М. С. МОЛОДЕНСКИЙ

Общая теория упругих колебаний Земли

МОСКВА "НЕДРА" 1989

УДК 528.22:531.26

Молоденский М. С. Общая теория упругих колебаний Земли.— М.: Недра, 1989. 79 с. ISBN 5—247—01365—4

Изложена разработанная автором теория упругих колебаний Земли с учетом сил Кориолиса, которая позволяет использовать высокую точность измерений, обеспечиваемую новой геодезической техникой. Описан способ учета нарушений сферической симметрии строения Земли, влияющих на ее упругие колебания. Решение приведено к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Дана методика определения строения Земли по частотам свободных колебаний.

Для научных работников — геодезистов, геофизиков, астрономов, изучающих вращение и колебания Земли.

Список лит.— 9 назв.

Рецензент д-р техн. наук *М. М. Машимов*

М $\frac{1803020000—107}{043(01)—89}$ 31—89

ISBN 5—247—01365—4

ВВЕДЕНИЕ

Элементы пространственного ориентирования Земли (углы прецессии, нутации и собственного вращения, ориентирующие систему координат, связанную с Землей, относительно неподвижной системы отсчета), как выяснил Леонард Эйлер в 1765 г.[1], нельзя отделить от составляющих движения полюса по земной поверхности, располагая только результатами измерений и не привлекая динамическую теорию вращения Земли. На основе теории движения свободных твердых тел, которую Эйлер разрабатывал с 1744 г.[2], он впервые рассмотрел вопрос совместного определения пространственного ориентирования Земли и движения полюса[3].

Теория вращения Земли постоянно развивалась, однако, как показали проведенные недавно радиоинтерферометрические эксперименты, еще недостаточно совершенен способ расчета нутации.

В высокоточных современных наблюдениях заметны приливные влияния. Полностью ли учитываются эти влияния на основе принятого на практике статического подхода, не будут ли следствием неточного учета приливных влияний определяемые движения обсерваторий и выводы о неприливных изменениях силы тяжести порядка $1 \cdot 10^{-8}$ м/сек^2 и тем более порядка $1 \cdot 10^{-11}$ м/сек^2? Для ответа на эти вопросы необходима точная теория приливов.

Существенное повышение точности измерений, обеспечиваемое современной техникой, может давать эффект только при использовании столь же точной теории вращения и колебаний Земли. Развитие такой теории является одной из актуальных задач современной науки.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена общей теории упругих колебаний Земли с жидким ядром, причем колебания заранее не разделены на сфероидальные и крутильные, а граничные условия могут иметь самый общий вид. Кроме того, в уравнения включены силы Кориолиса для учета вращения системы координат, связанной с Землей. Это делает

---

[1] *Euler L.* Remarques generales sur le mouvement diurne des planets. Opera omnia, ser. 2, v. 29, 199—219, Turici, 1961.

[2] *Euler L.* De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium. Opera omnia, ser. 2, v. 8, 7—26, Turici, 1964.

[3] *Euler L.* Recherches sur le mouvement de rotation des corps celestes. Opera omnia, ser. 2, v. 29, 220—256, Turici, 1961.

результаты применимыми при возбуждении колебаний на самых низких частотах, когда силы Кориолиса имеют основное значение. При этом возможно непрерывное уменьшение модуля сдвига до нуля, что соответствует жидкому ядру. Таким образом, единой системой уравнений и единым методом исследования можно охватить колебания всех видов и всех частот, в том числе вынужденную и свободную нутацию оси вращения Земли.

В начале книги рассматривается простейший случай сферически симметричного строения Земли. При радиальном смещении, объемном расширении и изменении потенциала, пропорциональных присоединенному полиному Лежандра с параметрами n и m, для простого колебания с частотой σ решение представлено системой обыкновенных дифференциальных уравнений, сложное колебание — суммой таких элементарных колебаний. Лунно-солнечные приливы и свободные (собственные) колебания могут быть представлены одним элементарным колебанием. В наиболее сложных случаях принимают во внимание возбуждение колебаний порядков $n-2$ и $n+2$. Затем задача решается в условиях, близких к условиям реальной Земли: поверхности равных модулей упругости и плотности мало отличаются от сферической формы; поверхности Земли и разрыва плотности и модулей упругости отличаются на малые (по отношению к радиусу Земли) величины от сферических; ядро Земли обладает малой вязкостью. В этих случаях решение для простейшего колебания требует малого изменения, определяемого методом возмущений. Оказалось возможным не возвращаться к уравнениям в частных производных, а выразить решение обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Теория упругих колебаний Земли стала широко применяться после того, как были достаточно точно измерены частоты более чем тысячи свободных колебаний разных типов. В результате получены надежные ответы на наиболее трудные вопросы глубинного строения Земли.

В книге обобщены некоторые результаты более ранних работ автора: «Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли» (Труды Геофизического института № 19 (146), 1953, с. 3—52); «Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром.» (в сб.: Земные приливы и внутреннее строение Земли.— М.: Наука, 1967, с. 3—9); «Теория нутации и суточных земных приливов» (в кн.: М. С. Молоденский, М. В. Крамер «Земные приливы и нутация Земли».— М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 3—25); «Приливы в упругой Земле» (в сб.: Медленные движения земной коры — М.: Наука, 1972, с. 5—7); «Строение Земли по частотам ее собственных колебаний» (Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, № 4, с. 3—9); «Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса» (Изв. АН СССР. Физика Земли, 1976, № 1, с. 3—12); «Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли» (Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 7, с. 9—15).

Это дает возможность от начала до конца ознакомиться с теорией упругих колебаний Земли. В частности, § 4 содержит вывод преобразованных к простейшей форме уравнений в частных производных и граничных условий, в которые вместо тангенциального смещения входит дивергенция тангенциального смещения. В § 5 дифференциальные уравнения выражены через вспомогательные функции Ф и P (вместо M и N), используемые в следующих параграфах, публикуемых впервые. Применяется простая запись неправильных интегралов[1], позволяющая при обращении матрицы, составленной из частных интегралов, понизить ее порядок в два раза. На поверхности Земли граничные условия для исходных и сопряженных уравнений связаны простыми соотношениями.

В § 6 использованы выражения для смещений, включающие производные от смещений по времени. Это позволило уравнения в частных производных заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрено приложение результата к расчету суточной нутации. В § 7 получены простые выражения для вычисления сопряженных функций без обращения матрицы. В матрице, составленной из значений на поверхности пяти правильных частных интегралов, входящих в пять независимых частных интегралов, десять элементов можно выразить через остальные пятнадцать. Выведено условие ортогональности собственных функций, вычисленных с включением сил Кориолиса.

Некоторые обозначения, употреблявшиеся в ранее опубликованных статьях, в данной книге изменены для удобства использования всех ее разделов.

Исследования и эксперименты проводились в Институте физики Земли АН СССР.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Юркиной за неоценимую помощь при подготовке рукописи к изданию.

---

[1] Правильным интегралом решения системы дифференциальных уравнений названа функция, ограниченная в центре Земли.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точка над буквой — символ дифференцирования по времени t; штрих — символ дифференцирования по радиусу-вектору r; черта над буквой — в некоторых случаях символ сопряженной функции. Функции без нижнего индекса зависят от сферических координат ϑ, φ, r, с нижним индексом n — только от расстояния r до центра земной сферы.

Δ — оператор Лапласа

Λ — объемное расширение, Λ_n — функция от r, его определяющая

М — дивергенция тангенциального к поверхности $r=\mathrm{const}$ напряжения (140)[1]

P — гидростатическое давление

ρ_n^m — присоединенный полином Лежандра степени n и порядка m

T — вспомогательная функция расстояния r (141), (143), T_{n-1}, T_{n+1} (141)

Φ — вспомогательная функция (89)

X — вспомогательная функция (57)

Ψ — вспомогательная функция (57) (ее определение в § 3 отлично от определения в § 7 и 10)

Ψ^* — вспомогательная функция (142)

α — сжатие земного эллипсоида

ϑ — полярное расстояние от направления оси вращения Земли

$\varkappa$ — амплитуда потенциала V_e

λ, μ — коэффициенты упругости Ламе

ν — вспомогательное обозначение (138) или коэффициент вязкости (§ 10)

ρ — плотность после деформации, ρ_0 — невозмущенная плотность

σ — частота приливообразующей силы и свободного колебания, σ_0 — приближенное значение

φ — долгота

χ, ψ — функции, через которые выражены смещения (56)

$\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли, ω отличается от модуля угловой скорости вращения Земли только из-за влияния нутации

G — гравитационная постоянная

H — функция, определяющая радиальную компоненту смещения (16);

H_W — функция, характеризующая компоненту смещения по нормали к уровенной поверхности

H_r — функция, определяющая радиальную компоненту (обозначение введено для отличия от H_W)

M — тангенциальная компонента напряжения (30)

M_x, M_y, M_z — проекции тангенциальной компоненты напряжения на оси координат

$N=\Lambda\lambda+2\mu H'$ (29); N_W — нормальная к поверхности сферической Земли компонента напряжения, N_x, N_y, N_z — компоненты нормального напряжения по осям координат

$$P=-Mr^2+\frac{2}{r}\mu S-2n(n+1)\mu H$$

$$\bar{P}=P+\mu\left(S'_0-n(n+1)H_0\right)$$

$$Q=(R'-4\pi\rho GH)r+(n+1)R=$$

$$=\frac{L}{r}+(n+1)R$$

[1] В скобках указаны номера формул, в которых впервые встречается данное обозначение.

R — функция, определяющая изменение потенциала притяжения внешней силой и деформацией Земли (21)

S — дивергенция тангенциального смещения, $S=(Hr^2)'-\Lambda r^2$ (89), при $\mu=0$ $S=S_0$, $\tilde{S}$ (141)

T — функция расстояния r, определяющая тангенциальное смещение (20)

V_e — потенциал внешней силы

V_i — изменение потенциала притяжения Земли из-за деформации

a — радиус земной сферы

b — радиус земного ядра

g — ускорение силы тяжести на поверхности земной сферы, в § 7 — вспомогательная функция $g=\mu\left(T_{n-1}/r\right)'$

r — расстояние до центра земной сферы

$\vec{r}$ — радиус-вектор (34)

t — время

u, v, w — компоненты смещения точки при деформации

x, y, z — декартовы прямоугольные координаты точки после деформации

x_0, y_0, z_0 — координаты точки до деформации

§ 1. Деформация упругой, неоднородной, сжимаемой и гравитирующей сферы

Состояние земной сферы при отсутствии деформирующей силы определено коэффициентами λ и μ упругости Ламе, плотностью ρ_0 и шестью компонентами начального напряжения X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x в каждой точке сферы [1]. В последующем будет рассмотрен случай, когда λ, μ и ρ_0 зависят только от расстояния r до центра сферы, а начальные напряжения имеют гидростатический характер, т. е.

$$\operatorname{grad}(\lambda,\ \mu,\ \rho_0)=\frac{d(\lambda,\ \mu,\ \rho_0)}{dr}; \tag{1}$$

$$X_y=Y_z=Z_x=0;\quad X_x=Y_y=Z_z=\mathrm{P}. \tag{2}$$

Будем полагать, что внешняя деформирующая сила имеет потенциал V_e, внутри сферы V_e является однородным гармоническим многочленом степени n от прямоугольных координат x, y, z (начало системы координат совмещено с центром сферы). Следовательно,

$$\Delta V_e=\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2}=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x}x+\frac{\partial V_e}{\partial y}y+\frac{\partial V_e}{\partial z}z=nV_e. \tag{4}$$

Из-за смещения и объемного расширения или сжатия элементов массы при деформации начальный потенциал W_0 сферы изменяется на величину V_i. После деформации он будет

$$U=W_0+V_e+V_i. \tag{5}$$

Точка с координатами x_0, y_0, z_0 при деформации получает смещения u, v, w, тогда ее новые координаты

$$x=x_0+u;\quad y=y_0+v;\quad z=z_0+w.$$

Деформация вызывает изменение объема и плотности. Объемное расширение равно

$$\Lambda=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{6}$$

Элемент массы после деформации имеет новую плотность

$$\rho=\rho_0(1-\Lambda). \tag{7}$$

В точке с координатами x, y, z после деформации окажется элемент массы, находившийся в точке с координатами $x-u$, $y-v$, $z-w$, поэтому

$$\rho(x, y, z)=\rho_0(x-u, y-v, z-w)(1-\Lambda). \tag{8}$$

Начальные напряжения X_x, Y_y, Z_z элемента массы в его исходном положении $x-u$, $y-v$, $z-w$, добавочные напряжения, которые возникают от деформации этого элемента и могут быть выражены через смещения u, v, w и коэффициенты упругости λ и μ, составляют напряжения $\bar{X}_x$, $\bar{Y}_y$, $\bar{Z}_z$, $\bar{X}_y$, $\bar{Y}_z$, $\bar{Z}_x$ в точке с координатами x, y, z после деформации. Результирующее напряжение с достаточной точностью можно получить простым сложением обеих указанных частей. Используя (2), получаем

$$\bar{X}_x(x, y, z)=X_x(x-u, y-v, z-w)+\Lambda\lambda+2\mu\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\bar{X}_y(x, y, z)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{9}$$

....

Равенства (5), (6), (8) и (9) выражают состояние деформированной сферы через величины, зависящие от ее начального состояния и смещений. Дифференциальные уравнения, определяющие смещения, можно получить из условий равновесия сферы до и после деформации. До деформации, в соответствии с допущением (2) о гидростатическом характере начальных напряжений, выполняются три условия равновесия следующего вида

$$\rho_0(x, y; z)\frac{\partial W_0(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial X_x(x, y, z)}{\partial x}=0. \tag{10}$$

После деформации

$$\rho(x, y, z)\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial \bar{X}_x(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{X}_z}{\partial z}=0. \tag{11}$$

Исключая из шести уравнений (10) и (11) и шести уравнений (9) все девять компонент напряжений (три начальных, шесть после деформации), получаем три уравнения для определения трех компонент смещения

$$\rho(x, y, z)\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}-\rho_0(x-u, y-v, z-w)\frac{\partial W_0(x-u, y-v, z-w)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda\lambda+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=0. \tag{12}$$

Остальные два уравнения можно написать аналогично. С помощью (5) и (8) исключаем U и ρ из этих уравнений. Тогда первые два члена в (12) примут следующий вид

$$\rho_0(x-u,\ y-v,\ z-w)(1-\Lambda)\frac{\partial}{\partial x}\left[W_0(x,\ y,\ z)+V_e+V_i\right]-$$

$$-\rho_0(x-u,\ y-v,\ z-w)\frac{\partial W_0(x-u,\ y-v,\ z-w)}{\partial x}=\rho_0(x-u,\ y-v,\ z-w)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial W_0(x,\ y,\ z)}{\partial x}-\frac{\partial W_0(x-u,\ y-v,\ z-w)}{\partial x}+\frac{\partial(V_e+V_i)}{\partial x}-\Lambda\frac{\partial W_0}{\partial x}\right],$$

где V_e и V_i — малые величины порядка смещений (членами порядка квадрата смещения пренебрегаем).

В теории приливов потенциал принято разлагать на элементарные колебания типа

$$V_e=\Sigma V_n=\Sigma\varkappa_{nm}\tau_{nm}r^n, \tag{13}$$

где $\varkappa_{nm}$ — амплитуда гармоники V_n потенциала V_e;

$$\tau_{nm}=\rho_n^m(\cos\vartheta)\cos(\sigma t-m\varphi). \tag{14}$$

Для простоты записи индекс m в обозначении (14) будем опускать. В этом параграфе (при рассмотрении статического прилива) $\sigma=0$ и, соответственно,

$$W_0(x,\ y,\ z)-W_0(x-u,\ y-v,\ z-w)=\frac{\partial W_0}{\partial x}u+\frac{\partial W_0}{\partial y}v+\frac{\partial W_0}{\partial z}w=$$

$$=\frac{dW_0}{dr}\Sigma\tau_nH_n, \tag{15}$$

где

$$\Sigma\tau_nH_nr=ux+vy+wz=Hr; \tag{16}$$

H_n — функция расстояния r. Для влияния гармоники степени n, опуская иногда этот индекс, вместо (12) получаем

$$\rho_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(V_e+V_i+\tau_nH_n\frac{dW_0}{dr}\right)-\Lambda\frac{x}{r}\frac{dW_0}{dr}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda\lambda+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\right]=0. \tag{17}$$

Наконец, после дифференцирования и преобразований имеем

$$\rho_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(V_e+V_i+\tau_n H_n\frac{dW_0}{dr}\right)-\Lambda\frac{x}{r}\frac{dW_0}{dr}\right]+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Lambda}{\partial x}+\mu\Delta u+$$

$$+\Lambda\frac{x}{r}\frac{d\Lambda}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d\mu}{dr}\left(\frac{\partial\tau_n H_n r}{dx}-u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0. \tag{18}$$

В три уравнения типа (18), кроме компонент смещения u, v и w, входит неизвестная функция V_i, связанная с изменением плотности уравнением Пуассона

$$\Delta V_i=\Delta U-\Delta W_0=4\pi G\left[\rho_0(x,\,y,\,z)-\rho(x,\,y,\,z)\right].$$

С помощью (8) и (16) получаем

$$\Delta V_i=4\pi G\left[\rho_0(x,\,y,\,z)-(1-\Lambda)\,\rho_0(x-u,\,y-v,\,z-w)\right]=$$

$$=4\pi G\left(\Lambda\rho_0+\tau_n H_n\frac{d\rho_0}{dr}\right). \tag{19}$$

Уравнения (18) и (19) вместе с условиями на поверхности сферы и в ее центре (или на сферическом слое) определяют состояние сферы (или сферического слоя) после деформации. Граничные условия будут рассмотрены ниже.

Систему уравнений в частных производных (18) и (19) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом Лява[1], представив V_e как

$$\bar{V}_e=V_e a^{n-1}/g=\tau_n r^n.$$

Будем искать решение в виде

$$u=\Sigma u_n;\quad u_n=\tau_n H_n\frac{x}{r}+T_n\frac{\partial}{\partial x}\tau_n;$$

$$v=\Sigma v_n;\quad v_n=\tau_n H_n\frac{y}{r}+T_n\frac{\partial}{\partial y}\tau_n;$$

$$w=\Sigma w_n;\quad w_n=\tau_n H_n\frac{z}{r}+T_n\frac{\partial}{\partial z}\tau_n; \tag{20}$$

$$V_e+V_i=R=\sum_0^\infty\tau_n R_n. \tag{21}$$

Неизвестные функции R_n, T_n так же, как H_n зависят только от r (в вычислениях на основе этого метода удобно выбрать

[1] *Ляв А.* Математическая теория упругости. Перевод с четвертого английского издания.— М.— Л.: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1935. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости.— 2-е изд., перераб. и дополн.— М.— Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1947.

систему единиц так, чтобы отношение a^{n-1}/g численно было равно единице, а $G=3/4\pi$).

Как отмечено выше, радиальное смещение пропорционально H_n, изменение потенциала — R_n, функция T_n — компоненте тангенциального смещения.

Из (6) с помощью (3) и (4) получаем

$$\Lambda=\sum_0^\infty \Lambda_n \tau_n; \tag{22}$$

$$\Lambda_n=H'_n+\frac{2}{r}H_n-\frac{n(n+1)}{r^2}T_n. \tag{23}$$

Далее, опуская индекс n, запишем

$$\Delta u=(T''-H'+\Lambda)\frac{\partial\tau}{\partial x}+\left[(n+1)T'-(n+1)H+\frac{r^2}{n}\Lambda'\right]\frac{nx}{r^3}\tau;$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(rT'-T)\frac{\partial\tau}{\partial x}+H'x\tau;$$

$$\frac{\partial\tau Hr}{\partial x}-u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(rT'-2T+Hr)\frac{\partial\tau}{\partial x}+2H'x\tau. \tag{24}$$

Подставив (24) и (22) в уравнение (18), будем иметь

$$[\rho_0(R+HW'_0)+(\lambda+2\mu)\Lambda-\mu H'+\mu'(T'+H-\frac{2}{r}T)+\mu T'']\frac{\partial\tau}{\partial x}+$$

$$+[(R'+H'W'_0+HW''_0-\Lambda W'_0)\rho_0+n(n+1)\mu\frac{T'-H}{r^2}+$$

$$+\Lambda\lambda'+2\mu'H'+(\lambda+2\mu)\Lambda']\frac{G\tau}{r}=0.$$

Замена x на y и z приводит к двум другим уравнениям. Необходимое и достаточное условие удовлетворения всех трех уравнений при $n\neq 0$ — обращение в нуль выражений в квадратных скобках. Следовательно, функции H, R, T должны удовлетворять двум обыкновенным

$$-[\mu(H+T'-\frac{2}{r}T)]'=\rho_0(R+HW'_0)+\Lambda\lambda+\frac{2\mu}{r}\left[2H+T'-\frac{n^2+n+1}{r}T\right]; \tag{25}$$

$$-(\Lambda\lambda+2\mu H')'=\rho_0(R+HW'_0)'-\Lambda\rho_0 W'_0+4\frac{\mu}{r}\left(H'-\frac{H}{r}\right)-$$

$$-\frac{n(n+1)}{r^2}\mu\left(T'+H-\frac{4T}{r}\right). \tag{26}$$

Четвертое уравнение в частных производных (19) с учетом (1), (3) и (4) примет вид

$$\Delta V_i = \Delta(\tau_n R_n) = 4\pi G(\Lambda_n \rho_0 + \rho_0' H_n)\tau_n.$$

После преобразований и сокращения на τ_n получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R'' = -\frac{2}{r}R' + \frac{n(n+1)}{r^2}R + 4\pi G(\Lambda\rho_0 + \rho_0' H). \tag{27}$$

Уравнения (25), (26) и (27) вместе с граничными условиями, которые будут получены ниже, определяют вспомогательные функции H, R, T.

В последующих задачах часть граничных условий определена напряжением на поверхности сферы. Компоненту N_x этого напряжения на оси x можно определить из (9)

$$N_x = \bar{X}_x \frac{x}{r} + \bar{X}_y \frac{y}{r} + \bar{X}_z \frac{z}{r} = X_x(x-u,\ y-v,\ z-w)\frac{x}{r} + \Lambda\lambda\frac{x}{r} +$$

$$+\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial \tau H r}{\partial x} - u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

или, на основании (23) и (24),

$$N_x = X_x(x-u,\ y-v,\ z-w)\frac{x}{r} + (\Lambda\lambda + 2\mu H')\frac{x\tau}{r} + \mu\left(T' - \frac{2}{r}T + H\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}. \tag{28}$$

Отсюда для нормальной компоненты N_W получим

$$N_W(x,\ y,\ z) = N_x\frac{x}{r} + N_y\frac{y}{r} + N_z\frac{z}{r} = N_W(x-u,\ y-v,\ z-w) + \tau N,$$

где

$$N = \Lambda\lambda + 2\mu H' = (\lambda + 2\mu)H' + \lambda\left(\frac{2}{r}H - \frac{n(n+1)}{r^2}T\right). \tag{29}$$

Исключая из N_x нормальную компоненту, определим проекции тангенциальной компоненты M напряжения по осям координат

$$M_x = N_x r^2 - N_W(x,\ y,\ z)\,rx = Mr\frac{\partial\tau}{\partial x}, \tag{30}$$

где

$$M = \mu\left(T' - \frac{2}{r}T + H\right).$$

Граничные условия для потенциала деформированной сферы получим, используя известные свойства потенциала притяжения.

Функцию (21), выражающую изменение потенциала сферы, с достаточным приближением можно рассматривать как сумму потенциала объемной массы и простых сферических слоев на границах разрыва плотности (на поверхности сферы, на границе ядра и др.). Имея в виду различия в аналитических свойствах потенциала притяжения внешних и внутренних масс, разобьем потенциал V_e+V_i, на три части: $V_н$, создаваемую наружными (объемной и поверхностной) массами, лежащими вне сферы $r=b$, $V_в$, создаваемую массой внутри этой сферы, и $V_с$, создаваемую простым слоем на этой же сфере. Плотность этого слоя равна $(\rho_i-\rho_e)H\tau$, где ρ_e, ρ_i — объемная плотность на внешней и внутренней поверхности сферы $r=b$. Если при $r=b$ плотность непрерывна, то $\rho_e-\rho_i=0$ и $V_с=0$.

Таким образом,

$$V_e+V_i=V_н+V_в+V_с;$$

внутри сферы $(r=b)$

$$V_н=V_н(b)\frac{r^n}{b^n};\quad V_с=V_с(b)\frac{r^n}{b^n};$$

вне сферы $(r=b)$

$$V_в=V_в(b)\frac{b^{n+1}}{r^{n+1}};\quad V_с=V_с(b)\frac{b^{n+1}}{r^{n+1}}.$$

Производные от потенциала объемной массы непрерывны, поэтому

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_e+V_i)\right]_{b-0}=\frac{n}{b}(V_н+V_с)-\frac{n+1}{b}V_в=\frac{2n+1}{b}(V_н+V_с)-$$

$$-\frac{n+1}{b}(V_e+V_i).$$

Потенциал слоя запишем следующим образом

$$V_с=\frac{4\pi G}{2n+1}(\rho_i-\rho_e)H\frac{V_e}{b^{n-1}},$$

следовательно будем иметь

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_e+V_i)\right]_{b-0}=-\frac{n+1}{b}(V_e+V_i)+\frac{2n+1}{b}V_н+4\pi G(\rho_i-\rho_e)H\tau; \qquad (31)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_e+V_i)\right]_{b-0}-\left[\frac{\partial}{\partial r}(V_e+V_i)\right]_{b+0}=4\pi G(\rho_i-\rho_e)H\tau. \qquad (32)$$

Уравнение (32) следует из формулы Пуассона. Подставив (21) в (32) получим

$$(R')_{b-0}-(R')_{b+0}=4\pi G(\rho_i-\rho_e)H. \qquad (33)$$

Для поверхности Земли ($r=a$) имеем $\rho_e=0$, $V_н=V_e$, и, используя формулу (31), запишем

$$(R')_{a-0}=-\frac{n+1}{a}R+4\pi\rho_0 GH+(2n+1)g.$$

§ 2. Уравнения в частных производных, определяющие суточные земные приливы и нутацию Земли

Уравнения упругости при существовании потенциала объемных сил имеют следующий вид

$$\rho\frac{D\vec{r}}{Dt}=\rho\,\mathrm{grad}\,U=\frac{\partial\vec{X}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{Z}}{\partial z}, \tag{34}$$

где $\frac{D}{Dt}$ означает дифференцирование по времени в неподвижной системе координат; $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки x, y, z; $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ — векторы давления, действующие на элементы плоскости yz, zx или xy;

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Точка над буквой означает частную производную по времени t.

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$, левую часть уравнения (34), включая силы Кориолиса, можно преобразовать к виду[1]

$$\frac{D\dot{\vec{r}}}{Dt}=\frac{\tilde{D}}{Dt}\left[\dot{\tilde{\vec{r}}}+[\vec{\omega}\vec{r}]\right]+\left[\vec{\omega}\left[\dot{\tilde{\vec{r}}}+[\vec{\omega}\vec{r}]\right]\right]=\frac{\tilde{D}\dot{\tilde{\vec{r}}}}{Dt}+$$
$$+2\left[\vec{\omega}\dot{\tilde{\vec{r}}}+\left[\dot{\tilde{\vec{\omega}}}\vec{r}\right]\right]+(\vec{\omega}\vec{r})\vec{\omega}-\vec{\omega}^2\vec{r}. \tag{35}$$

Волнистая черта над буквой означает, что производная по времени взята в подвижной системе координат. Если смещения малы, то

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}, \tag{36}$$

так как произведения скорости смещения на деформации — малые второго порядка.

Аналогично (5), при исследовании приливов и нутации в потенциал U включены: гравитационный потенциал W_0 всех масс Земли, потенциал V_e приливообразующей силы и потен-

[1] *Ламб Г.* Теоретическая механика. Т. 3.— М.— Л.: Объединенное научно-техническое изд-во, 1936. См. также [9].

циал V_i от деформации Земли. Потенциал V_e в подвижной системе координат представим в виде

$$V_e = \varkappa_{2m} \tau_2 r^2. \tag{37}$$

Для суточного прилива $m=1$, для полусуточного $m=2$, для двухнедельного $m=0$.

В подвижной системе координат выразим

$$\vec{\omega} = \omega(\varepsilon\vec{i}\cos\sigma t + \varepsilon\vec{j}\sin\sigma t + \vec{k}), \tag{38}$$

где ε — амплитуда нутации. В этом случае из (35) и (36) получаем

$$\frac{Dx}{Dt} = \ddot{u} - 2\omega\dot{v} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega + \frac{\sigma+\omega}{\omega}\Phi\right);$$

$$\frac{D\dot{y}}{Dt} = \ddot{v} + 2\omega\dot{u} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Omega + \frac{\sigma+\omega}{\omega}\Phi\right);$$

$$\frac{D\dot{z}}{Dt} = \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Omega + \frac{\sigma+\omega}{\omega}\Phi\right), \tag{39}$$

где

$$\Phi = -\varepsilon\omega^2 lz\cos(\sigma t - \varphi);$$

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 l^2; \tag{40}$$

u, v, w — смещения в подвижной системе координат.

Как в статическом случае (§ 1), для определения начальных напряжений необходимо допустить, что в поле постоянно действующих сил с потенциалом $W = W_0 + \Omega$ напряжения носят гидростатический характер, т. е.

$$\rho_0 \operatorname{grad} W = \operatorname{grad} \mathrm{P}, \tag{41}$$

где P — гидростатическое давление при $V_e = V_i = 0$.

Теперь преобразуем правую часть уравнения (34), предварительно записав ее в виде суммы

$$\rho \operatorname{grad} U + \frac{\partial\vec{X}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{Z}}{\partial z} = -\rho\operatorname{grad}\Omega +$$

$$+\left[\rho\operatorname{grad} W - \operatorname{grad}\mathrm{P}(x-u, y-v, z-w)\right] + \left[\operatorname{grad}\mathrm{P}(x-u, y-v, z-w) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\vec{X}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{Z}}{\partial z}\right].$$

Первый член перенесем в левую часть уравнения. Второй член преобразуем, воспользовавшись (41) и приняв во внимание изменение плотности при деформации по (8). Получаем

$$\rho \operatorname{grad} W - \operatorname{grad} P(x-u,\ y-v,\ z-w) =$$
$$= \rho_0(1-\Lambda) \operatorname{grad} W(x+u,\ y+v,\ z+w) - \operatorname{grad} P =$$
$$= \rho \operatorname{grad}(V_e + V_i + \eta) - \Lambda\rho \operatorname{grad} W, \tag{42}$$

где

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w. \tag{43}$$

Последний член в (42) можно выразить через смещения при помощи уравнений упругости (§ 1). По-прежнему считаем, что поверхности постоянных потенциалов, плотностей и коэффициентов упругости λ и μ совпадают. Однако теперь эти поверхности принимаем не сферическими, а сфероидами, которые определены теорией равновесия вращающейся неоднородной планеты. Сохраняя силы Кориолиса, запишем

$$\ddot{u} - 2\omega\dot{v} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta u + \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right) + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[u'W' + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_u;$$

$$\ddot{v} + 2\omega\dot{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta v + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right) + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[v'W' + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_v;$$

$$\ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \left(\frac{\Lambda'\lambda}{\rho^2 W'} - 1\right)\Lambda\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta w + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right) + \frac{\mu'}{\rho W'}\left[w'W' + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right] = F_w, \tag{44}$$

где

$$-\psi = V_e + \frac{\sigma+\omega}{\omega}\Phi + V_i + \eta + \frac{\Lambda\lambda}{\rho}; \tag{45}$$

штрих здесь означает производную по направлению внешней нормали к уровенной поверхности. К уравнениям (44) необходимо добавить уравнение Пуассона. Полное изменение плотности в фиксированной точке пространства определено уравнением неразрывности

$$\dot{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

следовательно

$$-\dot{\rho}=\Lambda\rho+\frac{\rho'}{W'}\eta,$$

поэтому

$$\Delta V_i=4\pi G\left(\Lambda\rho+\frac{\rho'}{W'}\eta\right). \tag{46}$$

Уравнения (6), (8), (42)—(46), составляющие систему, достаточны для определения всех функций.

При $\mu=0$ уравнения становятся гидродинамическими. Кроме того, если принять, что плотность зависит от гидростатического давления, то поскольку $\lambda\rho'=\rho^2 W'$, вместо (44) получаем

$$\ddot{u}-2\omega\dot{v}=-\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad \ddot{v}+2\omega\dot{u}=-\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad \ddot{w}+\frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{47}$$

Эти уравнения совпадают с обычными уравнениями для невращающейся Земли, если $\Phi=0$ и $V_i=0$.

Изменение гидростатического давления p в фиксированной точке пространства складывается из изменения давления фиксированного элемента жидкости $\Lambda\lambda$ и изменения давления из-за перемещения элемента $\eta\rho$, т. е.

$$-p=\Lambda\lambda+\eta\rho, \tag{48}$$

а уравнения (45) и (46) равносильны следующим

$$-\frac{W'}{4\pi\rho' G}\Delta V_i=\psi+V_e+\frac{\sigma+\omega}{\omega}\phi+V_i=\frac{p}{\rho}. \tag{49}$$

Величины Λ, η и p можно выразить через ψ. Для этого сначала запишем через ψ смещения u, v, w, которые, как видно из (37) и (38), при установившемся движении являются гармоническими колебаниями с частотой σ, поэтому

$$\frac{d^2\tau_{nm}}{dt^2}=-\sigma^2\tau_{nm}. \tag{50}$$

Продифференцировав первые две формулы (47) по времени, использовав (50) и исключив $\dot{u}$ и $\dot{v}$, получим

$$(\sigma^2-4\omega^2)u=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{2\omega}{\sigma^2}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial y};$$

$$(\sigma^2-4\omega^2)v=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{2\omega}{\sigma^2}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial x};$$

$$\sigma^2 w=\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

С такими величинами смещений из (6), (8) и (43) найдем

$$\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\Lambda=\Delta\psi-4\frac{\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2};$$

$$\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\eta=\psi' W'-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{2\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{2\left(\sigma^2-4\omega^2\right)}{\sigma\omega}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Второе выражение можно упростить. Потенциал W зависит только от l и z, поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{y}{l}\frac{\partial W}{\partial l};\quad \frac{\partial W}{\partial x}=\frac{x}{l}\frac{\partial W}{\partial l}.$$

Кроме того,

$$x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-\frac{m}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

так как в функцию ψ время и долгота входят только в линейной комбинации $\sigma t-m\varphi$. Таким образом,

$$\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\eta=\psi' W'-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{2\omega m}{\sigma l}\psi\frac{\partial W}{\partial l}+\frac{2\left(\sigma^2-4\omega^2\right)}{\sigma\omega}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}. \tag{51}$$

Теперь системе уравнений (49) можно придать следующий вид

$$-\frac{W'}{4\pi\rho' G}\Delta V_i=\psi+V_e+\frac{\delta+\omega}{\omega}\phi+V_i=\frac{1}{\omega^2}\mathrm{F}(\psi)-\frac{2}{\sigma\omega}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}, \tag{52}$$

где

$$\mathrm{F}(\psi)=\frac{\omega^2}{4\omega^2-\sigma^2}\left[\frac{\rho W'}{\rho'}\left(\Delta\psi-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\varphi' W'-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{2\omega m}{\sigma l}\psi\frac{\partial W}{\partial l}\right]\right..$$

Получена система двух уравнений в частных производных второго порядка с неизвестными функциями ψ и V_i. Граничные условия определены непрерывностью напряжений, потенциала и его производных, а также нормальной к границе ядра компонентой смещений.

§ 3. Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром

Вращение Земли оказывает существенное влияние на суточные приливы в ее жидком ядре. Вместе с тем велико влияние упругости оболочки Земли на период свободных колебаний (близких к суточным и чандлеровым) и на числа Лява, если период вынужденных колебаний близок к периоду свободных колебаний [2]. Поэтому необходимо обобщить способ исследования для случая прилива в упругом вращающемся сфероиде, или, в первом приближении — вращающемся шаре с жидким ядром[1]. Учитывая вращение Земли по (35) и принимая во внимание силы Кориолиса, имеем

$$\ddot{u}-2\omega\dot{v}=\mathrm{F}_u-\dot{\omega}y;\quad \ddot{v}+2\omega\dot{u}=\mathrm{F}_v+\dot{\omega}x;\quad \ddot{w}+\frac{2\sigma}{\omega}\phi=\mathrm{F}_w, \tag{53}$$

к этим уравнениям нужно добавить (46).

В последующих расчетах будем полагать Землю сферической. Учет сжатия, необходимый для суточных приливов, и учет вязкости в условиях гармонических колебаний возможны в следующем приближении[2].

При сфероидальных колебаниях, в частности в теории земных приливов, смещения, например u, и изменение V_i потенциала, полагая $\varkappa_{nm}=1$, можно представить выражениями

$$u_n=\frac{\partial}{\partial x}(\tau_n T_n)+\left[r^{-n}H_n-(r^{-n}T_n)'\right]\tau_n r^{n-1}x; \tag{54}$$

$$V_i+V_n+\frac{\sigma+\omega}{\omega}\phi=\tau_n R_n. \tag{55}$$

Приведем уравнение равновесия к виду

$$\mathrm{F}_u=-\frac{\partial(\psi_n V_n)}{\partial x}+\chi_n V_n x, \tag{56}$$

где χ_n и ψ_n — функция от r. При $n\neq 0$ эти уравнения удовлетворяются, если $\chi_n=\psi_n=0$. При $\omega\neq 0$ представим решение бесконечными рядами

$$\psi_u=\psi_v=\sum_0^\infty \psi_n V_n=\psi;\quad \chi_u=\chi_v=\sum_0^\infty \chi_n V_n=\chi;$$

$$\psi_w=\sum_0^\infty(\psi_n+\Psi_n)V_n=\psi+\Psi;\quad \chi_w=\sum_0^\infty(\chi_n+\mathrm{X}_n)V_n=\chi+\mathrm{X}, \tag{57}$$

где χ_n, ψ_n, Ψ_n, X_n — функции от r. Функция ψ в (56) и (57) отличается от ψ в (45) при $\mu=0$ постоянным множителем.

---

[1] *Молоденский М. С.* Приливы в упругой вращающейся Земле с жидким ядром. Сб.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта.— М.: Наука, 1967, с. 3—9.

[2] *Молоденский М. С.* Влияние вязкости на фазу земных приливов. Известия АН СССР. Физика Земли, 1963, № 10, с. 1469—1482.

Приравнивая коэффициенты при τ_n, систему уравнений (46) и (53) с помощью (54), (55) и (56) можно привести к виду

$$\left\{M'+\left(R+HW'+\frac{N}{\rho}+\psi r^n\right)\rho r^2+2\mu\left[Hr-(n^2+n-1)T+H'r^2\right]\right\}_n=0;$$

$$\left[\frac{N'}{\rho}+\frac{L}{r^2}-\frac{4HW'}{r}+\frac{n(n+1)}{r^2}TW'+(\psi r^n)'-\chi r^{n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{2H'}{r}-\frac{2H}{r^2}+\frac{n(n+1)}{r^3}T\right)\right]_n=0;$$

$$\left(T'+H-\frac{2T}{r}-\frac{M}{\mu r^2}\right)_n=0;$$

$$\left\{(\lambda+2\mu)H'+\frac{2\lambda}{r}\left[H-\frac{n(n+1)}{2r}T\right]-N\right\}_n=0;$$

$$\left(R'-4\pi\rho GH-\frac{L}{r^2}\right)_n=0;$$

$$\left[L'-n(n+1)(R-4\pi\rho GT)\right]_n=0. \tag{58}$$

В шесть уравнений (58) входят восемь неизвестных функций. Еще два уравнения получим из (53), выражая Λ и η через χ_n, ψ_n, H_n, T_n по (54) и (55). Тогда аналогично выводу (51) и (52), будем иметь

$$(\sigma^2-4\omega^2)\Lambda=-\left(\frac{\partial F_u}{\partial x}+\frac{\partial F_v}{\partial y}+\frac{\partial F_w}{\partial z}\right)+\frac{2\omega}{\sigma^2}\left(\frac{\partial \dot{F}_v}{\partial x}-\frac{\partial \dot{F}_u}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial F_w}{\partial z}+\frac{2}{\sigma\omega}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+4\omega\delta\omega,$$

где $\delta\omega$ — изменение угловой скорости вращения после деформации:

$$(\sigma^2-4\omega^2)\eta=-\left(\frac{\partial W}{\partial x}F_u+\frac{\partial W}{\partial y}F_v+\frac{\partial W}{\partial z}F_w\right)+\frac{2\omega}{\sigma^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\dot{F}_v-\frac{\partial W}{\partial y}\dot{F}_u\right)+$$

$$+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial W}{\partial z}F_w+\frac{2}{\sigma\omega}\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}+2\left(x\frac{\partial W}{\partial x}+y\frac{\partial W}{\partial y}\right)\omega\delta\omega.$$

Выразив F_u, F_v, F_w через χ_n и ψ_n и использовав формулу

$$x\frac{\partial\psi_n}{\partial y}-y\frac{\partial\psi_n}{\partial x}=\frac{\partial\psi_n}{\partial\varphi}=-\frac{m}{\sigma}\psi_n,$$

получим

$$(\sigma^2-4\omega^2)\Lambda=\Delta\psi-r\chi'-\left(3+\frac{2\omega}{\sigma}m\right)\chi-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-z\frac{\partial\chi}{\partial z}-\chi\right)+$$

$$+\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-z\frac{\partial\chi}{\partial z}-\chi\right)+2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma\omega}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-4\omega\delta\omega; \qquad (59)$$

$$\frac{\sigma^2-4\omega^2}{W'}\eta=\psi'-\chi r-\frac{2\omega}{\sigma}m\frac{\psi}{r}-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left(\frac{z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi\frac{z^2}{r}\right)+\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left(\frac{z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{z^2}{r}\chi\right)+$$

$$+2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma\omega}\frac{z}{r}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{4r}{3}\omega\delta\omega+\frac{4}{3}rP_2\omega\delta\omega. \qquad (60)$$

Из (6), (43) и (54) следует $\eta=W'\sum\limits_0^\infty\tau_nH_n$ и в соответствии с (22) $\Lambda=\sum\limits_0^\infty\Lambda_n\tau_n$.

Введем в (59) и (60) ряды (57). Приравняв коэффициенты этих рядов при τ_n, выразим Λ_n и H_n через χ_n, ψ_n, χ_{n-2}, ψ_{n-2}, χ_{n+2}, ψ_{n+2}, их первые и вторые производные. Вторые производные исключаются в разностях

$$\Lambda_n-(r^{n+2}H_n)'r^{-n-2} \quad \text{и} \quad \Lambda_n-(r^{-n+1}H_n)'r^{n-1}.$$

Эти разности таковы

$$(\sigma^2-4\omega^2)[\Lambda_n-(r^{n+2}H_n)'r^{-n-2}=-n(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_n+\frac{n+1}{r}T_n\right)r^{-1}=$$

$$=-\left(n-\frac{2\omega}{\sigma}m\right)\left[(r^{2n+1}\psi_n)'r^{-2n-1}-\chi_nr\right]r^{n-1}+$$

$$+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_n r^{n+1}\right]'r^{-n-2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_n\right\}+$$

$$+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left(z\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_n-\left[(z^2\chi)_nr^{n+1}\right]'r^{-n-2}\right\}-$$

$$-2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma\omega}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_n r^{n+1}\right]'r^{-n-2}-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_n\right\}-$$

$$-\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_n r^{n+1}\right]'r^{-n-2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_n\right\}-$$

$$-\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left(z\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_n-\left[(\chi z^2)_nr^{n+1}\right]'r^{-n-2}\right\}+A_n; \qquad (61)$$

$$(\sigma^2-4\omega^2)\left[\Lambda_n-(r^{-n+1}H_n)'\,r^{n-1}\right]=(\sigma^2-4\omega^2)(n+1)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)r^{-n}=$$

$$=\left(n+1+\frac{2\omega}{\sigma}m\right)(\psi_n'-\chi_n r)\,r^{n-1}+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_n r^{-n}\right]' r^{n-1}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_n\right\}+$$

$$+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left(z\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_n-\left[(z^2\chi)_n r^{-n}\right]' r^{n-1}\right\}-$$

$$-2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma\omega}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_n r^{-n}\right]' r^{n-1}-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_n\right\}-$$

$$-\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left[\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_n r^{-n}\right]' r^{n-1}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_n\right\}-$$

$$-\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left\{\left(z\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_n-\left[(\chi z^2)_n r^{-n}\right]' r^{n-1}\right\}+B_n. \tag{62}$$

Среди слагаемых A_n и B_n при $m=0$ отличны от нуля только A_2 и B_0

$$A_2=-\frac{20}{3}\omega\delta\omega;\quad B_0=-\frac{4}{3}\omega\delta\omega.$$

При преобразовании выражений (61) и (62) понадобятся рекуррентные формулы

$$-(2n+1)\sin^2\vartheta\,\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)=\left[\frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3}+\frac{n^2-m^2}{2n-1}-1\right]\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)+$$

$$+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2n+2}\mathrm{P}_{n+2}^m(\cos\vartheta)+\frac{(n+m)(n+m+1)}{2n+1}\mathrm{P}_{n-2}^m(\cos\vartheta);$$

$$(2n+1)\cos\vartheta\,\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)=(n-m+1)\,\mathrm{P}_{n+1}^m(\cos\vartheta)+(n+m)\,\mathrm{P}_{n-1}^m(\cos\vartheta);$$

$$-(2n+1)\sin^2\vartheta\frac{d\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}=-(n+1)(n+m)\,\mathrm{P}_{n-1}^m(\cos\vartheta)+$$

$$+n(n-m+1)\,\mathrm{P}_{n+1}^m(\cos\vartheta). \tag{63}$$

Используя их, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n=\sum\left[\frac{n-m}{2n-1}\psi_{n-1}'r^{n-1}+\frac{n+m+1}{2n+3}(\psi_{n+1}r^{2n+3})'r^{-n-2}\right]\tau_{nm};$$

$$z^2\sum\tau_{nm}\psi_n r^n=\sum\left[\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}\phi_{n-2}r^n+\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+1)}\psi_n r^{n+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}\psi_n r^{n+2}+\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+3)(2n+5)}\psi_{n+2}r^{n+4}\right]\tau_{nm};$$

$$z\frac{\partial}{\partial z}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n=\sum\left[\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}\psi'_{n-2}r^{n-1}+\right.$$

$$+\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}\psi'_n r^{n+1}+\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}r^{-n}\left(\psi_n r^{2n+1}\right)'+$$

$$\left.+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}r^{-n-2}\left(\psi_{n+2}r^{2n+5}\right)'\right]\tau_{nm};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sum\tau_{nm}\psi_n r^n=\sum\left\{\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n-1)(2n-3)}r^{n-1}\left(\frac{\psi'_{n-2}}{r}\right)'+\right.$$

$$+\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}r^{-n-2}\left(\psi'_n r^{2n+2}\right)'+$$

$$+\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}r^{n-1}\left[\left(r^{2n+1}\psi_n\right)'r^{-2n}\right]'+$$

$$\left.+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}r^{-n-2}\left[\left(\psi_{n+2}r^{2n+5}\right)'r^{-1}\right]'\right\}\tau_{nm};$$

$$\Delta\left[\tau_{nm}\psi_n r^n\right]=\left(\psi'_n r^{2n+2}\right)'r^{-n-2}\tau_{nm}. \tag{64}$$

Определим Ψ и X с помощью системы произвольных коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n, e_n следующим образом

$$\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left[\left(\Psi_n r^{2n+1}\right)'r^{-2n-1}-X_n r\right]r^n=\left(\frac{4\omega^2}{\sigma^2}+a_n\right)\left[\left(\psi_n r^{2n+1}\right)'r^{-2n-1}-\right.$$

$$\left.-\chi_n r\right]r^n+c_n\left(\phi_n r^{2n+1}\right)'r^{-n-1}+A_n d_n r;$$

$$\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left(\Psi'_n-X_n r\right)r^n=\left(\frac{4\omega^2}{\sigma^2}+b_n\right)\left(\psi'_n-\chi_n r\right)r^n+B_n e_n r. \tag{65}$$

Используя формулы (64), (65) и приравнивая нулю коэффициенты при $\tau_{(n+2)m}$ и τ_{nm}, вместо (61) и (62) выведем

$$(n+2)\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right)=\left(n+2-\frac{2\omega}{\sigma}m+\right.$$

$$\left.+a_{n+2}\frac{(n+2)^2-m^2}{2n+3}\right)\left[\left(\psi_{n+2}r^{2n+5}\right)'r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}+$$

$$+b_n\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}(2n+5)\left(\psi'_n-\chi_n r\right)r^n+$$

$$+\frac{(n+2)^2-m^2}{2n+3}\left(c_{n+2}+2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\right)\left(\phi_{n+2}r^{2n+5}\right)'r^{-n-3}+$$

$$+A_{n+2}d_{n+2}\frac{(n+2)^2-m^2}{2n+3}r+B_ne_n\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}(2n+5)r+B_nr; \qquad (66)$$

$$(n+1)(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)=\left(n+1+\frac{2\omega}{\sigma}m+\right.$$

$$\left.+b_n\frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3}\right)(\psi_n'-\chi_nr)r^n+a_{n+2}\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}(2n+1)\times$$

$$\times\left[(\psi_{n+2}r^{2n+5})'r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}\times$$

$$\times(2n+1)\left(c_{n+2}+2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\right)(\phi_{n+2}r^{2n+5})'r^{-n-3}+B_ne_n\frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3}r+$$

$$A_{n+2}d_{n+2}\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}(2n+1)r. \qquad (67)$$

Из уравнений (53) получены два уравнения (66) и (67). Третье уравнение получим из последнего уравнения (53) с помощью (64) и (65). Множители при $\tau_{(n+1)m}$ дают

$$\frac{n+m+2}{2n+5}\left\{(1+a_{n+2})\left[(r^{2n+5}\psi_{n+2})'r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}+\right.$$

$$+\left(c_{n+2}+2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma\omega}\right)(r^{2n+5}\phi_{n+2})'r^{-n-3}+A_{n+2}d_{n+2}r-$$

$$\left.-(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right)\right\}+\frac{n-m+1}{2n+1}\left[(1+b_n)(\psi_n'-\chi_nr)r^n+\right.$$

$$\left.+B_ne_nr-(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)\right]=0. \qquad (68)$$

Уравнение (68) следует из (66) и (67), если при $m\neq0$

$$a_n=-\frac{2\omega}{\sigma m}(n-1);\quad b_n=\frac{2\omega}{\sigma m}(n+2);\quad c_n=2\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left[\frac{n(n-1)}{m^2}\,\frac{\omega-\sigma}{\omega}-1\right];$$

$$d_n=-\frac{2n+1}{n(n-1)+m^2};\quad e_n=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)+m^2}.$$

При $m=0$ коэффициенты a_n и b_n произвольны и можно ввести дополнительное условие: решение порядка n не зависит от других порядков. Тогда $a_n=b_n=0$; $\phi_n\neq0$ только при $m=1$ и $n=2$. Поэтому

$$n(\phi_{n+2}r^{2n+5})'=0.$$

При $m \neq 0$ из (66) и (67) следует

$$(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right)=\left[1-\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{m(2n+3)}\right]\times$$

$$\times\left[(\psi_{n+2}r^{2n+5})'\,r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}+\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n-m+1)(n-m+2)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)m}\times$$

$$\times(\psi_n'-\chi_n r)\,r^n; \tag{69}$$

$$(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)=\left[1+\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{m(2n+3)}\right](\psi_n'-\chi_n r)\,r^n-$$

$$-\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{(2n+3)(2n+5)m}\left[(r^{2n+5}\psi_{n+2})'r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2};$$

при $m=0$

$$(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right)=\left[(\psi_{n+2}r^{2n+5})'r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}+$$

$$+\frac{2n+5}{2n+1}\frac{B_n r}{n+2}-\frac{A_{n+2}r}{n+1};$$

$$(\sigma^2-4\omega^2)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)=(\psi_n'-\chi_n r)\,r^n+\frac{B_n r}{n+2}-\frac{2n+1}{2n+5}\frac{A_{n+2}r}{n+1}. \tag{70}$$

Уравнение (69) решаем относительно функций, входящих в правые части. В результате будем иметь

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[(\psi_{n+2}r^{2n+5})'\,r^{-2n-5}-\chi_{n+2}r\right]r^{n+2}=(1+p_n)\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right)+$$

$$+q_{-n-3}\left(H_n-\frac{n}{3}T_n\right);\quad \frac{1}{\sigma^2}(\psi_n'-\chi_n r)\,r^n=(1-p_n)\left(H_n-\frac{n}{r}T_n\right)+$$

$$+q_n\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right), \tag{71}$$

где

$$p_n=\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{m(2n+3)};$$

$$q_n=\frac{2\omega}{\sigma}\frac{(n+m+1)(n+m+2)(2n+1)}{m(2n+3)(2n+5)}. \tag{72}$$

Теперь из уравнений (58) можно исключить функции χ_n и ψ_n. При $m \neq 0$ получим

$$\frac{1}{\sigma^2}\psi_n r^n=\left[1+\frac{(n+1)p_{n-2}-np_n}{2n+1}\right]T_n+\frac{p_{n-2}+p_n}{2n+1}H_n r+$$

$$+\frac{q_{-n-1}}{2n+1}\left(H_{n-2}-\frac{n-2}{r}T_{n-2}\right)-\frac{q_n}{2n+1}\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right);$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[(\psi_n r^n)'-\chi_n r^{n+1}\right]=\left[1+\frac{np_{n-2}-(n+1)p_n}{2n+1}\right]H_n+$$

$$+\frac{n(n+1)(p_{n-2}+p_n)}{2n+1}\frac{T_n}{r}+\frac{nq_{-n-1}}{2n+1}\frac{1}{r}\left(H_{n-2}-\frac{n-2}{r}T_{n-2}\right)+$$

$$+\frac{(n+1)q_n}{2n+1}\frac{1}{r}\left(H_{n+2}+\frac{n+3}{r}T_{n+2}\right).$$

При $m=0$, $q_n=0$ в шесть уравнений (58) войдут шесть неизвестных функций. При $m\neq 0$, кроме того, войдут H_{n-2}, H_{n+2}, T_{n-2}, T_{n+2} с малыми множителями. Дополнительные члены от приливов порядков $n-2$ и $n+2$ малы, если частота σ далека от частот свободных колебаний порядков $n-2$ и $n+2$, или, если V_{n-2} и V_{n+2} не содержат частот, близких к σ.

Граничные условия (непрерывность смещений, напряжений, потенциала и производной от потенциала) не зависят от σ и ω.

Если $\mu=0$, из уравнений (58) следует

$$\frac{1}{\rho}N+R+HW'=-\psi_n r^n;$$

$$\left(\frac{\lambda+\frac{2}{3}\mu}{\rho}\frac{\rho'}{\rho}-W'\right)\left(H'+\frac{2}{3}H-\frac{n(n+1)}{r^2}T\right)=\chi_n r^{n+1}.$$

Обычно принимают, что плотность зависит только от адиабатической сжимаемости. Тогда

$$\chi_n=0;\ \left[n(n+1)\rho T-(\rho H r^2)'\right]\frac{W'}{\rho' r^2}=R+\psi r^n. \tag{73}$$

Предполагаем, что приливы порядков $n-2$ и $n+2$ не влияют на приливы порядка n. Тогда $q_n=0$, при $m\neq 0$ из (71) получаем

$$(2n+1)\sigma^2 H=\frac{n}{1+p_{n-2}}(\psi r^{2n+1})' r^{-n-1}+\frac{n+1}{1-p_n}\psi' r^n;$$

$$(2n+1)\sigma^2 T=\frac{1}{1+p_{n-2}}(\psi r^{2n+1})' r^{-n}-\frac{1}{1-p_n}\psi' r^{n+1}. \tag{74}$$

Уравнение (73) приводит к следующей форме уравнения Пуассона

$$\left(r^{n+1}R\right)''-\frac{2n}{r}\left(r^{n+1}R\right)'=-\frac{4\pi\rho' G}{W'}\left(r^{n+1}R+\psi r^{2n+1}\right). \tag{75}$$

Уравнение (73) можно записать в следующем виде

$$\left(\rho H r^{n+2}\right)'-\rho n r^{n+1}\left(H+\frac{n+1}{r}T\right)=-\frac{\rho' r}{W'}\left(r^{n+1}R+\psi r^{2n+1}\right).$$

Выразив H и T через ψ при помощи формул (74), получим

$$\left(\frac{n+1}{1-p_n}+\frac{n}{1+p_{n-2}}\right)\left[\left(\psi r^{2n+1}\right)'\frac{\rho}{r^{2n}}\right]'+$$

$$+(2n+1)\frac{\rho'\sigma^2}{r^{2n}W'}\left(r^{n+1}R+\psi r^{2n+1}-\frac{n+1}{1-p_n}\frac{W'}{\sigma^2}\psi r^{2n}\right)=0. \tag{76}$$

Произведения $r^{n+1}R$ и ψr^{2n+1} определяются из уравнений (75) и (76). Эти функции ограничены в центре сферы. Простые решения будут в следующих случаях:

$\rho'=0;\ \ \psi r^{2n+1}=C_1 r^{2n+1}+C_2;$

$\sigma^2=\infty;\ \ \psi r^{2n+1}=C_1 r^{2n+1}+C_2;\ \ R=-\psi r^n;$

$1+p_{n-2}=0;\ \ \psi r^{2n+1}=C_1\int\frac{1}{\rho}r^{2n}\,dr+C_2;$

$1-p_n=0;\ \ \psi r^{2n+1}=C_1 r^{2n+1}+C_2 r^{2n+1}\int\frac{1}{\rho}r^{-2n-2}\,dr.$

При малых величинах σ из (76) получаем уравнение второго порядка, содержащее только ψ

$$\left(1+\frac{n}{n+1}\,\frac{1-p_n}{1+p_{n-2}}\right)\left[\left(\psi r^{2n+1}\right)'\frac{\rho}{r^{2n}}\right]'-(2n+1)\,\rho'\psi=0.$$

Однородное уравнение, определяющее R и следующее из (75), является уравнением Клеро.

При $m=0$, на основании (70) нужно принять $p_n=0$, заменить σ^2 на $\sigma^2-4\omega^2$, имея в виду члены с A_2 и B_0.

§ 4. Общие уравнения упругих колебаний Земли

При сферически симметричном строении Земли (без учета сжатия), уравнения (44) можно представить в компактной форме

$$\frac{\partial A}{\partial x}+Bx+\bar{f}(u)+2\rho\omega\dot{v}-\rho\dot{\omega}y=0; \tag{77}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}+By+\bar{f}(v)-2\rho\omega\dot{u}+\rho\dot{\omega}x=0; \tag{78}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}+Bz+\bar{f}(w)=0, \tag{79}$$

где

$$A=\rho(R+HW')+(\lambda+\mu)\Lambda+\mu' H;$$

$$-Br=\rho'(R+HW')+\Lambda\rho W'+\Lambda\mu'+\left(\frac{\mu'}{r}\right)' Hr;$$

$$\bar{f}(u)=\mu\Delta u+\mu' u'+\frac{\mu' u}{r}-\rho\ddot{u} \tag{80}$$

и аналогично для $\bar{f}(v)$ и $\bar{f}(w)$. Поскольку земное сжатие не учтено, амплитуда нутации ε принята равной нулю. Не задавая заранее типа колебаний (сфероидальные или крутильные), преобразуем уравнения (77)—(79) следующим образом: умножим первое на x, второе на y, третье на z и сложим результаты. Затем продифференцируем первое из этих уравнений по x, второе по y и третье по z и опять сложим результаты. В преобразованиях используем формулы

$$u'x+v'y+w'z=H'r;$$

$$x\Delta u+y\Delta v+z\Delta w=\Delta(Hr)-2\Lambda;$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=\Lambda'+\frac{\Lambda}{r}-\frac{H'}{r}, \tag{81}$$

В результате преобразований получим

$$-\mu\left(r\Delta H+2H'+\frac{2H}{r}-2\Lambda\right)+\mu'(H-H'r)+\ddot{H}'\rho r=$$
$$=A'r+Br^2+2\rho\omega r\dot{s}; \tag{82}$$

$$-\mu\Delta\Lambda-\mu'\left(\Lambda'-\frac{2\Lambda}{r}+\frac{H'}{r}+\Delta H+\frac{3H}{r^2}\right)+\mu''\left(\frac{H}{r}-H'\right)+\ddot{H}\rho'+\ddot{\Lambda}\rho=$$
$$=\Delta A+B'r+3B-2\omega\left(\frac{\partial\rho\dot{u}}{\partial y}-\frac{\partial\rho\dot{v}}{\partial x}\right), \tag{83}$$

где

$$rs=vx-uy. \tag{84}$$

К уравнениям (82) и (83) добавим уравнение Пуассона (19). В уравнения (82), (83) и (19) при $\omega=0$ входят три функции Λ, H и R.

Для определения этих функций будем считать заданными на поверхности сферы:

1) нормальное напряжение

$$N_W = \Lambda\lambda + 2\mu H'; \tag{85}$$

2) проекции тангенциального напряжения на оси координат M_x, M_y, M_z, при условии что

$$M_x x + M_y y + M_z z = 0;$$

$$\frac{1}{\mu} M_x = \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{H}{r} - 2H'\right)\frac{x}{r} + \left(\frac{u}{r}\right)' r; \tag{86}$$

сходные выражения справедливы для M_y и M_z;

3) условия непрерывности производной от потенциала или разрыв непрерывности производной от потенциала простого слоя (при замене объемных масс, выступающих за пределы сферы или уходящих в глубь сферы, простым слоем).

Таким образом, в граничные условия входят Λ, H, R и u, v, w. Последние три функции можно исключить. Продифференцируем M_x по x, M_y по y, M_z по z, сложим результаты и преобразуем полученное выражение, используя формулы (81),

$$\mathrm{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \mu\left\{\Delta H - \frac{1}{r^2}(H'r^2)' + \Lambda' - \left[\frac{(Hr^2)'}{r^2}\right]'\right\}. \tag{87}$$

Если рассматривать только периодическое движение с частотой σ, то начальные условия отпадают и можно начать решение задачи с определения функций Λ, H, R при условиях на границе (85), (33) и (87).

§ 5. Строение Земли по частотам сфероидальных свободных колебаний

Если для некоторой модели Земли вычислена частота свободного колебания и затем эта модель немного изменена, то изменение частоты можно получить вариацией произвольных постоянных, входящих в общий интеграл уравнений колебания упругого шара[1]. Далее можно построить такую модель, которой соответствуют заданные частоты колебаний, если эти частоты могут быть получены малым изменением строения модели.

Системy шести обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих колебания Земли, используем в таком виде

$$y_1' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{i6}y_6 \quad (i = 1, \dots, 6). \tag{88}$$

---

[1] *Молоденский М. С., Крамер М. В.* Строение Земли по частотам ее собственных колебаний. Известия АН СССР. Физика Земли, 1973, № 4, с. 3—8.

За неизвестные функции приняты

$$y_1=P=-Mr^2+\frac{2}{r}\mu S-2n(n+1)\mu H;\ y_2=S;$$

$$y_3=L=r^2(R'-4\pi\rho GH);\ y_4=\Phi=N-\frac{2\mu}{r^2}S+\frac{4\mu}{r}H;\ y_5=H;\ y_6=R. \quad (89)$$

Система функций Φ, H, L, P, R, S выбрана потому, что для нее только десять из 36 коэффициентов a_{ij} зависят от строения шара. Они выражены через плотность, упругие постоянные λ, μ и производную W'. Это значительно упрощает вычисления результата при варьировании коэффициентов.

Коэффициенты уравнений (88) имеют вид

$$a_{12}=-\rho\sigma^2+\frac{\beta}{r}-\frac{\rho}{r}W';\ a_{14}=-n(n+1);\ a_{15}=-n(n+1)\beta;$$

$$a_{16}=-n(n+1)\rho;\ a_{21}=1/\mu;\ a_{25}=n(n+1);\ a_{32}=-4\pi\rho G;$$

$$a_{36}=n(n+1);\ a_{41}=-1/r^2;\ a_{42}=-\frac{\beta}{r^2};\ a_{43}=-\frac{\rho}{r^2};$$

$$a_{45}=-\rho\sigma^2+\frac{2}{r}\beta+\frac{2\rho}{r}W';\ a_{52}=\frac{1}{r^2};\ a_{54}=\frac{1}{\lambda+2\mu};$$

$$a_{55}=-\frac{2}{r};\ a_{63}=\frac{1}{r^2};\ a_{65}=4\pi\rho G; \quad (90)$$

$$a_{11}=a_{13}=a_{22}=a_{23}=a_{24}=a_{26}=a_{31}=a_{33}=a_{34}=a_{35}=a_{44}=$$
$$=a_{46}=a_{51}=a_{53}=a_{56}=a_{61}=a_{62}=a_{64}=a_{66}=0,$$

где $\beta=\rho W'+2\mu'$.

Прежде всего находим три правильных (ограниченных в центре шара) интеграла системы уравнений (88) и три правильных интеграла сопряженной системы

$$-\bar{y}'_i=a_{1i}\bar{y}_1+a_{2i}\bar{y}_2+\dots\dots+a_{6i}\bar{y}_6. \quad (91)$$

На поверхности шара (при $r=1$) функции y_i всегда можно представить матрицей

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Интегралы	1	1	0	0	c_{11}	c_{12}	c_{13}
правильные	2	0	1	0	c_{21}	c_{22}	c_{23}
	3	0	0	1	c_{31}	c_{32}	c_{33}
	4	0	0	0	1	0	0
Интегралы	5	0	0	0	0	1	0
неправильные	6	0	0	0	0	0	1

(92)

Здесь c_{kl} — значения функций y_4, y_5, y_6 на земной поверхности для первого, второго и третьего правильных интегралов.

Тогда функции сопряженного уравнения можно представить матрицей

		$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$
Интегралы	I	1	0	0	0	0	0
неправильные	II	0	1	0	0	0	0
	III	0	0	1	0	0	0
	IV	$-c_{11}$	$-c_{21}$	$-c_{31}$	1	0	0
Интегралы	V	$-c_{12}$	$-c_{22}$	$-c_{32}$	0	1	0
правильные	VI	$-c_{13}$	$-c_{23}$	$-c_{33}$	0	0	1

(93)

Каждый элемент матрицы (93) равен соответствующему минору определителя, составленного из элементов матрицы (92). Тогда, во-первых, три правильных интеграла системы (88) определяют правильные интегралы сопряженной системы (91) на поверхности шара, во-вторых, в вычисления возмущенных частот свободных колебаний не войдут неправильные интегралы основной и сопряженной систем.

Использовав три условия на поверхности шара, выразим y_4, y_5, y_6 через y_1, y_2, y_3

$$y_4+b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3=0;$$
$$y_5+b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3=0;$$
$$y_6+b_{31}y_1+b_{32}y_2+b_{33}y_3=0, \tag{94}$$

где b_{ij} определены коэффициентами при соответствующих функциях в граничных условиях.

Каждую функцию y_i выразим через три частных правильных интеграла, входящих в матрицу (92):

$$y_i=y_{i1}y_1+y_{i2}y_2+y_{i3}y_3. \tag{95}$$

Подставив (95) в (94) и использовав (92), запишем

$$(b_{11}+c_{11})y_1+(b_{12}+c_{21})y_2+(b_{13}+c_{31})y_3=0;$$
$$(b_{21}+c_{12})y_1+(b_{22}+c_{22})y_2+(b_{23}+c_{32})y_3=0;$$
$$(b_{31}+c_{13})y_1+(b_{32}+c_{23})y_2+(b_{33}+c_{33})y_3=0. \tag{96}$$

Уравнения (96) совместны только после добавления к их коэффициентам вариаций, обусловленных такими изменениями ρ, μ и λ в (90), которые приведут к совпадению вычисленных частот с измеренными в рассматриваемых свободных колебаниях. Определитель D, составленный из коэффициентов уравнений (96), считаем малой величиной. Умножим уравнение (96) на соответствующие миноры первого, затем второго и третьего столбцов определителя D. Результаты умножения по столбцам сложим и получим

$$y_1(D+\delta D)+M_{11}\delta y_4+M_{21}\delta y_5+M_{31}\delta y_6=0;$$
$$y_2(D+\delta D)+M_{21}\delta y_4+M_{22}\delta y_5+M_{23}\delta y_6=0;$$
$$y_3(D+\delta D)+M_{31}\delta y_4+M_{32}\delta y_5+M_{33}\delta y_6=0. \qquad (97)$$

Вариации b_{ij} включены в δD

$$\delta y_4=y_1\delta c_{11}+y_2\delta c_{21}+y_3\delta c_{31};$$
$$\delta y_5=y_1\delta c_{12}+y_2\delta c_{22}+y_3\delta c_{32};$$
$$\delta y_6=y_1\delta c_{13}+y_2\delta c_{23}+y_3\delta c_{33}. \qquad (98)$$

Множители при y_1 в (98) определены правильным решением уравнений (88) с учетом вариаций и с неоднородными условиями на поверхности шара

$$y_1=1;\ y_2=0;\ y_3=0.$$

Варьируя общий интеграл

$$y_i=\Sigma C_j(y_i)_j,$$

где C_j — постоянные; $(y_i)_j$ определены матрицей (92), будем иметь

$$\delta C_1=\delta C_2=\delta C_3=0;$$

$$\delta C_4=\delta c_{11}=\int_0^1\sum_{i=1}^{i=6}(\bar y_i)_{\mathrm{IV}}(\delta y_i')_1\,dr;$$

$$\delta C_5=\delta c_{12}=\int_0^1\sum_{i=1}^{i=6}(\bar y_i)_{\mathrm{V}}(\delta y_i')_1\,dr;$$

$$\delta C_6=\delta c_{13}=\int_0^1\sum_{i=1}^{i=6}(\bar y_i)_{\mathrm{VI}}(\delta y_i')_1\,dr. \qquad (99)$$

Здесь $(\delta y_i')_1$ обозначает вариацию правой части уравнений (88), вычисленную для первого частного интеграла матрицы (92); $(\bar y_i)_{\mathrm{IV}}$, $(\bar y_i)_{\mathrm{V}}$, $(\bar y_i)_{\mathrm{VI}}$ — функции сопряженного уравнения для IV, V и VI частного интеграла матрицы (93). Множители при y_2 в (98) определены условиями на поверхности; $y_1=0$; $y_2=1$; $y_3=0$.

В выражения, аналогичные (99), теперь вместо $(\delta y_i')_1$ войдут $(\delta y_i')_2$. При определении множителей для y_3 — $(\delta y_i')_3$. Уравнения (97) и (98) после подстановки в них (99) и аналогичных выражений с измененным первым индексом имеют вид

$$y_i(D+\delta D)+\int_0^1\delta f_i\,dr=0; \qquad (100)$$

3—737

$$\delta f_i = \sum_{j=1}^{6} \left[y_1 (\delta y'_j)_1 + y_2 (\delta y'_j)_2 + y_3 (\delta y'_j)_3 \right] \times$$
$$\times \left[M_{1i} (\bar{y}_j)_{IV} + M_{2i} (\bar{y}_j)_V + M_{3i} (\bar{y}_j)_{VI} \right]. \qquad (101)$$

Три уравнения (100) (при $i=1$, $i=2$, $i=3$) заменяют уравнения (96). Если D и все вариации малы, то y_1, y_2 и y_3 можно заменить минорами любой строки. Формулы (100) различаются на величины порядка D^2. После определения вариаций уравнения (96) становятся совместными. Они определяют точные y_1, y_2 и y_3.

Для системы коэффициентов (90) получаем

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} + \frac{2}{n(n+1)r} & c_{21} + \frac{2\mu(n-1)(n+2)}{n(n+1)r^2} & c_{31} \\ c_{12} + \frac{1}{2n(n+1)\mu} & c_{22} - \frac{1}{n(n+1)r} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} + \frac{1}{(n+1)r} \end{vmatrix};$$

$$f = -\rho\sigma^2 (\bar{\Phi} H + \bar{P} S) + \rho \left[\left(\frac{2W'}{r} H - \frac{\bar{L}}{r^2} \right) \bar{\Phi} - n(n+1) \bar{P} R + 4\pi G H \bar{R} - \right.$$
$$\left. -4\pi G \bar{L} S - \frac{W'}{r} \bar{P} S \right] + \beta \left[-n(n+1) H \bar{P} + \left(\frac{2}{r} H - \frac{S}{r^2} \right) \bar{\Phi} + \frac{\bar{P} S}{r} \right] +$$
$$+ \frac{\bar{\Phi} H}{\lambda + 2\mu} + \frac{P \bar{S}}{\mu}.$$

Варьируя ρ, необходимо иметь в виду, что вариация W' должна быть выражена через вариацию ρ

$$(r^2 \delta W')' = -4\pi G r^2 \delta\rho.$$

Представим δf в виде

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} \delta\sigma^2 + \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta\rho + \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta\mu' + \frac{\partial f}{\partial W'} \delta W' +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\rho}{\mu} \right)} \delta \left(\frac{\rho}{\mu} \right) + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)} \delta \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right).$$

Исключив $\delta W'$ и $\delta\mu'$, получим

$$\int_0^1 \delta f dr = \left[r^2 \delta W' \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial W'} dr + \frac{\partial f}{\partial \mu'} \delta\mu' \right] \Bigg|_0^1 + \int_0^1 \left[\left[\frac{\partial f}{\partial \rho} + \right.\right.$$

$$+4\pi G r^2 \int_0^r \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial W'}dr - \left(\frac{\partial f}{\partial \mu'}\right)'\frac{\rho}{\mu}\Bigg]\delta\rho + \frac{\partial f}{\partial \frac{\rho}{\mu}}\delta\frac{\rho}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\rho}{\lambda+2\mu}}\delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu} +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial \sigma}\partial\sigma\Bigg]dr.$$

Исходное уравнение (101) при этом имеет вид

$$D+\left[\left(\frac{M_{21}}{2n(n+1)\rho} - \frac{2(n-1)(n+2)M_{12}\mu^2}{n(n+1)\rho}\right)\left(\delta\frac{\rho}{\mu} - \frac{\delta\rho}{\mu}\right)\right]_{r=1} +$$

$$+\frac{1}{P(1)}\int_0^1 \delta f dr = 0, \tag{102}$$

так как $\delta W'(1)=0$. Вариации $\delta\rho$, $\delta\frac{\rho}{\mu}$ и $\delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu}$ независимы, вариации по $\delta\rho$ подчинены условиям

$$\int_0^1 r^2\delta\rho dr = 0;\quad \int_0^1 r^4\delta\rho dr = 0, \tag{103}$$

выражающим неизменность массы и момента инерции Земли.

С помощью (102) можно вычислить частоты свободных колебаний для любой модели Земли, близкой к исходной.

Если

$$\delta\frac{\rho}{\mu} = \delta\frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \delta W' = \delta\mu' = 0,$$

а $\delta\sigma$ известна из сопоставления измеренных и рассчитанных σ, то уравнения, определяющие $\delta\rho$, можно представить в виде

$$\int_0^1 X_i\delta\rho dr + C_i = 0, \tag{104}$$

где $C_i = A_i\delta\rho(1) + B_i$; X_i — неизвестная функция от r; A_i и B_i — известные числа. Эту систему можно заменить системой линейных алгебраических уравнений относительно величин $\delta\rho$ в отдельных точках $r=r_j$. Величины $\delta\rho_j$ могут получиться большими, быстро меняющимися от точки к точке и зависящими от выбора частот, по которым они определены.

Чтобы избежать решения подобной системы, необходимо распределить функции X_i в порядке уменьшения частоты и, присоединяя последовательно по одной, заменить их системой такого же числа взаимно ортогональных функций. Тогда

$$X_i=\Sigma\alpha_{ij}Y_i;\quad \alpha_{ii}=1;\quad \delta\rho=\Sigma\beta_j Y_j;$$

$$\int_0^1 Y_i Y_j dr=0,\quad i\neq j. \tag{105}$$

Коэффициенты α_{ij} известны, β_j следует определять из (104). В результате будем иметь

$$\beta_1\int_0^1 Y_1^2 dr=-C_1;\quad \beta_2=\int_0^1 Y_2^2 dr=-C_2-\alpha_{21}\beta_1\int_0^1 Y_1^2 dr.$$

Все β_i выражены через $\delta\rho(1)$. Должно выполняться условие

$$\delta\rho(1)=\Sigma\beta_i Y_i(1),$$

а при определении $\delta\rho$ — два условия (103). Эти условия мало усложняют задачу. Единственными делителями при определении β_i являются числа $\int_0^1 Y_i^2 dr$.

Если при каком-то индексе i функция Y_i на всем интервале окажется близкой к нулю, то X_i с известным приближением может быть выражено через те же функции, но с меньшим индексом, следовательно, и частота σ_i может быть выражена через частоты с меньшими индексами, либо в (104) необходимо включить вариации других функций.

§ 6. Приливы и свободные колебания Земли с учетом сил Кориолиса

Для упругих приливов и свободных колебаний Земли с учетом сил Кориолиса была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений[1]. При этом использовались выражения для смещений в виде суммы смещений сфероидального и крутильного типов[2]. Три компоненты смещения выражены через три вспомогательные функции, однако третья функция вошла заранее заданным образом и вид смещений не оказался достаточно общим. Поэтому при малых частотах колебаний возникали заметные связи между колебаниями, отличными по порядку на две единицы.

Здесь мы покажем, что в результате небольшого обобщения выражений для смещений для сферически симметричной Земли можно получить точную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не связанную с системами, отличными по порядку[3].

---

[1] *Молоденский М. С.* Теория приливов в упругой Земле с учетом членов порядка сжатия. Известия АН СССР, Физика Земли. 1974, № 1, с. 3—8.

[2] *Молоденский М. С.* Смещения при приливах в упругой Земле с учетом сил Кориолиса. Известия АН СССР. Физика Земли. 1970, № 4, с. 102—107.

[3] *Молоденский М. С.* Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. Известия АН СССР. Физика Земли. 1976, № 1, с. 3—12.

Будем исходить из следующих выражений компонент u, v, w смещения в декартовой системе координат xyz

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\chi x-\frac{2\omega}{\sigma^2}\left(\frac{\partial\dot\psi}{\partial y}-\dot\chi y\right);$$

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\chi y+\frac{2\omega}{\sigma^2}\left(\frac{\partial\dot\psi}{\partial x}-\dot\chi x\right);$$

$$w=\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z+\bar w, \tag{106}$$

где χ, ψ, $\bar w$ — вспомогательные функции, зависящие от координат

$$\chi=\sum_{n=m}^{\infty}\chi_n(r)\,\tau_{nm};\quad \psi=\sum_{n=m}^{\infty}\psi_n(r)\,\tau_{nm};\quad \bar w=\sum_{n=m}^{\infty}\bar w_n(r)\,\tau_{nm},$$

а следовательно $\ddot\chi=-\sigma^2\chi$; $\dddot\chi=-\sigma^2\dot\chi$ и аналогично для производных от ψ и $\bar w$. Функции χ, ψ, как в § 3 служат для выражения смещений, но определены по-другому. Здесь u и v выражены только через χ и ψ, а w — через χ, ψ и $\bar w$.

Из (106) получаем

$$\ddot u-2\omega\dot v=-\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\chi x\right);$$

$$\ddot v+2\omega\dot u=-\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\chi y\right);$$

$$\ddot w=-\sigma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z+\bar w\right),$$

поэтому уравнения колебаний с учетом сил Кориолиса можно записать так

$$\frac{\partial A}{\partial x}+Bx+f(u)-\rho\sigma^2u=-\rho\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\chi x\right);$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}+By+f(v)-\rho\sigma^2v=-\rho\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\chi y\right);$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}+Bz+f(w)-\rho\sigma^2w=-\rho\sigma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z+\bar w\right), \tag{107}$$

где, например, для u

$$f(u)=\mu\Delta u+\mu' u'-\frac{\mu' u}{r}+\rho\sigma^2u$$

и аналогично для составляющих v и w смещения по осям y и z. Последний член справа в определении функции f компенсируется с последними членами в левой части уравнений. Эти члены сохранены для удобства последующих выводов. Функции A и B определены формулами (80).

Выражения (106) определяют Λ и H через χ, ψ и $\bar{w}$ (6) (15), т. е.

$$\Lambda=\Delta\psi-\chi' r-3\chi-\frac{2\omega}{\sigma}\chi m+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z};$$

$$H=\psi'-\chi r-\frac{2\omega}{\sigma}m\frac{\psi}{r}+\frac{z}{r}\bar{w}. \tag{108}$$

Из (108) определим функцию S

$$S=(Hr^2)'-\Lambda r^2$$

и вычислим величины

$$H_n+\frac{S_n}{nr}=\left(1-\frac{2\omega}{\sigma}\cdot\frac{m}{n}\right)\left(\psi_n'-\chi_n r+\frac{n+1}{r}\psi_n\right)+\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{n-m}{n}\bar{w}_{n-1},$$

$$H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}=\left(1+\frac{2\omega}{\sigma}\cdot\frac{m}{n+1}\right)\left(\psi_n'-\chi_n r-\frac{n}{r}\psi_n\right)+\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{n+1+m}{n+1}\bar{w}_{n+1}. \tag{109}$$

Последнее из выражений (106) можно записать так

$$w_{n-1}=\frac{n+m}{2n+1}\left(\psi_n'-\chi_n r+\frac{n+1}{r}\psi_n\right)+\bar{w}_{n-1};$$

$$w_{n+1}=\frac{n+1-m}{2n+1}\left(\psi_n'-\chi_n r-\frac{n}{r}\psi_n\right)+\bar{w}_{n+1}. \tag{110}$$

С помощью (110) исключаем $\bar{w}_{n-1}$ и $\bar{w}_{n+1}$ из (109) и получаем

$$H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}=\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}b_n\left(\psi_n'-\chi_n r-\frac{n}{r}\psi_n\right)+\frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}w_{n+1};$$

$$H_n+\frac{1}{nr}S_n=\frac{n(n-1)+m^2}{n(2n-1)}b_{-n-1}\left(\psi_n'-\chi_n r+\frac{n+1}{r}\psi_n\right)+\frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)}w_{n-1}, \tag{111}$$

где

$$b_n=1+\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n+1}\frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2};$$

$$b_{-n-1}=1-\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n}\frac{n(2n-1)}{n(n-1)+m^2}.$$

Теперь дифференциальные уравнения (107) преобразуем таким же образом, как выражения для смещений (106). Третье из уравнений (107) равносильно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A_n'-\frac{n}{r}A_n+B_nr+f_{n+1}\left(\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}\right)=0;$$

$$A_n'+\frac{n+1}{r}A_n+B_nr+f_{n-1}\left(\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}\right)=0, \tag{112}$$

где

$$f_{n+1}\left(\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}\right)=\mu\left[\frac{\partial^2 w_{n+1}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial w_{n+1}}{\partial r}-\frac{(n+1)(n+2)}{r^2}w_{n+1}\right]+$$

$$+\mu'\frac{\partial w_{n+1}}{\partial r}-\frac{\mu' w_{n+1}}{r}+\rho\sigma^2 w_{n+1};$$

$$f_{n-1}\left(\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}\right)=\mu\left[\frac{\partial w_{n-1}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial r}-\frac{(n-1)n}{r^2}w_{n-1}\right]+$$

$$+\mu'\frac{\partial w_{n-1}}{\partial r}-\frac{\mu' w_{n-1}}{r}+\rho\sigma^2 w_{n-1}.$$

В этих преобразованиях использованы зависимости

$$\Delta\frac{\psi_n\tau_{n-1}}{r}=\left(\frac{\psi_n''}{r}-\frac{n(n-1)}{r^3}\psi_n\right)\tau_{n-1};$$

$$\Delta\left(\tau_{n-1}\chi_n r\right)=\left(\chi_n''r+4\chi_n'+\frac{2-n(n-1)}{r}\chi_n\right)\tau_{n-1}$$

с заменой n на $n+2$ в последних членах справа при множителях τ_{n+1}.

Используя все уравнения (107), вычислим A', ΔA и $-n(n+1)A_n=r^2(\Delta A-(A'r^2)')$.

Затем определим

$$A_n'+B_nr-\frac{n}{r}A_n \quad \text{и} \quad A_n'+B_nr+\frac{n+1}{r}A_n.$$

Тогда получим

$$A_n'-\frac{n}{r}A_n+B_nr+f_{n+1}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)-\rho\sigma^2\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)=\left(-\rho\sigma^2+\right.$$

$$+4\rho\omega^2 \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}\Big)\left(\psi_n' - \chi_n r - \frac{n}{r}\psi_n\right) - \rho\sigma^2 \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{n+1+m}{n+1}\bar{w}_{n+1}.$$

С помощью (109) исключим $\bar{w}_{n+1}$ и получим

$$A_n' + B_n r - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1}\left(H_n - \frac{S_n}{(n+1)r}\right) = \rho\sigma^2 a_n \left(\psi_n' - \chi_n r - \frac{n}{r}\psi_n\right);$$

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}\left(b_n + \frac{4\omega^2-\sigma^2}{\sigma^2}\right). \tag{113}$$

Подобным образом можно получить уравнение, в котором n заменено на $-(n+1)$, а f_{n+1} на f_{n-1}

$$A_n' + \frac{n+1}{r} A_n + B_n r + f_{n-1}\left(H_n + \frac{S_n}{(n+1)r}\right) = \rho\sigma^2 a_{-n-1}\left(\psi_n' - \chi_n r + \frac{n+1}{r}\psi_n\right);$$

$$a_{-n-1} = \frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{n(n-1)+m^2}{n(2n-1)}. \tag{114}$$

Уравнения (113) и (114) после исключения χ_n и ψ_n с помощью (111) приобретают вид

$$A_n' - \frac{n}{r} A_n + B_n r + f_{n+1}\left(H_n - \frac{S_n}{(n+1)r}\right) = \rho\sigma^2 \frac{b_n - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_n}\left(H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1}\right);$$

$$A_n' + \frac{(n+1)}{r} A_n + B_n r + f_{n-1}\left(H_n + \frac{S_n}{nr}\right) = \rho\sigma^2 \frac{b_{-n-1} - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_{-n-1}}\left(H_n + \frac{S_n}{nr} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1}\right). \tag{115}$$

В четыре уравнения (112) и (115) в качестве неизвестных входят функции H_n, R_n, S_n, w_{n-1}, w_{n+1} (A_n, B_n можно выразить через Λ_n, H_n и R_n). Добавив уравнения Пуассона (27)

$$R_n'' + \frac{2}{r} R_n' - \frac{n(n+1)}{r^2} R_n = 4\pi G\left(\Lambda_n \rho + \rho' H_n\right), \tag{116}$$

получим полную систему уравнений. Система уравнений (112), (115) и (116) разрешима независимо от системы для других n.

Уравнения (112) отделяются от (115) и (116) при $\omega = 0$. Связь между этими уравнениями велика при достаточно малых b_n и b_{-n-1}.

Если $\mu=\chi_n=0$, то

$$f_{n-1}=\rho\sigma^2 w_{n-1};\ f_{n+1}=\rho\sigma^2 w_{n+1}.$$

Тогда из (113) и (114) получаем

$$H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}-\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}=a_n\left(\psi_n'-\frac{n}{r}\psi_n\right);$$

$$H_n+\frac{S_n}{nr}-\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}=a_{-n-1}\left(\psi_n'+\frac{n+1}{r}\psi_n\right). \tag{117}$$

С помощью (111), исключив w_{n+1} и w_{n-1}, будем иметь

$$H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}=\left(1+\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n+1}-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(2n+3)}\right)\left(\psi_n'-\frac{n}{r}\psi_n\right);$$

$$H_n+\frac{S_n}{nr}=\left(1-\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n}-\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{n^2-m^2}{n(2n-1)}\right)\left(\psi_n'+\frac{n+1}{r}\psi_n\right). \tag{118}$$

Из этих равенств можно определить H_n, S_n и выразить Λ_n через ψ_n:

$$H_n=E_n\left(\psi_n'-\frac{\mathrm{F}_n}{E_n r}\psi_n\right);\ S_n=-\mathrm{F}_n\left(\psi_n' r-\frac{D_n}{\mathrm{F}_n}\psi_n\right);$$

$$\Lambda_n=E_n(\Delta\psi)_n, \tag{119}$$

где

$$(\Delta\psi)_n=\psi_n''+\frac{2}{r}\psi_n'-\frac{n(n+1)}{r^2}\psi_n.$$

Коэффициенты D_n, E_n и F_n зависят от m, n и σ/ω

$$D_n=n(n+1)-\frac{2\omega}{\sigma}m-C_{n+1}n^2-C_n(n+1);\ E_n=1-C_n-C_{n+1};$$

$$\mathrm{F}_n=\frac{2\omega}{\sigma}m+C_n(n+1)-C_{n+1}n;\ C_n=\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\cdot\frac{n^2-m^2}{4n^2-1};$$

$$C_n+\mathrm{F}_n=n(n+1)E_n.$$

Из формул (107) следует, что при $\mu=0$ и $\chi=0$

$$(4\omega^2-\sigma^2)\psi_n=R_n-\frac{1}{3}\varepsilon\omega(\sigma+\omega)r^2+W'(H_W)_n+\frac{\lambda}{\rho}\Lambda_n. \tag{120}$$

Это выражение отличается от (45) только формой записи, а именно, постоянным множителем при ψ_n. Слагаемое, содержащее множителем амплитуду нутации ε (§ 2), добавлено здесь для сравнения окончательных результатов; $\varepsilon \neq 0$, если только $n=2$ и $m=1$; H_W характеризует компоненту смещения по нормали к уровенной поверхности. Если сжатие Земли не учитывать, то формулы (116), (119) и (120) после исключения Λ_n и H_n дают систему двух уравнений второго порядка, из которых можно определить функции ψ_n и R_n с учетом сил Кориолиса. Влияние сил Кориолиса мало только при $\sigma \gg \omega$.

Потенциал силы тяжести внутри Земли, вращающейся в гидростатическом равновесии, с точностью до первых степеней сжатия определен выражением

$$W = W_0(r) + \frac{2}{3}\alpha K \mathrm{P}_2(\cos\vartheta), \tag{121}$$

где α — сжатие земного эллипсоида; K — правильное решение дифференциального уравнения

$$K'' + \frac{2}{r}K' - \frac{6}{r^2}K = -\frac{4\pi\rho' G}{W'}K, \tag{122}$$

подчиненное условию $K(a) = (rW')_{r=a}$. Тогда плотность и притяжение внутри Земли будут

$$\rho = \rho_0(r) + \frac{2}{3}\alpha\frac{\rho'}{W'}K\mathrm{P}_2(\cos\vartheta); \tag{123}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W'\sin\vartheta\cos\varphi\left(1 - 2\alpha\frac{K}{rW'}\cos^2\vartheta\right);$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = W'\sin\vartheta\sin\varphi\left(1 - 2\alpha\frac{K}{rW'}\cos^2\vartheta\right);$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = W'\cos\vartheta\left(1 + 2\alpha\frac{K}{rW'}\sin^2\vartheta\right). \tag{124}$$

С помощью (121) и (123), вычислим W'/ρ'. Эта функция, как и ρ, постоянна на уровенной поверхности. Если, кроме того,

$$\rho' = \rho^2 W' \Big/ \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \tag{125}$$

при $\vartheta = \vartheta_0$ и $\mathrm{P}_2(\cos\vartheta_0) = 0$, то уравнение (122) обеспечивает выполнение (125) при всех ϑ с ошибкой порядка квадрата сжатия.

С помощью (124) вычислим функцию (43)

$$\eta = H_W W' = H_r W' + 2\alpha\frac{K}{r}\cos\vartheta\,(w - H\cos\vartheta).$$

Здесь H_r и H_W — функции, определяющие соответственно радиальное смещение и смещение по нормали к уровенной поверхности. Функция H_W содержит члены, пропорциональные сферическим функциям $n-2$, и $n+2$. Коэффициенты при этих функциях таковы

$$(H_W)_n=(H_r)_n-\frac{(n+1)^2-m^2}{(2n+1)(2n+3)}\frac{2\alpha K}{rW'}\left(H_n-\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}\right)-\frac{n^2-m^2}{(2n-1)(2n+1)}\times$$

$$\times\frac{2\alpha K}{rW'}\left(H_n-\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}\right);$$

$$(H_W)_{n-2}=-\frac{n+m-1}{2n-1}\frac{2\alpha K}{rW'}\left(H_n-\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}\right);$$

$$(H_W)_{n+2}=-\frac{n-m+1}{2n+1}\frac{2\alpha K}{rW'}\left(H_n-\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}\right). \qquad (126)$$

Эти выражения далее будут использованы в частном случае $\mu=0$.

Уравнение Пуассона (116) представим через вспомогательную функцию ϕ

$$\phi=R+\frac{\sigma+\omega}{3\omega}\varepsilon\omega^2r^2P_2^1(\cos\vartheta)\cos(\sigma t-\varphi)-(4\omega^2-\sigma^2)\psi. \qquad (127)$$

Получим

$$\phi=-\frac{W'}{\rho'}(\rho' H_W+\Lambda\rho)-\left(\frac{\lambda}{\rho}-\frac{\rho W'}{\rho'}\right)\Lambda,$$

$$\Delta\phi=-\frac{4\pi\rho' G}{W'}\phi-(4\omega^2-\sigma^2)\Delta\psi+4\pi G\left(\rho'-\frac{\lambda\rho'}{\rho W'}\right)\Lambda. \qquad (128)$$

Последние члены справа исчезают при (125). Обе части уравнений (128) умножим на τ_{nm} и проинтегрируем по поверхности сферы радиуса r. После деления на

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\tau_{nm}^2 d\cos\vartheta\, d\varphi$$

будем иметь обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\phi_n=-\left(\frac{W'}{\rho'}\right)_0(\rho_0' H_n+\Lambda_n\rho_0)+a_{nm}\left(W_2' H_n+\left(\frac{\rho W'}{\rho'}\right)_2\Lambda_n\right);$$

$$\Delta\phi_n=-4\pi G\left(\frac{\rho'}{W'}\right)_0\phi_n-(4\omega^2-\sigma^2)\Delta\psi_n-4\pi G\left(\frac{\rho'}{W'}\right)_2 a_{nm}\phi_n. \qquad (129)$$

Функции с нулевым индексом характеризуют строение Земли вдоль луча $P_2(\cos\vartheta)=0$, с индексом 2 — малый множитель при $P_2(\cos\vartheta)$

$$a_{nm}=\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)]^2\,\mathrm{P}_2(\cos\vartheta)\,d\cos\vartheta\left[\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)]^2\,d\cos\vartheta\right]^{-1}=$$

$$=1-\frac{3}{2}\left(\frac{(n+1)^2-m^2}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{n^2-m^2}{(2n-1)(2n+1)}\right).$$

Аналогично для определения функций ϕ_{n+2} и ψ_{n+2} получим уравнения

$$\Delta\phi_{n+2}=-4\pi G\left(\frac{\rho'}{W'}\right)_0\phi_{n+2}-6\pi G\left(\frac{\rho'}{W'}\right)_2\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n-1)(2n+3)}\phi_n;$$

$$\phi_{n+2}=-\left(\frac{W'}{\rho'}\right)_0(\rho_0'H_{n+2}+\rho_0\Lambda_{n+2})+\frac{3}{2}\left(H_nW_2+\left(\frac{\rho W'}{\rho'}\right)_2\Lambda_n\right)\times$$

$$\times\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{130}$$

Таким образом, при колебании порядка n функции ϕ_{n+2} и ψ_{n+2} имеют величину порядка свободных членов в (130), а именно, $\alpha\phi_n$ и $\alpha\psi_n$. Функции ϕ_{n-2} и ψ_{n-2} — величины того же порядка. Все последующие функции — порядка α^2 или выше.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом сжатия (129) отличается от уравнений без учета сжатия только малым изменением коэффициентов, зависящим от n и m.

Хорошее приближение для точного решения уравнений (129) и (117) можно получить аналитически. Для этого сначала найдем решение при $\alpha=0$ для частоты σ_0 — корня уравнения

$$\frac{4\omega^2}{\sigma_0^2}\frac{n^2-m^2}{2n-1}+\frac{2\omega}{\sigma_0}m-n=0. \tag{131}$$

Все корни этого уравнения — действительные числа. Для частоты σ_0 из (118) и (119) запишем

$$\frac{\mathrm{F}_n}{E_n}=\frac{D_n}{\mathrm{F}_n}=n;\quad (H_r)_n=E_n\left(\psi_n'-\frac{n}{r}\psi_n\right)-2\varepsilon\frac{\omega}{\sigma}r.$$

Обозначив

$$\bar{H}_n=E_n\left(\psi_n'-\frac{n}{r}\psi_n\right);\quad H_n=\bar{H}_n-2\varepsilon\frac{\omega}{\sigma}r, \tag{132}$$

получим

$$\Lambda_n=\bar{H}_n'+\frac{n+2}{r}\bar{H}_n.$$

Как будет показано далее, при частоте σ_0 в (129) можно принять

$$(4\omega^2-\sigma_0^2)(\Delta\psi_n)=0.$$

Тогда при $\alpha=0$ из (129) следует

$$\phi=C_1\bar{K}_n+C_2K_n,$$

где K_n — правильное решение; $\bar{K}_n$ — неправильное решение, поэтому $C_1=0$, и (132) запишем в виде

$$\frac{1}{4\pi G}r^{n+2}\Delta\phi_n=(\rho' H_n+\Lambda_n\rho)\,r^{n+2}=(\rho H_n r^{n+2})'+2\varepsilon\frac{\omega}{\sigma}(n+3)\,\rho r^{n+2}. \quad (133)$$

Воспользуемся тождеством

$$r^{n+2}\Delta\phi_n=\left(\left(\phi_n'-\frac{n}{r}\phi_n\right)r^{n+2}\right)'$$

и найдем интеграл (133)

$$\left(\phi_n-\frac{n}{r}\phi_n-4\pi\rho G H_n\right)r^{n+2}=8\pi\varepsilon G\,(n+3)\frac{\omega}{\sigma}\int\limits_0^r \rho r^{n+2}dr+C_3. \quad (134)$$

Очевидно, $C_3=0$. Из (134) определим H_n, затем из (132) $\bar{H}_n$ и с помощью этой функции выразим ψ_n

$$\psi_n=\frac{1}{3}C_4r^4+\frac{r^n}{E_n}\int\limits_0^r\frac{\bar{H}_n}{r^n}dr.$$

Далее убедимся, что C_4 входит в граничные условия только в виде произведения $\frac{1}{3}(4\omega^2-\sigma_0^2)\,C_4$ и поэтому функция ψ_n в $1/\omega^2$ раз больше других функций. Поскольку C_4 в $\Delta\psi_n$ не входит, исходное приближение $(4\omega^2-\sigma_0^2)\,\Delta\psi_n=0$ имеет высокую точность. В решении при $\sigma=\sigma_0$ и $\alpha\neq 0$ (разность $\sigma-\sigma_0$ и α — малые величины) в возмущающих членах, содержащих множители $\sigma-\sigma_0$ и α, сохранены в первом приближении только члены с C_4, поэтому

$$H_n=\bar{H}_n-2\varepsilon\frac{\omega}{\sigma}r+(nE_n-\mathrm{F}_n)\frac{\psi_n}{r}+(H_W-H_r)_n, \quad (135)$$

где

$$E_nn-\mathrm{F}_n=2\left(n-\frac{\omega}{\sigma}m\right)\frac{\Delta\sigma}{\sigma};\quad \bar{H}_n=E_n\left(\psi_n'-\frac{n}{r}\psi_n\right). \quad (136)$$

При вычислении последнего члена в (135), зависящего от сжатия уровенных поверхностей, примем во внимание равенства (117) при $\sigma=\sigma_0$:

$$S_n+nrH_n=0;$$

$$H_n-\frac{n+1}{n+1-m}w_{n+1}=a_n\frac{n+1}{2n+1}\frac{\bar{H}_n}{E_n};$$

$$H_n-\frac{n}{n+m}w_{n-1}=\frac{4\omega^2-\sigma^2}{\sigma_0^2}\frac{n}{2n+1}\left(\frac{\bar{H}_n}{E}+\frac{2n+1}{r}\psi_n\right).$$

Если сохранить только главный член с C_4, то из (136) с помощью (126) следует

$$H_n=\bar{H}_n+\frac{2}{3}\left(n-\frac{\omega}{\sigma}m\right)\frac{\Delta\sigma}{\sigma}r^{n-1}C_4-2\varepsilon\frac{\omega}{\sigma}r-\gamma\frac{K_2}{W'}r^{n-2}, \tag{137}$$

где

$$\gamma=\frac{2}{3}\frac{4\omega^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\frac{n^2-m^2}{2n-1}\alpha C_4.$$

Формула (137) определяет H_n, если известна функция $\bar{H}_n$, а уравнение (134) — H_n и $\bar{H}_n$, если $\alpha=0$ и $\sigma=\sigma_0$. При уточнении этого уравнения в (133) нужно изменить H_n в соответствии с (137), так как выражение (132) для $\bar{H}_n$ сохраняется. Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi G}r^{n+2}\Delta\phi_n=\left[\rho' H_n+\rho\left(\bar{H}'_n+\frac{n+2}{r}\bar{H}_n\right)\right]r^{n+2}=\left(\rho r^{n+2}H_n\right)'+$$
$$+\rho\left[r^{n+2}\left(\bar{H}_n-H_n\right)\right]'.$$

В последнем члене используя (137) после интегрирования имеем

$$\left(\phi'_n-\frac{n}{r}\phi_n-4\pi\rho G H_n\right)r^{n+2}=-4\pi G(2n+1)\nu\int_0^r\rho r^{2n}dr+$$
$$+4\pi\gamma G\int_0^r\rho\left(\frac{K_2 r^{2n}}{W'}\right)'dr, \tag{138}$$

где $\nu=\frac{2}{3}\left(n-\frac{\omega}{\sigma}m\right)\frac{\Delta\sigma}{\sigma}C_4-2\frac{\omega}{\sigma}\varepsilon$ с учетом того, что $\varepsilon=0$, если $n\neq2$.

В последнем члене (138) выполним интегрирование по частям, заменим

$$\frac{\rho'}{W'}K_2=-\frac{1}{4\pi G}\Delta K_2$$

и еще раз проинтегрируем по частям. В результате будем иметь

$$\left(\phi_n' - \frac{n}{r}\phi_n - 4\pi\rho G H_n\right) r^{n+2} - \gamma\left(K_2' - 2\frac{n-1}{r}K_2 + \frac{4\pi\rho G}{W'}K_2\right) r^{n+2} =$$

$$= -4\pi G(2n+1)\nu\int_0^r \rho r^{2n}dr + \gamma(n-2)(3n-1)\int_0^r K_2 r^{2n-2}dr. \qquad (139)$$

В частном случае $n=2$, $m=1$, $\sigma_0=-\omega$ получаем выражение, отличающееся от (50) в [2] обозначениями

$$(L-2rR)r^2 - 2\alpha C_4\left(K_2' - \frac{2}{r}K_2 + \frac{4\pi\rho G}{W'}K_2\right)r^4 = -20\nu\pi G\int_0^r \rho r^4 dr.$$

В следующем приближении функцию $(4\omega^2-\sigma_0^2)\Delta\psi_n$ нужно считать известной из предыдущего приближения. Граничные условия составляем так же, как (45)—(51) в [2], но при произвольном n. Найдем три частных интеграла в оболочке при $\sigma=0$ и отсутствии внешних массовых и поверхностных сил. Эти интегралы при $r=1$ подчинены условиям

$$\mathrm{M}_n=0;\quad N_n=0;\quad L_n+(n+1)rR_n=0. \qquad (140)$$

Из них после исключения C_2 с помощью (127) образуем такой частный интеграл, что на границе $r=b$ оболочки с ядром

$$\mathrm{M}_n=0;\quad N_n+\rho_i(R_n+H_nW')=\rho_i\omega^2C_4r^n;$$
$$L_n-(nr+\gamma r^2)R_n+4\pi\rho_iGH_nr^2=\gamma r(\omega^2C_4r^n).$$

Этими условиями определен единственный интеграл: каждая из функций выражена произведением $\omega^2C_4r^n$ на свою вполне определенную функцию от r. Остается невыполненным только (139) при $r=b$. После подстановки в него L_n-nrR_n, если $\varepsilon=0$, получаем уравнение вида $C_4q=0$ (при $\varepsilon\neq0$ такое уравнение можно получить, исключив ε с помощью уравнения сохранения кинетического момента). Следовательно, $C_4=0$, кроме случая $q=0$. Так как в q входит $\Delta\sigma/\sigma_0$, то условие $q=0$ определяет частоту свободных колебаний $\sigma_0+\Delta\sigma$, соответствующему заданному m; нетрудно убедиться, что $\Delta\sigma$ получается малой величиной порядка $\sigma\omega b^2$, или порядка $10^{-3}\sigma$, т. е. достаточно малой, чтобы оправдать применение метода возмущений. При вынужденных колебаниях условие (140) неоднородно, поэтому все функции в оболочке зависят линейно от $\omega^2b^nC_4$, а уравнение (139) при $r=b$ (после исключения ε для $n=2$) имеет вид $p+C_4q=0$.

Следовательно, для заданной величины $\Delta\sigma$ и определенном q можно вычислить параметр C_4. Если отношение $\Delta\sigma/\sigma$ не мало, то параметр C_4 не велик; $C_4=0$ соответствует статическому приливу.

Следующее приближение может изменить $\Delta\sigma$ на величину порядка сжатия. При этом в ψ_n сохраняется не только главный член $\frac{1}{3}C_4r^n$, но и следующий, получаемый из предыдущего приближения. Для этого вычисления определяем H_n, $\bar{H}_n$ из (136) и, наконец, ψ_n после интегрирования (132). В этом приближении правые части уравнений (115) и (116) и сжатие уровенных поверхностей нужно учитывать не только в ядре, но и в оболочке с помощью уравнений (126) и (129).

Таким образом, должна существовать серия длиннопериодических свободных колебаний, соответствующая функциям $P_n^m(\cos\vartheta)$ для разных n и m на частоте, близкой к той, которая определена формулой (131). Эти колебания возникают при жидком ядре и вращении Земли. Частный случай таких колебаний ($n=2$, $m=1$, $\sigma_0=-\omega$) — свободная нутация с периодом, близким к суткам.

§ 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли

При рассмотрении свободных колебаний и приливов в сферически симметричной невращающейся планете обычно используют известное разделение колебаний на элементарные сфероидальные и крутильные, введенное впервые Ламбом. Элементарные решения сфероидального и крутильного типов удается использовать и для вращающейся планеты при частоте рассматриваемых колебаний значительно выше угловой скорости вращения (как для свободных колебаний Земли), либо при частоте колебаний достаточно низкой, когда в нулевом приближении можно пренебречь силами инерции (земные приливы).

Решение задач в первом случае можно уточнить, используя метод возмущения по малому параметру ω/σ, на основе уравнений в частных производных и приближенных выражений для смещений при крутильных и сфероидальных колебаниях [1]. Однако из-за связи между сфероидальными колебаниями порядка n и крутильными порядков $n-1$ и $n+1$ применение метода возмущений в таком виде может быть осложнено, особенно при частоте сфероидального колебания, близкой к частоте одного из соседних крутильных колебаний [8]. Кроме того, сходимость ряда по степеням ω/σ остается невыявленной,

---

[1] *Пекерис Х. Л., Альтерман З., Ярош Х.* Ротационные мультиплеты в спектре Земли. Сб.: Собственные колебания Земли.— М.: Мир, 1964, с. 257—283.

особенно для наиболее длиннопериодических колебаний Земли, когда $\omega/\sigma \approx 0{,}04$ и влияние $(\omega/\sigma)^2$ существенно.

Если же частоты колебаний близки к угловой скорости вращения (при приливах и длиннопериодических колебаниях), разложение по степеням ω/σ становится невозможным. При рассмотрении резонансных явлений (например, суточной нутации или длиннопериодических колебаний [1]), оказывается неприемлемым также и нулевое приближение $\omega/\sigma=0$.

При поиске более эффективного решения задачи путем некоторого обобщения видов смещений для элементарного колебания порядка n удалось получить для сферически симметричной модели Земли систему точных обыкновенных дифференциальных уравнений, не связанных с уравнениями смежных порядков n.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, с учетом сил Кориолиса формально может быть получена из хорошо известных уравнений сфероидальных колебаний порядка n, а также крутильных порядков $n-1$ и $n+1$, если инерционные члены, содержащие множитель $\rho\sigma^2$ заменить в них более сложными выражениями, связывающими колебания разных типов в одно общее. Именно функции, характеризующие при $\omega=0$ кинетическую энергию сфероидального колебания ($\rho\sigma^2 H_n$ и $\rho\sigma^2 S_n$) и соседних крутильных колебаний ($\rho\sigma^2 \mathrm{T}_{n-1}$ и $\rho\sigma^2 \mathrm{T}_{n+1}$), при $\omega \neq 0$ следует заменить следующими выражениями [2]

$$\rho\sigma^2 \tilde{H}_n = \rho\sigma^2 H_n - \frac{n+1}{2n+1}\Psi_{n+1} - \frac{n}{2n+1}\Psi_{n-1};$$

$$\rho\sigma^2 \tilde{\mathrm{T}}_{n-1} = \rho\sigma^2 \mathrm{T}_{n-1} - \Psi_{n-1};$$

$$\rho\sigma^2 \tilde{S}_n = \rho\sigma^2 S_n + \frac{n(n+1)}{2n+1} r\left(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}\right);$$

$$\rho\sigma^2 \tilde{\mathrm{T}}_{n+1} = \rho\sigma^2 \mathrm{T}_{n+1} - \Psi_{n+1}. \qquad (141)$$

Новые вспомогательные функции Ψ и T заданы выражениями (определение функции Ψ отлично, от использованного в § 3):

$$\Psi_{n+1} = \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n}\left(H_n - \frac{S_n}{(n+1)r} + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}\mathrm{T}_{n+1}\right) = \rho\sigma^2 \frac{a_n}{b_n}\Psi^*_{n+1};$$

---

[1] *Молоденский М. С.* Приливы и собственные колебания Земли с учетом сил Кориолиса. Известия АН СССР. Физика Земли, 1976, № 1, с. 3—12.

[2] *Молоденский М. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения элементарного колебания упругой вращающейся Земли. Известия АН СССР. Физика Земли, 1977, № 7, с. 9—15.

$$\Psi_{n-1}=\rho\sigma^2\frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}+\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}\mathrm{T}_{n-1}\right)=\rho\sigma^2\frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\Psi^*_{n-1}; \qquad (142)$$

$$\mathrm{T}_{n+1}=-\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}+H_n-\frac{S_n}{(n+1)r};$$

$$\mathrm{T}_{n-1}=H_n+\frac{S_n}{nr}-\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1}; \qquad (143)$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n+1}+\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)}}{1+\frac{2\omega}{\sigma}\frac{m}{n+1}\frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2}}.$$

В справедливости высказанного утверждения можно убедиться, заменив в формулах (115) и (112) функции w_{n-1} и w_{n+1} функциями T_{n-1} и T_{n+1}. Функции Ψ_{n-1} и Ψ_{n+1} объединяют уравнения сфероидальных и крутильных колебаний в одну общую систему дифференциальных уравнений. Добавив уравнение Пуассона, получим полную систему уравнений десятого порядка. Из десяти граничных условий, определяющих частный интеграл, пять условий обеспечивают ограниченность всех функций в центре сферы (условия правильности решения). Пять условий на поверхности Земли определены величинами на этой поверхности:

потенциалом V_e внешней возмущающей силы

$$R'_n-4\pi\rho G H_n+(n+1)\frac{R_n}{r}=(2n+1)\frac{V_n}{r};$$

нормальным давлением N_W;

тангенциальными напряжениями:

$$\mathrm{M}_n=\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}\right)_n;$$

$$(M_z)_{n+1}=-\frac{n+1-m}{2n+1}\mu\left(\frac{\mathrm{T}_{n+1}}{r}\right)' r;\quad (M_z)_{n-1}=-\frac{n+m}{2n+1}\mu\left(\frac{\mathrm{T}_{n-1}}{r}\right)' r.$$

Пять правильных линейно независимых интегралов можно задать так, чтобы из пяти функций H_n, R_n, S_n, T_{n-1}, T_{n+1} на поверхности одна в каждом интеграле равнялась единице, а остальные — нулю. Тогда любое правильное решение F для каждой из функций M, N,

$$Q=(R'-4\pi\rho G H)r+(n+1)R=\frac{L}{r}+(n+1)R,$$

и компонент касательного напряжения

$$g=\mu\left(\frac{T_{n-1}}{r}\right)' \quad \text{и} \quad h=\mu\left(\frac{T_{n+1}}{r}\right)'$$

будет определено через эти частные решения, отмеченные индексами H, R, S, $n-1$ (вместо T_{n-1}), $n+1$ (вместо T_{n+1}). Это решение представляет линейная функция

$$F(r)=H(1)F_{\text{н}}(r)+R(1)F_R(r)+S(1)F_S(r)+T_{n-1}F_{n-1}(r)+ \\ +T_{n+1}F_{n+1}(r). \tag{144}$$

Если $F(1)$ (на земной поверхности) удовлетворяет граничным условиям, то постоянные в (144) суть числа Лява (в общем случае их пять). При свободном колебании равны нулю на поверхности значения функций Q, M, g, h, а также давление N_w по нормали к поверхности. Условие совместности граничных условий (144), определяющих числа Лява, таково

$$D=\begin{vmatrix} Q_H & Q_S & Q_R & (Q_{n-1}) & (Q_{n+1}) \\ N_H & N_S & N_R & (N_{n-1}) & (N_{n+1}) \\ M_H & M_S & M_R & (M_{n-1}) & (M_{n+1}) \\ (g_H) & (g_S) & (g_R) & g_{n-1} & (g_{n+1}) \\ (h_H) & (h_S) & (h_R) & (h_{n-1}) & h_{n+1} \end{vmatrix}=0. \tag{145}$$

Условие (145) определяет частоту свободного колебания. Элементы определителя, заключенные в скобки, равны нулю при $\omega=0$, поэтому тогда

$$D=\begin{vmatrix} Q_H & Q_S & Q_R \\ N_H & N_S & N_R \\ M_H & M_S & M_R \end{vmatrix} g_{n-1}h_{n+1}. \tag{146}$$

Частота, при которой равен нулю один из множителей в (146), определяет при $\omega=0$ частоту сфероидального колебания порядка n или крутильного колебания порядков $n-1$ или $n+1$.

Уравнение (145) для определения частот свободных колебаний, когда $\omega \neq 0$, является точным. Если элементы определителя (145) вычислены при частоте σ_0, близкой к одной из частот σ свободных колебаний, то D — малая величина порядка $(\sigma_0-\sigma)/\sigma_0$. Если $D=0$, числа Лява пропорциональны минорам любой строки определителя (145), а при $D\neq 0$ отношение миноров отличается от отношения чисел Лява на величины порядка $(\sigma_0-\sigma)/\sigma_0$.

Преобразуем (145) так, чтобы в одном из столбцов (например, в первом) стояли малые величины. Для этого вычислим приближенные значения чисел Лява, умножим элементы каждого столбца на соответствующее число Лява, результаты сложим и заменим ими элементы первого столбца. В новом определителе величина D точно сохранится, а все элементы первого столбца будут порядка $(\sigma_0-\sigma)/\sigma_0$, так как при $D=0$ они все были бы равны нулю. Таким образом,

$$D=A_{11}\delta Q+A_{21}\delta N+A_{31}\delta \mathrm{M}+A_{41}\delta g+A_{51}\delta h, \tag{147}$$

где A_{i1} — миноры первого столбца; δQ, δN, $\delta\mathrm{M}$, δg, δh вычислены по формуле (144) с приближенными числами Лява.

Рассмотрим взаимосвязь определителя (145) и вариаций частоты и функций, входящих в дифференциальные уравнения. Заметим, что для решения двух систем линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k=a_{k1}y_1+a_{k2}y_2+\ldots+a_{kl}y_l; \tag{148}$$

$$-z'_i=(a_{1i}+\delta a_{1i})z_1+(a_{2i}+\delta a_{2i})z_2+\ldots+(a_{li}+\delta a_{li})z_l \tag{149}$$

справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\int_0^r \delta a_{kj}y_k z_j dz+\sum_{k=1}^{l} y_k(r)z_k(r)=0, \tag{150}$$

если y_k и z_j — правильные (ограниченные в центре сферы) непрерывные решения уравнений (148) и (149). Если все $\delta a_{kj}=0$, функции y_i и z_i — взаимно сопряженные. Если же $|\delta a_{kj}|<\varepsilon$ при всех величинах аргумента и индексов k и j (ε — малая постоянная), то в (150) можно приближенно принять сопряженность y_i и z_i, допуская ошибку порядка ε^2.

Пусть системой (149) является система уравнений упругих колебаний с учетом сил Кориолиса (§ 6), а частное решение получено при величинах на поверхности $H(1)=A_{11}$; $S(1)=A_{12}$; $R(1)=A_{13}$; $\mathrm{T}_{n-1}(1)=A_{14}$; $\mathrm{T}_{n+1}(1)=A_{15}$ (A_{1i} — миноры первой строки определителя (145)). Так как с минорами сопряжены соответствующие элементы определителя, то для системы (149) можно принять $z_1=Q_H$; $z_2=Q_S$; $z_3=Q_R$; $z_4=Q_{n-1}$; $z_5=Q_{n+1}$. Поэтому вместо (150) можно написать

$$\int_0^1 \delta f dr+D=0, \tag{151}$$

где

$$f=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}y_k z_j. \tag{152}$$

Таким образом, из (151) при известном D можно определить $\sigma-\sigma_0$, т. е. частоту свободного колебания. В задаче об упругих колебаниях Земли уравнения, сопряженные с (148), а именно уравнение (149), для $\delta a_{ik}=0$ имеют решение

$$z_i=b_{i1}y_1+b_{i2}y_2+\ldots+b_{il}y_l, \tag{153}$$

где все b_{ij} зависят только от r. В этом случае исключение всех z_i из (149) с помощью (153) возвращает к системе уравнений (148).

Для уравнений, описывающих колебания упругой сферически симметричной Земли, выражения типа (153) очень просты. В системе функций H, L, M, N, R, S, X_{n-1}, Y_{n-1}, X_{n+1}, Y_{n+1} они имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}
&\bar{N}_n = H_n r^2; \quad \bar{H}_n = -N_n r^2; \\
&n(n+1)\bar{S}_n = -\mathrm{M}_n; \quad n(n+1)\bar{\mathrm{M}}_n = S_n; \\
&4\pi G \bar{L}_n = R_n; \quad 4\pi G \bar{R}_n = -L_n; \\
&\bar{\mathrm{X}}_{n+1} = \mu r^2 \mathrm{Y}_{n+1}; \quad \bar{\mathrm{Y}}_{n+1} = -\mu r^2 \mathrm{X}_{n+1}; \\
&\bar{\mathrm{X}}_{n-1} = \mu r^2 \mathrm{Y}_{n-1}; \quad \bar{\mathrm{Y}}_{n-1} = -\mu r^2 \mathrm{X}_{n-1},
\end{aligned} \tag{154}$$

где

$$\mathrm{X}_{n+1} = ip\mathrm{T}_{n+1}; \quad \mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{X}'_{n+1}; \quad p^2 = \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2)+m^2};$$

$$\mathrm{X}_{n-1} = iq\mathrm{T}_{n-1}; \quad \mathrm{Y}_{n-1} = \mathrm{X}'_{n-1}; \quad q^2 = \frac{n}{2n+1}\,\frac{n^2 - m^2}{n(n-1)+m^2};$$

$i = \sqrt{-1}$. Черта над буквой означает сопряженную функцию. Если функции M_n и N_n заменить функциями Φ_n и P_n (§ 5)

$$\Phi_n = N_n - \frac{2\mu}{r^2} S_n + \frac{4\mu}{r} H_n;$$

$$P_n = \mu\left(\frac{2}{r} S_n - 2n(n+1) H_n\right) - \mathrm{M}_n r^2,$$

то первые четыре выражения в (154) будут следующими:

$$\begin{aligned}
&\bar{\Phi}_n = H_n r^2; \quad n(n+1)\bar{P}_n = S_n; \\
&\bar{H}_n = -\Phi_n r^2; \quad n(n+1)\bar{S}_n = -P_n;
\end{aligned} \tag{155}$$

а остальные не изменятся.

Справедливость формул (154) и (155) можно проверить непосредственно. Если составить систему сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений и исключить все сопряженные функции с помощью (154) и (155), то полученные уравнения совпадут с исходными. Значения на поверхности ($r=1$) пяти правильных интегралов могут быть заданы 25 числами. В силу (154) и (155) не все эти числа независимы. Зададим матрицу правильных интегралов при $r=1$ следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccc}
H_n & S_n & R_n & \mathrm{X}_{n-1} & \mathrm{X}_{n+1} & \Phi_n & P_n & L_n & \mathrm{Y}_{n-1} & \mathrm{Y}_{n+1} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & P_1 & L_1 & \mathrm{Y}_{n-1,1} & \mathrm{Y}_{n+1,1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & P_2 & L_2 & \mathrm{Y}_{n-1,2} & \mathrm{Y}_{n+1,2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Phi_3 & P_3 & L_3 & \mathrm{Y}_{n-1,3} & \mathrm{Y}_{n+1,3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Phi_4 & P_4 & L_4 & \mathrm{Y}_{n-1,4} & \mathrm{Y}_{n+1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Phi_5 & P_5 & L_5 & \mathrm{Y}_{n-1,5} & \mathrm{Y}_{n+1,5}
\end{array} \tag{156}$$

Эту матрицу дополним пятью неправильными интегралами с единицами по диагонали у одной из функций Φ_n, L_n, P_n, Y_{n-1} и Y_{n+1} и нулями для всех остальных элементов. Такая матрица десятого порядка легко обращается и дает простые выражения для элементов обратной матрицы — частных интегралов сопряженной системы дифференциальных уравнений.

Результат обращения сравним с (154) и получим

$$n(n+1)\Phi_2=P_1;\ \ 4\pi G\Phi_3=L_1;\ \ 4\pi GP_3=n(n+1)L_2;$$

$$\Phi_3=-\mu Y_{n-1,1};\ \ P_4=-n(n+1)\mu Y_{n-1,2};\ \ L_4=-4\pi G\mu Y_{n-1,3};$$

$$\Phi_5=-\mu Y_{n+1,1};\ \ P_5=-n(n+1)\mu Y_{n+1,2};$$

$$L_5=-4\pi\mu G Y_{n+1,3};\ \ Y_{n+1,4}=Y_{n+1,5}.$$

Остальные 15 равенств удовлетворяются тождественно. Поэтому из 25 чисел, входящих в правую часть матрицы (156), 10 чисел могут контролировать точность вычисления, т. е. точность численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть система (148) является системой дифференциальных уравнений, соответствующей собственному значению σ_1, а система (149) — сопряженной системой, соответствующей собственному значению σ_2. Вычислим правильные частные интегралы такие, что при $r=1$ $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=0$ в силу граничных условий, определяющих σ_1, а $z_6=z_7=z_8=z_9=z_{10}=0$ в силу граничных условий, определяющих σ_2 (это можно выполнить в системе функций, использованной при составлении условия 3). Тогда в (151) $D=0$ и отличны от нуля только те δa_{ij}, которые зависят от σ. Воспользуемся самосопряженностью дифференциальных уравнений, позволяющей выразить все функции сопряженной системы через функции исходной. В результате из (151) получим

$$\int_0^1(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\Big[\frac{n+1}{2n+1}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)_1\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)_2+$$

$$+\frac{n}{2n+1}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}\right)_1\left(H_n+\frac{S_n}{nr}\right)_2+\frac{n+1}{2n+1}\,\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}(T_{n+1})_1(T_{n+1})_2+$$

$$+\frac{n}{2n+1}\,\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}(T_{n-1})_1(T_{n-1})_2-\left(\left(\frac{\sigma^2a_n}{b_n}\right)_2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sigma^2a_n}{b_n}\right)_1\right)(\Psi_{n+1})_1(\Psi_{n+1})_2-\left(\left(\frac{\sigma^2a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\right)_2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sigma^2a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\right)_1\right)(\Psi_{n-1})_1(\Psi_{n-1})_2\Big]\rho r^2\,dr=0. \qquad (157)$$

Индексами 1 и 2 отмечены собственные функции, соответствующие собственным значениям σ_1 и σ_2. Интегральное условие (157) необходимо и достаточно для определения коэффициентов рядов, представляющих функции, характеризующие вынужденное колебание через статическое решение и собственные функции свободных колебаний.

При варьировании частоты в формуле (152) существенны только члены

$$f(\sigma)=\rho\sigma^2\left(H_n^2+\frac{S_n^2}{n(n+1)}+p^2\mathrm{T}_{n+1}^2+q^2\mathrm{T}_{n-1}^2\right)-\frac{n+1}{2n+1}\frac{\sigma^2 a_n}{b_n}\rho\Psi_{n+1}^{*2}-$$

$$-\frac{n}{2n+1}\frac{\sigma^2 a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\rho\Psi_{n-1}^{*2}. \tag{158}$$

Для сравнения с этим выражением вычислим кинетическую энергию. Используя выражения для смещений (106), определим скорости смещений и после интегрирования по объему всей Земли кинетическую энергию W элементарного колебания, характеризуемого параметрами σ, m, n:

$$2\mathrm{W}=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_0^1\left[\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(2n+1)(2n+3)}\Psi_{n+1}^2+\right.$$

$$+\left(\sigma^2-4\omega^2\right)\frac{n(n+1)+m^2}{(2n-1)(2n+1)}\Psi_{n-1}^2+\frac{2n+1}{2n+3}\frac{n+1+m}{n+1-m}\sigma^2 w_{n+1}^2+$$

$$\left.+\frac{2n+1}{2n-1}\frac{n-m}{n+m}\sigma^2 w_{n-1}^2\right]\rho r^2\,dr. \tag{159}$$

После исключения Ψ_{n+1} и Ψ_{n-1} с помощью (141) и w_{n-1}, w_{n+1} с помощью (111) можно убедиться, что подынтегральное выражение в (159) отличается от (158) постоянным множителем и членами порядка квадрата возмущений.

Зависимость собственной частоты σ от m (расщепление спектральных линий при вращении Земли) можно определить подстановкой (158) в (151) и варьированием результата по m, если принять во внимание зависимость f от m через коэффициенты a_n, b_n, a_{-n-1}, b_{-n-1}, p, q. Заметим, что таким образом ротационное расщепление спектральных линий, может быть найдено точно и при любом отношении ω/σ.

Если при вычислении σ ограничиться относительной точностью порядка $\omega^2 a/g\approx 1/300$, то зависимость D от m можно не учитывать, и в результате варьирования (151) по m получим

$$\sigma_{n,m}-\sigma_{n,0}=\frac{\int\limits_0^1 (f(n,m)-f(n,0))\,dr}{\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial \sigma}\,dr}. \tag{160}$$

Таким образом, расщепление спектральных линий оказывается связанным с кинетической энергией элементарного колебания.

В заключение отметим следующее обстоятельство. Из формул (142) можно предположить, что существуют такие частоты, при которых характер колебаний существенно меняется. Именно в случае близости b_n или b_{-n-1} к нулю возмущающие члены Ψ_{n+1} или Ψ_{n-1}, казалось бы должны неограниченно возрастать. Однако, если принять во внимание ограниченность кинетической энергии и выразить возмущение через Ψ_n, Ψ'_n по формуле (111), то выяснится, что никаких особенностей в характере колебаний в этом случае не возникает.

§ 8. Простейшие упругие колебания вращающейся Земли

Уравнения упругих колебаний вращающейся Земли, имеющей сферически симметричное строение и начальные напряжения гидростатического характера, описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Радиальное смещение H (16), изменение R потенциала притяжения (21) и компонент w смещения в направлении оси вращения Земли

$$w=X_{n-1}(r)\,\tau_{n-1}+Y_{n+1}(r)\,\tau_{n+1} \tag{161}$$

при простейших граничных условиях приняты искомыми функциями. Значения, принимаемые тремя функциями, выражающими условия сфероидальных колебаний порядка n, и двумя функциями, выражающими условия крутильных колебаний порядков $n-1$ и $n+1$, определяют граничные условия. Простейшим будем считать колебание, при котором функции имеют вид (21).

В § 6 отмечено, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (112), (115) и (116) разрешима независимо от систем с другой величиной n. Это верно при $\mu=0$, но если $\mu\neq 0$ существуют малые связи между системами с близкими n. Рассмотрим источники этих связей, имея в виду общие выражения

$$H=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n H_n(r);\quad R=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n R_n(r);$$

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\left[X_{n-1}(r)\tau_{n-1}+Y_{n+1}(r)\tau_{n+1}\right]. \tag{162}$$

Третье из уравнений (107) представим следующим образом

$$\frac{\partial A}{\partial z}+Bz+f(w)-\rho\sigma^2 w=-\rho(\sigma^2-4\omega^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z\right)-\Theta,$$

где

$$\Theta=\rho\sigma^2 w-\rho(\sigma^2-4\omega^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z\right).$$

Тогда из этих уравнений получим

$$A'+Br+f(H)-\rho\sigma^2 H=-\rho(\sigma^2-4\omega^2)(\psi'-\chi r)-\frac{z}{r}\Theta;$$

$$\Delta A+3B+B'r+f(\Lambda)-\Lambda\rho\sigma^2=-\rho(\sigma^2-4\omega^2)(\Delta\psi-\chi' r-3\chi)-$$

$$-\rho'(\sigma^2-4\omega^2)(\psi'-\chi r)-\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

Исключив из них A'', определив $A'_n+B_n r$ и A_n, будем иметь уравнения вида (112), дополненные слагаемыми, появляющимися из рядов (162).

Связь между уравнениями разных порядков n возникает при представлении производной по z через производные по r и ϑ и использовании рекуррентных соотношений (63). Поэтому в выражения $\frac{z}{r}\Theta$, $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$, $\frac{z}{r}w$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ входят слагаемые не только с τ_n, но также с τ_{n-2} и τ_{n+2}. Повторив вычисления, приводящие к уравнениям (113) и (114), но с сохранением гармоник соседних степеней, получим

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\tau_n\left[A'_n+B_n r-\frac{n}{r}A_n+f_{n+1}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)-\rho\sigma^2\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+(\sigma^2-4\omega^2)\left(\psi'-\chi r-\frac{n}{r}\psi\right)_n-\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{n+m+1}{n+1}\Theta_{n+1}\right]+$$

$$\left.+\tau_{n+2}\frac{n+m-1}{n+1}\Theta_{n-1}-\tau_{n-2}\frac{2(n+m+2)}{(n+1)(2n+3)}\Theta_{n+1}\right\}=0; \tag{163}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\tau_n\left[A'_n+B_n r+\frac{n+1}{r}A_n+f_{n-1}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}\right)-\rho\sigma^2\left(H_n+\frac{S_n}{nr}\right)+\right.\right.$$

$$+(\sigma^2-4\omega^2)\left(\psi'-\chi r+\frac{n+1}{r}\psi\right)_n-\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{n-m}{n}\Theta_{n-1}\Bigg]+$$

$$+\tau_{n-2}\frac{n+2-m}{n}\Theta_{n+1}+\tau_{n+2}\frac{2(n-1-m)}{n(2n-1)}\Theta_{n-1}\Big\}=0. \qquad (164)$$

Из (163) и (164) нужно исключить вспомогательные функции χ_n, ψ_n, Θ_{n-1} и Θ_{n+1}, для этого используем функции U_{n-1} и V_{n+1}, входящие в окончательный результат

$$U_{n-1}=H_n+\frac{S_n}{nr}-\frac{2n+1}{n+m}w_{n-1};$$

$$V_{n+1}=H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}-\frac{2n+1}{n+1-m}w_{n+1}. \qquad (165)$$

Из (162) определим

$$w_{n-1}=X_{n-1}+Y_{n-1};\quad w_{n+1}=X_{n+1}+Y_{n+1}.$$

Исключая w_{n-1} и w_{n+1} из (111), имеем

$$b_n\left(\psi'-\chi r-\frac{n}{r}\psi\right)_n=H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}+\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}V_{n+1};$$

$$b_{-n-1}\left(\psi'-\chi r+\frac{n+1}{r}\psi\right)_n=H_n+\frac{S_n}{nr}+\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}U_{n-1} \qquad (166)$$

и находим

$$\frac{2n+1}{n+m}\Theta_{n-1}=\rho\sigma^2\left(H_n+\frac{S_n}{nr}-U_{n-1}\right)-$$

$$-(\sigma^2-4\omega^2)\rho\frac{n+m}{2n-1}\left(\psi'-\chi r+\frac{n+1}{r}\psi\right)_n;$$

$$\frac{2n+1}{n+1-m}\Theta_{n+1}=\rho\sigma^2\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}-V_{n+1}\right)-$$

$$-(\sigma^2-4\omega^2)\rho\frac{n+1-m}{2n+3}\left(\psi'-\chi r-\frac{n}{r}\psi\right)_n. \qquad (167)$$

Уравнения (112) сохраняют свой вид, если w_{n-1} и w_{n+1} выражены в системе функций H_n, R_n, S_n, U_{n-1}, V_{n+1}:

$$A'_n+B_nr-\frac{n}{r}A_n+f_{n+1}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}-V_{n+1}\right)=0;$$

$$A'_n+B_nr+\frac{n+1}{r}A_n+f_{n-1}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}-U_{n-1}\right)=0. \qquad (168)$$

Пользуясь (168), исключаем A_n и B_n из (163) и (164). С помощью (166) и (167) исключаем χ_n и ψ_n, Θ_{n-1} и Θ_{n+1}. В системе функций H_n, R_n, S_n, U_{n-1}, V_{n+1} получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\tau_n\left[f_{n+1}(\mathrm{V}_{n+1})-\rho\sigma^2\frac{a_n}{b_n}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}+\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}\mathrm{V}_{n+1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\tau_{n+2}\frac{n+m-1}{n+1}\Theta_{n-1}-2\frac{n+m+2}{(n+1)(2n+3)}\tau_{n-2}\Theta_{n+1}\right\}=0; \qquad (169)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\tau_n\left[f_{n-1}(\mathrm{U}_{n-1})-\rho\sigma^2\frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}+\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}\mathrm{U}_{n-1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\tau_{n-2}\frac{n+2-m}{n}\Theta_{n+1}+2\tau_{n+2}\frac{n-m-1}{n(2n-1)}\Theta_{n-1}\right\}=0. \qquad (170)$$

Для определения всех пяти функций, к уравнениям (168)—(170) нужно присоединить пятое уравнение — уравнение Пуассона

$$R_n''+\frac{2}{r}R_n'-\frac{n(n+1)}{r^2}R=4\pi G\frac{n+1}{2n+1}\left[\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}\right)\rho r^{n+2}\right]'r^{-n-2}+$$

$$+4\pi G\frac{n}{2n+1}\left[\left(H_n+\frac{S_n}{nr}\right)\rho r^{-n+1}\right]'r^{n-1}. \qquad (171)$$

Эти пять уравнений получены в результате формального преобразования уравнений в частных производных (уравнений упругих колебаний). Если они удовлетворены при любом положении точки в любой момент времени, т. е. если для всех n определены функции $H_n(r)$, $R_n(r)$, $S_n(r)$, $\mathrm{U}_{n-1}(r)$, $\mathrm{V}_{n+1}(r)$, удовлетворяющие уравнениям (168)—(171) и заданным граничным условиям, то получено решение исходных уравнений (107). Функцию Θ, введенную в уравнение (107), в системе функций H_n, R_n, S_n, U_{n-1}, V_{n+1} можно определить из (167), использовав (166)

$$\frac{2n+1}{n+m}\Theta_{n-1}=\rho\sigma^2\left(H_n+\frac{S_n}{nr}-\mathrm{U}_{n-1}\right)-(\sigma^2-4\omega^2)\frac{\rho}{b_n}\times$$

$$\times\left(H_n+\frac{S_n}{nr}+\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}\mathrm{U}_{n-1}\right); \qquad (172)$$

$$\frac{2n+1}{n+1-m}\Theta_{n+1}=\rho\sigma^2\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}-\mathrm{V}_{n+1}\right)-$$

$$-(\sigma^2-4\omega^2)\frac{\rho}{b_{-n-1}}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}+\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}\mathrm{V}_{n+1}\right). \qquad (173)$$

Уравнения (169) и (170) отличаются от (114) и (115) слагаемыми с τ_{n-2} и τ_{n+2}, множители при τ_n такие же, как в (141) и (142). После объединения слагаемых с τ_n, множители при

τ_n для всех n нужно приравнять нулю. Тогда уравнения (169) и (170) примут следующий вид

$$f_{n+1}(\mathrm{V}_{n+1})-\rho\sigma^2\frac{a_n}{b_n}\left(H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}+\frac{(n+1)^2-m^2}{(n+1)(n+2)+m^2}\mathrm{V}_{n+1}\right)=$$

$$=2\frac{n+m+4}{(n+3)(2n+7)}\Theta_{n+3}-\frac{n+m-3}{n-1}Q_{n-3}; \tag{174}$$

$$f_{n-1}(\mathrm{U}_{n-1})-\rho\sigma^2\frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\left(H_n+\frac{S_n}{nr}+\frac{n^2-m^2}{n(n-1)+m^2}\mathrm{U}_{n-1}\right)=$$

$$=-\frac{n+4-m}{n+2}\Theta_{n+3}-2\frac{n-3-m}{(n-2)(2n-5)}\Theta_{n-3}. \tag{175}$$

В правые части этих уравнений входят функции из системы порядка n, измененными на две единицы. Но при малом ω функции Θ_{n-3} и Θ_{n+3} можно определить из уравнений и граничных условий, составленных при $\omega=0$. Тогда эти функции становятся известными и система уравнений, в которую входят (174) и (175),— неоднородной.

Если $\omega=0$, то $a_n=0$, $b_n=1$. Из (172) и (173) следует, что тогда Θ_{n-1} и Θ_{n+1} пропорциональны U_{n-1} и V_{n+1}. Поэтому уравнения (174) и (175) будут удовлетворены, если при всех n $\mathrm{U}_{n-1}=\mathrm{V}_{n+1}=0$. Остальные уравнения приводят к уравнениям сфероидальных колебаний и не связаны с уравнениями соседних порядков. Крутильных колебаний не возникает.

При $\omega\neq0$, но малом для граничных условий сфероидальных колебаний

$$\left[\mu\left(\frac{\mathrm{U}_{n-1}}{r}\right)'\right]_{r=1}=\left[\mu\left(\frac{\mathrm{V}_{n+1}}{r}\right)'\right]_{r=1}=0,$$

функции U_{n-1}, V_{n+1}, Θ_{n-3}, Θ_{n+3} малы при всех величинах r. В исходном приближении достаточно принять $\Theta_{n-3}=\Theta_{n+3}=0$, а в следующих приближениях вычислять эти функции по предыдущему приближению. В условиях Земли сходимость приближений не вызывает сомнений.

В предельном случае жидкого ядра $\mu=0$; $f(u)=\rho\sigma^2u$; $f(v)=$ $=\rho\sigma^2v$; $f(w)=\rho\sigma^2w$ и уравнения (107) существенно упрощаются

$$\frac{\partial A}{\partial x}+Bx+\rho(\sigma^2-4\omega^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\chi x\right)=0;$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}+By+\rho(\sigma^2-4\omega^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\chi y\right)=0;$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}+Bz+\rho\sigma^2w=0. \tag{176}$$

Первые два из уравнений (176) будут удовлетворены, если

$$\frac{A}{\rho}+(\sigma^2-4\omega^2)\psi=0;\quad \frac{\rho'}{\rho^2}A+\frac{Br}{\rho}-(\sigma^2-4\omega^2)\chi r=0. \tag{177}$$

Введя (177) в третье из уравнений (176), получим

$$w=\frac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\chi z\right);\quad \Theta=0.$$

При $\mu=0$ из (107) следует

$$A=\rho(R+HW')=\Lambda\lambda;\quad -Br=\rho'(R+HW')+\Lambda\rho W',$$

а из (177) будем иметь уравнения

$$(4\omega^2-\sigma^2)\psi=R+HW'+\frac{\Lambda\lambda}{\rho};$$

$$(4\omega^2-\sigma^2)\chi r^2=\left(\rho W'-\frac{\rho'}{\rho}\lambda\right)\Lambda. \tag{178}$$

Эти уравнения можно получить из общих уравнений (168). Так как $\Theta=0$, а $f(u)=\rho\sigma^2 u$; $f(v)=\rho\sigma^2 v$; $f(w)=\rho\sigma^2 w$ из (169) и (170) определяем U_{n-1} и V_{n+1}

$$U_{n-1}=a_{-n-1}\left(\psi'-\chi r+\frac{n+1}{r}\psi\right)_n;\quad V_{n+1}=a_n\left(\psi'-\chi r-\frac{n}{r}\psi\right)_n. \tag{179}$$

В отличие от (117) закон изменения плотности с глубиной не ограничен условием $\chi=0$.

Введем в (172) и (173) $\Theta_{n-1}=\Theta_{n+1}=0$ и (179), откуда

$$H_n-\frac{S_n}{(n+1)r}=\zeta_n\left(\psi'-\chi r-\frac{n}{r}\psi\right)_n;$$

$$H_n+\frac{S_n}{nr}=\zeta_{-n-1}\left(\psi'-\chi r+\frac{n+1}{r}\psi\right)_n, \tag{180}$$

где $\zeta_n=a_n+\dfrac{\sigma^2-4\omega^2}{\sigma^2}$.

Из (180) вытекает

$$H_n=E_n(\psi'-\chi r)_n-F_n\frac{1}{r}\psi_n;$$

$$S_n=E_n\left[(\psi'-\chi r)'_n+\frac{2}{r}(\psi'-\chi r)_n-\frac{n(n+1)}{r^2}\psi_n\right], \tag{181}$$

где E_n и F_n определены, как в § 6.

Для определения функций, входящих в уравнения колебаний при $\mu=0$, $\chi\neq0$ удобна система функций ψ_n, R_n, Z_n, где $Z_n=\psi'_n-\chi_n r$. Тогда из (180) и (181) следует

$$H_n = E_n Z_n - \frac{F_n}{r}\psi_n; \quad \Lambda_n = E_n\left(Z' + \frac{2}{r}Z - \frac{n(n+1)}{r^2}\psi\right)_n.$$

Уравнения (178) в этой системе функций таковы

$$Z_n' = \frac{\rho}{\lambda E_n}\left[(4\omega^2 - \sigma^2)\psi - R - HW'\right]_n - \frac{2}{r}Z_n + \frac{n(n+1)}{r^2}\psi_n;$$

$$\psi_n' = \left(\frac{\rho^2 W'}{\lambda} - \rho'\right)\left[(4\omega^2 - \sigma^2)\psi - R - HW'\right]_n \frac{1}{(4\omega^2 - \sigma^2)r} + Z_n. \qquad (182)$$

Уравнение Пуассона будет иметь вид

$$R_n'' + \frac{2}{r}R_n' - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n = 4\pi G\left[\frac{\rho^2}{\lambda}((4\omega^2 - \sigma^2)\psi - \right.$$

$$\left. - R - HW')_n + \rho' H\right]. \qquad (183)$$

Уравнения (182) и (183) после исключения H_n с помощью (181), определяют ψ_n, R_n, Z_n, а затем H_n, R_n, $N_n = \Lambda_n\lambda$, $L_n = r^2(R_n' - 4\pi\rho G H_n)$. Функции H_n, L_n, N_n, R_n входят в самосопряженные дифференциальные уравнения. Определив ψ_n и Z_n как функции H_n и N_n, можно выразить сопряженные с ними функции через H_n и N_n.

§ 9. Влияние малых нарушений сферической симметрии строения Земли на ее упругие колебания

Теория упругих приливов и свободных колебаний разработана для Земли, строение которой сферически симметрично, а граничные условия имеют простейший вид. Малые отклонения от сферы поверхностей равных модулей упругости λ и μ и плотности ρ, а также граничных поверхностей можно учесть методом возмущений[1] [3]. Такие расчеты, основанные на использовании свойств самосопряженности уравнений в частных производных в интегральной форме, проведены, в частности, в указанных работах, а также в [5]. Ниже предложен другой подход к решению тех же задач, основанный на анализе общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При простейшем колебании, когда граничные условия зависят от времени через множитель τ (14), уравнения упругих колебаний в частных производных приведены к системе

[1] *Жарков В. Н., Любимов В. М.* Теория крутильных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. Известия АН СССР. Физика Земли, 1970, № 2, с. 3—14. *Жарков В. Н., Любимов В. М.* Теория сфероидальных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. Известия АН СССР. Физика Земли, 1970, № 10, с. 3—12.

уравнений, в которую как параметры входят σ, m и n. Наиболее удобна система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой неизвестными являются функции, сохраняющие непрерывность при разрывах λ, μ, ρ, а именно функции H, R, S, T_{n-1}, T_{n+1}, описывающие смещения и изменения потенциала, и функции L, M, N, $\mu\left(\frac{T_{n-1}}{r}\right)'$, $\mu\left(\frac{T_{n+1}}{r}\right)'$, описывающие напряжения и изменение притяжения.

Замена исходных уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений возможна не только при полной сферической симметрии Земли. Такая замена возможна при простейшем колебании на части сферы, если только на ней производные от λ, μ, ρ по полярному расстоянию ϑ и долготе φ равны нулю. Если сфера разделена на части и в каждой части получены обыкновенные дифференциальные уравнения, то их решения должны быть согласованы условиями непрерывности напряжений, потенциала притяжения, смещений и притяжения. Простейшим является случай, когда в малой заданной области функция μ изменена на малую величину β, которая не зависит от ϑ и φ. Функция β может быть не малой, если отлична от нуля в малой области. Тогда такое изменение μ, λ, ρ приведет к малому изменению функций, характеризующих колебание. Общий случай с мало измененными λ, μ, ρ приведет к малому изменению характера колебаний и представится суммой простейших изменений. Упрощение задачи достигнуто возможностью заранее указать вид решения.

Будем искать изменение функций Y_i, описывающих простейшее колебание с параметрами σ, m, n. Эти функции являются решением системы уравнений

$$Y_i'=\sum\alpha_{ij}Y_j \tag{184}$$

В этой системе непрерывных функций коэффициенты α_{ij} не содержат производных от λ, μ, ρ. Возмущения коэффициентов в простейшем случае приняты равными $\beta(\vartheta_0, \varphi_0)\alpha_{ij}$, функции $\beta(\vartheta_0, \varphi_0)$ постоянны в каждой выделенной области, но меняются от области к области (разрывны по ϑ_0 и φ_0 на границах областей). Пусть Z_i — возмущения функции Y_i, тогда уравнения с возмущениями таковы

$$(Y_i+Z_i)'=\sum\alpha_{ij}(Y_j+Z_j)+\beta\sum\alpha_{ij}Y_j. \tag{185}$$

Произведения $\alpha_{ij}\beta Z_j$ как малые второго порядка опущены. Из (184) и (185) получаем

$$Z_i'=\sum\alpha_{ij}Z_j+\beta\sum\alpha_{ij}Y_j. \tag{186}$$

В функциях Y_i в граничных условиях (как в коэффициентах) выделяем слагаемые, пропорциональные β. Тогда условия на границах $r=a$ (поверхность Земли) и $r=b$ (граница ядра) приобретают вид

$$Y_i(a,\,\vartheta,\,\varphi)=A_i+a_i\beta(\vartheta_0,\,\varphi_0);\quad Y_i(b,\,\vartheta,\,\varphi)=B_i+b_i\beta(\vartheta_0,\,\varphi_0). \tag{187}$$

Коэффициенты a_i и b_i могут быть нулями, но в A_i и B_i хотя бы один коэффициент предполагаем отличным от нуля (чтобы существовало невозмущенное колебание). Уравнения (186) и условия (187) допускают решение вида

$$Y_i(r,\,\vartheta_0,\,\varphi_0)=Y_i(r)+\beta(\vartheta_0,\,\varphi_0)Z_i(r). \tag{188}$$

Уравнения и граничные условия, полученные после подстановки (188) в (186) и (187), должны быть удовлетворены при всех ϑ_0 и φ_0. Это возможно, если $Y_i(r)$ и $Z_i(r)$ определены из решения граничных задач:

1) уравнений (184) с условиями

$$Y_i(a)=A_i;\quad Y_i(b)=B_i; \tag{189}$$

2) уравнений (186), в которых Y_i теперь известны, с условиями

$$Z_i(a)=a_i;\quad Z_i(b)=b_i. \tag{190}$$

Допустим возмущения λ, μ, ρ отсутствуют, но границы мало отличаются от сферы. Пусть

$$r(a,\,\vartheta,\,\varphi)=a+\zeta\beta(\vartheta,\,\varphi);\quad r(b,\,\vartheta,\,\varphi)=b+\eta\beta(\vartheta,\,\varphi). \tag{191}$$

При малых ζ и η, из (191) с решением вида (188) получаем

$$Y_i(a+\zeta\beta(\vartheta,\,\varphi))=Y_i(a)+\zeta\beta(\vartheta,\,\varphi)\,Y_i'(a)=Y_i(a)+\beta(\vartheta,\,\varphi)\,Z_i(a);$$

$$Y_i(b+\eta\beta(\vartheta,\,\varphi))=Y_i(b)+\eta\beta(\vartheta,\,\varphi)\,Y_i'(b)=Y_i(b)+\beta(\vartheta,\,\varphi)\,Z_i(b).$$

Отсюда выводим граничные условия:

1) для уравнений (184)

$$Y_i(a)=A_i;\quad Y_i(b)=B_i; \tag{192}$$

2) для уравнений (186) при $\alpha_{ij}=0$

$$\zeta Y_i'(a)=a_i;\quad \eta Y_i'(b)=b_i. \tag{193}$$

В (193) $Y_i'(a)$ и $Y_i'(b)$ известны из решения задачи с условиями (192). Формулы (189), (190) и (192), (193) выражают соблюдение граничных условий и непрерывность функций Y_j и Z_j по r. Непрерывность по ϑ и φ может быть соблюдена ценой замены $\beta(\vartheta_0,\,\varphi_0)$ функций $\beta(\vartheta,\,\varphi)$, непрерывно переходящей в ее значения в соседней области внутри узкой зоны, включающей границу областей. Заранее можно ожидать, что такая замена мало изменит решение вне такой узкой зоны при n не очень больших. Решение в узкой зоне зависит от первых и вторых производных переходной функции $\beta(\vartheta,\,\varphi)$.

§ 10. Упругие колебания вращающейся Земли с жидким вязким ядром

Уравнения колебания жидкого вращающегося ядра с малой вязкостью можно получить из обычных уравнений сфероидальных упругих колебаний включением в инерционные члены сил Кориолиса и заменой модуля сдвига оператором $\nu\frac{\partial}{\partial t}$, где ν — коэффициент вязкости. Силы Кориолиса повышают порядок дифференциальных уравнений с шестого до десятого, а вязкость вызывает сдвиг фазы колебания, зависящий от глубины в разной степени для разных функций, а это приводит к удвоению порядка уравнений, т. е. к двадцатому порядку. Но при достаточно малой вязкости, система уравнений распадается на отдельные системы не выше четвертого порядка.

Чтобы убедиться в этом, преобразуем уравнения упругих колебаний, выделив в них слагаемые, меняющие знак на малом интервале глубин порядка $\mu/\rho g$. Такие слагаемые входят в функции, зависящие от тангенциальных компонент смещения, и при численном интегрировании уравнений потребовали бы уменьшения шага до малой величины, стремящейся к нулю вместе с μ. Выделим эти слагаемые, преобразуя уравнения колебаний к новой системе функций.

Исходим из уравнений (89), дополнив ее уравнениями, включающими силы Кориолиса, как это описано в § 7. Таким образом, за исходную принимаем систему уравнений, выраженных в функциях Φ, H, P, S, L, R, T_{n-1}, T'_{n-1}, T_{n+1}, T'_{n+1} с коэффициентами, зависящими от плотности ρ и коэффициентов упругости Ламе μ и $(\lambda+2\mu)$. Выразим H, R, S через X, Y, Z

$$S+\frac{P'}{\rho\sigma^2}=X; \qquad (194)$$

$$H+\frac{P}{\rho\sigma^2 r^2}=Y; \qquad (195)$$

$$R+HW'+\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Lambda=Z. \qquad (196)$$

Из (194) и (195) имеем

$$\rho' H+\Lambda\rho=\rho' Y+\rho\left(Y'+\frac{2}{r}Y-\frac{1}{r^2}X\right). \qquad (197)$$

В уравнение

$$S'=n(n+1)H+\frac{P}{\mu}$$

вводим H и S из (194) и (195) и получаем

$$\left(\frac{\bar{P}'}{\rho\sigma^2}\right)'+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{n(n+1)}{\rho\sigma^2 r^2}\right)\bar{P}=0, \tag{198}$$

где

$$\bar{P}=P+\mu\left(S'_0-n(n+1)H_0\right).$$

Множители при μ с нулевым индексом, здесь и везде далее определены из приближения $\mu=0$, считаем их известными. В (194)—(196) входит правильное решение уравнения (198). Уравнение (88) для Φ' и P', после введения сил Кориолиса заменой $\sigma^2\rho S$ и $\sigma^2\rho H$ на $\sigma^2\rho\tilde{S}$ и $\sigma^2\rho\tilde{H}$, запишем следующим образом

$$Z'+\sigma^2(Y-\bar{H})-\frac{2\mu'}{\rho}\left(2H-\frac{S}{r}\right)+\epsilon\Lambda=0; \tag{199}$$

$$Z+\frac{\sigma^2}{n(n+1)}(X-\bar{S})-\frac{2\mu'}{\rho}\left(\frac{S}{n(n+1)}-Hr\right)=0, \tag{200}$$

где

$$\epsilon=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\rho'}{\rho}-W'.$$

Функции $\bar{H}=\tilde{H}-H$ и $\bar{S}=\tilde{S}-S$ содержат силы Кориолиса

$$-\rho\sigma^2\bar{H}_n=\frac{n+1}{2n+1}\Psi_{n+1}+\frac{n}{2n+1}\Psi_{n-1};$$

$$-\rho\sigma^2\bar{S}_n=\frac{n(n+1)}{2n+1}r\left(\Psi_{n+1}-\Psi_{n-1}\right).$$

Функции Ψ_{n-1} и Ψ_{n+1} определены (142). При оценке влияния вязкости примем $\mu'=0$, ϵ и μ малыми. Из (200) определяем $X-\bar{S}$, из (199) и (200) при $\sigma\neq 0$ определяем $(X-S)'$

$$(X-\bar{S})\frac{\sigma^2}{n(n+1)}+R+\frac{W'}{\rho'}(\Lambda\rho+\rho' H)+\frac{\epsilon\rho}{\rho'}\Lambda=0; \tag{201}$$

$$(X-\bar{S})'-n(n+1)(Y-\bar{H})-\frac{n(n+1)}{\sigma^2}\epsilon\Lambda=0. \tag{202}$$

К уравнениям (201) и (202) присоединяем уравнение Пуассона, в котором используем (201)

$$R''+\frac{2}{r}R'-\frac{n(n+1)}{r^2}R-4\pi G\frac{\rho'}{W'}\left[\frac{\sigma^2}{n(n+1)}(X-\bar{S})+R+\frac{\epsilon\rho}{\rho'}\Lambda\right]=0. \tag{203}$$

Уравнения (201)—(203), а также (197) определяют X', Y', R''. Представим эти уравнения через малые функции u_1, u_2, u_3:

$$u_1 = (X - \bar{S}) - (X - \bar{S})_0; \quad u_2 = Y - Y_0; \quad u_3 = R - R_0. \tag{204}$$

Из (201), (202), (197) и (203) получаем систему уравнений

$$u_1' - n(n+1)u_2 = \frac{n(n+1)}{\sigma^2}\epsilon\Lambda + n(n+1)(\bar{H} - H_0) = 0;$$

$$u_2' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\rho'}{\rho}\right)u_2 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\rho'}{\rho W'}\left(u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)}u_1\right) = \frac{\bar{S} - \bar{S}_0}{r^2} - \frac{\epsilon\Lambda}{W'};$$

$$u_3'' + \frac{2}{r}u_3' - \frac{n(n+1)}{r^2}u_3 - \frac{4\pi G\rho'}{W'}\left(u_3 + \frac{\sigma^2}{n(n+1)}u_1\right) = 4\pi G\epsilon\Lambda\frac{\rho}{W'}. \tag{205}$$

Пусть правые части уравнений (205) ошибочны на величину $\alpha_i(r)$ и для всех номеров i уравнений и переменной r

$$\int_0^r [\alpha_i(r)]^2\, dr = (\alpha_i^2)_{\text{ср}} r, \tag{206}$$

где α_i — малая величина. Тогда решение уравнений (205) ошибочно на величину $\alpha_i u_i$, где

$$\int_0^r u_i^2(r)\, dr = (u_i^2)_{\text{ср}} r.$$

Здесь $u_i(r)$ — решения уравнений, сопряженных с однородными уравнениями, получаемыми из (205). Таким образом, вместо точных решений уравнений можно использовать приближенные решения, полученные при условии (206), а уравнения упростить, воспользовавшись тем, что дифференцирование по r вводит большой множитель порядка $\sigma\sqrt{\rho/\mu}$.

Правые части в (205) можно выразить через

$$\delta\Psi_{n-1} = \Psi_{n-1} - (\Psi_{n-1})_0 \quad \text{и} \quad \delta\Psi_{n+1} = \Psi_{n+1} - (\Psi_{n+1})_0.$$

Функции Ψ_{n-1} и Ψ_{n+1} определены выражениями (142), в которые следует ввести (194), (195) и (204). Получаем

$$\delta\Psi_{n+1} = \rho\sigma^2\frac{a_n}{b_n}\left[\frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(n+2) + m^2}\delta T_{n+1} + \frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r} + u_2 - \frac{u_1}{(n+1)r} + \right.$$

$$\left. + \frac{P}{\rho\sigma^2 r^2} + \frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{\rho\sigma^2}(\delta\Psi_{n+1} - \delta\Psi_{n-1})\right]. \tag{207}$$

Аналогично

$$\delta\Psi_{n-1} = \rho\sigma^2\frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\left[\frac{n^2 - m^2}{n(n-1) + m^2}\delta T_{n-1} - \frac{P'}{n\rho\sigma^2 r} + \frac{P}{\rho\sigma^2 r} + u_2 + \frac{u_1}{nr} - \right.$$

$$\left. - \frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{\rho\sigma^2}(\delta\Psi_{n-1} - \delta\Psi_{n+1})\right]. \tag{208}$$

Функции δT_{n-1} и δT_{n+1} связаны уравнениями

$$f_{n-1}(\delta T_{n-1}) = \delta\Psi_{n-1}; \quad f_{n+1}(\delta T_{n+1}) = \delta\Psi_{n+1}, \tag{209}$$

где

$$f_n(\delta T_n) = \mu\left(\frac{\partial^2 \delta T_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \delta T_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\delta T_n\right) + \rho\sigma^2 \delta T_n.$$

Исключив из этих уравнений $\delta\Psi_{n-1}$ и $\delta\Psi_{n+1}$, будем иметь два уравнения для определения δT_{n-1} и δT_{n+1}.

При достаточно малых μ воспользуемся близостью уравнений (209) к уравнению (198), так как главные члены этих уравнений можно привести к уравнению вида

$$\bar{P}'' + \left(\frac{\rho\sigma^2}{\mu} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\bar{P} = 0.$$

Ранее принято $\mu' = 0$, поэтому $\bar{P}'' \gg \bar{P}' \gg \bar{P}$. Тогда (209) можно записать

$$\delta T''_{n+1} + \left(\frac{\rho\sigma^2}{\mu} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\delta T_{n+1} = \frac{1}{\mu}\delta\Psi_{n+1}.$$

Это уравнение, а также уравнения (207) и (209), удовлетворяющиеся при значениях

$$\delta\Psi_{n+1} = \frac{a_n}{b_n}\left(\frac{P}{r^2} + \frac{n}{2n+1}\delta\Psi_{n+1} - \frac{n}{2n+1}\delta\Psi_{n-1}\right);$$

$$\delta\Psi_{n-1} = \frac{a_{-n-1}}{b_{-n-1}}\left(\frac{P}{r^2} + \frac{n+1}{2n+1}\delta\Psi_{n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\delta\Psi_{n+1}\right);$$

$$-\delta T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)^2 - m^2}\,\frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r}, \tag{210}$$

определяют главные члены в δT_{n+1} и $\delta\Psi_{n+1}$. Это приближение отражает характер всех функций при малых величинах μ.

Амплитуды $\delta\Psi_{n-1}$ и $\delta\Psi_{n+1}$ стремятся к нулю вместе с μ, как P, амплитуды колеблющихся слагаемых в u_1, u_2, u_3 убывают еще быстрее. Таким образом, уравнение (205) и условие непрерывности H, R, $R' + 4\pi\rho G H$ на границе ядра определяют u_1, u_2, u_3 и с их помощью функции

$$H = H_0 - \frac{P}{\rho\sigma^2 r^2} + u_2; \quad R = R_0 + u_3;$$

$$S = S_0 - \frac{P'}{\rho\sigma^2} + (\bar{S} - \bar{S}_0) + u_1;$$

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{\rho'}{\rho W'}\left(u_3 + u_2 W' + \frac{\sigma^2}{n(n+1)}u_1\right);$$

$$\mathrm{T}_{n-1}=(\mathrm{T}_{n-1})_0+\frac{n(n-1)+m^2}{n^2-m^2}\frac{P'}{n\rho\sigma^2 r};$$

$$\mathrm{T}_{n+1}=(\mathrm{T}_{n+1})_0-\frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)^2-m^2}\frac{P'}{(n+1)\rho\sigma^2 r}.$$

Функции S, T_{n-1}, T_{n+1} разрывны при $\mu=0$ и не устойчивы при малых μ. Функции Λ, H, R устойчивы.

Полученные результаты применим к жидкому слабо вязкому ядру, заменив μ оператором $\nu\frac{\partial}{\partial t}$, и добавив функции, определяющие сдвиг фазы. Тогда каждая из функций получит две компоненты. Например, H будет выражена так:

$$\tau H=\tau_c H_c(r)+\tau_s H_s(r);$$

$$\tau_c=\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)\cos(\sigma t-m\varphi);\quad \tau_s=\mathrm{P}_n^m(\cos\vartheta)\sin(\sigma t-m\varphi);$$

число уравнений также удвоится.

На малом интервале глубины $(b-r)$, принимая $\mu'=\rho'=0$, из (198) получаем

$$\nu\bar{P}_c''+\rho\sigma^2\bar{P}_s=0;\quad \nu\bar{P}_s''-\rho\sigma^2\bar{P}_c=0.$$

Исключение $\bar{P}_s$ приводит к уравнению

$$\frac{d^4P_c}{dr^4}+\left(\frac{\rho\sigma^2}{\nu}\right)^2\bar{P}_c=0.$$

На том же интервале глубин решение представим следующим образом:

$$\bar{P}_c(r)=e^{-h}\left[\bar{P}_c(b)\cos h+\bar{P}_s(b)\sin h\right];$$

$$\bar{P}_s(r)=e^{-h}\left[\bar{P}_s(b)\cos h-\bar{P}_c(b)\sin h\right], \tag{211}$$

где $h=(b-r)\sigma\sqrt{\frac{\rho}{\nu}}$.

Теперь из (210) и (198) определяем $(\delta\Psi_{n+1})_c$ и $(\delta\Psi_{n+1})_s$

$$(\delta\Psi_{n+1})_c=-\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{1}{r^2}\left[\bar{P}_c-\nu\sigma\left(S_0'-n(n+1)H_0\right)_s\right];$$

$$(\delta\Psi_{n+1})_s=-\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{1}{r^2}\left[\bar{P}_s+\nu\sigma\left(S_0'-n(n+1)H_0\right)_c\right].$$

Функции $(\delta\Psi_{n-1})_c$ и $(\delta\Psi_{n-1})_s$ можно получить из написанных формул заменой n на $-(n+1)$. При малых величинах h в этих формулах главными являются члены с $\bar{P}_c$ и $\bar{P}_s$. При возрастании h главными становятся вторые члены. Они определяют диссипацию энергии внутри вращающегося ядра.

При колебании с параметрами $n=2$, $m=1$ в решение включается нутация оси вращения Земли с амплитудой ε. Из-за вязкости возникает сдвиг фазы кинетического момента с амплитудами ε_c и ε_s. Обе компоненты определены условием сохранения кинетического момента.

§ 11. Строение Земли по частотам свободных колебаний

Система функций y_i, определяемых уравнениями

$$y_i'=\Sigma a_{ij}y_j, \tag{212}$$

характеризует упругое колебание Земли. Коэффициенты a_{ij} зависят от плотности ρ и модулей упругости μ и $\lambda+2\mu$, заданных в функции r — расстояния до центра Земли с сферически симметричным строением. В a_{ij} как параметры входят σ, n, m, определяющие частоту и тип колебания.

Пусть уравнения (212) интегрированы дважды при исходных величинах μ_0, $(\lambda+2\mu)_0$, ρ_0, σ_0 и при слегка измененных величинах $\mu=\mu_0+\delta\mu$; $\lambda+2\mu=(\lambda+2\mu)_0+\delta(\lambda+2\mu)$; $\rho=\rho_0+\delta\rho$; $\sigma=\sigma_0+\delta\sigma$ и дважды вычислен определитель, выражающий совместность однородных граничных условий при $r=1$ (на земной поверхности). Определитель D обращается в нуль, если $\sigma_0=\sigma(\rho_0, \mu_0, \lambda_0)$ или $\sigma_0+\delta\sigma=\sigma(\mu+\delta\mu, \lambda+\delta\mu, \rho+\delta\rho)$ являются частотами свободных колебаний. Если $D=0$, то из (152) получаем

$$\int_0^1 \sum_i \sum_j \delta a_{ij}y_iz_j dr=0, \tag{213}$$

где

$$z_i'=-\sum_j\left(a_{ji}+\delta a_{ji}\right)z_j.$$

Если $\delta\mu$, $\delta(\lambda+2\mu)$, $\delta\rho$ малы, то малы и δa_{ij}, а z_j будут близки к $\bar{y}_j$. От замены в (213) z_j на $\bar{y}_j$ возникает ошибка порядка квадрата малых величин. После такой замены из (213) следует

$$\int_0^1 \sum_i \sum_j \delta a_{ij}y_i\bar{y}_j dr=\int_0^1 \sum_j \bar{y}_j\delta y_j' dr=0.$$

Для системы (212) удобна система функций Φ, H, L, P, R, S, X_{n-1}, X_{n+1}, Y_{n-1}, Y_{n+1}, в которой получены простые выражения для сопряженных функций $\bar{\Phi}$, $\bar{H}$, $\bar{L}$, $\bar{P}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{X}_{n-1}$, $\bar{X}_{n+1}$, $\bar{Y}_{n-1}$, $\bar{Y}_{n+1}$. Четыре функции Y_i и $\bar{Y}_i$ являются чисто мнимыми, но окончательный результат получается действительным. Используя (154) и (155), запишем

$$\Sigma \bar{y}_j \delta y_j' = Hr^2\delta\Phi' - \Phi r^2 \delta H' + \frac{S}{n(n+1)}\delta P' - \frac{P}{n(n+1)}\delta S' + \frac{R}{4\pi G}\delta L' -$$

$$- \frac{L}{4\pi G}\delta R' - \mu r^2 \left(X_{n-1}\delta Y_{n-1}' + X_{n+1}\delta Y_{n+1}'\right). \tag{214}$$

Вводим в (214) δa_{ij} из системы уравнений десятого порядка и получаем

$$\Sigma \bar{y}_j \delta y_j' = b_1\delta\sigma + b_2\delta\rho + b_3\delta\left(r^2 W'\right) + b_4\delta(\lambda+2\mu) + b_5\delta\mu + b_6\delta\mu' +$$

$$+ b_7\delta\frac{\mu'}{\mu} + b_8\delta\frac{\rho}{\mu}. \tag{215}$$

Здесь

$$b_1 = \rho\frac{\partial b_2}{\partial\sigma};\quad b_2 = -\sigma^2\left(H\tilde{H}r^2 + \frac{S\tilde{S}}{n(n+1)} + p^2 T_{n+1}\tilde{T}_{n+1} + q^2 T_{n-1}\tilde{T}_{n-1}\right) -$$

$$-2RS - HL;$$

$$b_3 = \frac{\rho}{r^2}\left(4rH^2 - 2HS\right);\quad b_4 = \frac{\Phi^2 r^2}{(\lambda+2\mu)^2};$$

$$b_5 = \frac{P^2}{n(n+1)\mu^2};\quad b_6 = 4\left(HS - H^2 r - \frac{S^2}{2n(n+1)r}\right);$$

$$b_7 = -\mu r^2 X_{n-1}\left(\frac{X_{n-1}}{r}\right)' - \mu r^2 X_{n+1}\left(\frac{X_{n+1}}{r}\right)';$$

$$b_8 = \sigma^2\left(X_{n-1}\tilde{X}_{n-1} + X_{n+1}\tilde{X}_{n+1}\right), \tag{216}$$

слагаемые с b_7 и b_8 введены для упрощения записи вариаций $\delta Y_{n-1}'$ и $\delta Y_{n+1}'$. В (213) вводим (215) и (216). После этого слагаемые с $\delta\mu'$ и $\delta(r^2W')'$ интегрируем по частям и выразим через $\delta\mu$ и $\delta\rho$. Все функции b_i действительны, поскольку действительны T_{n-1} и T_{n+1}. Из полученного таким образом выражения определяем $\delta\sigma_j$

$$\delta\sigma_j = \int_0^1 \left(A_j\delta\rho + B_j\delta\mu + C_j\delta(\lambda+2\mu)\right)dr. \tag{217}$$

Из наблюдений определены более тысячи свободных колебаний σ_j, а затем вычислены $\delta\sigma_j$, при разных величинах σ, n и m. По этому материалу Дзевонским и Гильбертом [6, 7] построены модели Земли 1066А и 1066В, очень близкие по частотам свободных колебаний, но заметно различающиеся по скоростям сейсмических волн.

Определение трех функций $\delta\rho$, $\delta\mu$ и $\delta(\lambda+2\mu)$ только из условий вида (217) при современной (хотя и довольно высокой) точности наблюдений едва ли возможно. Поэтому будем считать скорости сейсмических волн известными и не подлежащими изменению. Тогда

$$\delta\left(\frac{\mu}{\rho}\right)=\delta\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)=0. \tag{218}$$

Используя эти условия, выражаем в (217) $\delta\mu$ и $\delta(\lambda+2\mu)$ через $\delta\rho$ и получаем

$$\delta\sigma_j=\int\limits_0^1 G_j(r)\,\delta\rho(r)\,dr. \tag{219}$$

Еще в сороковых годах этого века при определении $\delta\rho$ использовали только четыре условия типа (219), а именно условия, связанные с массой Земли, ее моментом инерции и двумя числами Лява, определяемыми по земным приливам. Границу разрыва модулей упругости и плотности считали известной. Может создаться впечатление, что теперь строение Земли можно определить независимо от каких-либо допущений относительно вида функций $\delta\rho$. Однако при использовании условий вида (219) необходимо допустить, что мало не только $\delta\rho$, но и $(\delta\rho)'$. Без этого условия можно получить точное решение, но с очень большими колебаниями $\delta\rho$, явно фиктивными.

В ядре Земли принимаем $\mu=0$. Тогда $P_n=\tilde{T}_{n-1}=\tilde{T}_{n+1}=0$, порядок системы уравнений снижается до четвертого, коэффициенты (216) будут выражены через H, L, R, S.

Искомую функцию $\delta\rho$, удовлетворяющую условиям вида (219) представим суммой

$$\delta\rho=\sum_{j=1}^{j=n} b_j G_j, \tag{220}$$

функции G_j известны, b_j — искомые коэффициенты. Условия (219) приводят к системе алгебраических уравнений

$$\sum_1^n K_{ij} b_j=\delta\sigma_j;\quad K_{ij}=\int\limits_0^1 G_i G_j\,dr. \tag{221}$$

Исследование и решение системы (221) будет упрощено, если G_j заменить системой взаимно ортогональных на интервале $0\leqslant r\leqslant 1$ функций Y_i, приняв

$$G_j=\sum_{i=1}^{i=j} a_{ij} Y_i;\quad Y_1=G_1.$$

Из условий ортогональности

$$\int_0^1 Y_i Y_j dr = 0; \quad \int_0^1 Y_i^2 dr \neq 0$$

последовательно можно определить все коэффициенты a_{ij} и все функции Y_i. Теперь можно использовать более простое решение

$$\delta\rho = \sum_1^n a_i Y_i. \tag{222}$$

Коэффициенты a_i определены системой уравнений

$$\sum_1^j a_i a_{ij} \bar{Y}_i^2 = \delta\sigma_j; \quad \bar{Y}_i^2 = \int_0^1 Y_i^2 dr. \tag{223}$$

Их нужно вычислять последовательно, один за другим. Если функция $\bar{Y}_j$ близка к нулю, то функция $\delta\rho$ будет неустойчивой и заметно изменяться при малом изменении $\delta\sigma_j$. В этом случае $\delta\sigma_j$ приближенно (или точно при $\bar{Y}_j^2 = 0$) можно представить линейной функцией $\delta\sigma_i\,(i<j)$, а определитель системы (220) будет мал (или равен нулю). Исключив из (223) все уравнения с малыми $\bar{Y}_j^2$, можно от (223) вернуться к системе (220) с исключенными условиями, вносящими неустойчивость решения, а от решения (222) к решению (220). При изменении порядка, в котором расположены условия и соответствующие им частоты, будут получены решения, отличные только нумерацией функций G_j. Таким образом, если исключены условия, вносящие в решение неустойчивость, не оправданную ошибками определения частоты, то устойчивое решение (222) не зависит от способа построения системы ортогональных функций, хотя системы функций могут быть совсем разными. Усложнение решения способом построения ортогональных функций с наибольшими нормами, приводящим к необходимости решать уравнение высокой степени (так называемое «вековое» уравнение) не нужно.

Определив $\delta\rho$, можно попытаться определить $\delta\mu$, исходя вместо двух условий (218) из условия

$$\delta\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = 0.$$

Тогда из (217) получим

$$\delta\sigma_j - \int_0^1 A_j \delta\rho dr = \int_0^1 \left(B_j + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} C_j\right) \delta\mu dr.$$

Здесь левые части известны. Далее поступаем, как при определении $\delta\rho$. Уравнения, исключенные из-за малости $\bar{Y}_i^2$, при этом окажутся полезными. Это приведет к исправлению скоростей сейсмических волн.

В работе Дзевонского и Гильберта [7] отклонения вычисленных частот от наблюдаемых заметно меньше ошибок определения частот из наблюдений. Поэтому создается впечатление, что полученные ими модели строения Земли несут на себе фиктивные детали, происходящие от ошибок определения частот. Намеченные здесь отбор и исключение неустойчивых условий позволят освободиться от этих нереальных флюктуаций плотности ρ и лучше использовать исключительную по ценности информацию о строении Земли по частотам свободных колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрев движение планетарной жидкой массы, подверженной только силе взаимного тяготения и одинаковому давлению на поверхности. Пицетти[1] отметил, что единственное движение этой массы как твердого тела в этом случае есть равномерное вращение около неизменной оси. Изменение угловой скорости ведет к нарушению состояния равновесия и возникновению течений вещества внутри планеты, что в свою очередь может вызывать и поддерживать как горизонтальные, так и вертикальные движения точек земной поверхности.

Принято считать, что изменение скорости вращения Земли приводит к изменению земного сжатия и среднего значения силы тяжести на земной поверхности. Это суждение основано на теории вращения планетарной массы, вращающейся в равновесии. Основы ее заложены Ньютоном и Клеро, развита она главным образом Ляпуновым.

Более общий подход к той же задаче изложен Л. Лихтенштейном[2]. Он исходил из начальной конфигурации при некоторой скорости вращения, принимая, что эта начальная конфигурация близка к равновесному состоянию. Для Земли этот факт надежно подтверждается астрономическими, геодезическими и геофизическими наблюдениями и положен в основу геологических представлений о строении Земли. Напряжения сдвига внутри Земли рассасываются (релаксируют) поэтому интенсивность современных землетрясений мала по сравнению с той, которая была бы при отсутствии релаксации. Л. Лихтенштейн поставил вопрос об изменении гравитационного поля Земли при малом медленном изменении скорости вращения до некоторого другого ее значения. При этом происходит изменение состояния Земли от первого равновесного до второго, тоже равновесного, сила тяжести изменяется в точках земной поверхности на малую величину. Ее нужно определить в зависимости от распределения силы тяжести на поверхности Земли и в соответствии с предположением о состоянии вещества внутри Земли. Для решения этой задачи Лихтенштейн получил

---

[1] *Пицетти П.* Основы механической теории фигуры планет/Перевод А. А. Михайлова с итальянского издания 1913 г.— М.— Л.: Государственное технико-теоретическое издательство.

[2] *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости/Перевод В. К. Абалакина с немецкого издания 1933 г.— М.: Наука, 1965 г.

интегральное уравнение, которое до сих пор не использовано. Его результат изложен в монографии математического, а не геофизического характера.

Изложенное выше в значительной части по существу составляет взгляды автора на пути решения задачи Лихтенштейна, на основе общей теории упругих колебаний Земли. При изменении скорости вращения внутри Земли (от поверхности до центра) возникают сложные движения, только часть которых можно представить как изменение угловой скорости, т. е. как вращение твердого тела. Смещения, описываемые вращением твердого тела, полностью учтены, поскольку уравнения составлены в подвижной системе координат, которая вращается с угловой скоростью, зависящей от времени, вокруг оси, мало меняющей направление в пространстве. При известном характере этого движения в уравнение колебаний входят только параметры, полностью определяющие движение. При изменении модуля вектора угловой скорости этим параметром является производная от угловой скорости по времени, при изменении направления упомянутого вектора в пространстве (нутации) — компоненты этого вектора по двум координатным осям. Эти величины можно найти из дополнительных условий, определяющих выбор подвижной системы координат. Этот простейший эффект усложнен наложением на него упругих смещений внутри Земли, более сложных, но вполне закономерных, если определять их на основе закона Гука.

В целом задача много проще, чем может показаться на первый взгляд, так как характер движений внутри Земли при неизменной скорости вращения довольно хорошо изучен. Известно, что колебания с малыми периодами быстро затухают, а охватывающие всю Землю (процессия, нутация, вековое замедление земного вращения) выделены, их можно изучать отдельно так же, как смещения Северного и Южного полюсов. Внутреннее строение Земли (распределение плотности, модулей упругости Ламе) в течение последних лет детально изучено. Точность измерений времени, силы тяжести, деформаций земной поверхности быстро возрастает.

Современный обзор состояния измерительной техники, результатов наблюдений и теории содержится в книге Морица и Мюллера [9].

Если внутри Земли возникают движения, то только некоторые из них могут повлиять на изменение вращения ее в целом как твердого тела.

Отдельно должны быть рассмотрены движения, происходящие вблизи поверхности Земли и подчиненные более сложным закономерностям (осадки, разрушение гор и вынос продуктов разрушения реками на дно морей и океанов, сезонные изменения в циркуляции атмосферы, а также циклоны, тайфуны, ураганы, приливы в океанах, землетрясения, результаты деятельности человека). Внутри же Земли нужно выделить наиболее крупные глубинные землетрясения, связанные с источниками меняющихся со временем упругих напряжений.

Исключив эти явления, движения внутри Земли можно представить уравнениями теории упругости с указанными выше дополнениями и упрощениями.

Необходимо определить силы, вызывающие колебание (притяжение Луны и Солнца на поверхностные силы — давление на поверхность Земли, тангенциальные силы, возникающие от ветровой нагрузки на горы, леса, поля). Все эти воздействия на Землю входят в решение задачи через граничные условия.

Когда свободные колебания известны, колебания на любой частоте можно представить суммой колебаний на нулевой частоте и на частотах свободных колебаний. Таким образом, не требуется интегрировать уравнение на всех частотах (от нуля до бесконечности, хотя в решение в общем случае войдут все частоты).

Упрощение результата достигнуто выбором типа искомого решения, при котором не приходится вычислять интегралы от произведения трех сферических функций.

Результаты можно использовать для выделения той части изменения гравитационного поля, которую можно объяснить изменением скорости вращения Земли. Было бы интересно сопоставить полученное решение с результатом Лихтенштейна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молоденский М. С.* Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. Труды Геофизического института № 19(146) — М.: Изд-во АН СССР, 1953, с. 3—52.

2. *Молоденский М. С., Крамер М. В.* Земные приливы и нутация Земли.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.

3. *Молоденский С. М.* О влиянии горизонтальных неоднородностей мантии на амплитуды приливных волн. Известия АН СССР. Физика Земли, 1977, № 2, с. 3—8.

4. *Молоденский С. М.* О связи чисел Лява с нагрузочными коэффициентами. Известия АН СССР. Физика Земли, 1977, № 3, с. 3—7.

5. *Молоденский С. М., Крамер М. В.* Влияние крупномасштабных горизонтальных неоднородностей мантии на земные приливы. Известия АН СССР. Физика Земли, 1980, № 1, с. 3—20.

6. *Dziewonski A. M., Gilbert F.* 1972. Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquake of 1964 March 28. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, v. 27, N 4, 393—446.

7. *Dziewonski A. M., Gilbert F.* 1973. Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquake of 1964 March 28—11. Further remarks based on new spheroidal overtone data. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, v. 35, N 4, 401—437.

8. *Luh P. C.* 1974. Normal modes of rotating, self-gravitating inhomogeneous Earth. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, v. 38, N 1, 187—224.

9. *Moritz H., Mueller I. I.* 1987. Earth rotation. Theory and observation. New York. The Ungar Publishing Company, 617 pp.

СОДЕРЖАНИЕ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Молоденский Михаил Сергеевич

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ

Заведующий редакцией *Л. Г. Иванова*
Редактор издательства *Т. Б. Шибанова*
Обложка художника *И. А. Слюсарева*
Художественный редактор *Г. Н. Юрчевская*
Технические редакторы *Е. С. Сычева, Л. Я. Голова*
Корректор *Н. А. Громова*

ИБ № 8063

Сдано в набор 24.01.89. Подписано в печать 21.04.89. Т — 08494. Формат $60 \times 88^1/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,9. Усл. кр-отт. 5,15. Уч.-изд. л. 4,7. Тираж 1180 экз. Заказ 737/2061 — 8. Цена 90 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047, Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28.