^{1/2},$$

и окончательно

$$\| u_0 - u_n \| \leqslant \frac{\| A^{-1}B \| \cdot \| \delta \|}{\mu_{n+1}} = \frac{\| A^{-1}B \|}{\mu_{n+1}} \| Au_n - f \|. \tag{9}$$

По доказанному $Au_n - f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, поэтому

$$\| u_0 - u_n \| = o\left(\mu_{n+1}^{-1}\right). \tag{9_1}$$

Нетрудно получить оценку и в энергетической норме:

$$| u_0 - u_n |_A^2 = (A(u_0, u_n), u_0 - u_n) =$$
$$= (f - Au_n, u_0 - u_n) \leqslant \| \delta_n \| \cdot \| u_0 - u_n \| \leqslant \frac{\| A^{-1}B \|}{\mu_{n+1}} \| \delta_n \|^2,$$

откуда

$$| u_0 - u_n | \leqslant \frac{\sqrt{\| A^{-1}B \|}}{\sqrt{\mu_{n+1}}} \| \delta_n \| = o\left(\mu_{n+1}^{-1/2}\right). \tag{10}$$

ГЛАВА VIII

ВСТРЕЧНЫЕ МЕТОДЫ И АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

§ 59. Встречные методы

Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и пусть уравнение

$$Au = f, \qquad f \in H, \tag{1}$$

приближенно решено процессом Ритца; обозначим через u_n приближенное решение по Ритцу, через u_0 — точное решение уравнения (1). Задача настоящей главы — зная приближение u_n, оценить погрешность $u_0 - u_n$.

Допустим, что координатные элементы принадлежат области D_A определения оператора A. Тогда погрешность приближенного решения можно оценить довольно просто, хотя оценка может оказаться и очень грубой. Указанная погрешность равна

$$u_0 - u_n = GA(u_0 - u_n) = G(f - Au_n), \qquad G = A^{-1},$$

отсюда по формуле (5) § 16 находим оценку для нормы погрешности в метрике H

$$\| u_0 - u_n \| \leqslant \| G \| \cdot \| f - Au_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \| f - Au_n \|. \tag{2}$$

Оценка (2), как было отмечено, может оказаться грубой, так как в общем случае Au_n не стремится к f (см. п. 1 § 58). Кроме того, оценка (2) неприменима, если координатные элементы не принадлежат области D_A: в этом случае она просто лишена смысла.

Другой, более важный способ апостериорной оценки погрешности состоит в следующем. Имеем $F(u_n) = | u_n - u_0 |^2 - | u_0 |^2$. Обозначим $\min F(u) = -| u_0 |^2 = d$. Тогда

$$| u_n - u_0 |^2 = F(u_n) - d. \tag{3}$$

Обычно не удается точно определить число d. Допустим, однако, что в нашем распоряжении есть способ, позволяющий строить числа, меньшие d и сколь угодно к d близкие. Пусть δ — такое число. Заменим в (3) d через δ. От этого правая часть в (3) увеличится, и мы получим искомую оценку

$$|u_n - u_0| < \sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{4}$$

Из неравенства (5) § 9 следует также оценка

$$\| u_n - u_0 \| < \frac{1}{\gamma} \sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{5}$$

Таким образом, дело сводится к построению чисел δ, меньших d и, желательно, по возможности близких к d. Такое построение можно будет осуществить, например, в следующих условиях. Пусть нам дан функционал $\Phi(u)$, минимум или хотя бы точная нижняя граница которого равна $|u_0|^2$. Тогда можно положить $\delta = -\Phi(u)$, где u — любой элемент из области определения функционала $\Phi(u)$; очевидно, при подходящем выборе элемента u можно добиться и того, чтобы δ было сколь угодно близко к $-|u_0|^2$.

Как мы увидим ниже, такие функционалы удается иногда построить, причем в некоторых случаях минимум функционала $\Phi(u)$ достигается на том же элементе u_0, который удовлетворяет уравнению (1) или, что то же, реализует минимум соответствующего функционала энергии. В таком случае минимизирующая последовательность для $\Phi(u)$ может, при известных условиях, доставить новое приближенное решение уравнения (1).

Методы решения этого уравнения, основанные на минимизации функционалов с минимумом, равным $|u_0|^2$, мы будем называть *встречными* по отношению к энергетическому методу. Наиболее важные из встречных методов — это *метод ортогональных проекций* и *метод Трефтца*, речь о которых пойдет в следующих параграфах настоящей главы.

Отметим, не входя в детали, что числа δ можно строить, опираясь на так называемое преобразование Фридрихса, довольно подробно изложенное в монографии Р. Куранта и Д. Гильберта ([1], гл. IV, § 9); дальнейшие применения и некоторые обобщения преобразования Фридрихса можно найти в работах М. Г. Слободянского [1—6].

Оценки (4) и (5) требуют вычисления величины $F(u_n)$. Если, как об этом сказано выше, u_n построено по методу Ритца, то $F(u_n)$ можно вычислять следующим образом. Имеем

$$F(u_n) = \sum_{j,\,k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]\, a_k a_j - 2 \sum_{k=1}^{m} a_k (f, \varphi_k). \tag{6}$$

Коэффициенты a_k удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j] a_k = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Умножив это на a_j и просуммировав, получим

$$\sum_{j, k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j] a_j a_k = \sum_{j=1}^{n} (f, \varphi_j) a_j.$$

Подставив это в (6), придем к искомому результату

$$F(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) a_k. \tag{8}$$

Формула (8) удобна тем, что входящие в нее числа a_k и (f, φ_k) заранее вычислены в процессе составления и решения системы (7). Формула (8) выведена в предположении, что все рассматриваемые функции вещественные. В комплексном гильбертовом пространстве, как нетрудно доказать,

$$F(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{(f, \varphi_k)}. \tag{9}$$

§ 60. Метод ортогональных проекций в задаче Дирихле

Как уже было упомянуто во введении, метод ортогональных проекций был сформулирован в 1909 г. С. Зарембой в его статье [1] применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными. Хотя Заремба и не мог воспользоваться аппаратом теории операторов, в то время еще не вполне разработанной, тем не менее основные особенности метода выступают в упомянутой статье с полной отчетливостью: решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа Заремба получает как проекцию функции, удовлетворяющей поставленному краевому условию, в подпространство гармонических функций. В более поздней статье [2] Заремба применяет тот же метод к задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа с любым числом независимых переменных. Самый термин «метод ортогональных проекций» появился в 1940 г. в статье Г. Вейля [2], который также рассматривал задачу Дирихле; к более широкому классу краевых задач этот метод был применен М. И. Вишиком [1]—[3]. К методу ортогональных проекций примыкают также работы Х. Диаса [1], К. Морэна [1], [2] и М. И. Клиот-Дашинского [1], [2].

Будем искать функцию $u(P)$, которая внутри конечной области Ω удовлетворяет уравнению Пуассона (неоднородному уравнению Лапласа)

$$-\Delta u = f(P), \quad f \in L_2(\Omega), \tag{1}$$

а на границе S области Ω — краевому условию

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Хорошо известная формула векторного анализа $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$ позволяет записать уравнение (1) в виде $-\operatorname{div}\operatorname{grad} u = f(P)$. Обозначим $\operatorname{grad} u = \mathbf{v}$. Заметим, что наша задача будет решена, если мы найдем вектор $\mathbf{v}$, так как восстановление функции по ее градиенту — дело достаточно простое. Теперь нашу задачу можно сформулировать так: *требуется найти вектор* $\mathbf{v}(P)$, *который удовлетворяет уравнению*

$$-\operatorname{div}\mathbf{v} = f(P) \tag{3}$$

и представляет собой градиент некоторой скалярной функции, равной нулю на S.

Введем в рассмотрение векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$, в котором скалярное произведение и норма даны формулами (10) и (11) § 2. Для краткости будем обозначать это пространство через $\mathfrak{H}$. Введем в $\mathfrak{H}$ два подпространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. За $\mathfrak{H}_1$ примем множество векторов, которые являются градиентами функций, принадлежащих энергетическому пространству $H_{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа (см. § 24); напомним, что функции из $H_{\mathfrak{A}}$ обращаются в нуль, в обычном или в обобщенном смысле, на границе области. За $\mathfrak{H}_2$ примем множество векторов, имеющих обобщенную дивергенцию (см. § 35), равную нулю.

Докажем прежде всего, что $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ суть подпространства. Линейность этих множеств очевидна, и надо лишь установить их замкнутость.

Пусть $\mathbf{v}_n \in \mathfrak{H}_1$ и $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$ в смысле сходимости в $\mathfrak{H}$:

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пусть, далее, $\mathbf{v}_n = \operatorname{grad}\varphi_n$, $\varphi_n \in H_{\mathfrak{A}}$. По формуле (20) § 24

$$|\varphi_n - \varphi_k|^2_{\mathfrak{A}} = \int_\Omega (\operatorname{grad}\varphi_n - \operatorname{grad}\varphi_k)^2\, d\Omega = \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_k\|^2 \xrightarrow[n,\ k\to\infty]{} 0,$$

и последовательность $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная в $H_{\mathfrak{A}}$. В силу полноты пространства $H_{\mathfrak{A}}$ существует такая функция $\varphi \in H_{\mathfrak{A}}$, что

$$|\varphi_n - \varphi|_{\mathfrak{A}} = \left\{\int_\Omega (\mathbf{v}_n - \operatorname{grad}\varphi)^2\, d\Omega\right\}^{1/2} = \|\mathbf{v}_n - \operatorname{grad}\varphi\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но, как мы видели, одновременно $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; в силу единственности предела $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ и, следовательно, $\mathbf{v} \in \mathfrak{H}_1$. Этим доказано, что $\mathfrak{H}_1$ есть подпространство пространства $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathbf{v}_n \in \mathfrak{H}_2$ и $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Имеем $\operatorname{div}\mathbf{v}_n = 0$, что по формуле (*) § 35 означает следующее:

$$\int_\Omega \mathbf{v}_n(P)\operatorname{grad}\varphi(P)\,d\Omega = (\mathbf{v}_n, \operatorname{grad}\varphi) = 0, \tag{4}$$

где на этот раз $\varphi(P)$ означает произвольную функцию, бесконечно дифференцируемую в Ω и равную нулю вблизи границы S области Ω. По непрерывности скалярного произведения из равенства (4) находим, что $(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\varphi) = 0$. Та же формула (*) § 35 дает нам, что вектор $\mathbf{v}$ имеет обобщенную дивергенцию и что $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, и, следовательно, $\mathfrak{H}_2$ есть подпространство.

Дальнейшее основано на важной формуле

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2. \tag{5}$$

Формула (5) содержит два утверждения, которые нам предстоит доказать:

1) Если $\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{H}_1$ и $\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{H}_2$, то $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.

2) Если $\mathbf{v} \in \mathfrak{H}$, то $\mathbf{v}$ можно представить в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{H}_1$ и $\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{H}_2$.

Пусть $\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad}\varphi_1$, $\varphi_1 \in H_{\mathfrak{A}}$. По определению энергетического пространства существует такая последовательность $\varphi_{1n} \in D_{\mathfrak{A}}$, $n = 1, 2, \ldots$, что $|\varphi_1 - \varphi_{1n}|_{\mathfrak{A}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ или, что то же,

$$\|\operatorname{grad}\varphi_1 - \operatorname{grad}\varphi_{1n}\| = \|\mathbf{v}_1 - \operatorname{grad}\varphi_{1n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Напомним, что функции из $D_{\mathfrak{A}}$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$ и равны нулю на S. Можно доказать (мы на этом не останавливаемся), что функции φ_{1n} можно выбрать бесконечно дифференцируемыми и равными нулю не только на самой границе S, но и вблизи этой границы. По условию $\operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0$ и по формуле (*) § 35 $(\mathbf{v}_2, \operatorname{grad}\varphi_{1n}) = 0$. Переходя к пределу под знаком скалярного произведения, получим $(\mathbf{v}_2, \operatorname{grad}\varphi_1) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = 0$, и утверждение 1) доказано.

Обратимся к утверждению 2). Пусть $\mathbf{v} \in \mathfrak{H}$. Поставим задачу: в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ найти функцию, реализующую минимум функционала

$$|\varphi|^2_{\mathfrak{A}} - 2(\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{v}). \tag{6}$$

Линейный функционал $l\varphi = (\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{v})$ ограничен в $H_{\mathfrak{A}}$. Действительно, $|l\varphi| \leqslant \|\operatorname{grad}\varphi\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ или по формуле (20) § 24 $|l\varphi| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot |\varphi|_{\mathfrak{A}}$. В силу результатов § 20 задача о минимуме функционала (6) имеет решение, которое мы обозначим через φ_1. Положим $\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad}\varphi_1$ и $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Тогда $\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{H}_1$; остается доказать что $\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{H}_2$, т. е., что $\operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0$.

Пусть $\eta(P)$ — произвольная функция, бесконечно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ и равная нулю вблизи границы S. Такая функция принадлежит пространству $H_{\mathfrak{A}}$, поэтому функция $\varphi_1(P)+\alpha\eta(P)$ при любом вещественном α также принадлежит этому пространству.

Функция $F(\alpha)$, определенная равенством

$$F(\alpha)=|\varphi_1+\alpha\eta|_{\mathfrak{A}}^2-2(\operatorname{grad}(\varphi_1+\alpha\eta),\ \mathbf{v})=$$
$$=\alpha^2|\eta|_{\mathfrak{A}}^2+2\alpha\{[\varphi_1,\ \eta]_{\mathfrak{A}}-(\mathbf{v},\ \operatorname{grad}\eta)\}+|\varphi_1|^2-2(\operatorname{grad}\varphi_1,\ \mathbf{v}),$$

достигает минимума при $\alpha=0$, поэтому $F'(0)=0$, или

$$[\varphi_1,\ \eta]_{\mathfrak{A}}-(\mathbf{v},\ \operatorname{grad}\eta)=0. \tag{7}$$

По формуле (19) § 24, $[\varphi_1,\ \eta]_{\mathfrak{A}}=(\operatorname{grad}\varphi_1,\ \operatorname{grad}\eta)$, и соотношение (7) принимает вид $(\mathbf{v}_2, \operatorname{grad}\eta)=0$. Из определения обобщенной дивергенции теперь вытекает, что вектор $\mathbf{v}_2$ имеет обобщенную дивергенцию, равную нулю. Этим доказано утверждение 2).

Перейдем к изложению метода ортогональных проекций. Построим какой-либо вектор $\mathbf{V}(P)$, удовлетворяющий уравнению (3).

Обычно это сделать нетрудно. Так, если удастся найти такую функцию $g(x)$, что $f(x)=\frac{\partial g}{\partial x_m}$, то можно положить $V_{x_1}=V_{x_2}=\ldots=V_{x_{m-1}}=0$, $V_{x_m}=-g(x)$. Положим $\mathbf{V}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, где $\mathbf{v}$ — искомый вектор. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{w}=\operatorname{div}\mathbf{V}-\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, так что $\mathbf{w}\in\mathfrak{H}_2$. В то же время по условию задачи $\mathbf{v}\in\mathfrak{H}_1$. Теперь ясно, что *искомый вектор есть проекция вектора* $\mathbf{V}$ *на подпространство* $\mathfrak{H}_1$ — в этом и состоит метод ортогональных проекций.

Формула (8) § 4 дает прием построения проекции, который можно применить к определению вектора $\mathbf{v}$; нетрудно видеть, что этот прием привел бы к ортогональному ряду (6) § 14. Как мы увидим ниже, *оказывается целесообразным проектировать вектор* $\mathbf{V}$ *не на нужное нам подпространство* $\mathfrak{H}_1$, *а на «дополнительное» подпространство* $\mathfrak{H}_2$, *что дает вектор* $\mathbf{w}$; после этого вектор $\mathbf{v}$ определяется по формуле $\mathbf{v}=\mathbf{V}-\mathbf{w}$.

Для построения проекции $\mathbf{w}$ выберем последовательность векторов $\boldsymbol{\psi}_i(P)$, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_i=0$; если эта последовательность ортонормирована и полна в $\mathfrak{H}_2$, то по формуле (8) § 4 $\mathbf{w}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\boldsymbol{\psi}_n$, $a_n=(\mathbf{V},\ \boldsymbol{\psi}_n)$, и решение нашей задачи дается формулой

$$\mathbf{v}(P)=\mathbf{V}(P)-\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{V},\ \boldsymbol{\psi}_n)\,\boldsymbol{\psi}_n(P). \tag{8}$$

Остановимся несколько на анализе формулы (8). Перепишем ее в виде

$$\mathbf{V}(P) = \mathbf{v}(P) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{V}, \psi_n)\,\psi_n(P). \tag{9}$$

Все слагаемые справа в (9) взаимно ортогональны: векторы $\psi_n(P)$ ортогональны по условию, кроме того, $\mathbf{v}(P)$ и $\psi_n(P)$ ортогональны, так как они принадлежат ортогональным подпространствам $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. В таком случае по формулам (2) и (7) § 4 $\|\mathbf{V}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{V}, \psi_n)^2$ и, следовательно,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{V}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{V}, \psi_n)^2. \tag{10}$$

Если в ряде (10) сохранить только конечное число s первых членов, то правая часть равенства увеличится, и мы получим

$$\|\mathbf{v}\|^2 \leqslant \|\mathbf{V}\|^2 - \sum_{n=1}^{s} (\mathbf{V}, \psi_n)^2. \tag{11}$$

Это соответствует замене точного решения (8) приближенным по формуле $\mathbf{v}(P) \approx \mathbf{v}^{(s)}(P) = \mathbf{V}(P) - \sum_{n=1}^{s} (\mathbf{V}, \psi_n)\,\psi_n(P)$. По определению нормы в $\mathfrak{H}$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} v_k^2 \right) d\Omega.$$

Обозначая через $u_0(P)$ функцию, удовлетворяющую уравнениям (1) и (2), имеем $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u_0$ и

$$\|\mathbf{v}^2\| = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u_0)^2\, d\Omega$$

или по формуле (4) § 24

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (-\Delta u_0,\ u_0) = |u_0|^2. \tag{12}$$

С другой стороны, по формуле (4) § 14

$$|u_0|^2 = -\min F(u), \tag{13}$$

где $F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$ — функционал, используемый в энергетическом методе. Теперь из формул (11)—(13) следует

$$\min F(u) \geqslant -\left\{ \|\mathbf{V}\|^2 - \sum_{n=1}^{s} (\mathbf{V}, \psi_n)^2 \right\}. \tag{14}$$

Обращаясь теперь к § 59, видим, что *метод ортогональных проекций позволяет оценить погрешность приближенного решения, построенного по методу Ритца.* Действительно, неравенство (14) показывает, что в формулах (4) и (5) § 59 можно положить

$$\delta = -\|\mathbf{V}\|^2 + \sum_{n=1}^{s} (\mathbf{V}, \psi_n)^2; \tag{15}$$

при этом, как видно, из формул (10), (12) и (13),

$$\lim_{s\to\infty} \delta = d = \min F(u).$$

К вопросу об оценке погрешности мы еще вернемся в следующем параграфе.

§ 61. Общая формулировка метода ортогональных проекций

После рассмотренной в § 60 задачи Дирихле будет уже нетрудно дать более общую формулировку методу ортогональных проекций, формулировку, которая позволит применить этот метод к ряду других краевых задач.

Пусть требуется решить уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где данный элемент f и искомый элемент u оба принадлежат некоторому гильбертову пространству H, а оператор A — положительно определенный в этом пространстве. Допустим далее, что данная задача сведена к отысканию элемента v некоторого, вообще говоря, нового гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, и пусть элемент v удовлетворяет уравнению

$$Bv = f, \tag{2}$$

в котором B — некоторый линейный оператор.

Рассмотрим множество решений однородного уравнения

$$Bv = 0. \tag{3}$$

Это множество линейное; присоединив к нему его предельные элементы, которые будем трактовать как обобщенные решения уравнения (3), получим подпространство пространства $\mathfrak{H}$; это подпространство обозначим через $\mathfrak{H}_2$. Примем еще одно допущение, важное для метода ортогональных проекций: допустим, что *искомый элемент v принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_1$, ортогональному к $\mathfrak{H}_2$.*

По методу ортогональных проекций уравнение (2) решается так. Строим какой-либо элемент V, удовлетворяющий уравнению $BV = f$, и полагаем $V - v = w$. Тогда $Bw = BV - Bv = 0$; это означает, что w есть элемент подпространства $\mathfrak{H}_2$; равенство $V = v + w$ показывает, что v есть ортогональная проекция элемента V на подпространство $\mathfrak{H}_2$.

Построение элемента v можно выполнить двумя способами. Можно построить ортонормированную и полную в $\mathfrak{H}_1$ систему элементов φ_n, $n = 1, 2, \ldots$; тогда

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \varphi_n) \varphi_n. \tag{4}$$

Формула (4) тождественна с формулой (6) § 14, дающей решение уравнения (1), и потому такой вариант метода ортогональных проекций, по существу, совпадает с методом Ритца. Иначе можно построить искомый элемент v, выбрав ортонормированную систему ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *полную в* $\mathfrak{H}_2$. Тогда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n) \psi_n$$

и

$$v = V - \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n) \psi_n. \tag{5}$$

В случае задачи Дирихле, рассмотренной в предшествующем параграфе, H есть пространство $L_2(\Omega)$ функций, квадратично суммируемых в данной области Ω, а $\mathfrak{H}$ есть пространство векторных функций, также квадратично суммируемых в Ω. Далее, $B\mathbf{v} = -\operatorname{div} \mathbf{v}$; $\mathfrak{H}_2$ есть подпространство векторов с нулевой дивергенцией, а ортогональное к $\mathfrak{H}_2$ подпространство $\mathfrak{H}_1$ состоит, как было выяснено в § 60, из градиентов скалярных функций, которые обращаются в нуль на границе области S.

Если в ряде (5) сохранить только конечное число s слагаемых, то метод ортогональных проекций приводит к приближенному решению

$$v_s = V - \sum_{n=1}^{s} (V, \psi_n) \psi_n. \tag{6}$$

Сделаем одно полезное практическое замечание. Чтобы построить приближенное решение (6), достаточно иметь s попарно ортогональных и нормированных элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$, принадлежащих подпространству $\mathfrak{H}_2$. Допустим теперь, что нами построены s, не обязательно ортонормированных, но линейно независимых элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ этого подпространства. Процесс ортогонализации (см. § 4) дает возможность преобразовать элементы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ в ортонормированные элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$ и затем построить приближенное решение задачи по формуле (6). Оказывается, что процесса ортогонализации можно избежать.

Рассмотрим выражение

$$V - \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \psi_n \tag{7}$$

и поставим задачу: подобрать коэффициенты α_n так, чтобы норма выражения (7) была минимальной. Так как элементы ψ_n ортогональны и нормированы, то, повторяя рассуждения § 4, найдем, что $\alpha_n = (V, \psi_n)$. Таким образом, элемент v_s [формула (6)] решает задачу о минимуме величины $\left\| V - \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \psi_n \right\|$.

Как это вытекает из процесса ортогонализации, элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$ линейно выражаются через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ и наоборот. Отсюда следует, что v_s можно определить как элемент, реализующий минимум величины

$$\left\| V - \sum_{n=1}^{s} b_n \omega_n \right\|, \tag{8}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — постоянные; задача же о минимуме величины (8) решается просто.

Прежде всего вместо минимума величины (8) можно определять минимум величины

$$\left\| V - \sum_{n=1}^{s} b_n \omega_n \right\|^2 - \| V \|^2 = \left(V - \sum_{n=1}^{s} b_n \omega_n,\ V - \sum_{n=1}^{s} b_n \omega_n \right) - (V, V). \tag{9}$$

Величина (9) есть функция независимых переменных $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Чтобы найти минимум этой функции, приравняем нулю ее частные производные по этим переменным. Повторяя рассуждения § 17, получим систему

$$\sum_{n=1}^{s} b_n (\omega_n, \omega_k) = (V, \omega_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{10}$$

Найдя b_n из этой системы, получим v_s в виде

$$v_s = V - \sum_{n=1}^{s} b_n \omega_n. \tag{11}$$

Составление и решение системы (10), вообще говоря, менее трудоемко, чем процесс ортогонализации.

Замечание. Система (10) сохраняет свой вид и в комплексном гильбертовом пространстве.

В предшествующем параграфе мы видели, что метод ортогональных проекций позволяет оценить приближенное решение, построенное по методу Ритца. В общем случае такая оценка опирается на дополнительное допущение, которое выполняется в широком классе случаев:

Элемент u_0, удовлетворяющий уравнению (1), *и элемент v, к отысканию которого по методу ортогональных проекций сводится нахождение элемента u_0, связаны соотношением*

$$\| v \| = | u_0 |; \tag{12}$$

норма элемента v вычисляется в пространстве $\mathfrak{H}$.

Допуская, что соотношение (12) выполнено, дальнейшие рассуждения проведем, как в § 60. Имеем

$$\| v \|^2 = \| V \|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)^2 \quad \text{и} \quad \| v_s \|^2 = \| V \|^2 - \sum_{n=1}^{s} (V, \psi_n)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\| v \|^2 \leqslant \| v_s \|^2 \tag{13}$$

и

$$\lim_{s \to \infty} \| v_s \|^2 = \| v \|^2. \tag{14}$$

Полагая $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$, имеем в силу (4) § 14 и соотношений (12) и (13) $\min F(u) = F(u_0) = -\| v \|^2 \geqslant -\| v_s \|^2$. В формулах (4) и (5) § 59 можно теперь положить

$$\delta = -\| v_s \|^2 = -\| V \|^2 + \sum_{n=1}^{s} (V, \psi_n)^2, \tag{15}$$

причем $\lim\limits_{s \to \infty} \delta = d = \min F(u)$. Напомним еще, что по формуле (12) § 17 $F(u_n) = -| u_n |^2$, где u_n — приближенное решение уравнения (1) по Ритцу. Формула (4) § 59 дает теперь оценку погрешности метода Ритца:

$$| u - u_n | \leqslant \sqrt{\| v_s \|^2 - | u_n |^2}. \tag{16}$$

Точно так же, в силу формулы (5) § 59,

$$\| u - u_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma} \sqrt{\| v_s \|^2 - | u_n |^2}. \tag{17}$$

Заметим, что по формуле (8) § 59 $| u_n |^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (f, \varphi_k)$. Аналогично найдем

$$\| v_s \|^2 = \| V \|^2 - \sum_{k=1}^{s} b_k (V, \omega_k). \tag{18}$$

Нетрудно дать оценку и приближенному решению (6), построенному по методу ортогональных проекций. Положим

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)\psi_n, \quad w_s = \sum_{n=1}^{s} (V, \psi_n)\psi_n.$$

Имеем прежде всего

$$v - v_s = w_s - w \quad \text{и} \quad \|v - v_s\| = \|w - w_s\|.$$

Далее, $V = v + w$. Отсюда

$$v_s = V - w_s = v + (w - w_s).$$

Слагаемые справа ортогональны, так как $v \in \mathfrak{H}_1$, $(w - w_s) \in \mathfrak{H}_2$. Отсюда

$$\|v_s\|^2 = \|v\|^2 + \|w - w_s\|^2$$

и

$$\|v - v_s\|^2 = \|w - w_s\|^2 = \sqrt{\|v_s\|^2 - \|v\|^2}.$$

Пусть по-прежнему u_n означает приближенное решение по Ритцу уравнения (1). Тогда

$$|u_n|^2 \leqslant |u_0|^2 = \|v\|^2,$$

и последнее равенство дает искомую оценку

$$\|v - v_s\| \leqslant \sqrt{\|v_s\|^2 - |u_n|^2}. \tag{19}$$

Нелишне отметить, что в оценках (16) и (19) правые части тождественны.

В гл. X будут даны численные примеры оценки погрешности с помощью метода ортогональных проекций.

В заключение настоящего параграфа сделаем такое замечание. Элемент v, будучи проекцией элемента V, имеет меньшую норму; так как V — произвольный элемент, удовлетворяющий уравнению (2), то элемент v есть решение следующей вариационной задачи: *найти решение уравнения $Bv = f$, имеющее наименьшую норму.*

§ 62. Некоторые дополнительные соображения [1])

В предшествующем параграфе было дано изложение метода ортогональных проекций, основанное на следующих допущениях:

а) решение уравнения $Au = f$ сводится к отысканию некоторого элемента v, принадлежащего новому гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющего уравнению $Bv = f$;

[1]) Для понимания настоящего параграфа необходимо знакомство с элементами функционального анализа.

б) элемент v принадлежит подпространству, ортогональному к подпространству решений однородного уравнения $Bv = 0$;

в) $\|v\| = |u|$.

В настоящем параграфе будет указано некоторое довольно общее условие, выполнение которого влечет за собой выполнение перечисленных выше допущений. Это условие состоит в следующем: *положительный оператор A может быть представлен в виде произведения двух сопряженных операторов*

$$A = T^*T, \tag{1}$$

причем оператор T действует из данного гильбертова пространства H в некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и определен, в частности, на всем пространстве H_A.

Заметим, что при этом сопряженный оператор T^* действует из пространства $\mathfrak{H}$ в пространство H. Уравнение $Au = f$ теперь принимает вид

$$T^*Tu = f. \tag{2}$$

Положим $Tu = v$. Тогда

$$T^*v = f. \tag{3}$$

Этим оправдано допущение а), если положить $B = T^*$. Практически интересен тот случай, когда однородное уравнение

$$T^*u = 0 \tag{4}$$

имеет решения, отличные от нулевого. Множество этих решений образует некоторое подпространство $\mathfrak{H}_2$ пространства $\mathfrak{H}$. Докажем, что искомый элемент $v = Tu$ ортогонален к $\mathfrak{H}_2$. Действительно, если $w \in \mathfrak{H}_2$, то $T^*w = 0$ и

$$(v, w)_{\mathfrak{H}} = (Tu, w)_{\mathfrak{H}} = (u, T^*w)_H = 0 \tag{5}$$

(значок внизу указывает, в каком пространстве вычисляется скалярное произведение). Равенство (5) доказывает справедливость допущения б).

Обратимся к допущению в). Пусть $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$. Тогда, полагая $Tu_1 = v_1$, $Tu_2 = v_2$, имеем

$$[u_1, u_2] = (Au_1, u_2)_H = (T^*Tu_1, u_2)_H = (Tu_1, Tu_2)_{\mathfrak{H}} = (v_1, v_2)_{\mathfrak{H}}.$$

В частности, если $u_1 = u_2 = u$, $Tu = v$, то

$$|u| = \|v\|_{\mathfrak{H}}. \tag{6}$$

Предельным переходом равенство (6) устанавливается для всех $u \in H_A$, и допущение в) доказано. Заметим, что имеет место также равенство скалярных произведений

$$[u_1, u_2] = (Tu_1, Tu_2)_{\mathfrak{H}}. \tag{7}$$

Коль скоро допущения а), б), в) оправданы, дальнейшее построение весьма просто. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — подпространство, ортогональное к $\mathfrak{H}_2$, и V — какое-либо решение уравнения (3). Тогда искомый элемент v есть проекция элемента V в подпространство $\mathfrak{H}_1$. После того, как элемент v построен, остается еще найти u из уравнения $Tu = v$. Из формулы (6) [допущение в)] вытекает, что оператор T^{-1} определен на всем подпространстве $\mathfrak{H}_1$, и его норма как оператора, действующего из $\mathfrak{H}_1$ в H_A, равна единице. В задачах практического характера оператор T^{-1} обычно очень прост и уравнение $Tu = v$ решается без труда — такого рода пример мы видели в § 60.

Докажем теперь, что непосредственное проектирование в подпространство $\mathfrak{H}_1$ приводит к формуле (6) § 14 и, следовательно, равносильно применению энергетического метода.

Пусть $\{\eta_j\}$ — полная ортонормированная в $\mathfrak{H}_1$ система, так что

$$(\eta_j, \eta_k)_{\mathfrak{H}} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (V, \eta_j)\, \eta_j. \tag{9}$$

Положим $T^{-1}\eta_j = \varphi_j$. Нетрудно видеть, что последовательность $\{\varphi_j\}$ ортонормированная и полная в H_A. Действительно, $(\eta_j, \eta_k)_{\mathfrak{H}} = (T\varphi_j, T\varphi_k)_{\mathfrak{H}}$, и по формулам (7) и (8)

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Допустим, что последовательность $\{\varphi_j\}$ неполна в H_A. Тогда существует нормированный элемент $\varphi \in H_A$ такой, что $[\varphi, \varphi_j] = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ По формуле (7) $(T\varphi, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ Так как система $\{\eta_j\}$ полна в $\mathfrak{H}_1$, то $T\varphi \in \mathfrak{H}_2$. Но тогда $T^*(T\varphi) = 0$, или $A\varphi = 0$, и так как оператор A положительный, то $\varphi = 0$, вопреки предположению.

Воздействуя на обе части равенства (9) оператором T^{-1}, ограниченным в $\mathfrak{H}_1$, имеем

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (V, \eta_j)_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j. \tag{10}$$

Далее, $V = v + w$, $w \in \mathfrak{H}_2$. Отсюда $(w, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = 0$ и $(V, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = (v, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = (Tu, T\varphi_j)_{\mathfrak{H}} = [u, \varphi_j] = (Au, \varphi_j)_H = (f, \varphi_j)_H$. Формула (10) принимает вид $u = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)_H \varphi_j$, что тождественно с формулой (6) § 14.

§ 63. Задача Неймана

Задача Неймана для уравнения Пуассона состоит в отыскании функции $u(P)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\Delta u = -\operatorname{div}\operatorname{grad} u = f(P) \tag{1}$$

внутри области Ω и краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{2}$$

на ее границе S. Будем считать, что область Ω конечная и что $f \in L_2(\Omega)$. Решение существует, если функция $f(P)$ ортогональна к единице, так что

$$\int_\Omega f(P)\, d\Omega = 0; \tag{3}$$

решение единственно, если подчинить его тому же требованию ортогональности к единице:

$$\int_{\Omega} u(P)\,d\Omega = 0. \tag{4}$$

Имея в виду применить метод ортогональных проекций, возьмем в качестве пространства H множество функций из $L_2(\Omega)$, ортогональных к единице, а за пространство $\mathfrak{H}$ — множество векторов со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (10) и (11) § 2. Положим $\operatorname{grad} u = \mathbf{v}$; уравнения (1) и (2) дают тогда

$$-\operatorname{div} \mathbf{v} = f(P), \quad v_\nu|_S = 0. \tag{5}$$

Таким образом, в нашей задаче оператор B есть оператор $-\operatorname{div}$, заданный на векторах, нормальные составляющие которых равны нулю на S. Подпространство $\mathfrak{H}_2$ состоит из векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad w_\nu|_S = 0. \tag{6}$$

Повторяя рассуждения § 60, убедимся, что ортогональным дополнением к $\mathfrak{H}_2$ является подпространство $\mathfrak{H}_1$ градиентов *всевозможных* скалярных функций.

Если удастся найти такой вектор $\mathbf{V}$, что $-\operatorname{div} \mathbf{V} = f$ и $V_\nu|_S = 0$, то $\mathbf{v}$ найдется как проекция вектора $\mathbf{V}$ в $\mathfrak{H}_1$. Для ее построения следует выбрать полную в $\mathfrak{H}_2$ последовательность векторов $\mathbf{w}^{(n)}(P)$, которые для простоты рассуждений будем считать ортонормированными; тогда $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u = \mathbf{V} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{V}, \mathbf{w}^{(n)})\, \mathbf{w}^{(n)}(P)$. Координатные векторы $\mathbf{w}^{(n)}$ должны удовлетворять уравнениям (6); фактическое построение такой системы наталкивается на некоторые технические затруднения.

Замечание. Метод ортогональных проекций без труда распространяется на эллиптические уравнения более общего вида

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P). \tag{7}$$

В этом случае за $\mathfrak{H}$ можно принять пространство векторов $\mathbf{v}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} C_{jk} v_j w_k\, d\Omega, \tag{8}$$

где матрица $\| C_{jk} \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ обратна матрице $\| A_{jk} \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$. Пусть, например, поставлено краевое условие $u|_S = 0$. За подпространство $\mathfrak{H}_1$ примем множество векторов $\mathbf{v}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, где

$$v_j = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \tag{9}$$

и $u(P)$ — функция, равная нулю на S. Нетрудно доказать, что ортогональное подпространство $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ состоит из векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \tag{10}$$

Если поставлено краевое условие

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\mathbf{v},\, x_j) \right]_S = 0, \tag{11}$$

то $\mathfrak{H}_1$ строят как совокупность векторов (9), но на этот раз функцию $u(P)$ не подчиняют никаким краевым условиям; тогда ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}_1$ состоит из векторов, удовлетворяющих уравнению (10) и, кроме того, краевому условию

$$v_{\nu}|_S = 0. \tag{12}$$

Построение пространства $\mathfrak{H}$ и его разложение на ортогональные подпространства усложняется, если к левой части уравнения (7) добавляется слагаемое вида $C(P)u(P)$; пример такого рода разобран в статье М. И. Вишика [1]. В других статьях того же автора [2]—[3] рассмотрены некоторые примеры уравнений высших порядков.

§ 64. Принцип Кастильяно и двусторонние оценки в теории упругости

Известный в теории упругости принцип Кастильяно можно получить, исходя из метода ортогональных проекций. Мы ограничимся, для упрощения записи, случаем однородной изотропной упругой среды, хотя общий случай неоднородной и неизотропной среды не вносит никаких существенных усложнений. Будем предполагать также, что краевые условия однородные.

Рассмотрим некоторое тело Ω, ограниченное поверхностью S. Как обычно, считаем, что тело — конечное, а ограничивающая его поверхность кусочно гладкая. Будем рассматривать всевозможные тензоры напряжений, определенные в $\bar{\Omega} = \Omega + S$. Будем обозначать такого рода тензор через T, а его составляющие — через $\sigma_x, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}, \sigma_z$:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{xy}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{xz}, & \tau_{yz}, & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

С каждым тензором T свяжем тензор $\mathrm{E}(T)$ по формулам

$$\mathrm{E}(T) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x, & \gamma_{xy}, & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy}, & \varepsilon_y, & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz}, & \gamma_{yz}, & \varepsilon_z \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \sigma(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \sigma(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \sigma(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{yz}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь E — модуль Юнга и σ — постоянная Пуассона материала тела Ω. Если напряженное состояние тела упругое, то $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$ $\ldots, \gamma_{yz}$ суть составляющие деформации: они связаны с составляющими смещений формулами (1) § 29. Уравнения (3) равносильны уравнениям Ляме (§ 29).

Множество тензоров T превратим в вещественное гильбертово пространство[1]), определив в нем скалярное произведение и норму по формулам

$$(T', T'') = \int_\Omega (\sigma'_x\varepsilon''_x + \sigma'_y\varepsilon''_y + \sigma'_z\varepsilon''_z + \tau'_{xy}\gamma''_{xy} + \tau'_{xz}\gamma''_{xz} + \tau'_{yz}\gamma''_{yz})\, d\Omega; \tag{4}$$

$$\|T\|^2 = \int (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})\, d\Omega. \tag{5}$$

Пользуясь формулами (3), легко доказать, что определенное формулой (4) скалярное произведение удовлетворяет аксиомам A — D § 2. В частности, легко доказать, что $\sigma'_x\varepsilon''_x + \ldots + \tau'_{yz}\gamma''_{yz} = \sigma''_x\varepsilon'_x + \ldots + \tau''_{yz}\gamma'_{yz}$; отсюда вытекает симметричность скалярного произведения. Построенное таким образом гильбертово пространство обозначим через $\mathfrak{H}$.

---

[1]) Точнее говоря, гильбертово пространство образует совокупность тех тензоров, для которых приводимый ниже интеграл (5) конечен.

Заметим, что если T есть тензор *упругих* напряжений, то $\| T \|^2/2$ есть потенциальная энергия деформации тела Ω. Расширяя определение, будем величину $\| T \|^2/2$ называть *потенциальной энергией деформации* для любого тензора напряжений T.

Будем рассматривать смешанную задачу теории упругости [задача в) § 29]; из нее, как частные случаи, получаются задача а) о теле с закрепленной границей и задача б) о теле со свободной границей. Напомним, что смешанная задача теории упругости состоит в определении вектора упругих смещений $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ и связанных с ним деформаций и напряжений; перечисленные величины связаны между собой уравнениями (3) (или уравнениями Ляме) и уравнениями (1) § 29. Далее, составляющие напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия [1])

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)=X, \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)=Y, \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)=Z, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где X, Y, Z — составляющие объемной силы $\mathbf{K}$. Наконец, краевые условия формулируются следующим образом: поверхность S разбивается на части S_1 и S_2, причем

$$\mathbf{u}\,|_{S_1}=0 \tag{7}$$

и

$$\mathbf{t}^{(\nu)}\,|_{S_2}=0; \tag{8}$$

$\mathbf{t}^{(\nu)}$ — вектор напряжений, действующих на площадку поверхности с нормалью ν.

Рассмотрим множество тензоров напряжений, удовлетворяющих краевому условию (8) и однородным уравнениям равновесия

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1]) См. уравнения (5) § 29.

Это множество[1]) образует в $\mathfrak{H}$ подпространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{H}_2$. Заметим, что в случае задачи а), когда закреплена вся поверхность тела, условие (8) отсутствует и тензоры, входящие в подпространство $\mathfrak{H}_2$, никаким краевым условиям удовлетворять не обязаны.

В качестве подпространства $\mathfrak{H}_1$ возьмем множество[1]) тензоров напряжений, обладающих тем свойством, что соответствующие им величины ε_x, ε_y, ..., γ_{yz} суть деформации, связанные с некоторым вектором $\mathbf{u}(P)$ формулами (1) § 29; потребуем еще, чтобы вектор $\mathbf{u}(P)$ удовлетворял краевому условию (7). В случае задачи б), когда граница тела свободна от напряжений, краевое условие (7) отсутствует, и векторы $\mathbf{u}(P)$, с которыми связаны тензоры из подпространства $\mathfrak{H}_1$, никаким краевым условиям удовлетворять не обязаны.

Основным для всего построения является равенство

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2. \tag{10}$$

Доказательство равенства (10) сводится к установлению двух фактов:

1) Если $T'\in\mathfrak{H}_1$, а $T''\in\mathfrak{H}_2$, то $(T',T'')=0$. Имеем

$$(T',\ T'')=\int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon'_x\sigma''_x+\varepsilon'_y\sigma''_y+\varepsilon'_z\sigma''_z+\gamma'_{xy}\tau''_{xy}+\gamma'_{xz}\tau''_{xz}+\gamma'_{yz}\tau''_{xz}\right)d\Omega.$$

Величины ε'_x, ..., γ'_{yz} связаны формулами (1) § 29 с некоторым вектором $\mathbf{u}'=\left(u'_x,\ u''_y,\ u'_z\right)$. Воспользовавшись этими формулами и проинтегрировав затем по частям, получим

$$(T',\ T'')=\int\limits_{\Omega}\left\{u'_x\left(\frac{\partial\sigma''_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau''_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau''_{xz}}{\partial z}\right)+u'_y\left(\frac{\partial\tau''_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma''_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau''_{yz}}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+u'_z\left(\frac{\partial\tau''_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau''_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma''_z}{\partial z}\right)\right\}d\Omega+\int\limits_{S}\mathbf{u}'\mathbf{t}''^{(\nu)}\,dS.$$

Так как тензор T'' принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_2$, то его составляющие удовлетворяют однородным уравнениям равновесия (9), и объемный интеграл исчезает. Поверхностный интеграл также исчезает, так как $\mathbf{u}'\big|_{S_1}=0$, $\mathbf{t}''^{(\nu)}\big|_{S_2}=0$. Окончательно $(T',T'')=0$ и подпространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ ортогональны.

2) Если T — произвольный тензор из $\mathfrak{H}$, то его можно представить в виде $T=T'+T''$, где $T'\in\mathfrak{H}_1$ и $T''\in\mathfrak{H}_2$. Доказательство проведем в предположении, что составляющие тензора T

[1]) К которому следует присоединить его предельные (в смысле сходимости в пространстве $\mathfrak{H}$) элементы.

непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega} = \Omega + S$; распространение на общий случай производится так же, как в § 60. Обозначим через $\mathbf{u}'$ вектор упругих смещений, удовлетворяющий, вместе с соответствующим ему тензором напряжений T', уравнениям (1) § 29, а также уравнениям (3), (6) и краевым условиям (7) и (8). Теперь достаточно положить $T'' = T - T'$.

Вернемся к задаче теории упругости. Пусть $\tilde{T}$ — любой тензор, удовлетворяющий уравнениям (5) и краевому условию (8), а T_0 — решающий нашу задачу тензор упругих напряжений. Тогда T_0 есть проекция тензора $\tilde{T}$ в подпространство $\mathfrak{H}_1$. Так как $(\tilde{T} - T_0) \in \mathfrak{H}_2$, то $(T_0, \tilde{T} - T_0) = 0$ и

$$\|\tilde{T}\|^2 = \|T_0\|^2 + \|\tilde{T} - T_0\|^2 \geqslant \|T_0\|^2. \tag{11}$$

Неравенство (11) выражает принцип Кастильяно: *из всех тензоров, удовлетворяющих уравнениям равновесия и краевому условию на свободной части границы, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщает телу тензор упругих напряжений.*

Обозначим через $\mathbf{u}_0$ вектор смещений, соответствующий тензору упругих напряжений T_0. Из формул (14) § 29 и (4) § 14 заключаем, что $|\mathbf{u}_0|^2 = 2W(\mathbf{u}_0)$, где $W(\mathbf{u}_0)$ — потенциальная энергия деформации, соответствующей смещению $\mathbf{u}_0$. Теперь формула (5) показывает, что $\|T\| = |\mathbf{u}_0|$; отсюда, как было показано выше, вытекает возможность оценки приближенных решений, построенных по методу Ритца и по методу ортогональных проекций. Вывод соответствующих формул мы предоставляем читателю.

§ 65. Метод Трефтца

Другой метод, позволяющий оценивать снизу минимальное значение функционала энергетического метода, связан с именем Е. Трефтца [1]. Особенностью этого метода является построение некоторого положительного функционала, минимум которого ищется в классе функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению, но не подчиненных никаким краевым условиям. Сам Трефтц изложил (без доказательства сходимости) свой метод применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Этому случаю мы и посвящаем настоящий параграф; в последующих параграфах будут рассмотрены некоторые обобщения метода Трефтца.

Пусть требуется найти гармоническую в области Ω функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u|_S = f(P), \tag{1}$$

где $f(P)$ — функция, которую мы для простоты предположим непрерывной на границе S. Искомую функцию можно определить (см. § 25) как функцию, минимизирующую интеграл

$$\Lambda(u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{2}$$

по сравнению с любой другой функцией, удовлетворяющей условию (1).

Метод Трефтца состоит в следующем. Допустим, что нам дана последовательность линейно независимых гармонических в Ω функций $\{\varphi_n\}$, полная в следующем смысле: какова бы ни была гармоническая в Ω функция φ, квадратично суммируемая в Ω вместе со своими первыми производными, можно по заданному числу $\varepsilon > 0$ найти натуральное число n и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\Lambda\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \int\limits_{\Omega} \left\{\operatorname{grad}\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\}^2 d\Omega < \varepsilon.$$

Будем искать приближенное решение нашей задачи в виде $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$, где n — произвольно выбранное число; коэффициенты a_k найдем из условия

$$\Lambda(u - u_n) = \min, \tag{3}$$

где u — искомое решение задачи. Приравнивая нулю производные $\dfrac{\partial \Lambda(u - u_n)}{\partial a_k}$, мы легко придем к системе уравнений

$$\Lambda(u_n - u, \ \varphi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где для краткости обозначали $\Lambda(u, v) = \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\Omega$. На первый взгляд может показаться, что система (4), кроме коэффициентов a_k, зависит еще от неизвестной функции u. На самом деле это не так. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой Грина, по которой

$$\Lambda(u_n - u, \ \varphi_k) = -\int\limits_{\Omega} (u_n - u) \Delta\varphi_k \, d\Omega + \int\limits_{S} (u_n - u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS,$$

где ν — внешняя нормаль к S. Но $\Delta\varphi_k = 0$, поэтому первый интеграл исчезает, и мы приходим к системе

$$\int\limits_{S} (u_n - u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Значение искомой функции u на S известно и равно f. Заменяя u через f и u_n через $\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$, мы получаем окончательно следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = \int_S f \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Исследуем ближе систему (6). Непосредственно видно, что u_n не изменится, если u изменить на постоянную, так как это не изменит функционала (3). Далее, если u_n есть приближенное решение, полученное по методу Трефтца, то $u_n + \text{const}$ будет таким же решением. Имея это в виду, будем считать, что средние значения гармонических функций u и φ_k, взятые по границе S, равны нулю. Это равносильно вычитанию некоторой постоянной из каждой такой функции. Теперь нетрудно доказать разрешимость системы (6). Допуская противное, мы найдем, что однородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

имеет нетривиальное решение. Положим $\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)}\varphi_j = v$. Тогда (7) принимает вид

$$\int_S v \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножая на $a_k^{(0)}$ и суммируя, получим

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0.$$

По формуле Грина

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 d\Omega - \int_\Omega v \Delta v \, d\Omega.$$

Интеграл слева равен нулю; кроме того, $\Delta v = 0$, так как функция v гармоническая. Отсюда следует, что

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 d\Omega = 0,$$

что возможно только, если $\operatorname{grad} v \equiv 0$ или $v \equiv \text{const}$. Но так как среднее значение $v|_S$ равно нулю, то $v = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \varphi_j = 0$. Теперь из линейной независимости функций φ_j следует, что $a_j^{(0)} = 0$, вопреки предположению.

Раз система (6) разрешима, приближенное решение u_n может быть построено при любом n. Докажем теперь, что

$$\Lambda(u_n) \leqslant \Lambda(u). \tag{8}$$

Положим $u - u_n = w_n$. Тогда $\Lambda(u) = \Lambda(u_n + w_n) = \Lambda(u_n) + 2\Lambda(u_n, w_n) + \Lambda(w_n)$. Но $\Lambda(u_n, w_n) = \Lambda(u_n, u - u_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Lambda(\varphi_k, u - u_n) = 0$ в силу уравнений (4). Теперь $\Lambda(u) = \Lambda(u_n) + \Lambda(w_n)$, откуда непосредственно вытекает неравенство (8).

Исследуем сходимость метода Трефтца. Будем считать, что граница S имеет непрерывную кривизну. В § 32 было доказано, что оператор $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ положительно определенный в пространстве $\overline{H}$, которое состоит из гармонических в Ω функций, представимых посредством функции Грина через свои предельные значения; последние предполагаются квадратично суммируемыми и удовлетворяющими равенству $\int_S u\, dS = 0$. Так как $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ положительно определенный оператор, то существует такая положительная постоянная γ, для которой верно неравенство [1])

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS \geqslant \gamma^2 \int_S v^2 dS, \quad v \in \overline{H}. \tag{9}$$

Так как средние значения $u|_S$ и $\varphi_k|_S$ равны нулю, эти функции суть элементы $\overline{H}$. По предположению о полноте последовательности $\{\varphi_k\}$ можно по данному $\varepsilon > 0$ найти натуральное число N и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ так, чтобы

$$\Lambda\left(u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k\right) < \varepsilon.$$

Тем более $\Lambda(u - u_N) < \varepsilon$, где u_N — приближенное решение, построенное по методу Трефтца. При $n \geqslant N$ $\Lambda(u - u_n) \leqslant \Lambda(u - u_N) < \varepsilon$. Функция $u - u_n$ гармоническая, и по формуле

[1]) Мы пишем это неравенство, предполагая функцию v вещественной.

Грина

$$\Lambda(u-u_n)=\int_S (u-u_n)\frac{\partial(u-u_n)}{\partial\nu}dS.$$

В силу неравенства (9)

$$\int_S (u-u_n)^2 dS<\frac{\varepsilon}{\gamma^2}. \tag{10}$$

Пусть $G(P, Q)$ — функция Грина области Ω. Тогда

$$u(P)-u_n(P)=\int_S (u(Q)-u_n(Q))\frac{\partial G(P, Q)}{\partial\nu}dS.$$

Допустим, что P меняется в некоторой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω. Тогда, как известно, функция $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial\nu}$ ограничена, так же как и все ее производные по координатам точки P. Применяя к (11) неравенство Буняковского и используя оценку (10), найдем, что $u-u_n\to 0$ *равномерно в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри* Ω.

Дифференцируя (11), мы тем же путем убедимся, что производные любого порядка от u_n равномерно сходятся к соответствующим производным от u в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω [1]).

В заключение заметим, что при составлении системы (6) нет нужды фактически приводить к нулю средние значения функций u и φ_k. Действительно, если заменить u на $u+c$ и φ_k на φ_k+c_k, где c и c_k — постоянные, то коэффициенты и свободные члены в (6) примут следующий вид:

$$\int_S \varphi_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS+c_j\int_S\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS,\qquad \int_S f\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS+c\int_S\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS.$$

Но

$$\int_S\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS=0,$$

так как функция φ_k гармоническая. Отсюда видно, что изменение u и φ_k на постоянные не меняет системы (6).

[1]) Напомним, что мы считаем среднее значение как u, так и u_n равным нулю; без этого сходимость $u_n\to u$, вообще говоря, не имеет места. Утверждение о сходимости производных справедливо независимо от того, равны или не равны нулю упомянутые средние значения.

§ 66. Бигармоническое уравнение. Метод негармонического остатка

Некоторое видоизменение метода Трефтца было предложено З. Х. Рафальсоном [1, 2] для случая бигармонического уравнения [1]).

Как было установлено в § 30, интегрирование бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f \tag{1}$$

при краевых условиях

$$u|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L = 0 \tag{2}$$

равносильно задаче о минимуме функционала

$$F(u) = (\Delta^2 u,\ u) - 2(u,\ f) = \int_S \{(\Delta u)^2 - 2fu\}\, dS \tag{3}$$

при тех же условиях (2). В том же параграфе установлена разрешимость этой задачи с помощью энергетического метода.

Метод негармонического остатка основан на следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{u}(P)$ — любая функция, которая непрерывна в S вместе со своими первыми и вторыми производными и удовлетворяет краевым условиям* (2) *на границе L области S. Пусть, далее, $q(P)$ — любая функция, удовлетворяющая в S уравнению*

$$\Delta q = f, \tag{4}$$

непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $\bar{S} = S + L$ [2]). *Тогда*

$$F(\tilde{u}) \geqslant -\int_S q^2\, dS.$$

Доказательство очень просто. Имеем

$$\int_S f\tilde{u}\, dS = \int_S \tilde{u}\,\Delta q\, dS = \int_S q\,\Delta\tilde{u}\, dS + \int_L \left(\tilde{u}\,\frac{\partial q}{\partial \nu} - q\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\right) dL = \int_S q\,\Delta\tilde{u}\, dS$$

---

[1]) Упомянем в этой связи весьма интересные и значительно более ранние работы С. Зарембы [3, 4], многие результаты которых близки к результатам З. Х. Рафальсона.

[2]) Мы допускаем, что такая функция существует.

в силу условий (2). Теперь

$$F(\tilde{u}) + \int_S q^2\,dS = \int_S \{(\Delta\tilde{u})^2 - 2\tilde{u}f + q^2\}\,dS =$$
$$= \int_S \{(\Delta\tilde{u})^2 - 2q\,\Delta\tilde{u} + q^2\}\,dS = \int_S (\Delta\tilde{u} - q)^2\,dS \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Если принять $\tilde{u} = u_0$, где u_0 — решение бигармонического уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), то по доказанному

$$F(u_0) \geqslant -\int_S q^2\,dS. \tag{5}$$

Обычно найти какое-либо решение уравнения (4) не представляет затруднений, и тогда интеграл $-\int_S q^2\,dS = -\|q\|^2$ даст нижнюю границу для минимума функционала (5). Дальнейшее сводится к тому, чтобы эту границу уточнить. Это делается таким образом. Возьмем последовательность функций $\{\varphi_k(P)\}$, *гармонических* в S, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\bar{S}$. Мы будем считать их ортонормированными в S, так что

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_S \varphi_k(P)\,\varphi_m(P)\,dS = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Этого всегда можно добиться, применив к взятой последовательности процесс ортогонализации. Положим теперь $q_n(P) = q(P) - \sum_{k=1}^{n} (q, \varphi_k)\,\varphi_k(P)$. Функция $q_n(P)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и в качестве нижней границы для величины $F(u)$ мы получаем теперь величину $-\|q_n\|^2$, которая, как легко видеть, равна

$$-\|q_n\|^2 = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (q, \varphi_k)^2 \tag{6}$$

и, вообще говоря, больше чем $-\|q\|^2$. Допустим теперь, что последовательность $\{\varphi_k(P)\}$ полна на множестве функций, гармонических в S и принадлежащих пространству $L_2(S)$; это множество обозначим через G. В известных условиях можно доказать, что тогда

$$F(u_0) = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)^2, \tag{7}$$

где u_0 — интеграл уравнения (1), удовлетворяющий условиям (2). Доказательство основано на следующём построении.

Можно доказать [1]), что множество G образует подпространство в $L_2(S)$. При известных ограничениях, наложенных на вид области S, можно доказать, что функции из подпространства G допускают сколь угодно точную аппроксимацию в среднем гармоническими функциями, непрерывно дифференцируемыми в $\bar{S}$ [2]). Это будет, например, если область S — *звездная*, т. е. если внутри S найдется такая точка, что любой исходящий из нее луч встречает границу области не более чем в одной точке [3]). Можно указать и другие достаточные признаки. Функции, принадлежащие ортогональному подпространству $\bar{G} = L_2(S) \ominus G$, будем называть *негармоническими остатками*. Из самого определения следует, что если $v(P)$ — гармоническая квадратично суммируемая в S функция, а $w(P)$ — некоторый негармонический остаток, то $(v,\ w) = \int\limits_S v(P)\, w(P)\, dS = 0$. Положим $\Delta u_0 = w_0$. Нетрудно видеть, что w_0 — негармонический остаток. Действительно, пусть $v(P)$ — гармоническая в S функция, непрерывно дифференцируемая в $\bar{S}$. Тогда $(w_0,\ v) = \int\limits_S v\, \Delta u_0\, dS$ или, если воспользоваться формулой Грина,

$$(w_0,\ v) = \int\limits_S u_0\, \Delta v\, dS + \int\limits_L \left(v\, \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - u_0\, \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds = 0,$$

так как $\Delta v = 0$, а u_0 удовлетворяет условиям (2). Если $v(P)$ не непрерывно дифференцируема в $\bar{S}$, то аппроксимируем ее непрерывно дифференцируемой гармонической функцией $v_n(P)$; переходя к пределу в равенстве $(w_0, v_n) = 0$, найдем, что $(w_0, v) = 0$.

Имеем $\Delta w_0 = \Delta^2 u_0 = f$. Положим $q = v_0 + w_0$. Тогда $\Delta v_0 = \Delta q - \Delta w_0 = 0$ и, следовательно, $(w_0, v_0) = 0$. Функция q разложена на два ортогональных слагаемых $v_0 \in G$ и $w_0 \in \bar{G}$. В таком случае $\| q \|^2 = \| v_0 \|^2 + \| w_0 \|^2$, или

$$\| w_0 \|^2 = \| q \|^2 - \| v_0 \|^2. \tag{8}$$

---

[1]) Эта теорема принадлежит Г. Вейлю [2]. Ее доказательство можно найти в статье З. Х. Рафальсона [2]; на более общий случай уравнения эллиптического типа второго порядка эта теорема распространена автором [11].

[2]) Ниже мы будем предполагать, что такая аппроксимация возможна.

[3]) См., например, З. Х. Рафальсон [2].

Из сказанного выше ясно, что ортонормированные функции $\varphi_n(P)$ образуют в G полную систему. Отсюда

$$v_0(P)=\sum_{n=1}^{\infty}(v_0,\ \varphi_n)\varphi_n(P) \quad \text{и} \quad \|v_0\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(v_0,\ \varphi_n)^2.$$

При этом $(v_0,\varphi_n)=(q,\varphi_n)-(w_0,\varphi_n)=(q,\varphi_n)$, так как w_0 и φ_n принадлежат взаимно ортогональным подпространствам $\bar{G}$ и G и поэтому $(w_0,\varphi_n)=0$. Теперь $\|v_0\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(q,\ \varphi_n)^2$. Подставив это в (8), получим

$$\|w_0\|^2=\|q\|^2-\sum_{n=1}^{\infty}(q,\ \varphi_n)^2. \tag{9}$$

С другой стороны, $\|w_0\|^2=\|\Delta u_0\|^2=\int\limits_S(\Delta u_0)^2\,dS$. Сравнив это с формулой (15) § 30, найдем, что $\|w_0\|^2=|u_0|^2=-F_{\min}(u)$, и формула (7) доказана. Сохранив в ряде (7) конечное число членов, мы получим величину меньшую, чем $F_{\min}(u)$, и сколь угодно к ней близкую, если взятое число членов достаточно велико.

Из проведенных выше вычислений легко вытекает формула

$$w_0(P)=\Delta u_0=q(P)=-\sum_{n=1}^{\infty}(q,\ \varphi_n)\varphi_n(P); \tag{10}$$

зная $w_0(P)$, можно восстановить функцию $u_0(P)$ по формуле

$$u(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\int w_0(Q)\ln r\,dS_Q, \tag{11}$$

где r — расстояние между точками P и Q. Вывод формулы (11) дан в статье З. Х. Рафальсона [2].

§ 67. Обобщение метода Трефтца

Метод Трефтца был обобщен на широкий класс краевых задач в работах М. Ш. Бирмана [3], [5], [6]. Допустим, что в области Ω требуется проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение

$$Lu=f(P) \tag{1}$$

при некоторых краевых условиях, которые для простоты будем считать однородными:

$$G_1u|_S=0,\quad G_2u|_S=0,\quad \ldots,\quad G_ru|_S=0, \tag{2}$$

и пусть оператор A, совпадающий с дифференциальным оператором L на функциях, удовлетворяющих условиям (2), положительно определенный. Тогда, как нам известно, функция $u_0(P)$, удовлетворяющая уравнениям (1) и (2), реализует минимум функционала [1])

$$F(u)=(Au,\ u)-2(u,\ f), \tag{3}$$

причем

$$F_{\min}u=-|u_0|^2=-(Au_0,\ u_0). \tag{4}$$

Обобщенный метод Трефтца строится, в общих чертах, следующим образом: составляется новый функционал $\varphi(u)$, который рассматривается только на функциях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (1); удовлетворение каким бы то ни было краевым условиям не предполагается. От функционала $\varphi(u)$ потребуем, чтобы он достигал минимума на функции $u_0(P)$, удовлетворяющей уравнениям (1) и (2), и чтобы

$$\varphi_{\min}(u)=\varphi(u_0)=|u_0|^2. \tag{5}$$

Заметим, что на решениях уравнения (1) функционал $\varphi(u)$ необходимо положителен — это вытекает из формулы (5).

Пусть теперь $u(P)$ — любое решение уравнения (1). Из формулы (5) следует тогда, что $\varphi(u)\geqslant|u_0|^2$ и, следовательно, $-\varphi(u)\leqslant\leqslant F_{\min}(u)$. Таким образом, $-\varphi(u)$ можно принять за число δ в неравенствах (4) и (5) § 59. Далее, пусть $u_n(P)$, $n=1,2,\ldots$, есть минимизирующая для функционала $\varphi(u)$ последовательность решений уравнения (1), так что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(u_n)=|u|^2$. Тогда $-\varphi(u_n)\to F_{\min}(u)$, и мы получаем последовательность чисел $\delta_n=-\varphi(u_n)$, которые при достаточно большом n сколь угодно мало отличаются от $d=F_{\min}(u)$.

В каждой конкретной краевой задаче дело сводится, таким образом, к выбору подходящего функционала $\varphi(u)$.

В §§ 68 и 69 мы кратко изложим принадлежащее М. Ш. Бирману [6] построение функционалов $\varphi(u)$ для важнейших краевых задач, связанных с уравнением Пуассона и уравнением изгиба пластинок; как мы увидим, функционал $\varphi(u)$ строится не единственным образом, так что для каждой краевой задачи существует бесчисленное множество «методов Трефтца». Заметим еще, что обычно удается доказать сходимость минимизирующей последовательности к точному решению задачи; тем самым

[1]) Для простоты ограничимся случаем вещественных функций.

метод Трефтца оказывается пригодным и как еще один метод приближенного решения краевых задач.

Отметим, что в цитированной статье М. Ш. Бирмана функционалы обобщенного метода Трефтца построены и для некоторых более сложных задач теории тонких пластинок.

§ 68. Применение к уравнению Пуассона

Рассмотрим задачу об интегрировании уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(P) \tag{1}$$

при смешанных краевых условиях ($S_1 + S_2 = S$)

$$u|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_{S_2} = 0, \quad \sigma > 0. \tag{3}$$

В данном случае, как легко получить интегрированием по частям и использованием краевых условий,

$$|u|^2 = (-\Delta u,\ u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega + \int\limits_{S_2} \sigma u^2\, dS. \tag{4}$$

Чтобы упростить изложение, допустим, что решением нашей задачи служит функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$.

Выберем какую-либо неотрицательную функцию $\tilde{\sigma}$, определенную на всей поверхности S и удовлетворяющую неравенству

$$\tilde{\sigma} < \sigma \quad \text{на} \quad S_2. \tag{5}$$

Положим теперь

$$\varphi(u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega + \int\limits_{S} \tilde{\sigma} u^2\, dS + \int\limits_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} u\right)^2 dS. \tag{6}$$

Соответствующий билинейный функционал имеет вид

$$\varphi(u,\ v) = \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, d\Omega + \int\limits_{S} \tilde{\sigma} uv\, dS + \\ + \int\limits_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} u\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v\right) dS; \tag{7}$$

при этом

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + 2\varphi(u,\ v) + \varphi(v). \tag{8}$$

Очевидно, всегда $\varphi(u) \geqslant 0$. Отметим еще два важных свойства функционала $\varphi(u)$:

а) Если функция $u(P)$ удовлетворяет краевым условиям (2) и (3), то $\varphi(u)=\|u\|^2$. Действительно, в этом случае на S_2 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sigma u$. Подставив это в (6), легко найдем

$$\varphi(u)=\int_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega+\int_{S_2}\sigma u^2\,dS+\int_{S_1}\tilde{\sigma}u^2\,dS.$$

В силу условия (2) последний интеграл исчезает, и сравнение с формулой (4) дает $\varphi(u)=\|u\|^2$.

б) Если $u(P)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), а $v(P)$ — произвольная гармоническая функция, непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$, то $\varphi(u, v)=0$. Действительно, беря первый интеграл в (7) по частям и учтя краевые условия, которым удовлетворяет функция $u(P)$, получим

$$\varphi(u, v)=-\int_{\Omega}u\,\Delta v\,d\Omega+\int_{S}u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS+\int_{S}\tilde{\sigma}uv\,dS+$$
$$+\int_{S_2}\frac{1}{\sigma-\tilde{\sigma}}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\tilde{\sigma}u\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}+\tilde{\sigma}v\right)dS=$$
$$=\int_{S_2}\frac{1}{\sigma-\tilde{\sigma}}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}+\tilde{\sigma}v\right)dS=0.$$

Теорема 1. *Из всех решений уравнения* (1), *непрерывно дифференцируемых в* $\bar{\Omega}$, *наименьшее значение функционалу* $\varphi(u)$ *сообщает решение* $u_0(P)$, *удовлетворяющее краевым условиям* (2) *и* (3). *При этом*

$$\varphi_{\min}(u)=\varphi_0(u)=\|u_0\|^2. \tag{9}$$

Пусть $u(P)$ — решение уравнения (1), непрерывно дифференцируемое в $\bar{\Omega}$. Положим $u=u_0+v$, так что $\Delta v=0$, т. е. функция v гармоническая. По свойству б) $\varphi(u_0, v)=0$. Теперь из формулы (8) следует, что при $v\neq 0$, т. е. при $u\neq u_0$,

$$\varphi(u)=\varphi(u_0+v)=\varphi(u_0)+\varphi(v)>\varphi(u_0). \tag{10}$$

Но это и означает, что $\varphi_{\min}(u)=\varphi(u_0)$. По свойству а) $\varphi(u_0)=\|u_0\|^2$, так как u_0 удовлетворяет краевым условиям (2) и (3). Теорема доказана; одновременно установлено, что функционал $\varphi(u)$ удовлетворяет всем требованиям § 67.

Пусть теперь $u_n(P)$, $n=1, 2, \ldots$, есть последовательность решений уравнения (2), минимизирующая для функционала $\varphi(u)$, так что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(u_n)=\varphi(u_0)$. По формуле (10) имеем

$\varphi(u_n) = \varphi(u_n - u_0) + \varphi(u_0)$. Отсюда непосредственно следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n - u_0) = 0$. На основании формулы (6) заключаем, что тогда в среднем по Ω будет $\operatorname{grad} u_n \to \operatorname{grad} u_0$. Если еще $\tilde\sigma > 0$, то $u_n \to u_0$ в среднем по поверхности S_1 и $\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \to \frac{\partial u_0}{\partial \nu}$ в среднем по S_2.

Остановимся на двух наиболее важных частных случаях.

1. Пусть S_2 отсутствует, так что $u = 0$ на всей поверхности S, и наша задача есть задача Дирихле для уравнения (1). В этом случае

$$\varphi(u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int\limits_S \tilde\sigma u^2 \, dS, \qquad (*)$$

где $\tilde\sigma$ — произвольная, неотрицательная на S функция.

Если u_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — минимизирующая последовательность для функционала (*), то, как было указано выше, $\operatorname{grad} u_n \to \operatorname{grad} u_0$ в среднем в Ω, и если $\tilde\sigma > 0$, то $u_n \to u_0$ в среднем по S. Пользуясь неоднократно упоминавшимися «теоремами вложения» С. Л. Соболева, можно доказать, что $u_n \to u_0$ в среднем в Ω; так как u_n суть решения уравнения (1), то отсюда, как известно, следует, что $u_n \to u_0$ равномерно вместе со всеми производными в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω.

Можно положить в (*) $\tilde\sigma \equiv 0$, и это будет в точности соответствовать методу самого Трефтца. При этом, если u_n — минимизирующая последовательность, то можно только утверждать, что $\operatorname{grad} u_n \to \operatorname{grad} u_0$, но сходимость самих функций утверждать нельзя. С этим фактом мы столкнулись в § 65.

2. Рассмотрим задачу Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0. \qquad (11)$$

Как мы знаем (§ 24), эта задача разрешима, если $\int\limits_\Omega f \, d\Omega = 0$, и решение единственно, если дополнительно потребовать, чтобы $\int\limits_\Omega u \, d\Omega = 0$. В этом случае можно положить

$$\varphi(u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega - \alpha \int\limits_S u^2 \, dS + \frac{1}{\alpha} \int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \alpha u\right)^2 dS, \qquad (12)$$

где α — достаточно малая положительная постоянная. Можно доказать[1]), что функционал (12) удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в § 67.

---

[1]) См. М. Ш. Бирман [6].

В задаче Неймана обобщенный метод Трефтца имеет то преимущество перед методом ортогональных проекций, что при отыскании минимума функционала (12) нет нужды подчинять функцию u каким бы то ни было краевым условиям. В задаче Дирихле это преимущество отпадает, так как тогда в методе ортогональных проекций для той же задачи Дирихле векторы $\mathbf{w}$ не подчинены никаким краевым условиям.

Обобщенный метод Трефтца легко распространяется на эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, а также на случай неоднородных краевых условий.

§ 69. Обобщение метода Трефтца на задачу об изгибе свободно опертой пластинки

Переходя к задачам об изгибе тонких пластинок, связанных с бигармоническим уравнением, мы ограничимся двумя простейшими случаями жестко закрепленного и свободно опертого края, и для каждого из них укажем одну (по нашему мнению, простейшую) форму функционала метода Трефтца. Для случая жестко закрепленного края такая форма приведена в § 66; в настоящем параграфе мы рассмотрим пластинку со свободно опертым краем.

Построению функционала метода Трефтца мы предпошлем вывод одного вспомогательного тождества. Формулу (6) § 30 представим в виде

$$2\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\,dy = \int\limits_L \left[\frac{\partial w}{\partial y}\,d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\,d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] =$$
$$= \int\limits_L \left(\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dy - \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx - \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy\right).$$

Нетрудно видеть, что выражение под знаком контурного интеграла инвариантно относительно переноса начала и поворота декартовых осей координат. Имея это в виду, заменим в каждой точке контура L оси x и y внешней нормалью ν и касательной s. При этом, очевидно, $d\nu = 0$ на контуре, и мы получаем

$$2\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\,dy = \int\limits_L \left(\frac{\partial w}{\partial s}\,w_{\nu s} - \frac{\partial w}{\partial \nu}\,w_{ss}\right) ds. \quad (1)$$

В формуле (1) величины $w_{\nu s}$ и w_{ss} суть вторые производные по направлениям касательной к нормали, вычисленные в предположении, что направления касательной и нормали не меняются; более определенно

$$w_{\nu s} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos(\nu,\ x)\cos(s,\ x) + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}[\cos(\nu,\ x)\cos(s,\ y) + \cos(\nu,\ y)\cos(s,\ x)] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos(\nu,\ y)\cos(s,\ y);$$

$$w_{ss} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2(s,\ x) + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos(s,\ x)\cos(s,\ y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2(s,\ y).$$

Вычисления, аналогичные тем, которые были проведены в § 30, показывают, что

$$w_{\nu s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial s}, \qquad w_{ss} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu},$$

где ρ — радиус кривизны контура. Подставив последние выражения в (1), получим

$$2\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = -\int\limits_L \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right]ds.$$

Так как контур L замкнутый, а функция w и ее производные предполагаются однозначными, то интегрирование по частям дает

$$\int\limits_L \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)ds = -\int\limits_L \frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\,ds,$$

что приводит к искомой формуле

$$2\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dS = -\int\limits_L \left[2\frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]ds. \qquad (2)$$

Заменяя в (2) w сперва на $u+v$, а затем на $u-v$ и вычитая, получим еще одну полезную формулу:

$$\iint\limits_S \left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dS = -\int\limits_L \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}\right). \qquad (3)$$

В задаче о свободно опертой пластинке приходится по-разному строить функционал обобщенного метода Трефтца в зависимости от того, будет ли контур пластинки целиком выпуклым или он содержит и невыпуклые части. Если контур L выпуклый, то можно положить

$$\varphi(w) = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dS + \\ + \frac{1}{\sigma}\int\limits_L \rho\left[\Delta w - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right]^2 ds; \qquad (4)$$

здесь σ — постоянная Пуассона, которую мы считаем положительной.

Докажем, что функционал (4) обладает всеми свойствами, перечисленными в § 68.

а) Для любой функции w имеем $\varphi(w) \geqslant 0$, так как контур L выпуклый и, следовательно, $\rho \geqslant 0$.

б) Составим билинейный функционал

$$\varphi(u, v) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dS + \\ + \frac{1}{\sigma}\int\limits_L \rho\left[\Delta u - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right]\left[\Delta v - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\right] ds. \qquad (5)$$

Докажем, что $\varphi(u, v) = 0$, если u удовлетворяет условиям на свободно опертом крае

$$u|_L = 0, \qquad \left[\Delta u - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_L = 0, \qquad (6)$$

а v удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 v = 0. \qquad (7)$$

Для доказательства заметим, что, в силу условий (6) на контуре L,

$$\Delta u - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \Delta u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

что позволяет упростить контурный интеграл в (5). Далее,

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dS = \\ = \iint\limits_S \Delta u\,\Delta v\, dS + \iint\limits_S \left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dS,$$

что, в силу формул (3) и (6), принимает вид

$$\iint_S \Delta u \, \Delta v \, dS - \int_L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds.$$

Теперь

$$\varphi(u, v) = \iint_S \Delta u \, \Delta v \, dS - \int_L \Delta v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds.$$

Заменив в формуле Грина [формула (19) § 7] v на Δv, найдем

$$\iint_S \Delta u \, \Delta v \, dS = \iint_S u \Delta^2 v \, dS + \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v - u \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \right) ds.$$

Отсюда

$$\varphi(u, v) = \iint_S u \Delta^2 v \, dS - \int_L u \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \, ds,$$

что равно нулю в силу уравнений (6) и (7).

в) Пусть w — произвольное решение уравнения изгиба пластинки $D \Delta^2 w = q$, и w_0 — решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям свободного опирания. Функция $v = w - w_0$ удовлетворяет уравнению (7); по доказанному $\varphi(w_0, v) = 0$. Теперь имеем

$$\varphi(w) = \varphi(w_0 + v) = \varphi(w_0) + 2\varphi(w_0, v) + \varphi(v) = \varphi(w_0) + \varphi(v).$$

Отсюда видно, что $\varphi_{\min}(w) = \varphi(w_0)$.

г) Вычислим $\varphi(w_0)$. Используя условия (6), которым удовлетворяет функция w_0, найдем

$$\varphi(w_0) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right] dS + \sigma \int_L \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right)^2 ds.$$

Те же условия (6) позволяют представить тождество (2) в виде

$$\int_L \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right)^2 ds = 2 \iint_S \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] dS.$$

Подставив это в $\varphi(w_0)$, получим

$$\varphi(w_0) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] dS;$$

по формуле (21) § 30 $\varphi(w_0) = |w_0|^2$.

Если контур L содержит невыпуклые участки[1]), то функционал (3) перестает быть положительным и делается непри-

[1]) На таких участках $\rho < 0$.

годным для наших целей. В этом случае можно положить [1])

$$\varphi(w)=\iint_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dS+$$
$$+\int_L\left\{\beta w^2-\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)^2+\frac{1}{\alpha}\left[\Delta w-(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)\right]^2\right\}ds, \tag{8}$$

где α и β — положительные постоянные, причем постоянная α достаточно мала.

§ 70. Прием М. Г. Слободянского

В некоторых случаях для получения оценки функционала энергии удобно снизу воспользоваться простым приемом, предложенным М. Г. Слободянским [6]. Этот прием, представляющий некоторое обобщение упоминавшегося выше преобразования Фридрихса, состоит в следующем.

Пусть A — симметричный положительно определенный оператор,

$$(Au,\ u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2, \tag{1}$$

и пусть u_0 — решение уравнения

$$Au=f. \tag{2}$$

Допустим, что оператор A удалось представить в виде суммы

$$A=\sum_{k=1}^{p}A_k, \tag{3}$$

причем каждый оператор A_k симметричный и положительный.

Пусть U означает набор элементов $u_1, u_2, \ldots, u_p$ таких, что u_k принадлежит области определения оператора A_k и удовлетворяется уравнение

$$\sum_{k=1}^{p}A_k u_k=f. \tag{4}$$

Составим функционал

$$\Psi(U)=\sum_{k=1}^{p}(A_k u_k,\ u_k). \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 1. *Функционал $\Psi(U)$ достигает минимума при $u_k=u_0$, $k=1, 2, \ldots, p$; при этом*

$$\min\Psi(U)=|u_0|^2. \tag{6}$$

---

[1]) См. М. Ш. Бирман [6].

Положим $\eta_k = u_k - u_0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{p} A_k\eta_k = \sum_{k=1}^{p} A_k u_k - \sum_{k=1}^{p} A_k u_0 = f - Au_0 = 0. \tag{7}$$

Теперь

$$\Psi(U) = \sum_{k=1}^{p} (A_k(u_0+\eta_k),\ u_0+\eta_k) = (Au_0,\ u_0) + \\ + \sum_{k=1}^{p} (A_k\eta_k,\ u_0) + \sum_{k=1}^{p} (A_k u_0,\ \eta_k) + \sum_{k=1}^{p} (A_k\eta_k,\ \eta_k).$$

В силу равенства (7) $\sum_{k=1}^{p} (A_k\eta_k,\ u_0) = 0$, $\sum_{k=1}^{p} (A_k u_0,\ \eta_k) = \sum_{k=1}^{p} (u_0,\ A_k\eta_k) = 0$, и мы получаем

$$\Psi(U) = |u_0|^2 + \sum_{k+1}^{p} (A_k\eta_k,\ \eta_k).$$

Так как операторы A_k положительны, то $\Psi(U) \geqslant |u_0|^2$; знак равенства возможен только тогда, когда $\eta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, т. е. когда $u_k = u_0$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

В самом общем случае можно положительно определенный оператор A представить в виде $A = A_1 + A_2$, если взять любую постоянную c так, чтобы $0 < c < \gamma$, и положить $A_1 u = Au - cu$, $A_2 u = cu$. При этом $\Psi(U) = (Au_1 - cu_1, u_1) + c(u_2, u_2)$; элементы u_1 и u_2 связаны уравнением $Au_1 - cu_1 + cu_2 = f$. Отсюда

$$\Psi(U) = (Au_1 - cu_1,\ u_1) + \frac{1}{c}(f - Au_1 + cu_1,\ f - Au_1 + cu_1); \tag{8}$$

здесь u_1 — произвольный элемент области определения оператора A.

Отметим еще некоторые частные случаи. Если

$$Au = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u,$$

где $C(P)$ — строго положительная функция, и если краевые условия таковы, что оператор

$$A_1 u = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

положителен на множестве функций, удовлетворяющих этим условиям, то можно положить $A_2 u = C(P)u$ и $A = A_1 + A_2$.

Функцию u_1 можно выбрать произвольно, но так, чтобы она удовлетворяла краевым условиям задачи, тогда u_2 определится из уравнения

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)+C(P)\,u_2=f(P);$$

при этом

$$\Psi(U)=-\int_{\Omega} u_1 \sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)d\Omega+\int_{\Omega} Cu_2^2\,d\Omega.$$

В частности, если краевое условие имеет вид $u|_S=0$, то этому же условию удовлетворяет и функция u_1. Интегрируя по частям, приведем $\Psi(U)$ к виду

$$\Psi(U)=\int_{\Omega}\left\{\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}+Cu_2^2\right\}d\Omega.$$

Рассмотрим еще уравнение

$$Au=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{\partial x^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right]=f(x)$$

при краевых условиях

$$u^{(k)}(a)=u^{(k)}(b)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Если коэффициенты таковы, что $p_m(x)\geqslant\tilde{p}>0$, $p_k(x)\geqslant 0$, то можно положить

$$A_k u=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{\partial x^k}\right],\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$u^{(j)}(a)=u^{(j)}(b)=0,\quad j\leqslant k-1.$$

В нашем случае $U=(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m)$; функции u_k связаны уравнением

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{\partial x^k}\left[p_k(x)\frac{du_k}{\partial x^k}\right]=f(x);$$

функционал $\Psi(U)$ имеет вид

$$\Psi(U)=\int_a^b\sum_{k=0}^{m}p_k(x)\left(\frac{d^k u_k}{\partial x^k}\right)^2dx.$$

§ 71. Двусторонние оценки функционалов

Иногда бывает важным найти не самое решение уравнения

$$Au = f, \tag{1}$$

а только некоторый, связанный с этим решением функционал вида (u, g), где g — некоторая данная функция. Из ряда работ, в которых трактуется эта задача, мы выделим работу М. Г. Слободянского[1]) [4], краткое изложение которой будет дано в настоящем параграфе; в конце параграфа будет сказано еще об интересной работе Т. Като [1].

Пусть A — симметричный положительно определенный оператор, и пусть требуется вычислить скалярное произведение (u_0, g), где g — данный элемент гильбертова пространства, в котором действует оператор A, а u_0 — решение уравнения (1). Простейший способ решения этой задачи таков: строим приближенное решение u_n уравнения (1) и полагаем приближенно

$$(u_0, g) = (u_n, g). \tag{2}$$

Погрешность этого приближенного равенства легко оценивается по неравенству Коши — Буняковского

$$|(u_0, g) - (u_n, g)| = |(u_0 - u_n, g)| \leqslant \| g \| \cdot \| u_0 - u_n \|. \tag{3}$$

Если u_n построено, например, по энергетическому методу, то величину $\| u_0 - u_n \|$ можно оценить, воспользовавшись каким-нибудь встречным методом. Равенство (2) можно уточнить

Пусть v_0 удовлетворяет уравнению

$$Av = g, \tag{4}$$

и пусть v_n — его приближенное решение. Положим

$$Au_n = f_n, \quad Av_n = g_n, \quad b_n = (u_n, g) + (f - f_n, v_n). \tag{5}$$

Положим приближенно

$$(u_0, g) = b_n \tag{6}$$

и оценим погрешность этого неравенства. Легко проверить тождество $(u_0, g) - b_n = (u_0 - u_n, g - g_n)$. Искомая погрешность

$$|(u_0 - u_n, g - g_n)| = |(u_0 - u_n, A(v_0 - v_n)| = |[u_0 - u_n, v_0 - v_n]|,$$

и по неравенству Коши — Буняковского

$$|(u_0, g) - b_n| \leqslant | u_0 - u_n | \cdot | v_0 - v_n |. \tag{7}$$

---

[1]) См. также работы этого автора [1], [2], [7].

Правую часть можно оценить методами, установленными в настоящей главе, если u_n и v_n построены по энергетическому методу или по методу ортогональных проекций [1]).

Приведем еще, не останавливаясь на выводе, некоторые результаты Т. Като [1]. Пусть $A = T^*T$; относительно операторов A, T, T^* примем условия § 62. По-прежнему пусть u_0 удовлетворяет уравнению (1). Пусть еще u и v — произвольные элементы из области определения оператора T, а u', v' — произвольные решения уравнений $T^*u' = f$, $T^*v' = g$. Положим $\alpha = (u, g) + (f, v) - (Tu, Tv)$, $\beta = (u', v')$. Тогда погрешность приближенного равенства

$$(u_0, g) = (\alpha + \beta)/2 \tag{8}$$

не превосходит величины

$$\| Tu - u' \| \cdot \| Tv - v' \|/2. \tag{9}$$

§ 72. Оценка погрешности, проистекающей от ошибки в уравнении

Часто бывает выгодно заменить данное уравнение

$$Au = f \tag{1}$$

близким, но более простым уравнением, которое мы запишем в виде

$$Bu = f. \tag{2}$$

Возникает вопрос, насколько такая замена отразится на решении, иначе говоря, как судить о степени близости решений уравнений (1) и (2), если мы как-то можем судить о степени близости операторов A и B.

В настоящем параграфе мы сформулируем некоторые результаты, содержащиеся в статьях автора [9], [10], [17]; полное изложение этих результатов содержится в книге автора [26].

Будем считать, что операторы A и B положительные и что соответствующие им энергетические пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов. Можно доказать, что тогда найдутся такие положительные постоянные α_1 и α_2, что для любой функции $u \in H_A$ (или, что то же, $u \in H_B$) справедливо неравенство

$$\alpha_1 | u |_B^2 \leqslant | u |_A^2 \leqslant \alpha_2 | u |_B^2. \tag{3}$$

Коль скоро операторы A и B даны, определение постоянных α_1 и α_2 обычно не наталкивается на особые трудности, и мы будем считать эти постоянные известными.

Если u_0 и u_1 суть решения уравнений (1) и (2), так что $Au_0 = f$ и $Bu_1 = f$, то имеет место неравенство

$$| u_1 - u_0 |_B \leqslant \eta | u_1 |_B, \tag{4}$$

---

[1]) В работе М. Г. Слободянского [7] намечено построение формулы, более точной, чем формула (6).

в котором постоянная η определяется формулой

$$\eta = \max(|\alpha_1 - 1|/\alpha_1;\ |\alpha_2 - 1|/\alpha_2). \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) решают задачу, поставленную в начале параграфа.

В качестве примера рассмотрим задачу Неймана для эллиптического уравнения

$$Au = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P). \tag{6}$$

Эта задача состоит (§ 27) в отыскании функции $u(P)$, определенной в некоторой области Ω, расположенной в пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$; функция u должна удовлетворять уравнению (6) внутри области Ω и краевому условию (ν — внешняя нормаль)

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,\ x_k)\right]_S = 0 \tag{7}$$

Область Ω считаем конечной и удовлетворяющей условию конуса (§ 55), а ее границу S кусочно гладкой. Коэффициенты A_{jk} будем считать ограниченными, а уравнение (6) невырожденным. Тогда можно доказать существование таких двух положительных постоянных μ_0 и μ_1, что для любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и при любом положении точки P внутри или на границе области Ω выполняется неравенство

$$\mu_0\sum_{j=1}^{m} t_j^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(P)\,t_j t_k \leqslant \mu_1\sum_{j=1}^{m} t_j^2. \tag{8}$$

Напомним, что для разрешимости задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega f(P)\,d\Omega = 0; \tag{9}$$

решение будет единственным, если подчинить его условию

$$\int_\Omega u(P)\,d\Omega = 0. \tag{10}$$

Оба эти условия будем считать выполненными.

Введем вещественное гильбертово пространство H как подпространство $L_2(\Omega)$, определяемое уравнением (10). В этом пространстве оператор A положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих краевому условию (7). При этом

$$|u|_A^2 = \int_\Omega \sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega. \tag{11}$$

Условие (7) естественное, поэтому пространство H_A состоит из всех функций, сообщающих интегралу (11) конечное значение; из неравенств (8) следует, что H_A можно рассматривать как множество функций, сообщающих конечное значение более простому интегралу

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega. \tag{12}$$

В той же области Ω будем решать задачу Неймана для эллиптического уравнения

$$-\sum_{j,\, k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = f(P); \tag{13}$$

краевое условие имеет вид

$$\left[\sum_{j,\, k=1}^{m} B_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cos(\nu,\ x_k)\right]_S = 0. \tag{14}$$

Пространство H_B состоит из функций, сообщающих конечное значение интегралу (12), т. е. из тех же функций, что и пространство H_A.

Составим уравнение с неизвестной λ

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{11} & B_{12} - \lambda A_{12} & \dots & B_{1n} - \lambda A_{1n} \\ B_{21} - \lambda A_{21} & B_{22} - \lambda A_{22} & \dots & B_{2n} - \lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} - \lambda A_{n1} & B_{n2} - \lambda A_{n2} & \dots & B_{nn} - \lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Все корни этого уравнения положительны (ср. § 42). Пусть $\lambda'(P)$ — наименьший, а $\lambda''(P)$ — наибольший корень уравнения (15). Тогда, как известно,

$$\lambda'(P) \sum_{j,\, k=1}^{m} B_{jk}(P)\, t_j t_k \leqslant \sum_{j,\, k=1}^{m} A_{jk}(P)\, t_j t_k \leqslant \lambda''(P) \sum_{j,\, k=1}^{m} B_{jk} t_j t_k, \tag{16}$$

где t_j — любые вещественные числа. Обозначим теперь $\alpha_1 = \inf\limits_{P \in \Omega} \lambda'(P)$, $\alpha_2 = \sup\limits_{P \in \Omega} \lambda''(P)$. В неравенстве (16) заменим λ' на α_1, а λ'' на α_2, отчего неравенство усилится, и положим $t_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Проинтегрировав полученное неравенство по Ω, получим $\alpha_1 |u|_B^2 \leqslant |u|_A^2 \leqslant \alpha_2 |u|_B^2$.

Обозначая через u и v решения задач Неймана для уравнений (16) и (12), имеем $|u - v| \leqslant \eta |v|$, где η определяется формулой (5). Последнее неравенство показывает, в частности, что если $A_{jk}(P) \to B_{jk}(P)$ равномерно в замкнутой области, то как сама функция $u(P)$, так и ее первые частные производные сходятся в среднем в Ω к функции $v(P)$ и ее первым частным производным.

ГЛАВА IX

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

§ 73. Теорема о приближениях по Ритцу

Пусть A — действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H положительно определенный оператор с дискретным спектром. Обозначим через λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, собственные числа этого оператора, расположенные в порядке возрастания, и через λ_{kn} n-е приближение по Ритцу к числу λ_k.

Теорема. *Процесс Ритца дает для собственных чисел положительно определенного оператора приближенные значения с избытком.*

Прежде всего докажем, что с возрастанием n величина λ_{kn} убывает.

Если координатные элементы подвергнуть процессу ортогонализации, то это не отразится на числах λ_{kn}; будем считать поэтому, что координатная система $\{\varphi_k\}$ ортонормирована в H. Тогда, как об этом сказано в § 43, λ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n$, суть собственные числа квадратичной формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} [\varphi_i, \varphi_j]\, a_i a_j. \tag{1}$$

Обозначим через E_n евклидово пространство n измерений; совокупность коэффициентов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$ можно рассматривать как точку в E_n. Через R_n обозначим матрицу Ритца n-го порядка, т. е. матрицу энергетических произведений $[\varphi_i, \varphi_j]$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Матрица R_n порождает в E_n симметричный оператор, который мы также обозначим через R_n. Числа λ_{kn} — собственные числа формы (1) — суть также собственные числа оператора R_n. Заметим, что

$$\sum_{i, j=1}^{n} [\varphi_i, \varphi_j]\, a_i a_j = (R_n a, a). \tag{2}$$

Обозначим через $a_i^{(k)}$ коэффициенты Ритца в выражении $u_{kn} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \varphi_i$, $k = 1, 2, \ldots, n$, приближенного собственного элемента u_{kn}, соответствующего приближенному собственному числу λ_{kn}, и через $a^{(k)}$ n-компонентный вектор $a^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$. Далее, через $\hat{a}^{(k)}$ обозначим вектор $\hat{a}^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}, 0\right)$. Вектор $\hat{a}^{(k)}$ можно отождествить с $(n-1)$-компонентным вектором $\left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}\right)$. Вообще, если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, то будем писать $\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0)$ и будем отождествлять $\hat{a}$ с $(n-1)$-компонентным вектором $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Обозначим

$$\lambda_{n-1}\left(\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \ldots, \hat{a}^{(k-1)}\right) = \min \sum_{i,\, j=1}^{n-1} [\varphi_i, \varphi_j]\, a_i a_j = \min\left(R_{n-1}\hat{a}, \hat{a}\right); \tag{3}$$

здесь R_{n-1} — матрица Ритца $(n-1)$-го порядка, а минимум берется на множестве $(n-1)$-компонентных векторов, удовлетворяющих условиям

$$\|\hat{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 1, \quad \left(\hat{a}, \hat{a}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_i^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{4}$$

В силу минимаксимального принципа

$$\lambda_{k,\, n-1} \geqslant \lambda_{n-1}\left(\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \ldots, \hat{a}^{(k-1)}\right). \tag{5}$$

Будем теперь трактовать $\hat{a}$ как n-компонентный вектор с нулевой последней компонентой. Тогда, очевидно,

$$\left(R_{n-1}\hat{a}, \hat{a}\right) = \left(R_n\hat{a}, \hat{a}\right). \tag{6}$$

Теперь величину (3) можно определить так: это минимум квадратичной формы (2) на множестве n-компонентных векторов a, удовлетворяющих условиям

$$\|a\|^2 = 1; \quad \left(a, a^{(j)}\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{4_1}$$

и дополнительному условию

$$a_n = 0. \tag{7}$$

Если отбросить условие (7), то множество векторов a расширится, и минимум во всяком случае не увеличится. Но минимум формы (2) при условиях (4_1) есть как раз λ_{kn}. Отсюда $\lambda_{kn} \leqslant \lambda_{n-1}\left(\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \ldots, \hat{a}^{(k-1)}\right)$. Сопоставляя это с неравенством (5), получаем $\lambda_{kn} \leqslant \lambda_{k,\, n-1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, последовательность λ_{kn}, $n = 1, 2, \ldots,$ — убывающая. Ниже будет доказано[1]), что $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{kn} = \lambda_k$. Но

---

[1]) См. гл. XI, § 94, где будет доказана более общая теорема.

монотонно убывающая переменная не меньше своего предела, поэтому

$$\lambda_{kn} \geqslant \lambda_k. \tag{8}$$

Теорема доказана.

§ 74. Некоторые частные приемы

Теорема предыдущего параграфа делает особенно важным вопрос о приближении к собственным числам положительно определенных операторов снизу. С одной стороны, такие приближения, вместе с приближениями по Ритцу, дали бы возможность надежно судить о погрешности; с другой стороны, такие практически важные задачи, как задача об устойчивости, требуют знания приближенных значений собственных чисел именно с недостатком.

Вопросу о таких приближениях посвящены все последующие параграфы настоящей главы. В данном параграфе мы коротко скажем о некоторых отдельных результатах, относящихся к этому вопросу.

1. Во многих случаях удается построить так называемую функцию Грина $G(P, Q)$ данного положительно определенного оператора A. Тогда собственные числа и собственные функции оператора A можно найти как характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$u(P)-\lambda\int\limits_{\Omega} G(P,\ Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q=0. \tag{1}$$

Заметим, что из симметричности оператора A вытекает симметричность соответствующей ему функции Грина. Рассмотрим сперва случай, когда

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} G^2(P,\ Q)\,d\Omega_P\,d\Omega_Q<\infty. \tag{2}$$

Рассматривая $G(P, Q)$ как ядро интегрального уравнения, обозначим через $G_m(P, Q)$, $m = 1, 2, \ldots$, соответствующие ему итерированные ядра, определяемые известными рекуррентными соотношениями

$$G_1(P,\ Q)=G(P,\ Q),\qquad G_m(P,\ Q)=\int\limits_{\Omega} G(P,\ R)\,G_{m-1}(R,\ Q)\,d\Omega_R.$$

Введем в рассмотрение так называемые *следы* итерированных ядер

$$a_m=\int\limits_{\Omega} G_m(P,\ P)\,d\Omega.$$

Для следов с четными индексами верна формула

$$a_{2m} = \int_\Omega \int_\Omega G_m^2(P,\ Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q, \tag{*}$$

позволяющая вычислить след, используя вдвое меньшее число итераций. Если следы a_{2m} вычислены, то нетрудно найти наименьшее характеристическое число уравнения (1). Именно, следы a_m связаны с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соотношением

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \quad m \geqslant 2. \tag{3}$$

Пусть характеристические числа расположены в порядке возрастания. Заменяя в последнем равенстве m на $2m$ и отбрасывая все члены ряда, кроме первого, получаем

$$\lambda_1 \geqslant 1/\sqrt[2m]{a_{2m}}. \tag{4}$$

Таким образом, приближенное равенство

$$\lambda_1 \approx 1/\sqrt[2m]{a_{2m}} \tag{5}$$

дает значение λ_1 с недостатком. Можно доказать, что

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}},$$

так что при m достаточно большом приближенное равенство (5) будет сколь угодно точным. Если известна кратность p характеристического числа λ, то вместо (4) можно получить более точное неравенство

$$\lambda_1 \geqslant \sqrt[2m]{p/a_{2m}} \tag{6}$$

и соответственно более точное приближенное равенство с недостатком

$$\lambda_1 \approx \sqrt[2m]{p/a_{2m}}. \tag{7}$$

Заметим, что из ряда (3) можно получить для λ_1 и приближенное значение с избытком:

$$\lambda_1 \approx \sqrt{a_{2m}/a_{2m+2}}, \tag{8}$$

что в пределе переходит в точную формулу

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \sqrt{a_{2m}/a_{2m+2}}.$$

Можно построить приближенные формулы с недостатком и для следующих характеристических чисел уравнения (1). Так, если характеристические числа λ_1 и λ_2 — оба простые, то

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt[2m]{2/\left(a_{2m}^2 - a_{4m}\right)}. \tag{9}$$

Если λ_1 известно точно (или с избытком), то формула (8) дает значение λ_2 с недостатком; при $m \to \infty$ получаем точную формулу

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}^2 - a_{4m}}}. \tag{10}$$

Подробные выводы приведенных здесь формул, а также некоторые численные примеры приведены в книге автора [7], §§ 15 и 17. Изложенный выше прием часто дает хорошие результаты, если A — дифференциальный оператор с одной независимой переменной, так как тогда во многих случаях вычисление функции Грина и ее итераций не требует затраты большого труда.

Встречаются случаи, когда интеграл (2) расходится, но сходится такой же интеграл от некоторого итерированного ядра $G_\nu(P, Q)$. В этом случае формулу (3) можно заменить такой:

$$a_{\nu m} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n^{\nu m}, \qquad m \geqslant 2; \tag{11}$$

верны формулы, которые получаются из формул (4)—(10), если в них заменить λ_1 и λ_2 на λ_1^ν и λ_2^ν, а индексы у следов a_{2m}, a_{2m+2}, a_{4m} умножить на ν.

2. В своей статье [1] И. Ю. Харрик получила двустороннюю оценку для первого собственного числа оператора $-\Delta$, где Δ — оператор Лапласа, при краевом условии $u|_S = 0$. Делаются следующие предположения: 1) область Ω, ограниченная поверхностью S, конечная; 2) уравнение поверхности S имеет вид $\varphi(P) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, где функция φ имеет достаточно много непрерывных производных и не обращается в нуль в Ω, а $\operatorname{grad}\varphi$ не обращается в нуль на S; 3) первая собственная функция u_1 имеет в $\overline{\Omega}$ k непрерывных производных; 4) приближенное собственное число λ_{1n} и приближенная собственная функция $u_{1n}(P)$ определены процессом Ритца; 5) $u_{1n}(P)$ имеет вид произведения функции $\varphi(P)$ на полином степени $\leqslant n$ по каждой из координат. Тогда имеет место неравенство

$$0 \leqslant \lambda_{1n} - \lambda_1 \leqslant \sigma_n / n^{k-1}, \qquad \sigma_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{12}$$

Доказательство основано на теореме И. Ю. Харрик об оценке приближения функций, равных нулю на S, произведениями $\varphi R(P)$, где R — полином, и на легко доказываемом соотношении, верном для любого положительно определенного оператора A с дискретным спектром: $|u_1 - u|_A^2 - \lambda_1 \| u_1 - u \|^2 = |u|_A^2 - \lambda_1$. Здесь u_1 — собственный элемент оператора, отвечающий наименьшему собственному числу λ_1, а u — произвольный элемент из H_A, такой, что $\| u \| = 1$; элемент u_1 также считается нормированным: $\| u_1 \| = 1$.

3. В работе Г. Бертрама [1] даны оценки погрешности процесса Ритца для собственных чисел в случае обыкновенного дифференциального уравнения

$$Mu - \lambda N u = 0 \tag{13}$$

при краевых условиях достаточно общего вида. Предполагается, что оба оператора M и N положительно определенные, порядков $2m$ и $2s$, причем $s < m$. Оценка дается в предположении, что известны собственные числа μ_n оператора M при краевых условиях задачи, а также соответствующие им собственные функции; последние используются в качестве координатных.

Более обстоятельно исследован случай, когда $Nu = q(x) u$, где $q(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[0, 1]$. Если λ_k — собственное число задачи (13), а λ_{kn} n-е приближение к λ_k по Ритцу, то, как оказывается,

$$0 < \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{kn}} \leqslant q_{\max} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_p}. \tag{14}$$

В широком классе случаев (см., например, М. А. Наймарк [1]) справедлива оценка $\mu_p = O(p^{2m})$, а тогда

$$0 < 1/\lambda_k - 1/\lambda_{kn} \leqslant c q_{\max} / n^{2m-1}; \qquad c = \text{const}. \tag{15}$$

В общем случае, когда N имеет порядок $2s$, Г. Бертрам устанавливает оценку

$$0 < 1/\lambda_k - 1/\lambda_{kn} \leqslant c_1 / n^{2(m-s)-1}; \qquad c_1 = \text{const}. \tag{16}$$

4. А. В. Джишкариани [1] улучшил оценки (14) и (15) для случая простейших краевых условий

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{17}$$

В этом случае

$$1/\lambda_k - 1/\lambda_{kn} = O(1/\mu_{n+1}), \tag{18}$$

и, следовательно, для широкого класса операторов M

$$1/\lambda_k - 1/\lambda_{kn} = O(n^{-2m}). \tag{19}$$

5. В работе Г. М. Вайникко [5] содержится в числе прочих следующая оценка. Пусть A — положительно определенный оператор с дискретным спектром, λ_k и λ_{kn} имеют то же значение, что и в начале параграфа. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — первые n координатных элементов и P_n — оператор ортогонального проектирования на подпространство, натянутое на эти элементы. Тогда

$$0 \leqslant 1/\lambda_k - 1/\lambda_{kn} \leqslant \| (E - P_n) A^{-1} \|, \tag{20}$$

где E — тождественный оператор.

§ 75. Метод «промежуточных операторов»

1. В 1935 г. А. Вайнштейн (см. [1, 2]) предложил довольно общий метод построения приближений с недостатком для собственных чисел положительно определенного оператора. А. Вайнштейн первоначально изложил свой метод на частной задаче о собственных частотах пластинки, жестко закрепленной по краю. В формулировке и исследовании метода для общего случая деятельное участие принял Н. Ароншайн, посвятивший этому ряд работ (см. С. Х. Гулд [1]). Полезные добавления к методу предложили Н. Бэзли и Д. Фокс (см. Н. Бэзли [1], Н. Бэзли и Д. Фокс [1—3]). Отметим еще работу И. В. Свирского [1]. Ряд интересных результатов получил Х. Ф. Вейнбергер ([1—2], см. также С. Х. Гулд [1]).

Методу А. Вайнштейна посвящена большая книга С. Х. Гулда [1], к которой мы и отсылаем читателя за дальнейшими библиографическими сведениями и за большинством деталей. Здесь мы ограничимся изложением основ метода и некоторыми наиболее, по нашему мнению, интересными дополнениями. В конце главы будут приведены результаты некоторых численных экспериментов, выполненных А. Вайнштейном и его сотрудниками.

2. Пусть A и B — симметричные положительно определенные операторы, и $B \leqslant A$ (см. § 41). Тогда, как мы знаем, собственные числа оператора B меньше соответствующих собственных чисел оператора A. Если оператор B построен и его собственные числа легко найти, то в нашем распоряжении оказываются приближенные (хотя, вообще говоря, грубые) значения с недостат-

ком для собственных чисел оператора A. Примеры, в которых можно построить такой меньший оператор, указать легко. Так, например, обозначим через A оператор $-\Delta$, заданный на функциях, определенных в области Ω и равных нулю на ее границе, а через B — тот же оператор $-\Delta$, но заданный на функциях, определенных в более широкой области Ω_1 и равных нулю на ее границе. Докажем, что $B < A$. Для этого доопределим функции из H_A, полагая их равными нулю в $\Omega_1 - \Omega$. Тогда их можно рассматривать как функции из H_B. Таким образом, H_B шире, чем H_A. В то же время, если $u \in H_A$, то

$$|u|_A^2 = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega = \int\limits_{\Omega_1} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega_1 = |u|_B^2.$$

Согласно определению, данному в § 41, $B \leqslant A$, и собственные числа оператора B меньше соответствующих собственных чисел оператора A. Если в качестве Ω_1 взять, например, параллелепипед, то собственные числа оператора B легко находятся.

Приведем еще один, более простой пример. Пусть

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\,u,$$

и функции $u \in D_A$ определяются краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$. Пусть $p(x) \geqslant p_0 > 0$ и $r(x) \geqslant r_0 \geqslant 0$, где p_0 и r_0 — постоянные. В качестве B можно взять оператор $Bu = -p_0\frac{d^2u}{dx^2} + r_0 u$ при тех же краевых условиях $u(0) = u(1) = 0$. Собственные числа оператора B определяются элементарно; они равны $r_0 + p_0 n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, и, так как, очевидно, $B < A$, то $\lambda_n > r_0 + p_0 n^2\pi^2$, где λ_n есть n-е собственное число оператора A. Метод «промежуточных операторов» или, как его называет А. Вайнштейн, метод «промежуточных задач» заключается в построении последовательности операторов A_n, $n = 1, 2, \ldots$, заключенных между B и A; если при этом наименьшее собственное число оператора A_n оказывается строго больше, чем наименьшее собственное число оператора B, то мы получаем для наименьшего собственного числа данного оператора A более точное приближение с недостатком.

3. Рассмотрим сперва случай[1]), когда $D_B \supset D_A$. В этом случае «промежуточные операторы» A_n строятся следующим образом. Положим $A - B = C$. Оператор C неотрицателен. Для простоты допустим, что он положительно определенный. Выберем какие-нибудь n линейно независимых элементов $f_j \in D_A$,

[1]) Этот случай был рассмотрен Н. Ароншайном в 1951 г. (см. С. Х. Гулд [1]) и независимо от него И. В. Свирским [1] в 1953 г.

$j=1, 2, \ldots, n$. Применяя, если это необходимо, процесс ортогонализации, можно добиться того, чтобы эти элементы были ортонормированы в энергетическом пространстве H_C:

$$[f_k, f_m]_C = (Cf_k, f_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим

$$Cf_k = g_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

и положим

$$C_n u = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k]_C g_k = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k) g_k = \sum_{k=1}^{n} (u, g_k) g_k \tag{3}$$

и

$$A_n = B + C_n. \tag{4}$$

Докажем, что C_n — симметричный оператор, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant C_n \leqslant C$; отсюда будет следовать, что $B \leqslant A_n \leqslant A$. Имеем

$$(C_n u, v) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k]_C (g_k, v) = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k)(Cf_k, v),$$

или, так как оператор C симметричен, то

$$(C_n u, v) = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k)(f_k, Cv).$$

Тот же результат получим, вычисляя скалярное произведение $(u, C_n v)$; этим доказана симметричность оператора C_n.

Чтобы доказать неравенство $0 \leqslant C_n \leqslant C$, вычислим величину (значок C при энергетическом произведении опускаем)

$$(C_n u, u) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k](Cf_k, u) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k][f_k, u] = \sum_{k=1}^{n} |[u, f_k]|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда $C_n \geqslant 0$. С другой стороны, по неравенству Бесселя $\sum_{k=1}^{n} |[u, f_k]_C|^2 \leqslant |u|_C^2 = (Cu, u)$. Отсюда $(C_n u, u) \leqslant (Cu, u)$; по определению $C_n \leqslant C$.

4. Нетрудно выяснить, каковы должны быть элементы f_k, чтобы наименьшее собственное число $\mu_1^{(n)}$ оператора A_n было строго больше наименьшего собственного числа μ_1 оператора B. Пусть φ_1 — нормированный собственный элемент оператора B,

соответствующий собственному числу μ_1. Имеем

$$\mu_1 = \inf_{\|u\|=1} (Bu, u) = (B\varphi_1, \varphi_1), \tag{5}$$

$$\mu_1^{(n)} = \inf_{\|u\|=1} (A_n u, u) = \inf_{\|u\|=1} \left\{ (Bu, u) + \sum_{k=1}^{n} |[u, f_k]_C|^2 \right\}. \tag{6}$$

Первое слагаемое справа достигает минимума, равного μ_1, при $u = \varphi_1$. Если элемент φ_1 ортогонален по энергии оператора C ко всем элементам f_k, то, очевидно, $\mu_1^{(n)} = \mu_1$, и в этом случае метод промежуточных операторов не позволяет улучшить оценку наименьшего собственного числа. Пусть теперь хотя бы одно из произведений $[\varphi_1, f_k]_C \neq 0$, и пусть минимум в (6) достигается при $u = \tilde{\varphi}$

$$\mu_1^{(n)} = (B\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) + \sum_{k=1}^{n} |[\tilde{\varphi}, f_k]_C|^2. \tag{7}$$

Если $\tilde{\varphi} \neq \varphi_1$, то уже $(B\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) > \mu_1$; если же $\tilde{\varphi} = \varphi_1$, то сумма в (7) положительна. Таким образом, переход от оператора B к оператору A_n улучшает приближение снизу к наименьшему собственному числу оператора тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов f_k не ортогонален (в норме H_C) ни к одному из собственных элементов оператора B, отвечающих его наименьшему собственному числу.

Ниже будем считать, что спектры операторов A и B дискретны, хотя метод промежуточных операторов пригоден и в более общих условиях.

Вычисление собственных чисел промежуточного оператора A_n требует решения некоторого уравнения, вообще говоря, трансцендентного. Выведем это уравнение.

Собственные числа λ и собственные элементы u определяются из уравнения $A_n u - \lambda u = 0$; используя формулы (2)—(4), приведем его к виду

$$Bu - \lambda u = -\sum_{k=1}^{n} (u, g_k) g_k. \tag{8}$$

Будем считать, что не все произведения (u, g_k) обращаются в нуль — в противном случае собственное число оператора A_n совпало бы с некоторым собственным числом оператора B, а этот случай мы пока исключаем из рассмотрения.

Пусть μ_k и v_k — собственные числа и соответствующие им собственные элементы оператора B. Система $\{v_k\}$ полна в рассматриваемом гильбертовом пространстве, поэтому

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, v_j) v_j.$$

Подставим это в правую часть уравнения (8) и скалярно умножим затем его обе части на v_m. Используя соотношение $Bv_m = \mu_m v_m$, получим

$$(u,\ v_m) = -\frac{1}{\mu_m - \lambda}\sum_{k=1}^{n}(u,\ g_k)(g_k,\ v_m)$$

и, следовательно,

$$u = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(u,\ g_k)(g_k,\ v_j)}{\mu_j - \lambda}v_j.$$

Умножив это скалярно на g_i, получим систему однородных линейных уравнений

$$(u,\ g_i) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\lambda)(u,\ g_k) = 0. \tag{9}$$

Здесь обозначено

$$\alpha_{ik}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(g_k,\ v_j)(v_j,\ g_i)}{\mu_j - \lambda}. \tag{10}$$

По предположению не все произведения (u, g_k) равны нулю, поэтому определитель системы (9) обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) & \dots & \alpha_{1n}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & 1+\alpha_{22}(\lambda) & \dots & \alpha_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}(\lambda) & \alpha_{n2}(\lambda) & \dots & 1+\alpha_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Корни этого определителя дают все собственные числа оператора A_n, отличные от собственных чисел оператора B.

Оказывается, что полюсы определителя (11), отличные от нуля, дают все собственные числа оператора B, не совпадающие с собственными числами оператора A_n (см. С. Х. Гулд [1]).

§ 76. Метод «промежуточных операторов» (продолжение)

Откажемся от допущения, что $D_A \subset D_B$. Во всяком случае по определению из неравенства $A \geqslant B$ вытекает, что $H_A \subset H_B$. Эта символическая запись в данном случае означает, что любой элемент пространства H_A одновременно есть элемент H_B. Кроме того, согласно тому же определению, если $u \in H_A$, то $|u|_A \geqslant |u|_B$. Примем следующее допущение:

Если $u \in H_A$, *то* $|u|_A = |u|_B$. Из этого допущения сразу вытекает, что

$$[u, v]_A = [u, v]_B; \qquad u, v \in H_A.$$

Как мы сейчас увидим, из него же вытекает, что H_A есть подпространство H_B. Множество H_A линейно, и достаточно доказать, что оно замкнуто в норме H_B. Пусть $u_n \in H_A$, $n = 1, 2, \ldots$, и $|u_n - u_0|_B \to 0$. Нам нужно доказать, что $u_0 \in H_A$. Сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ фундаментальная в H_B:

$$|u_n - u_k|_B \xrightarrow[n,\, k \to \infty]{} 0.$$

Но $(u_n - u_k) \in H_A$, поэтому $|u_n - u_k|_A = |u_n - u_k|_B \xrightarrow[n,\, k \to \infty]{} 0$; последовательность $\{u_n\}$ фундаментальная в H_A; в силу полноты пространства H_A существует элемент $u_0' \in H_A$ такой, что $|u_n - u_0'|_A \to 0$. По нашему допущению, $|u_n - u_0'|_A = |u_n - u_0'|_B$. Но тогда в пространстве H_B последовательность $\{u_n\}$ имеет два предела u_0 и u_0', и эти пределы необходимо равны. Отсюда $u_0 \in H_A$, что и требовалось доказать.

Если бы оказалось, что $H_A = H_B$, то, как легко доказать, отсюда следовало бы, что $A = B$. Но $A \geqslant B$, поэтому H_B строго шире, чем H_A; ортогональная разность $H_0 = H_B \ominus H_A$ содержит элементы, отличные от нулевого.

Чтобы пояснить наше допущение, рассмотрим следующие две задачи:

1. В задаче п. 2 § 75 H_B состоит из функций, которые обращаются в нуль на границе области Ω_1 и для которых конечен интеграл

$$\int_{\Omega_1} (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega_1,$$

а H_A можно трактовать как подпространство H_B, образованное теми функциями из H_B, которые тождественно равны нулю вне Ω. Подпространство H_0, ортогональное к H_A, состоит из функций, которые принадлежат пространству H_B и обращаются в нуль в Ω.

2. Рассмотрим упругую пластинку, которая в состоянии равновесия заполняет область S плоскости (x, y). За A примем оператор Δ^2 при краевых условиях жесткого закрепления всего контура (условия (8) § 30), за B — тот же оператор Δ^2 при условиях свободного опирания (условия (9) и (13) § 30) всего контура. В данном случае пространство H_B состоит из функций, удовлетворяющих краевому условию $u|_L = 0$ (условие (9) § 30) и сообщающих конечное значение интегралу (21) § 30, а пространство H_A состоит из функций, удовлетворяющих условиям

(8) § 30 и сообщающих конечное значение интегралу (16) § 30. Из тождества (6) § 30 вытекает, что при условиях (8) § 30 справедливо равенство

$$\iint_S \left(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}\right) dx\, dy = 0,$$

и, следовательно, интегралы (21) и (16) § 30 совпадают. Таким образом, наше допущение оправдано. Пространство H_A есть подпространство тех функций из H_B, которые удовлетворяют краевому условию $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L = 0$.

Переходим к построению промежуточных операторов. Выберем последовательность линейных функционалов l_k, $k = 1, 2, \ldots$, ограниченных в H_B и обладающих следующим свойством: для того чтобы элемент $u \in H_B$ принадлежал пространству H_A, необходимо и достаточно, чтобы $l_k u = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Можно, например, взять $l_k u = [u, \psi_k]_B$, где $\{\psi_k\}$ — последовательность элементов, полная в $H_0 = H_B \ominus H_A$ [1]). Теперь можно определить H_A как подпространство H_B, определяемое условиями

$$l_k u = 0, \quad 1 \leqslant k < \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь квадратичный функционал

$$\Phi_n(u) = |u|_B^2 - 2(u, f), \qquad f \in H, \tag{2}$$

заданный на подпространстве $H_A^{(n)}$ пространства H_B, определяемом соотношениями

$$l_k u = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n; \tag{3}$$

через H обозначено исходное пространство, в котором действуют заданные операторы A и B. Очевидно, $H_A \subset H_A^{(n)}$. Как и в §§ 13—16, мы докажем, что задача о минимуме функционала Φ_n имеет в $H_A^{(n)}$ одно и только одно решение. Если обозначать это решение через $G_n f$, то оператор $A_n = G_n^{-1}$ положительно определенный, его энергетическое пространство $H_{A_n} = H_A^{(n)}$, и если $u \in H_A^{(n)}$, то $|u|_{A_n} = |u|_B$.

Таким образом, положительно определенные операторы A, A_n, B связаны соотношениями

$$H_A \subset H_{A_n} \subset H_B; \tag{4}$$

[1]) Верно и обратное: если функционалы l_k обладают указанными выше свойствами, то по теореме Риса существует такая полная в H_0 последовательность $\{\psi_k\}$, что $l_k u = [u, \psi_k]_B$.

при этом, если $u \in H_A$ или $u \in H_{A_n}$, то соответственно

$$|u|_A = |u|_{A_n}; \qquad |u|_{A_n} = |u|_B. \tag{5}$$

По определению (см. § 41) $B \leqslant A_n \leqslant A$; промежуточные операторы построены. Их собственные числа λ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots$, суть последовательные минимумы функционала $|u|_B^2/\|u\|^2$ на множествах элементов энергетического пространства B, удовлетворяющих условиям (3), а также условиям ортогональности к собственным элементам оператора A_n, отвечающим собственным числам $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{k-1,n}$.

В качестве примера рассмотрим задачу о собственных частотах пластинки, жестко закрепленной по краю. Введем в рассмотрение пространство $L_2(L)$ функций, квадратично суммируемых на контуре L, и пусть $p_1(s)$, $p_2(s)$ ... — полная в $L_2(L)$ последовательность. Второе из условий (8) § 30, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L = 0$, равносильно последовательности условий

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \nu} p_j(s)\, ds = 0, \qquad 1 \leqslant j < \infty. \tag{6}$$

Из сказанного выше следует, что приближенные значения с недостатком для собственных чисел оператора пластинки с жестко закрепленным краем можно получить, решая задачу о минимуме интеграла (21) § 30 на множестве функций $w(x, y)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) эти функции нормированы

$$\|u\|^2 = \iint_S u^2\, dx\, dy = 1;$$

2) они сообщают интегралу (21) § 30 конечное значение;
3) они удовлетворяют условию (9) § 30: $u|_L = 0$;
4) они удовлетворяют конечному числу условий

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \nu} p_j(s)\, ds = 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Вернемся к общему случаю. Как и в § 75, нахождение собственных чисел оператора A_n связано с решением некоторого трансцендентного уравнения.

По-прежнему обозначим через μ_j и v_j собственные числа и соответствующие собственные элементы оператора B. Пусть λ и u — собственное число и собственный элемент оператора A_n:

$$A_n u - \lambda u = 0.$$

Умножив это скалярно на произвольный элемент $\zeta \in H_{A_n}$, находим

$$[u, \zeta]_{A_n} - \lambda (u, \zeta) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) преобразуем. Прежде всего

$$[u, \zeta]_{A_n} = [u, \zeta]_B.$$

Далее, H_{A_n} есть подпространство H_B, определяемое условиями (3). Функционалы l_k ограничены в H_B; по теореме Риса существуют элементы $\psi_k \in H_B$ такие, что $l_k u = [u, \psi_k]_B$. Можно считать, что $[\psi_k, \psi_j]_B = \delta_{kj}$ — достаточно, если это не так, применить процесс ортогонализации. Теперь, если η — произвольный элемент из H_B, то

$$\zeta = \eta - \sum_{k=1}^{n} [\eta, \psi_k] \psi_k \tag{9}$$

принадлежит H_{A_n}; обратно, любой элемент $\zeta \in H_{A_n}$ можно получить таким способом — достаточно взять $\eta = \zeta$. Подставим выражение (9) в уравнение (8):

$$[u, \eta]_B - \lambda (u, \eta) = \sum_{k=1}^{n} [\eta, \psi_k] a_k (u), \tag{10}$$

где $a_k(u) = [u, \psi_k]_B - \lambda (u, \psi_k)$. Имеем

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, v_j) v_j.$$

Подставим это в левую часть уравнения (10) и, положив в нем $\eta = v_i$, получим

$$(u, v_i) = \frac{1}{\mu_i - \lambda} \sum_{k=1}^{n} a_k (u) l_k (v_i),$$

и, следовательно,

$$u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_k (u) l_k (v_j)}{\mu_j - \lambda} v_j. \tag{11}$$

Элемент $u \in H_A$ и, следовательно, удовлетворяет условиям (3):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (u) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_k (v_j) l_i (v_j)}{\mu_j - \lambda} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Будем искать собственные числа оператора A_n, отличные от собственных чисел оператора B. Тогда, как легко видеть, не все числа $a_k(u)$ равны нулю, и определитель системы (12) обращается в нуль. Если мы обозначим для краткости

$$\beta_{ik}(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{l_k(v_j)\,l_i(v_j)}{(\mu_j-\lambda)},\tag{13}$$

то

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}(\lambda) & \beta_{12}(\lambda) & \dots & \beta_{1n}(\lambda) \\ \beta_{21}(\lambda) & \beta_{22}(\lambda) & \dots & \beta_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}(\lambda) & \beta_{n2}(\lambda) & \dots & \beta_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}=0.\tag{14}$$

Напомним, что функционалы l_k должны удовлетворять соотношениям

$$l_k(\psi_j)=[\psi_k,\ \psi_j]_B=\delta_{jk}.$$

§ 77. Способы упрощения трансцендентного уравнения

Как было показано в §§ 75 и 76, собственные числа промежуточных операторов суть корни определителя, элементы которого суть мероморфные функции от λ. Оказывается, можно добиться того, чтобы эти функции были рациональными.

1. Рассмотрим сперва случай § 75, когда $D_A = D_B$. Построение промежуточного оператора связано с выбором элементов $f_k \in D_A$. Определим их из уравнений [1])

$$Cf_k=v_k, \qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ n,\tag{1}$$

где v_k — собственные элементы оператора B. Если, как мы это каждый раз предполагаем, оператор C положительно определенный, то уравнения (1) разрешимы.

Докажем, что в этом случае n собственных элементов оператора A_n суть линейные комбинации элементов $v_1, v_2, \dots, v_n$, а соответствующие собственные числа суть корни некоторой рациональной функции; остальные собственные числа и элементы суть $\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots$ и соответственно $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots$

Элементы f_k, найденные из уравнений (1), в H_C не ортонормированы. Процесс ортогонализации приведет нас к элементам вида

$$\tilde{f}_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{kj}f_j; \qquad [\tilde{f}_k,\ \tilde{f}_m]_C=\delta_{km}.$$

[1]) См. Н. Бэзли [1], С. Х. Гулд [1].

Положим

$$g_k = C\tilde{f}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj} v_j.$$

По формулам (3) и (4) § 75

$$A_n u = Bu + \sum_{k=1}^{n}\left(u, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj} v_j\right) \sum_{l=1}^{k} \alpha_{kl} v_l. \tag{2}$$

Положим здесь $u = v_{n+p}$, $p > 0$. Собственные элементы v_j ортогональны, сумма в (2) исчезнет, и мы получаем

$$A_n v_{n+p} = B v_{n+p} = \mu_{n+p} v_{n+p}.$$

Этим доказана вторая часть нашего утверждения.

Будем теперь искать собственные элементы оператора A_n в виде $u = \sum_{m=1}^{n} \beta_m v_m$. Подставив это в (2), получим

$$A_n u = \sum_{m=1}^{n} \beta_m \mu_m v_m + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j,\, l=1}^{k} \alpha_{kj} \alpha_{kl} (u, v_j) v_l. \tag{3}$$

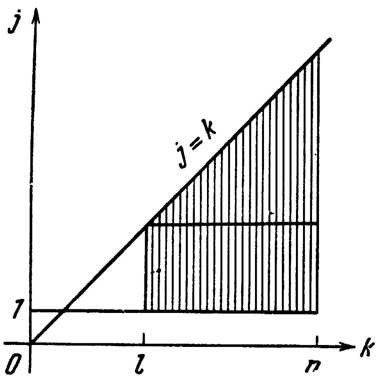

Рис. 15.

Имеем

$$(u, v_j) = \sum_{m=1}^{n} \beta_m (v_m, v_j) = \beta_j,$$

и вторая сумма в (3) преобразуется так:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j,\, l=1}^{k} \alpha_{kj}\alpha_{kl}\beta_j v_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}\alpha_{kl}\beta_j v_l = \sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{k=l}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}\alpha_{kl}\beta_j \right\} v_l;$$

область суммирования показана на рис. 15. Меняя порядок суммирования во внутренней сумме, получим выражение

$$\sum_{l=1}^{n} v_l \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{k=j'}^{n} \alpha_{kj}\alpha_{kl}; \qquad j' = \begin{cases} l, & j \leqslant l, \\ j, & j > l. \end{cases}$$

Обозначим $\sum_{k=j'}^{n} \alpha_{kj}\alpha_{kl} = \gamma_{lj}$ и заменим в последней сумме букву l на m. Для $A_n u$ получается выражение

$$A_n u = \sum_{m=1}^{n} \left\{ \mu_m \beta_m + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{mj} \beta_j \right\} v_m. \tag{4}$$

Потребуем теперь, чтобы выражение (4) только множителем μ отличалось от u. Это дает однородную систему для β_m:

$$(\mu_m - \mu)\beta_m + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{mj}\beta_j = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Приравняв нулю ее определитель, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu_1 - \mu + \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \mu_2 - \mu + \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \mu_n - \mu + \gamma_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет степень n; его старший коэффициент $(-1)^n$ отличен от нуля. Отсюда следует, что оно имеет ровно n корней, которые являются собственными числами оператора A_n. Расположив эти корни и числа $\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots$ в порядке возрастания, получим новые нижние границы для собственных чисел оператора A.

2. Другой простой прием указан в статье Н. Бэзли и Д. Фокса [1]. Обозначим через P_n оператор ортогонального проектирования из H на подпространство элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Заменим оператор B меньшим оператором B', где

$$B'u = \sum_{k=1}^{n} \mu_k (u, v_k) v_k + \mu_{n+1}(E - P_n) u. \tag{7}$$

Первые n собственных чисел оператора B' суть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, а все последующие равны между собой и равны μ_{n+1}. При такой замене, которую ее авторы называют *усечением*, определители (11) § 75 и (14) § 76 делаются рациональными функциями от λ.

§ 78. Метод Г. Фикера

Метод, отличный от метода промежуточных операторов, был предложен Г. Фикера [1, 2] в 1965 г.; этот метод имеет более узкую область приложений, но не требует построения меньшего оператора с известным спектром.

Метод Г. Фикера формулируется для положительных вполне непрерывных операторов, в связи с чем нам понадобятся некоторые предварительные замечания.

1. Пусть A — положительно определенный оператор с дискретным спектром. По теореме 5 § 40 оператор $G = A^{-1}$ вполне непрерывен. Уравнение

$$Au - \lambda u = 0 \tag{1}$$

равносильно следующему:

$$Gu - \omega u = 0, \qquad \omega = 1/\lambda. \tag{2}$$

Поэтому, если λ_k и u_k суть собственные числа и собственные элементы оператора A, то $\omega_k = \lambda_k^{-1}$ и u_k суть собственные числа и собственные элементы оператора G. При этом $\omega_k > 0$ и $\omega_k \to 0$; если λ_k расположены в порядке возрастания, то ω_k расположены в порядке убывания. Далее, G — положительный оператор. Действительно, пусть $u \neq 0$ — произвольный элемент данного пространства H и $Gu = v$. Тогда $u = Av$ и

$$(Gu,\ u) = (v,\ Av) = (Av,\ v) > 0.$$

Процесс Ритца для уравнения (1) переходит в процесс Ритца для уравнения (2). Чтобы убедиться в этом, разделим на $-\lambda$ каждую строку определителя (6) § 43 и положим $\psi_j = A^{1/2}\varphi_j$. Как было отмечено в § 58,

$$[\varphi_j,\ \varphi_k] = \left(A^{1/2}\varphi_j,\ A^{1/2}\varphi_k\right) = (\psi_j,\ \psi_k).$$

Далее,

$$(\varphi_j,\ \varphi_k) = \left(A^{-1/2}\psi_j,\ A^{-1/2}\psi_k\right) = \left(A^{-1}\psi_j,\ \psi_k\right) = (G\psi_j,\ \psi_k)$$

и уравнение (6) § 43 принимает вид

$$\begin{vmatrix} (G\psi_1,\ \psi_1) - \omega(\psi_1,\ \psi_1), & \ldots, & (G\psi_1,\ \psi_n) - \omega(\psi_1,\ \psi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (G\psi_n,\ \psi_1) - \omega(\psi_n,\ \psi_1), & \ldots, & (G\psi_n,\ \psi_n) - \omega(\psi_n,\ \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

К уравнению (3) можно прийти, применяя к задаче (2) процесс Ритца при координатной системе $\{\psi_k\}$.

Обозначим через $\omega_k^{(n)}$ корни уравнения (3), расположенные в порядке убывания: $\omega_1^{(n)} \geqslant \omega_2^{(n)} \geqslant \ldots \geqslant \omega_n^{(n)}$. Очевидно, $\omega_k^{(n)} = 1/\lambda_k^{(n)}$, где $\lambda_k^{(n)}$ — корни уравнения (6) § 43. Из теоремы § 73 следует, что $\omega_k^{(n)} \leqslant \omega_k$, так что для уравнения (3), у которого собственные числа расположены в порядке убывания, процесс Ритца дает приближенные значения собственных чисел с недостатком. Проблема двусторонней оценки собственных чисел сводится в данном случае к построению их приближенных значений с избытком.

2. Пусть G — положительный вполне непрерывный оператор, и $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \ldots$ — его собственные числа. Говорят, что G принадлежит классу $\mathfrak{S}_\nu$, если

$$J_\nu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\nu < \infty. \tag{4}$$

Для дальнейшего важно, что величину $J_\nu(G)$ можно вычислить, не зная чисел ω_k. Именно, пусть $\{\varphi_k\}$ — произвольная ортонормированная полная система. Докажем, что

$$J_\nu(G)=\sum_{k=1}^{\infty}(G^\nu\varphi_k,\ \varphi_k). \tag{5}$$

Пусть $\{u_k\}$ — ортонормированная система всех собственных элементов оператора G. Как известно, эта система полна, поэтому $\varphi_k=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\varphi_k,\ u_j)\,u_j$. Отсюда

$$(G^\nu\varphi_k,\ \varphi_k)=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\omega_j^\nu(\varphi_k,\ u_j)(\varphi_k,\ u_i)(u_i,\ u_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^\nu(\varphi_k,\ u_j)^2,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(G^\nu\varphi_k,\ \varphi_k)=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^\nu\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k,\ u_j)^2=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^\nu\|u_j\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^\nu,$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к уравнению (2). Допустим, что оператор G принадлежит классу $\mathfrak{S}_\nu$. Выберем координатную систему $\{\psi_k\}$ и найдем n-е приближения по Ритцу $\omega_{1n}, \omega_{2n}, \ldots, \omega_{nn}$ к первым n собственным числам $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Обозначим через P_n ортогональный проектор на подпространство, натянутое на первые n координатных элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Обозначим еще

$$\sigma_{kn}=\left[J_\nu(G)-J_\nu(P_nGP_n)+\omega_{kn}^\nu\right]^{1/\nu}. \tag{6}$$

Теорема. *Число σ_{kn} есть приближение к ω_k с избытком; с возрастанием n это число не возрастает, и*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{kn}=\omega_k. \tag{7}$$

Легко проверить, что P_nGP_n есть конечномерный оператор; его собственные числа суть ω_{kn}, $k=1, 2, \ldots, n$, и, кроме того, число нуль, которое является собственным числом бесконечной кратности. По формулам (4) и (6)

$$\sigma_{kn}^\nu=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j^\nu-\sum_{j=1}^{n}\omega_{jn}^\nu+\omega_{kn}^\nu. \tag{8}$$

Это можно представить в таком виде:

$$\sigma_{kn}^\nu=\sum_{j=n+1}^{\infty}\omega_j^\nu+\sum_{j\neq k,\ j=1}^{n}\left(\omega_j^\nu-\omega_{jn}^\nu\right)+\omega_k^\nu.$$

Собственные числа $\omega_j > 0$ и $\omega_j \geqslant \omega_{jn}$; первая сумма справа положительна, вторая неотрицательна, поэтому $\sigma_{kn} > \omega_k$. Первое утверждение теоремы доказано.

Введем обозначение

$$\rho_{jn} = \begin{cases} \omega_j^\nu, & j > n \text{ или } j = k; \\ \omega_j^\nu - \omega_{jn}^\nu, & 1 \leqslant j \leqslant n \text{ и } j \neq k. \end{cases}$$

Тогда формулу (8) можно записать так:

$$\sigma_{kn}^\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{jn}. \tag{9}$$

Выясним, как меняется ρ_{jn} при увеличении n. Имеем

$$\rho_{j,\,n+1} = \begin{cases} \omega_j^\nu, & j > n+1 \text{ или } j = k; \\ \omega_j^\nu - \omega_{j,\,n+1}^\nu, & 1 \leqslant j \leqslant n+1 \text{ и } j \neq k. \end{cases}$$

Сравнивая формулы для ρ_{jn} и $\rho_{j,\,n+1}$, находим следующее:

1) если $j = k$ или $j > n+1$, то $\rho_{j,\,n+1} = \rho_{jn}$;
2) если $1 \leqslant j \leqslant n+1$, $j \neq k$, то

$$\rho_{j,\,n+1} = \omega_j^\nu - \omega_{j,\,n+1}^\nu \leqslant \omega_j^\nu - \omega_{jn}^\nu = \rho_{jn}.$$

Итак, во всех случаях $\rho_{j,\,n+1} \leqslant \rho_{jn}$, и из формулы (9) следует, что $\sigma_{k,\,n+1} \leqslant \sigma_{kn}$. Второе утверждение теоремы также доказано.

Перейдем к третьему утверждению. Формулу (8) перепишем в виде

$$\sigma_{kn}^\nu - \omega_{kn}^\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^\nu - \sum_{j=1}^{n} \omega_{jn}^\nu.$$

Зафиксируем число N, столь большое, что

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \omega_j^\nu < \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — произвольно заданное положительное число. Если $n > N$, то

$$\sigma_{kn}^\nu - \omega_{kn}^\nu = \sum_{j=1}^{N} (\omega_j^\nu - \omega_{jn}^\nu) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \omega_j^\nu - \sum_{j=N+1}^{n} \omega_{jn}^\nu < \sum_{j=1}^{N} (\omega_j^\nu - \omega_{jn}^\nu) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь $N_0(\varepsilon) > N$ так, чтобы при $n > N_0(\varepsilon)$ было

$$\sum_{j=1}^{N} (\omega_j^\nu - \omega_{jn}^\nu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно, так как [1]) $\omega_{jn} \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_j$; тогда $0 < \sigma_{kn}^{\nu} - \omega_{kn}^{\nu} < \varepsilon$, $n > N_0(\varepsilon)$. Отсюда следует, что $\sigma_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_k$. Теорема доказана полностью.

Очевидно теперь, что величина

$$\sigma_{kn}^{-1} = \left[J_\nu(G) - J_n(P_n G P_n) + \lambda_{kn}^{-\nu}\right]^{-1/\nu} \tag{10}$$

дает приближение с недостатком к k-му собственному числу λ_k положительно определенного оператора $A = G^{-1}$ и $\sigma_{kn}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k$; через λ_{kn} обозначено n-е приближение по Ритцу к числу λ_k.

§ 79. Применение к эллиптическим уравнениям

В формуле (10) предшествующего параграфа величины $\lambda_{kn}^{-\nu}$ и $J_n(P_n G P_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{jn}^{-\nu}$ могут быть легко вычислены, если построено n-е приближение по Ритцу. Трудность представляет вычисление величины $J_\nu(G)$. Если явный вид оператора G известен, то $J_\nu(G)$ можно определить по формуле (5) § 78. В общем случае также можно воспользоваться этой формулой, если предварительно приближенно найти $\psi_k = G^\nu \varphi_k$, $k = 1, 2 \ldots$, как решения уравнений $A^\nu \psi_k = \varphi_k$.

Как показал Г. Фикера [1], если речь идет о простейшей краевой задаче для эллиптического уравнения, то оператору G можно дать явное выражение. Рассмотрим дифференциальный оператор, который запишем в виде

$$A\mathbf{u} = \sum_{|\alpha|,\ |\beta|=0}^{k} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(P)\, D^\beta \mathbf{u}\right), \qquad P \in \Omega; \tag{1}$$

краевые условия запишем в виде

$$D^\gamma \mathbf{u}\,|_S = 0, \qquad |\gamma| = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1 \tag{2}$$

(обозначения см. в § 57).

Далее, Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, $\mathbf{u}$ — вектор с произвольным числом s компонент, $A_{\alpha\beta}(P)$ — квадратные матрицы, элементы которых имеют достаточное число непрерывных производных в некоторой области $\Omega_0 \supset \bar{\Omega}$. Примем, что оператор A при краевых условиях

[1]) См. ниже, гл. XI, § 94.

(2) положительно определенный; для энергетического произведения легко получить формулу

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_A = \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{k} (-1)^{|\alpha|} A_{\alpha\beta}(P) D^\beta \mathbf{u}(P) D^\alpha \mathbf{v}(P)\, d\Omega. \qquad (3)$$

Допустим, что нам известно сингулярное решение[1]) для оператора A; обозначим это решение через $R(P, Q)$ и положим

$$R\mathbf{u} = \int_\Omega R(P, Q)\, \mathbf{u}(Q)\, d_Q\Omega, \qquad (4)$$

$$R^*\mathbf{u} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{k} (-1)^{|\alpha|+k} A_{\beta\alpha}(Q) D_Q^\beta R(P, Q) D^\alpha \mathbf{u}(Q)\, d_Q\Omega. \qquad (5)$$

Примем еще одно допущение: пусть для любого достаточно гладкого вектора $\mathbf{u}$ величина

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{k} (-1)^{|\alpha|} A_{\alpha\beta} D^\alpha \mathbf{u} D^\beta \mathbf{u}\, d\Omega \qquad (6)$$

неотрицательна. Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство, получаемое из множества достаточно гладких векторов пополнением в норме $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}$; условимся при этом не различать векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, если $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{H}} = 0$.

Введем в рассмотрение множество V решений однородного уравнения

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^{k} D^\alpha (A_{\alpha\beta} D^\beta u) = 0, \qquad (7)$$

принадлежащих пространству $\mathfrak{H}$. Можно доказать, что V есть подпространство $\mathfrak{H}$. Обозначим через Π ортогональный проек-

[1]) О сингулярном (его называют также фундаментальным) решении и его свойствах сказано в книге К. Миранда [1]. Сингулярным решением оператора Лапласа в трехмерном пространстве является функция $1/4\pi r$, на плоскости — функция $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, где r — расстояние между точками P и Q. Для бигармонического уравнения на плоскости сингулярное решение имеет вид $\frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{1}{r}$; для трехмерной теории упругости в случае изотропного однородного тела это так называемый тензор Сомильяна, упомянутый в § 51. Сингулярное решение не единственно: если оно рассматривается в некоторой области, то к нему можно добавить любое решение соответствующего однородного уравнения, достаточно гладкое в этой области.

тор из $\mathfrak{H}$ в V. Оказывается, что имеет место формула (Г. Фикера [1])

$$G = A^{-1} = R^*R - R^*\Pi R. \tag{8}$$

В работах Г. Фикера [1, 2] приведены представления оператора V и формулы для чисел σ_{kn} (см. § 78) для некоторых задач математической физики.

Формула (8) наиболее проста и удобна в случае одной независимой переменной: в этом случае сравнительно просто строится сингулярное решение, а пространство V конечномерно.

§ 80. Некоторые численные результаты

А. Вайнштейн и Г. Фикера, каждый со своими сотрудниками, выполнили довольно много вычислений для того, чтобы аппробировать предложенные ими методы. А. Вайнштейн [2] вычислял верхние и нижние границы для собственных чисел таких задач: квадратная и ромбическая пластинки с жестко закрепленными краями, уравнение Матье, задача об ангармоническом анализаторе, собственные числа уравнения

$$u'' + \lambda(1 + \sin x)\, u = 0; \qquad u(0) = u(\pi) = 0. \tag{1}$$

В статье Г. Фикера [2] рассмотрены задачи о квадратной[1]) и круглой пластинках с жестко закрепленными краями, несколько обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в том числе уравнение (1) и уравнение Матье, и, наконец, одно обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка.

К сожалению, в статьях обоих авторов нет почти никаких сведений о технике вычислений, о таких деталях, как выбор координатных функций, номер приближения, выбор исходного меньшего оператора и т. д. Тем не менее результаты вычислений названных авторов интересны и показывают, что оба метода могут быть достаточно эффективными.

Мы приведем здесь частично результаты обоих авторов по вычислению собственных чисел задачи (1) и задачи о квадратной пластинке.

А. Задача (1). Приводятся нижняя и верхняя границы собственных чисел, которым соответствуют четные собственные функции, т. е. такие, что $u(\pi/2 + x) = u(\pi/2 - x)$.

---

[1]) Результаты, относящиеся к квадратной пластинке, были получены в совместной работе Де Вито Л., Фикера Г., Фушарди А., Шерф М. [1].

1. По методу А. Вайнштейна верхние границы получены по Ритцу при 15 координатных функциях; нижние при усечении 25 порядка и промежуточном операторе 15 порядка.

Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница	Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница
1	0,54031883	0,54031885	9	178,15695	178,15718
2	5,4486361	5,4486360	10	222,57001	222,57060
3	15,312608	15,312608	11	271,91773	271,91928
4	30,114984	30,114984	12	326,20021	326,20231
5	49,853254	49,853254	13	385,34709	385,66846
6	74,526757	74,526767	14	447,15724	455,76642
7	104,13527	104,13530	15	506,36985	587,21168
8	138,67868	138,67877			

2. По методу Г. Фикера.

Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница	Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница
1	0,54031799	0,54031886	6	72,350896	74,526769
2	5,4477473	5,4486362	7	98,433814	104,13531
3	15,292913	15,312609	8	125,99895	138,67878
4	29,965993	30,114985	9	153,39660	178,15719
5	49,185929	49,853257	10	179,08999	222,57061

Б. Квадратная пластинка. Приводятся нижняя и верхняя границы первых 13 собственных чисел (в работе Г. Фикера [2] приведены приближенные значения для 41 собственного числа). Длина стороны пластинки принята равной π.

1. По методу А. Вайнштейна.

Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница	Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница
1	13,2820	13,3842	8	277,42	301,55
2	55,240	56,561	9	454	477
3	55,240	56,561	10	454	477
4	120,007	124,074	11	488	548
5	177,67	182,14	12	600,840	621,852
6	178,3	184,5	13	601,569	646,939
7	277,42	301,55			

2. По методу Г. Фикера.

Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница	Номер собств. числа	Нижняя граница	Верхняя граница
1	13,29376	13,29378	6	453,6452	454,9829
2	55,29691	55,29934	7	496,5530	497,0230
3	120,2143	120,2232	8	601,4880	601,9821
4	177,7193	177,7401	9	605,7927	606,2197
5	279,1821	279,4931			

Расхождение в числе собственных чисел объясняется тем, что в статье Г. Фикера кратные собственные числа приводятся только по одному разу.

ГЛАВА X
ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Цель настоящей главы — на примерах показать приложение методов предыдущих глав, выяснить встречающиеся при этом трудности и по возможности указать методы их преодоления. Одна из основных трудностей, связанных с применением вариационных методов, это построение полной и устойчивой (см. ниже, § 82) координатной системы. Ввиду большой важности этого вопроса мы начинаем настоящую главу с двух параграфов теоретического характера. В последующих параграфах будут рассмотрены численные примеры краевых задач и задач на собственные значения; в ряде случаев дана оценка погрешности приближения.

§ 81. Построение координатных систем

1. Применение процесса Ритца требует предварительного выбора координатной системы, полной в соответствующем энергетическом пространстве. Доказательство полноты координатной системы часто можно провести, опираясь на следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — элементы из области его определения. Если система $\{A\varphi_n\}$ полна в H, то система $\{\varphi_n\}$ полна в энергетическом пространстве H_A.*

Доказательство. Пусть v — произвольный элемент из области D_A задания оператора A. Система $\{A\varphi_n\}$ полна в H, поэтому можно найти такое натуральное число n и такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$\left\| Av - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k \right\| = \left\| A\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) \right\| < \frac{1}{2}\gamma\varepsilon, \qquad (1)$$

где ε — произвольное положительное число, а γ — постоянная формулы (11) § 8.

Оценим теперь величину $\left| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right|$. Полагая для краткости $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = v_n$, имеем $|v - v_n|^2 = (A(v - v_n),\ v - v_n)$. Используя неравенство Коши — Буняковского, а затем неравенство (1), получим

$$|v - v_n|^2 \leqslant \| A(v - v_n) \| \cdot \| v - v_n \| < \frac{1}{2} \varepsilon\gamma \| v - v_n \|. \qquad (2)$$

По неравенству (5) из § 9 $\| v - v_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma} |v - v_n|$. Подставив это в неравенство (2) настоящего параграфа и сократив на $|v - v_n|$, получим

$$|v - v_n| < \frac{1}{2} \varepsilon. \qquad (3)$$

Пусть теперь u — произвольный элемент энергетического пространства H_A. Множество D_A плотно в H_A, поэтому найдется такой элемент $v \in D_A$, что $|u - v| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Подберем числа n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы выполнялось неравенство (3). Теперь по неравенству треугольника

$$\left| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right| = |u - v_n| \leqslant |u - v| + |v - v_n| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть Ω — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, и пусть $Au = -\Delta u$, причем $u = 0$ на границе прямоугольника. Пусть

$$\varphi_{m,n}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad m, n = 1, 2, \ldots; \qquad (4)$$

тогда

$$A\varphi_{m,n} = -\Delta\varphi_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b} \right).$$

Из теории двойных рядов Фурье известно, что система функций

$$\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b), \qquad m, n = 1, 2, \ldots,$$

полна в смысле сходимости в среднем; так как умножение каждой функции на свою отличную от нуля постоянную не нарушает полноты системы, то система функций $A\varphi_{m,n}$ полна в смысле сходимости в среднем в прямоугольнике Ω; из теоремы 1 вытекает, что система (4) полна в той же области в смысле сходимости по энергии. В данном случае это, в частности, означает следующее: пусть $u(x, y)$ — любая функция, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ и равная нулю на его сторонах; каково бы ни было положительное число ε, можно найти такие натуральные числа m и n и такие постоянные α_{kl}, $k=1,2,\ldots,m$; $l=1,2,\ldots,n$, что выполняется неравенство

$$\int_0^a \int_0^b \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} k\alpha_{kl} \cos\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{l\pi y}{b}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} l\alpha_{kl} \sin\frac{k\pi x}{a} \cos\frac{l\pi y}{b}\right)^2\right\} dx\, dy < \varepsilon^2.$$

Заметим, что полноту системы (4) в пространстве H_A можно доказать также, опираясь на теорему 3 § 40, так как система (4) есть система собственных функций оператора Лапласа для прямоугольника, соответствующих краевому условию $u|_S = 0$.

Предлагаем читателю доказать, что система функций

$$(x-a)^m (b-x)^m x^k, \qquad k=0,\ 1, 2, \ldots,$$

полна по энергии оператора $(-1)^m d^{2m}u/dx^{2m}$ при краевых условиях $u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

2. Укажем на один способ построения координатных функций, который, хотя и носит частный характер, однако оказывается удобным в широком классе случаев.

В некоторой области Ω рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона при условии, что на границе S области Ω искомая функция равна нулю. В этом случае функции из энергетического пространства обращаются в нуль на S и

$$|u|^2_{-\Delta} = \int\limits_{\Omega}\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy;$$

для определенности мы приняли, что речь идет о функциях двух независимых переменных x, y. Полную по энергии систему координатных функций можно построить таким образом. Пусть $\omega(x, y)$ — функция, равная нулю в точках границы S и положительная во внутренних точках области Ω; примем еще, что эта функция непрерывна в $\overline{\Omega}$, а ее первые производные непрерывны и ограничены внутри Ω. Тогда система функций

$$\omega(x,\ y)\, x^k y^l, \qquad k,\ l = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

полна по энергии в Ω. Доказательство этого важного утверждения дано Л. В. Канторовичем и приведено в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова ([1], стр. 294—295). Построение функции $\omega(x, y)$ обычно не встречает затруднений. Так, например, для упомянутого выше прямоугольника можно положить

$\omega = xy(a-x)(b-y)$. Не представляет труда и переход к функциям от большего числа независимых переменных.

Систему координатных функций (5) или ей аналогичную для случая большего числа независимых переменных можно использовать не только при решении уравнения Пуассона, но и в более сложных задачах. Пусть в области Ω требуется проинтегрировать невырождающееся уравнение эллиптического типа (A, B, C зависят от x и y)

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y)$$

при краевом условии $u|_S = 0$. В этом случае

$$|u|_L^2 = \iint\limits_{\Omega}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Предполагая, что данное уравнение невырожденное, мы тем самым допускаем существование такой положительной постоянной μ_0, что

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geqslant \mu_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]. \qquad (6)$$

Допустим еще, что коэффициенты A, B, C ограничены. Тогда, очевидно, найдется такая положительная постоянная μ_1, что

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \leqslant \mu_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) следует $\sqrt{\mu_0}\,|u|_{-\Delta} \leqslant |u|_L \leqslant \sqrt{\mu_1}\,|u|_{-\Delta}$. Отсюда нетрудно усмотреть, что любая система, в частности система (5), полная по энергии оператора $-\Delta$, полна и по энергии оператора L.

3. Для бигармонического оператора при краевых условиях $u|_S = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$ полной по энергии является система функций

$$\omega^2 x^k y^l, \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\omega(x, y)$ — функция, описанная в п. 2. Вообще, для полигармонического оператора $(-1)^p\Delta^p$ при краевых условиях

$$u|_S = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \ldots = \left.\frac{\partial^{p-1} u}{\partial \nu^{p-1}}\right|_S = 0$$

полной по энергии является система функций

$$\omega^p x^k y^l, \; k, l = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

4. Из результатов И. Ю. Харрик [1, 2] вытекает не только полнота системы функций (5) или (8), но и (в случае достаточно гладкой границы) сходимость производных более высокого порядка.

Если в качестве координатных взять собственные функции сходного оператора, то невязка $Au_n - f$ стремится к нулю в норме $L_2(\Omega)$; если A — эллиптический оператор порядка $2s$, то, как известно, при этом в норме $L_2(\Omega')$ будут сходиться производные порядка $\leqslant 2s$; здесь Ω' — произвольная внутренняя подобласть Ω. В случае достаточно гладкой границы сходимость производных порядка $\leqslant 2s$ имеет место в $L_2(\Omega)$.

§ 82. Об устойчивых координатных системах

Этому вопросу посвящены работы автора [22—25] и значительная часть книги [26]. Здесь мы ограничимся самыми общими указаниями.

Как было установлено в § 17, энергетическая норма $|u_0 - u_n|$ убывает с возрастанием n; здесь u_0 — точное решение задачи, u_n — ее приближенное решение по Ритцу. Если мы примем величину этой нормы за погрешность приближенного решения, то для уменьшения этой погрешности надо увеличивать число n. Но при возрастании n возрастает и порядок системы Ритца, а ее составление и решение неизбежно связано с погрешностями вычислений, которые могут в известных условиях существенно отразиться на самом приближенном решении. В связи с этим мы будем различать случаи *устойчивости* и *неустойчивости* процесса Ритца.

Пусть процессом Ритца решается задача

$$Au = f, \qquad f \in H, \tag{1}$$

где оператор A положительно определенный в гильбертовом пространстве H, и пусть $\{\varphi_n\}$ — координатная система. Пусть R_n — матрица Ритца n-го порядка, $a^{(n)} = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}\}$ — вектор коэффициентов Ритца, $f^{(n)}$ — столбец свободных членов системы Ритца, u_n — приближенное решение задачи (1) по Ритцу.

Система Ритца имеет вид

$$R_n a^{(n)} = f^{(n)}. \tag{2}$$

Пусть в результате ошибок вычислений мы вместо матрицы R_n получили «искаженную» матрицу $R_n + \Gamma_n$, а вместо столбца $f^{(n)}$ — «искаженный» столбец $f^{(n)} + \delta^{(n)}$. Вместо системы (2) мы получим систему

$$(R_n + \Gamma_n)\, b^{(n)} = f^{(n)} + \delta^{(n)}; \tag{3}$$

если эта система разрешима, то мы найдем из нее «искаженный» вектор коэффициентов Ритца $b^{(n)}$ и «искаженное» приближенное решение

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \varphi_k;$$

здесь $b_k^{(n)}$ суть составляющие вектора $b^{(n)}$ — искаженные коэффициенты Ритца. Пренебрежем погрешностью, возникающей при решении системы (3). Будем говорить, что процесс Ритца устойчив, если существуют такие не зависящие от n постоянные p, q, r, что при $\|\Gamma_n\| \leqslant r$ система (3) однозначно разрешима и

$$|v_n - u_n| \leqslant p \|\Gamma_n\| + q \|\delta_n\|. \tag{4}$$

Координатную систему в этом случае также назовем устойчивой.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для того чтобы координатная система была устойчивой для задачи* (1), *необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матриц Ритца R_n были ограничены снизу положительной постоянной, не зависящей от n.*

В нашей формулировке понятия устойчивости не учтено влияние ошибок округления при решении системы (3). Известно, что это влияние тем меньше, чем меньше так называемое «число обусловленности» матрицы R_n, равное отношению ее наибольшего собственного числа к наименьшему.

Было бы желательно поэтому, чтобы числа обусловленности матриц R_n были ограничены независимо от n.

Легко доказывается следующая

Теорема 2. *Для того чтобы числа обусловленности матриц Ритца были ограничены независимо от n, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_k^{(n)} \leqslant \Lambda_0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\lambda_k^{(n)}$ есть k-е собственное число матрицы R_n, а λ_0 и Λ_0 — положительные постоянные.

Условия теорем 1 и 2 непосредственно трудно проверить. В этом плане полезна следующая

Теорема 3. *Пусть A и B — положительно определенные операторы, и пусть энергетические пространства обоих операторов состоят из одних и тех же элементов*[1]). *Если система* $\{\varphi_k\}$ *ортонормирована в H_B, то для нее имеют место неравенства* (5).

---

[1]) В этом случае мы называем операторы *A* и *B* *полусходными.*

§ 83. Кручение стержня прямоугольного сечения

1. Решение по методу Ритца. Мы останавливаемся на этой простейшей задаче потому, что для нее известно сравнительно простое точное решение, с которым удобно сравнивать наши приближенные. Сводится эта задача, как известно, к интегрированию уравнения Пуассона

$$-\Delta\psi = 2G\theta$$

(G — модуль сдвига, θ — угол закручивания стержня на единицу его длины) в прямоугольнике $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ при краевых условиях $\psi(\pm a, y) = \psi(x, \pm b) = 0$. Для упрощения вычислений положим $\psi = 2G\theta u$, тогда

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \\ u(\pm a, y) &= u(x, \pm b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В § 14 дано решение этой задачи в виде разложения в ряд, ортогональный по энергии. Применим теперь к той же задаче метод Ритца, взяв за координатные функции полиномы.

Из соображений симметрии ясно, что функция $u(x, y)$ четная как относительно x, так и относительно y. Полиномы, обладающие этим свойством и равные нулю на контуре прямоугольника, т. е. на прямых $x = \pm a$, $y = \pm b$, имеют вид

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \ldots). \tag{2}$$

Ограничимся тремя членами и положим приближенно

$$u \approx u_3 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2). \tag{3}$$

Произведя необходимые вычисления, мы найдем систему уравнений Ритца для неизвестных a_1, a_2, a_3:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) a_1 + \frac{128}{45} a^5 b^3 \left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5}\right) a_2 + \\
&\qquad + \frac{128}{45} a^3 b^5 \left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{7}\right) a_3 = \frac{16a^3b^3}{9}, \\
&\frac{128}{45} a^5 b^3 \left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5}\right) a_1 + \frac{128}{45\cdot 7} a^7 b^3 \left(\frac{11}{5} b^2 + \frac{1}{3} a^2\right) a_2 + \\
&\qquad + \frac{128}{45\cdot 35} a^5 b^5 (a^2 + b^2) a_3 = \frac{16a^5b^3}{45}, \\
&\frac{128}{45} a^3 b^5 \left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{7}\right) a_1 + \frac{128}{45\cdot 35} a^5 b^5 (a^2 + b^2) a_2 + \\
&\qquad + \frac{128}{45\cdot 7} a^3 b^7 \left(\frac{11}{5} a^2 + \frac{1}{3} b^2\right) a_3 = \frac{16a^3b^5}{45},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

решая которую получим

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{35\,(9a^4+130a^2b^2+9b^4)}{16\,(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)},\\ a_2 &= \frac{105\,(9a^2+b^2)}{16\,(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)},\\ a_3 &= \frac{105\,(a^2+9b^2)}{16\,(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если сохранить только один коэффициент a_1, положив тем самым

$$u \approx u_1 = a_1\,(x^2-a^2)\,(y^2-b^2), \tag{6}$$

то мы легко найдем

$$a_1 = \frac{5}{8\,(a^2+b^2)}. \tag{7}$$

Чтобы судить о степени точности построенных здесь и в § 14 решений, поступим следующим образом. Как известно, крутящий момент M определяется формулой

$$M = 2\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\psi\,dx\,dy = 4G\theta\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}u\,dx\,dy,$$

что можно представить в виде [1])

$$M = (2a)^3\,(2b)\,G\theta k_1\,(b/a). \tag{8}$$

Наибольшее касательное напряжение в прямоугольнике сечения достигается, как известно, на середине длинной стороны. Пусть $b > a$. Наибольшее касательное напряжение τ можно представить в форме

$$\tau = G\theta\cdot 2ak\,(b/a). \tag{9}$$

---

[1]) См. С. П. Тимошенко [1], § 78; отсюда же мы заимствуем все последующие данные о точном решении нашей задачи.

Построим новые приближенные решения u_1, u_3, u_6, сохраняя в ряде (11) § 14 соответственно один, три или шесть членов:

$$
\left.\begin{aligned}
u_1(x,\ y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\\
u_3(x,\ y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{3(9a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\frac{1}{3(a^2+9b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right\},\\
u_6(x,\ y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+\right.\\
&+\frac{1}{3(9a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\frac{1}{3(a^2+9b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+\\
&+\frac{1}{5(25a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b}+\frac{1}{81(a^2+b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\\
&\left.+\frac{1}{5(a^2+25b^2)}\sin\frac{5\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)
$$

С помощью этих приближенных решений вычислим две основные механические характеристики задачи кручения — крутящий момент и максимальное касательное напряжение — и сравним полученные приближенные решения с известными точными. Обозначая приближенные значения M через M_1, M_3, M_6, имеем

$$
\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6(a^2+b^2)},\\
M_3 &= \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{9(9a^2+b^2)}+\frac{1}{9(a^2+9b^2)}\right],\\
M_6 &= \frac{256G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{730}{729(a^2+b^2)}+\frac{1}{9(9a^2+b^2)}+\frac{1}{9(a^2+9b^2)}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{25(25a^2+b^2)}+\frac{1}{25(a^2+25b^2)}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(11)
$$

Напомним, что в формулах (10) и (11) длины сторон прямоугольника обозначены через a и b, а не через $2a$ и $2b$; впрочем, для последующего это несущественно.

Обозначим через $k_{1,i}(\gamma)$, $k^{(i)}(\gamma), i = 1, 3, 6$, приближенные значения $k_1(\gamma)$ и $k(\gamma)$, $\gamma=\frac{b}{a}$, вычисленные по приближенному решению u_i [формулы (10)]. Нетрудно найти

$$
\begin{aligned}
k_{1,1}(\gamma) &= \frac{256}{\pi^6}\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},\\
k_{1,3}(\gamma) &= \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2}+\frac{1}{9(9+\gamma^2)}+\frac{1}{9(1+9\gamma^2)}\right],\\
k_{1,6}(\gamma) &= \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2}+\frac{1}{9(9+\gamma^2)}+\frac{1}{9(1+9\gamma^2)}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{25(25+\gamma^2)}+\frac{1}{25(1+25\gamma^2)}\right]
\end{aligned}
$$

и

$$k^{(1)}(\gamma) = \frac{32}{\pi^3} \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$k^{(3)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2}\right],$$

$$k^{(6)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(\gamma^2+25)} + \frac{1}{1+25\gamma^2}\right].$$

Нижеследующие табл. 1 и 2 позволяют сравнить точные значения величин k_1 и k с их приближенными значениями.

Таблица 1

γ	k_1	$k_{1,1}$	$k_{1,3}$	$k_{1,6}$
1	0,1406	0,133	0,139	0,1401
2	0,229	0,213	0,225	0,228
3	0,263	0,240	0,258	0,261
4	0,281	0,251	0,273	0,278
5	0,291	0,256	0,281	0,287
∞	0,333	0,266	0,299	0,311

Таблица 2

γ	k	$k^{(1)}$	$k^{(3)}$	$k^{(6)}$
1	0,675	0,516	0,585	0,613
2	0,930	0,826	0,831	0,870
3	0,985	0,929	0,870	0,931
4	0,997	0,971	0,865	0,954
5	0,999	0,992	0,854	0,961
∞	1,000	1,032	0,803	1,012

Табл. 1 и 2 показывают, что приближенные решения довольно хорошо дают значения крутящего момента и значительно хуже (особенно это относится к $u_3(x, y)$) — значение максимального касательного напряжения. Это объясняется тем, что точность вычисления момента M зависит от быстроты *сходимости ряда* (11) § 14 *в среднем*, а точность вычисления τ — от быстроты *равномерной сходимости ряда производных*. Нетрудно видеть, что ряд (11) § 14 довольно быстро сходится в среднем, тогда как равномерная сходимость производных этого ряда — весьма медленная.

Приведем для сравнения значения $k_{1,1}(\gamma)$, $k_{1,3}(\gamma)$, $k^{(1)}(\gamma)$ и $k^{(3)}(\gamma)$, вычисленные по приближенным решениям (3) и (6) (см. табл. 3 и 4 на стр. 376). Мы сохраняем обозначения табл. 1 и 2.

Вместо полиномов (2) удобнее в качестве координатных взять полиномы

$$R_{ij}(x, y) = \int_{-1}^{x/a} P_{2i-1}(t)\,dt \int_{-1}^{y/b} P_{2j-1}(t)\,dt, \tag{12}$$

где P_n — полином Лежандра n-й степени[1]). На приближенном решении это не отразится, но вычисления упрощаются.

Таблица 3

γ	k_1	$k_{1,1}$	$k_{1,3}$
1	0,1406	0,139	0,1404
2	0,229	0,222	0,228
3	0,263	0,250	0,263
4	0,281	0,261	0,279
5	0,291	0,267	0,290
∞	0,333	0,278	0,311

Таблица 4

γ	k_1	$k^{(1)}$	$k^{(3)}$
1	0,675	0,625	0,703
2	0,930	1,000	0,951
3	0,985	1,125	0,982
4	0,997	1,176	0,969
5	0,999	1,202	0,951
∞	1,000	1,250	0,875

Как известно,

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right], \qquad P_n(-1) = (-1)^n;$$

отсюда

$$R_{ij}(x, y) = \frac{1}{(4i-1)(4j-1)}\left[P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right) - P_{2i-2}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\left[P_{2j}\left(\frac{y}{a}\right) - P_{2j-2}\left(\frac{y}{a}\right)\right]. \tag{12$_1$}$$

Приближенное решение задачи (2) будем, в соответствии с процессом Ритца, строить в виде

$$u_n = \sum_{i+j=2}^{i+j=n} a_{ij}R_{ij}. \tag{13}$$

При нашем выборе координатных функций элементы матриц Ритца вычисляются по простым формулам: как нетрудно убедиться, эти элементы имеют вид

$$(-\Delta R_{ij}, R_{kl}) = \frac{b}{a} A_{ik}B_{jl} + \frac{a}{b} A_{jl}B_{ik},$$

---

[1]) Вычисления, связанные с полиномами R_{ij}, выполнены В. С. Сохранской, которой автор рад выразить за это свою признательность. Система $\{c_{ij}R_{ij}\}$, где c_{ij} — подходящим образом выбранные постоянные, устойчива (см. § 82) для задачи (1).

где

$$A_{ik} = \int_{-1}^{1} P_{2i-1}(t)\, P_{2k-1}(t) = \begin{cases} 2/(4i-1), & i=k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

$$B_{ik} = \frac{1}{(4i-1)(4k-1)} \int_{-1}^{1} [P_{2i}(t) - P_{2i-2}(t)]\,[P_{2k}(t) - P_{2k-2}(t)]\, dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(4i-3)(4i-1)(4i+1)}, & i=k, \\ -\dfrac{2}{(4i-5)(4i-3)(4i-1)}, & i=k+1, \\ -\dfrac{2}{(4i-1)(4i+1)(4i+3)}, & i=k-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Свободные члены системы Ритца вычисляются по формуле

$$(1, R_{ij}) = \begin{cases} 4ab/9, & i=j=1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для функции $k_1(b/a)$, через которую выражается крутящий момент (формула (8)), получается следующее приближенное выражение:

$$k_1(b/a) = a_{11}/9a^2, \tag{14}$$

так как

$$\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} R_{ij}(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad i + j > 2,$$

и

$$\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} R_{11}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{9} \int_{-a}^{a} \left[P_2\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right] dx \int_{-b}^{b} \left[P_2\left(\frac{y}{b}\right) - 1\right] dy = \frac{4}{9}\, ab.$$

Функция $k(b/a)$, входящая в формулу (9), вычисляется по формуле

$$k\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=a \\ y=0}}.$$

Дифференцируя формулу (13) и используя соотношения $P_n(1)=1$ и

$$P_{2j}(0)-P_{2j-2}(0)=\frac{4j-1}{2j-1}P_{2j}(0),$$

получим

$$k\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\sum_{i+j=2}^{i+j=n}\frac{a_{ij}}{2j-1}P_{2j}(0). \tag{15}$$

Приближенное решение (13) было вычислено для $n=4$. Оно имеет вид (обозначения коэффициентов несколько изменены)

$$u_6=a_1R_{11}+a_2R_{12}+a_3R_{21}+a_4R_{13}+a_5R_{22}+a_6R_{31}.$$

Соответствующая матрица Ритца 6-го порядка имеет вид

$$\begin{Vmatrix}
\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{a}{b}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{b}{a} & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{b}{a} & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{a}{b} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{b}{a} & \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{a}{b}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{5\cdot7\cdot9}\frac{b}{a} & 0 & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot7\cdot11}\frac{b}{a} & -\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{a}{b} & 0 \\
-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{a}{b} & 0 & \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{5\cdot7\cdot9}\frac{a}{b}+\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{b}{a} & 0 & -\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\frac{b}{a} & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{11\cdot13\cdot15}\frac{a}{b} \\
0 & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\frac{b}{a} & 0 & \frac{8}{11}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{a}{b}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{9\cdot11\cdot13}\frac{b}{a} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\frac{a}{b} & -\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\frac{b}{a} & 0 & \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{5\cdot7\cdot9}\frac{a}{b}+\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{5\cdot7\cdot9}\frac{b}{a} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{11\cdot13\cdot15}\frac{a}{b} & 0 & 0 & \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{9\cdot11\cdot13}\frac{a}{b}+\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\frac{b}{a}
\end{Vmatrix}$$

Вычислив значения $k_1^{(6)}$ и $k^{(6)}$ при различных значениях $\frac{b}{a}$, получаем табл. 5 (см. стр. 379).

2. Решение по методу ортогональных проекций. По методу ортогональных проекций полагаем

$$-\operatorname{grad}u=\mathbf{v};$$

$\mathbf{v}$ — двумерный вектор с составляющими $v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ и $v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Уравнение (1) дает

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 1. \tag{16}$$

Строим какой-либо вектор $\mathbf{V}$, удовлетворяющий уравнению (16). Можно положить $\mathbf{V} = (x; 0)$, т. е. $V_x = x$, $V_y = 0$.

Выберем теперь систему векторов $\mathbf{w}_n$, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{div} \mathbf{w}_n = 0$. Полную систему таких векторов можно получить, выбрав $\mathbf{w}_n$ так, чтобы их составляющие имели вид произведений степеней x и y. Нам, однако, нужны не все такие векторы. Дело в том, что $u(x, y)$ — функция четная как относительно x, так и относительно y, поэтому составляющая $v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ должна быть нечетной относительно x и четной относительно y, а составляющая $v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$ — нечетной относительно y и четной относительно x. Аналогичными свойствами должны, очевидно, обладать и составляющие вектора $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$. Так как векторы $\mathbf{w}_n$ нужны нам только для аппроксимации вектора $\mathbf{w}$, то их можно подчинить тем же условиям четности, и можно положить

Таблица 5

$\frac{b}{a}$	$k_1^{(6)}$	$k^{(6)}$
1	0,1404	0,683
2	0,229	0,920
3	0,263	0,971
4	0,281	0,987
5	0,291	0,998
10	0,311	1,037

$$\mathbf{w}_1 = (x; -y), \quad \mathbf{w}_2 = (x^3; -3x^2y), \quad \mathbf{w}_3 = (3xy^2; -y^3),$$
$$\mathbf{w}_4 = (x^5; -5x^4y), \quad \mathbf{w}_5 = (x^3y^2; -x^2y^3), \quad \mathbf{w}_6 = (5xy^4; -y^5), \ \ldots$$

Ограничимся первыми тремя членами этой последовательности и положим

$$\mathbf{w} \approx \mathbf{w}^{(3)} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3$$

или, подробнее,

$$w_x \approx w_x^{(3)} = a_1x + a_2x^3 + 3a_3xy^2,$$
$$w_y \approx w_y^{(3)} = -a_1y - 3a_2x^2y - a_3y^3.$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 надо определить из условия

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{w}\|^2 = \min,$$

или

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} [(x - a_1x - a_2x^3 - 3a_3xy^2)^2 + (a_1y + 3a_2x^2y + a_3y^3)^2]\, dx\, dy = \min.$$

Выполнив интегрирование, продифференцировав затем левую часть по a_1, a_2, a_3 и приравняв производные нулю, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{4a^3b}{3}+\frac{4ab^3}{3}\right)a_1+\left(\frac{4a^5b}{5}+\frac{4a^3b^3}{3}\right)a_2+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{4a^3b^3}{3}+\frac{4ab^5}{5}\right)a_3=\frac{4a^3b}{3},\\
&\left(\frac{4a^5b}{5}+\frac{4a^3b^3}{3}\right)a_1+\left(\frac{4a^7b}{7}+\frac{12a^5b^3}{5}\right)a_2+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{4a^5b^3}{5}+\frac{4a^3b^5}{5}\right)a_3=\frac{4a^5b}{5},\\
&\left(\frac{4a^3b^3}{3}+\frac{4ab^5}{5}\right)a_1+\left(\frac{4a^5b^3}{5}+\frac{4a^3b^5}{5}\right)a_2+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{12a^3b^5}{5}+\frac{4ab^7}{7}\right)a_3=\frac{4a^3b^3}{3}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Решая эту систему, получим

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{21a^2b^2(a^4-b^4)}{7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8},\\
a_2&=-\frac{7b^2(35a^4+38a^2b^2+3b^4)}{6(7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8)},\\
a_3&=\frac{7a^2(3a^4+38a^2b^2+35b^4)}{6(7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8)}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Имея решение, построенное по методу ортогональных проекций, можно оценить погрешность решений, построенных как по методу Ритца, так и по методу ортогональных проекций. Для упрощения выкладок ограничимся случаем квадрата ($a=b$). В общей формуле (4) § 59 можно, в силу неравенства (14) § 60, положить $\delta=-\|\mathbf{V}-\mathbf{w}^{(3)}\|^2$. Имеем

$$\|\mathbf{V}-\mathbf{w}^{(3)}\|^2=\left\|\mathbf{V}-\sum_{k=1}^{3}a_k\mathbf{w}_k\right\|^2,$$

где на этот раз коэффициенты a_k определяются формулами (18). Далее,

$$\left\|\mathbf{V}-\sum_{k=1}^{3}a_k\mathbf{w}_k\right\|^2=\left(\mathbf{V}-\sum_{j=1}^{3}a_j\mathbf{w}_j,\ \mathbf{V}-\sum_{k=1}^{3}a_k\mathbf{w}_k\right)=$$
$$=\|\mathbf{V}\|^2-2\sum_{k=1}^{3}a_k(\mathbf{V},\mathbf{w}_k)+\sum_{j,k=1}^{3}a_ja_k(\mathbf{w}_j,\mathbf{w}_k). \tag{19}$$

Коэффициенты a_k удовлетворяют системе

$$\sum_{j=1}^{3} a_j (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) = (\mathbf{V}, \mathbf{w}_k), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Умножая на a_k и суммируя, получим

$$\sum_{j,\,k=1}^{3} a_j a_k (\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) = \sum_{k=1}^{3} a_k (\mathbf{V}, \mathbf{w}_k).$$

Подставив это в (19), найдем

$$\left\| \mathbf{V} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{w}_k \right\|^2 = \| \mathbf{V} \|^2 - \sum_{k=1}^{3} a_k (\mathbf{V}, \mathbf{w}_k).$$

Но

$$\| \mathbf{V} \|^2 = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} x^2\, dx\, dy = \frac{4}{3} a^4,$$

коэффициенты a_k даны формулами (18), а величины $(\mathbf{V}, \mathbf{w}_k)$ суть правые части уравнений (17). Используя эти данные, легко найдем

$$\left\| \mathbf{V} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{w}_k \right\|^2 = \frac{76}{135} a^4 = 0{,}5630 a^4.$$

Вычислим теперь $F(u_3)$, где u_3 — построенное по методу Ритца приближенное решение (3). По формуле (8) § 59 имеем

$$F(u_3) = -[a_1 (f, \varphi_1)] + a_2 (f, \varphi_2) + a_3 (f, \varphi_3)];$$

входящие сюда скалярные произведения суть свободные члены системы (4), а коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются по формулам (5). Полагая $a = b$, получим

$$F(u_3) = -\frac{1400}{2493} a^4 = -0{,}5616 a^4.$$

Обозначая через u_3 приближенное решение, построенное по методу Ритца или по методу ортогональных проекций, имеем

$$|u - u_3| \leqslant a^2 \sqrt{0{,}5630 - 0{,}5616} = a^2 \sqrt{0{,}0014} = 0{,}037 a^2,$$

что дает относительную погрешность по энергии порядка 6%.

Пользуясь приближенным решением, даваемым методом ортогональных проекций, можно вычислить величину $\tau_{\max}$; соответствующие значения величины $k(\gamma)$ приведены в табл. 6.

Таблица 6

γ	1	2	3	4	5	∞
Точное решение . . .	0,675	0,930	0,985	0,997	0,999	1,000
Решение по методу ортогональных проекций	0,694	0,982	1,047	1,055	1,050	1,000

Сравнение с табл. 2 и 4 показывает, что точность вычисления τ_{max} по методу ортогональных проекций несколько выше, чем по методу Ритца, и близка к точности, даваемой рядом по собственным функциям оператора Лапласа (§ 14).

3. Применение метода Трефтца. В уравнении (1) положим $u = p - x^2/2$, тогда $\Delta p = 0$, $p|_S = x^2/2$, где S — контур прямоугольника. Применяя метод Трефтца, ограничимся одним слагаемым, так что приближенное решение будет иметь вид

$$p_1(x, y) = a_1\varphi_1(x, y),$$

где φ_1 — гармоническая в прямоугольнике функция. Примем

$$\varphi_1 = \cos\frac{\pi x}{2a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2a}.$$

Система уравнений метода Трефтца (§ 65) сводится к одному уравнению

$$a_1\int\limits_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\,dS = \int\limits_S \frac{x^2}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\,dS.$$

Произведя вычисления, найдем

$$a_1 = -\frac{16a^3}{\pi^3}\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi b/2a)};$$

приближенное значение функции u равно, с точностью до постоянного слагаемого,

$$u \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{16a^2}{\pi^3}\frac{\operatorname{ch}(\pi y/(2a))}{\operatorname{ch}(\pi b/(2a))}\cos\frac{\pi x}{2a}. \tag{20}$$

Приведем таблицу значений $k(\gamma)$, соответствующих этому приближенному решению (см. второй столбец табл. 7). Для вычислений использована формула

$$\tau = |\tau_{yz}|_{x=a,\ y=0} = 2G\theta\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a,\ y=0}.$$

Как видим, результат оказался значительно более точным, чем по методу Ритца или по методу ортогональных проекций. Это связано с выбором координатной функции φ_1, хорошо аппроксимирующей искомую гармоническую функцию $p(x, y)$.

Таблица 7

γ	Решение		
	точное	по Трефтцу (20)	по Трефтцу (21)
1	0,675	0,676	0,694
2	0,930	0,930	0,931
3	0,985	0,985	0,971
4	0,997	0,997	0,973
5	0,999	0,999	0,970
∞	1,000	1,000	1,000

Несколько худшие результаты получаются, если использовать гармонические полиномы. Именно, положим

$$u = \tilde{u} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad \Delta\tilde{u} = 0,$$

$$\tilde{u}\,|_S = \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Применяя к отысканию функции $\tilde{u}$ метод Трефтца, введем в качестве координатных функций гармонические полиномы; так как функция $\tilde{u}$ — четная относительно каждой из координат x и y, то можно ограничиться только четными полиномами. Положим

$$\tilde{u} = a_1(x^2 - y^2) + a_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ + a_3(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6). \qquad (21)$$

Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем значения τ_{max}, полученные с помощью приближенного решения (21) (см. третий столбец табл. 7).

§ 84. Изгиб прямоугольной пластинки, жестко закрепленной по краю

Задача состоит в интегрировании бигармонического уравнения

$$\Delta^2\omega = \frac{q}{D} = p, \qquad (1)$$

где q — интенсивность нагрузки и D — жесткость пластинки, при краевых условиях

$$w\,|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0. \qquad (2)$$

Длины сторон пластинки обозначим через $2a$ и $2b$. Оси координат направим параллельно сторонам пластинки, начало координат поместим в ее центре.

Как показано в § 30, задача сводится к задаче о минимуме функционала

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} \{(\Delta w)^2 - 2pw\}\, dy \tag{3}$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Эта же последняя задача может быть решена по методу Ритца. Для простоты вычислений допустим, что нагрузка распределена равномерно, так что $p = \mathrm{const}$.

В качестве координатных функций можно взять полиномы вида

$$(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \ldots); \tag{4}$$

мы опускаем нечетные степени x и y, так как $w(x, y)$, очевидно, симметрична относительно координатных осей.

В выражении (4) ограничимся тремя членами; обозначая

$$\varphi_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \quad \varphi_2 = x^2 \varphi_1, \quad \varphi_3 = y^2 \varphi_1,$$

мы будем иметь $w \approx w_3 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3$.

Уравнения процесса Ритца в нашем случае имеют вид

$$\sum_{k=1}^{3} (\Delta\varphi_k, \Delta\varphi_m)\, a_k = p\,(1, \varphi_m), \quad m = 1,\ 2,\ 3. \tag{5}$$

Произведя необходимые вычисления, преобразуем систему (5) к виду:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{4}{7}\right) a_1 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{11\gamma^4}\right) b^2 a_2 + \left(\frac{1}{7} + \frac{\gamma^4}{11}\right) a^2 a_3 &= \frac{7}{128 a^2 b^2}\, p, \\
\left(\frac{\gamma^2}{7} + \frac{1}{11\gamma^2}\right) a_1 + \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{143\gamma^4} + \frac{4}{77\gamma^2}\right) b^2 a_2 + \frac{1}{77}(1 + \gamma^4)\, a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^2 b^2}\, p, \\
\left(\frac{1}{7\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{11}\right) a_1 + \frac{1}{77}\left(1 + \frac{1}{\gamma^4}\right) b^2 a_2 + \left(\frac{3}{7} + \frac{3\gamma^4}{143} + \frac{4\gamma^2}{77}\right) a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^2 b^2}\, p.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь $\gamma = \frac{b}{a}$; уравнения системы (6) получены из (5) путем сокращения некоторых общих множителей слева и справа.

Если пластинка квадратная, то $\gamma = 1$, и уравнения (6) принимают более простой вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{18}{7}\, a_1 + \frac{18}{77}\, a^2 a_2 + \frac{18}{77}\, a^2 a_3 &= \frac{7}{128 a^4}\, p, \\
\frac{18}{77}\, a_1 + \frac{502}{1001}\, a^2 a_2 + \frac{2}{77}\, a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^4}\, p, \\
\frac{18}{77}\, a_1 + \frac{2}{77}\, a^2 a_2 + \frac{502}{1001}\, a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^4}\, p.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая эту систему, мы получим

$$w \approx w_3 = \frac{p}{a^4}(x^2-a^2)^2(y^2-a^2)^2\left(0{,}02067+0{,}0038\,\frac{x^2+y^2}{a^2}\right). \tag{8}$$

Для прогиба в центре пластинки получаем

$$w\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0{,}02067pa^4. \tag{9}$$

Если в приближенном выражении w ограничиться одним членом и положить

$$w \approx w_1 = a_1\varphi_1 = a_1(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2,$$

то вместо системы (6) получим одно уравнение

$$\left(\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{4}{7}\right)a_1 = \frac{7}{128a^2b^2}\,p.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{49}{128\,(7a^4+7b^4+4a^2b^2)}\,p, \tag{10}$$

что дает для прогиба в центре пластинки значение

$$w\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = \frac{49a^4b^4}{128\,(7a^4+7b^4+4a^2b^2)}. \tag{11}$$

В случае квадрата ($a=b$) мы получаем

$$w\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0{,}02127pa^4. \tag{12}$$

Формулы (10)—(12) приведены в монографии Л. С. Лейбензона [1].

Применим теперь к нашей задаче метод негармонического остатка [1]). Для простоты допустим, что пластинка квадратная, со стороной a. За функцию $q(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta q = p$, примем $q = p(x^2+y^2)/4$.

Введем в рассмотрение систему гармонических полиномов, которая, как можно доказать, полна в подпространстве функций, гармонических в квадрате и удовлетворяющих условию

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} u^2\,dx\,dy < \infty. \tag{13}$$

[1]) Вычисления настоящего параграфа, связанные с применением метода негармонического остатка, заимствованы отчасти из статьи З. Х. Рафальсона [2].

Нам, впрочем, нужна не вся эта система. В самом деле, из соображений симметрии очевидно, что искомая функция $w(x, y)$ четная как по x, так и по y; кроме того, она не меняется при перестановке аргументов x и y. Можно поэтому сохранить только те гармонические полиномы, которые удовлетворяют тем же условиям симметрии. Выпишем первые три таких полинома:

$$N_1 = 1, \quad N_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$
$$N_3 = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Ортонормируя их по области квадрата, получим три новых гармонических полинома:

$$M_1 = \frac{1}{2a}, \quad M_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{13}}\left[\frac{1}{2a} + \frac{15}{8a^5}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\right],$$
$$M_3 = 0{,}356359\left(M_1 - \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot 4{,}76724M_2 - 1{,}40625a^{-9}N_3\right).$$

Соответствующие коэффициенты Фурье функции $q(x, y)$ суть

$$q_1 = (q, M_1) = \frac{pa^3}{3}, \quad q_2 = (q, M_2) = -0{,}1397pa^3,$$
$$q_3 = (q, M_3) = 0{,}0014pa^3.$$

В качестве δ [формула (4) § 59] можно, в силу теоремы 1 § 66, взять величину

$$\delta = -\left(\|q\|^2 - \sum_{i=1}^{3} q_i^2\right) = -0{,}02491p^2a^6.$$

Вычислим теперь величину $F(w_3)$, где F определяется формулой (3), а w_3 — формулой (8). По формуле (8) § 59

$$F(w_3) = -\sum_{i=1}^{3} a_i(f, \varphi_i), \quad f = p.$$

Имеем по формуле (7)

$$a_1 = 0{,}02067p/a^4, \quad a_2 = a_3 = 0{,}0038p/a^6.$$

Далее, как нетрудно видеть,

$$(f, \varphi_1) = (p, \varphi_1) = p\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}(x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2\,dx\,dy = \frac{256}{225}pa^{10},$$

$$(f, \varphi_2) = (f, \varphi_3) = p\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}x^2(x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2\,dx\,dy = \frac{256}{7 \cdot 225}pa^{12}.$$

Отсюда $F(w_3) = -0{,}02486p^2a^6$ и

$$|w - w_3| \leqslant pa^3\sqrt{0{,}00005} = 0{,}0071pa^3. \tag{14}$$

Теперь легко оценить и абсолютную величину разности $w - w_3$. Пусть $u(x, y)$ — любая функция, дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутом квадрате и обращающаяся вместе со своими первыми производными в нуль на сторонах квадрата. Пусть, например, точка (x, y) лежит в первом квадранте. Имеем

$$u(x, y) = \int_x^a \int_y^a \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta.$$

По неравенству Буняковского

$$u^2(x, y) \leqslant \int_x^a \int_y^a 1^2 \cdot d\xi\,d\eta \int_x^a \int_y^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 d\xi\,d\eta =$$

$$= (a - x)(a - y) \int_x^a \int_y^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 d\xi\,d\eta.$$

В первом квадранте наибольшее значение каждой из разностей $a - x$ и $a - y$ равно a. Отсюда легко получаем неравенство

$$u^2(x, y) \leqslant a^2 \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy,$$

верное, как нетрудно видеть, во всем квадрате. Вспоминая, что в нашей задаче

$$|u|^2 = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] dx\,dy,$$

находим $u^2 \leqslant \frac{a^2}{2}|u|^2$; применяя это неравенство к функции $w - w_3$ и используя оценку (14), получаем окончательно

$$|w - w_3| \leqslant \frac{0{,}0071}{\sqrt{2}}pa^4 = 0{,}005pa^4. \tag{15}$$

§ 85. Изгиб полукруглой пластинки, упруго закрепленной по краю

На жестко закрепленном крае пластинки выполняются условия

$$w|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0,$$

на свободно опертом крае — условия

$$w\,|_L = 0, \quad \left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_L = 0.$$

Будем говорить, что край пластинки *упруго закреплен*, если на этом крае выполнены условия

$$w\,|_L = 0, \tag{1}$$

$$\left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \nu} + k\,\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_L = 0, \tag{2}$$

где k — положительная постоянная. Внутри пластинки мы, как обычно, предполагаем выполненным уравнение Софи Жермен — Лагранжа

$$\Delta^2 w = q/D. \tag{3}$$

Бигармонический оператор — симметричный и положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих условиям (1) и (2). Чтобы доказать это, составим скалярное произведение

$$(\Delta^2 w_1,\ w_2) = \iint\limits_S w_2\,\Delta^2 w_1\,dS,$$

в котором обе функции w_1 и w_2 подчинены условиям (1) и (2).

По формуле Грина [формула (19) § 7]

$$\iint\limits_S w_2\,\Delta^2 w_1\,dS = \iint\limits_S \Delta w_1\,\Delta w_2\,dS + \int\limits_L \left(w_2\frac{\partial\,\Delta w_1}{\partial \nu} - \Delta w_1\frac{\partial w_2}{\partial \nu}\right) ds,$$

или, если воспользоваться краевыми условиями (1) и (2),

$$(\Delta^2 w_1,\ w_2) = \iint\limits_S \Delta w_1\,\Delta w_2\,dS - \int\limits_L \left(\frac{1-\sigma}{\rho} - k\right)\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\,\frac{\partial w_2}{\partial \nu}\,ds. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) не изменяется при перестановке функций w_1 и w_2, поэтому $(\Delta^2 w_1, w_2) = (w_1, \Delta^2 w_2)$, и наш бигармонический оператор симметричен.

Положим теперь в (4) $w_1 = w_2 = w$. Тогда

$$(\Delta^2 w,\ w) = \iint\limits_S (\Delta w)^2\,dS - \int\limits_L \frac{1-\sigma}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds + k\int\limits_L \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_S (\Delta w)^2\,dS - \int\limits_L \frac{1-\sigma}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds. \tag{5}$$

Формулы (20) и (21) § 30 верны для любых функций, обращающихся в нуль на контуре L. Сравнение этих формул дает

$$\iint_S (\Delta w)^2 \, dS - \int_L \frac{1-\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right\} dS. \tag{6}$$

Теперь по неравенству (5)

$$(\Delta^2 w, w) \geqslant \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right\} dS. \tag{7}$$

Дальнейшие рассуждения протекают, как в п. 4 § 30, и приводят к неравенству (26) § 30, которое и означает положительную определенность нашего оператора.

Из сказанного следует, что задачу о равновесии пластинки, упруго закрепленной по краю, можно ставить как задачу о минимуме функционала

$$\iint_S \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \right\} dS +$$

$$+ k \int_L \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds - 2 \iint_S \frac{q}{D} w \, dS;$$

при краевом условии (1) — условие (2), как нетрудно видеть, естественное.

Для иллюстрации рассмотрим упруго закрепленную по краю полукруглую пластинку. Радиус пластинки примем равным единице; пластинку расположим, как на рис. 16. Для упрощения вычислений примем, что $\sigma = 0$, $k = 1$, $q/D = 1$. Применим метод Ритца.

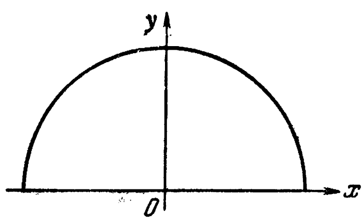

Рис. 16.

В качестве координатных выберем функции вида

$$x^{2k} y^l (1 - x^2 - y^2),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots; \quad l = 1, 2, 3, \ldots,$$

удовлетворяющие главному краевому условию (1); мы не вводим нечетных степеней x, так как прогиб пластинки симметричен относительно оси y. Ограничиваясь слагаемыми, для которых $2k + l \leqslant 4$, положим $w_6 = \sum_{k=1}^{6} a_k \varphi_k$, где $\varphi_1 = y(1 - x^2 - y^2)$, $\varphi_2 = y\varphi_1$, $\varphi_3 = x^2\varphi_1$, $\varphi_4 = y^2\varphi_1$, $\varphi_5 = x^2 y \varphi_1$, $\varphi_6 = y^3\varphi_1$.

Координатные функции не удовлетворяют естественному условию (2), и систему уравнений метода Ритца необходимо брать в виде (8_1) § 17. Так как $\sigma = 0$, то в нашем случае

$$[\varphi_i, \varphi_k] = \iint\limits_S \left[\Delta\varphi_i \Delta\varphi_k + 2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\right] dS + \int\limits_L \frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\,ds;$$

произведя необходимые вычисления, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&26{,}1994a_1 + 21{,}3333a_2 + 6{,}43557a_3 + 18{,}8496a_4 + 4{,}2667a_5 + 17{,}0667a_6 = 0{,}266667,\\
&21{,}3333a_1 + 24{,}0855a_2 + 4{,}87619a_3 + 23{,}1619a_4 + 4{,}02517a_5 + 21{,}9911a_6 = 0{,}130900,\\
&6{,}43557a_1 + 4{,}87619a_2 + 5{,}54858a_3 + 3{,}92699a_4 + 3{,}25079a_5 + 3{,}25079a_6 = 0{,}038095,\\
&18{,}8496a_1 + 23{,}1619a_2 + 3{,}92699a_3 + 24{,}3473a_4 + 3{,}05714a_5 + 24{,}3810a_6 = 0{,}076190,\\
&4{,}26667a_1 + 4{,}02517a_2 + 3{,}25079a_3 + 3{,}05714a_4 + 2{,}36928a_5 + 3{,}18080a_6 = 0{,}016362,\\
&17{,}0667a_1 + 21{,}9911a_2 + 3{,}25079a_3 + 24{,}3810a_4 + 3{,}18080a_5 + 25{,}4076a_6 = 0{,}049087.
\end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем значения коэффициентов

$$a_1 = 0{,}02217, \quad a_2 = -0{,}01145, \quad a_3 = -0{,}01317,$$
$$a_4 = 0{,}000887, \quad a_5 = 0{,}00759, \quad a_6 = -0{,}01083.$$

§ 86. Трехмерная задача теории упругости для полуцилиндра [1])

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о равновесии упругого полуцилиндра, ограниченного плоскостями $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ и цилиндрической поверхностью $x^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. Полуцилиндр подвергнем действию собственного веса и гидростатическому давлению kz, $k = \text{const}$, приложенному к грани $y = 1$.

Будем считать, что цилиндрическая часть границы закреплена, а грани $z = 0$ и $y = 0$ свободны. Обозначим область полуцилиндра через Ω, грань $z = 0$ через S_0, грань $y = 1$ через S_1, грань $y = 0$ через S_2, а цилиндрическую грань через S.

Введем цилиндрические координаты r, θ, y такие, что $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор упругих смещений, его составляющие в цилиндрической системе координат — через u_r, u_θ, u_y, а в декартовых координатах — через u_x,

[1]) Настоящий параграф воспроизводит, с некоторыми сокращениями, статью Ю. С. Вержбинской, Н. П. Канаревой, Б. А. Самокиша и автора [1].

u_y, u_z. Решение этой задачи сводится к вопросу об отыскании минимума функционала

$$F(u)=\int_0^1\int_0^\pi\int_0^1\{W(u)-2\rho\gamma u_z\}rd\,rd\theta\,dy-2k\int_0^1\int_0^\pi r^2\sin\theta u_y\,d\theta\,dy. \quad (1)$$

Здесь $2W(\mathbf{u})$ — плотность потенциальной энергии упругой деформации, соответствующей вектору смещения $\mathbf{u}=(u_r,\ u_\theta,\ u_y)$; ρ — плотность среды, γ — ускорение силы тяжести. Минимум функционала (1) следует искать в классе векторов смещений, удовлетворяющих краевому условию

$$\mathbf{u}\,|_S=\mathbf{u}\,|_{r=1}=0. \quad (2)$$

Кроме того, очевидно, что поле смещений симметрично относительно плоскости Oyz, поэтому можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\left.\begin{aligned}u_r(r,\ \pi-\theta,\ y)&=u_r(r,\ \theta,\ y),\\ u_\theta(r,\ \pi-\theta,\ y)&=-u_\theta(r,\ \theta,\ y),\\ u_y(r,\ \pi-\theta,\ y)&=-u_y(r,\ \theta,\ y).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

2. Координатные векторы. Рассмотрим векторный оператор Лапласа, взятый со знаком минус, при указанных ниже краевых условиях:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}=-\Delta\mathbf{u},\qquad \mathbf{u}\,|_S=0,\qquad \left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu}\right|_{S_0,\ S_1,\ S_2}=0, \quad (4)$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности тела Ω.

Вектор, подчиненный условию $\mathbf{u}\,|_S=0$, необходимо удовлетворяет так называемому неравенству Корна [1]), из которого сразу вытекает, что оператор Лапласа и оператор теории упругости, который мы обозначим через $\mathbf{A}$, являются полусходными. Координатную систему возьмем ортонормированной в $H_\mathbf{B}$; из теоремы 3 § 82 вытекает, что процесс Ритца устойчив относительно малых изменений матрицы системы Ритца и столбца ее свободных членов, а также относительно ошибок округления, связанных с решением системы Ритца.

Пусть B — скалярный оператор Лапласа (со знаком минус) при тех же граничных условиях (4). В качестве системы, полной и ортонормированной в H_B, рассмотрим систему функций $\{\varphi_{mnp}(r,\theta,y)\}$, $m,\ n,\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяющих условию $\varphi_{mnp}(1,\theta,y)=0$. Будем их строить в виде

$$\varphi_{mnp}(r,\ \theta,\ y)=f_{mnp}(r)\cos n\theta\cos p\pi y.$$

---

[1]) См. книгу автора [11], гл. IV.

Скалярное произведение их в H_B имеет вид

$$[\varphi_{mnp}, \varphi_{m'n'p'}]_B =$$

$$= \int_0^1 r\,dr \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \left\{ \frac{df}{dr} \frac{df'}{dr} \cos n\theta \cos n'\theta \cos p\pi y \cos p'\pi y + \right.$$

$$+ \frac{nn'}{r^2} ff' \sin n\theta \sin n'\theta \cos p\pi y \cos p'\pi y +$$

$$\left. + \pi^2 pp' ff' \cos n\theta \cos n'\theta \sin p\pi y \sin p'\pi y \right\} dy,$$

где $f = f_{mnp}(r)$, $f' = f_{m'n'p'}(r)$. Это выражение может быть отлично от нуля лишь при условии, что $n = n'$, $p = p'$. Тогда, чтобы ортонормировать функции φ_{mnp}, достаточно потребовать выполнения следующего равенства:

$$[f_{mnp}, f_{m'np}] = A_0 \int_0^1 \left\{ r \frac{df}{dr} \frac{df'}{dr} + \left(\frac{n^2}{r} + p^2\pi^2 r \right) ff' \right\} dr = \delta_{mm'}, \tag{5}$$

где

$$A_0 = \begin{cases} \pi/4, & \text{если} \quad n \neq 0, \quad p \neq 0, \\ \pi/2, & \text{если} \quad n \neq 0, \quad p = 0 \quad \text{или} \quad n = 0, \quad p \neq 0, \\ \pi, & \text{если} \quad n = p = 0. \end{cases}$$

Функции $f_{mnp}(r)$ будем искать в виде полиномов. Они должны удовлетворять условию

$$f_{mnp}(1) = 0. \tag{6}$$

Кроме того, если $n \neq 0$, то для сходимости интеграла необходимо, чтобы $f_{mnp}(0) = 0$. При $n \neq 0$ дело сводится к ортогонализации в метрике (5) полиномов вида $r(1-r)p_m(r)$; при $n = 0$ надо полиномы вида $(1-r)p_m(r)$ ортогонализовать в метрике

$$[f_{m0p}, f_{m'0p}] = A_0 \int_0^1 \left\{ r \frac{df_{m0p}}{dr} \frac{df_{m'0p}}{dr} + p^2\pi^2 r f_{m0p} f_{m'0p} \right\} dr. \tag{7}$$

3. Координатные векторы (продолжение). В пространстве H_B можно сконструировать следующую систему координатных векторов, заданных проекциями на декартовы оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}_{mnp} &= (\varphi_{mnp}, 0, 0), \\ \mathbf{u}^{(2)}_{mnp} &= (0, \varphi_{mnp}, 0), \\ \mathbf{u}^{(3)}_{mnp} &= (0, 0, \varphi_{mnp}). \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Условия симметрии (3) равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} u_x(r, \pi-\theta, y) &= -u_x(r, \theta, y), \\ u_y(r, \pi-\theta, y) &= u_y(r, \theta, y), \\ u_z(r, \pi-\theta, y) &= u_z(r, \theta, y). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Поэтому в первой формуле (8) достаточно ограничиться нечетными n, а в остальных двух формулах (8) — четными n. В составляющих по цилиндрическим осям координат векторы (8) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}_{mnp} &= (\varphi_{mnp}\cos\theta,\ -\varphi_{mnp}\sin\theta,\ 0), \\ \mathbf{u}^{(2)}_{mnp} &= (0,\ 0,\ \varphi_{mnp}), \\ \mathbf{u}^{(3)}_{mnp} &= (\varphi_{mnp}\sin\theta,\ \varphi_{mnp}\cos\theta,\ 0). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Таким образом, составляющие u_r, u_θ, u_y приближенного решения можно брать в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \sum_{m,n,p} \left(a^{(1)}_{mnp}\cos\theta\varphi_{mnp} + a^{(3)}_{mnp}\sin\theta\varphi_{mnp}\right), \\ u_\theta &= \sum_{m,n,p} \left(-a^{(1)}_{mnp}\sin\theta\varphi_{mnp} + a^{(3)}_{mnp}\cos\theta\varphi_{mnp}\right), \\ u_y &= \sum_{m,n,p} a^{(2)}_{mnp}\varphi_{mnp}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Суммирование в (11) будем производить от $m+n+p=0$ до $m+n+p=N$, где число N назначено заранее.

4. Ортогонализация. Итак, в качестве системы $f_{mnp}(r)$ берем систему алгебраических полиномов, делящихся на $1-r$ (а при $n=0$ — еще на r) и ортогональных в скалярном произведении (5) (соответственно (7)). Эту систему строим процессом ортогонализации из системы $\{p_m(r)\}$:

$$p_m(r) = \begin{cases} (1-r)\,t_m(r), & n=0, \\ r(1-r)\,t_m(r), & n\neq 0; \end{cases}$$

$t_m(r) = \cos m \arccos(2r-1)$ — полином Чебышева I рода для отрезка [0,1].

Не будем заботиться о том, чтобы полиномы, полученные процессом ортогонализации (обозначим их через $P_m(r)$), были нормированы. Тогда их можно определить рекуррентными формулами

$$P_0 = p_0, \qquad P_m = p_m - \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_{mi}P_i, \qquad m>1,$$

$$\gamma_{mi} = [p_m,\ P_i]/[P_i,\ P_i].$$

Скобками $[\,,\,]$ обозначено соответствующее скалярное произведение. Полиномы $P_m(r)$ представим коэффициентами их разложений по системе $p_k(r)$:

$$P_m(r) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} p_k(r).$$

Тогда процесс ортогонализации состоит в рекуррентном вычислении коэффициентов $a_k^{(m)}$ по формулам

$$a_m^{(m)} = 1, \quad a_k^{(m)} = -\sum_{i=k}^{m-1} \gamma_{mi} a_k^{(i)}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

$$\gamma_{mi} = \left(\sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda^{(i)} \alpha_{m\lambda}\right) \Big/ \left(\sum_{\mu,\,\nu=0}^{i} \alpha_{\mu\nu} a_\mu^{(i)} a_\nu^{(i)}\right).$$

Числа α_{ik} для данных n и p вычисляются следующим образом:

$$\alpha_{ik} = [p_i,\ p_k] = [r(1-r)\,t_i,\ r(1-r)\,t_k] =$$

$$= \int_0^1 \{(\ldots)\,t_i t_k + (\ldots)\,[t_i' t_k + t_i t_k'] + (\ldots)\,t_i' t_k'\}\,dr;$$

если $n = 0$, то $\alpha_{ik} = [(1-r)\,t_i,\ (1-r)\,t_k]$. В круглых скобках стоят некоторые полиномы степени не выше пятой, коэффициенты которых зависят лишь от n и p. Разлагая их в свою очередь, по полиномам Чебышева, выразим числа α_{ik} через интегралы

$$A_{ik}^{(m)} = \int_0^1 t_m t_i t_k\,dr, \qquad B_{ik}^{(m)} = \int_0^1 t_m t_i t_k'\,dr, \qquad C_{ik}^{(m)} = \int_0^1 t_m t_i' t_k'\,dr.$$

Эти интегралы берутся и представляют собой простые выражения от индексов $m,\ i, k$. Таким образом, процесс ортогонализации арифметизуется полностью. Были составлены две независимые программы в кодах машины М-20 и на языке АЛГОЛ 60, реализующие счет коэффициентов $a_k^{(m)}$. В табл. 1 приведены эти коэффициенты для $m + n + p \leqslant 4$. В каждой клетке таблицы приводятся коэффициенты $a_k^{(m)}$ для указанных $m,\ n,\ p$ и всех k в порядке возрастания, $0 \leqslant k \leqslant m$. Полиномы, коэффициенты которых приведены в таблице, ортогональны, но еще не нормированы.

При составлении матрицы Ритца требуется вычислять однократные интегралы по r, содержащие функции f_{mnp} и их производные. Эти интегралы вычислялись по формуле Гаусса со столь большим числом узлов, чтобы формула давала точный

Таблица 1

n	p	m	$a_k^{(m)}$
0	0	0	1
		1	0,333333
			1
		2	0,6
			0,8
			1,0
		3	0,514286
			1,285714
			0,857143
			1
		4	0,714286
			1,142857
			1,333333
			0,888889
			1
0	1	0	1
		1	0,250411
			1
		2	0,689412
			0,759657
			1
		3	0,536729
			1,390693
			0,849441
			1

n	p	m	$a_k^{(m)}$
0	2	0	1
		1	0,217591
			1
		2	0,714196
			0,686509
			1
0	3	0	1
		1	0,208436
			1
0	4	0	1
1	0	0	1
		1	−0,2
			1
		2	0,714286
			−0,571429
			1
		3	−0,476190
			1,666667
			−0,666667
			1

n	p	m	$a_k^{(m)}$
1	1	0	1
		1	−0,177323
			1
		2	0,743760
			−0,554950
			1
1	2	0	1
		1	−0,158591
			1
1	3	0	1
2	0	0	1
		1	0
			1
		2	0,6
			−0,228571
			1
2	1	0	1
		1	−0,035364
			1
2	2	0	1
3	0	0	1
		1	0,090909
			1
3	1	0	1
4	0	0	1

результат. Для этого нужно уметь вычислять значения f_{mnp} и df_{mnp}/dr в точке. Имеем $(n \neq 0)$

$$P'_m(r) = (1-2r)\sum_{l=0}^{m} a_l^{(m)} t_l(r) + 2r(1-r)\sum_{l=0}^{m} \bar{a}_l^{(m)} u_l(r),$$

где $\bar{a}_l^{(m)} = l a_l^{(m)}$, а

$$u_l(r) = \frac{\sin(l \arccos(2r-1))}{\sqrt{1-(2r-1)^2}}$$

суть полиномы Чебышева II рода, имеющие ту же рекуррентную формулу, что и $t_l(r)$. Эту формулу мы используем, чтобы построить схему вычисления в точке линейного агрегата по функциям $t_l(r)$ или $u_l(r)$. Именно, пользуясь рекуррентной формулой

$$t_k(r) = (4r-2)\,t_{k-1}(r) - t_{k-2}(r),$$

свертываем выражение $\sum_{k=0}^{m} a_l^{(m)} t_k$, начиная с последнего члена:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)} t_k = a_m^{(m)} [(4r-2)\, t_{m-1} - t_{m-2}] + \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} t_k.$$

Когда в этом выражении остается лишь два члена, вспоминаем, что $t_0 = 1$ и $t_1 = 2r - 1$.

5. Составление матрицы Ритца. Система Ритца имеет вид

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{m'+n'+p' \leqslant N} C^{(i,\,k)}_{mnp,\ m'n'p'} a^{(k)}_{m'n'p'} + \beta^{(i)}_{mnp} = 0;$$

$C^{(i,\,k)}_{mnp,\ m'n'p'}$ — значение билинейной формы оператора теории упругости на векторах $\mathbf{u}^{(i)}_{mnp}$, $\mathbf{u}^{(k)}_{m'n'p'}$. Число N определяет порядок системы Ритца. Удобно матрицу Ритца разбить на 9 блоков, в каждом из которых i, k постоянны.

Если не учитывать симметрию, все блоки имеют одинаковые размеры и порядок системы равен $3\pi(N)$, где $\pi(N)$ — число всех различных троек целых чисел m, n, p таких, что $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $m + n + p \leqslant N$. Имеем $\pi(N) = (N+1)\ (N+2)(N+3)/6$. Симметрия позволяет сократить число координатных функций. Так, при $N = 4$ порядок системы равен 57.

Подставляя координатные векторы (8) в выражение для квадратичной формы оператора теории упругости, найдем нижеследующие формулы для элементов матрицы Ритца. В них $\varphi = \varphi_{mnp}(r, \theta, y)$, $\varphi' = \varphi_{m'n'p'}(r,\ \theta,\ y)$, значками внизу отмечены первые производные по указанным переменным, а символ $[\,,\,]_B$ означает, как и выше, произведение, соответствующее интегралу Дирихле:

$$C^{(1,\,1)}_{mnp,\ m'n'p'} = \mu\,[\varphi,\ \varphi']_B +$$

$$+ (\lambda+\mu) \int_\Omega \left\{ \varphi_r \varphi'_r - \frac{1}{r} (\varphi_\theta \varphi'_r + \varphi_r \varphi'_\theta) \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{r^2}\, \varphi_\theta \varphi'_\theta \right\} r\, dr\, d\theta\, dy,$$

$$C^{(1,\,2)}_{mnp,\ m'n'p'} = \int_\Omega \left\{ \lambda \left(\varphi_r \cos\theta - \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \varphi'_y + \mu \left(\varphi'_r \cos\theta - \frac{\varphi'_\theta}{r} \right) \varphi_y \right\} r\, dr\, d\theta\, dy,$$

$$C^{(1,\,3)}_{mnp,\ m'n'p'} = \lambda \int_\Omega \left(\varphi_r \cos\theta - \frac{\varphi_\theta}{r} \sin\theta \right) \left(\varphi'_r \sin\theta + \frac{\varphi'_\theta}{r} \cos\theta \right) r\, dr\, d\theta\, dy +$$

$$+ \mu \int_\Omega \left(\varphi_r + \frac{\varphi_\theta}{r} \cos\theta \right) \left(\varphi'_r \cos\theta - \frac{\varphi'_\theta}{r} \sin\theta \right) r\, dr\, d\theta\, dy,$$

$$C^{(2,2)}_{mnp,\ m'n'p'} = \mu\,[\varphi,\ \varphi']_B + (\lambda + \mu) \int\limits_{\Omega} \varphi_y \varphi'_y \, r\, dr\, d\theta\, dy,$$

$$C^{(2,3)}_{mnp,\ m'n'p'} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\varphi'_r \sin\theta + \frac{\varphi'_\theta}{r} \right) \varphi_y + \mu \left(\varphi_r \sin\theta + \frac{\varphi_\theta}{r} \cos\theta \right) \varphi'_y \right\} r\, dr\, d\theta\, dy,$$

$$C^{(3,3)}_{mnp,\ m'n'p'} =$$

$$= \mu[\varphi, \varphi']_B + (\lambda+\mu) \int\limits_{\Omega} \left(\varphi_r \sin\theta + \frac{\varphi_\theta}{r} \cos\theta \right) \left(\varphi'_r \sin\theta + \frac{\varphi'_\theta}{r} \cos\theta \right) r\, dr\, d\theta\, dy.$$

Если сюда подставить $\varphi = \varphi_{mn\theta}(r, \theta, y) = f_{mnp}(r) \cos n\theta \times \times \cos p\pi y$ и соответствующее выражение для φ', то тройные интегралы распадутся на однократные. По переменной r возникнут интегралы

$$P_1(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 \frac{df_{mnp}}{dr} f_{m'n'p'}\, dr,$$

$$P_2(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 f_{mnp} f_{m'n'p'}\, dr,$$

$$P_3(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 \frac{df_{mnp}}{dr} \frac{df_{m'n'p'}}{dr}\, dr,$$

$$P_4(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 \frac{df_{mnp}}{dr} f_{m'n'p'} r\, dr,$$

$$P_5(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 f_{mnp} f_{m'n'p'} \frac{dr}{r},$$

$$P_6(m,\ n,\ p;\ m',\ n',\ p') = \int\limits_0^1 f_{mnp} f_{m'n'p'} r\, dr.$$

Как уже сказано, эти интегралы вычисляются по формуле Гаусса, которая для них дает точный результат. Далее возникают интегралы по переменным θ и y, которые содержат произведения тригонометрических функций и вычисляются в конечном виде. Для них были составлены арифметические формулы.

Аналогично обрабатываются свободные члены $\beta_{mnp}^{(i)}$ системы Ритца.

6. Результаты. В вычислениях было взято $N=4$, так что порядок матрицы, с учетом симметрии задачи, оказался равным 57. Такую матрицу можно обратить по стандартной программе СП-0037 системы ИС-2. Для вычисления матрицы были составлены две независимые программы.

Программа в кодах машины М-20, опираясь на подпрограмму ортогонализации (одновременно вычисляются не все ортогональные полиномы, а только при данных n и p), а также на подпрограммы счета интегралов $P_1, \ldots, P_6$ и тригонометрических, вычисляет строка за строкой элементы матрицы C и выдает их на магнитный барабан.

Программа на языке АЛГОЛ 60, вычисляющая сразу всю матрицу C, из-за громоздкости не может быть обработана транслятором ТА-1. Поэтому были составлены шесть независимых программ для вычисления шести различных блоков $C^{(i,k)}$. Мы полагали $\lambda = 2 \cdot 10^5$, $\mu = 10^5$. После вычисления матрица обращалась по СП-0037.

Операторы **А** и **В** в нашей задаче полусходные, а координатная система ортонормирована в $H_{\mathbf{B}}$. Из теорем 2 и 3 § 82 следует, что числа обусловленности матриц Ритца ограничены независимо от N. На практике они действительно оказываются небольшими: методом скалярных произведений были подсчитаны наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы C: $\lambda_{\max} = 10^6 \cdot 0{,}526\,306$, $\lambda_{\min}^{-1} = 10^{-4} \cdot 0{,}209195$. Число обусловленности $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11{,}01006$. Машинный запас точности позволил бы решить систему одним из точных методов и при значительно большем числе обусловленности; если же решать систему итеративным методом, что, по-видимому, более целесообразно при высоком порядке, то скорость сходимости весьма чувствительна к величине числа обусловленности. В нашем примере знаменатель наивыгоднейшего одношагового итеративного метода равен $(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) \approx 5/6$, так что для уменьшения погрешности, например, в 10^4 раз требуется 50 итераций.

Вычисления были проведены также для $N=5$, что соответствует, с учетом симметрии, 90 координатным функциям. Система Ритца решалась наивыгоднейшим одношаговым итеративным методом. В качестве оценок для $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ использовались значения, полученные при $N=4$. Скорость сходимости оказалась порядка ожидаемой: 50 итераций давали около 4 верных знаков.

В табл. 2 приведены коэффициенты приближенного решения, соответствующего значению $N=4$.

Таблица 2

i	m	n	p	$\alpha_{mnp}^{(i)}$	i	m	n	p	$\alpha_{mnp}^{(i)}$
1	0	1	0	$-0,1224329 \cdot 10^{-8}$	2	2	0	0	$0,1709148 \cdot 10^{-9}$
	0	1	1	$-0,4267631 \cdot 10^{-9}$		2	0	1	$-0,1182136 \cdot 10^{-8}$
	0	1	2	$0,6370582 \cdot 10^{-9}$		2	0	2	$0,3681910 \cdot 10^{-9}$
	0	1	3	$-0,4078346 \cdot 10^{-9}$		2	2	0	$0,1373510 \cdot 10^{-10}$
	0	3	0	$-0,9400302 \cdot 10^{-9}$		3	0	0	$-0,8864170 \cdot 10^{-11}$
	0	3	1	$0,3628426 \cdot 10^{-10}$		3	0	1	$-0,3423317 \cdot 10^{-9}$
	1	1	0	$0,3790256 \cdot 10^{-9}$		4	0	0	$0,9375419 \cdot 10^{-11}$
	1	1	1	$-0,5618253 \cdot 10^{-10}$	3	0	0	0	$0,8526195 \cdot 10^{-8}$
	1	1	2	$-0,8161091 \cdot 10^{-10}$		0	0	1	$-0,8362565 \cdot 10^{-9}$
	1	3	0	$-0,3354926 \cdot 10^{-9}$		0	0	2	$-0,7322471 \cdot 10^{-9}$
	2	1	0	$-0,1274381 \cdot 10^{-9}$		0	0	3	$-0,9265589 \cdot 10^{-10}$
	2	1	1	$0,6561498 \cdot 10^{-10}$		0	0	4	$-0,4576931 \cdot 10^{-9}$
	3	1	0	$0,4549116 \cdot 10^{-10}$		0	2	0	$-0,1193739 \cdot 10^{-8}$
2	0	0	0	$0,3254134 \cdot 10^{-8}$		0	2	1	$0,1522087 \cdot 10^{-8}$
	0	0	1	$-0,2597389 \cdot 10^{-8}$		0	2	2	$-0,2567310 \cdot 10^{-10}$
	0	0	2	$0,4193713 \cdot 10^{-9}$		0	4	0	$0.3026325 \cdot 10^{-9}$
	0	0	3	$-0,6820275 \cdot 10^{-9}$		1	0	0	$0,2062333 \cdot 10^{-8}$
	0	0	4	$0,1509043 \cdot 10^{-9}$		1	0	1	$-0,8504279 \cdot 10^{-10}$
	0	2	0	$-0,5707406 \cdot 10^{-9}$		1	0	2	$0,9036457 \cdot 10^{-10}$
	0	2	1	$0,2123396 \cdot 10^{-8}$		1	0	3	$-0,1435771 \cdot 10^{-9}$
	0	2	2	$-0,3262980 \cdot 10^{-9}$		1	2	0	$0,3159877 \cdot 10^{-9}$
	0	4	0	$0,3144150 \cdot 10^{-10}$		1	2	1	$0,6360345 \cdot 10^{-10}$
	1	0	0	$0,1248628 \cdot 10^{-8}$		2	0	0	$-0,6215156 \cdot 10^{-9}$
	1	0	1	$-0,2465807 \cdot 10^{-8}$		2	0	1	$-0,9029293 \cdot 10^{-11}$
	1	0	2	$0,5081217 \cdot 10^{-9}$		2	0	2	$0,3405124 \cdot 10^{-9}$
	1	0	3	$-0,7292446 \cdot 10^{-9}$		2	2	0	$0,1989931 \cdot 10^{-9}$
	1	2	0	$-0,5119318 \cdot 10^{-9}$		3	0	0	$-0,6095509 \cdot 10^{-10}$
	1	2	1	$0,1223538 \cdot 10^{-8}$		3	0	1	$0,2902847 \cdot 10^{-10}$
						4	0	0	$-0,4756327 \cdot 10^{-10}$

§ 87. Вычисление собственных чисел обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

С целью проиллюстрировать вычислительный процесс рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\,\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0 \tag{1}$$

при краевых условиях

$$u(0)=u(1)=0. \tag{2}$$

Отыскивая решение по методу Ритца, возьмем координатные функции

$$\varphi_k(x)=(1-x)\,x^k, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Ограничимся первыми тремя функциями

$$\varphi_1(x)=(1-x)x, \qquad \varphi_2(x)=(1-x)x^2, \qquad \varphi_3(x)=(1-x)x^3.$$

Применяя метод § 42 (подробности вычислений опускаем), получим для определения λ уравнение

$$\begin{vmatrix} 0{,}404757774-\frac{1}{30}\lambda & 0{,}216156130-\frac{1}{60}\lambda & 0{,}135002282-\frac{1}{105}\lambda \\ 0{,}216156130-\frac{1}{60}\lambda & 0{,}510789821-\frac{1}{105}\lambda & 0{,}675363337-\frac{1}{168}\lambda \\ 0{,}135002282-\frac{1}{105}\lambda & 0{,}675363337-\frac{1}{168}\lambda & 1{,}023822057-\frac{1}{252}\lambda \end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

Наиболее простое и грубое приближение к первому собственному числу получим, приравняв нулю диагональный минор первого порядка:

$$0{,}404757774-\lambda/30=0, \qquad (4)$$

что соответствует использованию в методе Ритца одной только координатной функции $\varphi_1(x)$. Из уравнения (4) получаем[1] $\lambda_1^{(1)}=12{,}14273$.

Второе приближение получим, приравняв нулю минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0{,}404757774-\frac{1}{30}\lambda & 0{,}216156130-\frac{1}{60}\lambda \\ 0{,}216156130-\frac{1}{60}\lambda & 0{,}510789821-\frac{1}{105}\lambda \end{vmatrix}=0; \qquad (5)$$

меньший из корней уравнения (5) равен $\lambda_1^{(2)}=12{,}12781$, что дает более точное приближение к наименьшему собственному числу задачи (1) — (2). Решая уравнение (3) по методу Ньютона, получим еще более точное значение

$$\lambda_1^{(3)}=12{,}12255. \qquad (6)$$

Каждое из чисел $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_1^{(3)}$ больше собственного числа λ_1. Приближение к λ_1 снизу получим, используя упомянутый в п. 1 § 74 прием, основанный на сведении данной задачи к интегральному уравнению.

Уравнение (1) при краевых условиях (2) равносильно интегральному уравнению

$$u(x)-\lambda\int_0^1 G(x,\,s)\,u(s)\,ds=0, \qquad (7)$$

[1]) Верхний индекс у λ означает номер приближения, нижний — номер собственного числа.

где $G(x, s)$ — функция Грина[1]) данной задачи. Для построения этой функции интегрируем уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\,\frac{dv}{dx}\right)=0;$$

его общий интеграл равен $v=C_1\sqrt{1+x}+C_2$. Находим два решения, из которых первое обращается в нуль при $x=0$, второе — при $x=1$:

$$v_1=A\left(\sqrt{1+x}-1\right),\qquad v_2=B\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2}\right).$$

Мы найдем функцию Грина, если будем считать постоянные A и B функциями параметра s и подчиним их требованиям, чтобы при $x=s$

$$v_1=v_2,\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_2}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1+s}}.$$

Это дает уравнения

$$A\left(\sqrt{1+s}-1\right)=B\left(\sqrt{1+s}-\sqrt{2}\right),\quad \frac{A}{2\sqrt{1+s}}-\frac{B}{2\sqrt{1+s}}=-\frac{1}{\sqrt{1+s}}.$$

Отсюда, например, $B=2\left(\sqrt{1+s}-1\right)/\left(\sqrt{2}-1\right)$. Теперь

$$G(x,\ s)=2\left(\sqrt{1+s}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2}\right)/\left(\sqrt{2}-1\right),\qquad x\geqslant s.$$

Так как функция Грина симметрична, то

$$G(x,\ s)=2\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+s}-\sqrt{2}\right)/\left(\sqrt{2}-1\right),\qquad x\leqslant s.$$

Трактуя $G(x, s)$ как ядро интегрального уравнения (7), построим по обычным правилам второе итерированное ядро; мы получим тогда, при $x\leqslant s$,

$$\begin{aligned}G_2(x,\ s)=\frac{4}{3\left(3-2\sqrt{2}\right)}\Big\{&\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+s}\right)\Big[\left(\sqrt{2}-1\right)\times\\&\times\left(-2-x-\frac{x^2}{2}-2\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+x}\right)+\\&+4\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+x}\right)\Big]+\left(\sqrt{1+x}-1\right)\Big[\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+s+\frac{s^2}{2}+\right.\\&\left.+2\sqrt{2}\sqrt{1+s}-\sqrt{2}s\sqrt{1+s}-\frac{11}{2}\left(\sqrt{1+s}-1\right)\right]\Big\};\end{aligned}$$

значение $G_2(x, s)$ при $x\geqslant s$ получается, по симметрии, перестановкой аргументов x и s. По формуле (*) § 74 находим

$$a_2=\int_0^1\int_0^1 G^2(x,\ s)\,dx\,ds,$$

[1]) Подробнее о построении функции Грина см., например, В. И. Смирнов [3], гл. IV, § 1.

или, так как ядро симметрично,

$$a_2 = 2\int_0^1 ds \int_0^s G^2(x,\ s)\,dx,$$

что в нашем случае дает $a_2 = 0{,}0076414951$.

Аналогично

$$a_4 = 2\int_0^1 ds \int_0^s G_2^2(x,\ s)\,dx = 0{,}50092905 \cdot 10^{-4}.$$

По формуле (5) § 74 получаем приближенные значения с недостатком для наименьшего собственного числа

$$\lambda_{11} = 1/\sqrt{a_2} = 11{,}4395997, \quad \lambda_{12} = 1/\sqrt[4]{a_4} = 11{,}886553.$$

Беря более точные приближения, получаем окончательно $11{,}88655 \leqslant \lambda_1 \leqslant 12{,}12255$. Взяв за λ_1 среднее арифметическое приближенных значений с недостатком и с избытком, получим приближенное значение $\lambda_1 = 12{,}00455$ с относительной погрешностью, меньшей 1%.

§ 88. Собственные колебания стержня переменного сечения

Уравнение свободных колебаний стержня переменного сечения имеет вид

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] + \rho S(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

Здесь, как обычно, ось x направлена по оси стержня, $z(x, t)$ — поперечные смещения его точек, $I(x)$ и $S(x)$ — момент инерции и площадь поперечного сечения с абсциссой x, E и ρ — модуль Юнга и отнесенная к единице длины плотность материала стержня. Допустим для определенности, что один конец стержня закреплен, а другой — свободен. Обозначим через L длину стержня и поместим начало координат в его закрепленном конце. Тогда краевые условия нашей задачи запишутся так:

$$z\big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0. \qquad (3)$$

Как обычно, ищем решение в виде

$$z(x,\ t) = u(x)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t + \alpha\right), \quad \alpha = \mathrm{const} \qquad (4)$$

Тогда уравнение (1) и краевые условия (2) и (3) переходят в следующие:

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]-\rho\lambda S(x)u=0, \tag{5}$$

$$u(0)=0,\qquad u'(0)=0, \tag{6}$$

$$u''(L)=0,\qquad u'''(L)=0. \tag{7}$$

По доказанному в § 45 наименьшее собственное значение λ_1 нашей задачи равно минимуму интеграла

$$\int\limits_0^L Eu\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]dx=E\int\limits_0^L I(x)\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]^2dx \tag{8}$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (6) и (7) и дополнительному условию

$$\int\limits_0^L \rho S(x)u^2(x)\,dx=1. \tag{9}$$

Отыскивая минимум интеграла (8) по методу Ритца, возьмем в качестве координатных собственные функции оператора $\frac{d^4u}{dx^4}$ при краевых условиях (6) и (7). Эти функции образуют полную ортонормированную систему. Как известно[1]), указанные функции имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{2m-1}(\xi)&=\frac{\sin\alpha_k\xi}{\sin\frac{\alpha_k}{2}}+\frac{\operatorname{ch}\alpha_k\xi}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_k}{2}}, &\quad k&=2m-1,\\ \varphi_{2m}(\xi)&=\frac{\cos\alpha_k\xi}{\cos\frac{\alpha_k}{2}}-\frac{\operatorname{sh}\alpha_k\xi}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_k}{2}}, &\quad k&=2m,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где α_k — корни уравнения[2]) $\cos\alpha\operatorname{ch}\alpha=1$; в формулах (10) за основной принят отрезок $-1/2\leqslant\xi\leqslant 1/2$, причем условия (6) относятся к концу $\xi=-1/2$, а условия (7) — к концу $\xi=+1/2$.

---

[1]) См. В. Н. Фаддеева [1, 2].

[2]) Значения α_k приведены, например, в статье В. Н. Фаддеевой [1], табл. 7.

Чтобы использовать функции (10) в нашей задаче, нужно, очевидно, положить

$$\xi = \frac{2x - L}{2L}. \tag{11}$$

Полагая приближенно

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \qquad \psi_k(x) = \varphi_k\left(\frac{2x-L}{2L}\right),$$

мы получим, в соответствии со сказанным в § 45, следующее уравнение для определения λ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda B_{11} & A_{12}-\lambda B_{12} & \ldots & A_{1n}-\lambda B_{1n} \\ A_{21}-\lambda B_{21} & A_{22}-\lambda B_{22} & \ldots & A_{2n}-\lambda B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}-\lambda B_{n1} & A_{n2}-\lambda B_{n2} & \ldots & A_{nn}-\lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

где

$$A_{ik} = E\int_0^L I(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_k''(x)\,dx, \qquad B_{ik} = \int_0^L \rho S(x)\,\psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx. \tag{13}$$

Для примера рассмотрим однородную трубу в виде полого усеченного конуса осевое сечение этой трубы показано на рис. 17. В этом случае

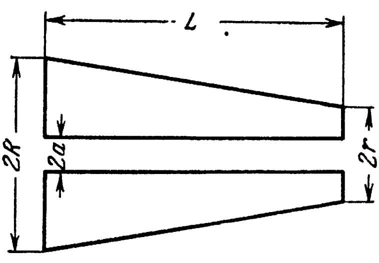

Рис. 17.

$$I(x) = \frac{\pi}{4}(y^4 - a^4),$$

$$S(x) = \pi(y^2 - a^2),$$

где

$$y = R - \frac{R-r}{L}x = \\ = R - (\xi + 1/2)(R - r).$$

Если в (13) сделать замену $\xi = \frac{2x-L}{2L}$, то коэффициенты A_{ik} и B_{ik} принимают вид

$$A_{ik} = \frac{\pi E}{4L^3}\left\{\left[\frac{1}{16}(R+r)^4 - a^4\right]I_{ik}^{(0)} - \frac{1}{2}(R+r)(R-r)\,I_{ik}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(R+r)^2(R-r)^2 I_{ik}^{(2)} - 2(R+r)(R-r)^3 I_{ik}^{(3)} + (R-r)^4 I_{ik}^{(4)}\right\}, \tag{14}$$

$$B_{ik} = \pi\rho L\left\{\left[\frac{(R+r)^2}{4} - a^2\right]\tilde{I}_{ik}^{(0)} - \frac{1}{8}(R^2 - r^2)\,\tilde{I}_{ik}^{(1)} + (R-r)^2\,\tilde{I}_{ik}^{(2)}\right\}. \tag{15}$$

Здесь $I_{ik}^{(0)}, \ldots, \tilde{I}_{ik}^{(2)}$ — интегралы, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} I_{ik}^{(n)} &= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \xi^n \varphi_i''(\xi)\,\varphi_k''(\xi)\,d\xi, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ \tilde{I}_{ik}^{(n)} &= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \xi^n \varphi_i(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi, \qquad n=0,\ 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При различных соотношениях между i и k мы получаем следующие группы формул.

I. $i = k$ нечетное.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \quad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} + \alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2} - 4\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} + 4\right),$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} + \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha_k}{2} - 6\right).$$

II. $i = k$ четное.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \quad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} - \alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2} + 4\alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + 4\right),$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} - \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \alpha_k^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_k}{2} + 6\right).$$

III. $i \neq k$, i нечетное, k нечетное.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \quad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \\ = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)}\left\{\alpha_i\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{(3\alpha_i^2+\alpha_k^2)}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2} + \frac{(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_i \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{\beta}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)}=\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}-\right.$$
$$-\frac{2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}+(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right]-$$
$$\left.-\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)}=\frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}-\frac{12(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}-(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_k}{2}\right]\right\}.$$

IV. $i\neq k$, i четное, k четное.

$$I_{ik}^{(0)}=0,\quad I_{ik}^{(1)}=-\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)}=\frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}+\frac{\alpha_k^2+3\alpha_i^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\frac{\alpha_i^2+3\alpha_k^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)}=\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}+(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right]-\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)}=\frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right]-\frac{12(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\}.$$

V. i нечетное, k четное.

$$I_{ik}^{(0)}=0,\quad I_{ik}^{(1)}=-\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)}=\frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)} = -\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}-(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right]+\frac{4(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)} = \frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}+\frac{3}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-\alpha_i^2)\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right]+\frac{12(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\right\}.$$

VI.

$$\tilde I_{kk}^{(0)}=1,\qquad \tilde I_{ik}^{(0)}=0,\qquad i\neq k,$$

$$\tilde I_{ik}^{(1)}=-I_{ik}^{(1)}/\alpha_i^2\alpha_k^2,\qquad \tilde I_{ik}^{(2)}=I_{ik}^{(2)}/\alpha_i^2\alpha_k^2.$$

Для численных расчетов примем следующие размеры трубы: $L = 4000$ *мм*, $R = 400$ *мм*, $r = 200$ *мм*, $a = 100$ *мм*.

Полагая в приближенном выражении $u \approx \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$, $n = 1, 2, 3$, мы получим для определения λ следующие уравнения:

1) $0{,}8526 - 0{,}1917\cdot 10^9\lambda\rho/E = 0$,

2) $$\begin{vmatrix} 0{,}8526-0{,}1917\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & -1{,}5341+0{,}0632\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ -1{,}5341+0{,}0632\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & 39{,}4262-0{,}3526\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E}\end{vmatrix}=0,$$

3) $$\begin{vmatrix} 0{,}8526-0{,}1917\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & -1{,}5341+0{,}0632\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & 1{,}1077+0{,}0037\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ -1{,}5341+0{,}0632\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & 39{,}4262-0{,}3526\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & -26{,}614+0{,}0865\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} \\ 1{,}1077+0{,}0037\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & -26{,}614+0{,}0865\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E} & 156{,}59-0{,}3168\cdot 10^9\lambda\frac{\rho}{E}\end{vmatrix}=0,$$

наименьшие корни которых суть

$$\lambda_1^{(1)}=0{,}4446\cdot 10^{-8}\frac{E}{\rho};\quad \lambda_1^{(2)}=0{,}4226\cdot 10^{-8}\frac{E}{\rho};\quad \lambda_1^{(3)}=0{,}4171\cdot 10^{-8}\frac{E}{\rho}.$$

Как видно, последовательные значения λ_1 довольно быстро приближаются друг к другу: относительная погрешность при переходе от $\lambda_1^{(1)}$ к $\lambda_1^{(3)}$ составляет около 5%, а при переходе от $\lambda_1^{(2)}$ к $\lambda_1^{(3)}$ — около 1,3%. Для второго собственного числа уравнения 2) и 3) дают приближенные значения

$$\lambda_2^{(2)}=11{,}628\cdot 10^{-8}E/\rho,\qquad \lambda_2^{(3)}=11{,}074\cdot 10^{-8}E/\rho;$$

относительная погрешность при переходе от $\lambda_2^{(2)}$ к $\lambda_2^{(3)}$ приблизительно равна 5%.

Попытаемся оценить значения собственных частот колеблющегося стержня снизу. Чтобы упростить вычисления, рассмотрим случай сплошной трубы ($a = 0$). По методу Ритца собственные числа опять определяются из системы вида (12), в которой только следует заменить коэффициенты A_{ik} и B_{ik} новыми коэффициентами $\bar{A}_{ik}$ и $\bar{B}_{ik}$; их вычисление теперь не потребует особого труда: как легко убедиться,

$$\bar{A}_{ik} = A_{ik} + \frac{\pi E a^4}{4L^3} I_{ik}^{(0)}; \quad \bar{B}_{ik} = B_{ik} + \pi\rho L a^2 I_{ik}^{(0)}.$$

Полагая опять $n = 3$, получим для наименьшего значения λ приближенное значение с избытком

$$\lambda_1 \approx 0{,}34498 \cdot 10^{-8}\, E/\rho. \tag{17}$$

Чтобы оценить значение λ_1 снизу, сведем нашу задачу по способу § 74 к интегральному уравнению с симметричным ядром. Это ядро имеет вид

$$K(x, t) = \sqrt{S(x) S(t)}\, G(x, t),$$

где $G(x, t)$ — функция Грина нашей задачи, а $S(x)$ — площадь сечения стержня, с абсциссой x. Функция Грина $G(x, t)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2 G}{dx^2}\right) = 0,$$

непрерывное вместе со своими производными первого и второго порядка, тогда как третья производная терпит при $x = t$ скачок, равный

$$\left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{t = x-0} - \left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{t = x+0} = \frac{1}{I(x)}.$$

Проведя необходимые вычисления, найдем, что при $x \leqslant t$

$$K(x, t) = \frac{2(R - Ct)}{3R^2(R - Cx)}\left[3Rtx^2 - (R + 2Ct)x^3\right]; \quad C = \frac{R - r}{L}.$$

Теперь можно вычислить второй след ядра:

$$A_2 = 2\int_0^L dt \int_0^t K^2(x, t)\, dx = 8{,}979548 \cdot 10^{16}.$$

Параметр интегрального уравнения равен $\lambda\rho/E$. По формуле (4) § 74 получаем приближенное значение λ_1 с недостатком:

$$\lambda_1 \approx 0{,}33371 \cdot 10^{-8}\, \frac{E}{\rho}. \tag{18}$$

Значения (17) и (18) вычислены для размеров r, R, L, указанных выше.

Среднее арифметическое значений (17) и (18) дает

$$\lambda_1 = 0{,}3390 \cdot 10^{-8} E/\rho$$

с относительной погрешностью, меньшей 1,5%.

§ 89. Радиальные собственные колебания упругого цилиндра

Наименьшая частота ω_1 собственных колебаний упругого тела, поверхность которого свободна от напряжений, определяется соотношением

$$\gamma\omega_1^2 = \min \frac{2W(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}, \tag{1}$$

где γ — плотность среды, $W(\mathbf{u})$ — потенциальная энергия деформации:

$$2W(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left\{\lambda\theta^2 + 2\mu\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \mu\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)\right\} d\Omega, \tag{2}$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

и

$$H(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) d\Omega = \|\mathbf{u}\|^2. \tag{3}$$

Условие отсутствия напряжений на границе тела — естественное, поэтому нет необходимости подчинять $\mathbf{u}$ каким-либо краевым условиям; однако $\mathbf{u}$ следует подчинить соотношениям

$$\int_\Omega \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{u}\, d\Omega = 0, \tag{4}$$

выражающим отсутствие жестких смещений.

Рассмотрим случай, когда упругая среда заполняет круговой цилиндр радиуса R и высоты h, и допустим, что колебания — радиальные, так что $\mathbf{u}$ имеет в цилиндрических осях ρ, ϑ, z только две составляющие u_ρ и u_z, которые не зависят от угла ϑ. В формулы (2) и (3) введем цилиндрические координаты вместо декартовых. Мы получим тогда

$$2W(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left\{\lambda\left(\varepsilon_\rho + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z\right)^2 + 2\mu\left(\varepsilon_\rho^2 + \varepsilon_\vartheta^2 + \varepsilon_z^2\right) + \mu\left(\gamma_{\rho\vartheta}^2 + \gamma_{\rho z}^2 + \gamma_{\vartheta z}^2\right)\right\} d\Omega, \tag{5}$$

$$H(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left(u_\rho^2 + u_\vartheta^2 + u_z^2\right) d\Omega, \tag{6}$$

где, в условиях радиальной симметрии,

$$u_\vartheta = 0, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\rho\vartheta} = \gamma_{\vartheta z} = 0.$$

Подставив это в (5) и (6) и выполнив интегрирование по ϑ, найдем

$$2W(\mathbf{u}) = 4\pi W_1(\mathbf{u}), \quad H(\mathbf{u}) = 2\pi H_1(\mathbf{u}),$$

где

$$2W_1(\mathbf{u}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{u_\rho^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} dz, \tag{7}$$

$$H_1(\mathbf{u}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h \left(u_\rho^2 + u_z^2 \right) dz. \tag{8}$$

При этом

$$\gamma\omega_1^2 = \min \frac{2W_1(\mathbf{u})}{H_1(\mathbf{u})}. \tag{9}$$

Отыскивая минимум отношения (9) по методу Ритца, возьмем приближенные значения u_ρ и u_z в виде

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \rho\left(a_0 + a_1 z + a_2\rho^2 + a_3 z^2\right), \\ u_z &= b_0 + b_1 z + b_2\rho^2 + b_3 z^2. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Множитель ρ введен в u_ρ потому, что, как это ясно из соображений симметрии, $u_\rho = 0$ при $\rho = 0$.

Коэффициенты в (10) не произвольны, а связаны соотношениями (4), которые дают

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -3\left(\frac{a_1 h}{6} + \frac{a_2 R^2}{5} + \frac{a_3 h^2}{9} \right), \\ b_0 &= -\left(\frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 R^2}{2} + \frac{b_3 h^2}{2} \right), \\ a_1 &= \frac{6}{h^2}\left(\frac{b_2 R^2}{5} - \frac{a_3 h^3}{6} \right). \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Соотношения (11) позволяют исключить коэффициенты a_0, b_0, a_1; это дает нам

$$u_\rho = a_2\left(\rho^3 - \frac{3R^2}{5}\rho\right) + a_3\left(\frac{h^2}{6}\rho - hz\rho + z^2\rho\right) + b_2\left(\frac{6R^2}{5h^2}z\rho - \frac{3R^2}{5h}\rho\right), \quad (12)$$
$$u_z = b_1\left(z - \frac{h}{2}\right) + b_2\left(\rho^2 - \frac{R^2}{2}\right) + b_3\left(z^2 - \frac{h^2}{3}\right).$$

Введем в рассмотрение векторы смещений

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \left(0;\ z - \frac{h}{2}\right), \quad \varphi_2 = \left(\rho^3 - \frac{3R^2}{5}\rho;\ 0\right),\\ &\varphi_3 = \left(\frac{6R^2}{5h^2}\rho z - \frac{3R^2}{5h}\rho;\ \rho^2 - \frac{R^2}{2}\right),\\ &\varphi_4 = \left(\frac{h^2}{6}\rho - h\rho z + z^2\rho;\ 0\right), \quad \varphi_5 = \left(0;\ z^2 - \frac{h^2}{3}\right); \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

в формулах (13) на первых местах записаны составляющие по оси ρ, на вторых — составляющие по оси z. С помощью векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ можно записать формулы (12) в более удобном виде

$$\mathbf{u} = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3 + b_4\varphi_4 + b_5\varphi_5. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$2W_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h \left\{\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\mu\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{u_\rho v_\rho}{\rho^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\right\} dz,$$
$$H_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h (u_\rho v_\rho + u_z v_z)\, dz.$$

Как это вытекает из общих результатов § 43, уравнение для определения величины $\gamma\omega_1^2 = \varkappa$ имет вид

$$\begin{vmatrix} 2W_1(\varphi_1, \varphi_1) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_1) & 2W_1(\varphi_1, \varphi_2) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & 2W_1(\varphi_1, \varphi_n) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_n) \\ 2W_1(\varphi_1, \varphi_2) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_2) & 2W_1(\varphi_2, \varphi_2) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & 2W_1(\varphi_2, \varphi_n) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2W_1(\varphi_1, \varphi_n) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_n) & 2W_1(\varphi_2, \varphi_n) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & 2W_1(\varphi_n, \varphi_n) - \varkappa H_1(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Если выполнить все необходимые вычисления, то это уравнение примет следующую форму:

$$\begin{vmatrix}
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h^3}{2}-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa & \frac{2\lambda R^4h}{5} & 0 & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)R^2h^2}{2}-\frac{R^2h^2}{24}\varkappa \\
\frac{2\lambda R^4h}{5} & \frac{(74\lambda+124\mu)R^6h}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa & 0 & 0 & \frac{2\lambda R^4h^2}{5} \\
0 & 0 & \frac{6(\lambda+\mu)R^6}{25h}+\frac{\mu R^4h}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2-\left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa & 0 & \frac{\lambda R^4h}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90}+\frac{\mu R^4h^3}{12}-\frac{R^4h^5}{720}\varkappa & 0 \\
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h^2}{2}-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa & \frac{2\lambda R^4h^2}{5} & \frac{\lambda R^4h}{5} & 0 & \frac{2(\lambda+2\mu)R^2h^3}{3}-\frac{2R^2h^5}{45}\varkappa
\end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) распадается на два, так как четвертый столбец содержит только один член, отличный от нуля. Одно из этих уравнений есть

$$\frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90}+\frac{\mu R^4h^3}{12}-\frac{R^4h^5}{720}\varkappa=0, \tag{16}$$

второе же имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix}
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h^3}{2}-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa & \frac{2\lambda R^4h}{5} & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)R^2h^2}{2}-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa \\
\frac{2\lambda R^4h}{5} & \frac{(74\lambda+124\mu)R^6h}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa & 0 & \frac{2\lambda R^4h^2}{5} \\
0 & 0 & \frac{6(\lambda+\mu)R^6}{25h}+\frac{\mu R^4h}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2+-\left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa & \frac{\lambda R^4h}{5} \\
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h^2}{2}-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa & \frac{2\lambda R^4h^2}{5} & \frac{\lambda R^4h^2}{5} & \frac{2(\lambda+2\mu)R^2h^3}{3}-\frac{2R^2h^5}{45}\varkappa
\end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

В определителе (17) умножим первый столбец на h и вычтем из четвертого. Тогда первые два элемента четвертого столбца обратятся в нуль. По известной теореме Лапласа определитель в (17) распадается в произведение двух определителей, а уравнение (17) сведется соответственно к двум квадратным уравнениям

$$\begin{vmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)R^2h}{2} - \frac{R^2h^3}{24}\varkappa & \frac{2\lambda R^4h}{5} \\ \frac{2\lambda R^4h}{5} & \frac{(74\lambda+124\mu)R^6h}{75} - \frac{3R^8h}{200}\varkappa \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{6(\lambda+\mu)R^6}{25h} + \frac{\mu R^4h}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2 - \left(\frac{3R^8}{100h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa & \frac{\lambda R^4h}{5} \\ \frac{\lambda R^4h}{5} & \frac{(\lambda+2\mu)R^2h^3}{6} - \frac{R^2h^5}{360}\varkappa \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Наименьший из корней уравнений (16), (18) и (19) дает (приближенно) значение $\varkappa_1 = \gamma\omega_1^2$, где, как мы условились выше, ω_1 означает наименьшую частоту собственных колебаний цилиндра.

Положим, например, $\sigma = 1/3$ или, что то же, $\lambda = 2\mu$. Положим еще $h = 4$, $R = 2$ и введем обозначение $\varkappa/\mu = \nu$. Решая уравнения (16), (18) и (19) при указанных значениях, найдем, что наименьший корень $\nu_1 = 2{,}722808$ и, следовательно,

$$\omega_1 \approx 0{,}1650051\sqrt{\mu/\gamma}.$$

Если приравнивать нулю диагональные миноры определителя (15), то получатся следующие приближения (цифра сверху означает номер приближения):

$$\nu_1^{(1)} = 3, \quad \nu_1^{(2)} = \nu_1^{(3)} = \nu_1^{(4)} = \nu_1^{(5)} = 2{,}722808.$$

§ 90. Колебания упругой прямоугольной пластинки в ее плоскости

Для определенности рассмотрим пластинку, край которой свободен от действия внешних сил. Уравнения свободных колебаний упругой пластинки имеют вид

$$-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right) - \omega^2\rho u_x = 0,$$
$$-\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right) - \omega^2\rho u_y = 0. \qquad (1)$$

Здесь ρ — плотность упругой среды, λ и μ — ее коэффициенты Ляме, ω — частота свободных колебаний. В соответствии со сказанным в § 51 наименьшая собственная частота определяется из соотношения

$$\rho\omega_1^2 = \min \frac{2W(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}. \tag{2}$$

Через $W(\mathbf{u})$ обозначен интеграл энергии упругой деформации, равный

$$2W(\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \left\{ (\lambda + 2\mu)\theta^2 - 4\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega, \tag{3}$$

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

а через $H(\mathbf{u})$ — интеграл

$$H(\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) d\Omega. \tag{4}$$

Краевое условие нашей задачи естественное, поэтому при отыскании минимума (2) можно не подчинять $\mathbf{u}$ никаким краевым условиям, однако $\mathbf{u}$ следует подчинить условиям, исключающим жесткое смещение пластинки:

$$\int\limits_\Omega u_x\, d\Omega = 0, \quad \int\limits_\Omega u_y\, d\Omega = 0, \quad \int\limits_\Omega (xu_y - yu_x)\, d\Omega = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим для определенности случай прямоугольной пластинки. Обозначения длин сторон и расположение координатных осей возьмем, как в § 84. В качестве координатных выберем функции

$$\cos(k\pi x/a)\cos(m\pi y/b), \qquad k,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Положим, ограничиваясь значениями $k + m \leqslant 2$,

$$u_x \approx a_1 \cos\frac{\pi x}{a} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + a_3 \cos\frac{\pi y}{b} + a_4 \cos\frac{2\pi y}{b} + a_5 \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},$$

$$u_y = b_1 \cos\frac{\pi x}{a} + b_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + b_3 \cos\frac{\pi y}{b} + b_4 \cos\frac{2\pi y}{b} + b_5 \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \tag{6}$$

В силу третьего равенства (5) коэффициенты a_k и b_k связаны соотношением

$$ab_1 = a_3 b; \tag{7}$$

первые два равенства (5) выполняются автоматически, так как выражения (6) не содержат свободных членов.

Формулы (6) удобно трактовать следующим образом.

Введем девять векторов φ_k, $k = 1, 2, \ldots, 9$, полагая

$$\varphi_1 = \left(\cos\frac{\pi x}{a},\ 0\right), \qquad \varphi_2 = \left(\cos\frac{\pi y}{b},\ \frac{b}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_3 = \left(\cos\frac{2\pi x}{a},\ 0\right), \qquad \varphi_4 = \left(0,\ \cos\frac{2\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_5 = \left(0,\ \cos\frac{\pi y}{b}\right), \qquad \varphi_6 = \left(\cos\frac{2\pi y}{b},\ 0\right),$$

$$\varphi_7 = \left(0,\ \cos\frac{2\pi y}{b}\right), \qquad \varphi_8 = \left(\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\ 0\right),$$

$$\varphi_9 = \left(0,\ \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right).$$

Формулы (6) и (7) показывают, что искомый вектор $\mathbf{u}$ приближенно выражается линейной комбинацией векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_9$.

Обозначим $ab\rho\omega^2/\mu = \varkappa$. Для определения $\varkappa$ воспользуемся уравнением (4) § 43. В нашем случае, после того как каждая строка определителя поделена на $\mu/2$, оно принимает вид (8) (см. стр. 416; σ — коэффициент Пуассона).

Заметим, что уравнение (8) можно упростить, так как второй столбец определителя (8) содержит только один отличный от нуля элемент; уравнение (8) распадается на два, из которых первое получится, если приравнять нулю указанный элемент, а второе — если приравнять нулю минор этого элемента. Первое уравнение имеет корень

$$\varkappa = \frac{a\pi^2}{a+b}\left(\frac{a}{b} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right). \tag{9}$$

Чтобы решить второе уравнение, зададимся какими-либо численными значениями σ и $\frac{b}{a}$. Пусть, например, $\sigma = \frac{1}{3}$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Тогда указанное уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix}
2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{64}{3} \\
0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\
16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32\pi^2-\varkappa & \frac{64}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{64}{3} & 0 & 0 & \frac{128}{3} & 4\pi^2-\varkappa & 0 \\
0 & \frac{128}{3} & 0 & 0 & \frac{64}{3} & 0 & 0 & \frac{17\pi^2}{2}-\varkappa
\end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \pi^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right)-\varkappa\frac{a+b}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32\sigma}{3(1-2\sigma)} \\
0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\
\frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right]-\frac{\varkappa}{2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{32\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]-\frac{\varkappa}{2}
\end{vmatrix}=0. \quad (8)$$

Отметим, что при $\sigma=\frac{1}{3}$ и $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ величина (9) равна $\varkappa_0 = 19{,}315273$. Чтобы проследить за сходимостью процесса, будем находить приближенные значения наименьшего корня $\varkappa_1$, приравнивая нулю диагональные миноры определителя (10). Приравнивая нулю миноры первых трех порядков, мы получим значения $\varkappa$, равные 19,739209 и 78,956835. Сравнивая это с $\varkappa_0$, получаем в качестве приближенного значения наименьшего корня уравнения (8) величину 19,315273.

Приравняем теперь нулю минор четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения равен 15,692682. Так как это число меньше, чем $\varkappa_0$, то его и следует считать более точным приближенным значением величины $ab\rho\omega_1^2/\mu$, где через ω_1 обозначена наименьшая собственная частота колебаний пластинки. Приравнивая нулю миноры более высоких порядков, мы каждый раз будем получать наименьший корень 15,692682. Таким образом, в пределах принятой нами точности $ab\rho\omega_1^2/\mu = 15{,}692682$.

§ 91. Устойчивость сжатой эллиптической пластинки

Рассмотрим эллиптическую пластинку с полуосями a и b ($a > b$), край которой закреплен. Допустим, что пластинка подвержена действию равномерного давления $\sigma_x=\sigma_y=-\frac{\lambda D}{h}$, $\tau_{xy}=0$. Найдем наименьшую величину нагрузки, при которой пластинка потеряет устойчивость.

Уравнение (4) § 49 в нашем случае принимает вид

$$\Delta^2 w + \lambda\,\Delta w = 0. \tag{1}$$

Задача состоит в нахождении наименьшего собственного значения уравнения (1) при краевых условиях

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}=0. \tag{2}$$

Применяя к нашей задаче метод Ритца, в качестве координатных возьмем функции [1])

$$x^m y^n (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^2, \qquad m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

Ограничиваясь значениями $m + n \leqslant 2$, получим

$$w \approx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2). \tag{4}$$

Положим $a/b = \gamma$, $\lambda a^2 = \varkappa$.

Как обычно, метод Ритца приводит нас к уравнению (подробности вычислений опускаем):

$$\begin{vmatrix}
\frac{8}{\gamma}(3+2\gamma^2+3\gamma^4) - \frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right) - \frac{\gamma}{15}\varkappa & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^3\right) - \frac{1}{15\gamma}\varkappa \\
0 & 2\gamma+\frac{5}{\gamma}+\gamma^3-\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{\gamma}+5\gamma+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3}+\frac{1}{\gamma}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 \\
\gamma\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right) - \frac{\gamma}{5}\varkappa & 0 & 0 & \frac{27}{10\gamma}+\frac{3\gamma^2}{10}+\frac{11\gamma}{15}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & 0 & \frac{1}{10\gamma}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\gamma^3}{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\gamma^2}+5\gamma^2+6-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)\varkappa & 0 \\
\frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right) - \frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{10\gamma^3}+\frac{1}{3\gamma}+\frac{\gamma}{10} & 0 & \frac{27\gamma}{10}+\frac{3}{10\gamma^3}+\frac{11}{15\gamma}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Второй, третий и пятый столбцы определителя (5) содержат только по одному элементу, отличному от нуля. Вследствие этого

[1]) Оси координат, как обычно, направляем по осям симметрии пластинки.

уравнение (5) распадается на следующие четыре:

$$2\gamma+\frac{5}{\gamma}+\gamma^3-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}\right)\varkappa=0, \tag{6}$$

$$\frac{2}{\gamma}+5\gamma+\frac{1}{\gamma^3}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3}+\frac{1}{\gamma}\right)\varkappa=0, \tag{7}$$

$$5\left(\frac{1}{\gamma^2}+\gamma^2\right)+6-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)\varkappa=0, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{\gamma}(3+2\gamma^2+3\gamma^4)- & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right)- & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right)- \\ -\frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & -\frac{\gamma}{15}\varkappa & -\frac{1}{15\gamma}\varkappa \\ \gamma\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)- & \frac{27}{10\gamma}+\frac{3\gamma^2}{10}+\frac{11\gamma}{15}- & \frac{1}{10\gamma}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\gamma^3}{10} \\ -\frac{\gamma}{5}\varkappa & -\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & \\ \frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)- & \frac{1}{10\gamma^3}+\frac{1}{3\gamma}+\frac{\gamma}{10} & \frac{27\gamma}{10}+\frac{3}{10\gamma^3}+\frac{11}{15\gamma}- \\ -\frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & & -\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Если $\varkappa_1$ — наименьший из корней уравнений (6)—(9), то приближенная величина критической нагрузки равна $\frac{D\varkappa_1}{a^2h}$.

Возьмем для примера $\gamma=2$. Корни уравнений (6), (7) и (8) равны соответственно 78; 102,69; 121,8. Уравнение (9) при $\gamma=2$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} 472-10\varkappa & \frac{59}{3}-\frac{4}{15}\varkappa & \frac{59}{3}-\frac{1}{15}\varkappa \\ 59-\frac{4}{5}\varkappa & \frac{313}{30}-\frac{7}{60}\varkappa & \frac{91}{30} \\ \frac{59}{4}-\frac{1}{20}\varkappa & \frac{91}{120} & \frac{1393}{120}-\frac{13}{240}\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

или, если раскрыть определитель и разделить на коэффициент при $\varkappa^3$,

$$\varkappa^3-343{,}5707\varkappa^2+32028{,}293\varkappa-806705{,}6=0.$$

Это уравнение решаем по способу Ньютона, беря за первое приближение корень диагонального минора первого порядка $\varkappa'=47{,}2$. Второе приближение, даваемое методом Ньютона, будет $\varkappa''=42{,}06696$, третье приближение $\varkappa'''=42{,}06681$. Таким образом, с достаточно высокой степенью точности можно считать $\varkappa_1=42{,}067$.

ГЛАВА XI

ПРОЦЕСС БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА

§ 92. Описание процесса

Процесс Бубнова — Галеркина[1]) можно рассматривать как обобщение процесса Ритца для уравнений вида $Au = f$, где оператор A необязательно положительный. Прежде чем описывать процесс в общем виде, изложим его для более простого частного случая, который, впрочем, охватывает подавляющее большинство приложений.

Пусть неизвестная функция $u(P)$ удовлетворяет в некоторой области Ω неоднородному уравнению

$$Lu - f(P) = 0 \tag{1}$$

и, может быть, некоторым *однородным* краевым условиям. Выберем бесконечную последовательность координатных функций $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots$, которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и которые удовлетворяют *всем* краевым условиям нашей задачи. Как обычно, через S обозначена граница области Ω. Будем считать, что как уравнение (1), так и соответствующие ему краевые условия линейные, тогда функция

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P), \tag{2}$$

где a_k — произвольно выбранные постоянные, удовлетворяет всем краевым условиям задачи. *По методу Бубнова — Галеркина коэффициенты a_k определяются из требования, чтобы левая часть уравнения* (1) *стала, после подстановки в нее $u_n(P)$ вместо $u(P)$, ортогональной к функциям $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$.*

Метод Бубнова — Галеркина тем самым приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (L\varphi_k, \varphi_m) = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

[1]) Часто пишут «метод Бубнова — Галеркина».

Если ставится задача о собственных числах уравнения

$$Lu - \lambda u = 0,$$

то процесс Бубнова — Галеркина точно так же приводит к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \{(L\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k, \varphi_m)\} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

приравняв нулю определитель этой системы, мы получим уравнение, определяющее приближенные значения собственных чисел:

$$\begin{vmatrix} (L\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (\varphi_1, \varphi_1) & (L\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (L\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (\varphi_1, \varphi_n) \\ (L\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (\varphi_2, \varphi_1) & (L\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (L\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (L\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (\varphi_n, \varphi_1) & (L\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (\varphi_n, \varphi_2) & \ldots & (L\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Нетрудно дать и более общую формулировку процесса Бубнова — Галеркина. Пусть линейный оператор A определен на множестве, плотном в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве, и пусть требуется решить уравнение

$$Au - f = 0. \tag{4}$$

Выбираем последовательность элементов $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D_A$, которые будем называть координатными.

Приближенное решение уравнения (4) мы строим в виде линейной комбинации координатных элементов с постоянными коэффициентами (2). Коэффициенты a_k определяем из условия, чтобы после замены u через u_n левая часть уравнения (4) была ортогональна к элементам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Это приводит к следующей системе линейных уравнений с неизвестными a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Точно так же задача о собственных значениях для уравнения

$$Au - \lambda Bu = 0 \tag{6}$$

приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) & \ldots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Если $B=E$, то уравнения (6) и (7) принимают более простой вид

$$Au-\lambda u=0 \tag{8}$$

и

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2)-\lambda(\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_1, \varphi_n)-\lambda(\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1)-\lambda(\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2)-\lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2)-\lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_n, \varphi_1)-\lambda(\varphi_n, \varphi_n) & (A\varphi_n, \varphi_2)-\lambda(\varphi_n, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n)-\lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Уравнения Бубнова — Галеркина (5), (7) и (9) по форме совпадают с соответствующими уравнениями процесса Ритца, если только координатные функции выбраны из области определения оператора. Отсюда следует, что для положительного оператора процесс Бубнова — Галеркина не отличается от процесса Ритца.

В конце главы мы кратко рассмотрим некоторые обобщения метода Бубнова — Галеркина, а также его применение к нестационарным задачам.

§ 93. Доказательство сходимости для интегрального уравнения типа Фредгольма [1])

Пусть дано интегральное уравнение

$$u(P)-\int_\Omega K(P, Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q-f(P)=0, \tag{1}$$

относительно которого мы предполагаем следующее:

1)
$$\int_\Omega\int_\Omega K^2(P, Q)\,d\Omega_P\,d\Omega_Q<\infty, \qquad \int_\Omega f^2(P)\,d\Omega<\infty; \tag{2}$$

2) уравнение (1) имеет в классе $L_2(\Omega)$ одно и только одно решение.

К уравнению (1) применим процесс Бубнова — Галеркина. За координатную систему можно взять любую систему, которая: 1) полна в $L_2(\Omega)$, 2) элементы ее, взятые в любом конечном числе, линейно независимы. Координатную систему подвергнем процессу ортогонализации; от этого приближенное решение не изменится. Теперь координатные функции, которые мы обозначим через $\varphi_k(P)$, удовлетворяют равенствам

$$(\varphi_j, \varphi_k)=\int_\Omega \varphi_j(P)\,\varphi_k(P)\,d\Omega=\begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \tag{3}$$

---

[1]) Первое такое доказательство было дано Ю. В. Репманом [1].

Положим теперь

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P);$$

подставим это вместо $u(P)$ в левую часть уравнения (1) и потребуем, чтобы результат подстановки был ортогонален к функциям $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$. Учитывая равенства (3), мы получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$\gamma_{mk} = \int_\Omega \int_\Omega K(P, Q)\, \varphi_m(P)\, \varphi_k(Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q.$$

Числа γ_{mk} суть коэффициенты Фурье функции $K(P, Q)$ при разложении ее в двойной ряд Фурье по ортогональным функциям φ_k: точно так же (f, φ_m) суть коэффициенты Фурье функции $f(P)$. Введем обозначения:

$$K_n(P, Q) = \sum_{k, m=1}^{n} \gamma_{mk} \varphi_m(P)\, \varphi_n(Q),$$

$$f_n(P) = \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(P).$$

Система ортогональных и нормированных функций $\varphi_m(P)$ полная, поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega [K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f_n(P) - f(P)]^2\, d\Omega = \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$v_n(P) - \int_\Omega K_n(P, Q)\, v_n(Q)\, d\Omega_Q = f_n(P). \tag{6}$$

Дальнейшее опирается на теорему теории интегральных уравнений, в силу которой из соотношений (5) следует, что при достаточно большом n уравнение (6) разрешимо и имеет единственное решение, коль скоро этим свойством обладает уравнение (1), и что в норме $L_2(\Omega)$

$$v_n(P) \xrightarrow[n\to\infty]{} v(P). \tag{7}$$

Чтобы не прерывать изложения, мы приведем доказательство этой теоремы в конце параграфа.

Интегральное уравнение (6) нетрудно решить. Заменяя в (6) $K_n(P, Q)$ и $f_n(P)$ их значениями, найдем, что

$$v_n(P) = \sum_{k=1}^{n} A_m \varphi_m(P), \tag{8}$$

где

$$A_m = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} \int_{\Omega} v_n(Q)\, \varphi_k(Q)\, d\Omega + (f, \varphi_m).$$

Подставив сюда значение $v_n(Q)$ из (8) и пользуясь равенствами (3), найдем, что A_k удовлетворяют системе

$$A_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} A_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

тождественной с системой (4). При n достаточно большом система (9), так же как и уравнение (6), имеет решение, и притом единственное, поэтому $A_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $v_n(P) \equiv u_n(P)$. Теперь из (7) следует, что в норме $L_2(\Omega)$ $u_n(P) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(P)$.

Таким образом, приближенное решение интегрального уравнения типа Фредгольма, построенное по методу Бубнова — Галеркина, стремится к точному решению этого уравнения в среднем, если только система координатных функций полна в смысле сходимости в среднем.

Приведем теперь доказательство упомянутой выше теоремы.

По условию уравнение (1) разрешимо и имеет единственное решение. Это значит, что единица не есть характеристическое значение для ядра $K(P, Q)$, и существует резольвента $\Gamma(P, Q)$, с помощью которой решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(P) = f(P) + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q)\, f(Q)\, d\Omega_Q; \tag{10}$$

сама резольвента удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty. \tag{11}$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$v_n(P) - \int_{\Omega} K(P, Q)\, v_n(Q)\, d\Omega_Q =$$
$$= f_n(P) - \int_{\Omega} [K(P, Q) - K_n(P, Q)]\, v_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{12}$$

Рассматривая временно правую часть последнего уравнения как известную, можно воспользоваться формулой (10); это приводит к интегральному уравнению, эквивалентному уравнению (6):

$$v_n(P) = \int_\Omega \tilde{K}_n(P, Q)\, v_n(Q)\, d\Omega_Q + f_n(P) + \int_\Omega \Gamma(P, Q) f_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{13}$$

Здесь для краткости положено

$$\tilde{K}_n(P, Q) = K_n(P, Q) - K(P, Q) + \int_\Omega \Gamma(P, R)\,[K_n(R, Q) - K(R, Q)]\, d\Omega_R. \tag{14}$$

Оценим интеграл от ядра $\tilde{K}_n$. Прежде всего по неравенству Коши — Буняковского

$$\tilde{K}_n^2(P, Q) \leqslant 2\,[K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2 + \\ + 2\int_\Omega \Gamma^2(P, R)\, d\Omega_R \int_\Omega [K_n(R, Q) - K(R, Q)]^2\, d\Omega_R.$$

Интегрируя, имеем

$$\int_\Omega\int_\Omega \tilde{K}_n^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q \leqslant 2\int_\Omega\int_\Omega [K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q + \\ + 2\int_\Omega\int_\Omega \Gamma^2(P, R)\, d\Omega_P\, d\Omega_R \int_\Omega\int_\Omega [K_n(P, R) - K(P, R)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_R. \tag{15}$$

В неравенстве (15) правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$; найдется, следовательно, такое N, что $\int_\Omega\int_\Omega \tilde{K}_n^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < 1$ при $n \geqslant N$. Но в таком случае при $n \geqslant N$ уравнение (13), а с ним и уравнение (6), имеет решение, и притом единственное; это решение можно построить по методу последовательных приближений[1]).

Оценим разность $u(P) - v_n(P)$. Вычитая почленно уравнения (1) и (2), получим

$$u(P) - v_n(P) - \int_\Omega K(P, Q)\,[u(Q) - v_n(Q)]\, d\Omega_Q = \\ = f(P) - f_n(P) + \int_\Omega [K(P, Q) - K_n(P, Q)]\, v_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{16}$$

Обозначая для краткости правую часть последнего уравнения через $F_n(P)$, имеем по формуле (10)

$$u(P) - v_n(P) = F_n(P) + \int_\Omega \Gamma(P, Q)\, F_n(Q)\, d\Omega_Q.$$

[1]) См., например, книгу автора [7], § 2.

Отсюда

$$\| u - v_n \| \leqslant \| F_n \| + \left\| \int_\Omega \Gamma(P, Q) F_n(Q)\, d\Omega_Q \right\|.$$

По неравенству Буняковского

$$\left(\int_\Omega \Gamma(P, Q) F_n(Q)\, d\Omega_Q \right)^2 \leqslant \int_\Omega \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_Q \cdot \| F_n \|^2.$$

Интегрируя это по Ω, найдем

$$\left\| \int_\Omega \Gamma(P, Q) F_n(Q)\, d\Omega_Q \right\|^2 \leqslant \| F_n \|^2 \int_\Omega \int_\Omega \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q$$

и, следовательно,

$$\| u - v_n \| \leqslant C \| F_n \|, \qquad C = 1 + \left\{ \int_\Omega \int_\Omega \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q \right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Обозначим для краткости

$$\varepsilon_n^2 = \int_\Omega \int_\Omega [K(P, Q) - K_n(P, Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q;$$

очевидно, $\varepsilon_n \to 0$, если $n \to \infty$. Будем считать n столь большим, что во всяком случае $\varepsilon_n < \frac{1}{2C}$. Применяя неравенство Буняковского и неравенство треугольника для норм, легко найдем $\| F_n \| \leqslant \| f - f_n \| + \varepsilon_n \| v_n \|$, или

$$\| F_n \| \leqslant \| f - f_n \| + \varepsilon_n \| u - (u - v_n) \| \leqslant \| f - f_n \| + \varepsilon_n \| u \| + \varepsilon_n \| u - v_n \|.$$

Подставив это в (17), получим $(1 - C\varepsilon_n) \| u - v_n \| \leqslant C \| f - f_n \| + C\varepsilon_n \| u \|$. Усилим неравенство, заменив слева $1 - C\varepsilon_n$ на $1/2$. Это даст

$$\| u - v_n \| < 2C \| f - f_n \| + 2C\varepsilon_n \| u \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

§ 94. Достаточный признак сходимости процесса Бубнова—Галеркина[1])

Будем изучать сходимость процесса Бубнова — Галеркина в предположении, что оператор A в уравнении $Au = f$ имеет вид

$$A = A_0 + K, \tag{1}$$

где A_0 — положительно определенный в некотором гильбертовом пространстве H оператор. Относительно оператора K пока предположим, что его область определения шире области определения оператора A_0, так что во всяком случае выражение Ku имеет смысл каждый раз, когда имеет смысл выражение $A_0 u$. Дальнейшие ограничения на оператор K будут наложены ниже.

[1]) См. статьи автора [4, 8].

Введем в рассмотрение энергетическое пространство H_{A_0} оператора A_0; чтобы упростить обозначения, будем писать H_0 вместо H_{A_0}.

Выберем координатную систему $\{\varphi_k\}$, подчинив ее следующим условиям: 1) $\varphi_k \in D_{A_0}$; 2) элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы при любом n; 3) координатная система полна в H_0.

Система (5) § 92 в нашем случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \{(A_0\varphi_k, \varphi_m) + (K\varphi_k, \varphi_m)\} a_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Ортонормируем $\{\varphi_n\}$ в пространстве H_0. Как не раз уже было отмечено, это не изменит приближенного решения u_n. Система (2) при этом несколько упростится. Прежде всего

$$(A_0\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Далее, $(K\varphi_k, \varphi_m) = (A_0GK\varphi_k, \varphi_m) = [T\varphi_k, \varphi_m]$, где $G = A_0^{-1}$ и $T = GK$. Наконец, $(f, \varphi_m) = (A_0Gf, \varphi_m) = [f', \varphi_m]$, $f' = Gf$. Введя для краткости обозначения

$$\gamma_{mk} = [T\varphi_k, \varphi_m], \qquad b_m = [f', \varphi_m], \tag{3}$$

приведем систему (3) к виду

$$a_m + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = b_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Сделаем теперь важное для дальнейшего допущение: примем, что *оператор $T = GK$ вполне непрерывен в пространстве H_0*. Будучи вполне непрерывным, этот оператор ограничен (§ 6) в пространстве H_0 и по теореме 3 § 5 может быть расширен на все это пространство. Будем считать далее, что такое расширение уже выполнено.

Уравнение $Au = f$ представим в виде

$$A_0u + Ku = f. \tag{5}$$

Воздействуя на обе части уравнения (5) оператором $A_0^{-1} = G$, получим нóвое уравнение

$$u + Tu = f'; \qquad f' = Gf. \tag{6}$$

Очевидно, всякое решение уравнения (5) удовлетворяет также уравнению (6); обратное может оказаться неверным: может случиться, что существует элемент пространства H_0, удовлетворяющий уравнению (6), но не принадлежащий D_{A_0}, и тогда этот элемент нельзя подставлять в (5). Мы условимся, однако, такого рода решения уравнения (6) рассматривать как решения (обобщенные) уравнения (5); с такой оговоркой уравнения (5) и (6) эквивалентны.

Теорема 1. *Приближенные решения уравнения* (5), *построенные по методу Бубнова — Галеркина, сходятся по энергии оператора* A_0[1]) *к точному решению этого уравнения, если выполнены следующие условия*:

I. *Уравнение* (5) *имеет не более одного решения* в H_0;

II. *Оператор* $T = A_0^{-1}K$ *вполне непрерывен в* H_0.

Доказательство. Как было указано выше, уравнение (5) эквивалентно уравнению (6), содержащему вполне непрерывный оператор T. Для этого уравнения имеет место альтернатива Фредгольма, и из условия I вытекает, что уравнение (6) имеет решение, очевидно, принадлежащее подпространству H_0. По предположению система координатных элементов $\{\varphi_k\}$ полна в H_0; мы вправе считать ее и ортонормированной в H_0. Разложим Tu и f' в ортогональные ряды

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} [Tu, \varphi_k] \varphi_k, \qquad f' = \sum_{k=1}^{\infty} [f', \varphi_k] \varphi_k$$

и положим

$$T_n u = \sum_{k=1}^{n} [Tu, \varphi_k] \varphi_k, \qquad f'_n = \sum_{k=1}^{n} [f', \varphi_k] \varphi_k.$$

Очевидно, что $|f' - f'_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Докажем еще, что $|T - T_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Оператор T вполне непрерывен в H_0 и потому может быть разложен в сумму $T = T' + T''$, причем T' — вырожденный оператор, а $|T''| < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольно малое положительное число. Имеем

$$(T - T_n) u = Tu - T_n u = \sum_{k=n+1}^{\infty} [Tu, \varphi_k] \varphi_k =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} [T'u, \varphi_k] \varphi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} [T''u, \varphi_k] \varphi_k. \tag{7}$$

Легко оценивается вторая сумма:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [T''u, \varphi_k] \varphi_k \right|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |[T''u, \varphi_k]|^2,$$

что по неравенству Бесселя не превосходит величины

$$|T''u|^2 \leqslant |T''|^2 \cdot |u|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} |u|^2.$$

---

[1]) Иначе говоря, в смысле сходимости в пространстве H_0.

Отсюда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}[T''u, \varphi_k]\varphi_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}|u|.$$

Оценим первую сумму в (7). Вырожденный оператор $T'u$ имеет вид

$$T'u = \sum_{j=1}^{s}[u, \psi_j]\omega_j,$$

где s — конечное число, а ψ_j и ω_j — элементы пространства H_0. Имеем теперь

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}[T'u, \varphi_k]\varphi_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s}[u, \psi_j][\omega_j, \varphi_k]\varphi_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{s}[u, \psi_j]\sum_{k=n+1}^{\infty}[\omega_j, \varphi_k]\varphi_k\right| \leqslant \sum_{j=1}^{s}|[u, \psi_j]|\cdot\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}[\omega_j, \varphi_k]\varphi_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant |u|\sum_{j=1}^{s}|\psi_j|\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}|[\omega_j, \varphi_k]|^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|[\omega_j, \varphi_k]|^2$ сходится. Отсюда нетрудно заключить, что коэффициент при $|u|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при n достаточно большом, скажем, при $n \geqslant N$. Отсюда и из соотношений (7) и (8) вытекает, что при $n \geqslant N$ будет $|(T - T_n)u| < \varepsilon|u|$ или $|T - T_n| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Оператор T_n — вырожденный. Действительно, легко видеть, что функционал $[Tu, \varphi_k]$ ограничен в H_0; по теореме 1 § 5 существует такой элемент $\tilde{\varphi}_k \in H_0$, что $[Tu, \varphi_k] = [u, \tilde{\varphi}_k]$ и

$$T_n u = \sum_{k=1}^{n}[u, \tilde{\varphi}_k]\varphi_k. \tag{8}$$

Будучи вырожденным, оператор T_n вполне непрерывен. Теперь из теоремы 1 § 6 вытекает, что уравнение

$$u_n + T_n u_n = f'_n \tag{9}$$

разрешимо при достаточно большом n, и притом единственным образом, и что

$$u_n \xrightarrow{\text{э}} u, \tag{10}$$

где u — решение уравнения (6).

Заменяя в (9) T_n и f_n их значениями, получим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \{[f', \varphi_k] + [Tu_n, \varphi_k]\} \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k, \tag{11}$$

где $A_k = [f', \varphi_k] + [Tu_n, \varphi_k]$. Заменяя здесь u_n по формуле (11), получим систему уравнений для коэффициентов A_k:

$$A_m + \sum_{k=1}^{n} [T\varphi_k, \varphi_m] A_k = [f', \varphi_m], \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

тождественную с системой (4). Отсюда сразу вытекает, что u_n есть приближенное решение по Бубнову — Галеркину уравнения (5); утверждение теоремы 1 следует теперь из соотношения (10).

Теорема 2. *Если оператор K ограничен в H, а $G = A_0^{-1}$ вполне непрерывен в H, то оператор $T = GK$ вполне непрерывен в H_0.*

Доказательство. Оператор T вполне непрерывен в H как произведение операторов ограниченного и вполне непрерывного. Пусть теперь дано множество M, ограниченное в H_0: $|u| < C$, если $u \in M$. По неравенству (5) § 9 $\|u\| < \frac{C}{\gamma}$; так как T вполне непрерывен в H, то из M можно выбрать последовательность $\{u_n\}$ так, чтобы $\| Tu_m - Tu_n \| \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0$.

Оценим $|Tu_n - Tu_m|$. По формуле (4) § 9

$$|Tu_n - Tu_m|^2 = (A_0 T(u_n - u_m),\ T(u_n - u_m)) = (K(u_n - u_m),\ T(u_n - u_m)).$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$|Tu_n - Tu_m|^2 \leqslant \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|T(u_n - u_m)\| = \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|Tu_n - Tu_m\|.$$

Далее,

$$\|K(u_n - u_m)\| \leqslant \|K\| \cdot \|u_n - u_m\| \leqslant \|K\| (\|u_n\| + \|u_m\|) < 2C\|K\|/\gamma$$

и окончательно

$$|Tu_n - Tu_m|^2 < \frac{2C\|K\|}{\gamma} \|Tu_n - Tu_m\| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0.$$

По теореме 2 § 6 оператор T вполне непрерывен в H_0.

Полагая $K = E$ (E — тождественный оператор), мы получаем

Следствие. *Если оператор $G = A_0^{-1}$ вполне непрерывен в H, то он вполне непрерывен и в H_0.*

Из теоремы 2 вытекает значительно более узкий, но более простой признак сходимости процесса Бубнова — Галеркина, который мы сформулируем так:

Теорема 3. *Процесс Бубнова — Галеркина сходится, если:*

I. *Уравнение* $Au = f$ *имеет не более одного решения.*

II. *Оператор* $G = A_0^{-1}$ *вполне непрерывен, а оператор* K *ограничен в* H.

Замечание. Из теоремы 1 непосредственно вытекает применимость процесса Бубнова — Галеркина к уравнениям вида $u - \lambda Tu = f$, где T — вполне непрерывный оператор в H, в частности, к интегральным уравнениям типа Фредгольма.

Пусть выполнено условие II теоремы 1. Рассмотрим однородное уравнение

$$A_0 u - \lambda K u, \tag{12}$$

эквивалентное уравнению

$$u - \lambda T u = 0. \tag{13}$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, можно убедиться, что применение процесса Бубнова — Галеркина к задаче об отыскании собственных чисел уравнения (12) равносильно нахождению собственных чисел уравнения

$$u_n - \lambda T_n u_n = 0. \tag{14}$$

По теореме 3 § 6 собственные числа уравнения (13) суть пределы соответствующих собственных чисел уравнения (14). Отсюда вытекает

Теорема 4. *Если оператор* $T = A_0^{-1}K$ *вполне непрерывен в* H_0, *то процесс Бубнова — Галеркина в задаче об отыскании собственных значений сходится.*

Замечание 1. Пусть A положительно определенный симметричный оператор с дискретным спектром. В применении к задачам о собственных числах уравнения

$$Au - \lambda u = 0 \tag{15}$$

процессы Бубнова — Галеркина и Ритца совпадают. Но тогда по теореме 4, если $\lambda_k^{(n)}$ — приближенное значение по Ритцу к k-му собственному числу λ_k оператора A, то $\lambda_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k$. Напомним, что в § 42 это предельное равенство было доказано для первого собственного числа λ_1.

Замечание 2. В работах Г. И. Петрова [1] и М. В. Келдыша [1] высказывается утверждение, что собственные элементы уравнения (12) могут быть построены как пределы «приближенных» собственных элементов, получаемых процессом Бубнова —

Галеркина. Это утверждение, как показал Н. И. Польский [1], неверно: может случиться, что к некоторым собственным элементам уравнения (12) невозможно приблизиться, применяя процесс Бубнова — Галеркина.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример Н. И. Польского [1]. Рассмотрим пространство $L_2(0, 1)$; положим в (12) $A_0 = E$ и

$$Ku = \int_0^1 K(x, t)\, u(t)\, dt = \int_0^1 \{a_1(x)\, b_1(t) + a_2(x)\, b_2(t)\}\, u(t)\, dt,$$

где $(0 < q < 1)$;

$$a_1(x) = \sin \pi x, \qquad b_1(x) = 2 \sin \pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} + \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x,$$

$$a_2(x) = 2 \sin 2\pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} - \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x, \qquad b_2(x) = \sin 2\pi x.$$

Условия теоремы 4, очевидно, выполнены; при этом $H_0 \equiv H$.

Используя легко проверяемые соотношения $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = 1$, $(a_1, b_2) = (a_2, b_1) = 0$, мы найдем, что уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, u(t)\, dt = 0 \tag{*}$$

имеет единственное собственное число $\lambda = 1$, которому отвечают две линейно независимые собственные функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$. Будем теперь решать уравнение (*) процессом Бубнова — Галеркина, полагая $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x)$, $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$. Пусть $\lambda^{(n)}$ — соответствующее приближенное собственное число, получаемое по этому процессу. Нетрудно убедиться, что u_n и $\lambda^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$u_n(x) - \lambda^{(n)} \int_0^1 \left[a_1^{(n)}(x)\, b_1(t) + a_2^{(n)}(x)\, b_2(t)\right] u_n(t)\, dt = 0, \tag{**}$$

где

$$a_1^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, (a_1, \varphi_k) = a_1(x),$$

$$a_2^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, (a_2, \varphi_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} a_2(x).$$

и что уравнение (**) имеет единственное собственное число $\lambda^{(n)} = 1$, которому соответствует только одна собственная функция $a_1^{(n)}(x) = a_1(x)$. Таким образом, в нашем примере процесс Бубнова — Галеркина не дает возможности приблизиться к собственной функции $a_2(x)$ уравнения (*).

Как показал Н. И. Польский, все собственные элементы уравнения (12) могут быть получены как пределы «приближенных» собственных элементов, если резольвента оператора $A_0^{-1}K$ имеет только простые полюсы. Это, в частности, имеет место, если $K = E$, т. е. в условиях процесса Ритца.

§ 95. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим уравнение

$$(-1)^m u^{(2m)} - \lambda K u = f(x), \tag{1}$$

где Ku — линейные дифференциальный оператор порядка $2m—1$, и будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее на концах отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(m-1)}(a) = 0, \\ u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(m-1)}(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем считать, что поставленная нами задача имеет единственное решение. Докажем, что процесс Бубнова — Галеркина в этой задаче сходится.

Положим $A_0 u = (-1)^m u^{(2m)}$. Как было доказано в § 21, оператор A_0 положительно определенный на множестве функций, достаточное число раз дифференцируемых и удовлетворяющих краевым условиям (2). Как известно, оператор $G = A_0^{-1}$ имеет вид $Gf = \int\limits_a^n G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$, где $G(x, \xi)$ — функция Грина для уравнения $u^{(2m)} = 0$, удовлетворяющая краевым условиям (2); эта функция непрерывна вместе со своими производными до порядка $2m - 2$ включительно в квадрате $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$, а ее производные порядка $2m - 1$ разрывны только на диагонали $x = \xi$, где они терпят конечный скачок. Введем в рассмотрение пространство H_0, в котором на этот раз $[u, v] = \int\limits_a^b (-1)^m u^{(2m)} v\, dx$, или, если проинтегрировать по частям m раз и воспользоваться условиями (2),

$[u, v] = \int_a^b u^{(m)} v^{(m)}\,dx$ и, следовательно,

$$|u|^2 = \int_a^b [u^{(m)}]^2\,dx. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь оператор Ku. Допустим, что коэффициенты оператора K дифференцируемы достаточное число раз. Положим $GKu = v(x)$. Очевидно, v удовлетворяет краевым условиям (2). Далее, интегрируя по частям с тем, чтобы исключить производные от u порядка выше m, и пользуясь опять условиями (2), мы приведем выражение v к виду

$$v(x) = \int_a^b G_1(x, \xi)\,u^{(m)}(\xi)\,d\xi + \\ + \int_a^b G(x, \xi)\,[p_{m-1}(\xi)\,u^{(m-1)}(\xi) + \ldots + p_0(\xi)\,u(\xi)]\,d\xi, \tag{4}$$

где ядро $G_1(x, \xi)$ имеет m ограниченных производных.

Дифференцируя (4) m раз по x, имеем

$$v^{(m)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^m G_1(x, \xi)}{\partial x^m}\,u^{(m)}(\xi)\,d\xi + \\ + \int_a^b \frac{\partial^m G(x, \xi)}{\partial x^m}\,[p_{m-1}(\xi)\,u^{(m-1)}(\xi) + \ldots + p_0(\xi)\,u(\xi)]\,d\xi. \tag{5}$$

В интеграле (5) выразим $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ через $u^{(m)}$ по известной формуле

$$u^{(j)}(\xi) = \frac{1}{(m-j-1)!} \int_a^\xi (\xi - \eta)^{m-j-1}\,u^{(m)}(\eta)\,d\eta, \tag{6}$$

верной, если u удовлетворяет первым m из условий (2). Подставив (6) в выражение (5) и меняя порядок интегрирования, мы найдем, что $v^{(m)}(x)$ имеет вид

$$v^{(m)}(x) = \int_a^b N(x, \xi)\,u^{(m)}(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где $N(x, \xi)$ — непрерывная функция. Интеграл (7) есть оператор Фредгольма над функцией $u^{(m)}$; как было указано в § 6, этот интеграл есть вполне непрерывный оператор над $u^{(m)}$, рассматриваемой как элемент пространства $L_2(a, b)$. Пусть теперь дано ограниченное в H_0 множество функций $u(x)$. Это значит, что $|u|^2 = \int_a^b |u^{(m)}(x)|^2 dx < C$, $C = \mathrm{const}$. По теореме 2 § 6 можно выбрать из этого множества такую последовательность $\{u_n(x)\}$, что $\|v_n^{(m)} - v_k^{(m)}\|^2 = \int_a^b |v_n^{(m)}(x) - v_k^{(m)}(x)|^2 dx \xrightarrow[n, k\to\infty]{} 0$. Но тогда из (3) следует, что $|v_n - v_k| \xrightarrow[n, k\to\infty]{} 0$. Отсюда ясно, что оператор в правой части (4) — вполне непрерывный в H_0.

На основании теоремы 1 § 94 процесс Бубнова — Галеркина дает последовательность, сходящуюся в H_0. Если обозначить через u_n приближенные решения, получаемые процессом Бубнова — Галеркина, а через u — точное решение задачи, то при $k < m$ будет $u_n^{(k)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{(k)}(x)$ равномерно, а $u_n^{(m)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{(m)}(x)$ в среднем.

Теорема 4 § 94 позволяет утверждать сходимость процесса Бубнова — Галеркина и в задаче о собственных числах однородной задачи (1).

Указанные в этом параграфе результаты были получены значительно более сложным способом М. В. Келдышем [1].

Замечание. Как показал И. К. Даугавет [1, 3], сходимость может быть улучшена, если за координатные функции взять полиномы; при этом можно дать оценку скорости сходимости. Изложим коротко результаты И. К. Даугавета. Пусть коэффициенты дифференциального оператора K достаточно гладкие, и пусть известно, что точное решение задачи $u(x)$ имеет r непрерывных производных, причем r-я производная удовлетворяет условию Липшица с показателем α. Тогда справедливы оценки

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}[u_0(x) - u_n(x)]\right| \leqslant \begin{cases} Cn^{-r+m-3/2-\alpha}, & 0 \leqslant s \leqslant m-3, \\ Cn^{-r+s-\alpha+1/2}\ln n, & s = m-2,\ m-1,\ m, \\ Cn^{-r+4s-3m-\alpha+1/2}, & s > m. \end{cases} \tag{8}$$

Если $s \geqslant 2m$, то лучшую оценку можно получить, распространив на этот случай прием автора ([27], [29]; см. также § 56 настоящей книги); это приведет нас к неравенству, вытекающему из неравенства (5) § 56, в котором в данном случае $\sigma_n = O(n^{-\alpha})$:

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}[u_0(x) - u_n(x)]\right| \leqslant Cn^{-r-2m+3s-\alpha}, \qquad s \geqslant 2m. \tag{9}$$

Оценка (9) выгоднее, так как разность показателей в формулах (8) и (9) равна $s - m + 1/2 \geqslant m + 1/2 > 0$.

§ 96. Задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

В некоторой конечной области Ω будем искать решение уравнения с переменными, вообще говоря, коэффициентами

$$-\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f(P), \tag{1}$$

обращающийся в нуль на границе S области Ω.

Будем считать, что уравнение (1) эллиптическое невырождающееся; это означает существование такой постоянной μ_0, что каковы бы ни были точка $P\in\bar{\Omega}$ и вещественные числа $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_m$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}t_it_k \geqslant \mu_0 \sum_{i=1}^{m} t_i^2. \tag{2}$$

Примем еще, что коэффициенты A_{ik} непрерывны вместе со своими первыми производными в Ω, а коэффициенты B_j и C непрерывны[1]) в $\bar{\Omega}$; относительно функции $f(P)$ допустим, что она принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. Наконец, допустим, что поставленная нами задача имеет единственное решение. Положим

$$A_0u=-\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \qquad Ku=\sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu. \tag{3}$$

В § 27 было установлено, что оператор A_0 положительно определенный на множестве функций, которые обращаются в нуль на S; для таких функций имеет место неравенство

$$(A_0u,\,u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2, \qquad \gamma>0. \tag{4}$$

Введем теперь пространство H_0, полагая

$$[u,\,v]=(A_0u,\,v)=\int_\Omega \sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,d\Omega.$$

В § 47 было выяснено, что оператор A_0 имеет дискретный спектр. По теореме 5 § 40 оператор $G=A_0^{-1}$ вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega)$ функций, квадратично суммируемых в Ω. Докажем, что оператор $T=GK$ вполне непрерывен в H_0. Пусть дано

[1]) Ограничения, наложенные на коэффициенты, можно ослабить.

множество функций, ограниченное в H_0, так что $|u| \leqslant N = \mathrm{const}$. Это значит, что

$$\int_\Omega \sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega < N^2. \tag{5}$$

Из неравенств (2) и (5) вытекает:

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega < \frac{N^2}{\mu_0}.$$

Кроме того, в силу неравенства (4), $\|u\| < N/\gamma$. Теперь

$$\|Ku\| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right\}^{1/2} \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right\} + \|u\| \max |C(P)| \leqslant C_1 N, \tag{6}$$

$$C_1 = \mathrm{const}.$$

Так как G вполне непрерывен в $H = L_2(\Omega)$, а множество функций Ku, как мы видим, в H ограничено, то можно выбрать такую последовательность $\{u_n\}$, что существует предел (в пространстве H) $\lim\limits_{n\to\infty} GKu_n = \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Отсюда следует, что

$$\lim_{k,\,n\to\infty} \|Tu_n - Tu_k\| = 0. \tag{7}$$

Оценим $|Tu_n - Tu_k|$. Имеем, по формуле (1) § 9

$$|Tu_n - Tu_k|^2 = (A_0 T(u_n - u_k),\ T(u_n - u_k)) = (Ku_n - Ku_k,\ Tu_n - Tu_k),$$

и, далее, по неравенству Коши — Буняковского

$$|Tu_n - Tu_k|^2 \leqslant \|Ku_n - Ku_k\| \cdot \|Tu_n - Tu_k\| \leqslant 2C_1 N \|Tu_n - Tu_k\|.$$

В силу неравенства (7)

$$\lim_{k,\,n\to\infty} |Tu_n - Tu_k| = 0. \tag{8}$$

Таким образом, если множество функций ограничено в H_0, то из него можно выделить такую последовательность $\{u_n\}$, что выполняется равенство (8), означающее, что существует предел (в пространстве H_0) $\lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$.

Тем самым доказано, что оператор T вполне непрерывный в H_0, и, следовательно, процесс Бубнова — Галеркина сходится в нашей задаче. Точно так же доказывается его сходимость и в задаче о собственных значениях.

Задачу настоящего параграфа исследовал М. В. Келдыш [1], который пришел к тому же результату значительно более сложным путем и при дополнительном предположении, что граница области достаточно гладкая.

Замечание. В § 94 мы установили, что в общем случае $|u_n - u| \to 0$, где u_n — приближенное решение, получаемое процессом Бубнова — Галеркина. В настоящем случае это означает, что первые производные от u_n сходятся в среднем к соответствующим производным от u.

Для иллюстрации метода рассмотрим уравнение

$$\Delta u + x\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + xy - 2x - 2y.$$

Оно имеет решение

$$u = xy(x-1)(y-1),$$

которое обращается в нуль на контуре квадрата

$$x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=1. \tag{9}$$

Будем строить приближение к этому решению процессом Бубнова — Галеркина, взяв за координатные функции $\sin k\pi x \sin l\pi y$, k, $l = 1, 2, 3, \ldots$, которые также обращаются в нуль на сторонах квадрата (9). Ограничиваясь членами, для которых $k + l \leqslant 4$, положим

$$u_6 = a_1 \sin \pi x \sin \pi y + a_2 \sin 2\pi x \sin \pi y + a_3 \sin \pi x \sin 2\pi y + \\ + a_4 \sin 3\pi x \sin \pi y + a_5 \sin 2\pi x \sin 2\pi y + a_6 \sin \pi x \sin 3\pi y.$$

Уравнения Бубнова — Галеркина в данном случае таковы:

$$\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{8}\right)a_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{3}{16}a_4 = \frac{4}{\pi^6}(9\pi^2 - 8),$$

$$-\frac{1}{3}a_1 + \left(\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{1}{8}\right)a_2 + \frac{3}{5}a_4 = -\frac{2}{\pi^4},$$

$$\left(\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{1}{8}\right)a_3 + \frac{1}{3}a_5 = 0,$$

$$\frac{3}{16}a_1 - \frac{3}{5}a_2 + \left(\frac{5}{2}\pi^2 + \frac{1}{8}\right)a_4 = \frac{4}{27\pi^6}(49\pi^2 - 8),$$

$$-\frac{1}{3}a_3 + \left(2\pi^2 + \frac{1}{8}\right)a_5 = 0, \qquad \left(\frac{5}{2}\pi^2 + \frac{1}{8}\right)a_6 = \frac{4}{27\pi^6}(41\pi^2 - 8).$$

Решение этой системы:

$$a_1 = 0{,}066553, \quad a_2 = 0{,}000014499, \quad a_3 = 0,$$
$$a_4 = 0{,}0024528, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = 0{,}0024648.$$

Нам известно точное решение задачи, поэтому нетрудно оценить погрешность приближенного решения; энергетическая норма этой погрешности

$$|u-u_6|=\left\{\int_0^1\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_6}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_6}{\partial y}\right)^2\right]\right\}^{1/2} dx\,dy=0{,}00729.$$

Энергетическая норма точного решения равна

$$\left\{\int_0^1\int_0^1[(2x-1)^2(y-y^2)^2+(x-x^2)^2(2y-1)^2]^2\,dx\,dy\right\}^{1/2}=$$

$$=1/\sqrt{45}=0{,}149.$$

Относительная погрешность (в энергетической норме) приближенного решения u_0 составляет $0{,}00729/0{,}149\approx 4{,}9\%$.

§ 97. Вырождающиеся эллиптические уравнения

В известных условиях, о которых будет сказано несколько ниже, процесс Бубнова — Галеркина можно обосновать для вырождающихся эллиптических уравнений (см. статьи автора [15, 16]).

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{j,\,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{k=1}^{m}B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu=f(P). \tag{1}$$

Допустим, что коэффициенты A_{jk} удовлетворяют условиям, сформулированным в § 28; в частности, будем считать, что $A_{jm}=0$, $j\neq m$. Примем также, что выполнены условия относительно расположения области Ω и что поверхность вырождения S' лежит в плоскости $x_m=0$. Наконец, примем, что краевые условия таковы, как это описано в § 28. Относительно коэффициентов B_i и C предположим, что они ограничены и измеримы.

Допустим, что сходится интеграл (4) § 48. По теореме 1 § 48, оператор L, определенный дифференциальным выражением

$$L=-\sum_{j,\,k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_m}\left(A_{mm}\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$$

и краевыми условиями § 28, положительно определенный в $L_2(\Omega)$ и имеет дискретный спектр. По теореме 2 § 40 оператор L^{-1} вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$.

Обозначим

$$Ku=\sum_{k=1}^{m} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu. \tag{2}$$

Далее, через a обозначим определитель

$$a=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{vmatrix} \tag{3}$$

и через A^{jk} алгебраическое дополнение элемента A_{jk} в этом определителе.

Теорема 1. *Если величина*

$$\frac{1}{a} \sum_{j,\, k=1}^{m} A^{jk} B_j B_k \tag{4}$$

ограничена в Ω, *то оператор* $T=L^{-1}K$ *вполне непрерывен в энергетическом пространстве* H_L *оператора* L.

Пусть множество M ограничено в H_L:

$$|u|_L^2=\int_{\Omega} \sum_{j,\, k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega \leqslant R=\text{const}. \tag{5}$$

Оценим норму

$$\| Ku \| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{m} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| + C' \| u \|, \qquad C'=\sup C(P). \tag{6}$$

Имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j,\, k=1}^{m} B_j B_k \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega.$$

Составим уравнение $\operatorname{Det}(B_j B_k - \lambda A_{jk})=0$ или, более подробно,

$$\begin{vmatrix} B_1^2-\lambda A_{11} & B_1 B_2-\lambda A_{12} & \ldots & B_1 B_m-\lambda A_{1m} \\ B_1 B_2-\lambda A_{12} & B_2^2-\lambda A_{22} & \ldots & B_2 B_m-\lambda A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_1 B_m-\lambda A_{1m} & B_2 B_m-\lambda A_{2m} & \ldots & B_m^2-\lambda A_{mm} \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Если точка $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ лежит внутри Ω, то матрица коэффициентов A_{jk} невырожденная, и число отличных от нуля корней уравнения (7) равно рангу матрицы произведений $B_j B_k$.

Но квадратичная форма $\sum_{j,k=1}^{m} B_j B_k t_j t_k = \left(\sum_{k=1}^{m} B_k t_k\right)^2$ сводится не более чем к одному отличному от нуля квадрату, поэтому ранг упомянутой матрицы не превосходит единицы, и по крайней мере $m-1$ корней уравнения (7) равны нулю. Единственный необязательно равный нулю корень этого уравнения можно найти как сумму всех корней, и этот корень с точностью до знака равен величине (4). По условию теоремы она ограничена; пусть

$$\left| \frac{1}{a} \sum_{j,k=1}^{m} B_j B_k A^{jk} \right| \leqslant R_1^2 = \text{const}.$$

Тогда, как известно, из теории квадратичных форм, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j,k=1}^{m} B_j B_k t_j t_k \right| \leqslant R_1^2 \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} t_j t_k.$$

Отсюда

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|^2 \leqslant R_1^2 \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega = R_1^2 |u|_L^2. \tag{8}$$

Далее, оператор L положительно определенный, и потому существует такая постоянная R_2, что $\|u\| \leqslant R_2 |u|$. Вместе с неравенствами (6) и (8) это дает

$$\|Ku\| \leqslant (R_1 + C'R_2)|u|. \tag{9}$$

Если $u \in M$, то $|u| \leqslant R$ и

$$\|Ku\| \leqslant (R_1 + C'R_2) R = R_3, \qquad u \in M. \tag{10}$$

Таким образом, множество KM (т. е. то множество, в которое оператор K преобразует M) ограничено в $L_2(\Omega)$. Вполне непрерывный оператор L^{-1} переводит множество KM в компактное. Иначе говоря, множество $L^{-1}KM = TM$ компактно, и можно выделить из множества M такую последовательность $\{u_n\}$, что $\lim_{n,k\to\infty} \|Tu_n - Tu_k\| = 0$. Оценим величину $|Tu_n - Tu_k|_L$. Имеем

$$|Tu_n - Tu_k|_L^2 = (LT(u_n - u_k),\ T(u_n - u_k)) =$$
$$= (K(u_n - u_k),\ T(u_n - u_k)) \leqslant 2R_3 \|T(u_n - u_k)\| \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что ограниченное в H_L множество M преобразуется оператором T в множество, компактное в том же пространстве. Теорема доказана.

Из теоремы 1 настоящего параграфа и теоремы 1 § 94 вытекает

Теорема 2. *Если величина* (4) *ограничена, то процесс Бубнова — Галеркина для оператора* (1) *сходится.*

Для примера рассмотрим случай, когда $A_{jk}=0$, $j\neq k$, так что оператор L имеет вид

$$Lu=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_{kk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

В этом случае величина (4) принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{m}B_k^2/A_{kk}$, и процесс Бубнова — Галеркина сходится, если $B_k=O\left(\sqrt{A_{kk}}\right)$, $k=1, 2, \ldots, m$, при $x_m\to 0$.

§ 98. Задача Неймана и смешанная задача для эллиптического уравнения второго порядка

Задачей Неймана называется задача об интегрировании уравнения (1) § 96 при краевом условии

$$\sum_{i,\,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\,x_i)=0, \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль к S. Допустим, что задача имеет единственное решение[1]). На этот раз мы положим

$$\left.\begin{aligned}A_0u&=-\sum_{i,\,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+u,\\ Ku&=\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+[C(P)-1]\,u.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Оператор A_0u положительно определенный на линеале функций, первые и вторые производные которых непрерывны в $\bar{\Omega}$ и которые удовлетворяют условию (1). Действительно, интегрируя по частям и используя условие (1), мы получим

$$(A_0u,\,u)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,\,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}u^2\,d\Omega\geqslant\int\limits_{\Omega}u^2\,d\Omega=\|u\|^2.$$

Дальнейшие рассуждения протекают так же, как и в § 96, и приводят к тем же заключениям о сходимости процесса Бубно-

---

[1]) Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $C(P)\not\equiv 0$.

ва — Галеркина. Именно, можно утверждать, что приближенные решения задачи Неймана для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

построенные процессом Бубнова — Галеркина, в среднем сходятся, вместе со своими первыми производными, к точному решению этой задачи и его соответствующим производным. Далее, собственные числа задачи Неймана для этого же уравнения могут быть получены как пределы «приближенных собственных чисел», получаемых процессом Бубнова — Галеркина.

Обратимся к смешанной краевой задаче для уравнения эллиптического типа второго порядка. Рассмотрим уравнение (1) § 96 при краевом условии

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu x_i) + \sigma(P) u = 0, \tag{3}$$

где $\sigma(P)$ — ограниченная функция переменной точки границы S, которую мы на этот раз будем считать достаточно гладкой.

Обозначим через $A_1 u$ оператор $-\sum\limits_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$. Будем его рассматривать на линеале функций, вторые производные которых непрерывны в $\bar{\Omega}$ и которые удовлетворяют краевому условию (3). Докажем, что на этом линеале оператор $A_1 u$ ограничен снизу, т. е. что существует постоянная k, для которой имеет место неравенство[1])

$$(A_1 u, u) \geqslant k \| u \|^2. \tag{4}$$

Имеем

$$(A_1 u, u) = -\int_\Omega u \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega - \int_S u \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu x_i)\, dS,$$

или, если воспользоваться условием (3),

$$(A_1 u; u) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega + \int_S \sigma u^2\, dS. \tag{5}$$

[1]) Постоянная k может быть и отрицательной.

Пусть μ_0 имеет то же значение, что и в § 96. Далее, пусть σ_0 обозначает верхнюю грань функции $|\sigma(P)|$.

Из (5) следует

$$(A_1 u, u) \geqslant \mu_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \sigma_0 \int\limits_S u^2\, dS.$$

Построим функции $a_i(P)$, непрерывные в $\overline{\Omega}$ и совпадающие на S с $\cos(\nu, x_i)$ [1]). Допуская, что поверхность S — достаточно гладкая, можно добиться того, чтобы первые производные от $a_i(P)$ также были непрерывны в $\overline{\Omega}$. Теперь имеем

$$\int\limits_S u^2\, dS = \int\limits_S u^2 \sum_{i=1}^m \cos^2(\nu, x_i)\, dS = \int\limits_S \sum_{i=1}^m u^2 a_i \cos(\nu x_i)\, dS =$$
$$= \int\limits_\Omega u^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} d\Omega + 2 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega. \qquad (6)$$

Первый интеграл в (6) меньше, чем

$$C' \int\limits_\Omega u^2\, d\Omega, \qquad C' = \max \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right|.$$

Второй оценим следующим образом. Обозначим через C_1 наибольший из максимумов функций a_i и через ε — произвольное положительное число. Тогда [2])

$$\left| 2 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \right| < 2C_1 \int\limits_\Omega \frac{|u|}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\Omega \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int\limits_\Omega u^2\, d\Omega + C_1 m \varepsilon^2 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

Отсюда

$$(A_1 u, u) \geqslant (\mu_0 - C_1 m \sigma_0 \varepsilon^2) \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega + k \int\limits_\Omega u^2\, d\Omega,$$

---

[1]) Ср. § 32.

[2]) Мы пользуемся здесь неравенством

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k\right)^2 \leqslant m \sum_{k=1}^m a_k^2.$$

где $k = -\sigma_0\ (C' + C_1/\varepsilon^2)$. Выберем ε так, чтобы $\mu_0 - C_1\sigma_0\varepsilon^2 > 0$. Отбросив справа в последнем неравенстве неотрицательное первое слагаемое, мы придем к неравенству (4).

Оператор A_0 определим следующим образом:

$$A_0u = A_1u, \qquad k > 0,$$
$$A_0u = A_1u + (1-k)\,u, \qquad k \leqslant 0,$$

где k — постоянная, входящая в неравенство (4).

При таком выборе оператор A_0u, очевидно, положительно определенный. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в § 96, и приводят к тем же результатам.

В частном случае, когда $m = 1$, мы приходим к задаче интегрирования обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка при краевых условиях вида

$$u'(a) + \alpha u(a) = 0, \qquad u'(b) + \beta u(b) = 0$$

(α, β — некоторые постоянные).

§ 99. Видоизменение процесса Бубнова—Галеркина для случая естественных краевых условий

В § 94 было сформулировано требование, ограничивающее выбор координатных элементов и состоящее в том, что эти элементы должны принадлежать области определения оператора. Можно указать простое достаточное условие, позволяющее ослабить указанное требование. Именно, *пусть оператор K определен на всех элементах пространства H_0. Тогда в качестве системы координатных элементов можно взять любую полную в H_0 систему элементов этого пространства*; систему уравнений Бубнова — Галеркина следует записывать тогда не в виде (3) § 94, что было бы лишено смысла, а в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \{[\varphi_k, \varphi_m] + (K\varphi_k, \varphi_m)\}\, a_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

В справедливости высказанного здесь предложения нетрудно убедиться, проследив за ходом доказательства теоремы 1 § 94.

В качестве примера возьмем рассмотренную в § 98 краевую задачу для уравнения

$$-\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(P) \tag{2}$$

при краевом условии смешанного типа

$$\left[\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_i)+\sigma u\right]_S=0; \qquad (3)$$

сохраним данное в § 98 определение операторов A_0 и K.

Пусть, для определенности, в неравенстве (4) § 98 постоянная $k>0$, тогда

$$A_0u=-\sum_{i,\,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right),\qquad Ku=\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu.$$

Для оператора A_0 краевое условие (3) естественное; пространство H_0 состоит из всех функций, имеющих в Ω квадратично суммируемые первые (обобщенные) производные, и оператор K очевидным образом определен на всех функциях из H_0. Поэтому, применяя процесс Бубнова — Галеркина к нашей задаче, можно не подчинять координатные функции никаким краевым условиям.

Легко видеть, что в данном случае

$$[u,\ v]=\int_{\Omega}\sum_{i,\,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,d\Omega+\int_S\sigma uv\,dS,$$

поэтому уравнения (1) видоизмененного процесса Бубнова — Галеркина имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\Omega}\sum_{i,\,j=1}^{m}\left(A_{ij}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\varphi_m+C\varphi_k\varphi_m\right)d\Omega+\right.$$
$$\left.+\int_S\sigma\varphi_k\varphi_m\,dS\right\}a_k=\int_{\Omega}f\varphi_m\,d\Omega,\qquad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

§ 100. Проекционный метод[1])

Во введении было упомянуто, что из общей теории приближенных методов, разработанной в 1948 г. Л. В. Канторовичем, вытекает некоторая общая схема (выше, в § 53 мы назвали ее проекционной) построения и исследования приближенных процессов. И. К. Даугавет в 1959 г. сформулировал эту схему в предположении, что как оператор данной задачи, так и обратный ему оператор ограничены; это предположение позволяет

[1]) Для понимания настоящего параграфа необходимо знакомство с элементами теории банаховых пространств. См., например, Б. З. Вулих [1].

получить ряд тонких оценок скорости сходимости приближенных методов. Несколькими годами ранее Н. И. Польский [4] сформулировал близкую схему, не связывая ее с теорией Л. В. Канторовича и не предполагая обязательно ограниченности упомянутых выше операторов. Приближенные методы, которые укладываются в его схему, Н. И. Польский назвал *проекционными.*

Схема построения проекционных методов по Н. И. Польскому такова.

Пусть линейный оператор A действует из банахова пространства B_1 в банахово же пространство B_2. Примем, что область определения D_A оператора A плотна в B_1, а область его значений R_A плотна в B_2. Заметим, что эти требования не являются ограничениями по существу: достаточно за B_1 и B_2 принять подпространства, получаемые замыканием множеств D_A и R_A.

Зададим в B_1 последовательность элементов $\{\varphi_n\}$, обладающую следующими свойствами: 1) $\varphi_n \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$; 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы; 3) система $\{A\varphi_n\}$ полна в B_2[1]). Обозначим через L_n подпространство B_2, натянутое на элементы $A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$.

Зададим еще одну систему элементов $\{\psi_n\}$, подчиненную следующим условиям: 1) $\psi_n \in B_2$, $n = 1, 2, \ldots$; 2) при любом n элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ линейно независимы; 3) система $\{\psi_n\}$ полна в B_2. Подпространство B_2, натянутое на элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, обозначим через M_n, и пусть Q_n — какой-либо проекционный оператор, проектирующий B_2 на M_n.

Проекционный метод решения уравнения

$$Au = f, \qquad u \in B_1, \qquad f \in B_2, \tag{1}$$

состоит в следующем: приближенное решение ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{2}$$

и определяем коэффициенты a_k так, чтобы удовлетворить уравнению

$$Q_n A u_n = Q_n f. \tag{3}$$

Проекционная схема Канторовича — Даугавета (§ 53) формально получается из схемы Н. И. Польского, если положить $\psi_k = A\varphi_k$, но между ними есть та существенная разница, что схема Канторовича — Даугавета не требует A-полноты системы $\{\varphi_n\}$.

---

[1]) Последнее условие мы формулируем, говоря, что система $\{\varphi_n\}$ A-полна. См. ниже, гл. XII, § 102.

Н. И. Польский вводит следующее условие:

Существует такая постоянная C, что для всех n, начиная с некоторого, и для любого $v \in L_n$ справедливо неравенство

$$\| v \| \leqslant C \| Q_n v \|. \tag{4}$$

Условие Н. И. Польского тривиально выполняется, если $\psi_n = A\varphi_n$, тогда $L_n = M_n$ и $Q_n v = v$, если $v \in L_n$; при этом $C = 1$.

Сформулируем основную теорему о сходимости проекционного метода; ее доказательство см. Н. И. Польский [3, 4].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия настоящего параграфа, наложенные на элементы φ_n и ψ_n, включая условие Н. И. Польского* (4). *Пусть, далее, уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение. Тогда, начиная с некоторого n, приближенные уравнения* (3) *разрешимы и*

$$\| Au_n - f \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{5}$$

Как очевидное следствие из этой теоремы вытекает, что если оператор A^{-1} ограничен, то

$$\| u_0 - u_n \|_{B_1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{6}$$

где u_0 — точное решение уравнения (1).

Если условие (4) нарушено, то можно указать такой элемент $f \in B_2$, что $u_n \not\to u_0$.

Проекционному методу можно дать несколько иную формулировку. Проекционный оператор Q_n, проектирующий B_2 на M_n, можно задать так. В M_n выберем произвольный базис $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и построим биортогональный к нему базис функционалов Ω_j: $\Omega_j(\omega_k) = \delta_{jk}$. Функционалы Ω_j определены только на подпространстве M_n. Расширим их на пространство B_2; расширенные функционалы обозначим через Φ_j и определим их соотношением $\Phi_j u = \Omega_j Q_n u$. Теперь, как легко видеть,

$$Q_n u = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Phi_k u.$$

Проекционный метод решения уравнения (1) можно теперь сформулировать так: задаем в B_2 последовательность функционалов Φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, обладающую тем свойством полноты, что из равенств $\Phi_n u = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, вытекает, что $u = 0$. Приближенное решение ищем в виде (2) и определяем коэффициенты a_k из системы уравнений

$$\Phi_k A u_n = \Phi_k f, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Можно выбрать не последовательность функционалов Φ_n, а последовательность наборов таких функционалов:

$$\Phi_{n1},\ \Phi_{n2},\ \ldots,\ \Phi_{nk_n}. \tag{8}$$

Последовательность наборов (8) будем считать полной в следующем смысле: для любого $\Phi \in \overset{*}{B_2}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N и такие постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_N$, что

$$\left\| \Phi - \sum_{k=1}^{k_N} \Phi_{Nk} \right\| < \varepsilon.$$

Если отказаться от требования, чтобы система $\{\varphi_n\}$ была A-полной, то к проекционным методам можно отнести и *метод коллокации*, предложенный в 1934 г. Л. В. Канторовичем [1]. Метод коллокации можно изложить следующим образом. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$(Lu)(P) = f(P), \tag{9}$$

у которого коэффициенты и свободный член непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$, и пусть в области Ω нужно определить решение этого уравнения, удовлетворяющее на S некоторым условиям, которые для простоты будем считать однородными. Выберем последовательность координатных функций $\{\varphi_n(P)\}$, подчиненных следующим условиям: 1) если s — порядок уравнения (8), то $\varphi_n(P)$ имеют в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные до порядка s включительно; 2) функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ при любом n линейно независимы; 3) каждая из функций $\varphi_n(P)$ удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P).$$

Чтобы определить коэффициенты a_k, поступим следующим образом: зададим в Ω n точек $P_{1n}, P_{2n}, \ldots, P_{nn}$, называемых *узлами коллокации*, и потребуем, чтобы уравнение (8) после замены в нем u на u_n удовлетворялось в указанных точках. Для коэффициентов a_k получается система

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (L\varphi_k)(P_{jn}) = f(P_{jn}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

В данном случае за B_1 можно взять подпространство пространства $C^{(s)}(\overline{\Omega})$, составленное из функций, удовлетворяющих краевым условиям, а за B_2 — пространство C. В качестве Φ_{jn} здесь фигурирует функционал, сопоставляющий функции, непрерывной в $\bar{\Omega}$, ее значение в узле коллокации P_{jn}.

Э. Б. Карпиловская [2] установила достаточные условия сходимости метода коллокации для одномерного интегро-дифференциального уравнения, предполагая, что координатные функции — полиномы, а в качестве узлов коллокации выбраны корни n-го ортогонального полинома с весом, ограниченным снизу. В более ранней статье [1] того же автора аналогичный результат получен для одномерного дифференциального уравнения, при простейших краевых условиях. Г. М. Вайникко [6] получил результат статьи [2] Э. Б. Карпиловской для дифференциального уравнения; он использовал более простые средства и смягчил ограничения на коэффициенты уравнения. Кроме того, Г. М. Вайникко исследовал также устойчивость (см. § 82) метода коллокации для тех же одномерных дифференциальных уравнений. Отметим еще статью Г. М. Вайникко [7], в которой метод коллокации исследован для нелинейных задач.

В статье [3] Э. Б. Карпиловская доказала сходимость процесса коллокации для двумерного уравнения

$$\Delta u + \lambda\rho(x_1, x_2)\,u = f(x_1, x_2) \tag{11}$$

при краевом условии

$$u|_S = 0. \tag{12}$$

Область Ω — квадрат $0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant \pi$; координатные функции имеют вид $\varphi_{jk}(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin kx_2$; узлы коллокации имеют координаты

$$x_1 = \frac{2j-1}{2m+1}\pi, \qquad x_2 = \frac{2k-1}{2n+1}\pi, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m; \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где m и n — достаточно большие числа.

§ 101. Процесс Бубнова — Галеркина в нестационарных задачах

Мы ограничимся здесь схемой построения приближенного решения; ее обоснование для довольно широкого класса задач содержится в статье М. И. Вишика [7].

Рассмотрим гильбертово пространство H и действующие в нем линейные операторы $A_0, A_1, \ldots, A_s$, области определения которых $D_{A_0}, D_{A_1}, \ldots, D_{A_s}$ имеют непустое пересечение D_0. Рассмотрим «абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение»

$$\sum_{l=0}^{s} \frac{d^l A_l u}{dt^l} = f(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\left. \frac{d^l u}{dt^l} \right|_{t=0} = \omega_l, \qquad l = 0, 1, \ldots, s-1; \tag{2}$$

здесь ω_l — заданные элементы пространства H. Чтобы решить задачу Коши (1) — (2), зададим координатную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, входящую в D_0; приближенное решение будем искать в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, \varphi_k \tag{3}$$

и коэффициенты $a_k(t)$ подчиним системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\sum_{l=0}^{s} \frac{d^l A_l u_n}{dt^l}, \varphi_j \right) = (f(t), \varphi_j); \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Система (4) легко приводится к виду

$$\sum_{l=0}^{s} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jkl} \frac{d^l a_k(t)}{dt^l} = f_j(t), \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\alpha_{jkl} = (A_l \varphi_k, \varphi_j), \qquad f_j(t) = (f(t), \varphi_j). \tag{6}$$

Систему (5) нужно дополнить начальными условиями, которые можно получить, например, так. Положим

$$\omega_{ln} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} \varphi_k \tag{7}$$

и подберем коэффициенты α_{kl} так, чтобы

$$\| \omega_{ln} - \omega_l \| = \min; \tag{8}$$

очевидно, при этом ω_{ln} будет проекцией элемента ω_l на подпространство, натянутое на элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Условие (8) дает следующую систему для неизвестных α_{kl}:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} (\varphi_k, \varphi_j) = (\omega_l, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Найдем из системы (9) эти неизвестные и потребуем, чтобы

$$\left.\frac{d^l a_k(t)}{dt^l}\right|_{t=0} = \alpha_{kl}, \qquad l = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-1; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{10}$$

Решив систему дифференциальных уравнений (5) при начальных условиях (10) и подставив это в формулу (3), получим приближенное решение задачи (1)—(2).

Можно допустить и тот случай, когда операторы A_l зависят от времени, если, например, их области определения не зависят от t. В этом случае коэффициенты α_{jkl} будут не постоянными, а функциями от t.

В качестве примера рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{11}$$

в конечной области Ω переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и при $t \geqslant 0$. На границе S области поставим краевое условие $u|_S = 0$, а в начальный момент времени — условие

$$u|_{t=0} = \varphi(P). \tag{12}$$

Здесь $s = 1$, единственный оператор A — это оператор задачи Дирихле, в качестве H можно взять $L_2(\Omega)$. Координатную систему $\{\varphi_n(P)\}$ выберем так, чтобы функции $\varphi_n(P)$ были при любом n линейно независимы, непрерывны вместе с первыми и вторыми производными в $\bar{\Omega}$ и чтобы $\varphi_n(P)|_S = 0$ (это требование можно ослабить: достаточно, чтобы $\varphi_n(P)$ принадлежали энергетическому пространству задачи Дирихле); мы не станем формулировать требование полноты, хотя оно и необходимо. Если искать приближенное решение задачи (11)—(12) в виде

$$u_n(P,\ t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,\varphi_k(P), \tag{13}$$

то для коэффициентов $a_k(t)$ мы получим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_{kj} \frac{da_k(t)}{dt} + \beta_{kj} a_k(t) \right\} = 0, \tag{14}$$

где

$$\alpha_{kj} = (\varphi_k,\ \varphi_j) = \int_\Omega \varphi_k(P)\,\varphi_j(P)\,d\Omega;$$

$$\beta_{kj} = [\varphi_k,\ \varphi_j] = \int_\Omega \operatorname{grad}\varphi_k(P)\operatorname{grad}\varphi_j(P)\,d\Omega.$$

ГЛАВА XII
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ[1])

§ 102. Основы метода

Пусть A — линейный оператор, определенный на некотором линеале D_A, плотном в данном гильбертовом пространстве H, которое на протяжении этой главы мы будем считать, вообще говоря, комплексным. Пусть требуется решить уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где f — данный элемент из H. Для этого может быть использован *метод наименьших квадратов*, который состоит в следующем: выбираем последовательность линейно независимых координатных элементов $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D_A$; приближенное решение уравнения (1) строим в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{2}$$

где a_k — постоянные, которые определяются из требования, чтобы величина

$$\| Au_n - f \|^2 \tag{3}$$

приняла минимальное значение.

Условимся о терминологии: последовательность $\{\varphi_n\}$ будем называть A-полной, если выполнено следующее условие: каковы бы ни были $u \in D_A$ и число $\varepsilon > 0$, можно найти натуральное число n и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\| Au - Au_n \| < \varepsilon, \quad \text{где} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k.$$

Заметим, что A-полнота вытекает из обычной, если оператор A — ограниченный. Действительно, если система $\{\varphi_n\}$ — полная,

[1]) В настоящей главе изложены преимущественно результаты автора (см. [3], [6]).

а оператор A — ограниченный, то можно подобрать n, α_1, α_2, ..., α_n так, чтобы $\|u - u_n\| < \varepsilon/\|A\|$, и тогда

$$\| Au - Au_n \| = \| A(u - u_n) \| \leqslant \| A \| \cdot \| u - u_n \| < \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что обычная полнота вытекает из A-полноты, если оператор A^{-1} существует, определен на всем пространстве и ограничен.

Условие (3) приводит к системе линейных уравнений для неизвестных a_1, a_2, ..., a_n. Установим вид этой системы. Имеем

$$\| Au_n - f \|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k - f,\ \sum_{m=1}^{n} a_m A\varphi_m - f \right) =$$
$$= \sum_{k,\,m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\varphi_k, A\varphi_m) - \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, f) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k (f, A\varphi_k) + (f, f). \quad (4)$$

Положим $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Значения α_k и β_k, дающие минимум величины $\|Au_n - f\|^2$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \| Au_n - f \|^2}{\partial \alpha_m} = 0, \quad \frac{\partial \| Au_n - f \|^2}{\partial \beta_m} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же, уравнениям

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \| Au_n - f \|^2}{\partial \alpha_m} + i \frac{\partial \| Au_n - f \|^2}{\partial \beta_m} \right\} = \frac{\partial \| Au_n - f \|^2}{\partial \bar{a}_m} = 0.$$

Продифференцировав (4) по $\bar{a}_m$, мы получим интересующую нас систему

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, A\varphi_m) = (f, A\varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Отметим, что система (5) симметрична. Определитель системы (5) есть определитель Грама элементов $A\varphi_1$, $A\varphi_2$, ..., $A\varphi_n$.

Допустим, что уравнение (1) может иметь не более одного решения, иначе говоря, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение $u = 0$. Тогда $A\varphi_1$, $A\varphi_2$, ..., $A\varphi_n$ линейно независимы[1]; по теореме § 2 определитель системы (5)

---

[1]) В противном случае можно было бы найти постоянные c_1, c_2, ..., c_n, не равные одновременно нулю, так что

$$c_1 A\varphi_1 + c_2 A\varphi_2 + \ldots + c_n A\varphi_n = A \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right) = 0.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = 0,$$

вопреки первоначальному предположению о линейной независимости координатных элементов.

отличен от нуля, и указанная система разрешима единственным образом. Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Если однородное уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение, то приближенные решения по методу наименьших квадратов могут быть построены при любом n и они определяются единственным образом.*

Достаточные условия сходимости приближенных решений, получаемых по методу наименьших квадратов, даются следующей леммой.

Лемма 2. *Метод наименьших квадратов дает последовательность приближенных решений, сходящуюся к точному решению, если выполнены следующие условия:*

A. *Последовательность координатных элементов A-полная.*

B. *Уравнение* (1) *разрешимо.*

C. *Существует такая постоянная K, что для любого $u \in D_A$*

$$\|u\| \leqslant K \|Au\|. \tag{6}$$

Условие C обеспечивает существование (и ограниченность) обратного оператора A^{-1}. По лемме 1 последовательность приближенных решений $\{u_n\}$ может быть построена. Обозначим через u решение уравнения (1), которое существует в силу условия B. Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ A-полная (условие A), то можно по данному $\varepsilon > 0$ найти такие $n_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$, что

$$\left\| Au - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k A\varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Последнее неравенство остается справедливым, если α_k заменить через a_k, определяемые из (5), так как тогда левая часть этого неравенства достигает минимума. С увеличением n_0 этот минимум не возрастает, так что при $n \geqslant n_0$ $\|Au - Au_n\| < \varepsilon/K$. Теперь из условия C следует, что $\|u - u_n\| < \varepsilon$, если $n \geqslant n_0$, т. е. что $u_n \to u$.

Допустим, что условия леммы 2 выполнены, и пусть u_n — приближенное решение уравнения $Au = f$. Неравенство (6) дает простую оценку погрешности $u_n - u$, именно, $\|u_n - u\| \leqslant K\|A(u_n - u)\| = K\|Au_n - Au\|$, или

$$\|u_n - u\| \leqslant K\|Au_n - f\|. \tag{7}$$

Если u_n найдено по методу наименьших квадратов, то $Au_n \to f$ при $n \to \infty$, и формула (7) на самом деле позволяет судить о погрешности приближенного решения.

Замечание. В приложениях иногда оказывается более удобной несколько иная формулировка метода наименьших квадратов, формулировка, по существу, эквивалентная вышеприведенной.

Пусть ставится задача об отыскании одной или нескольких функций от некоторого числа независимых переменных, и пусть эти функции, которые мы обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_m$, удовлетворяют двум системам линейных уравнений: однородной

$$K_j(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{*}$$

и неоднородной

$$G_j(u_1, u_2, \ldots, u_m) = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Будем трактовать совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ как элементы u и b некоторого гильбертова пространства H. Тогда совокупности операторов K_j и G_j можно трактовать как операторы K и G в том же пространстве.

Как выбирать пространство H, остается в значительной мере произвольным; этим произволом можно воспользоваться для того, чтобы упростить вычисления или получить более точные результаты.

Метод наименьших квадратов состоит в следующем:

а) строим последовательность $\{\varphi^{(k)}\} = \{(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots, \varphi_m^{(k)})\}$, $k = 1, 2, \ldots$, функций, удовлетворяющих однородной системе (*);

б) приближенное решение задачи строим в виде $u^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi^{(k)}$, или, подробнее, $u_j^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_j^{(k)}$, где a_k — постоянные. Эти постоянные определяем из условия

$$\| Gu^{(n)} - b \|^2 = \min,$$

или, что то же, из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}a_k = (b, G\varphi^{(j)}), \quad \text{где} \quad A_{jk} = (G\varphi^{(k)}, G\varphi^{(j)}).$$

Между методом наименьших квадратов и энергетическим методом существует тесная связь, которую мы постараемся установить.

К обеим частям уравнения (1) применим оператор A^*, сопряженный [1]) с A. Докажем, что *полученное таким способом уравнение*

$$A^*Au = A^*f \tag{8}$$

---

[1]) Оператор A^*, сопряженный с данным оператором A, определяется тождеством

$$(Au, v) = (u, A^*v).$$

Подробнее о свойствах сопряженного оператора см., например, В. И. Смирнов [4].

эквивалентно уравнению (1), *если последнее разрешимо*[1]). Пусть u' удовлетворяет уравнению (1). Оно, очевидно, удовлетворяет и уравнению (8), так что

$$A^*Au' = A^*f. \tag{9}$$

Пусть тому же уравнению (8) удовлетворяет еще некоторый элемент u'', так что справедливо тождество

$$A^*Au'' = A^*f. \tag{10}$$

Докажем, что u'' удовлетворяет уравнению (1). Этим будет установлена справедливость нашего утверждения. Обозначим $u'' - u' = v$. Вычитая (9) из (10), мы найдем, что $A^*Av = 0$. Умножим это скалярно на v:

$$0 = (A^*Av, v) = (Av, Av) = \| Av \|^2.$$

Отсюда $Av = A(u'' - u') = 0$, или $Au'' = Au' = f$, что и требовалось доказать.

Нетрудно далее видеть, что *при выполнении условия С леммы 2 оператор A^*Au положительно определенный*. Действительно,

$$(A^*Au, u) = (Au, Au) = \| Au \|^2 \geqslant \| u \|^2/K^2.$$

Примем, что область определения оператора A^*A плотна в H. Допустим, что выполнены условия В и С леммы 2. Так как уравнение (1) разрешимо (условие В), то по доказанному оно эквивалентно уравнению (8), и можно искать решение этого последнего. В силу условия С оператор A^*A положительно определенный; по теореме о функционале энергии (теорема 1 § 13) отыскание решения уравнения (8) эквивалентно задаче о минимуме функционала $\Phi(u) = (A^*Au, u) - (u, A^*f) - (A^*f, u)$. Но, очевидно,

$$\Phi(u) = (Au, Au) - (Au, f) - (f, Au) = (Au - f, Au - f) - (f, f),$$

или

$$\Phi(u) = \|Au - f\|^2 - \|f\|^2.$$

Функционалы $\Phi(u)$ и $\|Au - f\|^2$ различаются на постоянное слагаемое, и задачи о минимуме обоих функционалов эквивалентны. Таким образом, *в условиях леммы 2 применение метода наименьших квадратов к уравнению* (1) *равносильно применению энергетического метода к уравнению* (8).

Обратно, пусть оператор A положительно определенный: $(Au, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2$, $\gamma > 0$. К уравнению (1) можно применять энергетический метод, заменяя решение этого уравнения отысканием минимума функционала $F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u)$. Построим положительно определенный оператор B, квадрат которого равен A, $B^2 = A$. Оператор B^{-1} существует и ограничен. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$Bu = B^{-1}f, \tag{11}$$

получаемому из (1) применением к обеим его частям оператора B^{-1}. Далее,

$$\begin{aligned} F(u) &= (B^2u, u) - (u, BB^{-1}f) - (BB^{-1}f, u) = \\ &= (Bu, Bu) - (Bu, B^{-1}f) - (B^{-1}f, Bu) = \\ &= (Bu - B^{-1}f, Bu - B^{-1}f) - (B^{-1}f, B^{-1}f), \end{aligned}$$

или

$$F(u) = \| Bu - B^{-1}f \|^2 - \| B^{-1}f \|^2.$$

---

[1]) См. статью автора [2]. Мы предполагаем, конечно, что f принадлежит области определения оператора A^*.

Функционалы $F(u)$ и $\|Bu-B^{-1}f\|^2$ различаются только на постоянное слагаемое, и задачи о минимуме этих функционалов эквивалентны. Отсюда следует, что *в случае положительно определенного оператора A применение энергетического метода к уравнению* (1) *равносильно применению метода наименьших квадратов к уравнению* (11).

Если оператор A — положительно определенный, и u_n — приближенное решение уравнения $Au=f$, построенное по методу Ритца, то $\|Bu_n-B^1f\|\to 0$, где $B^2=A$. Это немедленно вытекает из только что доказанной эквивалентности двух методов и из хода доказательства леммы 2. Напомним, что соотношение $\|Au_n-f\|\to 0$, вообще говоря, не имеет места, если u_n построено по методу Ритца.

Допустим еще раз, что оператор Au положительно определенный. Решение уравнения (1) в этом случае эквивалентно задаче о минимуме функционала (см. § 13)

$$F(u)=(Au,\ u)-(u,\ f)-(f,\ u).$$

Если ввести энергетическое пространство H_A (см. § 9) со скалярным произведением $[u,v]=(Au,v)$, то, как мы видели, $F(u)=|u-u_0|^2-|u_0|^2$, где u_0 — решение уравнения (1). Пусть теперь u_n — решение, построенное по методу наименьших квадратов. Нетрудно видеть, что *последовательность $\{u_n\}$ сходится к u_0 также и в метрике H_A. Действительно,* $|u_n-u_0|^2=(Au_n-Au_0,\ u_n-u_0)=(Au_n-f,\ u_n-u_0)$. По неравенству Коши — Буняковского $|u_n-u_0|^2\leqslant\|Au_n-f\|\|u_n-u_0\|$. Далее, по неравенству (6) $\|u_n-u_0\|\leqslant K\|Au_n-Au_0\|=K\|Au_n-f\|$, и, следовательно,

$$|u_n-u_0|^2\leqslant K\|Au_h-f\|^2, \tag{12}$$

откуда следует, что $|u_n-u_0|^2\to 0$.

Формула (12) позволяет, очевидно, оценить погрешность приближенного решения, полученного по методу наименьших квадратов. Величина $\|Au_n-f\|^2$ может быть вычислена следующим образом: имеем

$$\|Au_n-f\|^2=(Au_n-f,\ Au_n-f)=\left(\sum_{k=1}^n a_kA\varphi_k-f,\ \sum_{m=1}^n a_mA\varphi_m-f\right)=$$

$$=\sum_{k,\,m=1}^n a_k\bar a_m(A\varphi_k,\ A\varphi_m)-\sum_{k=1}^n a_k(A\varphi_k,\ f)-\sum_{m=1}^n \bar a_m(f,\ A\varphi_m)+(f,\ f). \tag{13}$$

Коэффициенты a_k удовлетворяют системе (5). Умножая m-е уравнение этой системы на $\bar a_m$ и суммируя по m, получим

$$\sum_{k,\,m=1}^n a_k\bar a_m(A\varphi_k,\ A\varphi_m)=\sum_{m=1}^n \bar a_m(f,\ A\varphi_m).$$

Подставив это в (13), найдем

$$\| Au_n - f \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, f) =$$

$$= \| f \|^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k, f \right) = \| f \|^2 - (Au_n, f). \qquad (14)$$

Погрешность приближенного решения, построенного по методу наименьших квадратов, оценивается неравенствами [1])

$$\| u_n - u_0 \|^2 \leqslant K^2 \{ \| f \|^2 - (Au_n, f) \}, \qquad (15)$$

$$| u_n - u_0 |^2 \leqslant K \{ \| f \|^2 - (Au_n, f) \}. \qquad (16)$$

Необходимо заметить, что в метрике пространства H_0 метод наименьших квадратов сходится медленнее, чем метод Ритца. Действительно, будем исходить из одних и тех же координатных элементов $\{\varphi_n\}$. Пусть

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k,$$

где коэффициенты a_k определены по методу наименьших квадратов, а коэффициенты b_k — по методу Ритца. Тогда, по самому определению метода Ритца, $F(u_n) \geqslant F(v_n)$ или $|u_n - u_0| \geqslant |v_n - u_0|$.

Последнее неравенство и показывает более медленную сходимость последовательности $\{u_n\}$ по сравнению с последовательностью $\{v_n\}$. Преимущество метода наименьших квадратов состоит, однако, в том, что последовательность $\{u_n\}$ может сходиться равномерно (иногда вместе с некоторыми производными) в таких случаях, когда о последовательности $\{v_n\}$ этого утверждать нельзя.

§ 103. Применение к интегральным уравнениям

Метод наименьших квадратов оказывается полезным в применении к некоторым классам линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Пусть A — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть известно, что существует ограниченный обратный оператор A^{-1}. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \qquad (1)$$

[1]) Напомним, что u_0 означает решение уравнения (1). Формула (16) имеет место только для положительно определенного оператора A.

где u — искомый, а f — данный элемент пространства. Следуя методу наименьших квадратов, возьмем полную в H последовательность линейно независимых элементов $\{\varphi_n\}$ и будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k. \tag{*}$$

Проверим выполнение условий A — C леммы 2 § 102. Условие A вытекает из того, что последовательность $\{\varphi_n\}$ полная в H, а оператор A ограниченный; условия B и C вытекают из ограниченности оператора A^{-1}. На основании леммы 2 § 102 $u_n \to u$, где u есть решение уравнения (1).

Пусть теперь оператор A не имеет обратного, но существует ограниченный регуляризирующий оператор M, т. е. такой, что $MA = E + T$, где E — единичный, а T — вполне непрерывный оператор. В этом случае для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы f было ортогонально ко всем решениям однородного сопряженного уравнения [1]) $A^*u = 0$. Далее, если обозначить через $\overset{*}{H}_1$ линеал элементов из H, ортогональных ко всем решениям уравнения $A^*u = 0$, а через H_1 — линеал элементов [2]), ортогональных ко всем решениям уравнения $Au = 0$, и рассматривать оператор A только в H_1, то обратный оператор A^{-1} существует и ограничен [1]) в $\overset{*}{H}_1$. Наш метод приближенного решения может быть использован и в этом случае, если известны все линейно независимые решения $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}$ однородного уравнения $Au = 0$; число этих решений, очевидно, конечное. Предполагая, что $f \in \overset{*}{H}_1$, мы будем искать приближенное решение в H_1; для этого достаточно представить его в виде (*), но коэффициенты подчинить условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (\varphi_k, u^{(j)}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

С помощью этих уравнений можно исключить некоторые из коэффициентов a_k; остальные определяем из условия $\|Au_n - f\|^2 = \min$, что приведет к системе вида (5) § 102.

Изложенный здесь метод приближенного решения применим, очевидно, к интегральным уравнениям типа Фредгольма [3]), ядра

[1]) См. статью автора [5].

[2]) Нетрудно убедиться, что H_1 и $\overset{*}{H}_1$ суть полные гильбертовы пространства.

[3]) Метод наименьших квадратов применял к уравнениям типа Фредгольма М. Кравчук; см., например, М. Кравчук [2].

которых удовлетворяют условию:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K^2(P, Q)|\, d\Omega_P\, d\Omega_Q,$$

а также к сингулярным интегральным уравнениям с невырождающимся символом, если интеграл распространен по гладкой замкнутой кривой или поверхности. Действительно, такой сингулярный оператор ограничен в гильбертовом пространстве функций с суммируемым квадратом и имеет ограниченный регуляризирующий оператор [1]).

В применении к интегральным уравнениям можно в некоторых случаях так изменить метод, чтобы сходимость была равномерной.

Пусть дано уравнение Фредгольма

$$Au = u(P) - \int\limits_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q = f(P), \tag{2}$$

где $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $Q(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ — точки m-мерной области Ω. Пусть $f(P)$ дифференцируема $[m/2]+1$ раз по всем координатам $x_1, x_2, \ldots, x_m$, и пусть структура уравнения такова, что решение $u(P)$ также $[m/2]+1$ раз дифференцируемо и, наконец, оператор в левой части (2) переводит достаточное число раз дифференцируемую функцию в дифференцируемую $[m/2]+1$ раз. В качестве $\varphi_k(P)$ возьмем последовательность функций, достаточное число раз дифференцируемых, например, полиномов, и положим по-прежнему $u_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(P)$, но коэффициенты a_k будем определять из условия

$$\| Au_n - f \|_{L_2}^2 + \sum_{k=1}^{[m/2]+1} \sum_{l_1+\ldots+l_m=k} \left\| \frac{\partial^k (Au_n - f)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right\|_{L_2}^2 = \min. \tag{3}$$

Допуская, что решение уравнения (2) существует, мы легко найдем отсюда, что

$$\| Au_n - f \|_{L_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \left\| \frac{\partial^k (Au_n - f)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right\|_{L_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ [m/2]+1.$$

По известной теореме С. Л. Соболева [2] о вложении пространств $Au_n \to f$ равномерно в Ω. Допустим еще, что

[1]) Доказательство см. в работах автора [5] и [30].

$\int\limits_{\Omega} |K^2(P, Q)| d\Omega_Q < C^2$, $C = \text{const}$. Обозначим $Au_n = f_n$. Тогда

$$u(P) - u_n(P) = \int\limits_{\Omega} K(P, Q)[u(Q) - u_n(Q)]\, d_Q\Omega + f(P) - f_n(P),$$

откуда, в силу неравенства Буняковского,

$$|u(P) - u_n(P)| < C\|u - u_n\|_{L_2} + |f(P) - f_n(P)|.$$

По доказанному выше (см. § 102) из $\|Au_n - f\| \to 0$ следует, что $\|u - u_n\| \to 0$, и из последнего неравенства видно, что $u_n(P) \to u(P)$ равномерно в Ω. Введя в левую часть (3) производные более высоких порядков, можно добиться, в известных условиях, и равномерной сходимости производных.

§ 104. Применение к краевым задачам с однородными краевыми условиями

Метод наименьших квадратов многократно применялся к задачам такого рода в работах Н. М. Крылова и его последователей. Относящиеся сюда вопросы подробно изложены в монографии М. Кравчука [1], к которой мы и отсылаем читателя; там же приведен обширный список работ школы Н. М. Крылова по методу наименьших квадратов и по так называемому «методу моментов». В настоящем параграфе мы покажем на примере уравнения Пуассона особенности применения метода наименьших квадратов к задачам упомянутого типа.

Итак, пусть требуется проинтегрировать уравнение Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

в области Ω при краевом условии

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Границу S предполагаем достаточно гладкой.

Выберем последовательность координатных функций $\{\varphi_n(x, y)\}$, достаточное число раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega} = \Omega + S$ и удовлетворяющих условию (2). Как обычно, приближенное решение ищем в виде $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ и определяем коэффициенты a_k из условия[1]) $\int\limits_{\Omega} [\Delta u_n - f]^2\, d\Omega = \min$. Как

[1]) Все данные функции предполагаем вещественными.

и в общем случае (см. § 102), легко доказать, что

$$\| \Delta u_n - f \|^2 = \int_\Omega [\Delta u_n - f]^2 \, d\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Обозначим через $G(x, y; \xi, \eta)$ функцию Грина нашей задачи. Тогда, так как $u|_S = u_n|_S = 0$, то

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u - \Delta u_n) \, d\xi \, d\eta =$$

$$= \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(f - \Delta u_n) \, d\xi \, d\eta. \qquad (3)$$

К последнему интегралу применим неравенство Буняковского

$$[u(x, y) - u_n(x, y)]^2 \leqslant \int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \int_\Omega [f - \Delta u_n]^2 \, d\Omega. \qquad (4)$$

Функция $G(x, y; \xi, \eta)$ только логарифмически бесконечна при $x = \xi$, $y = \eta$, поэтому первый интеграл ограничен; второй интеграл стремится к нулю, и неравенство (4) показывает, что $u_n(x, y) \to u(x, y)$ *равномерно* в $\overline{\Omega}$. Из рассуждений конца предшествующего параграфа следует, что $\frac{\partial u_n}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y} \to \frac{\partial u}{\partial y}$ в среднем [1]) по области Ω. Эти результаты показывают, что метод наименьших квадратов дает в рассматриваемом случае, вообще говоря, лучшую сходимость, чем метод Ритца, хотя сходимость в среднем производных и несколько медленнее.

§ 105. Вспомогательные предложения теории аналитических функций

Здесь и ниже мы ограничиваемся для простоты случаем конечной односвязной области плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Распространение результатов на случай области многосвязной или бесконечной не встречает существенных препятствий, но выкладки при этом усложняются [1]).

Будем рассматриваемую область обозначать через Ω, ее границу — через S: замкнутую область $\Omega + S$ по-прежнему будем обозначать $\overline{\Omega}$. Начало координат всегда будем помещать внутри Ω. Кривую S всегда будем считать достаточно гладкой.

Существенную роль в дальнейшем играет следующая теорема Уолша [1]:

---

[1]) См. статью автора [6].

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно найти такой полином $\varphi(z)$, что в $\overline{\Omega}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)-\varphi(z)|<\varepsilon. \tag{1}$$

Отметим два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Если $f(z)$ голоморфна в Ω и вместе со своими производными до порядка r включительно непрерывна в $\overline{\Omega}$, то, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно найти полином $\varphi(z)$, удовлетворяющий в $\overline{\Omega}$ неравенствам*

$$\begin{gathered}|f(z)-\varphi(z)|<\varepsilon, \quad |f'(z)-\varphi'(z)|<\varepsilon, \ \ldots, \\ |f^{(r)}(z)-\varphi^{(r)}(z)|<\varepsilon.\end{gathered} \tag{2}$$

По теореме Уолша можно построить полином $\varphi(z)$, удовлетворяющий неравенству $|f^{(r)}(z)-\varphi(z)|<\varepsilon/A$; постоянную A мы определим ниже. Найдем полином $f^*(z)$ из условий (z_0 — некоторая фиксированная точка внутри Ω): $f^{*(r)}(z)=\varphi(z)$, $f^{*(j)}(z_0)=f^{(j)}(z_0)$, $j=0, 1, 2, \ldots, r-1$. Интегрируя, находим

$$\left|f^{(r-1)}(z)-f^{*(r-1)}(z)\right|=\left|\int_{z_0}^{z}[f^{(r)}(z)-\varphi(z)]\,ds\right|<\frac{\varepsilon d}{A}, \quad ds=|dz|,$$

где d есть максимум кратчайших расстояний между z_0 и точками S по путям, лежащим в $\overline{\Omega}$. Аналогично

$$\left|f^{(r-2)}(z)-f^{*(r-2)}(z)\right|<\varepsilon d^2/A, \ \ldots, \ |f(z)-f^*(z)|<\varepsilon d^r/A.$$

Достаточно взять $A=1$, если $d\leqslant 1$, и $A=d^r$, если $d>1$ и неравенства (2) доказаны.

Следствие 2. *В условиях следствия 1 можно по данному числу $\varepsilon>0$ построить такой полином $\varphi(z)$, что*

$$\sum_{j=0}^{r}\int_S |f^{(j)}(z)-\varphi^{(j)}(z)|^2\,ds<\varepsilon^2, \quad ds=|dz|.$$

Доказательство очевидно.

Нам придется ниже рассматривать пространства $L_2^{(r)}(S)$, элементы которых суть функции, вообще говоря, комплексные, определенные на кривой S; рассматриваемые как функции дуги на S, они непрерывны вместе со своими производными по дуге до порядка $r-1$ включительно, а их производные (обобщенные) порядка r квадратично суммируемы вдоль S. Скалярное произведение в $L_2^{(r)}(S)$ определяется формулой

$$(\varphi, \psi)_r = \sum_{j=0}^{r} \int_S \varphi^{(j)}(z)\, \overline{\psi^{(j)}(z)}\, ds;$$

отсюда вытекает формула для нормы в $L_2^{(r)}(S)$;

$$\|\varphi\|_r^2 = \sum_{j=0}^{r} \int_S |\varphi^{(j)}(z)|^2\, ds.$$

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in L_2(S)$ и z — точка кривой S. Интеграл*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

взятый в смысле его главного значения по Коши, представляет собой оператор, ограниченный в $L_2(S)$.

Из леммы 1 вытекает существование постоянной K, зависящей только от кривой S, для которой справедливо неравенство $\|\psi\| \leqslant K\|\varphi\|$.

Доказательство леммы 1 можно найти в статье автора [5].

В дальнейшем мы будем говорить, что некоторая последовательность сходится равномерно внутри Ω, если эта последовательность равномерно сходится во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω.

Теорема 2. *Если функции $f_n(z)$ голоморфны в Ω и представимы формулой Коши*[1]) *и если $\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то эти функции равномерно стремятся к нулю внутри Ω.*

Имеем

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Пусть z лежит в замкнутой области $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Обозначим через d, $d > 0$, наименьшее расстояние между границами областей $\overline{\Omega}'$ и Ω и через l — длину кривой S. Тогда

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi d} \int_S |f_n(\zeta)| \cdot |d\zeta|,$$

---

[1]) Для этого достаточно, например, чтобы функции $f_n(z)$, голоморфные в Ω, были непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

или, применяя к последнему интегралу неравенство Буняковского,

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2\pi d}\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 $f_n(z)\to 0$ во всякой внутренней точке Ω.*

Теорема 3. *Если $f_n(z)$ голоморфны в Ω, $f_n^{(r)}(z)$ представимы формулой Коши и $\|f_n\|_r\to 0$, то функции $f_n(z)$ вместе с их производными до порядка $r-1$ включительно стремятся к нулю равномерно в $\overline{\Omega}$.*

Для простоты ограничимся случаем $r=1$. Общий случай рассматривается аналогично. Прежде всего заметим, что $\|f_n'(z)\|\to 0$, если $\|f_n\|_1\to 0$. Далее, интегрируя формулу Коши для производной, получим

$$f_n(z)-f_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_S f_n'(\zeta)\ln\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

где z_0 — точка внутри Ω. Теперь по неравенству Буняковского

$$|f_n(z)-f_n(z_0)|^2 \leqslant \frac{\|f_n'\|^2}{4\pi^2}\int_S \left|\ln\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}\right|^2\cdot|d\zeta|.$$

Если z лежит в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то последний интеграл ограничен, и $f_n(z)-f_n(z_0)\to 0$ равномерно в $\overline{\Omega}$. Но $f_n(z_0)\to 0$ (следствие из теоремы 2), и наша теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ голоморфна в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$, и пусть $v(0,0)=0$. Тогда существует постоянная K, зависящая только от области Ω, такая, что*

$$\|f\|\leqslant K\|u\|. \tag{3}$$

Конформно отобразим Ω на область единичного круга плоскости t; пусть $t=\chi(z)$ — функция, реализующая это преобразование. Введем обозначения: $t=re^{i\vartheta}$, $u(x,y)=U(r,\vartheta)$, $f(z)=F(t)$; обозначим еще через γ окружность $|t|=1$. Внутри γ функция $F(t)$ разлагается в ряд Тейлора $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. Обозначим еще $a_n=\alpha_n+i\beta_n$. Конформное преобразование выполним так, чтобы точка $z=0$ перешла в точку $t=0$. Тогда $\operatorname{Im}(a_0)=0$. Простой подсчет дает

$$\int_\gamma U^2(1,\vartheta)\,d\vartheta=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2,\qquad \int_\gamma |F^2(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

Отсюда

$$\int_{\gamma} |F^2(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant 2 \int_{\gamma} U^2(1, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{4}$$

Возвращаясь к переменной z, получим

$$\int_{S} |f^2(z)| \cdot |\chi'(z)|\, ds \leqslant 2 \int_{S} u^2 |\chi'(z)|\, ds.$$

Так как кривая S достаточно гладкая, то $\chi'(z)$ ограничена по модулю сверху и снизу. Пусть $A \leqslant |\chi'(z)| \leqslant B$, тогда из (4) следует

$$\| f \| \leqslant K \| u \|, \quad K \sqrt{2B/A}.$$

При соответствующих дополнительных условиях, наложенных на $f(z)$, нетрудно получить также оценку

$$\| f \|_r \leqslant K_r \| u \|_r. \tag{5}$$

§ 106. Задачи Дирихле и Неймана

Рассмотрим задачу Дирихле для односвязной конечной области Ω. Искомую гармоническую функцию обозначим через $u(x, y)$, ее значение на границе S области — через $u(\zeta)$, голоморфную в Ω функцию, вещественная часть которой совпадает с $u(x, y)$, — через $f(z)$. Функция $f(z)$ определена с точностью до чисто мнимого слагаемого, которое мы нормируем условием

$$\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0. \tag{1}$$

Следуя методу наименьших квадратов, будем искать приближенное решение задачи Дирихле в виде

$$f_n(z) = u_n + iv_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \tag{2}$$

Чтобы удовлетворить условию (1), потребуем, чтобы

$$\operatorname{Im}(a_0) = 0. \tag{3}$$

Теперь коэффициенты в выражении $f_n(z)$ определим из условия

$$\| u - u_n \|^2 = \min. \tag{4}$$

Исследуем сходимость приближенного решения к точному. Условие A леммы 2 (§ 102) есть простое следствие теоремы Уолша. Далее, условие B вытекает из существования решения задачи Дирихле. Условие C также, очевидно, выполняется, так как в нашем случае $Au \equiv u$. В силу леммы 2 § 102 $\|u - u_n\| \to 0$.

Докажем теперь, что $f_n(z)\to f(z)$ *равномерно внутри* Ω. Действительно, из оценки (3) § 105 следует, что $\|f_n(z)-f(z)\|\to 0$, а из теоремы 2 § 105 — что $f_n(z)-f(z)\to 0$ равномерно внутри Ω[1]).

Замечания. 1. Последние рассуждения остаются, очевидно, в силе, если вместо (2) взять функцию вида $f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k(z)$, если только $\{\omega_k(z)\}$ есть полная система голоморфных в Ω и непрерывных в $\bar\Omega$ функций.

2. Можно изменить процесс так, чтобы равномерная сходимость имела место в $\bar\Omega$. Для этого достаточно подчинить функцию $f_n(z)$ условию

$$\|u-u_n\|_1=\min. \tag{4$_1$}$$

Вычисление коэффициентов при этом несколько усложняется.

3. Если потребовать обращения в минимум величины $\|u-u_n\|_r$, то в $\bar\Omega$ будет иметь место равномерная сходимость производных $f_n^{(j)}(z)$, $j=1, 2, \ldots, r-1$, к соответствующей производной $f^{(j)}(z)$.

С целью иллюстрации метода рассмотрим задачу Дирихле для круга. Радиус круга положим равным единице, начало координат поместим в центре круга. Заданную на S функцию $u(\zeta)$ разложим в ряд Фурье:

$$u(\zeta)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta),\qquad \zeta=e^{i\theta}.$$

Функцию $f_n(z)$ будем искать в виде полинома; это равносильно тому, что мы полагаем $\omega_k(z)=z^k=r^ke^{ik\theta}$.

Полагая $f_n(z)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-ib_k)z^k$, $\operatorname{Im}(a_0)=0$, мы найдем $a_0=A_0$, $a_k=A_k$, $b_k=B_k$. Это дает нам в качестве функции $f_n(z)$ n-й отрезок степенного ряда функции $f(z)$.

Задача Неймана состоит в отыскании голоморфной в Ω функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_S=\psi(s). \tag{5}$$

[1]) Этот результат, при некоторых дополнительных ограничениях, содержится у М. Пиконе [1], который рассматривал только случай односвязной области.

Функция $f(z)$ определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого; мы нормируем его условием

$$f(0)=0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Если условие* (6) *выполнено, то существует постоянная K, зависящая только от области Ω, такая, что в замкнутой области $\bar{\Omega}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant K \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|. \tag{7}$$

Мы допускаем, что $f(z)$ и $f'(z)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$.

Отобразим Ω конформно на единичный круг с помощью функции $t=\chi(z)$; $\chi(0)=0$. Обозначим, как и в § 105, $t=re^{i\vartheta}$, $f(z)=F(t)$, $u(x, y)=U(r, \vartheta)$. Имеем $F(0)=f(0)=0$, поэтому

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n=\alpha_n+i\beta_n,$$

$$U(r, \vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\vartheta-\beta_n \sin n\vartheta)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta=\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2,$$

$$|F(t)|^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^2 =$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2.$$

Отсюда

$$|F(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta.$$

Возвращаясь к переменной z и замечая, что в силу конформности преобразования

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|\chi'(z)|}, \quad d\vartheta=|\chi'(z)|\, ds,$$

мы получим

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{\pi^2}{6} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \frac{ds}{|\chi'(z)|}.$$

Наконец, $|\chi'(z)| \geqslant A > 0$, $A = \text{const}$, так как кривая S гладкая. Отсюда

$$|f(z)| \leqslant K \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|, \quad K = \sqrt{\frac{\pi^2}{6A}}.$$

В соответствии с методом наименьших квадратов, приближенное решение задачи Неймана можно искать в виде $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$. Вместо многочленов могут быть взяты, как было указано выше, линейные комбинации из членов любой полной в Ω последовательности голоморфных в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

Коэффициенты выражения $f_n(z)$ определяются из условия

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\|^2 = \min. \tag{8}$$

Оно дает систему линейных уравнений, допускающую только единственное решение. Действительно, это вытекает из того, что условие леммы 1 § 102 в задаче Неймана выполнено, что в свою очередь следует из теоремы 1.

Докажем теперь, что $f_n(z) \to f(z)$ *равномерно в* $\overline{\Omega}$. По следствию 2 § 105 можно найти полином $\varphi_{n_0}(z)$ так, чтобы $\|f'(z) - \varphi'_{n_0}(z)\| < \varepsilon$. Далее,

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| = \left\| \operatorname{Re} \left\{ \left[f'(z) - \varphi'_{n_0}(z) \right] e^{-i(\nu,\, x)} \right\} \right\| \leqslant \| f'(z) - \varphi'_{n_0}(z) \| < \varepsilon.$$

В силу (8) тем более имеем $\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| < \varepsilon$, если u_{n_0} найдено по методу наименьших квадратов. Когда $n > n_0$, то, очевидно, $\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \to 0.$$

Теперь из (7) вытекает равномерная сходимость $f_n(z)$ к $f(z)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Все выводы настоящего параграфа, очевидно, остаются в силе, если вместо $L_2(S)$ ввести пространство $L_2(p; S)$, при условии, что весовая функция $p(\sigma)$ ограничена сверху и снизу положительными числами: $0 < \alpha \leqslant p(\sigma) \leqslant \beta < \infty$.

§ 107. Задача Дирихле для эллипса

Пусть требуется определить функцию $u(x, y)$, гармоническую внутри эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, по краевому условию ($S$ — контур эллипса)

$$u|_S = u(\sigma). \tag{1}$$

Как и выше, будем считать $u(x, y)$ вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\{f(z)\}, \quad z = x + iy. \tag{2}$$

В качестве координатных выбираем функции $\left(c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_k(z) = \left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right)^k + \left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right)^k, \quad k > 1. \tag{3}$$

Система $\{\varphi_k\}$, как известно, полна на линеале функций, голоморфных внутри эллипса и непрерывных вплоть до контура. Приближенные решения будем искать в виде

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(z), \quad \operatorname{Im}(a_0) = 0. \tag{4}$$

Обозначая длину дуги эллипса через $d\sigma$, имеем

$$d\sigma = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt.$$

В качестве основного гильбертова пространства нашей задачи введем пространство $L_2(p; S)$, где $p(\sigma) = 1/\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$; очевидно, в $L_2(p; S)$ скалярное произведение функций φ и ψ равно

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\overline{\psi(\sigma)}\, dt. \tag{5}$$

В соответствии с методом наименьших квадратов будем определять коэффициенты a_k из условия

$$\left\| \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(z) - u(\sigma) \right\|^2 = \min. \tag{6}$$

На контуре эллипса $z = a\cos t + ib\sin t$ и, следовательно, $z^2 - c^2 = (b\cos t + ia\sin t)^2$. Отсюда $\varphi_k(z) = (a+b)^k e^{ikt} + (a-b)^k e^{-ikt}$, $k > 0$. Обозначим $a_k = \alpha_k - i\beta_k$. Тогда на эллипсе

$$\operatorname{Re}\{\alpha_k\varphi_k(z)\} = [(a+b)^k + (a-b)^k]\,\alpha_k\cos kt + \\ + [(a+b)^k - (a-b)^k]\,\beta_k\sin kt, \quad k > 0. \tag{7}$$

Теперь из (6) видно, что коэффициенты в (7) суть коэффициенты Фурье функции $u(\sigma)$; отсюда

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,dt, \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi\left[(a+b)^k-(a-b)\right]^k}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\cos kt\,dt, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi\left[(a+b)^k-(a-b)^k\right]}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\sin kt\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Коэффициенты α_0, α_k, β_k, как это видно из (8), не зависят от номера n, поэтому в (4) легко осуществляется предельный переход при $n\to\infty$, что дает точное решение задачи

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left[\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^k + \left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)^k\right];$$

коэффициенты a_k определяются по формулам (8).

§ 108. Случай кусочно гладкого контура. Задача Дирихле

Пусть контур S, ограничивающий область Ω, — кусочно гладкий; обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ его угловые точки и через $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_r$ — внутренние углы в соответствующих точках. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(p; S)$, где весовая функция

$$p(\sigma) = \prod_{k=1}^{r} |\zeta-\zeta_k|^{1/\alpha_k - 1}. \tag{1}$$

Скалярное произведение и норма в $L_2(p; S)$ определяются формулами

$$(\varphi, \psi)_S = \int_S p(\sigma)\varphi(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\,d\sigma, \quad \|\varphi\|_S^2 = \int_S p(\sigma)\,|\varphi^2(\zeta)|\,d\sigma. \tag{2}$$

Лемма. *Множество полиномов плотно, в смысле метрики* (2), *в классе голоморфных в Ω и представимых формулой Коши функций, предельные значения вещественных частей которых принадлежат пространству $L_2(p; S)$.*

Как и выше, при доказательстве будем считать Ω конечной односвязной.

Конформно отобразим Ω на единичный круг; пусть $t=\chi(z)$ — преобразующая функция. Как известно,

$$\chi'(z)=\varkappa(z)\prod_{k=1}^{r}(z-\zeta_k)^{1/\alpha_k-1}, \tag{3}$$

где $\varkappa(z)$ ограничена по модулю в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+S$ положительными числами сверху и снизу

$$0<A\leqslant\varkappa(z)\leqslant B<\infty. \tag{4}$$

Окружность $|t|=1$ обозначим через γ. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\gamma)$, в котором

$$(\varphi, \psi)_\gamma=\int_\gamma \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,d\vartheta, \quad \|\varphi\|_\gamma^2=\int_\gamma |\varphi^2(t)|\,d\vartheta, \quad t=e^{i\vartheta}. \tag{5}$$

Пусть $u\in L_2(p; S)$. Тогда

$$\|u\|_\gamma^2=\int_\gamma |u|^2 d\vartheta=\int_S |u^2|\,p(\sigma)\,|\varkappa(z)|\,d\sigma\leqslant B\|u\|_S^2<\infty. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $u\in L_2(\gamma)$; полагая $t=e^{i\vartheta}$, мы найдем, что u разлагается в ряд Фурье, сходящийся в среднем:

$$u=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\vartheta-\beta_k\sin k\vartheta).$$

Обозначим $a_k=\alpha_k+i\beta_k$ и положим, считая функцию u вещественной,

$$F(t)=\alpha_0+i\beta_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k t^k, \quad F_n(t)=\alpha_0+i\beta_0+\sum_{k=1}^{n}a_k t^k, \quad \beta_0=\mathrm{const}.$$

Функция $F(t)$ представима формулой Коши, и ее вещественная часть совпадает с u на окружности γ. Легко видеть, что

$$\|F-F_n\|_\gamma^2=2\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2, \tag{7}$$

и, следовательно, при n достаточно большом, $\|F-F_n\|<\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Положим теперь $F(t)=f(z)$, $F_n(t)=f_n(z)$. Формула (7) тогда переходит в следующую:

$$\int_S |f(z)-f_n(z)|^2\,p(\sigma)\,|\varkappa(z)|\,d\sigma=2\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2<\varepsilon^2,$$

откуда легко вытекает $\|f-f_n\|<\varepsilon/\sqrt{A}$.

По теореме Уолша непрерывную в $\overline{\Omega} = \Omega + S$ и голоморфную в Ω функцию $f_n(z)$ можно аппроксимировать полиномом $f^*(z)$ равномерно и тем более в смысле метрики $L_2(p; S)$. Но

$$\|f - f^*\|_S \leqslant \|f - f_n\|_S + \|f_n - f^*\|_S < \varepsilon/\sqrt{A} + \|f_n - f^*\|_S,$$

и так как оба слагаемых справа произвольно малы, то и $\|f - f^*\|$ произвольно мала, что доказывает лемму.

Перейдем теперь к задаче Дирихле. Нетрудно видеть, что оценка (3) § 105 сохраняет силу в $L_2(p; S)$. Действительно, она верна в $L_2(\gamma)$. Таким образом, если $f(z) = u + iv$ голоморфна в Ω и $\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0$, то по неравенству (3) § 105 $\|f\|_\gamma < K\|u\|_\gamma$, или $\int\limits_\gamma |f(z)|^2 d\vartheta \leqslant K \int\limits_\gamma u^2 d\vartheta$. Но $d\vartheta = p(\sigma)\,|\varkappa(z)|\,d\sigma$; подставив это в последнее неравенство и используя (4), получим

$$\|f\|_S \geqslant K'\|u\|_S, \quad K' = K\sqrt{B/A}, \tag{8}$$

что совпадает с той же оценкой (3) § 102. Решая задачу Дирихле, мы будем требовать, чтобы выражение $\|u - \operatorname{Re}\{f^*(z)\}\|_S^2 = \min$, где $f^*(z)$ — полином. Лемма настоящего параграфа позволяет утверждать, что условие A § 102 выполнено; условие B вытекает из теоремы существования задачи Дирихле, а условие C — из неравенства (8). Таким образом, сходимость метода наименьших квадратов в метрике $L_2(p; S)$ установлена.

§ 109. Смешанная задача теории потенциала

Здесь мы будем рассматривать следующую задачу: найти непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ гармоническую функцию $u(x, y)$, если на одних частях контура S заданы значения самой функции $u(x, y)$, а на других — значения ее нормальной производной.

Ограничимся случаем, когда область Ω конечная односвязная. Контур S, как всегда, считаем достаточно гладким. Пусть точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1} = \alpha_1$ разбивают S на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}$ так, что дуга γ_k имеет начало и конец в точках α_k и α_{k+1}. Обозначим $\sum \gamma_{2k-1} = \lambda_1$, $\sum \gamma_{2k} = \lambda_2$. Пусть, далее, на λ_1 даны значения $u(x, y) = \varphi(\sigma)$, а на λ_2 значения $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(\sigma)$. Обозначим еще $R(\sigma) = \sqrt{\prod\limits_{k=1}^{m} |\zeta - \alpha_k|}$.

Теорема 1. *Если $\varphi(\sigma)\equiv 0$, то существует постоянная K, не зависящая от функции $u(x, y)$, такая, что справедливо неравенство*

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma < K \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma. \tag{1}$$

Отобразим Ω конформно на полуплоскость с помощью функции $z=\chi(t)$, $t=\xi+i\eta$. Отображение выполним так, чтобы точка $t=\infty$ отвечала некоторой точке внутри λ_1. Точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ перейдут при этом в некоторые точки $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ действительной оси ξ. Обозначим через Γ_k, Δ_1, Δ_2 образы γ_k, λ_1, λ_2. Пусть, далее, $u(x, y)=U(\xi, \eta)$. Сопряженную с $U(\xi, \eta)$ функцию обозначим через $V(\xi, \eta)$. Краевые условия для $U(\xi, \eta)$, очевидно, таковы:

$$\text{на } \Lambda_1 \quad U(\xi, \eta)=0, \tag{2}$$

$$\text{на } \Lambda_2 \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial \nu}\,|\chi'(\xi)|. \tag{3}$$

Из уравнений Коши — Римана следует, что на Γ_{2k}

$$V=-\int_{a_{2k}}^{\xi} \frac{\partial U}{\partial \eta}\, d\xi + C_k = \psi^*(\xi)+C_k; \tag{4}$$

постоянные C_k должны быть подчинены условию непрерывности функции $U(\xi, \eta)$. Одна из постоянных C_k может быть зафиксирована произвольно, так как $V(\xi, \eta)$ определяется с точностью до произвольной постоянной. Мы зафиксируем эту последнюю, потребовав, чтобы в общей формуле Шварца для полуплоскости[1])

$$U+iV=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi, 0)}{\xi - t}\, d\xi + iC$$

было $C=0$. Тем самым произвол в выборе C_k полностью устраняется.

Краевые условия (2) и (4) позволяют найти значение $U(\xi, 0)$ на Δ_2, именно[2]), на Δ_2

$$U(\xi, 0)=\frac{1}{R_1(\xi)}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\Lambda_2} R_1(\xi')\, B(\xi')\, \frac{d\xi'}{\xi'-\xi} + Q_{m-1}(\xi)\right\}. \tag{5}$$

---

[1]) См., например, книгу автора [7], § 67, формула (2).

[2]) См. там же, формула (10).

Здесь $R_1(\xi)=\sqrt{\prod_{k=1}^{2m}|\xi-a_k|}$; $Q_{m-1}(\xi)$ — полином степени $m-1$: $Q_{m-1}(\xi)=q_0\xi^{m-1}+q_1\xi^{m-2}+\ldots+q_{m-1}$ и, наконец, $B(\xi)=-\varphi^*(\xi)-C_k$.

Формула (5) содержит $2m$ постоянных C_k и q_k. Докажем, что при подходящем их выборе $U(\xi,\eta)$ будет непрерывной в точках a_k. Для непрерывности $U(\xi,\eta)$ достаточно, чтобы при $\xi=a_k$ выражение в скобках в формуле (5) обратилось в нуль. Это дает систему уравнений с $2m$ неизвестными:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Lambda_2}\frac{R_1(\xi')}{\xi'-a_k}B(\xi')\,d\xi'+Q_{m-1}(a_k)=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2m. \tag{6}$$

Система (6) имеет единственное решение — это вытекает из единственности решения смешанной задачи. Решив систему (6), мы, очевидно, получим решение в виде

$$C_k=\int_{\Lambda_2}\frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\varphi^*(\xi')\,d\xi',\quad q_k=\int_{\Lambda_2}\frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\varphi^*(\xi')\,d\xi', \tag{7}$$

где $\mu_k(\xi')$ и $\nu_k(\xi')$ — непрерывные на Δ_2 функции. Определим на Δ_2 непрерывные функции $\tilde{\mu}_k(\xi)$ и $\tilde{\nu}_k(\xi)$, полагая на Γ_{2s}

$$\tilde{\mu}_k(\xi)=\int_{\xi}^{a_{2s+1}}\frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\,d\xi',\quad \tilde{\nu}_k(\xi)=\int_{\xi}^{a_{2s+1}}\frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\,d\xi'.$$

Интегрируя (7) по частям и замечая, что $\varphi^*(a_{2s})=\tilde{\mu}_k(a_{2s+1})=$ $=\tilde{\nu}_k(a_{2s+1})=0$, имеем

$$C_k=\int_{\Lambda_2}\tilde{\mu}_k(\xi)\frac{\partial U}{\partial\eta}\,d\xi,\quad q_k=\int_{\Lambda_2}\tilde{\nu}_k(\xi)\frac{\partial U}{\partial\eta}\,d\xi.$$

Подставив это в (5) и меняя порядок интегрирования в получающихся при этом двойных интегралах, мы легко приведем указанную формулу к виду

$$U(\xi,0)=\frac{1}{R_1(\xi)}\int_{\Lambda_2}M(\xi,\xi')\frac{\partial U}{\partial\eta}\,d\xi'\quad (\text{на } \Lambda_2), \tag{8}$$

где $M(\xi,\xi')$ такова, что интеграл $\int_{\Lambda_2}M^2(\xi,\xi')\,d\xi'$ ограничен. Последнее вытекает из того, что функции $\tilde{\mu}_k(\xi)$, $\tilde{\nu}_k(\xi)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем 1/2, а тогда $M(\xi,\xi')$ удовлетворяет тому же условию внутри Δ_2 и самое большее логарифмически бесконечна в точках a_k [1]). Применим к (8) неравенство Буняковского

$$U^2(\xi, 0) \leqslant \frac{2}{R_1^2(\xi)} \int\limits_{\Lambda_2} M^2(\xi, \xi')\, d\xi' \int\limits_{\Lambda_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi' <$$

$$< \frac{C'}{R_1^2(\xi)} \int\limits_{\Lambda_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi' \text{ (на } \Lambda_2), \quad C' = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Вернемся к плоскости $z = x + iy$. На Δ_2 преобразующая функция $z = \chi(t)$ остается конечной; тогда, как нетрудно видеть, $\chi'(t)$ и $1/\chi'(t)$ ограничены на Δ_2. Но тогда отношения $R_1(\xi)/R(\sigma)$ и $R(\sigma)/R_1(\xi)$ также ограничены, и мы легко найдем из (9), что на λ_2

$$R(\sigma)\, u^2(\sigma) < \frac{K''}{R(\sigma)} \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma, \quad K'' = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Наконец, интегрируя (10) по λ_2 и полагая $K = K'' \int\limits_{\lambda_2} \frac{d\sigma}{R(\sigma)}$, мы придем к неравенству (1).

Теорема 2. *Каковы бы ни были заданные на λ_1 и λ_2 значения u и $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, существует такая постоянная K_1, что*

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant K_1 \left\{ \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + \int\limits_{\lambda_1} \left[u^2(\sigma) + \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2\right] d\sigma \right\}. \tag{11}$$

Построим непрерывную на S функцию $u_1(\sigma)$, совпадающую на λ_1 с $u(\sigma)$; на λ_2 мы ее доопределим, подчинив только двум требованиям

$$\int\limits_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant k \int\limits_{\lambda_1} u^2(\sigma)\, d\sigma, \quad \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma \leqslant k \int\limits_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma, \tag{12}$$

$$k = \mathrm{const}.$$

Далее, построим гармоническую в Ω функцию $u_1(x, y)$, принимающую на S значение $u_1(\sigma)$, и положим $u = u_1 + u_2$. Функция u_2 удовлетворяет условию теоремы 1; по неравенству (1)

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)\, u_2^2(\sigma)\, d\sigma \leqslant K \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leqslant 2K \int\limits_{\lambda_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2\right] d\sigma. \tag{13}$$

---

[1]) См., например, Н. И. Мусхелишвили [1].

Оценим последний интеграл в (13). Конформно отобразим Ω на круг с помощью функции $z=\omega(t)$, $t=\rho e^{i\vartheta}$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, и пусть $u_1(x, y)=U_1(\rho, \vartheta)=\operatorname{Re}\{F(t)\}$. Разложим $F(t)$ в степенной ряд

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\vartheta}.$$

Тогда

$$U_1(\rho, \vartheta)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(a_n e^{in\vartheta}+\bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right).$$

Отсюда

$$\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n e^{in\vartheta}+\bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right),$$

$$\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial\vartheta}\right|_{\rho=1}=\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n e^{in\vartheta}-\bar{a}_n e^{-in\vartheta}\right)$$

и, следовательно, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_{\Gamma}\left[\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\right]^2 d\vartheta=\int_{\Gamma}\left[\left.\frac{\partial U_1(\rho, \vartheta)}{\partial\vartheta}\right|_{\rho=1}\right]^2 d\vartheta$$

или, возвращаясь к старым переменным:

$$\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2|\omega'(\tau)|\,d\sigma=\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2|\omega'(\tau)|\,d\sigma.$$

Пусть $A=\min|\omega'(t)|$, $B=\max|\omega'(t)|$. Очевидно, $0<A\leqslant\leqslant B<\infty$, так как контур S гладкий. Тогда из последнего равенства следует

$$\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\leqslant\frac{B}{A}\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Тем более

$$\int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\leqslant\frac{B}{A}\left\{\int_{\lambda_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma+\int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma\right\}$$

и, в силу определения $u_1(\sigma)$ и неравенств (12),

$$\int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\leqslant\frac{B(1+k)}{A}\int_{\lambda_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Подставив это в (13), получим

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u_2^2(\sigma)\,d\sigma \leqslant 2K \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + K' \int_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma,$$

$$K' = 2BK(1+k)/A. \tag{14}$$

Теперь нетрудно доказать неравенство (11). Имеем

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u^2(\sigma)\,d\sigma = \int_{\lambda_2} R(\sigma)\,[u_1(\sigma) + u_2(\sigma)]^2\,d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant 2R^* \int_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\,d\sigma + 2\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u_2^2(\sigma)\,d\sigma,$$

где $R^* = \max R(\sigma)$. Воспользуемся неравенствами (12) и (14) и положим $K_1 = \max(2kR^*, 4K, 2K')$; мы получим тогда

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u^2(\sigma)\,d\sigma \leqslant K_1 \left\{ \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + \int_{\lambda_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + u^2(\sigma)\right] d\sigma \right\}.$$

Займемся теперь решением смешанной задачи теории потенциала. Пусть $v(x, y)$ — функция, сопряженная с искомой $u(x, y)$, равная нулю в начале координат, и $f(z) = u + iv$. Будем искать приближенное решение в виде $f_n(z) = u_n + iv_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $\operatorname{Im}(a_0) = 0$. Коэффициенты многочлена $f_n(z)$ определим из условия

$$\int_{\lambda_1} \left[(u-u_n)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_n}{\partial \sigma}\right)^2\right] d\sigma + \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma = \min. \tag{15}$$

Условия (15) приводят к системе линейных уравнений с неизвестными a_k; докажем ее разрешимость. Рассмотрим гильбертово пространство, элементы которого суть гармонические в Ω функции, представимые через функцию Грина, а скалярное произведение определяется формулой

$$(u, v) = \int_{\lambda_1} \left(u\bar{v} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma}\right) d\sigma + \int_{\lambda_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

Теперь минимальное условие (15) принимает вид $\|u - u_n\|^2 = \min$; так как u_n есть линейный агрегат линейно независимых функций 1, $\operatorname{Re}(z^k)$, $\operatorname{Im}(z^k)$, то по доказанному в § 102 линейная система, к которой приводит условие (15), разрешима единственным образом.

Докажем теперь, что $f_n(z) \to f(z)$ *равномерно внутри* Ω. Прежде всего, опираясь на следствие 2 из теоремы 1 § 105, мы, как и в предшествующем параграфе, докажем, что каждый из интегралов в (15) стремится к нулю, но тогда стремится к нулю, в силу неравенства (11), и интеграл $\int\limits_{\lambda_n} R(\sigma)(u-u_n)^2\,d\sigma$. Теперь

$$\int\limits_S R(\sigma)(u-u_n)^2\,d\sigma \leqslant R^* \int\limits_{\lambda_1} (u-u_n)^2\,d\sigma + \int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)(u-u_n)^2\,d\sigma \to 0.$$

Далее,

$$f(z)-f_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S (u-u_n)\,T(z;\zeta)\,d\sigma = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \sqrt{R(\sigma)}\,(u-u_n)\frac{T(z;\zeta)}{\sqrt{R(\sigma)}}\,d\sigma,$$

где $T(z;\zeta)$ — ядро Шварца[1]) области Ω. По неравенству Буняковского

$$|f(z)-f_n(z)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_S \frac{|T^2(z;\zeta)|}{R(\sigma)}\,d\sigma \int\limits_S R(\sigma)(u-u_n)^2\,d\sigma. \qquad (16)$$

Если $z \in \overline{\Omega}'$, где $\overline{\Omega}'$ — замкнутая область, лежащая внутри Ω, то $T(z;\zeta)$ непрерывно, первый интеграл в (16) ограничен, и так как второй интеграл стремится к нулю, то $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в Ω.

§ 110. Плоская задача теории упругости

Мы ограничимся случаем заданных смещений; случай заданных напряжений не имеет никаких существенных отличий. По-прежнему мы здесь ограничимся рассмотрением односвязной конечной области. Точку $z=0$ поместим внутри области.

Как известно[2]), наша задача сводится к отысканию двух голоморфных в рассматриваемой области Ω функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, связанных на контуре S области Ω соотношением

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta). \qquad (1)$$

Здесь $\varkappa = 3-4\sigma$, где σ — постоянная Пуассона, $g(\zeta)$ — заданная непрерывная на S функция. Решение краевой задачи, таким образом сформулированной, существует[2]), причем можно еще потребовать, чтобы $\varphi(0)=0$. Можно доказать[3]), что контурные

---

[1]) Определение и свойства ядра Шварца см. в книге автора [7].

[2]) См. Н. И. Мусхелишвили [2].

[3]) См. статью автора [1]. Доказательство, данное в этой статье, может быть упрощено.

значения $\varphi(z)$ выражаются через $g(z)$ формулой вида

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\varkappa}g(z)+\frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_S\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_S\{K_1(z,\zeta)g(\zeta)+K_2(z,\zeta)\overline{g(\zeta)}\}d\zeta, \tag{2}$$

где K_1 и K_2 — непрерывные функции точек z и ζ на кривой S. В силу леммы 1 § 105 отсюда легко следует оценка

$$\|\varphi\|\leqslant C\|g\|,\qquad C=\text{const}. \tag{3}$$

Заменим в (1) все члены комплексно сопряженными, умножим на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$, $z\in\Omega$, и проинтегрируем по S. Это даст

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta,$$

или, если взять по частям второй интеграл,

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_S\varphi(\zeta)\,d\left(\frac{\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right)+\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta.$$

Если z меняется в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, целиком лежащей внутри Ω, то, применяя к последней формуле неравенство Буняковского, легко найдем

$$|\psi(z)|\leqslant C'\|g\|,\qquad C'=\text{const}. \tag{4}$$

Приближенные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в виде полиномов

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k z^k,\qquad \psi_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k z^k, \tag{5}$$

коэффициенты которых найдем из условия

$$\|g_n-g\|^2=\|\varkappa\varphi_n(z)+z\overline{\varphi_n'(z)}-\overline{\psi_n(z)}-g\|^2=\min. \tag{6}$$

Как обычно, это условие приведем к некоторой системе линейных алгебраических уравнений. Докажем, что эта система разрешима единственным образом.

Изменим обозначения полиномов $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ и будем писать

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+ia_{2k})z^k,\qquad \psi_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_{2k+2n+1}+ia_{2k+2n+2})z^k,$$

где на этот раз через a_j обозначены величины вещественные. Введем далее обозначения:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(2k-1)}(z)=z^k, \quad 1\leqslant k\leqslant n; &&\varphi_{(2k)}(z)=iz^k, \quad 2\leqslant k\leqslant n;\\
&\varphi_{(m)}(z)=0, \quad m>2n; &&\psi_{(m)}(z)=0, \quad 1\leqslant m\leqslant 2n;\\
&\psi_{(2k+2n+1)}(z)=z^k, \quad 0\leqslant k\leqslant n; &&\psi_{(2k+2n+2)}(z)=iz^k, \quad 0\leqslant k\leqslant n.
\end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+1} a_k\varphi_{(k)}(z), \quad \psi_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+1} a_k\psi_{(k)}(z), \quad g_n(z)=\sum_{k=1}^{4n+1} a_k g_{(k)}(z),$$

где

$$g_{(k)}(z)=\varkappa\varphi_{(k)}(z)-\overline{z\varphi'_{(k)}(z)}-\overline{\psi_{(k)}(z)}.$$

Тождество $\sum\limits_{k=1}^{4n+1} b_k g_{(k)}(\zeta)\equiv 0$, $\zeta\in S$, где b_k — вещественные числа, возможно лишь, если все эти числа равны нулю.

Действительно, если $\sum\limits_{k=1}^{4n+1} b_k g_{(k)}(\zeta)\equiv 0$, то одновременно, по теореме о единственности решения задачи теории упругости,

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k\varphi_{(k)}(z)\equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{4n+1} b_k\psi_{(k)}(z)\equiv 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+ib_{2k})z^k\equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{n}(b_{2n+2k+1}+ib_{2k+2n+2})z^k\equiv 0,$$

откуда следует, что все b_j равны нулю.

Условие (6) теперь принимает вид

$$\left\|\sum_{k=1}^{4n+1} a_k g_{(k)}-g\right\|^2=\min,$$

или, так как числа a_k — вещественные,

$$\sum_{j,\,k=1}^{4n+1} a_j a_k\,(g_{(j)},\, g_{(k)})-2\sum_{k=1}^{4n+1} a_k\operatorname{Re}(g,\, g_{(k)})+(g,\, g)=\min.$$

Дифференцируя это по a_j и приравнивая нулю результат, мы получим систему линейных уравнений с неизвестными a_k:

$$\sum_{k=1}^{4n+1} a_k\operatorname{Re}(g_{(k)},\, g_{(j)})=\operatorname{Re}(g,\, g_{(j)}), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 4n+1. \tag{7}$$

Докажем, что система (7) разрешима, для чего рассмотрим однородную систему

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k \operatorname{Re}(g_{(k)}, g_{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 4n+1. \tag{8}$$

Полагая $\tilde{g}(\zeta) = \sum_{k=1}^{4n+1} b_{(k)} g_{(k)}(\zeta)$, можно ее записать в виде

$$\operatorname{Re}(\tilde{g}, g_{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 4n+1.$$

Умножая на b_j и складывая, получим, учитывая, что b_j — вещественные: $\operatorname{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = 0$. Но $\operatorname{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = \operatorname{Re}\|\tilde{g}\|^2 = \|\tilde{g}\|^2$. Отсюда $\tilde{g} = 0$ и по доказанному выше $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 4n+1$. Система (8) имеет, таким образом, только тривиальное решение. Отсюда следует, что неоднородная система (7) всегда разрешима.

Исследуем сходимость приближенного решения к точному. Если данная функция $g(\zeta)$ достаточно гладкая[1]), то $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ будут непрерывны в Ω. Опираясь на следствия из теоремы Уолша и на теорему существования и единственности нашей задачи, мы легко найдем, что $\|g_n - g\| \to 0$. На основании неравенства (3) $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$; в силу теоремы 2 § 105 $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$ равномерно внутри Ω. Наконец, из (4) следует, что равномерно внутри Ω будет $\psi_n(z) \to \psi(z)$.

Равномерная сходимость будет иметь место в $\overline{\Omega}$, если потребовать, чтобы минимальное значение приняла величина $\|g_n - g\|_1^2$.

Результаты настоящего параграфа без затруднений переносятся на случай неизотропной среды.

§ 111. Периодическая задача теории упругости

Рассмотрим односвязную область Ω плоскости $z = x + iy$, ограниченную кривой $y = y(x)$, где $y(x)$ — периодическая, непрерывная и достаточное число раз дифференцируемая функция от x. Период $y(x)$ обозначим через L. Пусть к контуру области Ω приложены внешние силы, которые также изменяются периодически с тем же периодом L. Как было установлено[2]), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \beta z, \quad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi'(z) + \bar{\beta}\varkappa z. \tag{1}$$

[1]) Достаточно, чтобы $g'(\zeta)$ удовлетворяло условию Липшица с положительным показателем.

[2]) См. книгу автора [7], § 55.

Здесь $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — периодические, с периодом L, функции, $\varkappa = 3 - 4\sigma$ (σ — коэффициент Пуассона) в условиях плоской деформации и $\varkappa = (3-\sigma)/(1+\sigma)$ в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Наконец,

$$\beta = i(X+iY)/(1+\varkappa)L, \tag{2}$$

где X и Y суть составляющие по осям x и y главного вектора внешних сил, приложенных со стороны положительной нормали к дуге контура, отвечающей периоду[1]).

Подставляя (1) и (2) в краевое условие плоской задачи теории упругости

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i\int_{\zeta_0}^{\zeta}(X_\nu + iY_\nu)\,d\sigma, \quad d\sigma = |d\zeta|,$$

где ζ — точка дуги C, X_ν и Y_ν — составляющие напряжений, действующих на эту дугу, мы приведем это условие к виду

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar\zeta)\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta), \tag{3}$$

где $f(\zeta)$ — некоторая заданная непрерывная и периодическая функция точки ζ.

Преобразование

$$e^{\frac{2\pi i}{L}z} = t \tag{4}$$

переводит полосу $0 \leqslant x \leqslant L$ в плоскость t, разрезанную вдоль положительной действительной полуоси, а дугу C — в некоторый замкнутый контур Γ. Будем считать, что упругая среда заполняет область над кривой $y = y(x)$, тогда часть полосы $0 \leqslant x \leqslant L$, заполненная упругой средой, перейдет в область Σ', расположенную внутри Γ и разрезанную вдоль положительной действительной оси. Функции $\Phi(t) = \varphi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ и $\Psi(t) = \psi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ голоморфны в Σ'. Будучи периодическими относительно z, эти функции принимают одинаковые значения в геометрически совпадающих точках разреза и, следовательно, непрерывно продолжимы через разрез. Но тогда, как известно, эти функции аналитически продолжимы через разрез и голоморфны во всей области Σ, заключенной внутри Γ. Задача сводится к определению голоморфных в Σ функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, удовлетворяющих на Γ краевому условию

$$\Phi(\tau) - 2\bar\tau\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau); \quad F(\tau) = f\left(\frac{L}{2\pi i}\ln\tau\right). \tag{5}$$

Мы придем к уравнению (5), если положим в (3) $\zeta = \frac{L}{2\pi i}\ln\tau$.

---

[1]) Эту дугу мы будем обозначать через C.

Применим к нашей задаче прием, аналогичный тому, которым воспользовался Д. И. Шерман[1]), давая свой вывод уравнений Лауричелла. Будем искать $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ в виде

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma,\quad \Phi'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega'(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma.$$

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-t}\,d\sigma+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sigma\ln|\sigma|}{\sigma-t}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где σ означает комплексную координату точки на Γ и $\omega(\sigma)$ — неизвестная функция точки σ.

Составим теперь выражение $\Phi(t)-2\bar{t}\ln|t|\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}$, где t — точка внутри Γ:

$$\Phi(t)-2\bar{t}\ln|t|\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma+$$

$$+\frac{\bar{t}\ln|t|}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\bar{\sigma}-\bar{t}}\,d\bar{\sigma}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{t}}\,d\bar{\sigma}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma|}{\bar{\sigma}-\bar{t}}\,\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}.$$

Допустим теперь, что $t\to\tau$, где τ — точка контура Γ. Используя известную теорему о пределе интеграла типа Коши, получим

$$\Phi(\tau)-2\bar{\tau}\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)}+\overline{\Psi(\tau)}=$$

$$=\omega(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\omega(\sigma)\,d\ln\frac{\sigma-\tau}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma|-\bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\overline{\omega(\sigma)}.$$

В силу уравнения (3) полученное выражение равно $F(\tau)$. Теперь в первом интеграле положим $\sigma-\tau=re^{i\vartheta}$, а второй интеграл возьмем по частям. Мы получим тогда интегральное уравнение, эквивалентное системе двух уравнений типа Фредгольма с непрерывным ядром[2]):

$$\omega(\tau)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\omega(\sigma)\,d\vartheta+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\overline{\omega(\sigma)}\,\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma|-\bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\bar{\sigma}=F(\tau). \tag{7}$$

Докажем, что уравнение (7) разрешимо, какова бы ни была функция $F(\tau)$. С этой целью рассмотрим однородное уравнение

$$\omega_0(\tau)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\omega_0(\sigma)\,d\vartheta+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\overline{\omega_0(\sigma)}\,\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,\frac{\bar{\sigma}\ln|\sigma|-\bar{\tau}\ln|\tau|}{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}\,d\bar{\sigma}=0 \tag{8}$$

---

[1]) Д. И. Шерман [1], см. также книгу автора [7], § 56.

[2]) Мы получим эту систему, отделив в (7) действительные и мнимые части и приняв за неизвестные $\operatorname{Re}\{\omega(\tau)\}$ и $\operatorname{Im}\{\omega(\tau)\}$.

и допустим, что оно имеет некоторое решение $\omega_0(\sigma)$. Положим

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega_0(\sigma)}{\sigma - t}\,d\sigma,\\ \Psi_0(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\omega_0(\sigma)}}{\sigma - t}\,d\sigma + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sigma\ln|\sigma|}{\sigma - t}\,\omega_0'(\sigma)\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти функции решают однородную задачу теории упругости, поэтому если мы положим

$$\varphi_0(z) = \Phi(e^{2\pi iz/L}), \qquad \psi_0(z) = \Psi(e^{2\pi iz/L}), \qquad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi_0'(z),$$

то необходимо $\varphi_0(z) = iaz + b$, $\psi(z) = -\bar{b}$ и, следовательно, $\psi_0(z) = -iaz - \bar{b}$, где a и b — постоянные. Так как $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ периодичны, то $a = 0$ и потому $\varphi_0(z) = b$, $\psi_0(z) = -\bar{b}$. Подставив это в (9), мы получим тождества

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega_0(\sigma) - b}{\sigma - t}\,d\sigma &= 0,\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma\ln|\sigma|\,\omega_0'(\sigma) + \bar{b}}{\sigma - t}\,d\sigma &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

верные, если t лежит внутри Γ. Отсюда следует, что функции $\delta(t)$ и $\varepsilon(t)$, определенные на Γ равенствами

$$\left.\begin{aligned}i\delta(\sigma) &= \omega_0(\sigma) - b,\\ i\varepsilon(\sigma) &= \overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma\ln|\sigma|\,\omega_0'(\sigma) + \bar{b},\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

голоморфны вне Γ и равны нулю при $t = \infty$. Исключая из (11) $\omega_0(\tau)$, получим

$$\delta(\sigma) - 2\bar{\sigma}\ln|\sigma|\,\overline{\delta'(\sigma)} + \overline{\varepsilon(\sigma)} - 2bi = 0. \tag{12}$$

Область плоскости t, лежащая вне Γ, отвечает на плоскости z части полосы $0 \leqslant x \leqslant L$, лежащей под C. Уравнение (12) показывает, что $\delta(t)$ и $\varepsilon(t) + 2\bar{b}i$ решают периодическую задачу теории упругости при отсутствии внешних сил для области, лежащей под кривой $y = y(x)$. Но тогда $\delta(t) = b'$, $\varepsilon(t) + 2\bar{b}i = -\bar{b}'$. Так как $\delta(\infty) = 0$, то $b' = 0$ и, следовательно, $\delta(\sigma) \equiv 0$. Далее, $\varepsilon(\infty) = 0$ и, поэтому, $b = 0$; теперь из (11) следует $\omega_0(\sigma) \equiv 0$. Интегральное однородное уравнение (8) имеет единственное решение $\omega_0(\sigma) \equiv 0$. Отсюда следует, что уравнение (7) имеет решение, и притом единственное, какова бы ни была его правая часть.

Отделив в (7) вещественные и мнимые части и приняв за неизвестные функции $\omega_1(\tau) = \operatorname{Re}\{\omega(\tau)\}$ и $\omega_2(\tau) = \operatorname{Im}\{\omega(\tau)\}$, мы получим систему фредгольмовых уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(\tau) + \int_\Gamma \{K_{11}(\tau, \sigma)\,\omega_1(\sigma) + K_{12}(\tau, \sigma)\,\omega_2(\sigma)\}\,ds_\sigma = F_1(\tau), \\ \omega_2(\tau) + \int_\Gamma \{K_{21}(\tau, \sigma)\,\omega_1(\sigma) + K_{22}(\tau, \sigma)\,\omega_2(\sigma)\}\,ds_\sigma = F_2(\tau), \\ ds_\sigma = |\,d\sigma\,|, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где ядра $K_{mn}(\tau, \sigma)$ непрерывны и где обозначено $F_1(\tau) = \operatorname{Re}\{F(\tau)\}$, $F_2(\tau) = \operatorname{Im}\{F(\tau)\}$.

Как мы доказали, система (13) разрешима единственным образом. Разрешающие ядра этой системы, которые мы обозначим через $R_{mn}(\tau, \sigma)$, непрерывны в силу непрерывности ядер $K_{mn}(\tau, \sigma)$. Решение системы (13) имеет вид

$$\omega_1(\tau) = F_1(\tau) + \int_\Gamma \{R_{11}(\tau, \sigma)\,F_1(\sigma) + R_{12}(\tau, \sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma,$$

$$\omega_2(\tau) = F_2(\tau) + \int_\Gamma \{R_{21}(\tau, \sigma)\,F_1(\sigma) + R_{22}(\tau, \sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma.$$

Второе выражение умножим на i и прибавим к первому. Обозначая $R_{11} + iR_{21} = R_1$, $R_{12} + iR_{22} = R_2$, будем иметь

$$\omega(\tau) = F(\tau) + \int_\Gamma \{R_1(\tau, \sigma)\,F_1(\sigma) + R_2(\tau, \sigma)\,F_2(\sigma)\}\,ds_\sigma. \qquad (14)$$

В качестве основного пространства нашей задачи введем гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ [1]). Ядра R_1 и R_2, будучи непрерывными, ограничены. Отсюда следует, что

$$\int_\Gamma \int_\Gamma |\,R_k(\tau, \sigma)\,|^2\,ds_\sigma\,ds_\tau < B^2, \qquad k = 1,\ 2,$$

где B — некоторая постоянная. Из формулы (14) следует, что $\|\omega\| \leqslant \|F\| + B(\|F_1\| + \|F_2\|)$. Далее,

$$\|\,F\,\|^2 = \int_\Gamma |\,F(\tau)\,|^2\,ds_\tau = \int_\Gamma \{F_1^2(\tau) + F_2^2(\tau)\}\,ds_\tau = \|\,F_1\,\|^2 + \|\,F_2\,\|^2.$$

[1]) С тем же успехом можно ввести пространство $L_2(p; \Gamma)$ с любым весом p, ограниченным сверху и снизу положительными числами. Мы этим воспользуемся в § 112.

Отсюда $\|F_1\| \leqslant \|F\|$, $\|F_2\| \leqslant \|F\|$. Это дает

$$\|\omega\| \leqslant B_1 \|F\|, \quad B_1 = 1 + 2B. \tag{15}$$

Из второй формулы (6) следует, что во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω, имеют место оценки вида [1])

$$|\Phi(t)| \leqslant D_1 \|\omega\|, \quad |\Psi(t)| \leqslant D_2 \|\omega\|, \quad D_1, D_2 = \text{const},$$

или, если воспользоваться оценкой (15),

$$\left.\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leqslant D \|F\|, \\ |\Psi(t)| &\leqslant D' \|F\|. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Далее, на основании той же формулы (15) и леммы 1 § 105

$$\|\Phi\| \leqslant D_0 \|F\|, \quad D_0 = \text{const}. \tag{17}$$

Сделаем теперь следующее замечание. Из краевого условия (5) $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются не вполне однозначно — можно заменить $\Phi(t)$ через $\Phi(t) + A$, а $\Psi(t)$ — через $\Psi(t) - \bar{A}$, где A — произвольная постоянная. При нашем способе решения этот произвол устранен благодаря специальному представлению функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ по формулам (6), и именно для функций, определяемых этими формулами, установлены оценки (16) и (17). Докажем теперь, что указанные оценки сохраняют силу (разумеется, при измененных значениях постоянных D, D' и D_0), если нормировать $\Phi(t)$ так, чтобы $\Phi(0) = 0$. Действительно, чтобы добиться такой нормировки, достаточно из функции $\Phi(t)$, определяемой формулой (6), вычесть постоянную $A = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$. К функции $\Psi(t)$ необходимо прибавить $\bar{A} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}} d\bar{\sigma}$. Обозначая новые функции через $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$, имеем

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - t} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma = \Phi(t) - A,$$

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - t} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\sigma \ln (\sigma)}{\sigma - t} \omega'(\sigma)\, d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \Psi(t) + \bar{A}.$$

---

[1]) Чтобы получить оценку для $|\Psi(t)|$, следует сперва второй интеграл в выражении $\Psi(t)$ взять по частям.

Теперь $\|\Phi_1(t)\| \leqslant \|\Phi(t)\| + \|A\| \leqslant D_0\|F\| + \|A\|$. Далее,

$$\|A\|^2 = \int_\Gamma |A|^2 ds_\sigma = |A|^2 l, \tag{18}$$

где l — длина контура Г. С другой стороны,

$$|A|^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\left\{\int_\Gamma \frac{|\omega(\sigma)|}{|\sigma|} ds_\sigma\right\}^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \frac{ds_\sigma}{|\sigma|^2}\int_\Gamma |\omega(\sigma)|^2 ds_\sigma.$$

Обозначим через δ кратчайшее расстояние от начала координат до Г. Тогда $1/|\sigma| \leqslant 1/\delta$, и $|A|^2 \leqslant \frac{l}{4\pi^2\delta^2}\|\omega\|^2$. Подставив это в (18) и воспользовавшись оценкой (15), мы получим $\|A\| \leqslant \frac{B_1 l}{2\pi\delta}\|F\|$. Отсюда $\|\Phi_1\| \leqslant C_0\|F\|$, $C_0 = D_0 + B_1 l/(2\pi\delta)$. Таким образом, $\Phi_1(t)$ имеет оценку типа (17). Точно так же доказывается, что $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ имеют оценку типа (16).

Оценки (16) и (17) позволяют обосновать применение метода наименьших квадратов к нашей задаче. Положим приближенно

$$\Phi(t) \approx \Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k, \quad \Psi(t) \approx \Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k;$$

обозначим

$$F_n(\tau) = \Phi_n(\tau) - 2\bar{\tau}\ln|\tau|\,\overline{\Phi_n'(\tau)} + \overline{\Psi_n(\tau)}$$

и определим коэффициенты a_k и b_k из условия

$$\|F - F_n\|^2 = \min. \tag{19}$$

Повторяя рассуждения § 110, найдем, что $\|F - F_n\| \to 0$. Отсюда на основании оценок (16) и (17) вытекает, что $\|\Phi - \Phi_n\| \to 0$ и что $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$, $\Psi_n(t) \to \Psi(t)$ равномерно во всякой области, целиком лежащей внутри Г.

§ 112. Напряжения в упругой области, ограниченной синусоидой

Для иллюстрации метода рассмотрим случай, когда упругая среда заполняет область, расположенную над синусоидой $y = \sin x$.

Для упрощения вычислений допустим, что к границе области приложены только нормальные усилия, которые изменяются периодически по закону

$$Y_\gamma = -q\cos x/\sqrt{1+\cos^2 x}, \quad q = \text{const}. \tag{1}$$

Тогда

$$f(s)=i\int (X_\nu+iY_\nu)\,ds=q\sin x. \tag{2}$$

Преобразование

$$t=e^{iz} \tag{3}$$

переводит дугу синусоиды $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ в контур Γ, уравнение которого (здесь x играет роль параметра)

$$\tau=e^{i(x+i\sin x)}=e^{-\sin x}(\cos x+i\sin x). \tag{4}$$

Уравнение (5) в § 111 в нашем случае принимает вид

$$\Phi(\tau)-2\bar\tau\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)}+\overline{\Psi(\tau)}=-q\ln|\tau|. \tag{5}$$

Контур Γ симметричен относительно мнимой оси, поэтому если точка τ лежит на Γ, то на Γ лежит и точка $-\bar\tau$. Заменим в (5) τ на $-\bar\tau$ и в полученном равенстве заменим все члены сопряженными:

$$\overline{\Phi(-\bar\tau)}+2\bar\tau\ln|\tau|\Phi'(-\bar\tau)+\Psi(-\bar\tau)=-q\ln|\tau|. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что наряду с функциями $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ нашу задачу решают также функции $\overline{\Phi(-\bar t)}$ и $\overline{\Psi(-\bar t)}$. Но функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются единственным образом, если только выполнено условие нормировки, например, вида $\Phi(0)=0$. Отсюда следует, что

$$\overline{\Phi(-\bar t)}=\Phi(t),\qquad \overline{\Psi(-\bar t)}=\Psi(t). \tag{7}$$

Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ разложены в ряды по полиномам

$$\Phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}z^k,\qquad \Psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}b_{nk}z^k,$$

то в силу (7) можно считать, что

$$a_{nk}=(-1)^k\bar a_{nk},\qquad b_{nk}=(-1)^k\bar b_{nk}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что коэффициенты при четных степенях t вещественные, а при нечетных — чисто мнимые. Приближенные значения $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ будем искать в виде полиномов четвертой степени. В силу сказанного выше их можно искать в виде

$$\Phi(t)=ia_1t+a_2t^2+ia_3t^3+a_4t^4,$$
$$\Psi(t)=a_5+ia_6t+a_7t^2+ia_8t^3+a_9t^4,$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_9$ — вещественные. Условие (19) § 111 принимает вид

$$\| ia_1\tau + a_2\tau^2 + ia_3\tau^3 + a_4\tau^4 - 2\bar\tau \ln|\tau| (-ia_1 + 2a_2\bar\tau - 3ia_3\bar\tau^2 + 4a_4\bar\tau^3) + \\ + a_5 - ia_6\bar\tau + a_7\bar\tau^2 - ia_8\bar\tau^3 + a_9\bar\tau^4 \|^2 = \min. \tag{9}$$

Обозначим через $\varphi_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots, 9$, множитель при a_k под знаком нормы в (9), так что, например,

$$\varphi_1(\tau) = i(\tau + 2\bar\tau \ln|\tau|), \quad \varphi_2(\tau) = \tau^2 - 4\bar\tau^2 \ln|\tau|, \tag{10}$$

и т. д. Условие (9) принимает более простой вид

$$\left\| \sum_{k=1}^{9} a_k\varphi_k + q \ln|\tau| \right\|^2 = \min. \tag{11}$$

Отсюда, учитывая, что коэффициенты a_k вещественные, мы придем к системе

$$\sum_{k=1}^{9} a_k \operatorname{Re}\{(\varphi_k, \varphi_j)\} = -q \operatorname{Re}\{(\ln|\tau|, \varphi_j)\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 9. \tag{12}$$

Введем пространство $L_2(p, \Gamma)$ с весом $p = 1/\sqrt{1+\cos^2 x}$ Тогда вычисление интегралов, входящих в коэффициенты системы (12), может быть довольно просто выполнено с помощью известной формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} \cos m\theta \, d\theta = i^m J_m(z),$$

верной при m целом; здесь J_m — функция Бесселя первого рода и индекса m. Заменив z на in, мы приведем эту формулу к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-n\cos\theta} \cos m\theta \, d\theta = i^m J_m(in).$$

Вычислим, например, величину (φ_1, φ_1), которая является коэффициентом при a_1 в первом уравнении системы (12). Имеем

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_\Gamma (\tau + 2\bar\tau \ln|\tau|)(\bar\tau + 2\tau \ln|\tau|) \frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \\ = \int_\Gamma \{|\tau|^2 + 4|\tau|^2 \ln^2|\tau| + 2(\tau^2 + \bar\tau^2)\ln|\tau|\} \frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

Введем в качестве переменной интегрирования x по формуле $\tau = e^{i(x+i\sin x)}$. Тогда

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(1 + 4\sin^2 x - 4\sin x\cos 2x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(3 + 2\sin x - 2\cos 2x - 2\sin 3x)\,dx.$$

Сделаем подстановку $x = \pi/2 + y$; в силу периодичности подынтегральной функции можно принять за пределы интегрирования $-\pi$ и π:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\cos y}(3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\,dy =$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{-3\cos y}(3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\,dy =$$

$$= 2\pi\,[3J_0(3i) + 2iJ_1(3i) - 2J_2(3i) - 2iJ_3(3i)].$$

По таблицам Янке и Эмде ([1], стр. 342) находим $(\varphi_1, \varphi_1) = 2\pi(3\cdot 4{,}8808 - 2\cdot 3{,}9534 + 2\cdot 2{,}2452 - 2\cdot 0{,}9598) = 18{,}6128\pi$. Точно так же

$$(\varphi_1, \varphi_2) = i\int_\Gamma (\tau + 2\bar\tau\ln|\bar\tau|)(\bar\tau^2 - 4\tau^2\ln|\tau|)\frac{ds_\tau}{\sqrt{1+\cos^2 x}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-4\sin x}\{ie^{-ix} - (2ie^{-3ix} - 4ie^{3ix})\sin x - 8ie^{ix}\sin^2 x\}\,dx.$$

Отделяем вещественные части:

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^{2\pi} e^{-4\sin x}\{\sin x - 6\sin 3x\sin x + 8\sin^3 x\}\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-4\sin x}(7\sin x - 3\cos 2x + 3\cos 4x - 2\sin 3x\}\,dx,$$

что после подстановки $x = \pi/2 + y$ дает

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) = 2\int_0^{\pi} e^{-4\cos y}(7\cos y + 3\cos 2y + 2\cos 3y + 3\cos 4y)\,dy =$$

$$= 2\pi(-7\cdot 9{,}7595 + 3\cdot 6{,}4222 - 2\cdot 3{,}3373 + 3\cdot 1{,}4163) = -102{,}9512\pi.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Свободный член
1	18,613	−102,95	−339,25	897,26	−2,7558	−11,323	28,774	59,119	−110,91	2,01609
2	−102,95	670,49	2492,9	−7343,8	15,162	64,222	−184,47	−440,15	939,67	−14,4819
3	−339,25	2492,9	10485	−34528	40,356	197,78	−668,19	−1847,3	4490,7	−42,9789
4	897,26	−7343,8	−34528	126150	−89,697	−491,45	1904,5	6001,1	−16430	101,579
5	−2,7558	15,162	40,356	−89,697	2,5332	3,1812	−4,4904	−6,6746	10,216	−1,13049
6	−11,323	64,222	197,78	−491,45	3,1812	9,7616	−19,519	−35,011	60,301	−2,96859
7	28,774	−184,47	−668,19	1904,5	−4,4904	−19,519	54,480	122,68	−248,02	4,91329
8	59,119	−440.15	−1847,3	6001,1	−6,6746	−35,011	122,68	337,19	−799,75	7,83859
9	−110,91	939,67	4490,7	−16430	10,216	60,301	−248,02	−799,75	2187,2	12,4899

Аналогично определяются и остальные коэффициенты.

Для вычисления функций Бесселя от мнимого аргумента были использованы таблицы Янке и Эмде [1], а также «Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента», изд. АН СССР, 1950; в тех случаях, когда нужные значения аргумента отсутствовали в таблицах, была использована известная рекуррентная формула

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x).$$

На стр. 493 приведена таблица коэффициентов и свободных членов системы (12).

Решая систему (12), получим

$$\begin{array}{lll} a_1 = -0{,}6053, & a_4 = -0{,}002533, & a_7 = 0{,}2241, \\ a_2 = -0{,}1226, & a_5 = 0{,}01649, & a_8 = -0{,}1723, \\ a_3 = 0{,}007774, & a_6 = -0{,}3763, & a_9 = -0{,}04594. \end{array}$$

Величина (11), соответствующая построенному приближению, равна $0{,}0159\pi q^2$. Отметим, что

$$\| \ln |\tau| \|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x e^{-\sin x}\, dx = 1{,}4018\pi.$$

Отсюда видно, что построенное приближение удовлетворяет в среднем краевым условиям с погрешностью, равной

$$\sqrt{\frac{0{,}0159}{1{,}4018}} \approx 10\%.$$

§ 113. Об одном прямом методе, близком к методу наименьших квадратов[1])

1°. Рассмотрим уравнение

$$Lu = A_0 u + Ku = f, \tag{1}$$

в котором A_0 и K — некоторые линейные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H; будем считать, что $D_{A_0} \subset D_K$. Для приближенного решения уравнения (1) иногда используется[2]) прямой метод, весьма близкий к методу наименьших квадратов: выбирается координатная последовательность $\varphi_n \in D_{A_0}$, $n = 1, 2, \ldots$, и строится приближенное решение в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k; \tag{2}$$

[1]) См. статью автора [21].

[2]) См., например, М. Ф. Кравчук [1].

коэффициенты a_k определяются из линейной алгебраической системы

$$(Lu_n,\ A_0\varphi_j) = (f,\ A_0\varphi_j), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* 1) *уравнение* (1) *разрешимо единственным образом*; 2) *оператор* A_0^{-1} *ограничен и определен на всем пространстве* H; 3) *оператор* $T = KA_0^{-1}$ *вполне непрерывен в* H; 4) *система элементов* $\{\varphi_n\}$ A_0*-полна в* H. *Тогда для достаточно больших* n *система* (3) *разрешима единственным образом и имеют место соотношения*

$$u_n \to u_0, \tag{4}$$

$$Lu_n \to f, \tag{5}$$

где u_0 — *решение уравнения* (1).

Доказательство. Положим $A_0\varphi_n = \psi_n$, $A_0u_n = v_n$, $A_0u_0 = v_0$. Элемент v_0 удовлетворяет уравнению

$$v_0 + Tv_0 = f, \tag{6}$$

в котором оператор T вполне непрерывен; к уравнению (6) можно применить процесс Бубнова — Галеркина[1]), причем, в силу условия 4) теоремы 1, систему $\{\psi_n\}$ можно принять за координатную, а это приведет нас к системе (3). Отсюда сразу вытекает, что эта система единственным образом разрешима, если только n достаточно велико. Далее, имеем $v_n \to v_0$ или $A_0u_n \to A_0u_0$; так как оператор A_0^{-1} ограничен, то $u_n \to u_0$. Наконец, $Ku_n = Tv_n \to Tv_0 = Ku_0$ и, следовательно, $Lu_n \to Lu_0 = f$.

2°. Рассмотрим случай, когда A_0 — невырождающийся эллиптический оператор вида $A_0u = -\sum\limits_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$, заданный на функциях, которые обращаются в нуль на границе данной конечной области Ω m-мерного пространства. Пусть K — дифференциальный оператор первого порядка, коэффициенты которого по крайней мере ограничены; координатные функции выберем так, чтобы условие 4) теоремы 1 было выполнено. Краевую задачу предположим разрешимой единственным образом.

Нетрудно видеть[2]), что к этой задаче можно применить теорему 1. Действительно, условие 2), очевидно, выполнено, более того, оператор A_0^{-1} вполне непрерывен в $H = L_2(\Omega)$.

[1]) См. § 94.

[2]) Дальше используются некоторые факты теории соболевских пространств, а также некоторые понятия и теоремы функционального анализа. См. В. И. Смирнов [4], Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1].

Проверим условие 3). Как известно, оператор $A_0^{-1/2}$ переводит любую функцию из $L_2(\Omega)$ в некоторую функцию из $W_2^{(1)}(\Omega)$; последующее применение оператора K дает опять функцию из $L_2(\Omega)$. Оператор $KA_0^{-1/2}$ определен, таким образом, на всем пространстве $L_2(\Omega)$; из замкнутости оператора обобщенного дифференцирования вытекает, что оператор $KA_0^{-1/2}$ замкнут и потому ограничен в H, но тогда оператор KA_0^{-1} вполне непрерывен в H.

3°. Введем теперь в рассмотрение гильбертово пространство H_1, в котором скалярное произведение и норма определяются формулами $(u, v)_1 = (A_0u, A_0v)$, $\quad \| u \|_1 = \| A_0u \|$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1, *и пусть, кроме того, оператор* $T' = A_0^{-1}K$ *вполне непрерывен в* H_1, *а система* $\{\varphi_n\}$ *полна в* H_1 [1]). *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 1.

Система уравнений (3) очевидным образом преобразуется в следующую:

$$(u_n + T'u_n, \ \varphi_j)_1 = (F, \ \varphi_j)_1; \qquad F = A_0^{-1}f. \tag{7}$$

Систему (7) можно получить также, применяя метод Бубнова — Галеркина к уравнению $u + T'u = F$, которое эквивалентно уравнению (1) и содержит вполне непрерывный оператор. Отсюда сразу вытекает, что система (3) единственным образом разрешима при достаточно большом n и что $\| u_n - u_0 \|_1 = \| A_0(u_n - u_0) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Теперь из ограниченности оператора A^{-1} вытекает соотношение (4). Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \| K(u_n - u_0) \| = \lim_{n\to\infty} \| T'(u_n - u_0) \|_1 = 0,$$

и справедливо соотношение (5).

Сходимость рассматриваемого процесса для указанного выше эллиптического уравнения вытекает также и из теоремы 2.

§ 114. Применение метода наименьших квадратов к отысканию собственных значений

Пусть A — самосопряженный (но не обязательно положительный) оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Будем считать, что спектр оператора A дискретен, т. е. что его собственные числа, которые могут быть поло-

---

[1]) Для этого достаточно, чтобы система $\{\varphi_n\}$ была A_0-полна в H.

жительными, отрицательными или равными нулю, все имеют конечную кратность и сгущаются только на бесконечности, а система собственных элементов оператора полна в H [1]).

Пусть собственные числа оператора A, занумерованные в каком-либо порядке, суть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_n, \ldots$ суть соответствующие им ортонормированные собственные элементы. Если μ — некоторое вещественное число, то оператор $B = A - \mu E$ (E — тождественный оператор) также самосопряженный, и его спектр состоит из собственных чисел $\lambda_n - \mu$, $n = 1, 2, \ldots$, которым соответствуют те же собственные элементы φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ Докажем, что собственные числа оператора $B^2 = (A - \mu E)^2$ суть $(\lambda_n - \mu)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$B\varphi_n = (\lambda_n - \mu)\,\varphi_n. \tag{1}$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор B, получим

$$B^2\varphi_n = (\lambda_n - \mu)\,B\varphi_n = (\lambda_n - \mu)^2\,\varphi_n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $(\lambda_n - \mu)^2$ есть собственное число оператора B^2. С другой стороны, пусть λ' — собственное число оператора B^2 и φ' — соответствующий собственный элемент $B^2\varphi' - \lambda'\varphi' = 0$. Это можно представить в виде

$$\left(B + \sqrt{\lambda'}\,E\right)\left(B - \sqrt{\lambda'}\,E\right)\varphi' = 0.$$

Положим $\left(B - \sqrt{\lambda'}\,E\right)\varphi' = \omega$. Может случиться, что $\omega = 0$, тогда $+\sqrt{\lambda'}$ есть собственное число оператора B. Если же $\omega \neq 0$, то равенство $\left(B + \sqrt{\lambda'}\,E\right)\omega = 0$ показывает, что $-\sqrt{\lambda'}$ есть собственное число того же оператора. Таким образом, либо $+\sqrt{\lambda'}$, либо $-\sqrt{\lambda'}$ (а, может быть, и оба эти числа) находятся среди чисел $\lambda_n - \mu$; во всех случаях число λ' находится среди чисел $(\lambda_n - \mu)^2$, что и требовалось доказать.

Равенства (1) и (2) показывают, что все собственные элементы оператора A суть также собственные элементы оператора B^2; этот оператор имеет, следовательно, полную в H систему собственных элементов. С другой стороны, поскольку $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, то и $(\lambda_n - \mu)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, и, ясно, что оператор B^2 имеет дискретный спектр.

Из известных теорем теории операторов в гильбертовом пространстве вытекает, что B^2 — самосопряженный оператор. Его наименьшее собственное число есть наименьшее из чисел

[1]) Требование дискретности спектра на самом деле необязательно и может быть ослаблено. О понятии самосопряженного оператора см. В. И. Смирнов [4] или Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1].

$(\lambda_n-\mu)^2$ — пусть это будет $(\lambda_j-\mu)^2$. По формулам (6) и (7) § 40

$$(\lambda_j-\mu)^2=\min_{u\in D_B^2}(B^2u,\ u), \tag{3}$$

где минимум ищется при дополнительном условии

$$(u,\ u)=\|u\|^2=1. \tag{4}$$

Если μ есть собственное число оператора A, то $\mu=\lambda_j$, оператор B^2 имеет собственное число, равное нулю, и не является положительно определенным. Если же μ не есть собственное число оператора A, то $(\lambda_j-\mu)^2>0$ и оператор B^2 положительно определен. В этом случае, как доказано в п. 1 теоремы 3 § 40, можем написать

$$(\lambda_j-\mu)^2=\min_{u\in H_{B^2}}|u|_{B^2}^2 \tag{5}$$

при дополнительном условии (4). Ниже мы предполагаем, что μ не есть собственное число оператора A.

Для дальнейшего существенно, что множество элементов энергетического пространства H_{B^2} совпадает с областью D_A определения оператора A и что

$$|u|_{B^2}=\|Au-\mu u\|. \tag{6}$$

Наметим доказательство последнего утверждения. Нетрудно доказать, что $D_B=D_A$; каждое из этих множеств состоит из тех и только тех элементов, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(u,\ \varphi_n)|^2\lambda_n^2;\quad \text{при этом}\quad Bu=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\ \varphi_n)(\lambda_n-\mu)\varphi_n. \tag{7}$$

Аналогично D_{B^2} состоит из тех и только тех элементов, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|(u,\ \varphi_n)|^2\lambda_n^4$, и $B^2u=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\ \varphi_n)(\lambda_n-\mu)^2\varphi_n$.

Рассмотрим оператор $|B|$, определяемый формулой

$$|B|u=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\ \varphi_n)|\lambda_n-\mu|\varphi_n. \tag{8}$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор, квадрат которого равен B^2; можно писать поэтому $|B|=\sqrt{B^2}$. Очевидно, область $D_{|B|}$ состоит из тех и только тех элементов, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(u,\ \varphi_n)|^2\cdot|\lambda_n-\mu|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,\ \varphi_n)|^2(\lambda_n-\mu)^2.$$

Но этот ряд сходится одновременно с рядом (7); отсюда следует, что $D_{|B|}=D_B=D_A$.

Как известно из теории операторов, такой «квадратный корень» можно построить для любого положительного оператора. В книге автора [11] показано, что энергетическое пространство H_C любого положительно определенного и самосопряженного оператора C состоит из тех же элементов, что и область $D_{\sqrt{C}}$, и что $|u|_C = \| \sqrt{C} u \|$. В нашем случае это означает, что H_{B^2} и $D_{|B|} = D_A$ состоят из одних и тех же элементов и что $|u|_{B^2} = \| |B| u \|$. Но из формулы (8) видно, что

$$\| |B| u \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 \cdot |\lambda_n - \mu|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 (\lambda_n - \mu)^2 = \| Bu \|^2 = \| Au - \mu u \|^2,$$

и наше утверждение доказано. Теперь ясно, что

$$(\lambda_j - \mu)^2 = \min_{u \in D_A} \| Au - \mu u \|^2 \tag{9}$$

при дополнительном условии (4); очевидно, что минимум достигается при $u = \varphi_j$.

Формула (9) показывает, что для определения собственного числа, ближайшего к заданному числу μ, можно пользоваться методом наименьших квадратов. Более определенно, эта формула дает способ уточненного определения любого собственного числа λ_j самосопряженного оператора A с дискретным спектром, если известно приближенное значение для λ_j, более близкое к λ_j, чем к любому другому собственному числу. Пусть μ — указанное приближенное значение. Чтобы определить точное значение λ_j, достаточно найти величину $\delta^2 = \min\limits_{u \in D_A} \| Au - \mu u \|^2$; $\|u\|^2 = 1$. Тогда $\lambda_j = \mu \pm \delta$; знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли μ приближенным значением с недостатком или с избытком.

Для приближенного вычисления величины δ, т. е. минимума (9), воспользуемся обычным приемом. Выберем координатную систему $\{\psi_n\}$, B-полную в H; такая система одновременно полна в H (см. § 102); из формулы (6) легко усмотреть, что система $\{\psi_n\}$ полна и в энергетическом пространстве H_{B^2}. Заметим, что если нуль не есть собственное число оператора A, то существует ограниченный оператор A^{-1} и полнота в H вытекает из A-полноты. В этом случае достаточно выбрать координатную систему A-полной — нетрудно видеть, что такая система одновременно и B-полна. Потребуем еще, чтобы при любом n элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ были линейно независимы. Положим $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \psi_k$

и определим постоянные a_k из условий

$$\| u \|^2 = \sum_{k,\ m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (\psi_k,\ \psi_m) = 1, \tag{10}$$

$$\| Au - \mu u \|^2 = \sum_{k,\ m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\psi_k - \mu\psi_k,\ A\psi_m - \mu\psi_m) = \min. \tag{11}$$

Обычным способом мы приходим к линейной однородной алгебраической системе

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (\alpha_{km} - \rho\beta_{km}) = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{12}$$

где $\alpha_{km} = (A\psi_k - \mu\psi_k,\ A\psi_m - \mu\psi_m)$, $\beta_{km} = (\psi_k,\ \psi_m)$; через ρ обозначен множитель Лагранжа. Иключая из системы (12) неизвестные a_k, получим уравнение для ρ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho\beta_{11} & \alpha_{12} - \rho\beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n} - \rho\beta_{1n} \\ \alpha_{21} - \rho\beta_{21} & \alpha_{22} - \rho\beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n} - \rho\beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} - \rho\beta_{n1} & \alpha_{n2} - \rho\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \rho\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Оператор A самосопряженный, а число μ вещественное. Отсюда следует, что $\alpha_{km} = \overline{\alpha_{mk}}$, т. е. что матрица элементов α_{km} эрмитова и корни уравнения (13) вещественные. Подставив какой-либо корень этого уравнения в систему (12), мы сделаем ее определитель равным нулю; значения неизвестных определяются тогда с точностью до произвольного множителя, который можно будет найти из уравнения (10).

Уравнение (12) умножим на a_m и просуммируем по m. Используя (11) и (12), получим $\rho = \|Au_n - \mu u_n\|^2$. Отсюда видно, что $\min \|Au_n - \mu u_n\|^2$ равен наименьшему из корней уравнения (13). Уточненное значение числа λ_j мы найдем по формуле $\lambda_j \approx \lambda_j^{(n)} = \mu \pm \sqrt{\rho_1^{(n)}}$, где $\rho_1^{(n)}$ означает наименьший из корней уравнения (13); знак плюс или минус, как и выше, выбирается в зависимости от того, будет ли μ приближенным значением с недостатком или с избытком.

Нетрудно доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_j^{(n)} = \lambda_j$.

Формула (9) получена в статье Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1] применительно к двум случаям, когда оператор A есть либо симметричный оператор Фредгольма, либо обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка, самосопряженный в смысле Лагранжа и определенный на функциях, которые обращаются в нуль на концах заданного сегмента. В этой работе авторы производят также некоторые оценки разности $|\lambda_j - \lambda_j^{(n)}|$ в зависимости от n.

§ 115. Пример

Для иллюстрации метода § 114 рассмотрим задачу о собственных числах оператора

$$-\frac{d^2}{dx^2}, \quad u(0)=0, \quad u'(1)+u(1)=0. \tag{1}$$

Общий интеграл уравнения $-d^2u/dx^2=\lambda u$ имеет вид

$$u=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x; \tag{2}$$

краевые условия дают $C_1=0$ и

$$\nu+\operatorname{tg}\nu=0, \qquad \nu=\sqrt{\lambda}; \tag{3}$$

корни этого уравнения нетрудно найти с достаточной точностью; их квадраты дают собственные числа задачи.

Оператор (1) положительно определенный (§ 21) и имеет дискретный спектр (§ 45); наименьшее собственное число оператора (1) $\lambda_1>0$. Положим $\mu=0$. Ближайшее к нулю собственное число оператора (1) есть λ_1. По формуле (9) § 114 $\lambda_1^2=$ $=\min\int\limits_0^1[u''(x)]^2\,dx$ при дополнительном условии $\int\limits_0^1 u^2(x)\,dx=1$.

В качестве координатных функций возьмем простейшие полиномы, удовлетворяющие краевым условиям (1). Соответствующая собственная функция имеет вид $C_2\sin\sqrt{\lambda_1}\,x$ и, следовательно, нечетная, поэтому достаточно ограничиться полиномами нечетной степени. Нетрудно проверить, что полиномы

$$\psi_n(x)=x^{2n-1}-\frac{n}{n+1}x^{2n+1}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

удовлетворяют краевым условиям (1); полнота этой системы, а также ее A-полнота очевидны. Ограничиваясь тремя членами, положим $u_3=a_1\psi_1+a_2\psi_2+a_3\psi_3$; уравнение (13) § 114 принимает вид

$$\begin{vmatrix} 3-\frac{71}{420}\rho & 2-\frac{19}{270}\rho & \frac{3}{2}-\frac{211}{5544}\rho \\ 2-\frac{19}{270}\rho & \frac{340}{63}-\frac{273}{2079}\rho & \frac{39}{7}-\frac{107}{5148}\rho \\ \frac{3}{2}-\frac{211}{5544}\rho & \frac{39}{7}-\frac{107}{5148}\rho & \frac{2263}{308}-\frac{149}{11440}\rho \end{vmatrix}=0$$

или, после раскрытия определителя,

$$-0{,}25547\cdot 10^{-6}\rho^3+0{,}193776\cdot 10^{-2}\rho^2-1{,}0794647\rho+17{,}731598=0.$$

Наименьший корень этого уравнения $\rho_1^{(3)}=16{,}940326$, откуда $\lambda_1^{(3)}=\sqrt{\rho_1^{(3)}}=4{,}11586$.

Значение $\nu_1^{(3)}=\sqrt{\lambda_1^{(3)}}=2{,}02876$ удовлетворяет уравнению (3) с точностью до единицы последнего знака.

ЛИТЕРАТУРА

Андерсен Р. С. (Anderssen R. S.)

1. Variational methods and parabolic differential equations, University of Adelaide, South Australia, 1967.

Андерсен Р. С., Осборн М. Р. (ред.) (Anderssen R. S., Osborne M. R. (ed.))

1. Least square methods in data analysis, The Australian Nat. Univ., Computer Centre Publ., Canberra, 1969.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.

1. Теория линейных операторов, «Наука», 1966.

Бари Н. К.

1. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем. **18**, № 2 (1954), 159—176.

Бергман С. и Шиффер М. (Bergmann Stefan and Schiffer M.)

1. Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, N. Y., Acad. Press, 1953.

Бертрам Г. (Bertram G.)

1. Fehlerabschätzung für das Ritz — Galerkinsche Verfahren bei Eigenwertproblemen, ZAMM **37**, H. 5/6 (1957), 191—201.

Бирман М. Ш.

1. Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска, УМН V, вып. 3 (37) (1950).
2. О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска, Зап. Ленингр. горн. ин-та **27**, вып. 1 (1952).
3. О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, ДАН СССР **93**, № 6 (1953).
4. О спектре сингулярных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР **97**, № 1 (1954).
5. О вариационном методе Трефтца для уравнения $\Delta^2 u = f$, ДАН СССР **101**, № 2 (1955).
6. Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Трефтца, Вестн. ЛГУ, № 13, сер. матем., мех. и астр., вып. 3 (1956).

Бубнов И. Г.

1. Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии им. Журавского, Сб. Ин-та инж. путей сообщения, вып. 81, СПБ. (1913).

Бэзли Н. (Bazley N. W.)

1. Lower bounds for eigenvalues, J. math. and mecan. **10**, № 2 (1961), 289—308.

Бэзли Н. и Фокс Д. (Bazley N. W., Fox D. W.)

1. Truncations in the method of intermediate problems for lower bounds to eigenvalues, J. Res. Nat. Bur. Standards — B. Math. and math. phys. **65B**, № 2 (1961), 105—111.
2. A procedure for estimate eigenvalues, J. Math. and Phys. 3, № 3 (1962).

3. Lower bounds to eigenvalues using operator decomposition of the form B^*B, Arch. ration. mecan. and analys. **10**, № 4 (1962), 352—360.
Вайникко Г. М.
1. Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения, Уч. зап. Тартуск. ун-та, Тр. по матем. и мех. **III** (1962), 394—416.
2. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова — Галеркина. I. Асимптотические оценки, Уч. зап. Тартуск. ун-та, Тр. по матем. и мех. **IV** (1964), 188—201.
3. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова — Галеркина. II. Оценки n-го приближения, Уч. зап. Тартуск. ун-та, Тр. по матем. и мех. **IV** (1964), 202—215.
4. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений, Ж. выч. матем. и матем. физ. **IV**, № 3 (1964), 405—424.
5. Оценки погрешности метода Бубнова — Галеркина в проблеме собственных значений, Ж. выч. матем. и матем. физ. **V**, № 4 (1965), 587—607.
6. О сходимости и устойчивости метода коллокации, Дифференциальные уравнения **1**, № 2 (1965), 244—254.
7. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений, Ж. выч. матем. и матем. физ. **VI**, № 1 (1966), 35—42.
8. О быстроте сходимости некоторых приближенных методов типа Галеркина в проблеме собственных значений, Изв. вузов, Математика, № 2 (51), (1966), 37—45.
9. О сходных операторах, ДАН СССР **179**, № 5 (1968), 1029—1031.
Вайнштейн А. (Weinstein A.)
1. Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques, Mém. sci. math., fasc. 88 (1937).
2. Some numerical results in intermediate problems for eigenvalues, Numerical solution of partial differential equations, 167—191, N. Y., Acad. Press, 1966.
Вейерштрасс К. (Weierstrass K.)
1. Ueber das sogenannte Dirichletsche Princip, Mathematische Werke v. K. Weierstrass, **2**, 1895.
Вейль Г. (Weil H.)
1. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, Rend. Circolo mat. Palermo, **39** (1915).
2. The method of ortogonal projections in potential theory, Duke Math. J. **7** (1940).
Вейнбергер Х. Ф. (Weinberger H. F.)
1. Error estimates in the Weinstein method for eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 643—646.
2. An optimum problem in Weinsteins method for eigenvalues, Pacif. J. Math. **2** (1952), 413—418.
Вержбинская Ю. С., Канарева Н. П., Михлин С. Г., Самокиш Б. А.
1. Решение одной трехмерной задачи теории упругости методом Ритца, Ж. выч. матем. и матем. физ. **7**, № 5 (1967), 1134—1143.
Вишик М. И.
1. Метод ортогональных проекций для самосопряженных уравнений, ДАН СССР **56**, № 2 (1947).
2. Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений, ДАН СССР **58**, № 6 (1947).
3. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. **25** (**67**), № 2 (1949).
4. О первой краевой задаче для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, ДАН СССР **93**, № 1 (1953).

5. О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, ДАН СССР **93**, № 2 (1953).

6. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Матем. сб. **35**(**77**), № 3 (1954).

7. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сб. **39**(**81**), № 1 (1956), 51—148.

8. Квазилинейные сильно эллиптические системы, имеющие дивергентную форму, Тр. Моск. матем. о-ва **12** (1963), 125—184.

Ворович И. И.

1. О существовании решений в нелинейной теории оболочек, Изв. АН СССР, сер. матем. **19**, № 4 (1955).

Вулих Б. З.

1. Введение в функциональный анализ, изд. 2-е, «Наука», 1967.

Галеркин Б. Г.

1. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин, Вестн. инженеров, № 19 (1915), 897—908.

Гантмахер Ф. Р.

1. Теория матриц, «Наука», 1967.

Гельфанд И. М.

1. Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.

Гобсон Е. В.

1. Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1953.

Годунов С. К., Прокопов Г. П.

1. Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильно эллиптических задачах, 1—41, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1968.

Гулд С. Х.

1. Вариационные методы в задачах о собственных значениях, «Мир», 1970.

Гусман Ю. А., Оганесян Л. А.

1. Оценки скорости сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений, Ж. выч. матем. и матем. физ. **5**, № 12 (1965), 351—356.

Даугавет И. К.

1. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений, Изв. вузов, Математика, № 5 (6), (1958), 158—165.

2. Исследование быстроты сходимости метода Б. Г. Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений, Автореферат диссертации, ЛГУ, 1959.

3. О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений, Сиб. матем. ж. **6**, № 1 (1965).

Де Вито Л., Фикера Г., Фушарди А., Шерф М. (De Vito L., Fichera G., Fusciardi A., Schaerf M.)

1. Sul calcolo degli autovalori della piastra quadrata incastrata longo il bordo, Rend. Accad. Naz. d. Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., **XL**, ser. VIII, fasc. 6 (1966), 725—733.

Демьянович В. К., Демьянович Ю. К.

1. О скорости сходимости проекционных методов для параболических уравнений, Ж. выч. матем. и матем. физ. **8**, № 2 (1963), 344—362.

Демьянович Ю. К.

1. Устойчивость метода сеток для эллиптических задач, ДАН СССР **164**, № 1 (1965), 20—23.

2. Об аппроксимации и сходимости метода сеток в эллиптических задачах, ДАН СССР **170**, № 1 (1966), 27—30.

3. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений, ДАН СССР **174**, № 3 (1967), 518—521,

Джишкариани А. В.

1. Некоторые оценки погрешности метода Ритца — Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тр. Тбил. матем. ин-та **26** (1959), 285—306.

2. Оценки погрешности метода Ритца для неоднородного дифференциального уравнения, Сообщ. АН Груз. ССР **25**, № 3 (1960), 257—262.

3. О быстроте сходимости приближенного метода Ритца, Ж. выч. матем. и матем. физ. **3**, № 4 (1963), 654—663.

4. О быстроте сходимости метода Бубнова — Галеркина, Ж. выч. матем. и матем. физ. **4**, № 2 (1964), 343—348.

Диас Х. (Diaz J. B.)

1. Upper and lower bounds for quadratic functionals, Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Problems, 279—289, Stillwater, Oklahoma, 1955.

Заремба С. (Zaremba S.)

1. Sur le principe de minimum, Bull. intern. l'Acad. d. sciences de Cracovie, Cl. des sciences math. et natur, № 7 (1909), 197—264.

2. Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann, J. math. pures et appl. **6**, № 2 (1927), 127—163.

3. L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques, Bull. intern. l'Acad. d. scienses de Cracovie, № 3 (1907).

4. Sur l'intégration de l'équation biharmonique, Bull. intern. l'Acad. d. scienses de Cracovie, № 1 (1908).

Ильин В. П.

1. Оценка погрешности в методе Ритца для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **53** (1959), 43—63.

2. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **53** (1959), 64—127.

Канторович Л. В.

1. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных, ДАН СССР **2**, № 9 (1934), 532—536.

2. Функциональный анализ и прикладная математика, УМН **III**, № 6 (28), (1948).

Канторович Л. В. и Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз. 1959.

Канторович Л. В. и Крылов В. И.

1. Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.

Карпиловская Э. Б.

1. О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений, УМН **VIII**, № 3 (55), (1953), 111—118.

2. О сходимости метода коллокации, ДАН СССР **151**, № 4 (1963), 766—769.

3. О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики, Сиб. матем. ж. **4**, № 3 (1963), 632—640.

Като Т. (Kato Tosio)

1. On some approximate methods concerning the operators T^*T, Math. Ann. **126**, № 3 (1953), 253—262.

Келдыш М. В.

1. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач, Изв. АН СССР, сер. матем. **6**, № 6 (1942).

2. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР **77**, № 2 (1951).

Кирхгоф Г. (Kirchhoff G.)

1. Ueber die Gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe, J. f. d. reine und angewande Math. **40** (1850).

Клиот-Дашинский М. И.

1. Решение задачи о статической деформации анизотропной однородной пластины методом ортогональных проекций, Уч. зап. ЛГУ, № 146, сер. физ. наук, вып. 8 (1952), 131—145.

2. Об одном способе решения плоской задачи теории потенциала, Сб. научн. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, вып. 17 (1954).

Кравчук М. Ф.

1. Застосування способу моментів до розв'язания лінійних дифференціальных та інтегральних рівнянь. Видавн. АН УРСР, 1936.

2. M. Krawtchouk. Sur la rèsolution approchée des équations intégrales linéaires, Compt. rend. Acad. sci. Française, **188** (1929), 978.

Красносельский М. А.

1. Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений, ДАН СССР **73**, № 6 (1950).

2. Некоторые задачи нелинейного анализа, УМН **IX**, вып. 3 (61), (1954).

3. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.

Крылов Н. М. (Kryloff N.)

1. Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique, Mém. sci. math., fasc. 49 (1931).

Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н.

1. Sur la calcul des racines de la transcendante de Frédholm etc, Изв. АН СССР, сер. ОМЕН, № 5 (1929).

Курант Р. (Courant R.)

1. Ueber ein Konvergenzerzeugen des Prinzips in der Variationsrechnung, Gött. Nachrichten, 1922.

2. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc. **49**, № 1 (1943), 1—23.

Курант Р. и Гильберт Д.

1. Методы математической физики. **1**, Гостехиздат, 1951.

2. Методы математической физики. **2**, Гостехиздат, 1951.

Курант Р., Фридрихс К. и Леви Г.

1. О разностных уравнениях математической физики, УМН, вып. VIII (1940), 125—160.

Лейбензон Л. С.

1. Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, 1943; см. также Л. С. Лейбензон, Собрание трудов **1**, Изд. АН СССР, 1951.

2. Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

Линь Хун-сун

1. Вариационные методы решения задачи кручения для многосвязных областей (на китайск. яз., резюме англ.), Ули сюэбао, Acta phys. sinica **9**, № 4 (1953), 221—237.

Мазья В. Г.

1. О разрешимости задачи Неймана, ДАН СССР **147** № 2 (1962), 294—296.

2. О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами, Сиб. матем. ж. **9**, № 6 (1968), 1322—1350.

Маховер Е. В.

1. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та, физ.-матем. ф-та **XVII**, вып. 2 (1957), 28—39.

2. О спектре собственных частот пластинки с острым краем, Уч. зап. Лен. пед. ин-та им. Герцена **197** (1958), 113—118.

Миранда К.

1. Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

Михлин С. Г.
1. Плоская задача теории упругости для неоднородной среды, Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 66 (1935).
2. Об одной теореме Ф. Нетера, ДАН СССР **43**, № 4 (1944).
3. О сходимости метода наименьших квадратов, ДАН СССР **59**, № 7 (1948).
4. О сходимости метода Галеркина, ДАН СССР **61**, № 2 (1948).
5. Сингулярные интегральные уравнения, УМН III, вып. 3 (25), (1948).
6. Метод наименьших квадратов в задачах математической физики, Уч. зап. ЛГУ, № 111, сер. матем. наук, вып. 16 (1949).
7. Интегральные уравнения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.
8. Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина, Уч. зап. ЛГУ, № 135, сер. матем. наук, вып. 21 (1950).
9. Некоторые теоремы теории операторов и их приложение к теории упругих оболочек, ДАН СССР **84**, № 5 (1952).
10. Оценка погрешности расчета упругой оболочки как плоской пластины, Прикл. матем. и мех. **16**, вып. 4 (1952).
11. Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
12. О вариационном методе решения краевых задач, Уч. зап. ЛГУ, № 144, сер. матем. наук, вып. 3 (1952).
13. О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям, ДАН СССР **91**, № 4 (1953).
14. Интегрирование уравнения Пуассона в бесконечной области, ДАН СССР **91**, № 5 (1953).
15. К теории вырождающихся эллиптических уравнений, ДАН СССР **94**, № 2 (1954).
16. Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., вып. 8 (1954).
17. Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам, В сб. «Вопросы прочности лопасти водяной турбины», 5—92, Изд. ЛГУ, 1954.
18. По поводу метода Ритца, ДАН СССР **106**, № 3 (1956).
19. О решениях с конечной энергией у эллиптических дифференциальных уравнений, Уч. зап. Лен. пед. ин-та им. Герцена, **183** (1958), 5—21.
20. Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
21. О сходимости одного прямого метода, УМН **15**, № 91 (1960), 221—223.
22. Об устойчивости метода Ритца, ДАН СССР **135**, № 1 (1960), 16—19.
23. Некоторые условия устойчивости метода Ритца, Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., вып. 4 (1961), 140—151.
24. О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца, Ж. выч. матем. и матем. физ. **2**, № 3 (1962), 437—444.
25. Об устойчивости некоторых вычислительных процессов, ДАН СССР **157**, № 2 (1964), 271—274.
26. Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966.
27. Некоторые свойства полиномиальных приближений по Ритцу, ДАН СССР **180**, № 2 (1968), 276—278.
28. Курс математической физики, «Наука», 1968.
29. Неравенства типа А. А. Маркова и полиномиальные приближения по Ритцу, Тр. симпоз. по уравн. в частн. произв., «Наука», 1970.
30. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.

Морэн К.
1. Замечания о методах Трефтца и Ритца, Бюлл. Польск. АН, отд. 3, III, вып. 11 (1955), 569—573.
2. Методы гильбертова пространства, «Мир», 1965.

Мусхелишвили Н. И.
1. Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.
2. Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966.
Наймарк М. А.
1. Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
Натансон И. П.
1. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1957.
2. Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
Новожилов В. В.
1. Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948.
Обэн Ж. П. (Aubin J. P.)
1. Approximation des espaces de distributions et des opérateurs differentielles, Bull. Soc. math. France, mém. 12 (1967), 1—139.
Оганесян Л. А.
1. Численный расчет плит, В сб. «Решение инженерных задач на электронно-вычислительных машинах», ЦВТИ ЛСНХ, 1963.
2. Сходимость вариационно-разностных схем при уточненной аппроксимации границы, ДАН СССР **170**, № 1 (1966), 41—44.
Папкович П. Ф.
1. Строительная механика корабля, ч. II. Гос. изд. суд. пром., 1941.
Петров Г. И.
1. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости, Прикл. матем. и мех. **4**, вып. 3 (1940).
Петровский И. Г.
1. Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
Пиконе М. (M. Picone)
1. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del probleme di Dirichlet, Rend. Acad. d. Lincei, ser. 5, **31** (1922).
Паншерель М. (Plancherel M.)
1. Sur la méthode d'intégration de Ritz, Bull. sci. math. **47** (1923), 376—383, 397—413.
Польский Н. И.
1. Про збіжність методу Б. Г. Гальоркина, Доповіді АН УРСР, відділ фіз.-мат. та хім наук, № 6 (1949).
2. Некоторые обобщения метода Б. Г. Галеркина, ДАН СССР **86**, № 3 (1952), 469—472.
3. О сходимости некоторых приближенных методов анализа, Укр. матем. ж. **7**, № 1 (1955), 56—70.
4. Об одной общей схеме применения приближенных методов, ДАН СССР **111**, № 6 (1956), 1181—1184.
5. Проекционные методы в прикладной математике, ДАН СССР **143**, № 4 (1962), 787—790.
Рафальсон З. Х.
1. К вопросу о решении бигармонического уравнения, ДАН СССР **64**, № 8 (1949).
2. К вопросу о решении бигармонического уравнения, Уч. зап. ЛГУ, № 144, сер. матем. наук, вып. 23 (1952), 165—191.
Релей
1. Теория звука. I, II, Гостехиздат, 1955.
Репман Ю. В.
1. К вопросу математического основания метода Галеркина решения задач об устойчивости упругих систем, Прикл. матем. и мех. **4**, вып. 2 (1940).

Рис Ф. и Секефальви-Надь Б.

1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

Ритц В. (Ritz Walter)

1. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. f. d. reine und angewandte Math. **135**, H. 1 (1908), а также W. Ritz, Gesammelte Werke, Paris, 1911.

2. Theorie der Transwersalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Gesammelte Werke, Paris, 1911.

Свирский И. В.

1. Об оценке точности приближенных методов определения частот колебаний, Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, № 3 (1953), стр. 59—86.

2. Методы Бубнова — Галеркина и последовательных приближений, «Наука», 1968.

Слободецкий Л. Н.

1. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Лен. пед. ин-та им. Герцена **197** (1958), 54—112.

Слободянский М. Г.

1. Оценка погрешности искомой величины при решении линейных задач вариационным методом, ДАН СССР **86**, № 2 (1952).

2. Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости, Прикл. матем. и мех. **16**, вып. 4 (1952).

3. Оценки погрешности приближенных решений линейных задач, Прикл. матем. и мех. **17**, вып. 2 (1953).

4. О приближенном решении линейных задач, сводящихся к вариационным, Прикл. матем. и мех. **17**, вып. 5 (1953).

5. Приближенное решение некоторых краевых задач для эллиптического дифференциального уравнения и оценки погрешности, ДАН СССР, **89**, № 2 (1953).

6. О преобразовании проблемы минимума-функционала к проблеме максимума, ДАН СССР **91**, № 4 (1953).

7. О построении приближенного решения в линейных задачах, Прикл. матем. и мех. **19**, № 5 (1955).

Смирнов В. И.

1. Курс высшей математики. **III**, ч. I, Физматгиз, 1958.
2. Курс высшей математики. **III**, ч. II, Физматгиз, 1958.
3. Курс высшей математики. **IV**, Физматгиз, 1958.
4. Курс высшей математики. **V**, Физматгиз, 1959.

Смирнов М. М.

1. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические урав., «Наука», 1966.

Соболев С. Л.

1. Уравнения математической физики, изд. 1-е, Гостехиздат, 1950; изд. 3-е, Гостехиздат, 1954.

2. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

Сретенский Л. Н.

1. Теория волновых движений жидкости, ОНТИ НКТП, 1934.

Стефанова Л. Б.

1. Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении, зависящем от параметра, УМН **XIV**, вып. 1 (85), (1959), 231—236.

Тимошенко С. П.

1. Теория упругости, ОНТИ, 1937.
2. Пластинки и оболочки, «Наука», 1966.

Трефтц Е. (Treftz E.)
1. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Verhanl. d. 2 internat. Kongress fur technische Mechanik, Zürich, 1926.
2. Математическая теория упругости, Гостехиздат, 1932.
Трикоми Ф.
1. О линейных уравнениях смешанного типа, Гостехиздат, 1947.
Уолш Дж. (Walsh J.)
1. Ueber die Entwickelung einer analytischen Function nach Polynomen, Math. Ann. **96** (1926/27), 430—436.
Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н.
1. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.
Фаддеева В. Н.
1. В. Н. Замятина, О фундаментальных функциях оператора X^{IV}, Тр. ЛИИПС, № 6 (1937).
2. О фундаментальных функциях оператора X^{IV}, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **28** (1949).
Фикера Г. (Fichera G.)
1. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, Berlin, Springer — Verlag, 1965.
2. Approximations and estimates for eigenvalues, Vortr. d. 3. Tagung über Probl. und Method. d. Math. Physik, Technische Hochshule Karl—Marx — Stadt, H. 1 (1966), 60—98.
Фихтенгольц Г. М.
1. Основы математического анализа, т. 1, «Наука», 1968.
Фридрихс К. (Friedrichs K.)
1. Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten, Math. Ann. **98** (1928).
2. Spektraltheorie halbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann. **109**, H. 4-5 (1934).
3. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality, Ann. Math. **48**, № 2 (1947).
Хайнц Е. (Heinz E.)
1. Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. **123**, H. 4 (1951), 415—438.
Харрик И. Ю.
1. О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида, Матем. сб. **37** (79), № 2 (1955).
2. Об одном аналоге неравенства Маркова, ДАН СССР **106**, № 2 (1956).
3. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида, Сиб. матем. ж. **4**, № 2 (1963), 408—425.
Чаплыгин С. А.
1. О газовых струях, В сб. «С. А. Чаплыгин, Избранные труды по механике и математике», Гостехиздат, 1954.
Шевченко К. Н.
1. Применение вариационного метода к решению задач теории упругости, Прикл. матем. и мех. **2**, вып. 2 (1938).
Шерман Д. И.
1. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах, ДАН СССР **28**, № 1 (1940).
Эйдус Д. М.
1. О смешанной задаче теории упругости, ДАН СССР **76**, № 2 (1951).
2. Контактная задача теории упругости, Матем. сб. **54**, № 3 (1954).
Янке Е. и Эмде Ф.
1. Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ