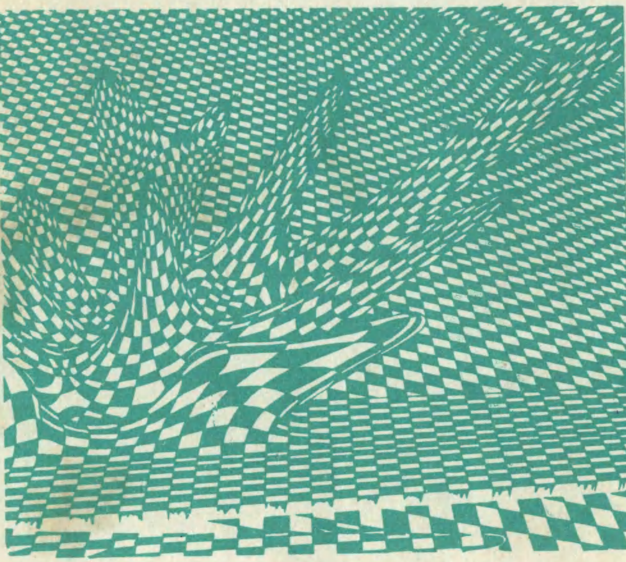
Издательство Московского университета



МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

МГУ

1988

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

В.В.Александров, Н.С.Бахвалов, К.Г.Григорьев, Г.Ю.Данков,
М.И.Зеликин, С.Я.Ищенко, С.В.Конягин, Е.А.Лапшин,
Д.А.Силаев, В.М.Тихомиров, А.В.Фурсиков

ПРАКТИКУМ

ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Издательство Московского университета
1988

УДК 517.97, 519.6

Практикум по численным методам в задачах оптимального управления / В.В.Александров, Н.С.Бахвалов, К.Г.Григорьев и др. - М.: Изд-во МГУ, 1988. - 80 с.

Практикум предназначен для студентов 4 курса механико-математического факультета МГУ и имеет целью ознакомить студентов с некоторыми стандартными методами решения на ЭВМ задач оптимального управления.

Рецензенты: профессор Н.Л.Григоренко,
профессор М.Г.Кобельков

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

077(02)-88-заказное
ISBN 5-211-00592-9

ВВЕДЕНИЕ

Среди задач оптимизации значительное место по объему и важности занимают задачи оптимального управления. Это задачи определения абсолютного экстремума (минимума или максимума) функционала на множестве, в описании которого присутствуют дифференциальные связи.

Необходимость решения задач оптимального управления возникает в самых различных областях науки и практики. Эти задачи, как правило, сложные, большая часть их не поддается аналитическому решению и требует применения численных методов с использованием ЭВМ.

Численные методы решения задач оптимизации, в том числе задач оптимального управления, принято условно разделять на две группы: "прямые" и "непрямые".

"Прямыми" методами в задачах оптимизации называют методы, не использующие необходимых и (или) достаточных условий экстремума для исходной экстремальной задачи. К ним относятся, в первую очередь, градиентные методы, например, метод наискорейшего спуска. Они основываются на анализе поведения функционала в окрестности некоторой точки из области его определения, выделении экстремального направления (например, градиентного направления, вдоль которого изменение функционала максимально), переходе вдоль этого направления в следующую точку области определения и последовательном повторении процедуры до выхода в точку экстремума функционала.

"Непрямые" методы решения задач оптимизации основываются на использовании необходимых и (или) достаточных условий экстремума. Большинство этих методов используют необходимые условия локального экстремума функционала. Благодаря удобству и относительной простоте их реализации при расчетах на ЭВМ с использованием стандартных программ, "непрямые" методы получили широкое распространение. Следует отметить, однако, что трудности решения задачи оптимизации "непрямыми" методами становятся практически непреодолимыми, если необходимые условия формулируются достаточно сложно, как например, в задачах оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные. Практика численного решения сложных задач оптимизации показывает целесообразность сочетания обоих методов.

"Непрямые" численные методы решения задач оптимального управления, рассматриваемые в данном практикуме используют необходимые условия относительного минимума функционала - принцип максимума Понтрягина [I]. Теоретические основы "непрямых" методов решения задач оптимального управления, изложенные в § I, следуют единой методологии исследования задач оптимизации - принципу Лагранжа снятия ограничений [2].

Из "прямых" численных методов решения задач оптимального управления в практикуме рассмотрен метод градиентного спуска.

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

1. Постановка задачи

Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу [2, 3] :

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)\to \inf, \tag{1.0}$$

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\ t\in\Delta_0, \tag{1.1}$$

$$u(t)\in U \quad \forall t\in\Delta, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{B}_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=0\ ,\ i=1,\dots,m, \tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{B}_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))\,dt+$$

$$+\ \psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),\ i=\overline{0,m},$$

$\Delta\equiv[t_0,t_1]$ – конечный отрезок.

Обозначения $x(\cdot),u(\cdot)$ подчеркивают, что x, u – отображения (элементы функциональных пространств – функции). В рассматриваемом случае $x(\cdot)\in\mathcal{K}C^1(\Delta,\mathbb{R}^n),\ u(\cdot)\in\mathcal{K}C(\Delta,\mathbb{R}^r)$, где $\mathcal{K}C^1(\Delta,\mathbb{R}^n)$ – пространство вектор-функций $x(\cdot):\Delta\to\mathbb{R}^n$ с кусочно-непрерывной производной, наделенной нормой $\|x(\cdot)\|_{\mathcal{K}C^1}\equiv\|x(\cdot)\|_C=$ $=\max\limits_{1\le i\le n}(\max\limits_{t\in\Delta}|x_i(t)|)$, $\mathcal{K}C(\Delta,\mathbb{R}^r)$ – пространство кусочно-непрерывных вектор-функций $u(\cdot):\Delta\to\mathbb{R}^r$ с нормой $\|u(\cdot)\|_{\mathcal{K}C}=\max\limits_{1\le i\le r}(\sup\limits_{t\in\Delta}|u_i(t)|)$,

$x(t),u(t)$ – значения вектор-функций $x(\cdot),u(\cdot)$ в точке t.

Δ_0 – множество точек отрезка Δ, где функция $u(\cdot)$ непрерывна;

$f_i:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ – функции $n+r+1$ переменных, $i=\overline{1,m}$;

$\psi_i:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – функции $2n+2$ переменных, $i=\overline{1,m}$;

$\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n$ – вектор-функция $n+r+1$ переменных;

U – произвольное множество из $\mathbb{R}^r$.

За норму декартова произведения $X \times Y$ нормированных пространств X и Y берется максимальная из норм $\|x\|_X$, $\|y\|_Y$, т.е. $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$.

Частным случаем задачи (1.0) - (1.3) является задача, в которой один из концов $t_i, x(t_i), i=0,1$ или даже оба закреплены.

Функционалы типа $\mathcal{B}_i$, $i=\overline{0,m}$, содержащие как интегральную, так и терминальную части, называются функционалами Больца. Если среди условий (1.3) есть условия, у которых терминальные части константы, т.е. эти условия могут быть приведены к виду $\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt = a_i$, то они называются изопериметрическими условиями. Если, наоборот, имеются условия, у которых отсутствуют интегральные части, т.е. условия имеют вид $\psi_i(t_0,x(t_0); t_1,x(t_1))=0$, то они называются граничными, или краевыми условиями.

Частными случаями функционала Больца являются функционалы Лагранжа и Майера. Функционал Лагранжа содержит только интегральную часть: $\mathcal{J}_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt$, а функционал Майера - только терминальную: $\tau_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1) = \psi_i(t_0,x(t_0), t_1, x(t_1))$. Вообще говоря, все перечисленные функционалы можно свести к функционалам Майера, но оперирование функционалами Больца имеет ряд удобств [2].

Вектор-функция $x(\cdot)$ называется фазовой переменной, а вектор-функция $u(\cdot)$ - управляющей функцией, или управлением. Уравнение (1.1), называемое дифференциальной связью, должно выполняться во всех точках множества $\Delta_0 \in (t_0,t_1)$, где управление $u(\cdot)$ непрерывно. Оно описывает движение управляемой системы в фазовом пространстве.

Четверка $(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$ называется управляемым процессом в задаче оптимального управления, если $x(\cdot) \in \mathcal{K}C^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in \mathcal{K}C(\Delta, \mathbb{R}^r)$, выполняется дифференциальная связь (1.1) и ограничения типа включения (1.2). Управляемый процесс называется допустимым, если, кроме того, выполняются соотношения (1.3).

Будем считать, что множество допустимых управляемых процессов не пусто. Тогда возникает задача выделения из этого множества оптимального управляемого процесса, доставляющего минимальное значение функционалу $\mathcal{B}_0$.

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется локально оптимальным в сильном смысле процессом (или локально оптимальным, или оптимальным процессом), если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого допустимого управляемого процесса $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, для которого $\|(x(\cdot), t_0, t_1) - (\hat{x}(\cdot), t_0, t_1)\|_{C(\Delta, \mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^2} \equiv \max\left(\max\limits_{1\le i\le n}\left(\max\limits_{t\in\Delta}|x_i(\cdot) - \hat{x}_i(\cdot)|, \sqrt{(t_0-\hat{t}_0)^2 + (t_1-\hat{t}_1)^2}\right)\right) \le \delta$,

выполняется неравенство $\mathcal{B}_0(\xi) \ge \mathcal{B}_0(\hat{\xi})$.

Функцией Лагранжа задачи (I.0) - (I.3) называется функция

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + l;$$

где

$$L \equiv L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda, \lambda_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u) + \langle p(t), \dot{x} - \varphi(t, x, u)\rangle,$$

$$l \equiv l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$\lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m*},$$

$\mathbb{R}^{n*}$ - арифметическое n-мерное пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^n$. Элементы $p(\cdot) \in \mathbb{R}^{n*}$ следует представлять себе как вектор-строчки (элементы $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ - вектор-столбцы); для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^{n*}$ $p\cdot x \equiv \langle p, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Числа λ_0, λ и вектор-функция $p(\cdot) \in \mathcal{K}C^1(\Delta, \mathbb{R}^{n*})$ называются множителями Лагранжа, функция L - лагранжианом, функция концов l - терминантом.

Будем называть функцией Понтрягина функцию

$$H \equiv H(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0) = L_{\dot{x}}\dot{x} - L \equiv \langle p\dot{x}\rangle - L \equiv$$

$$\equiv \langle p \cdot \varphi(t, x, u)\rangle - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u).$$

В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$\hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0);$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0);$$

$$\hat{H}(t) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0);$$

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),$$

$$\hat{\ell}_{x_k} = \frac{\partial \ell(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))}{\partial x(t_k)}, \quad k = 0, 1;$$

$$\hat{\ell}_{t_k} = \frac{\partial \ell(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))}{\partial t_k};$$

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

и т.д.

2. Необходимые условия сильного относительного минимума

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (принцип максимума Понтрягина).

Пусть $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ – локально оптимальный в сильном смысле процесс в задаче оптимального управления (I.0) – (I.3), функции $f_i(t, x, u),\ i = 0, 1, \ldots, m;\ \varphi(t, x, u)$ и их частные производные по x непрерывны в множестве $V \times U$, где V – некоторая окрестность множества $\{t, \hat{x}(t) \mid t \in [t_0, t_1]\}$, а функции $\psi_i(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)),\ i = 0, 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$.

Тогда найдутся множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$, $\hat{p}(\cdot) \in \mathcal{KC}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n*})$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия а)–д) (условия а)–д) могут быть записаны либо в лагранжевой форме – с использованием функций $\mathcal{L}, L, \ell$, либо в понтрягинской форме – с использованием функций H, ℓ):

а) условие стационарности по $x(\cdot)$ – уравнение Эйлера – в лагранжевой форме:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \iff$$

$$\dot{\hat{p}}(t) + \langle \hat{p}(t) \cdot \hat{\varphi}_x(t) \rangle = \hat{f}_x(t) \qquad \forall t \in \Delta_0,$$

где
$$f(t,x,u)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i\ (t,x,u);$$

в понтрягинской форме:
$$\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x};$$

б) условие трансверсальности по $x(\cdot)$:
$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_\kappa)=(-1)^\kappa\,\hat{\ell}_{x_\kappa}\Leftrightarrow \hat{p}(\hat{t}_\kappa)=(-1)^\kappa\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial x(t_\kappa)},\ \kappa=0,1.$$

Соответствующее индексу "к" условие трансверсальности по $x(\cdot)$ содержательно (выписываются) лишь в том случае, если $x(t_\kappa)$ не фиксировано.

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$ – условие минимума в лагранжевой форме:
$$\underset{u\in V}{absmin}\ L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)=$$
$$=L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\ \forall t\in\Delta_0,\forall u\in V$$
$$\Leftrightarrow L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\geq$$
$$\geq L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\quad\forall t\in\Delta_0,\forall u\in U,$$

или условие максимума в гамильтоновой (понтрягинской) форме:
$$\underset{u\in V}{absmax}\ H(t,\hat{x}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)=$$
$$=H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\quad\forall t\in\Delta_0,\ \forall u\in U$$
$$\Leftrightarrow H(t,\hat{x}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\leq$$
$$\leq H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)\quad\forall t\in\Delta_0,\ \forall u\in V,$$

поскольку лагранжиан L и функция Понтрягина H связаны соотношением
$$L(t,x,\dot{x},u,p,\lambda,\lambda_0)=\langle p\dot{x}\rangle-H(t,x,u,p,\lambda,\lambda_0)$$

Условие оптимальности по $u(\cdot)$ в общем случае позволяет найти оптимальное управление $\hat{u}(t)$:
$$\hat{u}(t)=\underset{u\in V}{argabsmin}\ L(u),$$
или

$$\hat{u}(t) = \operatorname{argabsmax} H(u),$$

где

$$L(u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \quad \forall t \in \Delta_0,$$

$$H(u) = H(t, \hat{x}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) \quad \forall t \in \Delta_0.$$

Причем в качестве $L(u), H(u)$ можно брать функции, содержащие только те слагаемые функций $L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$, $H(t, \hat{x}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$, которые зависят от u.

Формулы, определяющие $\hat{u}(t)$, дают значения аргументов функций $L(u)$, $H(u)$, при которых достигается их абсолютный минимум, соответственно, максимум по u, т.е.

$$\operatorname*{argabsmin}_{u \in V} L(u) = \{\hat{u} \in V \mid L(u) \geq L(\hat{u}) \ \forall u \in V, \forall t \in \Delta_0\},$$

$$\operatorname*{argabsmax}_{u \in V} H(u) = \{\hat{u} \in V \mid H(u) \leq H(\hat{u}) \ \forall u \in V, \forall t \in \Delta_0\};$$

г) условие стационарности по t_k $(k=0,1)$:

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dt_k} = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{\ell}_{t_0} + \hat{\ell}_{x_0} \cdot \hat{\varphi}(t_0) = 0,$$

$$\hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{\ell}_{t_1} + \hat{\ell}_{x_1} \cdot \hat{\varphi}(\hat{t}_1) = 0 \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial t_k}, k = 0,1.$$

Соответствующее индексу "к" условие стационарности содержательно (выписывается) лишь в том случае, если t_k не фиксировано.

д) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$.

Утверждение основной теоремы о существовании множителей Лагранжа, удовлетворяющих совокупности условий а)–д), кратко называется <u>принципом Лагранжа для задачи оптимального управления</u> (I.0) – (I.3), или <u>принципом максимума Понтрягина</u>, и находится в полном соответствии с общим принципом Лагранжа [2].

3. Правило решения задач оптимального управления

0) Формализовать задачу, т.е. привести ее к виду (I.0) – (I.3).

I) Составить функции $\mathcal{L}, L, \ell$ или функции H, ℓ.

2) Выписать необходимые условия а) – д) оптимальности процесса $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

3) Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия пункта 2) с множителями Лагранжа $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}, \hat{p}(\cdot)$, не равными одновременно нулю. При этом удобно отдельно рассмотреть случаи $\hat{\lambda}_0 = 0$ и $\hat{\lambda}_0 > 0$. Если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, то можно положить $\hat{\lambda}_0$ равным единице или любой другой положительной константе.

4) Среди найденных допустимых управляемых процессов найти решение – оптимальный процесс – или показать, что решения нет.

Таким образом <u>решение задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина</u> (необходимых условий сильного относительного минимума) <u>сводится к решению граничной (краевой) задачи для системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений</u> – исходной системы (I.I) и системы уравнений Эйлера, имеющих в понтрягинской форме вид канонической гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial p} \equiv \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \\ \dot{\hat{p}}(t) &= -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{I.4}$$

где

$$\hat{H}(t) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}),$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \operatorname*{argabsmax}_{u \in V} H(t, \hat{x}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}) \equiv \\ &\equiv u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}), \end{aligned} \tag{I.5}$$

дополненной условиями (I.3):

$$\begin{aligned} B_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) &\equiv \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\,dt + \\ &+ \psi_i(\hat{t}_0, \hat{x}(t_0); \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) = 0, \quad i = \overline{1,m}; \end{aligned} \tag{I.6}$$

условиями б) трансверсальности по $x(\cdot)$:

$$\hat{p}(\hat{t}_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial x(t_k)}, \quad k = 0, 1, \tag{I.7}$$

каждое из которых выписывается лишь в том случае, если соответствующее $x(t_k)$ нефиксировано;

условиями г) стационарности по t_0, t_1:

$$\hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \frac{\partial \ell}{\partial t_k}, \quad k = 0, 1, \qquad (I.8)$$

которые выписываются лишь тогда, когда соответствующее t_k нефиксировано;

и условием д) неотрицательности:

$$\hat{\lambda}_0 \geqslant 0. \qquad (I.9)$$

Следует подчеркнуть, что задача определения $\hat{u}(t)$ - это вообще говоря, задача нелинейного программирования. В результате ее решения при каждом значении переменных $t, \hat{x}, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}$ определяется функция $u(t, \hat{x}, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda})$, и при этом

$$\hat{u}(t) = u(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}). \qquad (I.10)$$

Объясним это несколько подробнее.

Положим $\hat{u}(t, \hat{x}, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}) = \underset{u \in V}{\arg\operatorname{abs}\max} H(t, \hat{x}, u, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda})$

Тогда $u(t, \hat{x}, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda})$ есть решение задачи нелинейного программирования:

$$H(t, \hat{x}, u, \hat{p}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}) \to \max, \quad u \in V$$

Так вот, необходимо, чтобы при каждом t было выполнено соотношение (I.10).

Переменные $p(t)$ называются <u>сопряженными</u> переменными, а система уравнений $\dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \equiv -\langle \hat{p}(t) \cdot \hat{\varphi}_x(t) \rangle + \hat{f}_x(t)$ - <u>сопряженной системой</u>.

Отметим полноту набора условий, которые дает основная теорема. Действительно, для определения неизвестных функций $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$, $\hat{p}(\cdot)$ имеется система $2n$ скалярных дифференциальных уравнений (I.4) и соотношение (I.5). Общее решение этой системы дифференциальных уравнений зависит от $2n$ произвольных постоянных и еще от множителей Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$. Так как функция Лагранжа $\mathcal{L}$ однородна по $\hat{\lambda}_0$, λ, $\hat{p}(\cdot)$, то среди множителей $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m$ независимых только m. После добавления в систему неизвестных $\hat{t}_0$ и $\hat{t}_1$, получается $2n+m+2$ неизвестных. Для их определения имеется $2n$ условий (I.7) трансверсальности по $x(\cdot)$, два условия (I.8) стационарности по t_0, t_1 и m условий (I.6). Таким образом, число неизвестных совпадает с числом условий. Именно это имеется в виду, когда речь идет о "полноте" набора условий. Само собой разумеется, однако, что разрешимости полученной системы уравнений эта "полнота" не гарантирует.

В случае, если функции φ и $f_i, i=\overline{0,m}$ не зависят явно от времени, т.е. $\varphi=\varphi(x,u), f_i=f_i(x,u), i=0,m$ система дифференциальных уравнений (I.4) имеет <u>первый интеграл</u>

$$\hat{H}(t)\equiv H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)=C,$$

означающий постоянство функции $H(x,u,p,\lambda,\lambda_0)$ на оптимальной траектории. При этом для нахождения постоянной C достаточно определить значение функции H в какой-нибудь одной точке оптимальной траектории. В частности, если хотя бы один из моментов времени t_K, $K=0,1$, не фиксирован и $\frac{\partial \ell}{\partial t_K}=const$, постоянная C может быть определена из условия г) стационарности по t_K: $\hat{H}(t_K)=(-1)^{K+1}\frac{\partial \hat{\ell}}{\partial t_K}$. Так, например, для автономных задач оптимального управления, в которых функции φ и f_i, $i=\overline{0,m}$ не зависят явно от t, а функции ψ_i, $i=\overline{0,m}$ не зависят явно от t_0,t_1: $\psi_i\equiv\psi_i(x(t_0),x(t_1))$, постоянная C равна нулю, и

$$\hat{H}(t)=0. \tag{I.11}$$

В задачах быстродействия, где функционал имеет вид $\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=t_1-t_0\to\inf$, а функции ψ_i, $i=\overline{1,m}$ не зависят явно от t_0,t_1, т.е. $\ell=\lambda_0(t_1-t_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\psi_i(x(t_0),x(t_1))$, имеем

$$\hat{H}(t)=\hat{\lambda}_0\ ,\quad \hat{\lambda}_0\geq 0. \tag{I.12}$$

Наличие в системе (I.4) первого интеграла позволяет заменить одно из дифференциальных уравнений этой системы при численном решении задачи (I.0) - (I.3) алгебраическим соотношением (I.11) (или (I.12)), либо использовать эти соотношения для контроля проводимых вычислений.

Если U открытое множество в $\mathbb{R}^r$, управляющие функции $u(\cdot)$ непрерывны: $u(\cdot)\in C(\Delta,\mathbb{R}^r)$, и непрерывны частные производные $\varphi_u, f_{iu}, i=\overline{0,m}$, то рассматриваемая задача (I.0) - (I.3) будет классической задачей Лагранжа (в понтрягинской форме). Частным случаем задачи Лагранжа является задача классического вариационного исчисления (в понтрягинской форме), в которой дифференциальная связь (I.I) имеет вид: $\dot{x}=u$.

Рассмотрим несколько примеров применения приведенного выше правила решения задач оптимального управления (в том числе, задач классического вариационного исчисления и задач Лагранжа), для некоторых характерных случаев граничных условий и функционалов.

При решении такого рода задач нельзя упускать из вида, что <u>принцип максимума Понтрягина представляет собой лишь необходимые условия первого порядка относительного экстремума</u>, и, следовательно, полученные в результате его применения локально оптимальные в сильном смысле процессы $\hat{\xi}=(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ в общем случае подлежат испытанию на оптимальность с помощью ряда необходимых условий оптимальности высших порядков и (или) достаточных условий [2,3] , либо должны подвергаться непосредственной проверке на абсолютную оптимальность, как это делается в каждом из приведенных ниже примеров. Отметим, что рассмотренные здесь примеры специально подобраны так, чтобы сравнительно простой непосредственной проверкой можно было показать абсолютную оптимальность полученных решений. В большинстве задач так просто это сделать, как правило, не удается.

<u>Примеры</u>.

<u>Пример I</u> (задача классического вариационного исчисления).

$$\mathcal{J}(x(\cdot))=\int_0^1(\dot{x}^2-4x)\,dt+x^2(1)\to inf,\quad x(0)=0.$$

Решение.

0) Формализация

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1(u^2-4x)\,dt+x^2(1)\to inf, \tag{I.0}$$

$$\dot{x}=u, \tag{I.I}$$

$$u\in U=]-\infty,+\infty[\quad \forall t\in[0,1], \tag{I.2}$$

$$x(0)=0. \tag{I.3}$$

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}=\int_0^1(\lambda_0(u^2-4x)+p(t)\cdot(\dot{x}-u))\,dt+\lambda_0x^2(1)+\lambda(x(0)-0).$$

Лагранжиан $L=\lambda_0(u^2-4x)+p(t)\cdot(\dot{x}-u)\equiv p(t)\dot{x}-H.$

Функция Понтрягина $H=p(t)u-\lambda_0(u^2-4x).$

Терминант $\ell=\lambda\cdot x(0)+\lambda_0\cdot x^2(1)$.

2) Необходимые условия оптимальности:

а) уравнение Эйлера

1) в лагранжевой форме

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\hat{p}(t)-4\hat{\lambda}_0=0 \Leftrightarrow \hat{p}(t)=-4\hat{\lambda}_0 t+A;$$

2) в понтрягинской форме

$$\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t)=-4\hat{\lambda}_0 \Leftrightarrow \hat{p}(t)=-4\hat{\lambda}_0 t+A;$$

б) условия трансверсальности по $x(\cdot)$

1) в лагранжевой форме

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial x(t_k)},\ k=0,1 \Leftrightarrow \begin{matrix} \hat{L}_{\dot{x}}(0)=\dfrac{\partial\hat{\ell}}{\partial x(0)} \\ \hat{L}_{\dot{x}}(1)=-\dfrac{\partial\hat{\ell}}{\partial x(1)} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \hat{p}(0)=\hat{\lambda}; \\ \hat{p}(1)=-2\hat{\lambda}_0\hat{x}(1), \end{matrix}$$

2) в понтрягинской форме

$$\hat{p}(t_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial x(t_k)},\ k=0,1 \Leftrightarrow \hat{p}(0)=\hat{\lambda},\ \hat{p}(1)=-2\hat{\lambda}_0\hat{x}(1);$$

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$

1) в лагранжевой форме (условие минимума)

$$L(u)=\hat{\lambda}_0 u^2-\hat{p}(t)u,$$

$$\hat{u}(t)=\underset{u\in]-\infty,+\infty[}{\mathrm{argabsmin}}\,L(u)=\begin{cases} \dfrac{\hat{p}(t)}{2\hat{\lambda}_0}; & \hat{\lambda}_0\neq 0\ (\hat{\lambda}_0>0); \\ \forall u\in]-\infty,+\infty[, & \hat{\lambda}_0=0,\ \hat{p}(t)=0; \\ \varnothing\ (\hat{u}(t)=\pm\infty), & \hat{\lambda}_0=0,\ \hat{p}(t)\neq 0; \end{cases}$$

2) в понтрягинской форме (условие максимума)

$$H(u)=\hat{p}(t)u-\hat{\lambda}_0 u^2,$$

$$\hat{u}(t)=\underset{u\in]-\infty,+\infty[}{\mathrm{argabsmax}}\,H(u)=\begin{cases} \dfrac{\hat{p}(t)}{2\hat{\lambda}_0} & \hat{\lambda}_0\neq 0\ (\hat{\lambda}_0>0); \\ \forall u\in]-\infty,+\infty[& \hat{\lambda}_0=0,\ \hat{p}(t)=0; \\ \varnothing\ (\hat{u}(t)=\pm\infty) & \hat{\lambda}_0=0,\ \hat{p}(t)\neq 0; \end{cases}$$

Условия г) стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как в задаче t_0, t_1 фиксированы: $t_0=0$, $t_1=1$.

д) условие неотрицательности: $\hat\lambda_0 \geqslant 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat\lambda_0=0$ и $\hat\lambda_0>0$.

1) Если $\hat\lambda_0=0$, то (см. в)) либо $\hat u(t)$ не существует, либо $\hat p(t)=0$ и (см. б)) $\hat\lambda=0$ – все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит принципу максимума. Следовательно, при $\hat\lambda_0=0$ допустимых экстремалей в задаче нет.

2) Если $\hat\lambda_0>0$, то, положив $\hat\lambda_0=\frac{1}{2}$, из условий 0), а), в) получим

$$\hat p(t)=-2t+A,\ \dot x(t)=u\equiv-2t+A \Rightarrow \hat x(t)=-t^2+At+B.$$

Так как $x(0)=0$, то $B=0$, а так как $\hat p(1)=-\hat x(1)$, то $A=\frac{3}{2}$, $\hat x(t)=-t^2+\frac{3}{2}t$.

4) Непосредственной проверкой покажем, что $\hat x(t)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Для этого возьмем такую функцию $x(\cdot)$, чтобы функция $\hat x(\cdot)+x(\cdot)$ была допустимой, т.е. возьмем $x(\cdot)\in C^1([0,1])$, $x(0)=0$ и вычислим приращение функционала

$$\Delta \mathcal{J}=\mathcal{J}(\hat x(\cdot)+x(\cdot))-\mathcal{J}(\hat x(\cdot))\equiv$$

$$\equiv\int_0^1\left((\dot{\hat x}(t)+\dot x(t))^2-4(\hat x(t)+x(t))\right)dt+(\hat x(1)+x(1))^2-$$

$$-\int_0^1(\dot{\hat x}^2(t)-4\hat x(t))dt-\hat x^2(1)\equiv\int_0^1(2\dot{\hat x}(t)\cdot\dot x(t)+\dot x^2(t))dt-$$

$$-\int_0^1 4x(t)dt+2\hat x(1)x(1)+x^2(1)\equiv\int_0^1\dot x^2(t)dt+x^2(1)+$$

$$+2\dot{\hat x}(t)\cdot x(t)\Big|_0^1-\int_0^1(2\ddot{\hat x}(t)+4)x(t)dt+2\hat x(1)\cdot x(1)\equiv$$

$$\equiv\int_0^1\dot x^2(t)dt+x^2(1)+2\dot{\hat x}(1)\cdot x(1)-0-$$

$$-\int_0^1 0\cdot x(t)dt+2\hat x(1)\cdot x(1)\equiv\int_0^1\dot x^2(t)dt+x^2(1)+$$

$$+2(\dot{\hat x}(1)+\hat x(1))\cdot x(1)\equiv\int_0^1\dot x^2(t)dt+x^2(1)+2\cdot0\cdot x(1)\equiv$$

$$\equiv\int_0^1\dot x^2(t)dt+x^2(1)\geqslant0.$$

Так как $\Delta\mathcal{J}\geqslant0$, то на экстремали $\hat x(t)=-t^2+\frac{3}{2}t$ достигается абсолютный минимум функционала, $\mathcal{J}(\hat x(\cdot))=-\frac{5}{6}$.

Пример 2 (задача Лагранжа).

$$\mathcal{J}(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 (x+u^2)dt \to \inf,\ \dot{x}-x=u,\ u\in\,]-\infty,+\infty[,$$

$x(1)=0.$

Решение.

0) Формализация

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 (x+u^2)dt\to \inf, \qquad (\mathrm{I}.0)$$

$$\dot{x}=x+u, \qquad (\mathrm{I}.\mathrm{I})$$

$$u\in V=\,]-\infty,+\infty[\quad \forall t\in[0,1], \qquad (\mathrm{I}.2)$$

$$x(1)=0. \qquad (\mathrm{I}.3)$$

I) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}=\int_0^1 (\lambda_0(x+u^2)+p(t)(\dot{x}-x-u))dt+\lambda\cdot(x(1)-0).$$

Лагранжиан $L=\lambda_0(x+u^2)+p\cdot(\dot{x}-x-u)\equiv p\dot{x}-H.$

Функция Понтрягина $H=p\cdot(x+u)-\lambda_0\cdot(x+u^2).$

Терминант $\ell=\lambda\cdot x(1).$

2) Необходимые условия оптимальности:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0 \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t)=-\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t)=\hat{\lambda}_0-\hat{p}(t);$$

б) условия трансверсальности по $x(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k)\equiv\hat{p}(t_k)=(-1)^k\frac{\partial \ell}{\partial x(t_k)},\ k=0,1 \Leftrightarrow \hat{p}(0)=0,\ \hat{p}(1)=-\hat{\lambda};$$

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$

$$L(u)=-H(u)=\hat{\lambda}_0 u^2-\hat{p}(t)u;$$

$$\hat{u}(t)=\operatorname{argabsmin} L(u)\equiv \operatorname{argabsmax} H(u)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\hat{p}(t)}{2\hat{\lambda}_0}, & \hat{\lambda}_0\neq 0\ (\hat{\lambda}_0>0);\\ \forall u\in\,]-\infty,+\infty[, & \hat{\lambda}_0=\hat{p}(t)=0;\\ \varnothing\ \ (\hat{u}(t)=\pm\infty), & \hat{\lambda}_0=0,\ \hat{p}(t)\neq 0.\end{cases}$$

Условия г) стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как t_0, t_1 фиксированы: $t_0=0$, $t_1=1$.

д) условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0\geqslant 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat\lambda_0=0$ и $\hat\lambda_0>0$.

1) Если $\hat\lambda_0=0$, то (см. в)) либо $\hat u(t)$ не существует, либо $\hat p(t)=0$ и (см. б)) $\hat\lambda=0$, т.е. все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит принципу максимума. Следовательно, при $\hat\lambda_0=0$ допустимых экстремалей в задаче нет.

2) Если $\hat\lambda_0>0$, то, положив $\hat\lambda_0=1$, из условий а) – в) получим

$$\dot{\hat p}+\hat p=1,\ \hat p(0)=0 \Rightarrow \hat p(t)=1-e^{-t},\ \hat u(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t}).$$

Так как $\dot{\hat x}-\hat x=\hat u$ и $x(1)=0$, то $\hat x(t)=\frac{1}{2}e^{t-1}-\frac{1}{4}e^{t-2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-t}$

4) Покажем непосредственной проверкой, что $\hat x(t),\hat u(t)$ доставляют функционалу абсолютный минимум. Возьмем такие функцию $x(\cdot)$ и управление $u(\cdot)$, чтобы пара $(\hat x(\cdot)+x(\cdot),\hat u(\cdot)+u(\cdot))$ была допустимой, т.е. возьмем $x(\cdot)\in C^1([0,1])$, $x(1)=0$; $u=\dot x-x$. Вычислив приращение функционала, получим

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{J}&=\mathcal{J}(\hat x(\cdot)+x(\cdot),\hat u(\cdot)+u(\cdot))-\mathcal{J}(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))\equiv\\
&\equiv\int_0^1(x+2\hat u u+u^2)dt\equiv\int_0^1(x+2\hat u(\dot x-x)+u^2)dt\equiv\\
&\equiv 2\hat u(t)x(t)\Big|_0^1+\int_0^1(1-2\hat u-2\dot{\hat u})x\,dt+\int_0^1 u^2dt\equiv\\
&\equiv 2\hat u(1)\cdot 0-2\cdot 0\cdot x(0)+\int_0^1 0\cdot x\,dt+\int_0^1 u^2dt\equiv\int_0^1 u^2dt\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Так как $\Delta\mathcal{J}\geqslant 0$, то, следовательно, пара $\hat x(t)=\frac{1}{4}(2e^{t-1}-e^{t-2}-2+e^{-t})$, $\hat u(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t})$ доставляет функционалу абсолютный минимум, причем $\mathcal{J}(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))=\frac{1}{8}(1+e^{-2}-4e^{-1})$.

Пример 3 (задача Лагранжа).

$$\mathcal{J}(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\pi/2}u^2dt\to\inf,\quad \ddot x+x=u,\ u\in\,]-\infty;+\infty[,$$
$$x(0)=1,\ \dot x(0)=1,\ x(\pi/2)=0.$$

Решение.

0) Формализация.

Сделав замену переменных $x_1=x,\ x_2=\dot x$, приведем задачу к виду (I.0) – (I.3):

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\pi/2}u^2dt\to\inf \tag{I.0}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \tag{I.I}$$

$$u \in V =]-\infty, +\infty[\quad \forall t \in [0, \pi/2], \tag{I.2}$$

$$x_1(0) - 1 = 0, \; x_1(\pi/2) - 0 = 0, \; x_2(0) - 1 = 0. \tag{I.3}$$

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi/2} \left(\lambda_0 u^2 + p_1 \cdot (\dot{x}_1 - x_2) + p_2 \cdot (\dot{x}_2 + x_1 - u)\right) dt +$$

$$+ \lambda_1 (x_1(0) - 1) + \lambda_2 (x_2(0) - 1) + \lambda_3 (x_1(\tfrac{\pi}{2}) - 0).$$

Лагранжиан $L = \lambda_0 u^2 + p_1 \cdot (\dot{x}_1 - x_2) + p_2 \cdot (\dot{x}_2 + x_1 - u) \equiv$
$\equiv p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - H.$

Функция Понтрягина $H = p_1 x_2 + p_2 \cdot (u - x_1) - \lambda_0 u^2.$

Терминант $l = \lambda_1 (x_1(0) - 1) + \lambda_2 (x_2(0) - 1) + \lambda_3 \cdot x_1(\pi/2).$

2) Необходимые условия оптимальности:

а) система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \hat{L}_{x_i}(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x_i} \quad i = 1,2 \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\hat{p}}_1(t) = \hat{p}_2(t); \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t); \end{array}$$

б) условия трансверсальности по $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_i(t_k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_i(t_k)}, \quad i = 1,2; \; k = 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1, \; \hat{p}_1(\tfrac{\pi}{2}) = \hat{\lambda}_3, \; \hat{p}_2(0) = \hat{\lambda}_2, \; \hat{p}_2(\tfrac{\pi}{2}) = 0;$$

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$

$$L(u) = -H(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}_2(t) \cdot u;$$

$$\hat{u}(t) = \underset{u \in]-\infty, +\infty[}{\mathrm{argabsmin}}\, L(u) \equiv \underset{u \in]-\infty, +\infty[}{\mathrm{argabsmax}}\, H(u) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\hat{p}_2(t)}{2\hat{\lambda}_0}, & \hat{\lambda}_0 > 0; \\ \forall u \in]-\infty, +\infty[, & \hat{\lambda}_0 = \hat{p}(t) = 0; \\ \varnothing, & (\hat{u}(t) = \pm\infty), \; \hat{\lambda}_0 = 0, \; \hat{p}(t) \neq 0. \end{cases}$$

Условия г) стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ фиксированы.

д) условие неотрицательности $\hat\lambda_0 \geq 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat\lambda_0 = 0$ и $\hat\lambda_0 > 0$.

1) Если $\hat\lambda_0 = 0$, то из условия в) следует, что либо $\hat u(t)$ не существует, либо $\hat p_2(t) \equiv 0$, а тогда по условию а) $\hat p_1(t) \equiv 0$ и по условию б) $\hat\lambda_1 = \hat\lambda_2 = \hat\lambda_3 = 0$, т.е. все множители Лагранжа равны нулю. Это противоречит принципу максимума, и, следовательно, при $\hat\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

2) Если $\hat\lambda_0 > 0$, то, положив $\hat\lambda_0 = \frac{1}{2}$, из системы уравнений Эйлера а) получим: $\ddot{\hat p}_2(t) + \hat p_2(t) = 0$, т.е. $\hat p_2(t) = C_0 \sin t + C\cos t$. Поскольку $p_2(\frac{\pi}{2}) = 0$, то $\hat p_2(t) = c\cos t$, и из условия в) имеем: $\hat u(t) = \hat p_2(t) \equiv c\cos t$. Тогда $\ddot{\hat x} + \hat x = c\cos t$, $\hat x(t) = (c_1 + c_2 t)\sin t + c_3\cos t$. Воспользовавшись граничными условиями, получим

$$\hat x(t) = \left(1 - \frac{2}{\pi} t\right)\sin t + \cos t,$$

$$\hat u(t) \equiv \ddot{\hat x} + \hat x \equiv -\frac{4}{\pi}\cos t.$$

4) Непосредственной проверкой покажем, что $\hat x(t)$, $\hat u(t)$ доставляют функционалу абсолютный минимум. Возьмем $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ такие, чтобы пара $(\hat x(\cdot) + x(\cdot), \hat u(\cdot) + u(\cdot))$ была допустимой, т.е. возьмем $x(\cdot) \in C^2([0, \frac{\pi}{2}])$, $x(0) = \dot x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0$, $u(\cdot) \in C^2([0, \frac{\pi}{2}])$, $u(\cdot) = \ddot x(\cdot) + x(\cdot)$. Так как приращение функционала неотрицательно

$$\Delta J = \int_0^{\pi/2} (\hat u + u)^2 dt - \int_0^{\pi/2} \hat u^2 dt \equiv \int_0^{\pi/2} 2\hat u u\, dt + \int_0^{\pi/2} u^2 dt \geq$$

$$\geq \int_0^{\pi/2} 2\hat u \cdot (\ddot x + x) dt \equiv 2\hat u \cdot \dot x \Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} (x\hat u - \dot{\hat u}\dot x) dt \equiv$$

$$\equiv 0 - 2\dot{\hat u} x \Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x \cdot (\ddot{\hat u} + \hat u) dt \equiv 0 + 2\int_0^{\pi/2} x \cdot 0\, dt = 0,$$

то пара $(\hat x(t), \hat u(t))$ доставляет абсолютный минимум функционалу, причем $J(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) = 4$.

<u>Пример 4</u> (задача оптимального управления).

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot x^2 - 4x) dt \to \inf, \quad 0 \leq \dot x(\cdot) \leq 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение.

0) Формализация

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^1 (u^2-4x)\,dt \to inf, \tag{I.0}$$

$$\dot{x} = u, \tag{I.1}$$

$$u \in U = [0,1] \qquad \forall t \in [0,1], \tag{I.2}$$

$$x(0) = 0. \tag{I.3}$$

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left(\lambda_0(u^2-4x) + p(t)\cdot(\dot{x}-u)\right)dt + \lambda_1\cdot(x(0)-0).$$

Лагранжиан $L = \lambda_0(u^2-4x) + p(t)\cdot(\dot{x}-u) \equiv p\dot{x} - H.$

Функция Понтрягина $H = pu - \lambda_0\cdot(u^2-4x).$

Терминант $l = \lambda_1\cdot x(0).$

2) Необходимые условия оптимальности:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x} \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}(t) = -4\hat{\lambda}_0;$$

б) условия трансверсальности по $x(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)} \Leftrightarrow \hat{p}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{l}}{\partial x(t_k)}, \quad k = 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{p}(0) = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(1) = 0;$$

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$

$$L(u) \equiv -H(u) = \hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u,$$

$$\hat{u}(t) = \underset{u\in[0,1]}{\mathrm{argabsmax}}\, H(u) \equiv \underset{u\in[0,1]}{\mathrm{argabsmin}}\, L(u) =$$

$$= \underset{u\in[0,1]}{\mathrm{argabsmin}}\left(\hat{\lambda}_0 u^2 - \hat{p}(t)u\right).$$

Условия г) стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ – фиксированы.

д) условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0 \geq 0$

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat{\lambda}_0 = 0$ и $\hat{\lambda}_0 > 0$.

1) Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то из условий а), б) следует: $\dot{\hat{p}}(t) = 0$, $\hat{p}(t) = 0$, $\hat{\lambda}_1 = 0$ – все множители Лагранжа нули. Это противоречит принципу максимума, следовательно, при $\hat{\lambda}_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

2) Если $\hat\lambda_0>0$, то, положив $\hat\lambda_0>1$, получим $\dot{\hat p}(t)=-4$. Так как $\hat p(1)=0$, то $\hat p(t)=4(1-t)\geq 0$. При этом из условий в) и (1.1) следует

$$\hat u(t)=\begin{cases}\frac{\hat p(t)}{2}, & 0\leq\frac{\hat p(t)}{2}\leq 1\\ 1, & \frac{\hat p(t)}{2}\geq 1\end{cases}\equiv\begin{cases}2(1-t), & \frac12\leq t\leq 1;\\ 1, & 0\leq t\leq\frac12;\end{cases}$$

$$\hat x(t)=\int_0^t\hat u(t)dt=\begin{cases}2t-t^2+C_1, & \frac12\leq t\leq 1;\\ t+C_2, & 0\leq t\leq\frac12\end{cases}.$$

Поскольку $\hat x(t)\in\mathcal{X}C^1([0,1],\mathbb{R}^1)$, то функция $\hat x(t)$ непрерывна при $t=\frac12$. Из условия непрерывности получим $C_2=C_1-\frac14$. А так как $x(0)=0$, то $C_2=0$, $C_1=\frac14$,

$$\hat x(t)=\begin{cases}t, & 0\leq t\leq 1/2;\\ 2t-t^2-\frac14, & 1/2\leq t\leq 1.\end{cases}$$

4) Непосредственной проверкой покажем, что $\hat x(t)$ доставляет функционалу абсолютный минимум.

Возьмем такую функцию $x(\cdot)$, чтобы функция $\hat x(\cdot)+x(\cdot)$ была допустимой, т.е. возьмем $x(\cdot)\in\mathcal{X}C^1([0,1]),x(0)=0$, и вычислим приращение функционала

$$\Delta\mathcal{J}=\mathcal{J}(\hat x(\cdot)+x(\cdot))-\mathcal{J}(\hat x(\cdot))=2\int_0^1\dot{\hat x}\dot x\,dt-4\int_0^1 x\,dt+\int_0^1\dot x^2dt\equiv$$

$$\equiv\int_0^1\dot x^2dt+2\int_0^1\dot{\hat x}\dot x\,dt-4\int_0^1 x\,d(t-1)\equiv\int_0^1\dot x^2dt+2\int_0^1\dot{\hat x}\dot x\,dt-$$

$$-4x(t)\cdot(t-1)\Big|_0^1-4\int_0^1(t-1)\dot x\,dt\equiv\int_0^1\dot x^2dt+\int_0^1(2\dot{\hat x}+4t-4)\dot x\,dt\equiv$$

$$\equiv\int_0^1\dot x^2dt+\int_0^{1/2}(4t-2)\dot x\,dt+\int_{1/2}^1 0\cdot\dot x\,dt\geq\int_0^{1/2}(4t-2)\dot x\,dt.$$

Так как $0\leq\dot{\hat x}(t)+\dot x(t)\leq 1$ $\forall t\in[0,1]$, а при $0\leq t\leq\frac12$ $\hat u(t)=1$, то $0\leq 1+\dot x(t)\leq 1$ $\forall t\in[0,\frac12]$, т.е. $-1\leq\dot x(t)\leq 0$ $\forall t\in[0,\frac12]$. Поэтому $\int_0^{1/2}(4t-2)\dot x\,dt\geq 0$, и $\Delta\mathcal{J}\geq 0$. Следовательно, на экстремали $\hat x(t)$ функционал достигает абсолютного минимума, $\mathcal{J}(\hat x(\cdot))=-\frac{7}{6}$.

Пример 5 (задача оптимального управления).

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_0^1 x(t)dt \to inf, \ |\ddot{x}|\le 1, \ x(0)=x(1)=0.$$

Решение.

0) Формализация.

Сделав замену переменных $x=x_1$, $\dot{x}=x_2$, $\ddot{x}=u$, приведем задачу к виду (I.0) - (I.3):

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 x_1(t)dt \to inf, \tag{I.0}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{I.1}$$

$$u\in U = \{u \mid |u|\le 1\} \qquad \forall t\in[0,1], \tag{I.2}$$

$$x_1(0)=0, \quad x_1(1)=0. \tag{I.3}$$

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 (\lambda_0 x_1 + p_1(t)\cdot(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)\cdot(\dot{x}_2 - u))dt +$$

$$+ \lambda_1(x_1(0)-0) + \lambda_2(x_1(1)-0).$$

Лагранжиан $L = \lambda_0 x_1 + p_1\cdot(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) \equiv p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H.$

Функция Понтрягина $H = p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 x_1.$

Терминант $\ell = \lambda_1\cdot x_1(0) + \lambda_2\cdot x_1(1).$

2) Необходимые условия оптимальности:

а) система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \hat{L}_{x_i}(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x_i}, i=1,2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \dot{\hat{p}}_1(t) = \hat{\lambda}_0; \\ \dot{\hat{p}}_2(t) = -\hat{p}_1(t); \end{array}$$

б) условие тарнсверсальности по $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial x_i(t_k)} \Leftrightarrow \hat{p}_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial x_i(t_k)},$$

$$i=1,2; \ k=0,1 \Leftrightarrow \hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1, \hat{p}_1(1) = -\hat{\lambda}_2; \hat{p}_2(0)=0, \ \hat{p}_2(1)=0;$$

в) условие оптимальности

$$H(u) = -L(u) = \hat{p}_2 u,$$

$$\hat{u}(t) = \underset{|u|\le 1}{\mathrm{argabsmin}}\, h(u) \equiv \underset{|u|\le 1}{\mathrm{argabsmax}}\, H(u) =$$

$$= \underset{|u|\le 1}{\mathrm{argabsmax}}\, (\hat{p}_2 u) \equiv \begin{cases} -1, & \hat{p}_2(t) < 0; \\ +1, & \hat{p}_2(t) > 0. \end{cases}$$

Условия г) стационарности по t_0 , t_1 отсутствуют, так как $t_0=0$, $t_1=1$ – фиксированы.

д) условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0 \ge 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat{\lambda}_0=0$ и $\hat{\lambda}_0>0$.

1) Если $\hat{\lambda}_0=0$, то из условий а), б) следует, что все множители Лагранжа равны нулю. Это противоречит принципу максимума, и, следовательно, при $\hat{\lambda}_0=0$ допустимых экстремалей нет.

2) Если $\hat{\lambda}_0>0$, то, полагая $\hat{\lambda}_0 = 2$, получим

$$\hat{p}_1(t) = 2t + A,\ \hat{p}_2(t) = -t^2 - At + B \overset{б)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_2(t) = -t^2 - t > 0 \quad \forall t \in]0,1[\overset{в)}{\Longrightarrow} \hat{u}(t) = +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\hat{x}}(t) = +1 \Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\,.$$

Итак, $\hat{x}(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $\hat{u}(t) = +1$.

4) Непосредственной проверкой покажем, что $\hat{x}(t)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. Возьмем такую функцию $x(\cdot)$, чтобы функция $\hat{x}(\cdot)+x(\cdot)$ была допустимой, т.е. возьмем $x(\cdot) \in KC^2([0,1])$, $x(0)=0$, $x(1)=0$.

Так как $\Delta \mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot)) - \mathcal{Y}(\hat{x}(\cdot)) \equiv \int_0^1 x(t)dt$ и имеет место тождество $\int_0^1 x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 -\hat{p}_2(t)\cdot\ddot{x}(t)dt$ (действительно,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 -\hat{p}_2\,\ddot{x}\,dt \equiv \frac{1}{2}\int_0^1 -\hat{p}_2\, d\dot{x} \equiv \frac{1}{2}\left(-\hat{p}_2\dot{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \dot{x}\,\dot{\hat{p}}_2\,dt\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(0 + \int_0^1 \dot{\hat{p}}_2\,dx\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{p}}_2\,x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\ddot{\hat{p}}_2\,dt\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(0 - \int_0^1 x\cdot(-2)\,dt\right) \equiv \int_0^1 x\,dt$$), то $\Delta \mathcal{Y} = \frac{1}{2}\int_0^1 -\hat{p}_2\,\ddot{x}\,dt$.

А так как $-\hat{p}_2 = t^2 - t \le 0$ и $-1 \le \ddot{\hat{x}} + \ddot{x} \le 1$ $\forall t \in [0,1]$, т.е. $-2 \le \ddot{x} \le 0$ $\forall t \in [0,1]$ то $\Delta \mathcal{Y} \ge 0$, а, следовательно, функция $\hat{x}(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$ доставляет функционалу абсолютный минимум. При этом $\mathcal{Y}(\hat{x}(\cdot)) = -\frac{1}{12}$.

<u>Пример 6</u> (задача оптимального управления).

$$\tau(x(\cdot),t_1)=t_1\to\inf,\quad \ddot{x}=u,\quad |u|\le 1;$$

$$x(0)=-4,\quad \dot{x}(0)=4,\quad x(t_1)=\dot{x}(t_1)=0.$$

Решение.

0) Формализация.

Заменой переменных $x=x_1$, $\dot{x}=x_2$, $\ddot{x}=u$, приведем задачу к виду (I.0) – (I.3):

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot),t_1)=t_1\to\inf, \tag{I.0}$$

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=u, \tag{I.1}$$

$$u\in U=\{u\mid |u|\le 1\}\quad \forall t\in[0,t_1], \tag{I.2}$$

$$x_1(0)=-4,\quad x_2(0)=4,\quad x_1(t_1)=x_2(t_1)=0. \tag{I.3}$$

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}=\int_0^{t_1}\big(p_1(t)\cdot(\dot{x}_1-x_2)+p_2(t)\cdot(\dot{x}_2-u)\big)dt+\lambda_0 t_1+$$

$$+\lambda_1(x_1(0)+4)+\lambda_2(x_2(0)-4)+\lambda_3(x_1(t_1)-0)+\lambda_4(x_2(t_1)-0).$$

Лагранжиан. $L=p_1(\dot{x}_1-x_2)+p_2(\dot{x}_2-u)\equiv p_1\dot{x}_1+p_2\dot{x}_2-H.$

Функция Понтрягина. $H=p_1x_2+p_2u.$

Терминант $l=\lambda_0t_1+\lambda_1(x_1(0)+4)+\lambda_2(x_2(0)-4)+\lambda_3x_1(t_1)+\lambda_4x_2(t_1).$

2) Необходимые условия оптимальности:

а) система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i}(t)+\hat{L}_{x_i}(t)=0\Leftrightarrow\dot{\hat{p}}_i(t)=-\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial x_i},\ i=1,2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\dot{\hat{p}}_1(t)=0,\ \dot{\hat{p}}_2(t)=-\hat{p}_1(t)\Rightarrow\hat{p}_2(t)=ct+c_1,\ \hat{p}_1(t)=-c;$$

б) условия трансверсальности по $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{l}}{\partial x_i(t_k)}\Leftrightarrow\hat{p}_i(\hat{t}_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{l}}{\partial x_i(t_k)},\ i=1,2,\ k=0,1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{p}_1(0)=\hat{\lambda}_1,\ \hat{p}_1(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}_3,\ \hat{p}_2(0)=\hat{\lambda}_2,\ \hat{p}_2(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}_4;$$

в) условие оптимальности по $u(\cdot)$

$$H(u)\equiv -L(u)=\hat{p}_2(t)u,$$

$$\hat{u}(t)=\underset{|u|\le 1}{\mathrm{argabsmin}}\,L(u)\equiv\underset{|u|\le 1}{\mathrm{argabsmax}}\,H(u)=$$

$$= \underset{|u|\le 1}{\arg\operatorname{absmax}} (\hat{p}_2(t)u) = \operatorname{sign} \hat{p}_2(t);$$

г) условие стационарности по t_1

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dt_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_1) = (-1)^2 \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial t_1} \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_2(\hat{t}_1)\cdot\hat{u}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}_0 \Leftrightarrow \hat{p}_2(\hat{t}_1)\operatorname{sign}\hat{p}_2(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}_0 \Leftrightarrow |\hat{p}_2(\hat{t}_1)| = \hat{\lambda}_0;$$

д) условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat{\lambda}_0 = 0$ и $\hat{\lambda}_0 > 0$.

1) Если $\hat{\lambda}_0 = 0$, то (см. г)) $\hat{p}_2(t_1) = 0$, но при этом $\hat{p}_2(t) \not\equiv 0$, так как иначе все множители Лагранжа равны нулю (см. а) –в)), что противоречит принципу Лагранжа (принципу максимума), и, следовательно, при $\hat{p}_2(t) \equiv 0$ допустимых экстремалей нет. Значит (см. а)) $\hat{p}_2(t) = c\cdot(t - t_1)$, $c \neq 0$.

Поскольку $\hat{p}_2(t_1) = 0$, то (см. в)) для $c > 0$ $\hat{u}(t) = -1$ $\forall t \in [0, t_1]$, а для $c < 0$ $\hat{u}(t) = +1$ $\forall t \in [0, t_1]$. Это означает, что при $\hat{\lambda}_0 = 0$ управление $\hat{u}(t)$ не имеет переключения. При этом, если $\hat{u}(t) = -1$ $\forall t \in [0, t_1]$, то в начало координат $(\hat{x}_1(t_1) = \hat{x}_2(t_1) = 0)$ можно попасть только из точек полупараболы $\hat{x}_1(t) = -\frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t)$, $\hat{x}_2(t) > 0$, так как $\hat{x}_2(t) = t_1 - t$, $\hat{x}_1(t) = -\frac{1}{2}(t_1 - t)^2$. Но начальная точка $\hat{x}_1(0) = -4$, $\hat{x}_2(0) = 4$ не принадлежит этой полупараболе, и, следовательно, случай $\hat{u}(t) = -1$ $\forall t \in [0, t_1]$ для рассматриваемой задачи невозможен. Невозможен в задаче и случай $\hat{u}(t) = +1$ $\forall t \in [0, t_1]$, поскольку в начало координат при этом управлении можно попасть только из точек полупараболы $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t)$, $\hat{x}_2(t) < 0$, а начальная точка расположена вне этой полупараболы.

Итак, при $\hat{\lambda}_0 = 0$ управление $\hat{u}(t)$ не имеет переключения, и при данных начальных условиях допустимых экстремалей в задаче нет.

2) Если $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, то (см. е)) $\hat{\lambda}_0 > 0$. Полагаем $\hat{\lambda}_0 = 1$. Тогда (см. г)) $|\hat{p}_2(\hat{t}_1)| = 1$, и есть две функции $\hat{p}_2(t)$, при которых управление $\hat{u}(t)$ имеет переключение

$$\hat{p}_2^+(t) = c^+(t - t_1) + 1,\ c^+ t_1 > 1,\quad \hat{p}_2^-(t) = c^-(t - t_1) - 1,\ c^- t_1 < -1.$$

(если $c^+ t_1 \leqslant 1$ и $c^- t_1 \geqslant -1$, то функции $\hat{p}_2^+(t), \hat{p}_2^-(t)$ не меняют знака на отрезке $[0, t_1]$ и, следовательно, нет переключения управления.

А тогда, как было показано в п.I, для данных начальных условий в задаче нет допустимых экстремалей).

Функциями $\hat{p}_2^+(t), \hat{p}_2^-(t)$ в силу в) соответствуют оптимальные управления

$$\hat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau \\ +1, & \tau < t \le t_1 \end{cases} \qquad \hat{u}^-(t) = \begin{cases} +1, & 0 \le t < \tau \\ -1, & \tau < t \le t_1 \end{cases}$$

Для значений t, при которых $u(t) = -1$, имеем

$$\dot{x}_2 = -1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \equiv -t + c_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \equiv -\frac{1}{2} x_2^2 + c',$$

т.е. управлению $u(t) = -1$ соответствует движение по одной из парабол семейства $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + c'$, причем движение по каждой из парабол происходит в сторону убывания x_2, так как $\dot{x}_2 = -1$.

Аналогично получим, что управлению $u(t) = +1$ будет соответствовать движение по одной из парабол семейства $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + c''$, и движение по каждой из парабол будет происходить в сторону возрастания x_2, так как $\dot{x}_2 = +1$.

В начало координат после переключения управления можно попасть, как было показано в п.I, либо по полупараболе $\hat{x}_1(t) = -\frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t), \hat{x}_2(t) > 0$, с управлением $\hat{u}(t) = -1$, либо по полупараболе $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t), \hat{x}_2(t) < 0$, с управлением $\hat{u}(t) = +1$. Сами эти полупараболы задают линию переключения управления $\hat{u}(t)$.

Поскольку начальная точка $\hat{x}_1(0) = -4, \hat{x}_2(0) = 4$, как нетрудно установить, расположена выше линии переключения, то для попадания из начальной точки в начало координат в рассматриваемом случае нужно сперва двигаться по одной из парабол семейства $\hat{x}_1(t) = -\frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t) + c'$ с управлением $\hat{u}(t) = -1$ до выхода на линию переключения $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}\hat{x}_2^2(t)$, $\hat{x}_2(t) < 0$, и затем с управлением $\hat{u}(t) = +1$ идти по этой линии переключения в начало координат. Таким образом, в нашей задаче $\hat{u}(t) = \hat{u}^+(t)$

Выяснив характер оптимального управления, определим константу c', координаты точки переключения, время $\hat{t}_n$ прихода в точку переключения и время $\hat{t}_1$ прихода в начало координат. Получим $c' = \hat{x}_1(0) + \frac{1}{2}\hat{x}_2^2(0) = 4$. Координаты точки переключения $(\hat{x}_{1n}, \hat{x}_{2n})$ определятся в результате решения системы: $\hat{x}_{1n} = -\frac{1}{2}\hat{x}_{2n}^2 + 4$, $\hat{x}_{1n} = \frac{1}{2}\hat{x}_{2n}^2$, $\hat{x}_{2n} < 0$. Получим $\hat{x}_{1n} = 2, \hat{x}_{2n} = -2$. Время $\hat{t}_n$ прихода в точку переключения определится интегрированием уравнения: $\dot{\hat{x}}_2(t)=-1$, $\hat{x}_2(\hat{t}_n)=-2$. Получим $\hat{t}_n=6$. Искомое в задаче минимальное время перехода $\hat{t}_1$ из начальной точки в начало координат определится в результате интегрирования уравнения $\dot{\hat{x}}_2(t)=\hat{u}^+(t), \hat{x}_2(\hat{t}_1)=0$. Получим $\hat{t}_1=8$.

4) Покажем, что полученный в итоге решения задачи управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_1)$ и определяет оптимальный переход из заданной начальной точки в начало координат за абсолютно минимальное время $\hat{t}_1$.

Для доказательства предположим, что имеется некий другой управляемый процесс $(x(\cdot), u(\cdot), t_1)$ у которого $t_1 \le \hat{t}_1$, а функцию $x(\cdot)$ на отрезке $[t_1, \hat{t}_1]$ доопределим нулем.

В результате интегрирования по частям с учетом условий на левом конце получим $\int_0^\tau(\tau-s)\ddot{x}(s)ds=-\tau\dot{x}(0)+x(\tau)-x(0)$.
Следовательно, функции $\hat{x}(\cdot)$ и $x(\cdot)$ в точке переключения τ можно представить в виде $x(\tau)=\int_0^\tau(\tau-s)\cdot\ddot{x}(s)ds+\tau\dot{x}(0)+x(0)$,
и поскольку $\ddot{\hat{x}}(s)=-1\le\ddot{x}(s)\ \forall s\in[0,\tau]$, то

$$\hat{x}(\tau)-x(\tau)=\int_0^\tau(\tau-s)(-1-\ddot{x}(s))ds\le 0, \tag{А}$$

Аналогично, с учетом условий на правом конце, функции $\hat{x}(\cdot)$ и $x(\cdot)$ в точке τ можно представить в виде $x(\tau)=\int_\tau^{\hat{t}_1}(s-\tau)\ddot{x}(s)ds$,
и так как $\ddot{\hat{x}}(s)=+1\ge\ddot{x}(s)\ \forall s\in[\tau,\hat{t}_1]$, то

$$\hat{x}(\tau)-x(\tau)=\int_\tau^{\hat{t}_1}(s-\tau)(1-\ddot{x}(s))ds\ge 0. \tag{Б}$$

Условия (А) и (Б) совместны, если $\hat{x}(\tau)-x(\tau)=0$. Но равенство в (А) возможно лишь тогда, если во всех точках непрерывности управления $\ddot{x}(s)=-1$, а в этом случае $x(t)=\hat{x}(t)\ \forall t\in[0,\tau]$. Аналогично, равенство в (Б) возможно лишь тогда, если $\ddot{x}(s)=+1$, а тогда $x(t)=\hat{x}(t)\ \forall t\in[\tau,\hat{t}_1]$.

Таким образом мы показали, что $\hat{x}(\tau)=x(\tau)$, и $x(t)=\hat{x}(t)$ $\forall t\in[0,\hat{t}_1]$. Отсюда $t_1=\hat{t}_1$, и $\hat{t}_1=8$ в рассматриваемой задаче абсолютно минимальное время перехода из заданной начальной точки в начало координат.

Пример 7 (задача оптимального управления).

$$\tau(x(\cdot),t_1)=x(t_1)\to inf,\ \ddot{x}+u(t)x=0,\ x(0)=1,$$

$$\dot{x}(0)=\dot{x}(t_1)=0,\ u(t)\in[1,4]\ \ \forall t\in[0,t_1],$$

причем $\dot{x}(t)\neq 0 \quad \forall t\in(0,t_1)$.

Решение.

0) Формализация.

Сделав замену переменных $x=x_1, \dot{x}=x_2, \ddot{x}=u$, приведем задачу к виду (I.0) - (I.3):

$$\mathcal{B}_0(x(\cdot),u(\cdot),t_1)=x_1(t_1)\to inf, \tag{I.0}$$

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-u(t)x_1, \tag{I.1}$$

$$u\in V=\{u\,/\,1\le u\le 4\}\ \ \forall t\in[0,t_1], \tag{I.2}$$

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_2(t_1)=0, \tag{I.3}$$

t_1 – не задано; $\dot{x}_1(t)\neq 0 \quad \forall t\in(0,t_1)$.

1) Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}=\int_0^{t_1}\big(p_1(t)(\dot{x}_1-x_2)+p_2(t)(\dot{x}_2+ux_1)\big)dt+\lambda_0x_1(t_1)+$$
$$+\lambda_1(x_1(0)-1)+\lambda_2(x_2(0)-0)+\lambda_3(x_2(t_1)-0).$$

Лагранжиан $L=p_1\cdot(\dot{x}_1-x_2)+p_2(\dot{x}_2+ux_1)\equiv p_1\dot{x}_1+p_2\dot{x}_2-H$.

Функция Понтрягина $H=p_1x_2-p_2ux_1$.

Терминант $l=\lambda_0x_1(t_1)+\lambda_1(x_1(0)-1)+\lambda_2x_2(0)+\lambda_3x_2(t_1)$.

2) Необходимые условия оптимальности:

а) система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_i}(t)+\hat{L}_{x_i}(t)=0 \Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t)=-\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial x_i},\ i=1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_1(t)=\hat{u}(t)\hat{p}_2(t),\ \dot{\hat{p}}_2(t)=-\hat{p}_1(t);$$

б) условия трансверсальности по $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(\hat{t}_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{l}}{\partial x_i(t_k)} \Leftrightarrow \hat{p}_i(\hat{t}_k)=(-1)^k\frac{\partial\hat{l}}{\partial x_i(t_k)},\ i=1,2,\ k=0,1,$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_1(0)=\hat{\lambda}_1,\ \hat{p}_2(0)=\hat{\lambda}_2,\ \hat{p}_1(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}_0,\ \hat{p}_2(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}_3;$$

в) условия оптимальности по $u(\cdot)$

$$L(u)\equiv -H(u)=\hat{p}_2(t)\hat{x}_1(t)u,$$

$$\hat{u}(t) = \underset{u\in[1,4]}{\mathrm{argabsmax}}\ H(u) \equiv \underset{u\in[1,4]}{\mathrm{argabsmin}}\ \mathcal{L}(u) \equiv$$

$$\equiv \underset{u\in[1,4]}{\mathrm{argabsmin}}\ (\hat{p}_2 \hat{x}_1 u);$$

г) условие стационарности по t_1

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}}{dt_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_1) = \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial t_1} \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_1(\hat{t}_1)\hat{x}_2(\hat{t}_1) + \hat{p}_2(\hat{t}_1)\hat{x}_1(\hat{t}_1)\hat{u}(\hat{t}_1) = 0.$$

По условию $\hat{x}_2(\hat{t}_1)=0$, поэтому $\hat{p}_2(\hat{t}_1)\hat{x}_1(t_1)\hat{u}(\hat{t}_1)=0$. Поскольку $\hat{u}(t)\in[1,4]$, то $\hat{u}(\hat{t}_1)\neq 0$. Кроме того, $\hat{x}_1(\hat{t}_1)\neq 0$, в противном случае задача Коши: $\ddot{\hat{x}} + u(t)\hat{x}=0$, $\hat{x}(\hat{t}_1)=0$, $\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1)=0$ – имела бы два решения: $\hat{x}(t)\equiv 0$ и $\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) \not\equiv 0$, что в силу теоремы единственности невозможно. Значит, $\hat{p}_2(\hat{t}_1)=0$.

д) условие неотрицательности $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$.

3) Рассмотрим отдельно случаи $\hat{\lambda}_0=0$ и $\hat{\lambda}_0>0$.

1) Если $\hat{\lambda}_0=0$, то (см. б)) $\hat{p}_1(\hat{t}_1)=0$. А так как и $\hat{p}_2(\hat{t}_1)=0$, то в силу единственности решения задачи Коши для сопряженной системы уравнений (см. а)), получим $\hat{p}_1(t)\equiv 0$, $\hat{p}_2(t)\equiv 0$. При этом (см. б)) $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 = 0$, т.е. все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит принципу максимума, и, следовательно, при $\hat{\lambda}_0=0$ допустимых экстремалей нет.

2) Так как $\hat{\lambda}_0\neq 0$, то $\hat{\lambda}_0>0$. Положим $\hat{\lambda}_0=1$. По условию а) $\dot{\hat{p}}_2(\hat{t}_1) = -\hat{p}_1(\hat{t}_1)$, а по условию б) $\hat{p}_1(\hat{t}_1) = -1$. Следовательно, $\dot{\hat{p}}_2(\hat{t}_1)=1$, т.е. в малой окрестности точки $t=t_1$ функция $\hat{p}_2(t)$ возрастает. Так как по условию г) $\hat{p}_2(\hat{t}_1)=0$, то при t, достаточно близких к t_1 и $t<t_1$, $\hat{p}_2(t)<0$. Предположим, что $\hat{p}_2(t)\leq 0$ на всем интервале $(0,t_1)$. Тогда (см. в))

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 4, & \hat{x}_1(t)>0; \\ 1, & \hat{x}_1(t)<0. \end{cases}$$

Решим при такой функции $\hat{u}(t)$ задачу Коши для исходной системы (см. о))

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \ , \ \hat{x}_1(0)=1, \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{u}(t)\hat{x}_1 \ , \ \hat{x}_2(0)=0 \ . \end{cases}$$

Так как $\hat{x}_1(0)=1>0$, то на начальном участке $[0,t_0]$ $\hat{u}(t)=4$ и, следовательно, $\hat{x}_1(t)=A\sin 2t+B\cos 2t$, $\hat{x}_2(t)=2A\cos 2t-2B\sin 2t$. Из начальных условий получаем $A=0$, $B=1$, т.е. при $t\in[0,t_0]$ $\hat{x}_1(t)=\cos 2t$, $\hat{x}_2(t)=-2\sin 2t$.

Первое переключение управления $u(t)$ с $\hat{u}(t)=4$ на $\hat{u}(t)=1$ произойдет в момент t_0, когда $\hat{x}_1(t_0)=0$, т.е. при $t_0=\frac{\pi}{4}$ $(t_0=\min\limits_t(t\,|\,t>0,\hat{x}_1(t)=0))$. При этом $\hat{x}_1(t)\neq 0$ $\forall t\in[0,t_0]$ и $\dot{\hat{x}}_1(\frac{\pi}{4})<0$. Так как $\dot{\hat{x}}_1(t)<0$, по крайней мере при t достаточно близких к t_0 ($t>t_0$), то при этих t $\hat{u}(t)=1$, $\hat{x}_1(t)=a\sin(t-t_0)+b\cos(t-t_0)$, $\hat{x}_2(t)=a\cos(t-t_0)-b\sin(t-t_0)$. Поскольку $(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t))\in KC^1([0,t_1],R^2)$, функции $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ непрерывны при $t=t_0\equiv\frac{\pi}{4}$. Из условия непрерывности получим $a=-2$, $b=0$. Тогда $\hat{x}_1(t)=-2\sin(t-\frac{\pi}{4})$, $\hat{x}_2(t)=-2\cos(t-\frac{\pi}{4})$. А так как $\dot{\hat{x}}(t)\neq 0$ $\forall t\in[t_0,t_1]$, где $t_1=\min\limits_t(t\,|\,t>t_0,\ \hat{x}(t)=0)$, и выполняется граничное условие $\hat{x}_2(t_1)=0$, то $t_1=\hat{t}_1=\frac{3\pi}{4}$

В результате

$$\hat{x}(t)=\begin{cases}\cos 2t \ , & t\in[0,\frac{\pi}{4}], \\ -2\sin(t-\frac{\pi}{4}) \ , & t\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}],\end{cases}$$

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}4, & t\in[0,\frac{\pi}{4}], \\ 1, & t\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}],\end{cases}$$

$$\hat{t}_1=\frac{3\pi}{4} \ , \ \hat{x}(\hat{t}_1)=-2.$$

4) Мы решили задачу в предположении $\hat{p}_2(t)\leq 0$ $\forall t\in(0,t_1)$. Однако непосредственная проверка показывает, что именно полученное решение $\hat{x}(t)$ доставляет функционалу абсолютный минимум.

Действительно, пусть $x(t)$ – произвольная допустимая функция,

т.е. $x(\cdot)\in \mathcal{K}C^2([0,t_1])$, $x(0)=1$, $\dot x(0)=\dot x(t_1)=0$, $\dot x(t)\neq 0$ $\forall t\in(0,t_1)$.
Тогда $x(t)$ убывает на $(0,t_1)$ и обращается в ноль в единственной точке $t_0\in(0,t_1)$. Имеем

$$0=\dot x^2(t_1)-\dot x^2(0)=\int_0^{t_1} 2\dot x\ddot x\,dt=2\int_0^{t_1} ux\dot x\,dt=$$

$$=2\int_0^{t_0} ux\dot x\,dt+2\int_{t_0}^{t_1} ux\dot x\,dt.$$

Так как $x\dot x\le 0$ $\forall t\in[0,t_0]$, $x\dot x\geq 0$ $\forall t\in[t_0,t_1]$, $u\in[1,4]$, то при $u=4$ на $[0,t_0]$ и $u=1$ на $[t_0,t_1]$ получим

$$0\geq 2\int_0^{t_0} 4x\dot x\,dt+2\int_{t_0}^{t_1} 1\cdot x\dot x\,dt=4\int_0^{t_0} d(x^2(t))+\int_{t_0}^{t_1} d(x^2(t))=$$

$$=4x^2(t_0)-4x^2(0)+x^2(t_1)-x^2(t_0)=x^2(t_1)-4.$$

Откуда $x(t_1)\geq -2$. Поскольку $\hat x(t_1)=-2$, абсолютный минимум функционалу $x(t_1)$ доставляет функция $\hat x(t)$. При этом $\tau(\hat x(\cdot),\hat t_1)=-2$, $\hat t_1=\frac{3\pi}{4}$.

§ 2. "НЕПРЯМЫЕ" ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРАКТИКУМЕ

Принцип максимума Понтрягина, как показано в § 1, сводит решение задачи оптимального управления (1.0) - (1.3) к решению краевой задачи (1.4) - (1.9).

В зависимости от способа задания краевых условий $(t_0, x(t_0))$, $(t_1, x(t_1))$ различают следующие основные типы задач оптимального управления:

- А) задачи с фиксированными концами, в которых $x(t_0)$, $x(t_1)$ заданы, а времена t_0, t_1 либо заданы (задачи с фиксированным временем), либо - оба или одно - не заданы (задачи с нефиксированным временем);

- Б) задачи со свободными левым и (или) правым концами, в которых $x(t_0)$ и (или) $x(t_1)$ не заданы. В этом случае также различают задачи с фиксированным временем и задачи с нефиксированным временем;

- В) задачи с подвижными концами, в которых $x(t_0)$ и (или) $x(t_1)$ лежат на некоторых поверхностях, а времена t_0, t_1 либо фиксированы (задачи с подвижными концами и фиксированным временем), либо нефиксированы - одно или оба (задачи с подвижными концами и нефиксированным временем).

В практикуме рассматриваются два "непрямых" метода численного решения задач оптимального управления. В первом методе (задание 1) краевая задача (1.4) - (1.9) решается пристрелкой, заключающейся в решении серии задач Коши, причем в задаче подбора начальных условий, сводящейся к определению корней системы алгебраических уравнений, используется модифицированный метод Ньютона. Во втором методе (задание 2) краевая задача (1.4) - (1.9) решается итерационным методом, предложенным И.А.Крыловым и Ф.Л.Черноусько.

1. Задание 1

Численное решение задачи оптимального управления методом, в котором краевая задача решается пристрелкой

А) Задачи с фиксированными концами

а)$_1$ Задача с фиксированными концами и фиксированным временем.

Рассмотрим сначала задачу (I.0) - (I.3) без изопериметрических условий $(f_i(t,x(t),u(t))\equiv 0,\ i=\overline{1,m})$.

Так как концы x_0, x_1 и времена t_0, t_1 фиксированы, то $\psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=const$, $\psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\equiv x^i(t_0)-x_0^i=0,\ i=\overline{1,n}$; $\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\equiv x^j(t_1)-x_1^j=0,\ j=\overline{1,n},\ m=2n$, и задача (I.0) - (I.3) принимает вид:

$$\mathcal{J}(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt\to\inf \qquad (2.0)_I$$

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t)) \qquad (2.1)_I$$

$$u(t)\in V \quad \forall t\in[t_0,t_1] \qquad (2.2)_I$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \qquad (2.3)_I$$

где $t\in[t_0,t_1]$, $x(\cdot):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ - фазовые переменные, $u(\cdot):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^r$ - управляющие функции (управления), величины t_0,t_1,x_0,x_1 - фиксированы.

Решить задачу $(2.0)_I$ - $(2.3)_I$ означает найти управляющую вектор-функцию $\hat{u}(t)=(\hat{u}^1(t),\dots,\hat{u}^r(t))$ и соответствующую ей траекторию $\hat{x}(t)=(\hat{x}^1(t),\dots,\hat{x}^n(t))$ точки x фазового пространства, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений $(2.1)_I$ и которая за время t_1-t_0, где моменты t_0 и t_1 заданы, перейдет из одного фиксированного состояния $x(t_0)=x_0$ в другое фиксированное состояние $x(t_1)=x_1$ при условии, что функционал $(2.0)_I$ примет при этом минимальное значение.

При решении этой задачи будем следовать правилу решения задач оптимального управления (см. § 1, п.3).

Запишем функцию Понтрягина H:

$$H=\langle p(t),\varphi(t,x(t),u(t))\rangle-\lambda_0 f_0(t,x(t),u(t));$$

терминант: $\ell=\langle\lambda_1,x(t_0)-x_0\rangle+\langle\lambda_2,x(t_1)-x_1\rangle$

и систему условий а) - д) принципа максимума:

а) систему уравнений Эйлера:

$$\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial x}=-\langle\hat{p}(t),\varphi_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))\rangle+\hat{\lambda}_0 f_{0x}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{p}}_i(t)=-\sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j(t)\cdot\frac{\partial\varphi^j(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x^i}+\hat{\lambda}_0\frac{\partial f_0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x^i},\ i=\overline{1,n};$$

б) условия трансверсальности по $x(\cdot)$ в силу фиксированности x_0, x_1 можно не выписывать. Действительно, эти условия имеют вид:

$$\hat{p}(t_0)=\hat{\lambda}_1, \quad \hat{p}(t_1)=-\hat{\lambda}_2$$

и, так как $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ неизвестны, малосодержательны.

в) условия максимума по $u(\cdot)$:

$$\hat{u}(t)=\arg\operatorname{abs}\max_{u\in V} H(t,\hat{x}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0)\equiv u(t,\hat{x}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0), \quad (2.4)_I$$

г) условия стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, так как t_0, t_1 фиксированы;

д) условие неотрицательности: $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$.

Численный метод решения задачи $(2.0)_I$ - $(2.3)_I$, основанный на принципе максимума Понтрягина, заключается в соответствии с теорией (§ 1) в решении граничной (краевой) задачи для системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\hat{x}}^i(t)=\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial p_i}\equiv \varphi^i(t;\hat{x}^1(t),\ldots,\hat{x}^n(t);\hat{u}^1(t),\ldots \hat{u}^r(t)), \quad (2.5)_I$$

$$\dot{\hat{p}}_i(t)=-\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial x^i}=-\sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j(t)\cdot\frac{\partial\varphi^j(t;\hat{x}^1(t),\ldots,x^n(t);\hat{u}_1(t)\ldots,\hat{u}^r(t))}{\partial x^i}+$$

$$+\hat{\lambda}_0\frac{\partial f_0(t;\hat{x}^1(t),\ldots,\hat{x}^n(t);\hat{u}^1(t),\ldots,\hat{u}^r(t))}{\partial x^i}, \quad i=\overline{1,n}$$

где вектор-функция $\hat{u}(t)=(\hat{u}^1(t),\ldots,\hat{u}^r(t))$ определяется условием $(2.4)_I$.

После подстановки функции $\hat{u}(t)$ $(2.4)_I$ в систему уравнений $(2.5)_I$ получается система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $2n$ функций $\hat{x}^i(t), \hat{p}_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. При этом решение системы $(2.5)_I$ должно удовлетворять $2n$ граничным условиям, из которых n условий $\hat{x}^i(t_0)=x_0^i$, $i=\overline{1,n}$, заданы при $t=t_0$, а другие n условий $\hat{x}^i(t_1)=x_1^i$, $i=\overline{1,n}$ заданы при $t=t_1$. Таким образом происходит переход от исходной задачи оптимального управления $(2.0)_I$ - $(2.3)_I$ к граничной (краевой) задаче для системы $2n$ в общем случае нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $(2.5)_I$ при дополнительных условиях $(2.4)_I$.

Итерационный процесс численного интегрирования системы $(2.5)_I$ состоит из последовательного решения задач Коши. Для этого необходимо первоначально как-то задать n недостающих начальных условий $\hat{p}_i(t_0)=\hat{\lambda}_{1i}$, т.е. n чисел $\alpha_i \equiv \hat{\lambda}_{1i}$, $i=\overline{1,n}$. Решив по значениям x_0^i, α_i задачу Коши для системы $(2.4)_I$, $(2.5)_I$, можно на всем отрезке $[t_0,t_1]$ найти функции $\tilde{x}(t)$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{u}(t)$ и, следовательно, $\tilde{x}^i(t_1)\equiv\tilde{x}_1^i$, $i=\overline{1,n}$. Если при этом краевые условия $x^i(t_1)=x_1^i$ удовлетворяются $(\tilde{x}_1^i=x_1^i)$, то задача тем самым будет решена. Если же условия $\tilde{x}_1^i=x_1^i$ не удовлетворяются $(\tilde{x}_1^i\neq x_1^i)$, то вводятся величины, называемые невязками [4]:

$$X^i=\tilde{x}_1^i-x_1^i\ ,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.6$_I$}$$

В общем случае невязки X будут зависеть от вектора начальных значений $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$:

$$X^i\equiv X^i(\alpha)\equiv X^i(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ i=\overline{1,n}$$

и для решения задачи необходимо найти такой вектор α, для которого функции $X^i(\alpha)$ обращаются в нули, т.е. решить систему из n алгебраических уравнений относительно неизвестных α_i, $i=\overline{1,n}$:

$$X^i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0\ ,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.7$_I$}$$

Так исходная задача оптимального управления сводится к задаче определения корней системы уравнений $(2.7)_I$.

Особенностью рассматриваемого алгоритма является то, что вектор-функция $X(\alpha)$ при каждом фиксированном α определяется в результате решения на отрезке $[t_0,t_1]$ задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений $(2.5)_I$ порядка $2n$ с начальными условиями $\hat{x}(t_0)=x_0$, $\hat{p}(t_0)=p_0\equiv\alpha$, причем на каждом шаге τ_k численного интегрирования управляющая вектор-функция $\hat{u}(\tau_k)=(\hat{u}^1(\tau_k),\dots,\hat{u}^r(\tau_k))$ определяется из условия максимума по u функции Понтрягина $u\rightarrow H(\cdot,\cdot,u,\cdot,\cdot)$, т.е. в результате решения в общем случае некоторой задачи нелинейного программирования.

Отметим, что в конкретных вариантах заданий практикума как, впрочем, и в достаточно большом числе реальных прикладных задач, в силу простой структуры функции $u\rightarrow H(\cdot,\cdot,u,\cdot,\cdot)$ и множества V искомая функция $\hat{u}(t)=u(t,\hat{x}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0)$

определяется из простейших соображений.

Для решения задачи Коши могут быть использованы известные методы - метод Рунге-Кутта, метод Адамса и т.п. с различного рода модификациями [12, 13].

Для определения корней системы трансцендентных уравнений $(2.7)_I$ имеется много разнообразных методов [12], [13]. Опишем один из них - модифицированный метод Ньютона решения системы алгебраических уравнений $X(\alpha)=0$, где $X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ - гладкая функция.

Этот метод представляет собой итерационный процесс ([4] - [6], [12], [13]):

$$\alpha_{k+1}^T=\alpha_k^T-\gamma_k\left(X'(\alpha_k)\right)^{-1}\cdot X^T(\alpha_k), \tag{2.8)$_I$}$$

$$0\le\gamma_k\le 1,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где $\alpha_k=(\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{nk})$, $X(\alpha_k)=(X^1(\alpha_k),\ldots,X^n(\alpha_k))$; $X_i'(\alpha_k)$ - матрица, i -я строка которой равна $X_i'(\alpha_k)=$ $=\left(\frac{\partial X_i(\alpha_k)}{\partial\alpha_{1k}},\ldots,\frac{\partial X_i(\alpha_k)}{\partial\alpha_{nk}}\right)$; $(X'(\alpha_k))^{-1}$ - обратная матрица, а индекс "т" означает транспонирование.

Число γ_k в формуле $(2.8)_I$ регулирует выбор шага и определяется из условия сходимости итерационного процесса:

$$S(\alpha_{k+1})<S(\alpha_k), \qquad (2.9)_I$$

где $S(\alpha_k)=\sum_{i=1}^n X_i^2(\alpha_k)$. Причем на каждой итерации сначала берется $\gamma_k=1$ и проверяется условие $(2.9)_I$. Если оно выполняется, то делается следующая итерация, если нет, то γ_k последовательно придаются значения $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2^p},\ldots$ и т.д. до выполнения условия $(2.9)_I$, и затем делается переход к следующей итерации. Признаком окончания процесса вычислений является выполнение условия

$$S(\alpha_k)<\varepsilon, \qquad (2.10)_I$$

где $\varepsilon>0$ - заданная точность.

В классическом методе Ньютона $\gamma_k=1$.

Итерационная формула $(2.8)_I$ модифицированного метода Ньютона в рассматриваемой задаче является итогом следующих рассуждений.

Пусть имеется некоторое начальное приближение $\alpha_0=(\alpha_{01},\dots,\alpha_{0n})$. Решив для системы $(2.5)_I$ задачу Коши с начальными условиями $x(t_0)=x_0,\ p(t_0)=\alpha_0$ получим вектор невязок $X_0=(X_0^1,\dots,X_0^n)$, где $X_0^i=X_0^i(\alpha_{01},\dots,\alpha_{0n}),\ i=\overline{1,n}$. Положим затем $\alpha_1=\alpha_0+\delta_1$, где $\alpha_1=(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1n})$, $\delta_1=(\delta_{11},\dots,\delta_{1n})$, т.е. $\alpha_{1j}=\alpha_{0j}+\delta_{1j},\ j=\overline{1,n}$. Считая, что величины δ_{1j} малы и возможно представление:

$$X^i\equiv X^i(\alpha_{01}+\delta_{11},\dots,\delta_{0n}+\delta_{1n})=$$

$$=X_0^i+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha_0}\cdot\delta_{1j}\quad,\ i=\overline{1,n}\ ;$$

выберем величины δ_{1j} из условия $X^i=0$.

Это условие представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений для неизвестных величин δ_{1j}:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial\alpha_j}\right)_{\alpha=\alpha_0}\cdot\delta_{1j}=-X_0^i\quad,\ i=\overline{1,n} \qquad (2.11)_I$$

Обозначив $\left\|\frac{\partial X^i}{\partial\alpha_j}\right\|_{\alpha=\alpha_0}\equiv X'(\alpha_0),\quad i,j=\overline{1,n}$,

перепишем систему $(2.11)_I$ в виде

$$X'(\alpha_0)\cdot\delta_1^T=-X_0^T\ , \qquad (2.12)_I$$

где индекс "т" означает транспонирование.

В результате решения системы $(2.12)_I$ определится вектор-столбец δ_1^T неизвестных $\delta_{1j},\ j=\overline{1,n}$:

$$\delta_1^T=-(X'(\alpha_0))^{-1}\cdot X_0^T,$$

где $(X'(\alpha_0))^{-1}$ обратная матрица.

Зная δ_{1j}, найдем вектор $\alpha_1=(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1n})$, где $\alpha_{1j}=\alpha_{0j}+\delta_{1j},\ j=\overline{1,n}$. Решив делее задачу Коши для системы $(2.5)_I$ с начальными условиями $x(t_0)=x_0,\ p(t_0)=\alpha_1$, получим вектор невязок $X_1=(X_1^1,\dots,X_1^n)$ и проверим условие $(2.10)_I$. Если оно выполняется, то величины $\alpha_{1j},\ j=\overline{1,n}$, будут искомыми приближенными значениями корней системы уравнений $X(\alpha)=0$, если не выполняется, образуем вектор $\alpha_2=\alpha_1+\delta_2$ и повторим вычисления. В результате получим итерационный процесс классического метода Ньютона:

$$\alpha_{k+1}^T=\alpha_k^T+\delta_{k+1}^T\quad,\ k=0,1,2,\dots, \qquad (2.13)_I$$

где

$$\delta^T_{k+1} = -\left(X'(\alpha_k)\right)^{-1} \cdot X^T(\alpha_k).$$

Дополнив формулу $(2.13)_I$ множителем γ_k, получим итерационный процесс $(2.8)_I$ модифицированного метода Ньютона.

Метод Ньютона называют также методом касательных, основываясь на известной его геометрической интерпретации [4]. Если начальное приближение α_0 достаточно близко к значению корня, то для многих задач метод Ньютона сходится очень быстро. Однако при неудачном выборе начального приближения α_0 метод Ньютона может расходиться ([4], [5], [12], [13]).

В некоторых конкретных вариантах задания 1 начальное приближение α_0 либо задается, либо указывается алгоритм его определения.

Элементы входящей в итерационный процесс матрицы производных $X'(\alpha)$ вычисляются по приближенным конечно-разностным формулам:

$$\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j} = \frac{X^i(\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{j-1k},\alpha_{jk}+\Delta\alpha_{jk},\alpha_{j+1k},\ldots,\alpha_{nk}) - X^i(\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{nk})}{\Delta\alpha_j} \qquad (2.14)_I$$

где $\Delta\alpha_{jk}$ - малые приращения величины α_{jk}, $i,j = \overline{1,n}$.

Для вычисления $\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}$, $i,j=\overline{1,n}$ требуется на каждой итерации $(n+1)$ раз решать задачу Коши для системы $(2.5)_I$: сперва решить ее для вектора $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, а затем еще n раз, придавая поочередно приращения $\Delta\alpha_{jk}$ всем компонентам вектора α. Числа $\Delta\alpha_{jk}$ при этом должны быть достаточно малыми, чтобы точность формул $(2.14)_I$ была высокой, но не должны быть меньше, чем порядок величины погрешности численного интегрирования системы $(2.5)_I$ [7].

Для построения обратной матрицы необходимо воспользоваться известными методами высшей алгебры.

Алгоритм численного решения задачи $(2.0)_I$ - $(2.3)_I$

1. Задаем точность ε выполнения условия $(2.10)_I$. Задаем вектор начального приближения $\alpha_0=(\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0n})$.

2. По начальным условиям $\hat{x}(t_0)=x_0$, $\hat{p}(t_0)=\alpha_0$ решаем до $t=t_1$ задачу Коши для системы $(2.5)_I$, вычисляя для этого на каждом шаге управление $\hat{u}(t)$, и определяем $\hat{x}(t_1)$.

3. Составляем вектор невязок $X(\alpha)=\tilde{x}(t_1)-x_1$ и с помощью метода Ньютона находим решение $\alpha^*=(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ системы уравнений $X(\alpha)=0 \Leftrightarrow X^i(\alpha)=0$, $i=\overline{1,n}$.

4. Решаем до $t=t_1$ задачу Коши для системы $(2.5)_I$ с начальными условиями $x(t_0)=x_0$, $p(t_0)=\alpha^*$ и находим искомые: оптимальное управление $\hat{u}(t)$, фазовую траекторию $\hat{x}(t)$ и значение функционала $\hat{J}=J(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$.

$\text{а})'_I$ Задача с фиксированными концами и фиксированным временем при наличии изопериметрических условий.

Распространим рассмотренный в п. $\text{а})_I$ метод на задачи, в которых в число условий $(2.3)_I$ входят изопериметрические условия

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),u(t))dt - a_j = 0,\ j=\overline{1,m},$$

где $-a_j=\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$ – постоянные величины.

В этом случае:

$$H=\langle p(t),\varphi(t,x(t),u(t))\rangle-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,x(t),u(t)),$$

$$\ell=\langle\lambda_1,x(t_0)-x_0\rangle+\langle\lambda_2,x(t_1)-x_1\rangle+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i,$$

а система уравнений $(2.5)_I$ имеет вид

$$\dot{\hat{x}}^i(t)=\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial p_i}\equiv\varphi^i(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),\quad i=\overline{1,n}, \qquad (2.5)'_I$$

$$\dot{\hat{p}}_i(t)=-\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial x^i}\equiv-\sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j(t)\frac{\partial\varphi^j(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x^i}+\sum_{j=0}^{m}\hat{\lambda}_j\frac{\partial f_j(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x^i},$$

где

$$\hat{u}(t)=\arg\operatorname{absmax}_{u\in U} H(t,\hat{x}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m)\equiv$$

$$\equiv\mathcal{U}(t,\hat{x}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m). \qquad (2.4)'_I$$

Нетрудно видеть, что в правые части дифференциальных уравнений для $\hat{p}_i(t)$ и в число аргументов функции H в качестве неизвестных параметров вошли множители $\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m$ (при этом $\hat{\lambda}_0=1$ или $\hat{\lambda}_0=0$). Поэтому при численном решении краевой задачи для системы $(2.4)'_I$, $(2.5)'_I$, состоящем в последовательном решении задач Коши, параметры $\hat{\lambda}_i$, $i=\overline{0,m}$, должны быть заданы наряду с параметрами $\alpha_i=\beta_i(t_0)$, $i=\overline{1,n}$.

В связи с этим вектор невязок X будет зависеть уже не только от вектора $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, но и от вектора $\hat{\lambda}=(\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m)$, $\hat{\lambda}_0$ и для определения векторов $\alpha, \hat{\lambda}$ необходимо решить методом Ньютона систему из $n+m$ алгебраических уравнений:

$$X(\alpha,\hat{\lambda})=0, \tag{2.7$'_I$}$$

где

$$X(\alpha,\hat{\lambda})=\left\{X^1(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m),\dots,X^{n+m}(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\hat{\lambda}_1,\dots\hat{\lambda}_m)\right\},$$

$$X^i=\begin{cases}\tilde{x}^i_1-x^i_1\,, & i=\overline{1,n}\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))dt-a_i\,, & i=\overline{1,m}\,.\end{cases} \tag{2.6$'_I$}$$

В остальном алгоритм численного решения этой задачи совпадает с алгоритмом численного решения задачи $(2.0)_I$ - $(2.3)_I$.

Варианты заданий см. в Приложении I(A,a).

б) Задача с фиксированными концами и нефиксированным временем.

Пусть нефиксировано только время t_1.

Задача (I.0) - (I.3) в этом случае имеет вид

$$B_0(x(\cdot),u(\cdot),t_1)\equiv\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt+\Psi_0(t_1)\to\inf,$$

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),$$

$$u(t)\in V\quad\forall t\in[t_0,t_1],$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_1)\equiv\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt+\Psi_i(t_1)=0,\quad i=\overline{1,m}.$$

Функция Понтрягина и терминант

$$H = \langle p(t), \varphi(t, x(t), u(t)) \rangle - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x(t), u(t)),$$

$$\ell = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_1).$$

Поскольку для этой задачи уравнение Эйлера и условия оптимальности по $u(\cdot)$ те же, что и в случае а)$'_{I}$, то сохранятся условия (2.4)$'_{I}$ и система уравнений (2.5)$'_{I}$. В силу нефиксированности t_1 необходимо учесть условие трансверсальности по t_1: $\hat{H}(\hat{t}_1) = \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial t_1}$. По этой же причине вектор невязок X будет зависеть уже не только от векторов α и $\hat{\lambda}$, но и от времени t_1. Для определения $\alpha, \hat{\lambda}, t_1$ необходимо в рассматриваемом случае решить методом Ньютона систему из $n+m+1$ алгебраических уравнений:

$$X(\alpha, \hat{\lambda}, t_1) = 0,$$

где

$$X(\alpha, \hat{\lambda}, t_1) = \left\{ X^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m; t_1); \ldots; X^{n+m+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m; t_1) \right\},$$

$$X^i = \begin{cases} \tilde{x}_1^i - x_1^i, & i = \overline{1,n} \\ \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\,dt + \psi(\tilde{t}_1), & i = \overline{1,m} \\ \tilde{H}(\tilde{t}_1) - \frac{\partial \tilde{\ell}}{\partial t_1} & \end{cases},$$

а $\tilde{x}(t), \tilde{p}(t), \tilde{u}(t)$ – функции, получающиеся в результате решения задачи Коши для системы (2.5)$'_{I}$ при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = \alpha$ и $\hat{\lambda} = \lambda$.

Алгоритм численного решения этой задачи совпадает с алгоритмом численного решения задачи (2.0)$_{I}$ – (2.3)$_{I}$ и задачи А, а)$'_{I}$.

Отметим лишь, что для определения момента $\tilde{t}_1$ окончания интегрирования на каждой итерации нужно выделить одно из условий $x^i(t_1) = x_1^i$, $i = \overline{1,n}$.

Варианты заданий см. в Приложении I (А, б).

Б) Задачи со свободными концами.

а) Задача со свободными концами и фиксированным временем.

Будем считать свободным только правый конец $x(t_1)$. Задача (1.0) - (1.3) в этом случае имеет вид

$$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \Psi_0(x(t_1)) \to \inf,$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u(t)),$$

$$u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0,t_1],$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt + \Psi_i(x(t_1)) = 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Функция Понтрягина и терминант

$$H = \langle p(t), \varphi(t,x(t),u(t)) \rangle - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x(t),u(t)),$$

$$\ell = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Psi_i(x(t_1)).$$

Условие $(2.4)_I$ и система $(2.5)_I$ те же, что и в случае А, $а)_I$, а нефиксированность $x(t_1)$ порождает условие трансверсальности по $x(t_1)$:

$$\hat{p}(t_1) = -\frac{\partial \hat{\ell}}{\partial x(t_1)} \equiv -\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i \frac{\partial \Psi_i(\hat{x}(t_1))}{\partial x(t_1)}.$$

Вектор невязок X будет зависеть от α и $\hat\lambda$, и для определения $\alpha, \hat\lambda$ необходимо решить методом Ньютона систему $n+m$ алгебраических уравнений $X(\alpha, \hat\lambda)=0$, где $X(\alpha,\lambda)=\{X^1,\dots,X^{n+m}\}$ $X^i=X^i(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\hat\lambda_1,\dots,\hat\lambda_m)$, $i=\overline{1,n+m}$, причем

$$X^i=\begin{cases}\int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t,\tilde x(t),\hat u(t))dt+\psi_i(\tilde x(t)), & i=\overline{1,m}\\ \tilde p_i(t_1)+\sum\limits_{j=0}^{m}\tilde\lambda_j\dfrac{\partial\psi_j(\tilde x(t_1))}{\partial x^i(t_1)}, & i=\overline{1,n}.\end{cases}$$

В случае, если нефиксирована только часть составляющих вектора $x(t_1)=(x^1(t_1),\dots,x^n(t_1))$ (например, первые "к" составляющих), а остальные фиксированы, компоненты X^i вектора невязок будут иметь вид

$$X^i=\begin{cases}\int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t,\tilde x(t),\tilde u(t))dt+\psi_i(\tilde x(t_1)), & i=\overline{1,m}\\ \tilde p_i(t_1)+\sum\limits_{j=0}^{m}\tilde\lambda_j\dfrac{\partial\psi_j(\tilde x(t_1))}{\partial x^i(t_1)}, & i=\overline{1,k}\\ \tilde x^i(t_1)-x^i_1, & i=\overline{k+1,n}\end{cases}$$

Если $f_i(t,x(t),u(t))\equiv 0$, $i=\overline{1,m}$, то правые части дифференциальных уравнений для $\hat p_i(t)$ не зависят от $\hat\lambda_i$, $i=\overline{1,m}$, а в условие трансверсальности по $x(t_1)$ $\hat\lambda_i$ входят. В этом случае $\hat\lambda_i$, $i=\overline{1,m}$ из условий трансверсальности можно исключить, рассматривая эти условия как систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\hat\lambda_1,\dots,\hat\lambda_m$, $m<n$ (при этом $\lambda_0=1$ или $\lambda_0=0$). В результате исключения получим зависимости: $\Phi_i(t_1,\tilde x(t_1),\tilde p(t_1),\hat\lambda_0)=0$, $i=\overline{1,n-m}$, и компоненты X^i, $i=\overline{1,m}$ вектора невязок будут иметь вид

$$\chi^i = \begin{cases} \Psi_i(\tilde{x}(t_1)), \ i = \overline{1,m}; \\ \Phi_i(t_1, \tilde{x}(t_1), \tilde{p}(t_1), \hat{\lambda}_0), \ i = \overline{1, n-m}. \end{cases}$$

И, наконец, если $B_i(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv 0 \ (f_i(t, x(t), u(t)) \equiv 0,$ $\Psi_i(x(t_1)) \equiv 0), \ i = \overline{1,m}$, иными словами $m = 0$, то условия трансверсальности обретают вид $\hat{p}_i(t_1) = 0, \ i = \overline{1,n}$, а составляющими вектора невязок будут

$$X^i = \tilde{p}_i(t_1), \ i = \overline{1,n}.$$

Алгоритм численного решения задачи Б, а) совпадает с алгоритмом решения задачи А, а)$_I'$.

Варианты заданий см. в Приложении I (Б, а).

б) Задача со свободными (или частично свободными) концами и нефиксированным временем.

Будем считать свободным только правый конец $x(t_0)$, а нефиксированным только время t_1.

В этом случае функционалы $B_i, \ i = \overline{0,m}$, будут иметь вид

$$B_i(x(\cdot), u(\cdot), t_1) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + \Psi_i(t, x(t_1)), \ i = \overline{0,m},$$

а дифференциальная связь и ограничение на управление будут такими же, как и в предыдущих случаях. Сохранится также функция H (см. случай Б, а)), а терминант ℓ примет вид

$$\ell = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Psi_i(t_1, x(t_1)).$$

Составляющие $X^i, \ i = \overline{1, m+n+1}$ вектора невязки будут такими же, как и в случае (Б, а)) с добавлением условия $\tilde{H}(\tilde{t}_1) - \dfrac{\partial \ell}{\partial t_1}$ (см. случай А, б)). Сохранится и алгоритм численного решения задачи. Для определения на каждой итерации момента $\tilde{t}_1$ окончания интегрирования нужно выделить одно из условий $\beta_i(x(\cdot),u(\cdot),t_1)=0$, $i=\overline{1,m}$.

Варианты заданий см. в Приложении I (Б, б)).

В) Задачи с подвижными концами.

В этих задачах $x(t_0)$ и (или) $x(t_1)$ лежат на некоторых поверхностях, а времена t_0, t_1 либо фиксированы, либо нефиксированы. Пусть, например, нефиксировано время t_1, а на поверхности лежит $x(t_1)$, т.е. t_1 и $x(t_1)$ удовлетворяют условию $\gamma(t_1,x(t_1))=0$, где $\gamma=\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}$. Эти условия являются дополнительными к условиям задачи Б, б) и, как нетрудно видеть, могут быть приведены к стандартному виду (1.3) условий этой задачи. Действительно,

$$\tilde{\gamma}_i(t_1,x(t_1))\equiv\int_{t_0}^{t_1}0\cdot dt+\gamma_i(t_1,x(t_1))=0,\quad i=\overline{1,k}.$$

Таким образом задача оптимального управления типа В) является частным случаем задачи типа Б).

Примечание 1.

Во всех рассматирваемых в практикуме задачах существование решения задачи (1.0) - (1.3) предполагается, ровно как и выполнение условия регулярности: $\hat{\lambda}_0=1$.

Примечание 2.

Если задача (1.0) - (1.3) <u>автономна</u>, то, как указывалось выше (см. § 1), система дифференциальных уравнений принципа максимума (1.4), (1.5) имеет первый интеграл $H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda})=C$, где $C=H(x_0,\hat{u}(t_0),\alpha_0,\hat{\lambda}_0,\hat{\lambda})$, который может быть использован для контроля проводимых вычислений.

Если же задача (1.0) - (1.3) <u>автономна</u> и хотя бы один из моментов времени t_0,t_1 нефиксирован, то первый интеграл имеет вид $\hat{H}(t)=0$ (для задач быстродействия $\hat{H}(t)=\hat{\lambda}_0$). В этом случае первый интеграл может быть использован не только для контроля проводимых вычислений, но и позволяет уменьшить на единицу число подлежащих определению начальных параметров α_i, $i=\overline{1,n}$; λ_i, $i=\overline{1,m}$, поскольку один из этих параметров при заданных остальных может быть вычислен с помощью условия $\hat{H}(t)=0$ (или $\hat{H}(t)=\hat{\lambda}_0$)

Примечание 3.

Задача оптимального управления (1.0) - (1.3) с функционалами

Больца $B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1),\ i=\overline{0,m}$, путем увеличения размерности фазового пространства задачи в результате замены $\dot{x}_{n+1+i}(t)=f_i(t,x(t),u(t))$, где $x_{n+1+i}(t_0)=0,\ i=\overline{0,m}$, может быть сведена к задаче оптимального управления с функционалами Майера:

$$\tau_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)\equiv x_{n+1}(t_1)+\Psi_0(t_0,x(t_0);t_1,x(t_1))\to\inf$$

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\ u(t)\in U\ \ \forall t\in[t_0,t_1],$$

$$\tau_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)\equiv x_{n+1+i}(t_1)+\Psi_i(t_0,x(t_0);t_1,x(t_1))=0,$$
$$i=\overline{1,m}$$

$$x_{n+1+i}(t_0)=0,\ i=\overline{1,m},$$

где

$$x(t)=(x^1(t),\ldots,x^{n+1+m}(t)),$$

$$\varphi(t)=(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t),f_0(t),\ldots,f_m(t)),$$

$$u(t)=(u^1(t),\ldots,u^r(t)).$$

Поскольку эта задача является частным случаем задачи (1.0) - (1.3), алгоритм ее численного решения тот же, что и изложенный выше алгоритм численного решения задачи (1.0) - (1.3).

2. Задание 2

Численное решение задачи оптимального управления итерационным методом И.А.Крылова и Ф.Л.Черноусько.

1) Рассмотрим задачу оптимального управления (1.0) - (1.3) при $m=0$ и фиксированных $t_0, x(t_0)$, т.е. задачу со свободным правым концом траектории:

$$B_0(x(\cdot),u(\cdot),t_1)\equiv\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),u(t))dt+\Psi_0(t_1,x(t_1))\to\inf \quad (2.0)_2$$

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t));\qquad (2.1)_2$$

$$u(t)\in V\quad \forall t\in[t_0,t],\qquad (2.2)_2$$

$$x(t_0)-x_0=0\ .\qquad (2.3)_2$$

Выписав для задачи $(2.0)_2$ - $(2.3)_2$ функции H и ℓ :

$$H=\langle p(t),\varphi(t,x(t),u(t))\rangle-\lambda_0 f_0(t,x(t),u(t)),$$

$$\ell=\lambda_0\Psi_0(t_1,x(t_1))$$

запишем условия (1.4) - (1.9) краевой задачи, к которой принцип максимума сводит задачу $(2.0)_2$ - $(2.3)_2$:

$$\dot{\hat{x}}(t)=\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial p}\equiv\varphi(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),$$

$$\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial x},\qquad (2.4)_2$$

$$\hat{H}(t)=H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0),$$

$$\hat{u}(t)=\underset{u\in V}{\mathrm{argabsmax}}\,H(t,\hat{x}(t),u,\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0)\equiv \equiv u(t,\hat{x}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}_0),\qquad (2.5)_2$$

$$x(t_0)-x_0=0,\qquad (2.6)_2$$

$$\hat{p}_j(t_1)=-\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial x_j(t_1)}\equiv-\hat{\lambda}_0\frac{\partial\hat{\Psi}_0(t_1,x(t_1))}{\partial x_j(t_1)},\ j=\overline{1,n},\qquad (2.7)_2$$

$$\hat{H}(\hat{t}_1)=\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial t_1}\equiv\hat{\lambda}_0\frac{\partial\hat{\Psi}_0(t_1,x(t_1))}{\partial t_1},\qquad (2.8)_2$$

$$\hat{\lambda}_0\geq 0\ .\qquad (2.9)_2$$

Отметим, что условия $(2.7)_2$ присутствуют лишь в задачах с нефиксированным $x(t_1)$, а условие $(2.8)_2$ в задачах с нефиксированным t_1.

Для численного решения задачи $(2.4)_2$ - $(2.9)_2$ воспользуемся итерационным методом, предложенным И.А.Крыловым и Ф.Л.Черноусько [8]-[10]. Этот метод основывается на предварительном знании хотя бы на качественном уровне структуры оптимального управления

$u^{(1)}(t)$ вдоль будущей оптимальной траектории и содержит алгоритм последовательного улучшения этого управления и соответствующей ему траектории. В реальной практике при задании начального управления $u^{(1)}(t)$ обычно используются различного рода физические соображения.

Алгоритм численного решения задачи $(2.0)_2$ - $(2.3)_2$ (простейший вариант итерационного метода).

Пусть в задаче $(2.0)_2$ - $(2.3)_2$ время t_1 фиксировано, т.е. рассматривается задача со свободным правым концом и фиксированным временем - частный случай задачи Б, а) задания 1.

Из каких-то априорных соображений в качестве начального приближения задается некоторое допустимое управление $u^{(1)}(t) \in U$ (см. Приложение П), Далее итерационный метод состоит из последовательности итераций; K-я итерация заключается в следующем ($K = 1, 2, \ldots$):

1) решается задача Коши для системы $(2.1)_2$ с начальным условием $x^{(K)}(t_0) = x_0$ и управлением $u^{(K)}(t)$; интегрирование системы $(2.1)_2$ проводится до заданного t_1; в результате интегрирования определяется вектор-функция $x^{(K)}(t)$ и, в том числе, вектор $x^{(K)}(t_1)$;

2) по формуле $(2.7)_2$ вычисляются $p_j^{(K)}(t_1)$:

$$p_j^{(K)}(t_1) = -\hat{\lambda}_0 \frac{\partial \psi_0(x(t_1))}{\partial x_j(t_1)}, \; j = \overline{1,n}, \; \hat{\lambda}_0 = 1, \qquad (2.9)_2$$

и поскольку вектор $x(t_1) = x^{(K)}(t_1)$ известен, то $p_j^{(K)}(t_1)$ - известны; в частности, если а) $\psi_0(x(t_1)) \equiv 0$, б) $\psi_0(x(t_1)) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j(t_1)$, то а) $p_j^{(K)}(t_1) = 0$, б) $p_j^{(K)}(t_1) = -c_j, \; j = \overline{1,n}$;

3) "справа налево" (от t_1 до t_0) решается задача Коши для системы $\dot{p}_j(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x_j}$ (см. $(2.4)_2$) при начальном условии $p_j(t_1) = p_j^{(K)}(t_1)$ и известных $u(t) = u^{(K)}(t), x(t) = x^{(K)}(t)$; в результате на отрезке $[t_0, t_1]$ определяются сопряженные переменные $p_j^{(K)}(t), j = \overline{1,n}$;

4) из условия

$$u^{(K+1)}(t) = \arg\operatorname{abs}\max_{u \in U} H(t, x^{(K)}(t), u, p^{(K)}(t), \hat{\lambda}_0), \qquad (2.10)_2$$

на отрезке $[t_0,t_1]$ определяется вектор-функция управления $u^{(K+1)}(t)$ для ($K+1$)-ой итерации метода; если это управление определя... неод... , то выбирается любое из его возможных значен... посл... ...лается переход к следующей итерации и т.д.

...эсс последовательных приближений сходится: ... то о... ...тся до выполнения условия $|B_0^{(K+1)} - B_0^{(K)}|$ ... где ... ...я точность, а $B_0^{(K)}, B_0^{(K+1)}$ – значения функ... отвеч... ...и ($K+1$)-ой итерации. Полученное ... удовле... ...инципу максимума [9].

С... ...простейший вариант итерационно... ме... случае ... не всегда сходится.

В ...ном случае, когда функции $f_0(...)$ ... $=(\varphi^1(t,x,u),\ldots,\varphi^n(t,x,u))$ линейны п... т.е.

$$f_0(t,x,u)=\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(t)x^j + b_0(t, ...$$

$$\varphi^i(t,x,u)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x^j + b_i(t,u)$$

где $a_{\nu j}(t),\ b_\nu(t,u),\ \nu=\overline{0,n},\ j=\overline{1,n}$ – за... ция ... $(t_1, x(t_1))$ имеет вид

$$(t_1,x(t_1))=(c,x(t_1))\equiv\sum_{j=1}^{n} c_j ...$$

где ... $(c_1,\ldots,c_n)$ ненулевой постоян... вариан... ...ерационного метода дает оптима... второй ... ...ации при любом начальном прибли...

Дейс...ительно, в этом частном случае ... ных уравн...й $(2.4)_2$ для сопряженных перем... сит от фаз...х координат x^i и управлений ...

$$\dot{\hat{p}}_j(t)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\hat{p}_i(t)+a_{0j}(t),$$

а условие (2....) имеет вид

$$\hat{p}_j(t_1)= c_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Система уравнений $(2.11)_2$ при начальных условия...

быть проинтегрирована "справа налево" (от $t=t_1$ до $t=t_0$) независимо от основной системы $(2.1)_2$, условия $(2.5)_2$ и выбо... ...чального приближения $u^{(1)}(t)$ для управления, т.е. решение ...дачи Коши для системы $(2.11)_2$ при начальных ус...

будет искомой вектор-функцией сопряженных ...

как, кроме того, в рассматриваемом случае ... H ... представлена в виде $H = H_1 + H_2$, где

$$\left(p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(t)-\hat{\lambda}_0 a_{0j}(t)\right)\right.$$

от u, а функция

$$\sum^{n} f_i(t,u) - \lambda_0 f_0(t,u)$$

...ит лишь от t, u и уже найденной век... ...равление, которое определится в резуль... ...ли H_2) по u ...(2.5)$_2$), будет искомым ...ем $\hat{u}(t)$. Проинте...вав затем исходную ... при $x(t_0)=x_0$, $u(t$ ... $\hat{u}(t)$, получим опти... $\hat{x}(t)$.

... доказано, что в рассматриваемом случае про... ...нного метода сходится уже на второй ит... ...дает $\hat{p}(t)$, $\hat{u}(t)$, вторая - оптималь...

...войства рассматриваемого итерацион... ...лы приращения функционала ΔB_0, которые ...ое управление $u(t)$ заменить другим. По... $u(t)+\delta u(t)$.

...ния функционала имеет вид [9]

...чать приращения:

$$\ldots(t, u(t)+\delta u(t), p(t), \lambda_0) - H(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0)\Big]dt, \qquad (2.13)_2$$

...ен, причем

$$\ldots\left(\sum_{i=1}^{r}|\delta u_i(t)|\right)dt\Big)^2, \quad c = const \qquad (2.14)_2$$

Заметим, что формулы $(2.13)_2$, $(2.14)_2$ применимы при характерных для принципа максимума игольчатых вариациях управления.

Поскольку, согласно $(2.10)_2$,

$$H(t,x^{(k)}(t),u^{(k+1)}(t),p^{(k)}(t),\lambda_0)=\max_{u\in U} H(t,x^{(k)}(t),u,p^{(k)}(t),\lambda_0),$$

где $u^{(k+1)}(t)=u^{(k)}(t)+\delta u^{(k)}(t)$, то, как следует из формул $(2.13)_2$, $(2.14)_2$, в рассматриваемом простейшем варианте итерационного метода на каждой итерации главная чать приращения функционала δB_0 отрицательна и наибольшая по абсолютной величине среди главных частей приращений, получаемых при всевозможных допустимых вариациях управления [8]. Таким образом, если остаточный член α мал по сравнению с δB_0, то $\Delta B_0<0$, и функционал B_0 от итерации к итерации будет убывать: $B_0^{(k+1)}<B_0^{(k)}$.

Из-за влияния остаточного члена α простейший вариант итерационного метода может не сходиться. Существует несколько способов улучшения его сходимости, позволяющих добиваться сходимости или ускорить сходимость в тех случаях, когда простейший вариант метода расходится или сходится медленно [8] - [10]. Простейший из них состоит в том, что формула $(2.10)_2$ для определения нового приближения $u^{(k+1)}(t)$ применяется не на всем отрезке $[t_0,t_1]$, а лишь на его части $[t'_k,t_1]$, где $t_0<t'_k<t_1$, а на отрезке $[t_0,t'_k]$ сохраняется прежнее управление $u^{(k+1)}(t)=u^{(k)}(t)$ $\forall t\in[t_0,t'_k]$. При $t'_k=t_0$ получается простейший вариант метода, а при $t'_k\to t_1$ остаточный член α в формуле $(2.14)_2$ стремится к нулю быстрее, чем главный член в формуле $(2.13)_2$. Таким образом t'_k служит для регулирования сходимости метода. Управляя на каждой итерации параметром t'_k, можно как правило, добиться уменьшения функционала B_0 [10].

Сходимость метода последовательных приближений в целом изучена недостаточно. Среди работ, посвященных исследованию сходимости метода, отметим работы [6], [9], а также работу [11], в которой показана сходимость изложенного метода для одного класса линейных задач с квадратичным функционалом.

2) Сделаем некоторые обобщения простейшего варианта итерационного метода, рассмотренного в п.1 этого задания.

Пусть в задаче оптимального управления (1.0) - (1.3) по-прежнему $t_0, x(t_0)$ фиксированы, а $m=1$, $f_1(t,x(t),u(t))\equiv 0$ и $t_1, x(t_1)$ не фиксированы. Тогда условие $(2.3)_2$ п.1 будет иметь вид

$$x(t_0)-x_0=0\ ,\quad \psi_1(t_1,x(t_1))=0. \tag{$(2.3)_2$}$$

Изменение условия $(2.3)_2$ не повлияет на функцию H и условия $(2.4)_2$, $(2.5)_2$, $(2.9)_2$, а функция ℓ и условия $(2.6)_2$ - $(2.8)_2$ примут вид

$$\begin{aligned}&\ell=\lambda_0\psi_0(t_1,x(t_1))+\lambda_1\psi_1(t_1,x(t_1)),\\ &x(t_0)-x_0=0\ ,\quad \psi_1(t_1,x(t_1))=0,\end{aligned} \tag{$(2.6)_2'$}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_j(\hat{t}_1)=-\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial x_j(t_1)}\equiv-\hat{\lambda}_0\frac{\partial\hat{\psi}_0(t_1,x(t_1))}{\partial x_j(t_1)}\,-\\ -\hat{\lambda}_1\frac{\partial\hat{\psi}_1(t_1,x(t_1))}{\partial x_j(t_1)}\,,\quad j=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{$(2.7)_2'$}$$

$$H(\hat{t}_1)=\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial t}\equiv\hat{\lambda}_0\frac{\partial\hat{\psi}_0(t_1,x(t_1))}{\partial t_1}+\hat{\lambda}_1\frac{\partial\hat{\psi}_1(t_1,x(t_1))}{\partial t_1}\,, \tag{$(2.8)_2'$}$$

Условие $(2.8)_2'$ можно записать в виде (см. условие г) основной теоремы)

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt_1}=0,$$

где

$$\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1}\Big(\lambda_0 f_0(t,x(t),u(t))+\langle p(t),\dot{x}-\varphi(t,x(t),u(t))\rangle\Big)dt+\ell,$$

т.е. в виде

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_0 f_0(\hat{t}_1,\hat{x}(t_1),\hat{u}(t_1))+\hat{\lambda}_0\cdot\frac{d\hat{\psi}_0(t_1,x(t_1))}{dt_1}\,+\\ +\hat{\lambda}_1\cdot\frac{d\hat{\psi}_1(t_1,x(t_1))}{dt_1}=0.\end{aligned} \tag{$(2.8)_2''$}$$

Исключив с помощью $(2.8)_2''$ множитель $\hat{\lambda}_1$ из условия $(2.7)_2'$ и предполагая, что полная производная $\frac{d\hat{\Psi}_1}{dt}$ в нуль не обращается, получим

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = +\hat{\lambda}_0 \cdot \left(-\frac{\partial \hat{\Psi}_0(t_1, x(t_1))}{\partial x(t_1)} + \frac{\partial \hat{\Psi}_1(t_1, x(t_1))}{\partial x(t_1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{f_0(t_1, \hat{x}(t_1), \hat{u}(t_1)) + \frac{d\hat{\Psi}_0(t_1, x(t_1))}{dt_1}}{\frac{d\hat{\Psi}_1(t_1, x(t_1))}{dt_1}} \right). \qquad (2.7)_2''$$

Далее итерационный метод следует алгоритму своего простейшего варианта, а именно - на к-ой итерации ($k = 1,2,\ldots$) решается задача Коши для системы $(2.1)_2$ при заданном $u(t) = u^{(k)}(t)$ до выполнения условия $\Psi_1(t_1, x(t_1)) = 0$, определяющего момент $t_1^{(k)}$ на данной итерации; по формуле $(2.7)_2''$ вычисляется $p^{(k)}(t_1^{(k)})$, причем полные производные $\frac{d}{dt_1}$ в точке $t_1^{(k)}$ определяются через конечно-разностные соотношения последнего шага интегрирования системы $(2.1)_2$; интегрируется система $\dot{p}^{(k)}(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x}$ (см. $(2.4)_2$) от $t_1^{(k)}$ до t_0; по формуле $(2.10)_2$ определяется управление для следующей итерации. Поскольку длительность процесса интегрирования от итерации к итерации может возрастать, нужно в этом случае доопределить управление при $t > t_1^{(k)}$, полагая, например, $u(t) = u(t_1)$ при $t \geq t_1^{(k)}$ [9].

3) Если в задаче оптимального управления (1.0) - (1.3) $m > 1$, то учет условий (1.3) требует способов, отличных от описанных выше. Один из простейших способов - <u>метод штрафных функций</u> [4] - [6], [9].

Метод штрафных функций в задаче оптимального управления (1.0) - (1.3) есть метод учета ограничений (1.3) счет добавок - "штрафа" - в минимизируемом функционале.

Пусть $t_0, x(t_0)$ - фиксированы. Обозначим

$$g_i(t_1, x(t_1)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))dt + \Psi_i(t_1, x(t_1)), \quad i = \overline{1,m}.$$

Тогда ограничения (1.3) примут вид $g_i(t_1, x(t_1)) = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Вместо исходной задачи (1.0) - (1.3) рассмотрим задачу минимизации исходного функционала (1.0) со "штрафом":

$$B_0^*(x(\cdot),u(\cdot),t_1) \equiv B_0(x(\cdot),u(\cdot),t_1) + \sum_{i=1}^{m} K_i g_i^2(t_1,x(t_1)) \equiv$$

$$\equiv \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \Psi_0(t_1,x(t_1)) + \sum_{i=1}^{m} K_i g_i^2(t_1,x(t_1)) \to \inf \qquad (2.0)_3$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), \qquad (2.1)_3$$

$$u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0,t_1], \qquad (2.2)_3$$

$$x(t_0) - x_0 = 0. \qquad (2.3)_3$$

где K_i - положительные постоянные, $i=\overline{1,m}$.

Задача $(2.0)_3$ - $(2.3)_3$ - задача со свободным правым концом. При больших значениях констант $K_i, i=\overline{1,m}$ минимум функционала B_0^* будет достигаться при $g_i(t_1,x(t_1)) \approx 0$, т.к. в силу структуры функционала B_0^* значительная погрешность в выполнении хотя бы одного из условий $g_i(t_1,x(t_1))=0, i=\overline{1,m}$ приведет к значительному возрастанию функционала B_0^*.

Алгоритм решения задачи $(2.0)_3$ - $(2.3)_3$ таков: задачу решают методом, изложенным в п.1 задания (простейший вариант); после этого проверяют условия $g_i(t_1,x(t_1))=0, i=\overline{1,m}$; если точность их выполнения недостаточна, увеличивают в несколько раз соответствующие коэффициенты K_i и снова решают задачу $(2.0)_3$ - $(2.3)_3$ и т.д. Решение считается найденным, если достигнута заданная точность выполнения условий $g_i(t_1,x(t_1))=0, i=\overline{1,m}$ [9].

Варианты заданий см. в Приложении П.

Примечание.

В процессе численного решения задач задания 2 полезно учесть, если оно есть, свойство автономности этих задач (см. Примечание 2 к заданию 1), а также иметь в виду соображения, приведенные в Приложении 3 к заданию 1.

§ 3. "ПРЯМЫЕ" ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРАКТИКУМЕ

1. Этот параграф посвящен краткому описанию одного из итерационных методов решения задач оптимального управления - методу градиентного спуска.

Пусть H_1, H_2 - нормированные пространства. Отображение $f: H_1 \to H_2$ из H_1 в H_2 называется дифференцируемым по Фреше в точке $\hat{h} \in H_1$, если существует линейный непрерывный оператор $\Lambda: H_1 \to H_2$ такой, что функция $\alpha(h) = \| f(\hat{h}+h) - f(\hat{h}) - \Lambda h \|_{H_2} / \|h\|_{H_1} \to 0$ при $\|h\|_{H_1} \to 0$. Оператор Λ по $f(\hat{h})$ определяется однозначно, называется производной по Фреше отображения f в точке $\hat{h}$ и обычно обозначается символом $f'(\hat{h})$: $\Lambda = f'(\hat{h})$.

Пример 1. Пусть $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$, $H_1 \equiv C^1[t_0, t_1]$ - пространство непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, t_1]$; $H_2 \equiv C[t_0, t_1]$ - пространство непрерывных функций; $\varphi(t,x)$ - непрерывная функция, определенная при $(t,x) \in [t_0, t_1] \times R^1$, у которой частная производная $\varphi'_x(t,x)$ также непрерывна. Рассмотрим дифференциальный оператор $F(x(t)) = \dot{x}(t) - \varphi(t,x)$, который, очевидно, непрерывно действует из H_1 в H_2. Известно (см. [2], стр. 175), что этот оператор дифференцируем по Фреше в любой точке $x \in H_1 \equiv C^1[t_0, t_1]$ и его производная по Фреше $F'(x): H_1 \to H_2$ определяется соотношением

$$F'(x(t)) \cdot h(t) \equiv \dot{h}(t) - \varphi'_x(t, x(t)) \cdot h(t).$$

Пример 2. Пусть $H_1 \equiv C^1[t_0,t_1] \times C[t_0,t_1]$, $H_2 \equiv R$, $f(t,x,u)$ - функция, определенная на $[t_0,t_1] \times R^2$ и непрерывная вместе с частными производными $f'_x(t,x,u)$, $f'_u(t,x,u)$. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{Y}(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt,$$

который, очевидно, определен и непрерывен на H_1. Легко показать (см. [2], стр. 178), что функционал $\mathcal{Y}(x(\cdot), u(\cdot)): H_1 \to R$ дифференцируем по Фреше и его производная $\mathcal{Y}': H_1 \to R$ определяется соотношением

$$\mathcal{Y}'(x(\cdot), u(\cdot))[y(\cdot), v(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(f'_x(t, x(t), u(t)) y(t) + f'_u(t, x(t), u(t)) v(t) \right) dt.$$

Напомним следующее полезное свойство функционалов. Пусть H - гильбертово пространство; $\mathcal{Y}: H \to R$ - функционал, дифференцируемый по Фреше в точке $\hat{h} \in H$. По определению $\mathcal{Y}'(\hat{h}): H \to R$ - линейный функционал, и согласно теореме Рисса его можно отождествить с некоторым вектором гильбертова пространства H. Будем этот вектор также обозначать $\mathcal{Y}'(\hat{h})$. Тогда $-\mathcal{Y}'(\hat{h})$ - направление наискорейшего убывания функционала $\mathcal{Y}$ в окрестности точки $\hat{h}$. Действительно, по определению производной по Фреше

$$\mathcal{Y}(\hat{h}+k) \equiv \mathcal{Y}(\hat{h}) + (\mathcal{Y}'(\hat{h}), k) + \alpha(k) \cdot \|k\|,$$

где $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ - соответственно, скалярное произведение и норма в H, $\alpha(k) \to 0$ при $\|k\| \to 0$. Из этого разложения сразу следует, что при малых $\|k\|$ функционал $\mathcal{Y}(\hat{h}+k)$ убывает быстрее всего в направлении $k = -\lambda \mathcal{Y}'(\hat{h})$, где $\lambda > 0$.

2. Для описания метода градиентного спуска рассмотрим абстрактную экстремальную задачу

$$f(h) \to \inf, \tag{3.1}$$

$$h \in \Omega \quad , \tag{3.2}$$

где $f: H \to R$ - дифференцируемый функционал, определенный на нормированном пространстве H, Ω - подмножество H, называемое множеством допустимых элементов. Последовательность приближений h_i решения $\hat{h}$ задачи (3.1), (3.2), получаемых методом градиентного спуска, определяется с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$h_{i+1} = P(h_i - \alpha f'(h_i)), \tag{3.3}$$

где $\alpha > 0$ - некоторое число, P - оператор, отображающий вектор

$$h_i - \alpha f'(h_i) \tag{3.4}$$

на множество Ω.

Формула (3.3) нуждается в пояснении. Мы предполагаем, что в пространстве H введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, непрерывное относительно топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|_H$. Таким образом, H - евклидово пространство, которое после пополнения относительно нормы $\|k\| = \sqrt{(k,k)}$ превращается в гильбертово пространство $\hat{H}$. Предполагается, что $f'(h_i) \in H$, и поэтому вектор (3.4) также из H. Опишем геометрический смысл формулы (3.3), проводя рассмотрения в $\hat{H}$.

Пусть минимальное значение функционала f существует. Вектор $\alpha f'(h_i)$ указывает направление наискорейшего убывания функционала f в окрестности точки h_i. Поэтому при достаточно малом α

минимальное значение функционала f на шаре радиуса $\|\alpha\cdot f'(h_i)\|$ с центром в h_i с точностью до $O(\alpha)$ достигается в точке (3.4). Но эта точка, вообще говоря, не удовлетворяет включению (3.2), и поэтому для получения приближения h_i необходимо точку (3.4) спроектировать на Ω. Оператор P в разных конкретных случаях выбирается по-разному. От оператора P естественно потребовать, чтобы он, с одной стороны, по возможности меньше отличался от ортопроектора на Ω, а, с другой стороны, его построение было простым с вычислительной точки зрения. Ниже на трех простейших примерах продемонстрировано построение оператора P.

3. Задача Лагранжа со свободным концом

Рассмотрим следующую экстремальную задачу со свободным концом:

$$\mathcal{J}(x(\cdot),u(\cdot))\equiv\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt\to inf, \tag{3.5}$$

$$\dot{x}=\varphi(t,x,u), \tag{3.6}$$

$$x(t_0)=x_0. \tag{3.7}$$

Отметим, что в задаче (3.5) - (3.7) отсутствуют ограничения на управление $u(t)$. Будем предполагать, что $f,f'_x,f'_u\in C([t_0,t_1]\times R^2)$, $\varphi,\varphi'_x,\varphi'_u\in C([t_0,t_1]\times R^2)$.

Задача (3.5) - (3.7) имеет вид (3.1), (3.2), если положить

$$H=C^1[t_0,t_1]\times C[t_0,t_1];\ (g,h)=\int_{t_0}^{t_1} g(t)h(t)dt, \tag{3.8}$$

$$\Omega=\{(x,u)\in H:\dot{x}=\varphi(t,x,u),\ x(t_0)=x_0\}.$$

Формула (3.3) для задачи (3.5) - (3.7) имеет вид

$$(x_{i+1},u_{i+1})=P((x_i,u_i)-\alpha(f'_x(x_i,u_i);f'_v(x_i,u_i))). \tag{3.9}$$

Оператор P в (3.9) определим как суперпозицию операторов P_1 и P_2: $P=P_1\circ P_2$, где оператор P_1 сопоставляет вектору (x_i+z,y_i+w) вектор (x_i+y,u_i+v), а (y,v) решение экстремальной задачи

$$\Phi(y,u)=\frac{1}{2}\|y-z\|^2_{L_2(t_0,t_1)}+\frac{1}{2}\|v-w\|^2_{L_2(t_0,t_1)}\to inf, \tag{3.10}$$

$$\dot{y}=\varphi_x(t,x_i,u_i)y+\varphi_u(t,x_i,u_i)v,\ y(t_0)=0. \tag{3.11}$$

Геометрически оператор P_1 представляет собой ортогональное проектирование (x_i+z,u_i+w) на гиперплоскость, проведенную из точки (x_i, u_i) и касательную к многообразию решений задачи Коши (3.6), (3.7).

Оператор P_2 определяется посредством формулы

$$P_2(x_i+y,\ u_i+v) = (x,\ u_i+v), \tag{3.12}$$

где $x(t)$ - решение задачи

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_i(t)+v(t)),\quad x(t_0) = x_0. \tag{3.13}$$

Вычисление оператора P_2 сводится к решению задачи Коши (3.13), которая, как известно, легко решается численно.

Опишем теперь численный метод решения задачи (3.10), (3.11). Это линейная экстремальная задача с квадратичным функционалом. Ее решение эквивалентно решению краевой задачи для соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа. Для перехода к этой краевой задаче воспользуемся принципом Лагранжа (о возможности его применения к задаче (3.10), (3.11) см. [2]).

Составим функцию Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L}(y,v,\lambda,p) \equiv \lambda\Phi(y,v) + (p,\ \dot{y} - \varphi_x \cdot y - \varphi_u \cdot v)_{L_2(t_0,t_1)}. \tag{3.14}$$

В силу принципа Лагранжа существует такая пара $(\lambda, p) \in R \times C^1[t_0,t_1] \setminus \{0\}$, что

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad (\mathcal{L}'_y, h)_{L_2(t_0,t_1)} = 0 \quad \forall h \in C^1[t_0,t_1],\ h(t_0) = 0 \\ &\text{б)}\quad (\mathcal{L}'_v, g)_{L_2(t_0,t_1)} = 0 \quad \forall g \in C[t_0,t_1]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Если $(x_0, u_0) \in C^1[t_0,t_1] \times C^0[t_0,t_1]$, то легко показать, что при любом " i " $(x_i, u_i) \in C^1 \times C^0$ и при каждом i $(y,v) \in C^1 \times C^0$. Отсюда уже следует, что $p \in C^1[t_0,t_1]$.

В силу (3.15а)

$$\lambda \cdot (\alpha f'_x + y,\ h) + (p,\ \dot{h} - \varphi_x h) = 0,\quad h(t_0) = 0.$$

Отсюда после интегрирования по частям следуют соотношения

$$\dot{p} + \varphi_x \cdot p = \lambda \cdot (\alpha f'_x + y),\quad p(t_1) = 0. \tag{3.16}$$

Вследствие (3.15б) имеем

$$\lambda \cdot (\alpha f'_u + v,\ g) - (p,\ \varphi_u g) = 0$$

и, значит,

$$\lambda \cdot (\alpha f'_u + v) - \varphi_u \cdot p = 0. \tag{3.17}$$

Если $\lambda = 0$, то из (3.16) следует, что $p \equiv 0$, что противоречит принципу Лагранжа. Поэтому $\lambda \neq 0$, и можно считать, что $\lambda = 1$.

Соотношения (3.11), (3.16), (3.17) составляют краевую задачу для уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$v = \varphi_u' \cdot p - \lambda \cdot f_u', \tag{3.18}$$

$$\dot{y} - \varphi_x' \cdot y - \varphi_u' \cdot v = 0, \; y(t_0) = 0, \tag{3.19}$$

$$\dot{p} + \varphi_x' \cdot p - y = \lambda \cdot f_x', \; p(t_1) = 0. \tag{3.20}$$

Укажем численный метод решения задачи (3.18) - (3.20). Для этого сначала преобразуем эту задачу. Дифференцируя соотношение (3.20), получим равенство

$$\dot{y} = \ddot{p} + \dot{\varphi}_x' \cdot p + \varphi_x' \cdot \dot{p} - \lambda \dot{f}_x'. \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.19) выражение $\dot{y}$ из (3.21), выражение v из (3.18) и выражение y из (3.20), получим следующую краевую задачу для $p(t)$:

$$\ddot{p} + (\dot{\varphi}_x - (\varphi_x')^2 - \varphi_u^2)p = \lambda(\dot{f}_x' - \varphi_x' f_x' - \varphi_u \cdot f_u'), \tag{3.22}$$

$$(\dot{p} + \varphi_x' \cdot p - \lambda f_x')(t_0) = 0, \quad p(t_1) = 0, \tag{3.23}$$

где краевое условие в точке t_0 получено из краевого условия (3.19) и уравнения (3.20), взятого в точке t_0.

Задача (3.22), (3.23) решается численно - методом прогонки [12, 13]. В результате решения задачи получим функцию $p(t)$. Зная $p(t)$, из (3.18) получим функцию $v(t)$, после чего, решая задачу Коши (3.13), находим (x_{i+1}, u_{i+1}) с помощью формулы (3.18).

4. Задача Лагранжа с закрепленными концами.

Рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \inf, \tag{3.24}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{3.25}$$

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1. \tag{3.26}$$

Эта задача отличается от задачи (3.5) - (3.7) тем, что вместо одного краевого условия (3.7) функция $x(t)$ должна удовлетворять уже двум краевым условиям (3.26). Поэтому множество допустимых пар Ω определяется теперь соотношением

$$\Omega = \{(x, u) \in H : \dot{x} = \varphi(t, x, u), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}.$$

Как и раньше в итерационной формуле (3.9)

$$P = P_2 \circ P_1, \tag{3.27}$$

причем оператор P_1 определяется так: вектору $(x_i+z,\ u_i+w)$ сопоставляется вектор (x_i+y, u_i+v) , где (y,v) - решение экстремальной задачи (3.10), (3.11) с дополнительным условием

$$y(t_1)=0 \tag{3.28}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа задачи (3.10), (3.11), (3.28) выводятся так же, как и в задаче (3.10), (3.11), и имеют следующий вид:

$$v=\varphi_u' p-\alpha f_u', \tag{3.29}$$

$$\dot y-\varphi_x y-\varphi_u v=0,\ y(t_0)=0,\ y(t_1)=0, \tag{3.30}$$

$$\dot p+\varphi_x p-y=\alpha f_x'. \tag{3.31}$$

Так же, как и для задачи (3.18) - (3.20), из соотношений (3.29) - (3.31) выводится уравнение (3.22) с краевыми условиями:

$$(\dot p+\varphi_x' p-\alpha f_x')\cdot(t_i)=0,\ i=0,1. \tag{3.32}$$

Задача (3.22), (3.32) решается методом прогонки [12, 13].

Оператор P_2 из (3.27) определяется формулой

$$P_2\,(x_i+y,\ u_i+v)=(x_i+y,\ u_{i+1}), \tag{3.33}$$

где u_{i+1} - решение уравнения

$$\dot x_i+\dot y-\varphi(t,x_i(t)+y(t), u_{i+1}(t))\equiv 0. \tag{3.34}$$

Это уравнение при каждом $t\in[t_0,t_1]$ решается, например, методом Ньютона, причем в качестве начального приближения можно взять $u_i(t)+v(t)$.

5. Задача управления со свободным концом.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\mathcal{Y}(x(\cdot),u(\cdot))\equiv\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt\to\inf, \tag{3.35}$$

$$\dot x(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\ x(t_0)=x_0, \tag{3.36}$$

$$u(t)\in[\beta,\gamma]. \tag{3.37}$$

Множество допустимых пар в этой задаче определяется формулой:

$$\Omega=\{(x,u)\in H:\dot x=\varphi(t,x,u),\ x(t_0)=x_0,\ u(t)\in[\beta,\gamma]\}.$$

Оператор P из (3.9) представим в виде (3.27), причем $P_1=Q_2\circ Q_1$, $Q_1\,(x-z,\ u-w)=(y,v)$, где (y,v) - решение экстремальной задачи (3.10), (3.11) с дополнительным ограничением:

$$v(t)\in[\beta,\gamma], \tag{3.38}$$

а $Q_2\,(y,v)=(x_i+u, y_i+v)$.

В силу принципа максимума [1, 2,3]:

а) $(\mathcal{L}'_y, h)_{L_2(t_0,t_1)} = 0 \quad \forall h \in W_2^1(t_0,t_1),\ h(t_0)=0,$

б) $L(y(t), v(t), \lambda, p(t)) = \min\limits_{w \in [\beta,\gamma]} L(y(t), w, \lambda, p(t)),$ (3.39)

где $\mathcal{L}$ - функция Лагранжа (3.14), $\mathcal{L}(y, v, \lambda, p) = \int_{t_0}^{t_1} L(y(t), v(t), \lambda, p(t))dt.$

Из (3.39) выводятся следующие необходимые условия минимума:

$$\dot{y} - \varphi_x \cdot y - \varphi_u \cdot v = 0, \quad y(t_0) = 0, \tag{3.40}$$

$$\dot{p} + \varphi_x \cdot p - y = \alpha f'_x, \quad p(t_1) = 0, \tag{3.41}$$

$$v(t) = \max(\beta, \min(\gamma, -\alpha f'_u(t) + \varphi_u(t) p(t))). \tag{3.42}$$

Как и выше, подставляя в (3.40) выражения (3.42), (3.41) и (3.27) (последнее выражение получено дифференцированием (3.41)) получим уравнение:

$$\ddot{p} + (\dot{\varphi}'_x - (\varphi'_x)^2) p - \varphi'_u \cdot \max(\beta, \min(\gamma, -\alpha f'_u + \varphi'_u \cdot p)) = \alpha (\dot{f}'_x - \varphi_x \cdot f'_x) \tag{3.43}$$

с краевыми условиями (3.23).

Задача (3.43), (3.23) легко решается методом прогонки. Оператор P_2 берется таким же, как и в п. 3.

Замечание 1. Задачи из п.п. 3, 4 без каких-либо существенных изменений переносятся на случай, когда $x(t), u(t)$ не скалярные, а векторные функции: $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, а задача из п.5 на случай, когда $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, а $u(t)$ - скалярная функция.

Замечание 2. В § 2 были рассмотрены "непрямые" методы решения задач оптимального управления, основанные на необходимых условиях сильного относительного минимума - принципе максимума. Задача оптимального управления сводилась к решению краевой задачи, дающей необходимые условия экстремума. Эта краевая задача решалась методом Ньютона, в котором выбор начального приближения является определяющим, а вопрос, как выбирать начальное приближение, остается открытым. Хорошо известно, что при неудачном выборе начального приближения метод Ньютона расходится. Необходимо также помнить, что решение задачи оптимального управления, получаемого на основе "непрямых" методов, использующих метод Ньютона, так и на основе "прямых" методов, использующих градиентный метод, может соответствовать не точке глобального минимума, а другому критическому элементу. Поэтому после получения решения нужны либо теоретическое обоснование его адекватности глобальному минимуму, либо хотя бы численные расчеты, делающие версию об абсолютном минимуме функционала на полученном решении достаточно правдоподобной.

ПРИЛОЖЕНИЕ I(A,a)

Задачи с фиксированными концами и фиксированным временем

(1) $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0=0}^{t_1=T_{max}} u^2(t)\,dt \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x(0)=x_0, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 + u, & x(T_{max}) = x_1, \end{cases} \qquad |u| \le u_{max},$$

$T_{max}, \alpha, u_{max}, x_0, x_1$ - параметры задачи.

(2) $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0=0}^{t_1=T_{max}} u^2(t)\,dt \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u, & x(0)=x_0, \\ \dot{x}_2 = -u, & x(T_{max}) = x_1, \end{cases} \qquad |u| \le u_{max},$$

$T_{max}, u_{max}, x_0, x_1$ - параметры задачи.

(3) $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0=0}^{t_1=T_{max}} u^2(t)\,dt \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u, & x(0)=x_0, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - u, & x(T_{max}) = x_1, \end{cases} \qquad |u| \le u_{max},$$

$T_{max}, \alpha, u_{max}, x_0, x_1$ — параметры задачи.

⑥ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0=0}^{t_1=T_{max}} \left(|u(t)|^q + \varepsilon u^2(t)\right)dt \to \inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x(0)=x_0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 u, & x(T_{max})=x_1, \end{cases} \quad -\infty < u < +\infty,$$

$T_{max}, q, \varepsilon, x_0, x_1$ - параметры задачи.

⑦ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_{t_0=0}^{t_1=T_{max}} u^2(t)dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = -qx + \frac{\varepsilon u - \alpha x}{1+x}, \quad 0 \le u \le u_{max},$$

$$x(0)=x_0, \quad x(T_{max})=x_1,$$

$T_{max}, q, \varepsilon, \alpha, x_0, x_1$ - параметры задачи.

⑧ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^1 \left(x^2 - \frac{48x}{1+\alpha t^2}\right)dt \to extr$$

$$x(0)=x(1)=0$$

α - параметр задачи: $\alpha = 0; 0{,}01; 0{,}1; 5{,}0; 10{,}0$.

⑨ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^2 \frac{t^{\tau}dt}{1+\dot{x}^2} \to \inf,$$

$$\dot{x} \geq 0, \quad x(0)=0, \quad x(2)=\alpha,$$

α, τ - параметры задачи: $\alpha = 0; 1; \tau = 1; 2$.

5-I538

ПРИЛОЖЕНИЕ I(A,a)

Значения параметров к задачам

①

	T_{max}	α	u_{max}	x_0	x_1
1	2	0,5	0,8	1 1	4,3 1,7
2	1	2	0,8	2 1,5	2,9 0,6
3	1	1	0,8	2 1	2,5 0,05
4	2	1	0,8	1,5 0,5	3,6 1,4

②

	T_{max}	u_{max}	x_0	x_1
1	2	0,8	-1 1	-5 3
2	2	0,8	2 0,5	1 -1,5
3	2	0,8	1 -1	1,5 0
4	2	0,8	-2 -1	-6 -3

③

	T_{max}	α	u_{max}	x_0	x_1
1	2	1	0,8	4	3,9
2	1	1	0,8	2	2,2
3	2	1	0,8	3	3,2
4	2	1	0,8	5	3,4

⑥

	T_{max}	q	ε	x_0	x_1
1	1.01	1,5	1	0 1	0 −1
2	2	1,01	0,05	0 1	0 −1
3	2	2	0	0 0,1	0 −0,1
4	3	2	0	0 0,1	0 −0,1
5	3	3	0,1	0 1	0 −1
6	3,5	3	0,2	0 1	0 −1
7	4	3,5	1	0 0,1	0 −0,1
8	4,1	4	0	0 0,3	0 −0,3
9	4,7	4,1	2	0 2	0 −2
10	3,9	4,7	1	0 1	0 −1
11	4	3,9	0,1	0 1	0 −1
12	4,1	4	0,3	0 1	0 −1
13	4	4,1	0,2	0 1	0 −1
14	3	4	1	0 1	0 −1
15	4	3	0,1	0 0,2	0 −0,2
16	4,1	4	6,3	0 1	0 −1
17	4	4,1	0,2	0 1	0 −1
18	3	4	1	0 1	0 −1
19	1,01	3	0,1	0 0,2	0 −0,2
20	1	1,01	0.01	0 1	0 −1

⑦

	T_{max}	q	ε	α	x_0	x_1
1	1	0,95	1	1	0,001	0,3
2	3	0,9	1	1	0,001	0,3
3	2	1,4	1	1,5	0.001	0,2
4	5	0,9	1	1	0,001	0,3
5	3	1,4	1	1,5	0.001	0,2

ПРИЛОЖЕНИЕ I(А,б)

Задачи с фиксированными концами и нефиксированным временем

(I)

$$B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) \equiv T \equiv t_1 \to \inf,$$

$$\dot{x}_1 = \left(u - \frac{2}{3}\right)x_1 + \frac{1}{6}x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2, \qquad (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$$

$$|u| \leq 1.$$

Варианты граничных условий:

а) $x_1(0) = 3$, $x_1(T) = 2$,
$x_2(0) = 5$, $x_2(T) = 2{,}5$;

б) $x_1(0) = 0{,}1$, $x_1(T) = 1$,
$x_2(0) = 5$, $x_2(T) = 1{,}5$;

в) $x_1(0) = 0{,}01$, $x_1(T) = 2$,
$x_2(0) = 7$, $x_2(T) = 3$;

г) $x_1(0) = 4$; $x_1(T) = 3$
$x_2(0) = 7$, $x_2(T) = 3{,}5$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I(Б,а)

Задачи со свободными концами и фиксированным временем

① $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^4 (\dot{x}^2 + x e^{-\alpha x})\,dt \to extr,$$

$|\dot{x}| \leq 1$, $x(0) = 0$;

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ 1.0;\ 10.0$.

② $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^4 \left(\dot{x}^2 + \frac{x}{1+\alpha x^2}\right)dt \to extr,$$

$|\dot{x}| \leq 1$, $x(0) = 0$;

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ 1.0;\ 10.0$.

③ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^2 \frac{x}{1+\alpha x^2}\,dt \to inf,$$

$|\ddot{x}| \leq 2$, $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$;

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ 1.0;\ 10.0$.

④ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^2 \frac{x}{1+\alpha x}\,dt \to inf,$$

$|\ddot{x}| \leq 1$, $x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 5.0;\ 10.0$.

⑤ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^4 x e^{-\alpha x} dt \to inf,$$

$$|\ddot{x}| \leq 2, \quad x(0)+x(4)=0, \quad \dot{x}(0)=0, \quad \dot{x}(4)=0$$

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 5.0;\ 10.0.$

⑥ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^1 \dot{x}^2 e^{-\alpha t} dt \to extr,$$

$$B_1(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^1 \frac{x}{1+\alpha t} dt - 1 = 0,$$

$$x(0)=3$$

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 5.0;\ 10.0.$

⑦ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^{\pi} \dot{x}^2 e^{-\alpha x} dt \to extr,$$

$$B_1(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^{\pi} x \sin t\, dt - 1 = 0,$$

$$B_2(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^{\pi} x \cos t\, dt = 0$$

$$x(0)=0$$

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ 1{,}0;\ 10.0$

⑧ $$B_0(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv \int_0^{1{,}5} \left(\dot{x}^2 - x^2 - \frac{2x}{1+\alpha t^2}\right) dt - 2x^2(0) - x^2(1{,}5) \to extr,$$

α - параметр задачи: $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ 1.0;\ 10.0.$

(9) $$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 + x e^{-\alpha x})\,dt \to extr,$$

$x(0)=0$, $x(\pi/2) = 1$;

α - параметр задачи: $\alpha = 0; 0,1; 1.0; 10.0.$

(I0) $$B_0(x(\cdot), u(\cdot)) \equiv \int_0^2 \frac{x}{1+\alpha x^2}\,dt \to inf$$

$|\ddot{x}| \le 1$

$x(2) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0,$

α - параметр задачи: $\alpha = 0; 0,1; 1.0; 10.0.$

ПРИЛОЖЕНИЕ I(Б,б)

Задачи со свободными (или частично свободными) концами и нефиксированным временем

(I) $B_0(x(\cdot),u(\cdot),T) \equiv -m(T) \to \inf,$

$\dot{x} = u,$

$\dot{u} = \frac{1}{m} P - g_\Lambda$

$0 \le P \le P_{max},$

$x(0) = x_0 + R_\Lambda \; ; \quad x(T) = R_\Lambda;$

$u(0) = u_0 \; , \qquad u(T) = 0;$

$m(0) = 1$

$P_{max}, g_\Lambda, R_\Lambda, C, x_0, u_0$ – параметры задачи:

$P_{max} = 0{,}2 \cdot 9{,}81;\ 0{,}4 \cdot 9{,}81;\ g_\Lambda = 1{,}622;\ R_\Lambda = 1{,}737 \cdot 10^6;$
$C = 3{,}1 \cdot 10^3;\ x_0 = 10^5;\ R_\Lambda;\ 2R_\Lambda;\ u_0 = -100;\ 0.$

(2) $B_0(x(\cdot),u(\cdot),T) \equiv -m(T) \to \inf,$

$\dot{x} = u,$

$\dot{u} = \frac{1}{m} P - \frac{M}{x^2},$

$\dot{m} = -\frac{P}{C}$

$0 \le P \le P_{max},$

$x(0) = x_0 + R_\Lambda, \qquad x(T) = R_\Lambda$

$u(0) = u_0, \qquad u(T) = 0,$

$m(0) = 1$

P_{max}, c, M, $R_Л$, x_0, u_0 – параметры задачи:

$P_{max} = 0{,}2 \cdot 9{,}81;\ 0{,}4 \cdot 9{,}81;\ M = 1{,}622 \cdot R_Л^2;\ R_Л = 1{,}737 \cdot 10^6;$

$x_0 = 10^5;\ R_Л;\ u_0 = -1000;\ 0.$

③ $B_0(x(\cdot), u(\cdot), T) = -K \cdot m(T) + T \to \inf,$

$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = \frac{1}{m} P - \frac{M}{x^2},$

$\dot{m} = -\frac{P}{c},$

$x(0) = R_Л, \quad x(T) = 5 \cdot 10^5,$

$u(0) = 0,$

$m(0) = 1$

P_{max}, c, M, $R_Л$ – параметры задачи – те же, что и в п. ②.

ПРИЛОЖЕНИЕ П

I

$$B_0\,(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv -x_1^2\,(T) - x_2^2\,(T) \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2\,, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b u\,, \end{cases}$$

$x(0) = x_0$ – задано,

$t_1 \equiv T$ – задано,

$$|u| \leq u_{max}\,,$$

$T, a_1, a_2, b, x_0, u_{max}$ – параметры задачи.

2

$$B_0\,(x(\cdot),u(\cdot)) \equiv -x_1^2\,(T) - x_2^2\,(T) - x_3^2\,(T) - x_4^2(T) \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3\,, \\ \dot{x}_2 = x_4\,, \\ \dot{x}_3 = a_1 x_3 + b x_1 + u_1\,, \\ \dot{x}_4 = a_2 x_4 + b x_2 + u_2\,, \end{cases}$$

$x(0) = x_0$ – задано,

$t_1 \equiv T$ – задано,

$u_1^2 + u_1^2 \leq u_{max}^2$,

$T, a_1, a_2, b, x_0, u_{max}$ – параметры задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ П

Значения параметров к задачам

1

	T_{max}	a_1	a_2	b	x_0	u_{max}
I	5	-0,2	-0,I	0,I	0,I	0,8
2	7	-0,3	-0,2	0,I5	0,I	0,8
3	8	-0,4	-0,3	0,2	0,I	0,8
4	6	-0,5	-0,4	0,25	0,I	0,8
5	8	-0,2	-0,I	0,3	0,2	0,8
6	5	-0,3	-0,2	0,35	0,2	0,8
7	7	-0,4	-0,3	0,I	0,2	0,8
8	6	-0,5	-0,4	0,I5	0,2	0,8
9	7	-0,2	-0,I	0,2	0,2	0,8
I0	6	-0,3	-0,2	0,25	0,3	0,8
II	8	-0,4	-0,3	0,3	0,3	0,8
I2	5	-0,5	-0,4	0,35	0,3	0,8
I3	6	-0,2	-0,I	0,I	0,3	0,8
I4	8	-0,3	-0,2	0,I5	0,3	0,8
I5	5	-0,4	-0,3	0,2	0,4	0,8
I6	7	-0,5	-0,4	0,25	0,4	0,8
I7	8	-0,2	-0,I	0,3	0,4	0,8
I8	7	-0,3	-0,2	0,35	0,4	0,8
I9	6	-0,4	-0,3	0,I	0,4	0,8
20	5	-I	-0,5	0,25	0	0,8
2I	5	-I	-0,5	0,25	0	0,8
22	6	-I	-0,5	0,25	0	0,8
23	5	-I	-0,4	0,25	0	0,8
24	5	-I	0,3	0,25	0	0,8
25	6	-I	-0,I	0,25	0	0,8
26	5	-I	-0,5	0,25	I	0,8
27	6	-I	-0,5	0,25	I	0,8
28	5	-I	-0,4	0,25	I	0,8
29	5	-I	0,3	0,25	I	0,8
30	5	-I	-0,5	0,25	0	0,8
3I	6	-I	-0,5	0,25	0	0,8
32	5	-I	-0,4	0,25	0	0,8

Продолжение

33	5	-I	0,3	0,25	0	0,8
34	6	-I	-0,I	0,25	0	0,8
35	5	-I	-0,5	0,25	I	0,8
36	6	-I	-0,5	0,25	I	0,8
37	5	-I	-0,4	0,25	I	0,8
38	5	-I	0,3	0,25	I	0,8
39	6	-I	-0,I	0,25	I	0,8
40	5	-I	-0,5	0,25	2	0,8
4I	6	-I	-0,5	0,25	2	0,8
42	5	-I	-0,4	0,25	2	0,8
43	5	-I	0,3	0,25	2	0,8
44	6	-I	-0,I	0,25	2	0,8

2

	T_{max}	a_1	a_2	b	x_0	u_{max}
I	5	-I	-0,5	0,25	0	0,8
2	6	-I	-0,5	0,25	0	0,8
3	5	-I	-0,4	0,25	0	0,8
4	5	-I	0,3	0,25	0	0,8
5	6	-I	-0,I	0,25	0	0,8
6	5	-I	-0,5	0,25	I	0,8
7	6	-I	-0,5	0,25	I	0,8
8	5	-I	-0,4	0,25	I	0,8
9	5	-I	0,3	0,25	I	0,8
I0	6	-I	-0,I	0,25	I	0,8
II	5	-I	-0,5	0,25	0	0,8
I2	6	-I	-0,5	0,25	0	0,8
I3	5	-I	-0,4	0,25	0	0,8
I4	5	-I	0,3	0,25	0	0,8
I5	6	-I	-0,I	0,25	0	0,8
I6	5	-I	-0,5	0,25	I	0,8
I7	6	-I	-0,5	0,25	I	0,8
I8	5	-I	-0,4	0,25	I	0,8
I9	5	-I	0,3	0,25	I	0,8
20	6	-I	-0,I	0,25	I	0,8
2I	5	-I	-0,5	0,25	2	0,8

Продолжение

	T_{max}	a_1	a_2	b	x_0	u_{max}
22	6	-I	-0,5	0,25	2	0,8
23	5	-I	-0,4	0,25	2	0,8
24	5	-I	0,3	0,25	2	0,8
25	6	-I	-0,I	0,25	2	0,8

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
4. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
5. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
7. Григоренко Н.Л., Благодатских В.И. Практикум работы на ЭВМ (методическая разработка). МГУ, 1977.
8. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Вычисл. математика и матем. физика, 1962. Т.2, № 6. С.1132-1139
9. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
10. Черноусько Ф.Л. Вычислительные методы оптимального управления. М.: Знание, 1973.
11. Александров В.В. О накоплении возмущений в линейных системах по двум координатам // Вестн. Моск. ун-та. 1968. № 3. С. 67-76.
12. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.I, II, 2-е изд.. М.: Физматгиз, 1962.
13. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.I. М.: Наука, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Практикум по численным методам
в задачах оптимального управления

Зав. редакцией С.И.Зеленский
Редактор О.В.Семененко
Художественный редактор Н.Ю.Калмыкова
Технический редактор Н.И.Смирнова

Н/К

Подписано в печать 29.07.88. Формат 60x90/16. Бумага офсетн. № 2.
Офсетная печать. Усл.печ.л. 5,0. Уч.-изд.л. 3,5. Тираж 1000 экз.
Заказ № 1538 Изд. № 878. Цена 10 коп. Заказное

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7.
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы

Цена 10 коп.