

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

---

*СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ*

С. Г. МИХЛИН

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР · ЛЕНИНГРАД · 1934

Отпечатано по распоряжению Академии Наук СССР  
Декабрь 1934 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания *П. М. Никифоров*

Технический редактор *Е. Г. Доскач*. Ученый корректор *Г. Н. Фелойзен*

Сдано в набор 3 IX 1934 г.

Подписано к печати 10 XII 1934 г.

Формат бумаги 62 × 94 см. 72 стр. 4½ печ. л. Тип. знак. в п. л. 34915  
Тираж 1675 экз. Ленгорлит № 31969. АНИ № 457. Заказ № 3808.

2-я тип. Издательства Лениблизполкома и Совета. Улица 3-го Июля, 55

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
§ 1. Основные понятия и уравнения механики сплошной среды . . .	5
§ 2. Теория пластичности St.-Venant'a . . . . .	13
§ 3. Линеаризация уравнений пластичности . . . . .	19
§ 4. О характеристиках уравнений пластичности . . . . .	21
§ 5. Построение характеристик . . . . .	25
§ 6. Частные типы семейств характеристик . . . . .	34
§ 7. Уравнения скоростей смещений . . . . .	43
§ 8. Попытки построения не St.-Venant'овской теории пластичности	49
§ 9. Распространение пластического состояния . . . . .	59

## § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Напомним вкратце основные понятия механики сплошной среды.

В некоторой точке деформируемой сплошной среды проведем какую-нибудь площадку с нормалью  $\nu$ . К этой площадке приложена сила, являющаяся результатом воздействия на эту площадку окружающей ее среды. Предел отношения вектора этой силы к величине площадки, при стремлении этой последней к нулю, есть вектор напряжений на площадку с нормалью  $\nu$ .

Составляющая вектора напряжений, нормальная к площадке, называется нормальным напряжением на площадку. Составляющие, лежащие в плоскости площадки, называются скальвающими напряжениями на площадку.

Пусть  $\overline{i^{(x)}}$ ,  $\overline{i^{(y)}}$ ,  $\overline{i^{(z)}}$  суть вектора напряжений на площадки, нормальные соответственно к осям  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ . Разложим эти вектора по осям координат. Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \overline{i^{(x)}} &= \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k \\ \overline{i^{(y)}} &= \tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k \\ \overline{i^{(z)}} &= \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $i$ ,  $j$ ,  $k$  суть единичные вектора осей координат.

В (1.1)  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  суть нормальные напряжения на соответствующие площадки;  $\tau_{xy}$  . . . .  $\tau_{zy}$  — скальвающие напряжения. Девять величин

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{array} \right\| \quad (2.1)$$

образуют тензор, называемый тензором напряжений в данной точке. Зная тензор напряжений, можно определить вектор

напряжений на любую площадку, проходящую через рассматриваемую точку. Этот вектор определяется формулой

$$\vec{t}(\nu) = \vec{t}^{(x)} \cos(\nu, x) + \vec{t}^{(y)} \cos(\nu, y) + \vec{t}^{(z)} \cos(\nu, z), \quad (3.1)$$

$\nu$  — направление нормали к площадке.

Тензор (2.1) симметричен, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (4.1)$$

Назовем направления нормалей к площадкам, скальвающие напряжения по которым равны нулю, главными осями тензора напряжений. Соответствующие нормальные напряжения называются главными нормальными напряжениями. Для определения главных осей и главных нормальных напряжений имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) + \tau_{xz} \cos(\nu, z) &= 0 \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + (\sigma_y - \sigma) \cos(\nu, y) + \tau_{yz} \cos(\nu, z) &= 0 \\ \tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + (\sigma_z - \sigma) \cos(\nu, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\cos^2(\nu, x) + \cos^2(\nu, y) + \cos^2(\nu, z) = 1. \quad (6.1)$$

Здесь  $\nu$  — направление главной оси и  $\sigma$  — главное нормальное напряжение. Для определения  $\sigma$  из (5.1) имеем

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (7.1)$$

В силу симметричности тензора напряжений уравнение (7.1) имеет три вещественных корня  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Это и будут величины главных нормальных напряжений. Определив  $\sigma$ , из (5.1) и (6.1) найдем направления главных осей. Если корни уравнения (7.1) различны, получаем три взаимно-перпендикулярных направления  $\nu$ . Если есть равные корни, направления осей делаются неопределенными. Их можно выбрать так, чтобы они были ортогональны.

Величины главных направлений не зависят от системы координат. Коэффициенты уравнения (7.1) поэтому инвариантны по отношению к преобразованиям координат. Отметим один из них, так называемый линейный инвариант тензора напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Составляющие тензора напряжений выражаются через главные напряжения по следующим формулам. Если углы между осями координат и главными осями тензора напряжений обозначим, как показано в таблице (8.1),

	1		2		3
x	$\alpha_1$		$\alpha_2$		$\alpha_3$
y	$\beta_1$		$\beta_2$		$\beta_3$
z	$\gamma_1$		$\gamma_2$		$\gamma_3$

(8.1)

то для составляющих тензора напряжений найдем

$$\sigma_x = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2, \quad (9.1)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 \alpha_1 \beta_1 + \sigma_2 \alpha_2 \beta_2 + \sigma_3 \alpha_3 \beta_3, \quad (10.1)$$

аналогичные формулы для других составляющих. Меняя направление площадки в данной точке, мы будем получать различные скалывающие напряжения. Для некоторых положений площадки скалывающие напряжения принимают максимальные значения. Максимальное скалывающее напряжение в точке равно наибольшей полуразности главных нормальных напряжений. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть задачу о максимуме величины (10.1) при условиях

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Составляющие тензора напряжений удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям.

Если  $\rho$  — плотность среды,  $X, Y, Z$  — компоненты массовых сил, действующих на среду,  $u_x, u_y, u_z$  — компоненты смещения точки, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{d^2 u_y}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho \frac{d^2 u_z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

В случае равновесия имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Уравнения (12.1) и (13.1) называются уравнениями механики сплошной среды.

Будем называть плоским напряженным состояние, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Скалывающие напряжения, на любую площадку, нормальную к некоторому фиксированному направлению, которое мы примем за направление оси  $Z$ , равны нулю.

2. Тензор напряжений не зависит от  $Z$ .

Таким образом, в случае плоского напряженного состояния  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  и  $\sigma_z$  есть одно из главных нормальных напряжений. Величина  $\sigma_x + \sigma_y$  будет инвариантна по отношению к преобразованиям координат, сохраняющим ось  $Z$ . Вместо уравнений (12.1) и (13.1) имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= \rho \frac{d^2 u_y}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

для случая движения и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

для случая равновесия. Эти уравнения получим, положив в первых двух уравнениях (12.1) и (13.1)  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Третье уравнение дает  $\rho \frac{d^2 u_z}{dt^2} = Z$  в случае движения и  $Z = 0$  в случае равновесия.

Отметим две важные для дальнейшего формулы. Возьмем площадку, параллельную оси  $OZ$ , с нормалью под углом

$\alpha$  к оси. Из равенств  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  следует, что скальвующее напряжение по оси  $OZ$  на эту площадку равно нулю. Вектор напряжений на эту площадку имеет две составляющие — одну  $\sigma_\alpha$ , нормальную к площадке, и вторую  $\tau_\alpha$ , в плоскости площадки, обе параллельные плоскости  $XU$ .

$\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  определяются из формул

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (16.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (17.1)$$

Если нормальные напряжения суть  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_z$ , то максимум  $\tau_\alpha$  равен  $\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$ . Если из каких-либо соображений известно, что  $\sigma_z$  по величине лежит между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то можно утверждать, что величина  $\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$  равна максимальному скальвующему напряжению.

Угол  $\alpha$ , соответствующий этому максимуму, определяется из равенства

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}. \quad (18.1)$$

В каждой точке равенство (18.1) определяет два взаимно-перпендикулярных направления, такие, что на нормальные к ним площадки скальвующее напряжение будет максимальным. Особую роль в теории пластичности играют линии, вдоль которых скальвующее напряжение на площадку, нормальную к этой линии или касательную к ней, будет максимальным. Эти линии называются линиями максимальных скальвующих напряжений, или линиями скольжения. Эти линии образуют два ортогональных семейства. Линии одного семейства не пересекаются, так как в противном случае в точке пересечения можно было бы найти больше двух направлений, в которых скальвующее напряжение было бы максимальным.

Нетрудно вывести дифференциальное уравнение линий скольжения. Полагая  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ , находим из (18.1)

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = 0.$$



Если  $U(x, y) = \text{const}$ , есть, уравнение линий скольжения, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

что дает нам

$$\begin{aligned} (\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 4\tau_{xy} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - \\ - (\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Это и есть дифференциальное уравнение линий скольжения.

Из (17.1) и (18.1) находим абсолютную величину максимального скалывающего напряжения. Оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (20.1)$$

Отметим еще, что линии скольжения образуют с главными осями угол  $\frac{\pi}{4}$ .

Это нетрудно вывести из формул (16.1) — (18.1).

Кроме тензора напряжений, состояние сплошной среды характеризуется еще вектором смещений  $\vec{u} = u_x i + u_y j + u_z k$  и так называемым тензором деформаций. Если элемент длины в недеформированном состоянии определялся формулой  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , то после деформации будем иметь

$$\begin{aligned} ds^2 = (1 + \gamma_{xx}) dx^2 + (1 + \gamma_{yy}) dy^2 + (1 + \gamma_{zz}) dz^2 + 2\gamma_{xy} dx dy + \\ + 2\gamma_{xz} dx dz + 2\gamma_{yz} dy dz \end{aligned} \quad (21.1)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} = 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Положим

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}.$$

## Величины

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} \gamma_{xx}, & \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx}, & \frac{1}{2} \gamma_{yy}, & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}, & \frac{1}{2} \gamma_{zy}, & \frac{1}{2} \gamma_{zz} \end{array} \right\| \quad (23.1)$$

образуют симметричный тензор, называемый тензором деформаций. Диагональные элементы тензора характеризуют относительные удлинения, боковые элементы — сдвиги или скольжения частиц вещества. Если мы примем, что производные смещений по осям малы, так что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с их первыми степенями, то выражения для компонентов тензора деформаций упрощаются. Тензор деформаций имеет тогда следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), & \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right\| \quad (24.1)$$

Так же, как и в тензоре напряжений, определяются главные оси тензора деформаций и главные деформации.

Важную роль в теории пластичности играет тензор скоростей деформаций. Это тензор, составляющие которого равны производным по времени от составляющих тензора деформаций.

Обозначим вектор скоростей смещений через  $\bar{v} = v_x i + v_y j + v_z k$ . Положим, что как сами смещения, так и их скорости мало изменяются при переходе от точки к точке, так что квадратами и произведениями их производных по координатам можно пренебречь по сравнению с первыми степенями. Тогда тензор скоростей деформаций имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\| \quad (25.1)$$

Мы будем называть деформированное состояние плоским, если  $u_z = 0$ , а  $u_x$  и  $u_y$  не зависят от  $Z$ . Нетрудно видеть, что в этом случае  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , и направление  $OZ$  есть направление одной из главных осей тензора деформаций.

Если деформированное состояние—плоское, то в тензоре (25.1) обращаются в нуль составляющие последней строки и последнего столбца. Аналогично максимальному скальвирующему напряжению, можно найти максимальную скорость скольжения. Для ее направления имеем формулу, аналогичную формуле (18.1)

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}} \quad (26.1)$$

В дальнейшем нам придется иногда пользоваться полярными координатами. Дадим поэтому уравнения механики сплошной среды и некоторые другие, более важные формулы, в полярных координатах. Имеем в виду дальнейшее, ограничимся плоским случаем.

Пусть  $\rho$  и  $\vartheta$  — полярные координаты на плоскости.

Обозначим через  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\vartheta$ ,  $\tau_{\rho\vartheta}$  соответственно нормальные напряжения на площадки с нормальми  $\rho$  и  $\vartheta$  и скальвирующее напряжение на эти площадки. Обозначим далее  $X_\rho$  и  $X_\vartheta$  составляющие массовых сил, действующие в направлениях  $\rho$  и  $\vartheta$ . Уравнения (15.1) заменяются при этом следующими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\vartheta}{\rho} + X_\rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{\rho\vartheta}}{\rho} + X_\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (26.1)$$

Если  $\alpha$  означает угол между линией скольжения и полярной осью, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_{\vartheta} - \sigma_{\rho}}{2\rho\vartheta}. \quad (27.1)$$

Пусть  $v_{\rho}$  и  $v_{\vartheta}$  суть составляющие скорости смещений в направлениях  $\rho$  и  $\vartheta$ . Для направления максимальной скорости сдвига имеем

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{v_{\rho}}{\rho} - \frac{\partial v_{\rho}}{\partial \rho}}{\frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_{\rho}}{\partial \vartheta} - \frac{v_{\vartheta}}{\rho}}. \quad (28.1)$$

где  $\beta$  — угол между направлением максимальной скорости сдвига и полярной осью.

## § 2. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ST.-VENANT'A

Под пластичным состоянием вещества будем понимать такое его состояние, при котором напряжения внутри вещества превосходят предел упругости, так что вещество перестает следовать закону Hook'a. Опыты, поставленные Tresca, показали, что при пластическом состоянии максимальное скалывающее напряжение в любой точке остается постоянным. Это постоянное напряжение мы будем называть пластической константой и обозначать ее буквой  $K$ . Пластическая константа характерна для данного вещества.

St.-Venant'ом были выведены уравнения пластического состояния для случая, когда и напряженное и деформированное состояния — плоские. В основу своей теории он кладет следующие гипотезы.

I. Максимальное скалывающее напряжение остается постоянным в любой точке пластического вещества (гипотеза Tresca). Эту гипотезу мы будем называть также условием пластичности.

II. Направление максимальной скорости скольжения совпадает с направлением максимального скалывающего напряжения.

III. Пластическое вещество несжимаемо. Кроме этих, явно сформулированных гипотез, St.-Venant пользуется еще следующими двумя гипотезами, хотя нигде их не формулирует.

IV.  $\sigma_x$  лежит между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

V. Производные смещений и скоростей смещений по координатам малы, так что можно пренебречь их квадратами и произведениями по сравнению с первыми степенями, и тензор скоростей деформаций можно брать в виде (25.1).

Перечисленные гипотезы приводят St.-Venant'a к следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2, \quad (1.2)$$

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения (15.1) суть общие уравнения механики сплошной среды. Уравнения (1.2) и (2.2) выражают первую и вторую гипотезы St.-Venant'a. Наконец, уравнение (3.2) есть уравнение неразрывности.

В случае пластического движения уравнения (15.1) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -X + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -Y + \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\rho$  — плотность вещества.

При отсутствии массовых сил, уравнения (15.1) и (4.2) упрощаются и заменяются следующими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

или соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

От массовых сил очень легко освободиться, если эти силы имеют потенциал. В самом деле, пусть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.2)$$

Положим

$$\sigma_x = \sigma'_x - u, \quad \sigma_y = \sigma'_y - u, \quad \tau_{xy} = \tau'_{xy}. \quad (8.2)$$

Такая замена переводит уравнения (15.1 и (4.2) в уравнения (5.2) и (6.2). Уравнения же (1.2) — (3.2) остаются при этом, очевидно, неизменными.

Уравнения пластичности в общем, трехмерном, случае были выведены М. Lévy. Lévy сохраняет I, III и V гипотезы St.-Venant'a. Гипотеза IV делается ненужной. Гипотеза II заменяется им более общей:

II-а. Тензор скоростей деформаций связан линейной зависимостью с тензором напряжений.

Гипотеза II St.-Venant'a совпадает с гипотезой II-а в случае плоских деформированного и напряженного состояний.

Гипотезы I, II-а, III, V приводят М. Lévy к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \\ & = -X + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \\ & = -Y + \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \\ & = -Z + \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Уравнения (9.2) суть общие уравнения механики сплошной среды.

В соответствии с гипотезой II имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\tau_{xy}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} &= \frac{2\tau_{xz}}{\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}} = \\ &= \frac{2\tau_{yz}}{\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}} \end{aligned} \right\} (10.2)$$

Условие несжимаемости дает уравнение неразрывности в следующей форме:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (11.2)$$

Далее, наибольшее скалывающее напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего нормальных напряжений. Эти последние определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (7.1)$$

Условие пластичности получим, приравняв величине  $2K$  наибольшую разность корней уравнения (7.1).

Назовем  $a, b, c$  коэффициенты уравнения (7.1). Если его корни суть  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , то можно составить уравнение, корни которого суть

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2, \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2.$$

Это будет уравнение

$$\begin{aligned} &x^3 - \frac{a^2 + 3b}{2} x^2 + \\ &+ \frac{(a^2 + 3b)^2}{16} x - \frac{1}{64} (4a^3c + a^2b^2 + 18abc + 4b^3 - 27c^2) = 0 \end{aligned}$$

Условие пластичности получим, потребовав, чтобы этому уравнению удовлетворяло  $x = K^2$ . Условие пластичности имеет, следовательно, вид;

$$\begin{aligned} \Phi = K^6 - \frac{a^2 + 3b}{2} K^4 + \frac{(a^2 + 3b)^2}{16} K^2 - \frac{1}{64} (4a^3c + \\ + a^2b^2 + 18abc + 4b^3 - 27c^2) = 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

М. Lévy записывает условие пластичности в виде уравнения

$$8(2K^2 + q)^3 - 3q^2(4K^2 + q) + 27R^2 = 0. \quad (*)$$

где им введены обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= N \\ \Delta_x &= \sigma_x - \frac{1}{3}N, \quad \Delta_y = \sigma_y - \frac{1}{3}N, \quad \Delta_z = \sigma_z - \frac{1}{3}N \\ q &= \Delta_x \Delta_y + \Delta_y \Delta_z + \Delta_x \Delta_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ R &= \Delta_x \tau_{yz}^2 + \Delta_y \tau_{xz}^2 + \Delta_z \tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}. \end{aligned}$$

Уравнение (\*) М. Lévy дает без вывода. Оно неверно, так как из него не получается уравнение (2.2) для плоского случая.

В самом деле, в плоском случае

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad v_z = 0.$$

Из уравнения (10.2) следует

$$\frac{\sigma_y - \sigma_z}{\frac{\partial v_y}{\partial y}} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\frac{\partial v_x}{\partial x}}$$

Из уравнения (11.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_y - \sigma_z &= \sigma_x - \sigma_x, \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Имеем в плоском случае

$$N = \frac{3}{2}(\sigma_x + \sigma_y); \quad \Delta_x = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad \Delta_y = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = -\Delta_x; \quad \Delta_z = 0$$

$$q = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} - \tau_{xy}^2; \quad R = 0.$$

Уравнение (\*) принимает вид:

$$8(2k^2 + q)^3 - 3q^2(4k^2 + q) = 0. \quad (**)$$



С другой стороны, уравнение (1.2) показывает, что, в обозначениях М. Lévy, условие пластичности в плоском случае может быть записано в виде

$$q + K^2 = 0,$$

и это последнее уравнение должно быть следствием уравнения (\*\*). Но в таком случае левая часть (\*\*) должна обратиться в нуль при замене  $q$  на  $-K^2$ . Этого, однако, нет; результат подстановки равен  $-K^6$ . Таким образом, уравнение (\*\*), а с ним и уравнение (\*) не соответствуют условию пластичности.

И в трехмерном случае можно освободиться от массовых сил, если предположить, что эти силы имеют потенциал. В самом деле, пусть

$$x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (14.2)$$

Полагаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' - U; \quad \sigma_y = \sigma_y' - U; \quad \sigma_z = \sigma_z' - U; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}' \cdot \cdot \cdot \tau_{yz} = \tau_{yz}' \end{aligned} \quad (15.2)$$

При этом в уравнениях (9.2) пропадают члены, соответствующие массовым силам. Уравнения (10.2) и (11.2) от такой замены, очевидно, не меняются. Далее, корни уравнения (7.1) изменятся все на величину  $U$ . Так как уравнение (12.2) зависит только от разностей этих корней, то оно также не изменится.

М. Lévy были написаны уравнения пластичности для случая осевой симметрии. Они, как нетрудно убедиться, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \\ = -R + \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \\ = -Z + \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (17.2)$$

$$\frac{2\tau_{rz}}{\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}} = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}} \quad (18.2)$$

$$2K = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} \\ \sigma_\varphi - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} \\ \sigma_\varphi - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} \end{array} \right. \quad (19.2)$$

Смысл обозначений в уравнениях (1.62) — (19.2) очевиден. Вместо уравнения (19.2) М. Лёву ошибочно писал уравнение

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4K^2$$

Ошибка была указана St.-Venant'ом, который и предложил уравнение (19.2).

В заключение отметим, что гипотеза IV является следствием гипотезы II-а. Это непосредственно следует из формулы (13.2). Таким образом, надобность в гипотезе IV отпадает, если уравнения St.-Venant'a выводить из уравнений М. Лёву.

### § 3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ограничимся здесь, как и в дальнейшем, плоской задачей теории пластичности. Будем считать, что массовые силы отсутствуют. Как мы видели, этого всегда можно добиться. Для напряжений имеем следующую нелинейную систему:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2 \quad (1.2)$$

Общее решение уравнения (1.2) может быть написано в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= K(\xi - \cos \eta) \\ \sigma_y &= K(\xi + \cos \eta) \\ \tau_{xy} &= K \sin \eta \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — произвольные величины. Остается подобрать  $\xi$  и  $\eta$ , как функции  $x$  и  $y$  так, чтобы удовлетворялись уравнения (5.2).

Непосредственная подстановка выражений (1.3) в уравнения (5.2) приводит к системе нелинейных уравнений для функций  $\xi$  и  $\eta$ . М. Lévy предлагает принять  $x$  и  $y$  за неизвестные функции, а  $\xi$  и  $\eta$  за независимые переменные. Это, как мы увидим, приводит к системе линейных относительно  $x$  и  $y$  уравнений. Имеем для произвольной функции  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D(u, y)}{D(\xi, \eta)} : \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{D(\xi, u)}{D(\xi, \eta)} : \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \quad (2.3)$$

Положим в (2.3) последовательно  $u = \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

Результаты подставим в (5.2) и умножим на  $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пользуясь равенствами (1.3), уравнения (3.3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sin \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} + \cos \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \\ \cos \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sin \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это — система уравнений, линейных относительно  $x$  и  $y$ . Можно эти уравнения преобразовать так, чтобы каждое содержало только одну неизвестную.

Умножим первое из уравнений (4.3) на  $-\sin \eta$ , второе на  $\cos \eta$ , сложим и присоединим к полученному таким образом уравнению первое из уравнений (4.3).

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial y}{\partial \eta} + \cos \eta \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sin \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} + \cos \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Первое из этих уравнений продифференцируем по  $\xi$ , второе по  $\eta$ .

Вычитая, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \cos \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0$$

Наконец, умножая последнее уравнение на  $\cos \eta$ , первое из (4.3) на  $\sin \eta$  и складывая, находим окончательно

$$\cos \eta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\partial y}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) содержит только  $y$ .

Аналогично находим уравнение, содержащее только  $x$ :

$$\cos \eta \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\partial x}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (7.3)$$

Указывая на эту возможность М. Lévy показывает вместе с тем, что систему (4.3) можно свести к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Положим  $x + iy = x'$ ,  $x - iy = y'$ . Первое из уравнений (4.3) умножим на  $i$  и сложим со вторым. После некоторых очень простых преобразований получим

$$\frac{\partial y'}{\partial \eta} = ie^{i\eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (8.3)$$

Заменяя  $i$  на  $-i$ , что приводит к замене  $y'$  на  $x'$  и обратно, находим

$$\frac{\partial y'}{\partial \xi} = ie^{i\eta} \frac{\partial x'}{\partial \eta} \quad (9.3)$$

Сравнивая, наконец, значения для  $\frac{\partial^2 y'}{\partial \xi \partial \eta}$ , получаемые из (8.3) и (9.3), находим окончательно

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x'}{\partial \eta^2} - i \frac{\partial x'}{\partial \eta} = 0. \quad (10.3)$$

#### § 4. О ХАРАКТЕРИСТИКАХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Из уравнений (5.2) видно, что можно общее их решение написать в виде:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

Функция  $W$  называется функцией напряжений или функцией Airy. Подставляя (1.4) в (1.2), получаем уравнение, которому удовлетворяет функция  $W$

$$F = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - 4K^2 = 0 \quad (2.4)$$

Это — нелинейное уравнение второго порядка. Оно принадлежит к гиперболическому типу. В самом деле

$$\left( \frac{\partial F}{\partial W_{xy}} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial W_{xx}} \frac{\partial F}{\partial W_{yy}} = 16 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 > 0$$

Составим уравнение характеристик уравнения (2.4). Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \\ & + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заменяя  $W$  по формулам (1.4), можно написать уравнение характеристик в следующем виде:

$$(\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 4 \tau_{xy} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - (\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.4) с (9.1) приходим к заключению:

Характеристики уравнения пластичности суть линии скольжения.

Характеристики (4.4) обладают рядом интересных свойств, к установлению которых мы и перейдем. Прежде всего, оба семейства характеристик ортогональны. Это обстоятельство было установлено нами для линий скольжения (§ 1).

Пусть  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ , а  $\theta$  — угол, образованный касательной к характеристике одного из семейств  $u = \text{const}$  с осью  $OX$ .

В формулах (16.1) и (17.1) примем за направления  $X$  и  $Y$  — направления главных осей тензора напряжений. За направление  $\alpha$  примем направление оси  $X$ .

Это дает нам

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (5.4)$$

В этих формулах  $\alpha$  — угол между главной осью  $\sigma_1$  и осью  $OX$ . Выберем главные оси так, чтобы было  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Наконец, можно взять  $\theta = \alpha + \frac{\pi}{4}$ . Тогда формулы (5.4) переходят в следующие:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + \tau_{\max} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma - \tau_{\max} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= -\tau_{\max} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (6.4)$$

или, принимая во внимание условие пластичности,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= -k \cos 2\theta\end{aligned}\quad (7.4)$$

Допустим, что нам известны оба семейства характеристик, и пусть их уравнения будут

$$u = u(x, y) = \text{const}, \quad v = v(x, y) = \text{const} \quad (8.4)$$

Будем  $u$  и  $v$  рассматривать как независимые переменные, а  $\sigma$  и  $\theta$  — как их функции. Подставляя (7.4) в (5.2), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) &= 0\end{aligned}\quad (9.4)$$

Умножим первое уравнение на  $\cos \theta$  (на  $-\sin \theta$ ), второе на  $\sin \theta$  (на  $\cos \theta$ ). Складывая, найдем

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin \theta \right) + 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos \theta \right) - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \right) &= 0\end{aligned}\quad (10.4)$$

Если  $\Theta$  есть угол с осью  $OX$  характеристик  $v = \text{const}$ , то характеристики  $u = \text{const}$  образуют с осью  $OX$  угол  $\Theta + \frac{\pi}{2}$ . Выражения в скобках в (10.4) суть производные от  $\sigma$  и  $\Theta$  по дугам обеих характеристик. Пусть дифференциал длины в координатах  $u, v$  определяется квадратичной формой

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + B^2(u, v) dv^2 \quad (11.4)$$

Если  $dS_1$  и  $dS_2$  суть дифференциалы дуги характеристик  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , то

$$dS_1 = B(u, v) dv, \quad dS_2 = A(u, v) du \quad (12.4)$$

Равенства (10.4) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial S_2} (\sigma + 2k\Theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial S_1} (\sigma - 2k\Theta) = 0$$

или, в силу (12.4), в виде

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sigma + 2k\Theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} (\sigma - 2k\Theta) = 0 \quad (13.4)$$

Интегрируя, находим

$$\frac{\sigma}{2k} + \Theta = 2g(v), \quad \frac{\sigma}{2k} - \Theta = 2f(u), \quad (14.4)$$

где  $g(v)$  и  $f(u)$  — некоторые функции. Из (14.4) находим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2k} &= g(v) + f(u) \\ \Theta &= g(v) - f(u) \end{aligned} \quad (15.4)$$

Формулы (15.4) принадлежат Н. Ненку.

Из формул (15.4) следует:

I. Вдоль характеристики изменение  $\sigma$  пропорционально изменению угла этой характеристики с осью  $OX$ . Коэффициент пропорциональности равен удвоенной пластической постоянной.

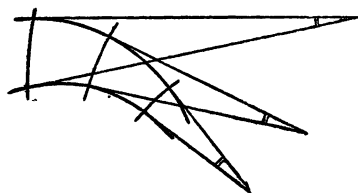
II. Если две характеристики одного семейства пересечены характеристиками другого семейства, то угол между касательными к характеристикам первого семейства в точках пересечения с характеристиками второго семейства остается постоянным (фиг. 1).

Если известны характеристики, то с точностью до знака величины  $\sigma$  и до постоянного гидростатического давления определяется поле напряжений в пластическом теле.

В самом деле, угол  $\Theta$  можно считать известным. По данному  $\Theta$  функции  $g(v)$  и  $f(u)$  определяются с точностью до произвольной постоянной, так что  $g(v) = g_1(v) + C$ ,  $f(u) = f_1(u) - C$ , где  $g_1(v)$  и  $f_1(u)$  можно считать известными.

Отсюда

$$\frac{\sigma}{2k} = g_1(v) + f_1(u) + 2C \quad (16.4)$$



Фиг. 1.

Но равенство  $\Theta = g(v) - f(u)$  можно записать также в виде  $\Theta = [-f(u)] - [-g(v)]$ , а это приводит нас к формуле

$$\frac{\sigma}{2k} = -[f_1(u) + g_1(v) + 2C]. \quad (17.4)$$

Раз  $\sigma$  и  $\Theta$  известны, формулы (17.4) дают составляющие тензора напряжений.

### § 5. ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Свойство II характеристик, отмеченное в предыдущем параграфе, позволяет построить оба семейства характеристик, если известна одна кривая каждого семейства. Это построение было выполнено Carathéodory и Schmidt'ом. Изложим это построение.

Рассмотрим два каких-нибудь семейства ортогональных линий  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ . Обозначим  $\Theta$  угол между направлениями осей  $u$  и  $OX$ . Пусть элемент длины в системе координат  $u, v$  задан формой

$$ds^2 = A^2(u, v)du^2 + B^2(u, v)dv^2. \quad (1.5)$$

Величины  $A(u, v)$  и  $B(u, v)$  будем считать положительными. Принимая во внимание определение угла  $\Theta$  и формулу (1.5), легко находим

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A \cos \Theta, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = A \sin \Theta \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -B \sin \Theta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = B \cos \Theta \quad (3.5)$$



Продифференцируем равенства (2.5) по  $v$ , а (3.5) по  $u$ . Сравнивая выражения смешанных производных, находим

$$\begin{aligned} \cos \theta \left[ \frac{\partial A}{\partial v} + B \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] + \sin \theta \left[ \frac{\partial B}{\partial u} - A \frac{\partial \theta}{\partial v} \right] &= 0 \\ \sin \theta \left[ \frac{\partial A}{\partial v} + B \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] - \cos \theta \left[ \frac{\partial B}{\partial u} - A \frac{\partial \theta}{\partial v} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Систему равенств (4.5) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно скобок с определителем, неравным нулю. Скобки, таким образом, равны нулю, откуда

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u}. \quad (6.5)$$

Введем в рассмотрение радиусы кривизны  $R_u$  и  $R_v$  семейств  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ . Будем считать их положительными, когда центр кривизны лежит в направлении возрастания параметра. Тогда, как нетрудно видеть

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} : \frac{ds}{du} = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \frac{1}{R_u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} : \frac{ds}{dv} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Составим выражения

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du}$$

и

$$\frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv}.$$

Пользуясь равенствами (1.5) и (7.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} &= -\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{B}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} \right] + A = \\ &= \frac{B \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}}{\left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2} - \frac{\frac{\partial B}{\partial u}}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} + A \end{aligned}$$

или, если воспользоваться равенством (6.5),

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = \frac{B \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2} \quad (8.5)$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv} = -\frac{A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2} \quad (9.5)$$

До сих пор семейства  $u$ ,  $v$  были произвольными ортогональными семействами. Положим теперь, что имеет место одно из равенств

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = 0 \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv} = 0 \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = 0 \quad (12.5)$$

Из (8.5) и (9.5) видно, что тогда выполнены и остальные два равенства.

Из (12.5) следует

$$\Theta = g(v) - f(u), \quad (13.5)$$

где  $g(v)$  и  $f(u)$  суть произвольные функции.

Равенство (13.2) выражает аналитически свойство II характеристик (§ 4).

Если выполнены равенства (10.5) и (11.5), то рассматриваемые кривые обладают следующим свойством.

Если двигаться по некоторой кривой одного из семейств, то радиус кривизны кривых другого семейства в точках пересечения с рассматриваемой кривой изменяется по абсолютной величине на длину дуги этой кривой. Это свойство принадлежит характеристикам уравнения пластичности, так как для ортогональных семейств равенства (10.5) и (11.5) суть следствия равенства (12.5).

Таким образом, равенства (10.5) — (12.5) дают основные свойства характеристик, причем установлено, что каждое из них есть следствие другого.

Пусть теперь даны две пересекающиеся под прямым углом кривые. Поставим задачу: определить два ортогональных семейства кривых, удовлетворяющих условиям (10.5)—(12.5) так, чтобы одна из заданных кривых принадлежала одному семейству, другая—другому. Поместим начало координат в точке пересечения данных кривых, а оси направим по касательным к этим кривым. Пусть координаты точек одной кривой будут выражены в функциях параметра  $u$ , координаты другой—в функциях параметра  $v$ . Пусть далее, эти параметры выбраны так, что направления  $x$ ,  $y$  совпадают в начале координат с направлениями возрастания  $u$ ,  $v$ , и в начале координат  $u=v=0$ . Примем  $u$ ,  $v$  за координатные параметры искоемых семейств, тогда кривой, вдоль которой меняется  $u$ , будет соответствовать  $v=0$ , и наоборот. В начале координат  $\theta=0$  или  $f(0)=g(0)$ . Заменим  $f(u)$  на  $f(u)-f(0)$ , а  $g(v)$  на  $g(v)-g(0)$ , что не отразится на величине  $\theta$ . Мы можем считать теперь  $g(0)=f(0)=0$ . Положим  $v=0$ . Тогда  $\theta=-f(u)$ , т. е.  $f(u)$  есть, с обратным знаком, угол между касательной к кривой  $v=0$  и осью  $X$ . Функция  $f(u)$ , таким образом, известна. Точно так же, полагая  $u=0$ , имеем  $\theta=g(v)$ . Обозначая через  $\theta'$  угол между направлением  $v$  и осью  $OX$ , находим

$$g(v) = \theta' - \frac{\pi}{2}.$$

Функция  $g(v)$ , таким образом, тоже известна. Наша задача будет решена, если мы найдем функции  $A(u, v)$  и  $B(u, v)$ . Их определением мы и займемся. Имеем

$$\begin{aligned} A(u, 0) &= \left( \frac{ds}{du} \right)_{v=0}; \\ B(0, v) &= \left( \frac{ds}{dv} \right)_{u=0} \end{aligned} \quad (14.5)$$

Значения  $A(u, 0)$  и  $B(0, u)$  нам, таким образом, даны.

Из равенств (5.5)—(6.5) находим:

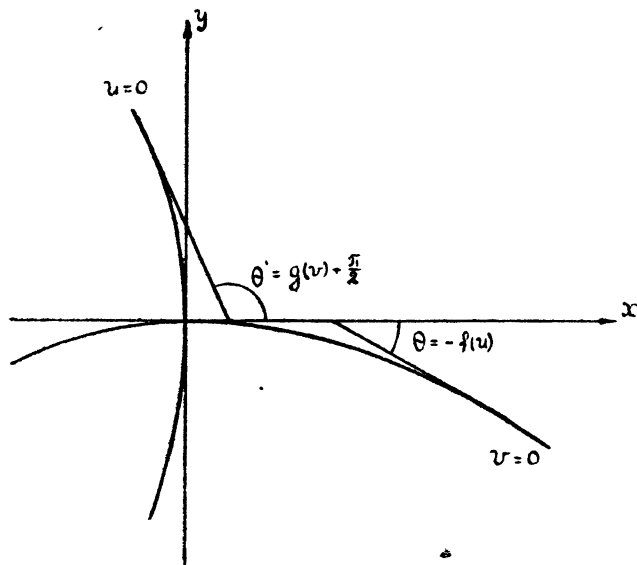
$$\frac{\partial A}{\partial v} = f'(u)B \quad (15.5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = g'(v)A. \quad (16.5)$$

Нам предстоит проинтегрировать систему линейных уравнений (15.5), (16.5) при начальных условиях (14.5). Следуя методу Римана, введем функцию

$$J(z) = J_0(2i\sqrt{z}), \quad (17.5)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка.



Фиг. 2.

Функция  $J(z)$  удовлетворяет равенствам

$$J(0) = 1, \quad \frac{\partial^2 J(xy)}{\partial x \partial y} = J(xy). \quad (18.5)$$

Положим для краткости

$$\alpha = f(u); \quad \beta = g(v); \quad \alpha_1 = f(u_1); \quad \beta_1 = g(v_1). \quad (19.5)$$

Из (15.5) — (8.5) следует, что выражение

$$A(u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] du_1 + \quad (20.5) \\ + B(u_1, v_1) J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] dv_1$$

есть полный дифференциал. Возьмем интеграл от выражения (20.5) по прямоугольнику с вершинами:

$$(0, 0); (u, 0); (u, v); (0, v)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^u A(u_1, 0) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] \right]_{v_1=0} du_1 + \\
& + \int_0^v B(u, v_1) \left[ J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] \right]_{u_1=u} dv_1 - \\
& - \int_0^u A(u_1, v) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] \right]_{v_1=v} du_1 - \\
& - \int_0^v B(0, v_1) \left[ J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] \right]_{u_1=0} dv_1 = 0.
\end{aligned} \tag{21.5}$$

Отметим следующие равенства:

при

$$\begin{aligned}
v_1 = v, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] &= \\
= (\beta - \beta_1) J'[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] &= 0 \\
u_1 = u, \quad J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] &= J(0) = 1 \\
u_1 = 0, \quad \alpha_1 = f(0) &= 0 \\
v_1 = 0, \quad \beta_1 = g(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Равенство (21.5) можно теперь переписать так:

$$\begin{aligned}
& \int_0^u A(u_1, 0) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J[\beta(\alpha - \alpha_1)] du_1 + \\
& + \int_0^v B(u, v_1) dv_1 - \int_0^v B(0, v_1) J[(\alpha - \alpha_1)\beta] dv_1 = 0.
\end{aligned}$$

В первом интеграле заменим  $\frac{\partial}{\partial \alpha_1}$  через  $-\frac{\partial}{\partial \alpha}$ , умножим затем все равенство на  $f'(u)$  и вычислим второй интеграл пользуясь уравнением (5.5). Это дает нам

$$\begin{aligned}
A(u, v) &= A(u, 0) + f'(u) \int_0^u \frac{\partial}{\partial \alpha} J[\beta(\alpha - \alpha_1)] A(u_1, 0) du_1 + \\
& + f'(u) \int_0^v J[\alpha(\beta - \beta_1)] B(0, v_1) dv_1.
\end{aligned} \tag{22.5}$$

Замечая, что

$$A(u_1, v_1) J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] du_1 + \\ + B(u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial \beta_1} J[(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)] dv_1 \quad (23.5)$$

есть также полный дифференциал, найдем аналогично

$$B(u, v) = B(0, u) + \\ + g'(v) \int_0^v \frac{\partial}{\partial \beta} J[\alpha(\beta - \beta_1)] B(0, v_1) dv_1 + \quad (24.5) \\ + g'(v) \int_0^u J[\beta(\alpha - \alpha_1)] A(u_1, 0) du_1.$$

Решение уравнений (15.5) — (16.5) при граничных условиях (4.5), если оно существует, представляется формулами (22.5) и (24.5). С другой стороны очень легко проверить, что функции (22.5) и (24.5) удовлетворяют как уравнениям, так и начальным условиям. Решение задачи, таким образом, нами найдено, причем это решение — единственное.

Если за параметры выбрать длины дуг, то формулы упрощаются. Именно, в этом случае

$$A(u, 0) = B(0, v) = 1 \quad (25.5)$$

$$A(u, v) = 1 + f(u) \int_0^u \frac{\partial}{\partial \alpha} J[\beta(\alpha - \alpha_1)] du_1 = \\ + f'(u) \int_0^v J[\alpha(\beta - \beta_1)] dv_1. \quad (26.5)$$

$$B(u, v) = 1 + g'(v) \int_0^v \frac{\partial}{\partial \beta} J[\alpha(\beta - \beta_1)] dv_1 + \\ + g'(v) \int_0^u J[\beta(\alpha_1 - \alpha)] du_1. \quad (27.5)$$

Чтобы найти характеристики, нам остается найти  $x$  и  $y$ , как функции от  $u$  и  $v$ . Для этого обратимся к формулам (2.5), (3.5) и (13.5). Эти формулы дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(u, 0)}{\partial u_1} &= \cos \alpha, & \frac{\partial y(u, 0)}{\partial u} &= -\sin \alpha \\ \frac{\partial x(0, v)}{\partial v} &= -\sin \beta, & \frac{\partial y(0, v)}{\partial v} &= \cos \beta. \end{aligned} \quad (28.5)$$

При этом за параметры выбраны длины дуг, так что имеют место равенства (25.5).

Отметим несколько элементарных тождеств, вытекающих из свойств функций Бесселя (18.5).

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ -J[(\alpha - \alpha_1) t] \sin(t - \alpha) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} J[(\alpha - \alpha_1) t] \cos(t - \alpha) \right]; \\ & \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ -J[(\beta - \beta_1) t] \sin(t - \beta) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} J[(\beta - \beta_1) t] \cos(t - \beta) \right]; \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ J[(\alpha - \alpha_1) t] \cos(t - \alpha) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} J[(\alpha - \alpha_1) t] \sin(t - \alpha) \right]; \\ & \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ J[(\beta - \beta_1) t] \cos(t - \beta) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} J[(\beta - \beta_1) t] \sin(t - \beta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Имея это в виду, сразу напишем значения  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u, 0) + x(0, v) - \\ & - \int_0^u du_1 \int_0^\beta J[(\alpha - \alpha_1) t] \sin(t - \alpha) dt + \\ & + \int_0^v dv_1 \int_0^\alpha J[(\beta - \beta_1) t] \cos(t - \beta) dt. \end{aligned} \quad (30.5)$$

$$\begin{aligned}
 y(u, v) = & y(u, 0) + y(0, v) - \\
 & - \int_0^v dv_1 \int_0^{\alpha} J[(\beta - \beta_1) t] \sin((t - \beta) dt + \\
 & + \int_0^u du_1 \int_0^{\beta} J[(\alpha - \alpha_1) t] \cos(t - \alpha) dt. \quad (31.5)
 \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (28.5) и (29.5), нетрудно проверить, что написанные выражения удовлетворяют равенствам (2.5) и (3.5), а также и начальным условиям (28.5).

Из (5.5), (6.5) и (13.5) находим очень простые равенства, определяющие радиусы кривизны характеристик

$$\begin{aligned}
 R_v f(u) = & -A(u, v) \\
 R_u g'(v) = & -B(u, v). \quad (32.5)
 \end{aligned}$$

Отметим еще очень важный случай, когда уравнения могут быть значительно упрощены. Это — случай, когда  $f(u) = \alpha$  и  $g(v) = \beta$  монотонны. За параметры можно принять тогда  $\alpha$  и  $\beta$ . Имеем в таком случае

$$\Theta = \beta - \alpha. \quad (33.5)$$

Пусть в параметрах  $\alpha$  и  $\beta$  элемент длины определяется формулой

$$ds^2 = A_1^2(\alpha, \beta) d\alpha^2 + B_1^2(\alpha, \beta) d\beta^2. \quad (34.5)$$

Вместо уравнений (15 · 5) и (16 · 5) имеем более простые

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta} = B_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} = A_1 \quad (35.5)$$

откуда

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial \alpha \partial \beta} = A_1, \quad \frac{\partial^2 B_1}{\partial \alpha \partial \beta} = B_1. \quad (36.5)$$

Равенства (2.5) и (3.5) переходят в следующие:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \alpha} = & A_1 \cos(\beta - \alpha) & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = & A_1 \sin(\beta - \alpha) \\
 \frac{\partial x}{\partial \beta} = & -B_1 \sin(\beta - \alpha) & \frac{\partial y}{\partial \beta} = & B_1 \cos(\beta - \alpha). \quad (37.5)
 \end{aligned}$$



## § 6. ЧАСТНЫЕ ТИПЫ СЕМЕЙСТВ ХАРАКТЕРИСТИК

1. Возьмем

$$A_1 = aJ(\alpha\beta) + b \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha\beta) \quad (1.6)$$

$a$  и  $b$  — постоянные.

В силу (18.5)  $A_1$  удовлетворяет уравнению (36.5)

Из (35.5) находим

$$B_1 = a \frac{\partial}{\partial \beta} J(\alpha\beta) + bJ(\alpha\beta) \quad (2.6)$$

и из (37.5)

$$x = a \int_0^\alpha J(\beta t) \cos(t - \beta) dt - b \int_0^\beta J(\alpha t) \sin(t - \alpha) dt \quad (3.6)$$

$$y = -a \int_0^\alpha J(\beta t) \sin(t - \beta) dt + b \int_0^\beta J(\alpha t) \cos(t - \alpha) dt.$$

В самом деле, первые два из равенств (37.5) дают

$$\begin{aligned} dx = & aJ(\alpha\beta) \cos(\beta - \alpha) d\alpha + b \frac{\partial J(\alpha\beta)}{\partial \alpha} \cos(\beta - \alpha) d\alpha \\ & - a \frac{\partial J(\alpha\beta)}{\partial \beta} \sin(\beta - \alpha) d\beta - bJ(\alpha\beta) \sin(\beta - \alpha) d\beta. \end{aligned}$$

Интегрируем по ломаной  $(0,0) - (\alpha, 0) - (\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} x = & a \sin \alpha - a \int_0^\beta \frac{\partial J(\alpha t)}{\partial t} \sin(t - \alpha) dt - \\ & - b \int_0^\beta J(\alpha t) \sin(t - \alpha) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Преобразуем первый интеграл. Воспользуемся для этого третьим из равенств (29.5). Заменяя в этом равенстве  $\alpha_1$  нулем,  $\alpha$  через  $t$  и  $t$  через  $\alpha$ , имеем

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial J(\alpha t)}{\partial t} \sin(t - \alpha) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ J(\alpha t) \cos(t - \alpha) \right].$$

Подставив это в очевидное равенство

$$\int_0^{\beta} \frac{\partial J(\alpha t)}{\partial t} \sin(t - \alpha) dt = \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial J(\alpha t)}{\partial t} \sin(t - \alpha) \right] dt d\alpha,$$

найдем

$$- \int_0^{\beta} \frac{\partial J(\alpha t)}{\partial t} \sin(t - \alpha) dt = \int_0^{\alpha} J(\alpha\beta) \cos(\beta - \alpha) d\alpha - \sin \alpha.$$

Вместе с (4.6) это дает первую из формул (3.6). Точно так же найдем и вторую.

Линия  $\alpha = 0$  есть круг  $(x - b)^2 + y^2 = b^2$ , линия  $\beta = 0$  — круг  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ . Семейства  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$  суть семейства характеристик, содержащих два ортогональных круга. Если  $b = 0$ , найдем семейства характеристик, одно из которых содержит данный круг, а все линии второго проходят через данную на круге точку.

II. Положим  $A_1 = f(p\alpha' + q\beta)$ , где  $p$  и  $q$  постоянные.

Из (36.5) находим, полагая  $\sqrt{\frac{p}{q}} = a$ :

$$A_1 = C_1 e^{a\alpha + \frac{1}{a}\beta} + C_2 e^{-(a\alpha + \frac{1}{a}\beta)}; \quad (5.6)$$

$$B_1 = \frac{C_1}{a} e^{a\alpha + \frac{1}{a}\beta} - \frac{C_2}{a} e^{-(a\alpha + \frac{1}{a}\beta)}$$

1) Если примем  $C_1 > 0$ ,  $C_2 = 0$  и воспользуемся (37.5) то получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1}{\sqrt{1+a^2}} e^{a\alpha + \frac{1}{a}\beta} \cos(\beta - \alpha + \gamma); \\ y &= \frac{C_1}{\sqrt{1+a^2}} e^{a\alpha + \frac{1}{a}\beta} \sin(\beta - \alpha + \gamma) \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\gamma = \arctg a$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{\sqrt{1+a^2}} &= C; \quad \alpha = \alpha' - \frac{a \lg C - \gamma}{1+a^2}; \\ \beta &= \beta' - \frac{a \lg C + a^2 \gamma}{1+a^2}. \end{aligned}$$

и введем полярные координаты. Из (6.6)

$$\rho = C e^{a\alpha' + \frac{1}{a}\beta'}, \quad \varphi = \beta' - \alpha \quad (7.6)$$

Семейства  $\alpha' = \text{const}$  и  $\beta' = \text{const}$  суть семейства логарифмических спиралей (фиг. 3).

- 2) Возьмем  $a = ki$ ,  $C_1 = C_2 = C$ . Тогда

$$A_1 = 2C \cos \left( k\alpha - \frac{1}{k} \beta \right), \quad B_1 = \frac{2C}{k} \sin \left( k\alpha - \frac{1}{k} \beta \right) \quad (8.6)$$

Если  $k \neq 1$ , то

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{k-1} \sin \left[ (k-1)\alpha + \frac{k-1}{k} \beta \right] + \\ &+ \frac{C}{k+1} \sin \left[ (k+1)\alpha - \frac{k+1}{k} \beta \right]; \\ y &= -\frac{C}{k-1} \cos \left[ (k-1)\alpha + \frac{k-1}{k} \beta \right] + \\ &+ \frac{C}{k+1} \cos \left[ (k+1)\alpha - \frac{k+1}{k} \beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Если  $k = 1$ , то

$$\begin{aligned} x &= C(\alpha + \beta) - \frac{C}{2} \sin 2(\beta - \alpha) \\ y &= \frac{C}{2} \cos 2(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (10.6)$$

В этом случае кривые  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$  суть семейства циклоид.

III. Найдем семейства характеристик, образующие изотермическую сетку. Если сетка изотермическая, то при подходящем выборе координатных параметров  $A(u, v) = B(u, v)$ . Из (15.5) и (16.5) имеем:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial v} = f'(u); \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} = g'(v). \quad (11.6)$$

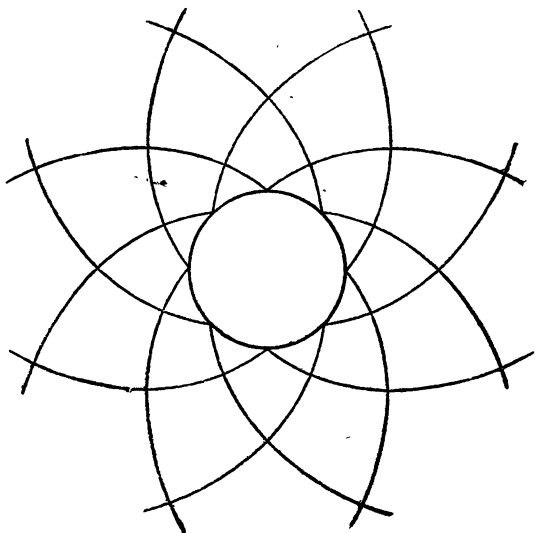
Дифференцируя первое равенство по  $u$ , второе по  $v$  и сравнивая результаты, находим

$$f''(u) = g''(v)$$

что может быть только тогда, когда обе величины постоянны. Таким образом

$$f''(u) = g''(v) = 2l = \text{const}. \quad (12.6)$$

Рассмотрим сперва случай  $l=0$ . Тогда  $f'(u) = a$ ,  $g'(v) = b$ ,  $a$  и  $b$  — постоянные.



Фиг. 3.

Если  $u$  и  $v$  — координатные параметры изотермической сетки, то, полагая  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , имеем  $z = F(w)$ , где  $F(w)$  — функция аналитическая. При этом

$$dx^2 + dy^2 = |dz|^2 = |F'(w)|^2 |dw|^2 = |F'(w)|^2 (du^2 + dv^2),$$

так что

$$A = B = |F'(w)|. \quad (13.6)$$

Далее должны быть выполнены равенства

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial v} = a, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} = b,$$

что дает нам

$$A = e^{av} C_1(u) = e^{bu} C_2(v).$$

Полагая  $u=0$ , а затем  $v=0$ , находим  $C_1(u) = Ce^{bu}$ ,  $C_2(v) = Ce^{av}$ .

$$A = Ce^{bu+av} \quad (14.6)$$

Можно, далее, принять

$$f(u) = au; \quad g(v) = bv.$$

Постоянные интегрирования можно уничтожить линейным преобразованием параметров.

Тогда

$$\begin{aligned} dx &= Ce^{bu+av} [\cos(bv-au) du - \sin(bv-au) dv] \\ dy &= Ce^{bu+av} [\sin(bv-au) du + \cos(bv-au) dv], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} dz &= Ce^{(b-ia)w} dw \\ Z &= \frac{C}{b-ia} e^{(b-ia)w}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Положим теперь

$$\frac{C}{b-ia} = re^{i\gamma}; \quad Z = \rho e^{i\varphi}$$

тогда

$$\rho = re^{bu+av}, \quad \varphi = \gamma + bv - au. \quad (16.6)$$

Семейства  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  суть семейства логарифмических спиралей. В частности, если  $a = 0$ , или  $b = 0$ , спирали вырождаются в лучи, исходящие из начала, и круги с центром в начале координат.

Если  $a = b = 0$ , формула (16.6) делается непригодной.

В этом случае  $dz = Cdw$ ,  $z = Cw + C$ . Характеристиками служат семейства параллельных линий.

Пусть теперь  $l \neq 0$ . Тогда  $f(u) = 2lu$ ,  $g(v) = 2lv$ .

Постоянные интегрирования можно опять уничтожить линейной заменой параметров.

Имеем

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial v} = 2lv; \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} = 2lu.$$

Далее,  $\Theta = l(v^2 - u^2)$ , и из (2.5), (3.5) следует

$$\frac{dz}{dw} = Ce^{-iw^2}$$

Положим

$$C = \frac{C}{\sqrt{|l|}}, \quad w' = w \sqrt{|l|},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= C' e^{\pm iw'^2} \\ z &= C' \int_0^{w'} e^{\pm it^2} dt. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Указанные выше спирали, семейства кругов и лучей, семейства параллельных прямых и, наконец, семейства (16.6) дают все возможные изотермические сетки характеристик.

Поставим еще следующую задачу: найти семейства характеристик, не меняющиеся при повороте вокруг начала координат. Введя полярные координаты  $\rho, \vartheta$ , мы можем, очевидно, записать уравнения семейств характеристик, в виде

$$\left. \begin{aligned} \vartheta - \vartheta_1(\rho) &= u = \text{const} \\ \vartheta - \vartheta_2(\rho) &= v = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Функции  $\vartheta_1(\rho)$  и  $\vartheta_2(\rho)$  связаны условием ортогональности обоих семейств. Это условие имеет вид

$$1 + \rho^2 \vartheta_1' \vartheta_2' = 0 \quad (19.6)$$

Эти функции должны быть подобраны так, чтобы

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = 0.$$

Как не трудно проверить

$$\Theta = \vartheta + \text{arc tg } \rho \vartheta_1' \quad (20.6)$$

Из (18.6) не трудно получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u} &= \frac{1}{\vartheta_2' - \vartheta_1'}, & \frac{\partial \rho}{\partial v} &= -\frac{1}{\vartheta_2' - \vartheta_1'} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial u} &= \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2' - \vartheta_1'}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= -\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2' - \vartheta_1'} \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \frac{1}{1 + \rho^2 \vartheta_1'^2} \frac{d}{d\rho} (\rho \vartheta_1') \frac{\partial \rho}{\partial u} = \\ &= \frac{(1 + \rho^2 \vartheta_1'^2) - (\rho \vartheta_1'^1 + \vartheta_1') \rho^2 \vartheta_1'}{(1 + \rho^2 \vartheta_1'^2)^2} \end{aligned} \quad (22.6)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1 + \rho^2 \vartheta_1'^2 - (\rho \vartheta_1'^1 + \vartheta_1') \rho^2 \vartheta_1'}{(1 + \rho^2 \vartheta_1'^2)^2} \right] \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$$

Сократив на  $\frac{\partial \rho}{\partial v}$  и проинтегрировав по  $\rho$ , найдем

$$\frac{1 + \rho^2 \vartheta_1'^2 - (\rho \vartheta_1'^1 + \vartheta_1') \rho^2 \vartheta_1'}{(1 + \rho^2 \vartheta_1'^2)^2} = \beta = \text{const.}$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2 \vartheta_2'^2} = \beta,$$

откуда

$$\frac{\rho^2}{1 + \rho^2 \vartheta_1'^2} = \beta \rho^2 + \gamma \quad (23.6)$$

Полагая  $1 - \beta = \alpha$  и сохраняя только один знак при извлечении корня, имеем

$$\vartheta_1'(\rho) = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\alpha \rho^2 - \gamma}{\beta \rho^2 + \gamma}}; \quad \vartheta_2'(\rho) = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\beta \rho^2 + \gamma}{\alpha \rho^2 - \gamma}} \quad (24.6)$$

Рассмотрим различные возможные случаи.

I.  $\gamma = 0$ .  $\alpha$  и  $\beta$  должны иметь одинаковые знаки. Положим  $\frac{\alpha}{\beta} = a_1^2$ .

Тогда

$$\vartheta_1' = \frac{a_1}{\rho}; \quad \vartheta_2' = -\frac{1}{a_1 \rho}.$$

и уравнения характеристик будут

$$u = \vartheta - a_1 \lg \rho; \quad V = \vartheta + \frac{1}{a_1} \lg \rho \quad (25.6)$$

Это—логарифмические спирали, пересекающие круги  $\rho = \text{const}$  под углом  $\arctg a_1$  и  $\arctg a_1 + \frac{\pi}{2}$ . При  $a \rightarrow \infty$  получаем, в качестве предельного случая, семейства кругов  $\rho = \text{const}$  и лучей  $\vartheta = \text{const}$ .

II.  $\alpha = 0$ . При этом  $\beta = 1$  и  $\gamma$  должно быть отрицательным.

Положим  $\gamma = -\frac{1}{a^2}$ , так что  $\vartheta_1' = \frac{1}{\rho \sqrt{a^2 \rho^2 - 1}}$ ,

$$\vartheta_2' = -\frac{\sqrt{a^2 \rho^2 - 1}}{\rho}$$

и характеристики будут

$$u = \vartheta + \arctg \frac{1}{\sqrt{a^2 \rho^2 - 1}}; \quad v = \vartheta + \arctg \frac{1}{\sqrt{a^2 \rho^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 \rho^2 - 1}} \quad (26.6)$$

Линии  $u = \text{const}$  суть прямые, отстоящие от начала на расстоянии  $\frac{1}{a}$  и пересекающие ось  $ox$  под углом  $u$ ; линии  $v = \text{const}$  суть ортогональные к ним траектории.

Кроме рассмотренных нами, других случаев обращения в нуль постоянных не будет.

Пусть теперь ни одна постоянная не равна нулю. Можно считать в этом случае  $\gamma > 0$ . Могут иметь место следующие комбинации знаков.

III.  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Положим  $\frac{\gamma}{\alpha} = a^2; \frac{\gamma}{\beta} = b^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \vartheta'_1(\rho) &= \frac{b}{a\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}}; \\ \vartheta'_2(\rho) &= -\frac{a}{b\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 + b^2}{\rho^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (27.6)$$

и уравнения характеристик будут

$$\begin{aligned} u &= \vartheta + \text{arctg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}} - \\ &- \frac{b}{a} \lg [\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 + b^2}] \\ v &= \vartheta + \text{arctg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}} + \\ &+ \frac{a}{b} \lg [\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 + b^2}]. \end{aligned} \quad (28.6)$$

Из (28.6) получаем предельным переходом кривые (25.6). Для этого нужно принять  $\frac{b}{a} = a_1, \lim b = \lim a = 0$ .

IV.  $\alpha > 0, \beta < 0$ . В этом случае положим

$$\frac{\gamma}{\alpha} = a^2, \frac{\gamma}{\beta} = -b^2.$$

Имеем

$$\vartheta'_1(\rho) = \frac{b}{a\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - \rho^2}}; \quad \vartheta'_2(\rho) = -\frac{a}{b\rho} \sqrt{\frac{b^2 - \rho^2}{\rho^2 - a^2}} \quad (29.6)$$



$$\left. \begin{aligned} u &= \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - \rho^2}} + \\ &+ \frac{b}{a} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - \rho^2}} \\ v &= \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - \rho^2}} + \\ &+ \frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - \rho^2}} \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

Случай  $\alpha < 0, \beta < 0$  сводится к III заменой  $\vartheta_2$  на  $\vartheta_1$ .

Случай  $\alpha < 0, \beta > 0$  невозможен, так как дает мнимые значения  $\vartheta'_1$  и  $\vartheta'_2$ .

Отметим, что полученные нами линии, вообще говоря, не соответствуют никакой задаче пластичности, так как они дают  $\sigma$ , как многозначную функцию точки. В самом деле  $\Theta = \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \rho \vartheta'_1(\rho)$ . Для кривых (28.6

$\Theta = \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}} = \frac{a^2 u}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 v}{a^2 + b^2}$ , откуда, по формулам (16.4), (17.4).

$$\sigma = \pm \frac{a^2 u - b^2 v}{a^2 + b^2} + C. \quad (31.6)$$

Чтобы  $\sigma$  была однозначной функцией точки, необходимо, чтобы формула (31.6) не содержала  $\vartheta$ . Для этого необходимо  $a = b$ . Только в этом случае характеристики (30.6) могут соответствовать некоторой задаче пластичности. Это дает семейства кривых (фиг. 4)

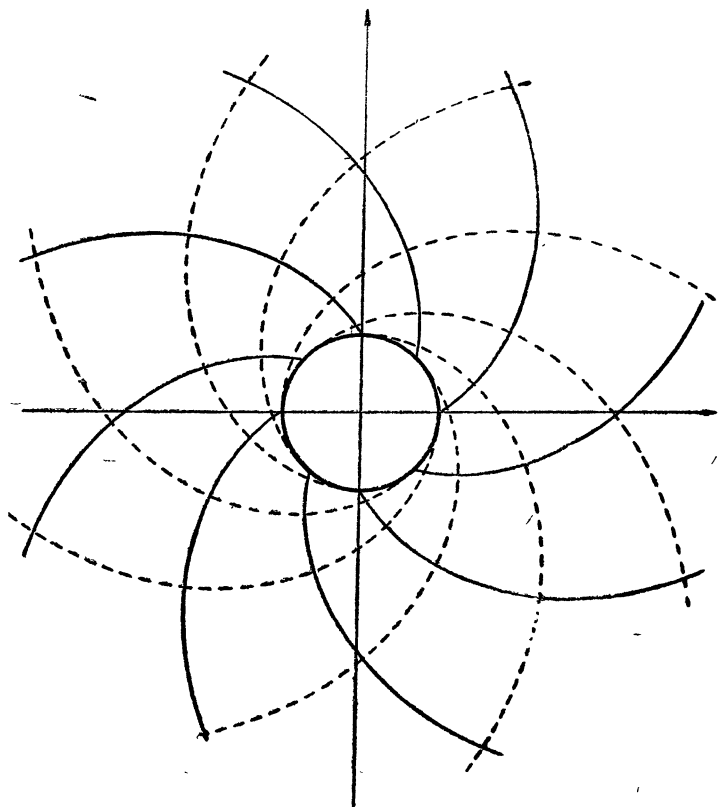
$$\left. \begin{aligned} u &= \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2}} - \\ &- \lg [\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 + a^2}] \\ v &= \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2}} + \\ &+ \lg [\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 + a^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (32.6)$$

Из (32.6) при  $a = 0$  получаем спирали (25.6) с коэффициентом  $a = 1$ .

Для кривых (30.6) легко найти

$$\sigma = \pm \frac{a^2 u + b^2 v}{a^2 + b^2} + C \quad (33.6)$$

и для однозначности  $\sigma$  необходимо  $b = -ia$ , что невозможно. Таким образом, кривые (30.6) не могут быть линиями сколь-



Фиг. 4.

жения в пластическом веществе. То же относится и к кривым (26.6). Для этих кривых  $\Theta = u$ ,  $\sigma_2 \pm u + c_2$  и  $\sigma$  не может быть однозначной.

## § 7. УРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СМЕЩЕНИИ

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

заключаем о существовании потенциала скоростей смещений:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Подставляя это в уравнение (3.2), получаем уравнение для потенциала

$$(\sigma_y - \sigma_x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 4\tau_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - (\sigma_y - \sigma_x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.7)$$

Это—уравнение гиперболического типа. Составим уравнение его характеристик

$$\begin{aligned} (\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 4\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \\ - (\sigma_y - \sigma_x) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнениями (19.1) и (4.4), убеждаемся, что характеристики уравнения потенциала скоростей совпадают с характеристиками уравнения для напряжений и суть линии скольжения.

Займемся приведением уравнения (2.7) к каноническому виду. Пусть уравнения характеристик будут  $u(x, y) = \text{const}$ ,  $v(x, y) = \text{const}$ . За независимые переменные примем  $u$  и  $v$ .

Положим для краткости  $\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = C$  и перепишем уравнения (2.7) и (3.7) в виде

$$C \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.7)$$

$$C \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - C \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (5.7)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (4.7) и замечая, что  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнению (5.7), получаем:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \left[ C \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial u} \left[ C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 2 + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial v} \left[ C \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Вычислим коэффициенты уравнения (6.7), которое для краткости запишем в виде

$$2P \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + Q \frac{\partial \psi}{\partial u} + R \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0. \quad (7.7)$$

Из формул (2.5) и (3.5) находим

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = AB.$$

Далее

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{AB} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Точно так же

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Пользуясь (2.5), (3.5) и (13.5) и полагая  $f(u) = \alpha$ ,  $g(v) = \beta$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\cos(\beta - \alpha)}{A}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{A} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\sin(\beta - \alpha)}{B}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cos(\beta - \alpha)}{B}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Из уравнения характеристик (5.7) и из (8.7) находим

$$C = \frac{2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \operatorname{tg} 2(\beta - \alpha) \quad (9.7)$$

$$2P = -\frac{2}{AB \cos 2(\beta - \alpha)} \quad (10.7)$$

Для вычисления коэффициентов  $Q$  и  $R$  вычислим вторые производные от  $u$ ,  $v$  и  $x$ ,  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\cos(\beta - \alpha)}{A} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\cos(\beta - \alpha)}{A} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\cos(\beta - \alpha)}{A} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{\left[ A \sin(\beta - \alpha) f'(u) - \cos(\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial u} \right] \cos(\beta - \alpha)}{A^3} + \\ &\quad + \frac{\left[ A \sin(\beta - \alpha) g'(v) + \cos(\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial v} \right] \sin(\beta - \alpha)}{A^2 B}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\left[ -A \cos(\beta - \alpha) f'(u) - \sin(\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial u} \right] \sin(\beta - \alpha)}{A^3} + \\ &\quad + \frac{\left[ A \cos(\beta - \alpha) g'(v) - \sin(\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial v} \right] \cos(\beta - \alpha)}{A^2 B} \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением (15.5), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \\ &= \frac{2 \sin 2(\beta - \alpha)}{A^2} f'(u) - \frac{\cos 2(\beta - \alpha)}{AB} g'(v) - \\ &\quad - \frac{\cos 2(\beta - \alpha)}{A^3} \frac{\partial A}{\partial u} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Точно так же найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = - \\ & = - \frac{\cos 2(\beta - \alpha)}{A^2} f'(u) - \frac{\sin 2(\beta - \alpha)}{2AB} g'(v) - \\ & \quad - \frac{\sin 2(\beta - \alpha)}{2A^3} \frac{\partial A}{\partial u} \end{aligned} \quad (12.7)$$

С помощью (10.7)–(12.7) получим

$$Q = \frac{2 f'(u)}{A^2 \cos 2(\beta - \alpha)}. \quad (13.7)$$

Аналогично

$$R = \frac{2 g'(v)}{B^2 \cos 2(\beta - \alpha)}. \quad (14.7)$$

Уравнение (7.7), принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{B}{A} f'(u) \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{A}{B} g'(v) \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0. \quad (15.7)$$

Таково каноническое уравнение потенциала скоростей смещений. В некоторых частных случаях этому уравнению можно придать более простую форму.

Пусть

$$f'(u) > 0, \quad g'(v) > 0.$$

Тогда, с помощью равенства (32.5) можно (15.7) записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{R_u}{R_v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - f' \frac{R_v}{R_u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

Примем за параметры  $\alpha = f(u)$  и  $\beta = g(v)$ . Тогда уравнение принимает наиболее простой вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{R_\alpha}{R_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0. \quad (16.7)$$

Пусть теперь  $f(u) = 0$ ,  $g'(v) > 0$ . В этом случае  $f(u) = \text{const}$ . Семейство  $v = \text{const}$  есть семейство прямых. Уравнение (15.7), если воспользоваться равенствами (32.5), принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{A}{R} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

За параметр  $v$  выберем длину дуги кривых  $u = \text{const}$ . При этом, очевидно,  $A = 1$  и окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{R_u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0. \quad (17.7)$$

Наконец, если  $f''(u) = g'(v) = 0$ , т. е., если характеристики суть два ортогональных семейства прямых, для потенциала скоростей смещений имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0. \quad (18.7)$$

При заданном поле напряжений можно определить скорости, если даны: 1) составляющие скоростей вдоль какой-нибудь кривой, которая не есть характеристика; 2) вдоль двух пересекающихся характеристик дана конормальная составляющая скорости.

Значительно более простые уравнения получаются для компонентов скоростей в направлении характеристик. Компоненты скорости в направлениях переменных  $\alpha$ ,  $\beta$  обозначим  $u_\alpha$  и  $u_\beta$ . Имеем

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_x \cos(\beta - \alpha) + u_y \sin(\beta - \alpha) \\ u_\beta &= u_x \sin(\beta - \alpha) + u_y \cos(\beta - \alpha). \end{aligned} \quad (19.7)$$

Продифференцируем первое равенство по  $\alpha$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} \cos(\beta - \alpha) + \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \sin(\beta - \alpha) - u_\beta \quad (20.7)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Полагая  $\beta - \alpha = \Theta$  и пользуясь (2.5), (3.5), (14.7) и (9.7), находим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial \alpha} \cos(\beta - \alpha) + \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \sin(\beta - \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\Theta \left( C \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = -u_\beta \quad (21.7)$$

Точно так же

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} = -u_\alpha. \quad (22.7)$$

Исключая из каждого уравнения по одной неизвестной найдем

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} = u_\alpha; \quad \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} = u_\beta \quad (23.7)$$

В случае, если  $f(u) = 0$ , уравнения (21.7)–(23.7) заменяются более простыми

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} \pm u_\alpha = 0 \quad (24.7)$$

$$\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \quad (25.7)$$

### § 8. ПОПЫТКИ ПОСТРОЕНИЯ НЕ ST-VEENANT'ОВСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Гипотезы St.-Venant'a и M. Lévy не всегда кажутся достаточно соответствующими действительности. В трехмерном случае они приводят, кроме того, к очень сложным уравнениям. Был сделан, поэтому, ряд попыток перестроить теорию пластичности на новых основах, либо по иному обосновать теорию St.-Venant'a. Мы займемся рассмотрением некоторых из этих теорий.

**Вариационный принцип в теории пластичности**

А. Наар и Т. v. Kármán сделали попытку построить теорию, которая давала бы возможность рассматривать тело, одна часть которого находится в упругом состоянии, а другая—в пластическом состоянии. Для вывода уравнений пластического и упругого состояний они пользуются принципом минимума потенциальной энергии. Задача ставится так. Пусть  $W$  есть плотность энергии деформации, выраженная в функции напряжений. Требуется обратиться в минимум интеграл

$$\iiint_{\Omega} W dx dy dz \quad (1.8)$$



где  $\Omega$ —область, занятая веществом, при „граничных условиях“

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

и при некоторых дополнительных условиях, которые мы сейчас выясним. Мы будем считать опытно установленным, что максимальное скалывающее напряжение не превосходит некоторой максимальной величины  $K$ . При этом вещество будет находиться в упругом состоянии в той области, где максимальное скалывающее напряжение меньше  $K$ , и в пластическом состоянии—в области, где это напряжение равно  $K$ . Пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  главные напряжения. Максимальное скалывающее напряжение равно наибольшей из полуразностей главных напряжений. Мы приходим к постановке следующей проблемы.

Найти минимум интеграла (1.8) при условиях (2.8) и дополнительных условиях

$$\begin{aligned}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 &\leq 4K^2 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &\leq 4K^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 &\leq 4K^2\end{aligned}\quad (3.8)$$

Допустим, что задача решена. При этом могут представиться следующие случаи.

I. В некоторой части основной области  $\Omega$  решение нашей вариационной проблемы таково, что условия (3.8) все выполнены со знаком неравенства. В этой части мы имеем, очевидно, упругое состояние.

II. В некоторой другой части области  $\Omega$  решение удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 &= 4K^2 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &< 4K^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 &> 4K^2\end{aligned}\quad (4.8)$$

Первое из условий (4.8) может быть записано, на основании (12.2) в виде

$$\Phi = 0 \quad (5.8)$$

Уравнения Лагранжа в этом случае имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{\partial (W + \tau \Phi)}{\partial \tau_{xy}} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial (W + \tau \Phi)}{\partial \sigma_x} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial (W + \tau \Phi)}{\partial \sigma_y} \right\} \quad (6.8)$$

и два других, получаемых круговой перестановкой  $x, y, z$ .

Состояние вещества, описываемое уравнениями (6.8) Нааг и v. Kármán, называют полупластическими.

III. Пусть теперь в некоторой части области  $\Omega$

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 &= 4K^2 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &= 4K^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\sigma_1 = \sigma_3 \quad (8.8)$$

В самом деле, из (7.8)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm (\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\text{Если } \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_3,$$

$$\text{то } \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Так как  $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2K$ , то  $|\sigma_1 - \sigma_3| = 4K$ , и максимальное скалывающее напряжение было бы равно  $2K$ . Таким образом  $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_3 - \sigma_2$ , и  $\sigma_1 = \sigma_3$ .

Добавочными условиями в вариационной задаче будут условие (5.8) и условие обращения в нуль дискриминанта  $\Delta$  уравнения (7.1)

$$\Delta = 0. \quad (9.8)$$

Уравнения Лагранжа будут

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{\partial (W + \tau_1 \Phi + \tau_2 \Delta)}{\partial \tau_{xy}} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial (W + \tau_1 \Phi + \tau_2 \Delta)}{\partial \sigma_x} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial (W + \tau_1 \Phi + \tau_2 \Delta)}{\partial \sigma_y} \right\} \quad (10.9)$$

и еще два, получаемых из этого круговой перестановкой аргументов. Это состояние Нааг и v. Kármán называют вполне пластическим. В выводе уравнений вполне пластического со-

стояния Haar и v. Kármán допустили ошибку и пришли к неверному выводу, что вполне пластическое состояние не связано с упругими свойствами вещества.

Существенным в методе Haar-Kármán'a является предположение, что плотность энергии деформации есть известная функция напряжений. Таким образом для применения метода Haar-Kármán'a необходимо знание потенциальной энергии деформации в пластическом состоянии, причем должно быть известно выражение этой энергии в функции напряжений. Между тем, а priori такое выражение нельзя считать известным и потому фактически выводы уравнений пластического состояния Haar-Kármán не дают.

Ценным в работе Haar-Kármán'a является то, что в ней впервые задача пластичности поставлена как смешанная задача теории упругости и пластичности.

### Теория Mises'a

Mises выводит уравнения пластичности из ряда аксиом, которые он считает установленными экспериментально:

1. При достаточно малых напряжениях всякое твердое тело ведет себя как упругое. При этом между напряжениями и деформациями существует одно — однозначная зависимость.

II. Когда напряжения достигают предела упругости, твердое тело ведет себя в основном как вязкая, близкая к несжимаемой, жидкость. Пусть  $p$  — среднее арифметическое главных напряжений,  $\|\lambda\|$  — тензор скоростей деформаций. Тогда, по аксиоме II

$$\begin{aligned} \sigma_x + p &= k\lambda_x + k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z), & \sigma_y + p &= k\lambda_y + k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z), \\ \sigma_z + p &= k\lambda_z + k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\ \tau_{xy} &= k\lambda_{xy}, & \tau_{xz} &= k\lambda_{xz}, & \tau_{yz} &= k\lambda_{yz}, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где  $k$  и  $k'$  некоторые, вообще говоря, переменные величины, зависящие от координат.

При этом в силу несжимаемости  $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = 0$ , и

$$\begin{aligned} \sigma_x + p &= k\lambda_x, & \sigma_y + p &= k\lambda_y, & \sigma_z + p &= k\lambda_z \\ \tau_{xy} &= k\lambda_{xy}, & \tau_{xz} &= k\lambda_{xz}, & \tau_{yz} &= k\lambda_{yz} \end{aligned} \quad (12.8)$$

III. Если изменить компоненты скоростей, так, чтобы их отношение не менялось, то, при пластическом состоянии вещества, энергия деформации остается неизменной.

Энергия деформации на единицу объема в единицу времени выражается формулой

$$A = (\sigma_x + p)\lambda_x + (\sigma_y + p)\lambda_y + (\sigma_z + p)\lambda_z + 2\tau_{xy}\lambda_{xy} + 2\tau_{xz}\lambda_{xz} + 2\tau_{yz}\lambda_{yz} = k(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 + 2\lambda_{xy}^2 + 2\lambda_{xz}^2 + 2\lambda_{yz}^2) \quad (13.8)$$

Если тензор скоростей деформаций умножить на  $C$ , скобка в (13.8) умножается на  $C^2$ , время деформации изменится в отношении  $\frac{1}{C}$ . По аксиоме III,  $k$  изменится в отношении

$\frac{1}{C}$ , иначе говоря, тензор напряжений не меняется при умножении тензора скоростей деформаций на скаляр.

IV. При пластическом состоянии напряжения остаются на пределе упругости. Этот предел упругости определяется следующей аксиомой.

Пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения.

Положим

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad (14.8)$$

так что

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (15.8)$$

Применим  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  за координаты точки в пространстве.

Тогда:

V. В плоскости (15.8) предел упругости представляется в виде замкнутой, обходящей начало координат, кривой.

По St.-Venant'y

$$|\tau_1| \leq K, \quad |\tau_2| \leq K, \quad |\tau_3| \leq K. \quad (16.8)$$

Неравенства (16.8) определяются в пространстве  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  куб, который с плоскостью (15.8) пересекается по правильному шестиугольнику. Mises предлагает заменить гипотезу St.-Venant'a более простой — считать, что предел упругости задается пересечением плоскости (15.8) со сферой

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2 \quad (17.8)$$

$$\text{Обозначим } \sigma_x' = \sigma_x + p, \quad \sigma_y' = \sigma_y + p, \quad \sigma_z' = \sigma_z + p \quad (18.8)$$

Уравнения пластичности могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (19.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= k \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \sigma_y' &= k \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \sigma_z' &= k \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \frac{k}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); & \tau_{xz} &= \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); & \tau_{yz} &= \frac{k}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (20.8)$$

В этих уравнениях  $\rho$  — плотность,  $X, Y, Z$  — компоненты массовых сил,  $v_x, v_y, v_z$  — компоненты вектора скоростей смещений. К этим уравнениям прибавляется еще уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (21.8)$$

Наконец, последнее уравнение получим из гипотезы V. Имеем очевидно

$$\begin{aligned} \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - \frac{3}{2} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \\ &+ \frac{3}{2} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \frac{1}{2} (\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z')^2 - \frac{3}{2} (\sigma_x' \sigma_y' + \\ &+ \sigma_x' \sigma_z' + \sigma_y' \sigma_z') + \frac{3}{2} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned}$$

Равенство это можно получить, выражая симметрическую функцию от  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  —  $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$  — через коэффициенты уравнения (7.1)

Заметив, что по (20.8) и (21.8)  $\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$  и пользуясь (17.8), найдем

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x' \sigma_y' + \sigma_x' \sigma_z' + \sigma_y' \sigma_z') = \frac{4K^2}{3} \quad (22.8)$$

Отметим, что при выводе уравнений Mises не пользуется гипотезой III.

В плоском случае уравнения Mises'a совпадают, с точностью до обозначений с уравнениями St.-Venant'a. В этом случае  $\sigma_3 = \sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  и, как легко проверить,

$$\tau_1 - \tau_2 = 0 \quad (23.8)$$

Вместе с (15.8) и (17.8) это дает

$$\begin{aligned} |\tau_1| &= |\tau_2| = \frac{K}{\sqrt{2}} \\ |\tau_3| &= 2|\tau_1| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \frac{2K}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (24.8)$$

В качестве граничных условий Mises считает возможным задавать напряжения или смещения на границе области.

Уравнения (20.8) совпадают, если исключить  $K$ , с уравнениями (10.2) M. Lévy. В теории Mises'a новым, по сравнению с теорией St.-Venant'a - M. Lévy, является только введение более простой гипотезы напряжений, причем гипотеза эта ничем, кроме требования простоты, не оправдана. В плоском же случае теории Mises'a полностью совпадает с теорией St.-Venant'a.

### Теория Н. Ненску

Ненску представляет тензор пластических напряжений в виде суммы двух тензоров, один из которых он называет тензором упругих напряжений  $\|\sigma^{(s)}\|$ , другой — тензором трения  $\|\sigma^{(t)}\|$ . Тензор  $\|\sigma^{(s)}\|$  Ненску подчиняет уравнениям (20.8) Mises'a. Вместо гипотезы V он использует гипотезу III Mises'a, которую записывает в виде

$$A - \frac{2}{3} \frac{K^2}{\mu} = 0 \quad (25.8)$$

$A$  — работа тензора упругих деформаций.

$K$  — некоторая постоянная, которую считаем данной для данного вещества

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{1}{6} (\sigma_x^s - \sigma_y^s)^2 + \frac{1}{6} (\sigma_x^s - \sigma_z^s)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (\sigma_y^s - \sigma_z^s)^2 + \tau_{xy}^{s2} + \tau_{xz}^{s2} + \tau_{yz}^{s2} \right] \end{aligned} \quad (26.8)$$

В плоском случае уравнение (26.8) дает гипотезу St.-Venant'a, сформулированную для тензора упругих напряжений. Из (25.8) находим для коэффициента  $k$  Mises'a

$$K = \frac{4K}{\sqrt{3}} \cdot \left[ 2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2) + \lambda_{xy}^2 + \lambda_{xz}^2 + \lambda_{yz}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (27.8)$$

причем

$$\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = 0 \quad (28.8)$$

Для компонентов тензоры трения Hencky полагает

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= 2\kappa\lambda_x, & \sigma'_y &= 2\kappa\lambda_y, & \sigma'_z &= 2\kappa\lambda_z \\ \tau'_{xy} &= \kappa\lambda_{xy}, & \tau'_{xz} &= \kappa\lambda_{xz}, & \tau'_{yz} &= \kappa\lambda_{yz} \end{aligned} \quad (29.8)$$

где  $\kappa$  — постоянная, характерная для данного вещества. Исключая напряжения из уравнений механики сплошной среды найдем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left( \kappa + \frac{k}{2} \right) \Delta v_x + \lambda_x \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} \lambda_{xy} \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda_{xz} \frac{\partial k}{\partial z} \quad (30.8)$$

и два других, получаемых круговой перестановкой аргументов. Вместе (27.8) и (28.8) это дает систему 5 уравнений с пятью неизвестными  $P, k, v_x, v_y, v_z$ .

### Теория L. Prandtl'a

Prandtl ограничивается рассмотрением плоского случая. Гипотезу St.-Venant'a он заменяет более общей, именно—Prandtl считает максимальное скалывающее напряжение известной функцией гидростатического давления. В качестве первого приближения он берет линейную функцию, так что

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = K - a \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (31.8)$$

или

$$\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} + a(\sigma_x + \sigma_y) = k \quad (32.8)$$

Если введем функцию Airy  $W$ , так что

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left[k - a \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right]^2 = 0 \quad (33.8)$$

это уравнение гиперболического типа, если  $|a| < 1$ .

При  $a=0$  это уравнение совпадает с уравнением (5.2) St.-Venant'a. Если  $a \neq 0$ , его можно упростить, положив

$$W = U + \frac{K}{4a} (x^2 + y^2) \quad (34.8)$$

Для новой неизвестной  $U$  получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 = 0 \quad (35.8)$$

Prandtl применяет свою теорию к решению следующей задачи. Найти распределение пластических напряжений в круговом секторе, причем эти напряжения не зависят от расстояния рассматриваемой точки до центра сектора.

Поместим начало полярных координат в центр.

Функцию Airy  $W$  будем искать в виде

$$W = \frac{r^2}{2} f(\varphi) \quad (36.8)$$

Обозначим  $\sigma_r$  нормальное напряжение на площадку с нормалью  $r$ , нормальное напряжение на площадку с нормалью  $\varphi$ .  $\tau$  — скалывающее напряжение.

Нетрудно найти

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{2} f'' + f; \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \\ &= f; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2} f' \end{aligned} \quad (37.8)$$

Уравнение (32.9) переходит при этом в следующее:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} f''^2 + f'^2} + a \left( \frac{1}{4} f'' + f \right) = K \quad (38.8)$$



Уравнение (38.8) имеет частное решение

$$f = \frac{K}{a} + Ae^{\beta\varphi} \quad (39.8)$$

где  $A$  — произвольная постоянная, а  $\beta$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\beta^2}{4} \left( \frac{\beta^2}{4} + 1 \right) - a^2 \left( \frac{\beta^2}{4} + 1 \right)^2 = 0 \quad (40.8)$$

Одно из решений этого уравнения  $\beta = \pm 2i$ . Так как функция  $f(\varphi)$  должна быть вещественной, то  $A = 0$ ,  $f = \frac{K}{a}$ . Это дает гидростатическое распределение напряжений  $\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{K}{a}$ ;  $\tau = 0$ . Другая пара решений уравнения (40.8) будет

$$\beta = \pm \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (41.8)$$

При  $|a| > 1$ ,  $\beta$  будет величиной мнимой, и соответствующее решение будет опять  $\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{K}{a}$ ,  $\tau = 0$ .

Если  $|a| < 1$ ,  $\beta$  вещественно, и мы находим решение задачи в виде

$$f = \frac{K}{a} + Ae^{\beta\varphi} \quad (39.8)$$

где  $\beta$  определено формулой (41.8).

Соответственно этому значению  $f$  находим [берем знак  $+$  в формуле (41.8)]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K}{a} + A \frac{1+a^2}{1-a^2} e^{\beta\varphi}; \quad \sigma_\varphi = \\ &\frac{K}{a} + Ae^{\beta\varphi}; \quad \tau = \frac{Aa}{\sqrt{1-a^2}} e^{\beta\varphi} \end{aligned} \quad (42.8)$$

Постоянная  $A$  может быть определена, если дана одна из составляющих внешних сил на одном из радиусов сектора.

Для главных нормальных напряжений находим

$$\sigma_1 = \frac{K}{a} + \frac{Ae^{\beta\varphi}}{1+a}; \quad \sigma_2 = \frac{K}{a} + \frac{Ae^{\beta\varphi}}{1-a} \quad (43.8)$$

Если  $a=0$ , что соответствует гипотезе St.-Venant'a, предшествующие формулы делаются непригодными. Простой предельный переход дает в этом случае

$$f = 2K\varphi + B \quad (44.8)$$

где  $B$  — постоянная. Отсюда

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = 2K\varphi + B, \quad \tau = K \quad (45.8)$$

## § 9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

До сих пор мы занимались только составлением и исследованием уравнений пластичности, причем в исследовании мы ограничивались только состоянием пластического покоя. Вопрос о решении уравнений пластичности и о соответствующих этому начальных или граничных условиях оставался в стороне.

С. Л. Соболев в своей статье „The problem of the propagation of plastical state“ решает задачу о распространении, с течением времени, пластического состояния в среде, первоначально упругой. Для решения этой задачи С. Л. Соболев вводит два дополнительных предположения.

1. Ускорения частиц вещества как в пластическом, так и в упругом состоянии так малы, что ими можно пренебречь. Таким образом, упругое состояние вещества описывается классическими уравнениями упругой статики. Пластическое состояние описывается уравнениями St.-Venant'a.

2. На границе между областями упругого и пластического состояний все составляющие напряжений и смещений и касательная составляющая скорости смещений остаются непрерывными.

Ограничимся рассмотрением следующего случая.

Упругое вещество заполняет плоскость с круговым вырезом радиуса  $r_0$ . По окружности этого выреза приложены некоторые напряжения, вызывающие смещения точек контура. Мы будем считать эти смещения данными функциями точек контура.

Введем полярные координаты  $\rho, \vartheta$ . Пусть начальные координаты некоторой точки среды будут  $\rho_0, \vartheta_0$ ; в момент  $t$  —  $\rho, \vartheta$ .

Пусть данные смещения точек границы не зависят от полярного угла. Мы примем, что смещения в любой точке и в любой момент времени также не зависят от  $\vartheta$ , так что

$$\rho = \rho(\rho_0, t) \quad (1.9)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \psi(\rho_0, t) \quad (2.9)$$

где  $\rho(\rho_0, t)$  и  $\psi(\rho_0, t)$  не зависят от  $\vartheta$ . Так как смещения точек круга  $\rho_0 = r_0$  нам даны, то нам известны  $\rho(r_0, t)$  и  $\psi(r_0, t)$ . Мы предположим далее, что составляющие напряжений  $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$  также не зависят от  $\vartheta$ . Наконец, примем, что на бесконечности напряжения исчезают. Таким образом во внешности некоторого, достаточно большого круга вещество находится в упругом состоянии. Области, занятые пластическим или, соответственно упругим веществом, очевидно, ограничены окружностями. Мы примем, что плоскость распадается на две части: на круговое кольцо

$$r_0 < \rho_0 < R_0(t) \quad (3.9)$$

такое, что в кольце  $\rho(r_0, t) < \rho < \rho R_0(t, t)$  вещество пластично и внешность круга

$$\rho_0 > R_0(t) \quad (4.9)$$

так что вещество упруго во внешности круга  $\rho > \rho R_0(t, t)$ . Окружность

$$\rho = \rho(R_0(t), t) \quad (5.9)$$

есть, таким образом, граница упругой и пластической области.

Напишем уравнения пластического и упругого состояний в полярных координатах. Принимая во внимание независимость от  $\vartheta$  величин, входящих в уравнения, найдем:

Уравнения (26.1) механики сплошной среды, общие для обоих состояний, примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Связь между напряжениями и смещениями в упругой зоне может быть записана в виде:<sup>1</sup>

<sup>1</sup> См., напр., Н. И. Мусхелишвили „Некоторые задачи теории упругости“.

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_p) + 2\mu \frac{\partial u_p}{\partial \rho} \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\vartheta) + 2\mu \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \rho} \\ \tau_{p\vartheta} &= \mu \left[ \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \rho} - \frac{u_\vartheta}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

$\sigma_p, \sigma_\vartheta, \tau_{p\vartheta}$  — составляющие напряжений на площадки с нормальными  $\rho, \vartheta$ ;

$u_p, u_\vartheta$  — составляющие смещений в направлениях  $\rho, \vartheta$ ;  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Lamé. Условие пластичности напишем, полагая

$$(\sigma_p - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{p\vartheta}^2 = 4K^2 \quad (8.9)$$

Условие несжимаемости в координатах Лагранжа имеет вид

$$\iint_{\Omega} \rho \, d\rho \, d\vartheta = \iint_{\Omega} \rho_0 \, d\rho_0 \, d\vartheta_0 \quad (9.9)$$

где  $\Omega$  — произвольная область. Отсюда

$$\frac{D(\rho, \vartheta)}{D(\rho_0, \vartheta_0)} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (10.9)$$

С другой стороны из формул (1.9) и (2.9) следует

$$\frac{D(\rho, \vartheta)}{D(\rho_0, \vartheta_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} & 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho_0} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \quad (11.9)$$

Сравнение (10.9) и (11.9) дает

$$\rho^2 = \rho_0^2 + \frac{k}{\mu} C(t) \quad (12.9)$$

где  $c(t)$  — произвольная функция времени. Коэффициент  $\frac{K}{\mu}$  введен для упрощения дальнейших вычислений.

Нам даны смещения точек контура, т. е. даны значения  $\rho(\rho_0, t)$  при  $\rho_0 = r_0$

$$\rho(\rho_0, t) = C_0(t)$$

где  $C_0(t)$  данная функция времени. Полагая в (12.9)  $\rho_0 = r_0$ , находим  $C(t) = \frac{\mu}{K} [C_0^2(t) - r_0^2]$ . Таким образом, функцию,

$C(t)$ , входящую в формулу (12.9), можно считать данной. Условие несжимаемости, следовательно, определяет полностью в пластической области функцию  $\rho(\rho_0, t)$ . Дифференцируя равенство (12.9) по времени, имеем

$$2\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{K}{\mu} C'(t)$$

откуда

$$v_\rho = \frac{K}{2\mu\rho} C'(t) \quad (13.9)$$

Таким образом составляющая скорости по оси  $\rho$ ,  $V_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}$  также может считаться известной.

Остается еще написать уравнение, выражающее условие совпадения направлений линии скольжения и линии максимальной скорости сдвига. Как в этом легко убедиться из формул (27.1) и (28.1), оно имеет следующий вид (опять учитываем независимость всех величин от  $\vartheta$ ):

$$\frac{\frac{v_\rho}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}}{\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \frac{v_\vartheta}{\rho}} = \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_\rho}{2\tau_{\rho\vartheta}} \quad (14.9)$$

Займемся решением уравнений пластичности в нашем случае. Мы уже нашли выше величину  $\rho(\rho_0, t)$  и  $v_\rho(\rho_0, t)$ . Найдем теперь поле напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\vartheta$ ,  $\tau_{\rho\vartheta}$ . Это можно сделать, если известны характеристики. Из независимости величин напряжений от  $\vartheta$  заключаем, что семейства характеристик должны быть инвариантны по отношению к повороту вокруг начала. Эти характеристики нами найдены в § 6.

Уравнения семейств характеристик будут

$$\begin{aligned} u &= \vartheta + \arctg \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{\rho^2 + a^2}} - \lg \left[ \sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 + a^2} \right] \\ v &= \vartheta + \arctg \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2}} + \lg \left[ \sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 + a^2} \right] \end{aligned} \quad (32.6)$$

Заменяя  $a^2$  на  $\lambda$ , найдем <sup>1</sup>

$$u = \vartheta + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\rho^2 - \lambda^2}{\rho^2 + \lambda}} - \lg \left[ \sqrt{\rho^2 - \lambda} + \sqrt{\rho^2 + \lambda} \right] \quad (15.9)$$

$$v = \vartheta + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\rho^2 - \lambda}{\rho^2 + \lambda}} + \lg \left[ \sqrt{\rho^2 - \lambda} + \sqrt{\rho^2 + \lambda} \right]$$

Из формулы (31.6), в которой нужно положить  $a = b = \lambda$ , находим

$$\frac{\sigma}{2k} = \pm (u - v) + C_1$$

или

$$\frac{\sigma}{2K} = \varepsilon \lg \left[ \sqrt{\rho^2 - \lambda} + \sqrt{\rho^2 + \lambda} \right] + C_1(t) \quad (16.9)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ , а  $\lambda$  и  $C_1(t)$  некоторые, пока неизвестные, функции времени. Далее, по формуле (20.6)

$$\Theta = \vartheta + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\rho^2 - \lambda}{\rho^2 + \lambda}} \quad (17.9)$$

Нетрудно, далее, вывести формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \pm K \sin 2(\Theta - \vartheta) + \sigma \\ \sigma_\vartheta &= \pm K \sin 2(\Theta - \vartheta) + \sigma \\ \tau_{\rho\vartheta} &= \pm K \cos 2(\Theta - \vartheta) \end{aligned} \quad (18.9)$$

Пользуясь (16.9) и (17.9), находим ( $\eta = \pm 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma + \eta K \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho^2} \\ \sigma_\vartheta &= \sigma - \eta K \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho^2} \\ \tau_{\rho\vartheta} &= -\eta K \frac{\lambda}{\rho^2} \end{aligned} \quad (19.9)$$

Подставляя (19.9) в уравнения (6.9) механики сплошной среды и пользуясь (16.9), найдем  $\eta = -\varepsilon$  и окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \varepsilon K \left[ 2 \lg \left( \sqrt{\rho^2 - \lambda} + \sqrt{\rho^2 + \lambda} \right) - \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho^2} \right] + C_1 \\ \sigma_\vartheta &= \varepsilon K \left[ 2 \lg \left( \sqrt{\rho^2 - \lambda} + \sqrt{\rho^2 + \lambda} \right) + \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho^2} \right] + C_1 \\ \tau_{\rho\vartheta} &= \varepsilon K \frac{\lambda}{\rho^2} \end{aligned} \quad (20.9)$$

<sup>1</sup> Не следует смешивать этот коэффициент с коэффициентом упругости  $\lambda$  Lamé.

Зная напряжения и величину  $v$ , найдем  $v_{\vartheta}$  из (14.9). Пользуясь (13.9) и (20.9) и произведя несложное интегрирование, найдем

$$v_{\vartheta} = \frac{K}{\mu} \frac{C'(t)}{2\lambda} \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho} + \rho C_2'(t) \quad (21.9)$$

где  $C_2'(t)$  некоторая, опять неизвестная пока, функция времени. Имея в виду, что  $v_{\vartheta} = \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  найдем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{K}{\mu} \frac{C'(t)}{2\lambda} \frac{\sqrt{\rho^4 - \lambda^2}}{\rho^2} + C_2'(t) \quad (22.9)$$

Мы нашли решение уравнений пластичности, зависящее от нескольких произвольных функций. Чтобы определить эти функции, мы должны будем воспользоваться условиями на границе пластичности и упругой области.

Найдем прежде всего распределение напряжений и смещений в упругой области.

Обозначим

$$R(t) = \rho(R_0(t), t) \quad (23.9)$$

Очевидно, окружность  $\rho = R(t)$  будет границей упругой зоны. Пусть на этой границе даны смещения, независящие от  $\vartheta$ . Мы их запишем в виде

$$U_{\rho} = \frac{K}{\mu} \frac{A(t)}{2R(t)}; \quad U_{\vartheta} = -\frac{K}{\mu} \frac{B(t)}{2R(t)} \quad (24.9)$$

Тогда, как не трудно видеть, в любой точке упругой области

$$u_{\rho} = \frac{K}{\mu} \frac{A(t)}{2\rho}; \quad u_{\vartheta} = -\frac{K}{\mu} \frac{B(t)}{2\rho} \quad (25.9)$$

$$\sigma_{\rho} = \frac{KA(t)}{\rho^2}; \quad \sigma_{\vartheta} = -\frac{KA(t)}{\rho^2}; \quad \tau_{\rho\vartheta} = -\frac{KB(t)}{\rho^2} \quad (26.9)$$

Отметим, что  $A(t)$  и  $B(t)$  нам неизвестны и должны также определяться из условий на границе двух областей.

Из (12.9) находим смещение  $u_p$  в пластической области

$$u_p = \rho - \rho_0 = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{K}{\mu} C(t)} =$$

$$= \frac{K}{\mu} \frac{C(t)}{\rho + \sqrt{\rho^2 - \frac{K}{\mu} C(t)}} = \frac{K}{\mu} \frac{C(t)}{2\rho + U_p}$$

Во всей упругой области, а следовательно, и на границе зоны пластичности с зоной упругости  $\rho$  мало, и можно принять на этой границе

$$u_p = \frac{K}{\mu} \frac{C(t)}{2R(t)} \quad (27.9)$$

Так как  $u_p$  остается непрерывным на границе (23.9), то из (25.9) и (27.9) находим

$$A(t) = C(t) \quad (28.9)$$

Равенства (25.9) и (26.9) мы запишем поэтому в виде

$$u_p = \frac{KC(t)}{2\mu\rho}; \quad u_\theta = -\frac{KB(t)}{2\mu\rho} \quad (29.9)$$

$$\sigma_p = \frac{KC(t)}{\rho^2}; \quad \sigma_\theta = -\frac{KC(t)}{\rho^2}; \quad \tau_{p\theta} = -\frac{KB(t)}{\rho^2} \quad (30.9)$$

Таким образом, наше решение содержит 5 неизвестных функций времени:  $\lambda(t)$ ,  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $R(t)$ ,  $B(t)$  и неизвестный знак  $\varepsilon$ . Их предстоит определить из граничных условий.

Напишем на границе (23.9) условия непрерывности всех напряжений  $\sigma_p$ ,  $\sigma_{p\theta}$ ,  $\sigma_\theta$ , причем последнее из них будет несколько удобнее заменить требованием непрерывности величины  $\sigma_p - \sigma_\theta$

$$\frac{RC(t)}{R^2(t)} = \varepsilon K \left[ 2 \lg \left( \sqrt{R^2(t) - \lambda(t)} + \sqrt{R^2(t) + \lambda(t)} - \frac{\sqrt{R^4(t) - \lambda^2(t)}}{R^2(t)} \right) + C_1(t); \quad (32.9)$$

$$-\frac{KB(t)}{K^2(t)} = \varepsilon K \frac{\lambda(t)}{R^2(t)} \quad (33.9)$$

$$-\frac{2\varepsilon K \sqrt{R^4(t) - \lambda^2(t)}}{R^2(t)} = \frac{2KC(t)}{R^2(t)} \quad (34.9)$$



Равенство (32.9) определяет величину  $C_1(t)$ , если известны величины  $R(t)$  и  $\lambda(t)$

Из (34.9) следует

$$\varepsilon = -\operatorname{sign} C'(t) \quad (35.9)$$

и

$$R^4(t) = C^2(t) + \lambda^2(t) \quad (36.9)$$

Для простоты примем, что  $C(t)$  — возрастающая функция времени. Это соответствует предположению, что вещество все время подвергается действию раздавливающих его внешних сил. Тогда  $\varepsilon = -1$ .

Из (33.9) тогда следует

$$B(t) = \lambda(t) \quad (37.9)$$

Приравняем теперь  $u_\theta$ , вычисленное в упругой и пластической областях на окружности (23.9). Это дает нам

$$\frac{K}{2\mu} \frac{B'(t)}{R^2(t)} = \frac{K}{2\mu} \frac{C'(t)}{\lambda(t)} \frac{\sqrt{R^4(t) - \lambda^2(t)}}{R^2(t)} + C_2'(t) \quad (38.9)$$

Наконец, из (22.9) и (2.9) находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi(r_0, t)}{\partial t} = \\ & = \frac{K}{2\mu} \frac{C'(t)}{\lambda(t)} \frac{\sqrt{\left[r_0^2 + \frac{K}{\mu} C(t)\right]^2 - \lambda^2(t)}}{r_0^2 + \frac{K}{\mu} l(t)} + C_2'(t) \quad (39.9) \end{aligned}$$

Напомним, что функция  $\psi(r_0, t)$  нам известна. Теперь мы имеем достаточно уравнений, чтобы определить все неизвестные функции. Исключая из (38.9) и (39.9)  $C_2'(t)$ , находим уравнение для определения  $\lambda(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi(r_0, t)}{\partial t} = -\frac{K}{2\mu} \frac{\lambda'(t)}{\sqrt{\lambda^2(t) + C^2(t)}} - \\ & - \frac{K}{2\mu} \frac{C'(t) C(t)}{\lambda(t) \sqrt{\lambda^2(t) + C^2(t)}} + \\ & + \frac{K}{2\mu} \frac{C'(t)}{\lambda(t)} \frac{\sqrt{\left[r_0^2 + \frac{K}{\mu} C(t)\right]^2 - \lambda^2(t)}}{r_0^2 + \frac{K}{\mu} C(t)} \quad (40.9) \end{aligned}$$

Начальное условие для интегрирования уравнения (40.9) найдем из следующих соображений. Примем за начальный момент  $t_0$  момент появления пластической зоны. В этот момент упругие смещения могут быть определены при  $\rho_0 = r_0$  и должны совпадать с заданными смещениями. Это дает нам при  $t = t_0$  и  $\rho_0 = r_0$

$$\rho(r_0, t_0) \psi(r_0, t_0) = -\frac{K B(t_0)}{2\mu \rho(r_0, t_0)}$$

или так как  $\lambda(t) = B(t)$

$$\lambda(t_0) = -\frac{2\mu}{K} \rho^2(r_0, t_0) \psi(r_0, t_0) \quad (41.9)$$

Момент  $t_0$  определяется из условия, что при  $t = t_0$ , радиус зоны пластичности совпадает с радиусом выреза. В силу (36.9) это даст

$$\rho^4(r_0, t_0) = C^2(t_0) + \lambda^2(t_0) \quad (42.9)$$

Равенства (41.9) и (42.9) определяют  $t_0$  и  $\lambda(t_0)$

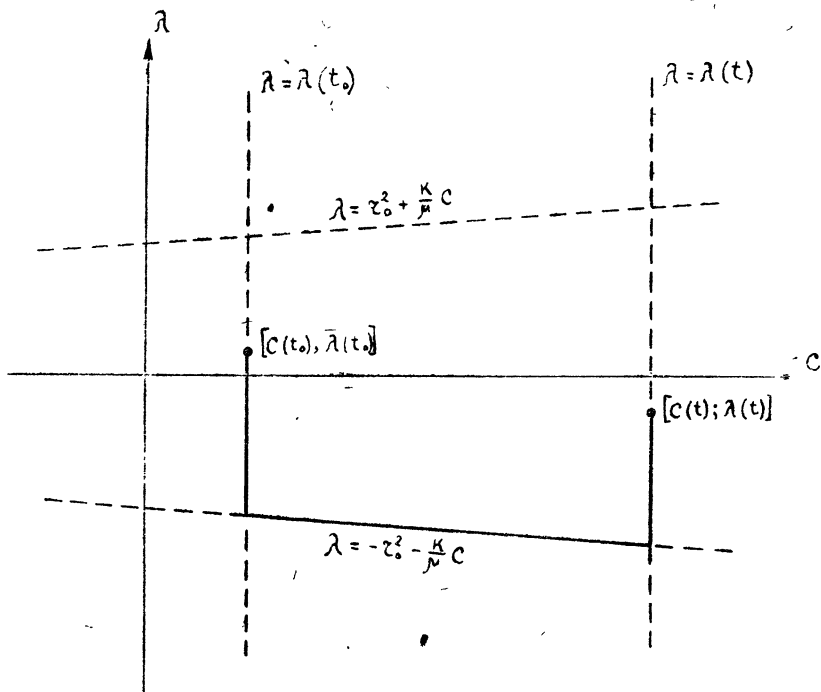
Определив  $\lambda(t)$  из дифференциального уравнения (40.9) найдем из предшествующих уравнений все остальные величины. Для определения  $C_2(t)$  придется выполнить квадратуру которая введет произвольную постоянную. Эту постоянную найдем из условия непрерывности  $u_\theta$  на границе (23.9).

Из уравнения (40.9) следует, что  $\psi(r_0, t)$ , т. е. касательные смещения на контуре, нельзя задавать произвольно. В самом деле, рассмотрим плоскость переменных  $C$  и  $\lambda$ . Данным  $C(t)$  и  $\lambda(t)$  на этой плоскости соответствует некоторая кривая  $L$ .

Из уравнения (40.9)

$$\psi(r_0, t) = \frac{K}{2\mu} \int_L \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + C^2}} + \left( \frac{-C}{\lambda \sqrt{\lambda^2 + C^2}} + \frac{\sqrt{\left[ r_0^2 + \frac{K}{\mu} C \right]^2 - \lambda^2}}{r_0^2 + \frac{K}{\mu} C} \right) dC \quad (43.9)$$

При этом начало кривой  $L$  соответствует параметру  $t_0$ , конец—произвольному параметру  $t$ . Пусть  $L_1$ —другая кривая, имеющая те же концы и расположенная так, чтобы обход сперва по  $L$  от  $t_0$  до  $t$  потом по  $L_1$  от  $t$  до  $t_0$  совершался против часовой стрелки. Пусть  $\Omega$ —область между этими кри-



Фиг. 5.

выми. Разность значений  $\psi(r_0, t)$ , соответствующая этим двум кривым, равна интегралу

$$\begin{aligned}
 & -\frac{K}{2\mu} \int_{L-L_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + C^2}} + \\
 & + \left( \frac{C}{\lambda \sqrt{\lambda^2 + C^2}} - \frac{\sqrt{\left[r_0^2 + \frac{K}{\mu} C\right]^2 - \lambda^2}}{r_0^2 + \frac{K}{\mu} C} \right) dC = \\
 & = \frac{K}{2\mu} \iint_{\Omega} \left\{ -\frac{C}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + C^2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_0^2 + \frac{K}{\mu} C}{\sqrt{\left[r_0^2 + \frac{K}{\mu} C\right]^2 - \lambda^2}} \right\} dC d\lambda \quad (44.9)
 \end{aligned}$$

Последний интеграл, очевидно, положителен.  
Далее,  $\lambda$  ограничено неравенством

$$|\lambda| \leq r_0^2 + \frac{K}{\mu} C$$

На плоскости  $C, \lambda$  этому соответствует угол между прямыми  $\lambda = r_0^2 + \frac{K}{\mu} C$  и  $\lambda = -r_0^2 - \frac{K}{\mu} C$ . Если ограничиться, как в вышеизложенном, случаем возрастания  $(C(t))$ , то при фиксированных начале  $C(t_0), \lambda(t_0)$  и конце  $\lambda(t), C(t)$  движения мы получим наибольшее допустимое значение  $\psi(r_0, t)$ , интегрируя по контуру, состоящему из отрезка прямой  $\lambda = \lambda(t_0)$  от точки  $(C(t_0), \lambda(t_0))$  до пересечения с прямой  $\lambda = -r_0^2 - \frac{K}{\mu} C$ , отрезка этой последней прямой от точки ее пересечения с прямой  $\lambda = \lambda(t_0)$  и из отрезка этой прямой от указанного пересечения до точки  $(C(t), \lambda(t))$  (фиг. 5).

При больших  $\psi(r_0, t)$  задача не имеет решения.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ПЛАСТИЧНОСТИ

1. B. de Saint-Venant. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. C. R., 1870, t. 70, pp. 473—480.
2. M. Lévy. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. C. R., 1870, t. 70, pp. 1323—1325.
3. M. Lévy. Sur l'intégration des équations aux différences partielles relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles. C. R., 1871, t. 73, pp. 1098—1103.
4. B. de Saint-Venant. Sur un complètement à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques. C. R., 1872, t. 74, pp. 1083—1087.
5. H. Hencky. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1923, Bd. 3, H. 4, SS. 241—251.
6. L. Prändtl. Anwendungen zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1923, Bd. 3, H. 6, SS. 401—406.
7. C. Caratheodory und E. Schmidt. Über die Hencky-Prandtl'schen Curvenscharen. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1923, Bd. 3, H. 6, SS. 468—475.
8. R. v. Mises. Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1925, Bd. 5, H. 2, SS. 147—149.
9. H. Pollaczek-Geiringer. Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem. Verhandlungen d. 3. Intern. Kongress f. techn. Mechanik, Stockholm, 1930, SS. 185—190.
10. A. Haar und T. v. Kármán. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Zuständen. Göttinger Nachrichten, 1909, SS. 204—218.
11. R. v. Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Göttinger Nachrichten, 1913, S. 582.

12. H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 1924, Bd. 4, H. 4, SS. 324—334.
13. L. Prandtl. Über die Härte plastischer Körper. Göttinger Nachrichten, 1920, SS. 74—85.
14. S. Sobolev. The problem of propagation of plastical state.
15. A. Nadai. Plastizität und Erddruck. Handbuch d. Physik, Bd. 6, Kap. 6.

Приведенный здесь список не претендует на полноту. В нем содержатся лишь наиболее важные, с нашей точки зрения, работы, посвященные математической теории пластичности.

## ВАЖНЕЙШИЕ ОПЕЧАТКИ

(М и х л и н. Основные уравнения математических теорий пластичности)

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
12	форм.(26.1)	$\operatorname{tg} 2 \beta = \frac{\frac{dv_y}{dx} - \frac{dv_x}{dy}}{\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy}}$	$\operatorname{tg} 2 \beta = \frac{\frac{dv_y}{dy} - \frac{dv_x}{dx}}{\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx}}$
13	(27.1)	$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}}{2 \rho \theta}$	$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}}{2 \tau \rho \theta}$
14	(2.2)	$\frac{\frac{dv_y}{dy} - \frac{dv_x}{dx}}{\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \tau_{xy}}$	$\frac{\frac{dv_y}{dy} - \frac{dv_x}{dx}}{\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \tau_{xy}}$
26	4 снизу	$\frac{dR_v}{dv} + \frac{ds}{d}$	$\frac{dR_v}{dv} + \frac{ds}{dv}$
29	6 "	(8.5)	(18.5)

Цена 2 р. 75 к.

50n

---

**ПРИЕМ ЗАКАЗОВ И ПОДПИСКИ**

на все издания Академии Наук СССР производится: 1) Сектором распространения  
Издательства Академии Наук, Ленинград 1, В. О., Менделеевская лин. 1. Тел. 5-92-62  
2) Московским отделением Издательства Академии Наук, Москва, ул. Горького, 20/2