

ЗНАНИЕ НАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ 8
ЕСТЕСТВОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

А. С. Сорокин

ТЕХНИКА СЧЕТА



НАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
Издается с 1961 г.

.....

А.С. Сорокин

ТЕХНИКА СЧЕТА

**(Методы рациональных
вычислений)**

Сорокин А. С.

С65 Техника счета (Методы рациональных вычислений). М., «Знание», 1976.

120 с. (Нар. ун-т. Естественнаучный фак.)

В книге в научно-популярной форме представлен один из интересных разделов вычислительной математики.

Автор дает систематическое изложение приемов, упрощающих сложение, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Книга рассчитана на студентов технических вузов, инженеров и экономистов. Она может быть полезна учителям средней школы при организации лекций по устному счету, а также слушателям народных университетов естественнонаучных знаний и всем, кому приходится иметь дело с вычислительными операциями.

С $\frac{20200-126}{073(02)-76}$ БЗ—16—3—76

51

ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития социалистического народного хозяйства характеризуется повсеместным внедрением электронно-вычислительной техники и экономико-математических методов во все отрасли советской экономики. Все чаще и чаще математические расчеты входят в качестве необходимой составляющей в работу рабочего, инженера, экономиста, в работу специалистов, ранее никогда не сталкивавшихся с необходимостью выполнять вычислительные работы. Но несмотря на то, что математическая культура современного производственника стала несоизмеримо выше по сравнению с уровнем рабочего первых пятилеток, на арифметические расчеты, когда их приходится выполнять, тратится неоправданно много времени. «Неумение считать быстро и просто является настолько общим и современным недостатком, что мы его не замечаем, несмотря на весь приносимый им вред», — писал И. Ф. Слудский в 1925 году. К сожалению, эта цитата не устарела и сегодня, правда, с учетом того, что сейчас под умением быстро и просто считать понимается несколько иное, чем имелось в виду в то время. Отсутствие навыков в быстрых приближенных вычислениях часто заставляет отказываться от оценочных расчетов, от рассмотрения ряда вариантов, столь необходимых для принятия грамотного решения.

Преклонение перед математикой как самой точной наукой нередко переходит в веру непогрешимости и оптимальности тех методов счета, которые мы познаем в средней школе. Любое вмешательство в рутинные, но хорошо освоенные нами методы счета чаще всего вызывает протест (иногда неосознанный), который прежде всего проявляется в отношении к новым методам.

Овладение рациональной, быстрой и изящной техни-

кой счета требует от человека определенных усилий, а главное—творческого отношения к вычислительному процессу, ибо наиболее эффективные методы, дающие наибольший выигрыш в вычислительной работе, основаны на сознательном использовании основных особенностей чисел, применяемых в вычислениях. Знание же этих важных свойств конкретных чисел дает порой исключительные результаты. Например, даже при наличии арифмометра выполнить умножение чисел $0,9999997 \cdot 0,9999998$ —дело нелегкое (подобные и еще более сложные вычисления приходится производить при расчете надежности элементов и систем). Но вычисление выполняется устно проще и быстрее, чем на любой математической машине. Ознакомившись с методом дополнений, вы сможете убедиться в правильности этого утверждения.

В настоящее время на русском языке отсутствует литература, хотя бы относительно полно освещающая приемы и методы, упрощающие вычисления. Одна из наиболее известных в этой области книга математика Г. Н. Бермана «Приемы счета» содержит очень небольшое количество известных приемов и не может удовлетворить требованиям сегодняшнего дня. Но и она стала библиографической редкостью. Интересная работа Э. Котлера и Р. Мак-Шейна «Система быстрого счета по Трахтенбергу», вышедшая в переводе с английского языка в 1967 году, включает в основном специфические разработки немецкого профессора.

Настоящая работа призвана по возможности восполнить этот пробел, помочь всем, кому приходится иметь дело с вычислениями, предоставить в их распоряжение наиболее рациональные приемы вычислений, существенно сокращающие вычислительный процесс, упрощающие его и способствующие повышению достоверности получаемых результатов.

В работе представлены материалы по рационализации выполнения основных арифметических действий и проверке правильности полученных результатов. Наиболее перспективные и общие методы автор пытался осветить полнее, показать различные аспекты их применения, чтобы читатель мог активно их освоить, а иногда и развить дальше. Стремление показать все возможности метода заставляли автора иногда нарушать порядок помещения материала по главам. В частности, чтобы показать логику развития и использования метода, ма-

териал по возведению в квадрат чисел определенного вида оказался в главе об умножении.

При просмотре материала может возникнуть вопрос: неужели все написанное здесь можно запомнить? Неужели все это надо запомнить? Принципы применения основных методов, безусловно, нужно освоить. Многие будут непосредственно следовать из этих основных положений (как, например, метод дополнений). Некоторые способы, несмотря на относительно узкий круг применения, настолько просты, что запоминаются произвольно. В детстве еще мне сообщили способ возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, — число десятков надо умножить на следующее число и приписать 25:

$$65 \cdot 65 = ? \quad 6 \cdot (6+1) = 42 \quad 65 \cdot 65 = 4225.$$

Этого оказалось достаточным, чтобы такой простой метод навсегда остался в памяти и вошел в активный арсенал моих вычислительных способов. Но, безусловно, книга может чему-то научить только заинтересованного человека, читающего ее с карандашом и бумагой в руках.

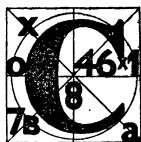
Подавляющее большинство предлагаемых способов предельно просто, но подробное формальное описание занимает много места. Поэтому, сталкиваясь с длинными, многошаговыми методами вычислений, не пугайтесь, разберитесь. В итоге скорее всего все окажется очень просто. Большая часть приемов рассчитана на устное вычисление с записью окончательного результата, некоторые методы упрощают письменные вычисления.

Иногда выполнение арифметических действий с одними и теми же числами описывается с применением разных методов. Читателю предоставляется возможность выбрать тот из них, который конкретно для него будет наиболее прост.

В начале второй главы автор дает рекомендации по записи и расположению чисел в вычисляемых примерах, но в дальнейшем сам этими рекомендациями не пользуется. Это не случайно. Непривычное расположение чисел, непривычная запись могут мешать восприятию нового излагаемого материала и с этим необходимо считаться.

Автор будет благодарен всем читателям за высказанные замечания о работе, которые можно послать или в адрес редакции, или непосредственно автору: Москва, 129243, Ракетный бульвар, д. 15, кв. 46.

МЕТОДЫ, УПРОЩАЮЩИЕ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ



ложение и вычитание относятся к простейшим арифметическим действиям. Предполагается, что читатель выполняет эти действия без затруднения. Поэтому материал данной главы надо рассматривать как попытку систематизировать наши знания по технике выполнения сложения и вычитания, акцентировать внимание на тех деталях вычислительного процесса, которые позволяют выполнять его несколько быстрее и с меньшими усилиями, ибо трудно назвать общие методы, дающие существенный выигрыш в объеме вычислений при выполнении сложения и вычитания.

1. УСТНОЕ СЛОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Если возникает необходимость найти сумму ряда многозначных чисел устно, не производя никаких записей, то можно рекомендовать следующий порядок вычислений, проиллюстрированный на примере сложения чисел:

$$\begin{array}{r} 5754 \\ + 2315 \\ + 6438 \\ \hline 9313 \end{array}$$

Суммируем старший разряд слагаемых

$$5 + 2 + 6 + 9 = 22.$$

Сложив все цифры старшего разряда, приписываем к сумме 0

$$22 \rightarrow 220$$

и продолжаем прибавлять цифры следующего разряда

$$220 + 7 + 3 + 4 + 3 = 237,$$

опять приписываем 0 и прибавляем цифры третьего разряда

$$237 \rightarrow 2370; 2370 + 5 + 1 + 3 + 1 = 2380,$$

приписываем последний раз 0 и завершаем вычисление суммы

$$2380 \rightarrow 23\,800; 23\,800 + 4 + 5 + 8 + 3 = 23\,820.$$

В конце вычислений приходится помнить относительно большое число, но зато прибавляем к нему каждый раз только число однозначное. Это существенно облегчает устное вычисление.

Найдите самостоятельно суммы:

1) 2374	2) 2437	3) 1234	4) 659
3943	7538	124	3541
+	+	+	+
6513	1467	2343	2413
7231	9325	594	79

Ответы: 1) 20 061, 2) 20 767, 3) 4330, 4) 6692.

2. СЛОЖЕНИЕ МЕТОДОМ «КОРНЕВЫХ» ЧИСЕЛ

Иногда приходится складывать числа, группирующие-ся вокруг одного и того же «корневого» числа. Особенно часто такие процедуры приходится производить при обработке статистических измерений. Допустим, необходимо произвести сложение чисел

$$57 + 54 + 53 + 55 + 54 + 52 + 54 + 50 = .$$

Замечаем, что все эти числа близки к 54. Всего необходимо сложить 8 чисел. Сумму находим в следующей последовательности:

1) находим сумму «корневых» чисел: $54 \cdot 8 = 432$;

2) находим сумму отклонений каждого числа от корневого.

Если число больше корневого, отклонение берем со знаком плюс, если число меньше корневого — со знаком минус. Для приведенного примера сумма отклонений равна

$$3 + 0 - 1 + 1 + 0 - 2 + 0 - 4 = -3;$$

3) получившуюся сумму алгебраически прибавляем к результату первого пункта

$$432 - 3 = 429.$$

Выбор корневого числа не влияет на окончательный результат. Так, если за корневое число было выбрано не число 54, а число 55, то просто изменяются выкладки:

- 1) $55 \cdot 8 = 440$,
- 2) $2 - 1 - 2 + 0 - 1 - 3 - 1 - 5 = -11$,
- 3) $440 - 11 = 429$.

Результат, вполне естественно, получается тот же.

За корневое число обычно стараются принять такое число, чтобы наиболее просто находилась сумма отклонений.

Найдите самостоятельно следующие суммы:

- 1) $33 + 29 + 31 + 32 + 27 + 33 + 31 + 32 + 31 + 29 + 30 =$
- 2) $46 + 47 + 48 + 43 + 45 + 44 + 41 + 46 + 45 + 44 + 39 =$
- 3) $52 + 54 + 51 + 53 + 52 + 54 + 50 + 52 + 53 + 55 + 50 =$

Ответы для проверки: 1) 338; 2) 488; 3) 576.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ СЛОЖЕНИИ МЕТОДА СРЕДНЕГО ЧИСЛА

(формулы суммы арифметической прогрессии)

Частным случаем сложения с использованием корневого числа является сложение чисел, образующих арифметическую прогрессию.

Чаще всего встречаются тройки чисел, одно из которых меньше другого на a и больше третьего тоже на a , например: $27 + 30 + 33$. Здесь 30 больше 27 на 3 и меньше 33 на 3. В этом случае для нахождения суммы чисел достаточно умножить среднее число на число слагаемых

$$30 \cdot 3 = 90.$$

Правило применимо для любого нечетного числа слагаемых:

- $$\begin{aligned} 31 + 32 + 33 &= 32 \cdot 3 = 96; \\ 23 + 20 + 17 &= 20 \cdot 3 = 60; \\ 23 + 24 + 25 + 26 + 27 &= 25 \cdot 5 = 125; \\ 52 + 56 + 60 + 64 + 68 &= 60 \cdot 5 = 300; \\ 270 + 280 + 290 + 300 + 310 + 320 + 330 &= 300 \cdot 7 = 2100. \end{aligned}$$

Случаи, когда цифры или числа образуют правильную возрастающую или убывающую последовательность (типа $31 + 32 + 33$ или $23 + 20 + 17$), обычно сразу бросаются в глаза, если же порядок следования нарушен ($13 + 17 + 15$), то для автоматического выделения такой

тройки от вычисляющего требуется определенная математическая культура.

Если число членов арифметической прогрессии четное, то при суммировании используется формула для суммы m членов арифметической прогрессии

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m,$$

говорящая о том, что сумма S членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов m :

$$22 + 24 + 26 + 28 = \frac{22 + 28}{2} \cdot 4 = 100;$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{3 + 8}{2} \cdot 6 = 33.$$

Иногда вычисление целесообразно вести по эквивалентной формуле

$$S_m = (a_1 + a_m) \cdot \frac{m}{2},$$

что исключает столкновение с дробями, получающимися после деления суммы первого и последнего членов арифметической прогрессии на 2, как это случилось бы при вычислении второго примера.

Решите самостоятельно:

$$1) 305 + 310 + 315 + 320 + 325 + 330 = \quad 2) 27 + 30 + 33 + 36 + 39 + 42 + 45 + 48 = \quad 3) 43 + 44 + 45 + 46 + 47 =$$

Ответы для проверки: 1) $(305 + 330) \cdot 3 = 1905$; 2) $(27 + 48) \cdot 4 = 300$; 3) $45 \cdot 5 = 225$.

4. СОЕДИНЕНИЕ СОСЕДНИХ РАЗРЯДОВ ПРИ СЛОЖЕНИИ И ВЫЧИТАНИИ

При определенном навыке выполнения вычислительных работ человеку не представляет труда складывать двузначные числа, сразу получая сумму. Можно рекомендовать складывать многозначные числа, соединяя разряды. При обычном сложении сначала складывается младший разряд слагаемых и т. д. При достаточном навыке можно складывать сразу 2 разряда (или даже больше). Например, при сложении чисел

$$\begin{array}{r}
 354\ 984 \\
 127\ 535 \\
 +\ 297\ 483 \\
 482\ 121 \\
 453\ 672 \\
 \hline
 \end{array}$$

можно складывать сразу 2 младших разряда: $84+35=119$; $119+83=202$; $202+21=223$; $223+72=295$; 95 пишем, 2 запоминаем. Берем следующие 2 разряда: $2+49+75=126$ и т. д.

Совершенно аналогично этот прием используется и при вычитании

$$\begin{array}{r}
 354\ 272 \\
 -\ 206\ 539 \\
 \hline
 \end{array}$$

$72-39=33$ записываем в окончательный результат

$$\begin{array}{r}
 354\ 272 \\
 -\ 206\ 539 \\
 \hline
 33
 \end{array}$$

$42 < 65$, «занимаем» сразу единичку из старшего разряда, получаем $142-65=77$

$$\begin{array}{r}
 354\ 272 \\
 -\ 206\ 539 \\
 \hline
 7\ 733
 \end{array}$$

$$34-20=14$$

$$\begin{array}{r}
 354\ 272 \\
 -\ 206\ 539 \\
 \hline
 147\ 733
 \end{array}$$

Решите самостоятельно, предварительно бегло оценивая, со сколькими разрядами целесообразно работать (при нахождении разности часто достаточно просто работать с тремя разрядами):

$$\begin{array}{r}
 1) \ 354\ 143 \\
 +\ 152\ 931 \\
 +\ 472\ 664 \\
 \hline
 375\ 123
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \ 113\ 947 \\
 +\ 254\ 764 \\
 +\ 129\ 643 \\
 \hline
 888\ 354
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \ 473\ 734 \\
 -\ 392\ 425 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4) \ 3\ 724\ 693 \\
 -\ 2\ 769\ 241 \\
 \hline
 \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 1 354 861; 2) 1 386 708; 3) 81 209; 4) 955 452.

Б. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОКРУГЛЕНИЯ ЧИСЕЛ ПРИ СЛОЖЕНИИ И ВЫЧИТАНИИ (метод использования «круглых» чисел)

Если в вычислениях участвуют числа вида $(a \cdot 10^n - b)$, где b — мало, то вычисления можно упростить.

Допустим, нам необходимо сложить числа

$$\begin{array}{r} + 253 \\ 198 \\ \hline \end{array}$$

Рассуждаем следующим образом. 198 — это 200 без 2. Вместо 198 прибавляем 200 ($253 + 200 = 453$) и из полученной суммы вычитаем то число, которое было добавлено первоначально к слагаемому, т. е. 2: $453 - 2 = 451$.

Рассмотрим еще пример:

$$\begin{array}{r} + 789 \\ 395 \\ \hline \end{array}$$

Рассуждаем аналогично: $395 = 400 - 5$. Складываем $789 + 400 = 1189$ и вычитаем число, добавленное к слагаемому, $1189 - 5 = 1184$.

Рассуждения могут быть и несколько иными. При сложении чисел

$$\begin{array}{r} + 253 \\ 198 \\ \hline \end{array}$$

мы прибавляем ко второму числу 2 и столько же вычитаем из первого слагаемого

$$\begin{array}{r} + 251 \\ 200 \\ \hline 451 \end{array}$$

При вычитании числа, близкого к круглому,

$$\begin{array}{r} - 759 \\ 397 \\ \hline \end{array}$$

выбираем один из двух методов вычислений, приводящих к одному и тому же результату:

1) к уменьшаемому и вычитаемому прибавляем дополнение числа 397 до 400, а уже затем производим вычитание:

$$\begin{array}{l} 759 + 3 = 762, \\ 397 + 3 = 400, \\ 762 - 400 = 362; \end{array}$$

2) из уменьшаемого (759) вычитаем круглое число (400)

$$\begin{array}{r} 759 \\ - 400 \\ \hline 359 \end{array}$$

и вносим необходимую поправку

$$359 + 3 = 362.$$

Несколько примеров на использование приема:

$$\begin{array}{ll} 354 - 182 = 366 - 200 = 166, & 451 - 193 = 458 - 200 = 258, \\ 125 - 89 = 136 - 100 = 36, & 743 - 79 = 764 - 100 = 664. \end{array}$$

Для закрепления навыка сделайте самостоятельно вычисления:

1) $793 + 179 =$ 3) $923 - 588 =$ 5) $495 + 495 =$ 7) $455 - 187 =$
 2) $354 + 295 =$ 4) $154 - 95 =$ 6) $259 + 379 =$ 8) $361 - 298 =$
 Ответы для проверки: 1) 972; 2) 649; 3) 335; 4) 59;
 5) 990; 6) 638; 7) 268; 8) 63.

6. ВЫЧИТАНИЕ ИЗ ЧИСЕЛ ВИДА $a \cdot 10^n$ ИЛИ $a \cdot 10^n + \alpha$, ГДЕ α МАЛО

При вычитании из числа вида $a \cdot 10^n$ воспользуемся понятием дополнения числа. Под дополнением данного числа будем понимать разность между той степенью десяти, показателем которой является число знаков этого числа, и самим числом. Например, дополнением числа 89 является

$$100 - 89 = 11.$$

Под дополнением данного числа B до числа A будем понимать разность $A - B$. (Подробно метод дополнений описан в пункте 6 гл. II). Если необходимо произвести вычитание

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{array}{r} 4000 \\ - 2238 \\ \hline \end{array} & \text{б) } \begin{array}{r} 2000 \\ - 329 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

поступаем следующим образом.

Вычисление начинаем со старшего разряда. Из старшей цифры уменьшаемого (или из нескольких первых цифр уменьшаемого) вычитаем соответствующий разряд вычитаемого, увеличенный на 1,

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 4 - (2 + 1) = 1 & \text{б) } 20 - (3 + 1) = 16 \\ \begin{array}{r} 4000 \\ - 2238 \\ \hline 1 \dots \end{array} & \begin{array}{r} 2000 \\ - 329 \\ \hline 16 \dots \end{array} \end{array}$$

Каждый последующий разряд (кроме последнего) находится вычитанием соответствующей цифры вычитаемого из 9:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 9-2=7 \quad \begin{array}{r} \underline{4000} \\ 2238 \\ \hline 176 \dots \end{array} \quad \text{б) } 9-2=7 \quad \begin{array}{r} \underline{2000} \\ 329 \\ \hline 167 \dots \end{array} \end{array}$$

Последний знак находится вычитанием последней цифры вычитаемого из 10:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} \underline{3000} \\ 1238 \\ \hline 1762 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} \underline{2000} \\ 129 \\ \hline 1871 \end{array} \end{array}$$

Процесс свелся, как нетрудно догадаться, к нахождению дополнения числа 2238 до числа 4000 (или 329 до 2000). В дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с необходимостью нахождения дополнения числа до числа 10^n или $a \cdot 10^n$, и поэтому желающему научиться быстро считать совершенно необходимо уметь без затруднений находить соответствующие дополнения и оперировать с ними.

Найдем дополнение числа 7953 до числа 35 000

$$\begin{array}{r} \underline{35\ 000} \\ 7\ 953 \end{array}$$

1) находим $35 - (7 + 1) = 27$

$$\begin{array}{r} \underline{35\ 000} \\ 7\ 953 \\ \hline 27 \dots \end{array}$$

2) находим дополнение числа 953

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 000} \\ 953 \\ \hline 047 \end{array}$$

Окончательный ответ

$$\begin{array}{r} \underline{35\ 000} \\ 7\ 953 \\ \hline 27\ 047 \end{array}$$

То, что в описываемом методе разность получается сразу, начиная со старшего разряда, и все разряды получаются последовательно, делает метод пригодным для устного вычисления разности многозначных чисел, если уменьшаемое имеет вид $a \cdot 10^n$.

Освоив нахождение дополнения, можно вычитание свести к сложению: для того чтобы из какого-либо числа вычесть другое число, достаточно к первому числу прибавить дополнение второго числа и из полученной суммы вычесть дополняемое число (10^n).

Число, выраженное через дополнение, записывают следующим образом: пишут дополнение числа, а впереди него ставят 1, наверху которой ставят знак «минус». При таком изображении число 7839 запишется как $\overline{1}2161$.

Разность чисел

$$\begin{array}{r} - 35\,425 \\ \quad 9\,837 \\ \hline \end{array}$$

проще найти, сведя вычисления к нахождению суммы

$$\begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{10\,163} \\ \hline 25\,588 \end{array}$$

Записывать второй раз (через дополнение) пример не нужно, пишем сразу ответ, начиная со старшего разряда, мысленно имея перед собой число в виде его дополнения и даже не все число, а только тот разряд, который сейчас вычисляется:

$$\begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{1} \dots \\ \hline 2 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{.0} \dots \\ \hline 25 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{..1} \dots \\ \hline 255 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{...6} \dots \\ \hline 2558 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} + 35\,425 \\ + \overline{...3} \dots \\ \hline 25588 \dots \end{array}$$

К описываемому приему сводится и вычитание из чисел вида $a \cdot 10^n + \alpha$. Вычитание ведется из числа $a \cdot 10^n$, а затем разность увеличивается на α :

$$\begin{array}{r} - 200\,011 \\ \quad 197\,785 \\ \hline + \quad 02\,215 \\ \quad \quad 11 \\ \hline 2\,226 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 350\,007 \\ \quad 49\,394 \\ \hline + 300\,606 \\ \quad \quad 7 \\ \hline 300\,613 \end{array}$$

Найдите самостоятельно разности чисел:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 35\,000 \\ \quad - 24\,359 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \quad 10\,000 \\ \quad - 2\,397 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3) \quad 123\,000 \\ \quad - 52\,395 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4) \quad 95\,005 \\ \quad - 12\,934 \\ \hline \end{array}$$

Начало решения первого примера

$$\begin{array}{r} - 35\,000 \\ 25 \dots \\ \hline 10 \dots \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 10 641; 2) 7603; 3) 70 605;
4) 82 071.



МЕТОДЫ, УПРОЩАЮЩИЕ УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ



Порядок действий при вычислении произведения обычно подчинен следующему правилу. Пишут первый сомножитель, который называется множимым. Под множимым пишут второй сомножитель, который носит название множителя, причем множитель подписывается так, чтобы его единицы стояли под единицами множимого, после этого умножают множимое на каждую цифру множителя, начиная с единиц; полученные частные произведения записывают одно под другим, отступая каждый раз на одну цифру влево и, наконец, складывают эти произведения.

Например:

$$\begin{array}{r}
 \times 2351 \\
 234 \\
 \hline
 9404 \\
 + 7053 \\
 4702 \\
 \hline
 550134
 \end{array}$$

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОРЯДКА ВЫПОЛНЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ ОБЛЕГЧЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Такой многолетиями сложившийся порядок умножения не является обязательным, а часто и рациональным. Иногда (эти случаи мы рассмотрим ниже) определенные преимущества дает умножение, начиная со старшего разряда множителя. В этом случае умножение ведется так же, начиная с младшего разряда множимого. Начало вычислений в приведенном примере будет следующее:

$$\begin{array}{r}
 \times 2351 \\
 234 \\
 \hline
 \dots 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 2351 \\
 234 \\
 \hline
 \dots 02
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 2351 \\
 234 \\
 \hline
 4702
 \end{array}$$

Разница будет только в том, что последовательно получающиеся частные произведения будут подписываться с отступлением каждый раз на 1 разряд вправо. (Единицы частного произведения пишутся под той цифрой, на которую идет умножение.) Закончим вычисление нашего примера:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 2351 \\
 - \quad 234 \\
 \hline
 4702 \\
 + \quad 7053 \\
 \quad 9404 \\
 \hline
 550134
 \end{array}$$

Собственно говоря, совершенно неважно, как будет записан множитель ($\times 2351$ или $\times 2351$) и как будет за-

писано первое частное произведение (под какой цифрой будет записан младший разряд). Важно только правильно записать последующие частные произведения.

Можно рекомендовать вообще сомножители записывать в строку:

$$2351 \times 234.$$

Такая запись удобна тем, что не накладывает каких-либо ограничений на последующие вычисления. Если мы сочтем целесообразным первую форму записи, то она будет выглядеть так:

$$\begin{array}{r}
 2351 \times 234 \\
 \hline
 9404 \\
 + \quad 7053 \\
 \quad 4702 \\
 \hline
 550134
 \end{array}$$

Вторая форма записи приведет к следующему виду:

$$\begin{array}{r}
 2351 \times 234 \\
 \hline
 4702 \\
 + \quad 7053 \\
 \quad 9404 \\
 \hline
 550134
 \end{array}$$

В любом случае младший разряд первого частного произведения удобно записывать под младшим разрядом множимого.

Однако если в множителе более трех знаков, то запись произведения в строку рекомендовать не стоит,

так как при таком расположении при отсутствии достаточного опыта вычислений цифра множителя, на которую множат, легко ускользает от внимания. Исключение стоит делать только тогда, когда среди цифр множителя имеется единица (этот случай будет рассмотрен ниже).

Ниже будет показано, как та или иная последовательность умножения упрощает вычисление.

Порядок действий в случае, когда цифры множителя делятся друг на друга. Если в множителе имеются цифры, делящиеся друг на друга, то следует принять такой порядок действий, при котором пришлось бы сначала умножать на меньшую из этих цифр. Например, в примере

$$1234 \times 239$$

целесообразно производить умножение, начиная со старшего разряда,

$$\begin{array}{r} 1234 \times 239 \\ \hline 2468 \\ 3702 \\ \hline \dots \end{array}$$

Теперь нет необходимости умножить на 9 — достаточно предыдущее частное произведение умножить на 3:

$$\begin{array}{r} 1234 \times 239 \\ \hline 2468 \\ + \quad 3702 \\ \quad 11\,106 \\ \hline 294\,926 \end{array} \quad (3072 \times 3 = 11\,106)$$

Умножение на меньшую цифру всегда выполняется проще, с меньшими усилиями.

В примере 9532×8374 целесообразно начинать вычисления с младшего разряда, что заменит в конце умножение на 8 умножением первого частного произведения на 2. В примере 1935×379 правильнее начать вычисления со старшего разряда.

Несколько примеров на использование приема:

$$\begin{array}{r} 1213 \times 248 \\ \hline + \quad 2426 \\ \quad 4852 \\ \quad 9704 \\ \hline 300\,824 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2425 \times 2 = 4852) \\ (4852 \times 2 = 9704) \end{array} \quad \begin{array}{r} 3215 \times 653 \\ \hline 9\,645 \\ + 16\,075 \\ \quad 19\,290 \\ \hline 2\,099\,395 \end{array} \quad \begin{array}{l} (9645 \times 2 = 19\,290) \end{array}$$

Не менее, а скорее даже более, интересен случай, когда часть множителя делится на одну из его цифр:

$$\begin{array}{r} \times 87\,025 \\ 369 \end{array}$$

Нетрудно заметить, что $36 = 4 \times 9$, а 9 уже имеется в множителе. Поэтому умножение начинаем с младшего разряда и используем данную особенность:

$$\begin{array}{r} \times 87\,025 \\ 369 \\ \hline + 783\,225 \\ 3\,132\,900 \\ \hline 32\,112\,225 \end{array} \quad (783\,225 \times 4 = 3\,132\,900)$$

При нахождении произведения

$$\begin{array}{r} \times 5642 \\ 742 \end{array}$$

используем тот факт, что $42:7=6$,

$$\begin{array}{r} \times 5642 \\ 742 \\ \hline + 39494 \\ 236\,964 \end{array} \quad (39\,494 \times 6 = 236\,964)$$

Решите самостоятельно:

- 1) $3512 \times 637 =$ 3) $2954 \times 9234 =$ 5) $5492 \times 735 =$
 2) $1253 \times 728 =$ 4) $7591 \times 348 =$ 6) $4673 \times 2642 =$
 Ответы для проверки: 1) 2 237 144; 2) 912 184;
 3) 27 277 236; 4) 2 641 668; 5) 403 662; 6) 12 346 066.

Порядок действий в случае, когда в множителе встречается цифра, равная сумме двух других цифр множителя. Здесь не требуется особого описания после предыдущего пункта, поэтому можно ограничиться примером с соответствующим пояснением:

$$5234 \times 257$$

Замечаем, что $2+5=7$, поэтому начинаем умножение со старшего разряда:

$$\begin{array}{r} \times 5234 \\ 257 \\ \hline 10\,468 \\ 26\,170 \end{array}$$

Теперь умножение на 7 заменяем сложением чисел $10\,468 + 26\,170$ (так как $5234 \cdot 2 + 5234 \cdot 5 = 5234 \cdot (2+5) = 36\,638$).

$$\begin{array}{r}
 5234 \times 257 \\
 \hline
 10\ 468 \\
 +\ 2\ 6170 \\
 \hline
 36638 \\
 \hline
 13\ 45138
 \end{array}$$

Практически этот прием стоит применять только в том случае, когда одна из цифр равна сумме двух других цифр, следующих друг за другом. Метод рационально употребить, умножая на числа 2579, 87 134, 853. Если же надо умножать на число, где складываемые частные произведения разделены другими цифрами, то метод теряет свои преимущества. Сам вычисляющий должен решить, выгодно ли ему применить прием, умножая на число 23719 или на число 9475.

Умножьте самостоятельно:

1) $7345 \times 4437 =$ 2) $1234 \times 3528 =$ 3) $3543 \times 3376 =$
 Ответы для проверки: 1) 32 589 765; 2) 4 353 552; 3) 11 961 168.

Порядок действий, когда множитель начинается или кончается единицей. В этом случае порядок умножения должен быть такой, чтобы вычисления начинались с умножения на единицу. При этом частное произведение множимого на единицу не записываем, а принимаем за него само множимое. Только надо быть внимательным и не забыть его учесть при нахождении суммы частных произведений

$$2357 \times 133.$$

Так как множитель начинается с единицы, то умножение начинаем со старшего разряда:

$$\begin{array}{r}
 2357 \times 133 \\
 +\ 7071 \\
 \hline
 7071 \\
 \hline
 313481
 \end{array}$$

В примере 3247×231 умножение начинаем с младшего разряда:

$$\begin{array}{r}
 3247 \times 231 \\
 +\ 9741 \\
 \hline
 6494 \\
 \hline
 750\ 057
 \end{array}$$

Обладая определенными навыками, этот же метод можно применять и тогда, когда цифра 1 стоит в середине множителя:

$$2244 \times 213.$$

В данном примере неважно, с младшего или старшего разряда будет начато умножение. Для определенности примем вариант умножения с младшего разряда. Найдя частное произведение $2244 \times 3 = 6732$, подпишем его так, чтобы относительно него множимое (которое выполняет роль второго частного произведения) было сдвинуто влево на 1 разряд (т. е. второе частное произведение должно быть смещено вправо на 1 разряд относительно множимого):

$$\begin{array}{r} 2244 \times 213 \\ 6732 \end{array}$$

Частное произведение $2244 \times 2 = 4488$ должно быть сдвинуто на 1 разряд влево относительно множимого:

$$\begin{array}{r} 2244 \times 213 \\ + 6732 \\ \hline 4488 \\ 477972 \end{array}$$

Решите самостоятельно:

1) $3527 \times 129 =$ 2) $1274 \times 2154 =$ 3) $3594 \times 3511 =$
 Ответы для проверки: 1) 454 983; 2) 2 744 196;
 3) 12 618 534.

Выбор множителя. Если необходимо выполнить произведение двух чисел, то мы можем выбрать в качестве множителя любой из двух сомножителей. Освоив все изложенное в первых 4 пунктах, нетрудно сформулировать основные положения, которыми можно руководствоваться при выборе множителя:

а) при прочих равных условиях за множитель лучше брать число, в котором меньше разрядов. Например, при нахождении произведения чисел 375×4795 за множитель целесообразно принять число 375. Это сократит вычисления;

б) если нет других соображений, берите в качестве множителя число с меньшими цифрами. В произведениях 479×235 ; 783×283 целесообразно взять за множитель второе число;

в) в качестве множителя целесообразно брать число, в котором имеется единица, одинаковые цифры, цифры, являющиеся суммой других цифр, или цифры, делящиеся на другие цифры этого числа.

При умножении чисел 354×1337 за множитель

целесообразно принять второе число, хотя в нем и больше разрядов. Но на единицу мы умножать не будем (используем множимое), умножение на 3 выполним один раз, а второй раз перепишем полученный уже результат. Для наглядности решим этот пример, принимая за множитель сначала первое число, а затем второе:

$$\begin{array}{r} 1337 \times 354 \\ \hline 5348 \\ + 6685 \\ 4011 \\ \hline 473\,298 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 354 \times 1337 \\ \hline 1062 \\ + 1062 \\ 2478 \\ \hline 473\,298 \end{array}$$

Времени на второе вычисление уходит меньше за счет того, что вычисляется на одно частное произведение меньше, чем в первом случае.

Подумайте, какой из сомножителей в приведенных ниже примерах целесообразно принять за множитель и почему: 1) $359 \times 271 =$ 2) $3749 \times 2396 =$ 3) $179 \times 123 =$ 4) $437 \times 475 =$. Ответы: 1) второй сомножитель (не надо умножать на 1); 2) второй сомножитель (можно заменить умножение на 6 умножением на 2 и умножение на 9 умножением на 3); 3) второй сомножитель — в нем меньшие цифры; 4) первый сомножитель — умножение на 7, можно заменить сложением произведений 475×3 475×4 .

2. ОБЩИЕ МЕТОДЫ, УПРОЩАЮЩИЕ УМНОЖЕНИЕ

Метод Фурье. Истории известно около 30 общих способов умножения, отличающихся один от другого либо схемой записи, либо самим ходом вычисления. Из этих способов, как справедливо отмечает Л. С. Каган в работе «Устный счет и рационализация вычислений», обычный, принятый у нас, является наиболее удобным для школьного преподавания в младших классах, но отнюдь не наиболее рациональным на практике. Следует настоятельно рекомендовать освоить тот способ умножения, который индусы называли молниеносным, а греки — хиазм. Итальянцы его называют *per crocetta*, т. е. накрест. Советскому читателю он более известен как метод Фурье, хотя в начале века после блестящих выступлений в России знаменитого счетчика Ферроля он обычно назывался способом умножения Ферроля.

Рассмотрим ^а суть метода на примере умножения двух трехзначных чисел

$$123 \times 214.$$

1) Единицы произведения получаем, переносая единицы сомножителей

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad 1 \\ \hline 123 \end{array}$$

2) Десятки найдем, сложив произведения десятков каждого множителя на единицы другого множителя $(2 \times 4 + 3 \times 1) = 11$,

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad \cancel{1} \\ \hline 214 \\ \hline 12 \\ \hline 11 \end{array}$$

3) Сотни получаются как сумма следующих произведений: сотен одного сомножителя на единицы другого сомножителя, сотен второго сомножителя на единицы первого сомножителя, десятков одного сомножителя на десятки второго сомножителя: $1 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = 12$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad \cancel{1} \\ \hline 214 \\ \hline 122 \\ \hline 12 \end{array}$$

4) Тысячи получаются сложением произведений сотен на десятки и десятков на сотни $1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$;

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad \cancel{1} \\ \hline 214 \\ \hline 1322 \\ \hline 5 \end{array}$$

5) Десятки тысяч получаются умножением сотен на сотни $1 \times 2 = 2$:

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 \times | \\
 \hline
 214 \\
 6322 \\
 2
 \end{array}$$

Окончательный результат

$$\begin{array}{r}
 123 \\
 \times \\
 \hline
 214 \\
 26322
 \end{array}$$

Способ прост благодаря тому, что легко запомнить графическую схему последовательности выполнения вычислений, которая является симметричной:

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{r} 000 \\ \times | \\ \hline 000 \\ 0 \end{array} &
 \begin{array}{r} 000 \\ \times \diagdown \\ \hline 000 \\ 00 \end{array} &
 \begin{array}{r} 000 \\ \times \diagup \diagdown \\ \hline 000 \\ 000 \end{array} &
 \begin{array}{r} 000 \\ \times \diagdown \\ \hline 000 \\ 0000 \end{array} &
 \begin{array}{r} 000 \\ \times | \\ \hline 000 \\ 00000 \end{array}
 \end{array}$$

Если на каком-либо шаге получаем двузначное число, то записываем только единицы суммы, а десятки запоминаем и учитываем при вычислении следующего разряда.

Выполним умножения по данной схеме без дополнительных пояснений:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{r} 235 \\ \times \\ \hline 764 \end{array} &
 1) \begin{array}{r} 235 \\ \times | \\ \hline 764 \\ 20 \end{array} &
 2) \begin{array}{r} 235 \\ \times \diagdown \\ \hline 764 \\ 20 \\ 42 \end{array} &
 3) \begin{array}{r} 235 \\ \times \diagup \diagdown \\ \hline 764 \\ 440 \\ 61 \end{array} &
 4) \begin{array}{r} 235 \\ \times \diagdown \\ \hline 764 \\ 6540 \\ 33 \end{array} &
 5) \begin{array}{r} 235 \\ \times | \\ \hline 764 \\ 39540 \\ + 14 \\ \hline 179540 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{r} 145 \\ \times \\ \hline 276 \end{array} &
 1) \begin{array}{r} 145 \\ \times | \\ \hline 276 \\ 30 \end{array} &
 2) \begin{array}{r} 145 \\ \times \diagdown \\ \hline 276 \\ 30 \\ 59 \end{array} &
 3) \begin{array}{r} 145 \\ \times \diagup \diagdown \\ \hline 276 \\ 620 \\ 44 \end{array} &
 4) \begin{array}{r} 145 \\ \times \diagdown \\ \hline 276 \\ 5020 \\ 15 \end{array} &
 5) \begin{array}{r} 145 \\ \times | \\ \hline 276 \\ 20020 \\ + 2 \\ \hline 40020 \end{array}
 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$	1) $\begin{array}{r} 379 \\ \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$	2) $\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$	3) $\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$	4) $\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$	5) $\begin{array}{r} 379 \\ \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$
	$\underline{72}$	$\underline{72}$	$\underline{1172}$	$\underline{12272}$	$\underline{65272}$
		110	111	53	+ 15
					$\underline{215272}$

Выполняя вычисления шаг за шагом, надо всегда помнить, что на первом шаге вычислений мы получаем первую правую цифру окончательного результата, на втором шаге — вторую цифру окончательного результата и т. д. В противном случае (смотри последний пример, где суммы получаются трехзначные) легко сбиться и попасть не в те разряды, которые следует.

При нахождении произведения с применением данного метода наиболее сложным является третий шаг, где в уме надо находить и запоминать три произведения. Рекомендуем следующую последовательность вычислений:

$$\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 568 \end{array}$$

(последовательность нахождения произведений произвольная, какая вам больше нравится): 1) $3 \cdot 8 = 24$, 2) $5 \cdot 9 = 45$, 3) $24 + 45 = 69$, 4) $6 \cdot 7 = 42$, 5) $69 + 42 = 111$. Суть рекомендации сводится к тому, чтобы запоминать не более двух чисел, найдя два произведения — сложить их, и затем, запоминая только одно число (сумму), продолжать вычисление.

На первых порах, может быть, будет даже целесообразно выполнять вычисления этого шага письменно.

Описанный выше метод справедлив и при умножении чисел разной разрядности. Для того чтобы умножить трехзначное число на двузначное, достаточно представить мысленно двузначное число как трехзначное:

$$\begin{array}{r} \times 242 \\ \hline 54 \end{array} \quad \text{представим как} \quad \begin{array}{r} \times 242 \\ \hline 054 \end{array}$$

Теперь к данному примеру полностью применим метод Фурье.

Решите самостоятельно:

$$\begin{array}{r} 1) \ 272 \\ \times \quad 351 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \ 159 \\ \times \quad 923 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \ 456 \\ \times \quad 678 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4) \ 651 \\ \times \quad 49 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5) \ 678 \\ \times \quad 63 \\ \hline \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 95 472; 2) 146 757; 3) 309 168; 4) 31 899; 5) 42 714.

Доказательство правильности метода проще всего провести, выполнив обычным способом умножение чисел в общем виде. Обозначим трехзначное число $100a + 10b + c$ через \overline{abc} . Тогда

$$\begin{array}{r} \times \overline{a \ b \ c} \\ \hline \overline{d \ e \ f} \\ + \begin{array}{r} (f \cdot a) \ (f \cdot b) \ (f \cdot c) \\ (e \cdot a) \ (e \cdot b) \ (e \cdot c) \\ (d \cdot a) \ (d \cdot b) \ (d \cdot c) \end{array} \end{array}$$

складывая, окончательный результат запишем в строчку:

$$\overline{abc} \cdot \overline{def} = (d \cdot a) \cdot 10^4 + (e \cdot a + d \cdot b) \cdot 10^3 + (f \cdot a + e \cdot b + d \cdot c) \cdot 10^2 + (f \cdot b + e \cdot c) \cdot 10 + f \cdot c.$$

Теперь остается только внимательно посмотреть на полученный результат и убедиться, что, используя предлагаемый метод, мы не отклонились от классической схемы умножения «столбиком». Этот же метод дает отличные результаты и при умножении двузначных чисел на двузначные.

$$\begin{array}{r} 1) \ 0 \ 0 \\ \times \quad | \\ \hline 0 \ 0 \\ \dots \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \ 0 \ 0 \\ \times \quad \diagdown \diagup \\ \hline 0 \ 0 \\ \dots \underline{0} \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3) \ 0 \ 0 \\ \times \quad | \\ \hline 0 \ 0 \\ \dots \underline{0} \ 0 \ 0 \end{array}$$

Например:

$$\begin{array}{r} \times \ 23 \\ \hline 46 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1) \ 23 \\ \times \quad | \\ \hline 46 \\ 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \ 23 \\ \times \quad \diagdown \diagup \\ \hline 46 \\ 18 \\ 24 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3) \ 23 \\ \times \quad | \\ \hline 46 \\ 258 \\ + \ 8 \\ \hline 1058 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 51 \\
 \times 79 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1) \quad 51 \\
 \quad | \\
 \quad 79 \\
 \hline
 \quad 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2) \quad 51 \\
 \quad \diagdown \quad \diagup \\
 \quad 79 \\
 \hline
 \quad 529
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3) \quad 51 \\
 \quad | \\
 \quad 79 \\
 \hline
 \quad 529 \\
 + 35 \\
 \hline
 4029
 \end{array}$$

Общий метод сокращенного умножения многозначных чисел. При необходимости умножить многозначное число на число той же значности можно рекомендовать следующий метод, который опишем на примере умножения чисел

$$\begin{array}{r}
 \times 354 \\
 \hline
 261
 \end{array}$$

1) Производим умножение цифр, стоящих друг под другом:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 5 \quad 4 \\
 | \quad | \quad | \\
 2 \quad 6 \quad 1 \\
 \hline
 06 \quad 30 \quad 04
 \end{array}$$

Обратим внимание на то, что для записи каждого произведения отводится 2 разряда.

2) Производим умножение накрест соседних цифр. Результат пишем под результатом первого шага со сдвигом на 1 знак влево

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 5 \quad 4 \\
 \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\
 2 \quad 6 \quad 1 \\
 \hline
 06 \quad 30 \quad 04 \\
 2 \quad 82 \quad 9
 \end{array}$$

$$(5 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 29; 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 28)$$

3) Умножаем накрест крайние цифры и их сумму записываем под результатом второго шага со сдвигом на 1 знак влево

$$\begin{array}{r}
 3 \ 5 \ 4 \\
 \times 2 \ 6 \ 1 \\
 \hline
 06 \ 30 \ 04 \\
 + 2 \ 82 \ 9 \\
 \hline
 11 \quad (3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11) \\
 \hline
 9 \ 23 \ 94
 \end{array}$$

Схема, по которой ведется расчет, очень легко запоминается

$$\begin{array}{lcl}
 1) \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ | & | & | \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 000000 \\ \dots \end{array} & 2) \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \diagdown & & \diagup \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 000000 \\ 0000 \\ \dots \end{array} & 3) \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \diagdown & & \diagup \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 00 \ 00 \ 00 \\ + 0 \ 00 \ 0 \\ \hline 00 \end{array}
 \end{array}$$

В случае умножения четырехзначных чисел на четырехзначные схема приобретает следующий вид:

$$\begin{array}{lclcl}
 1) \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ | & | & | & | \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 00 \ 00 \ 00 \ 00 \\ \dots \end{array} & 2) \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \diagdown & & \diagup & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 00 \ 00 \ 00 \ 00 \\ 0 \ 00 \ 00 \ 0 \\ \dots \end{array} & 3) \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \diagdown & & \diagup & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 00 \ 00 \ 00 \ 00 \\ 0 \ 00 \ 00 \ 0 \\ 00 \ 00 \end{array} & 4) \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \diagdown & & \diagup & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 00 \ 00 \ 00 \ 00 \\ 0 \ 00 \ 00 \ 0 \\ 00 \ 00 \\ 00 \end{array}
 \end{array}$$

Из приведенной схемы легко вывести алгоритм для вычисления произведения двух чисел произвольной значности: первый шаг — перемножение цифр, стоящих друг под другом, второй и остальные шаги вычислений делаются по общей схеме — сначала перемножаются накрест рядом стоящие цифры, затем перемножаются накрест цифры, отстоящие друг от друга на одну цифру, затем отстоящие друг от друга на две цифры, и т. д.

В каждом шаге, начиная со второго, надо найти ряд сумм, каждая из которых состоит из двух слагаемых, где слагаемое — произведение двух цифр. Для записи

каждой суммы отводится 2 разряда (если сумма получается трехзначной, старший разряд суммы запоминается и прибавляется к последующей сумме слева). Каждая последовательность записей следующего шага записывается со сдвигом влево на 1 разряд по сравнению с предыдущим шагом. Если в множителях различное число знаков, то меньшее число рассматриваем как число, у которого старшие разряды равны нулю.

$$\times \begin{array}{r} 2742 \\ 377 \end{array}$$

рассматриваем как $\times \begin{array}{r} 2742 \\ 0377 \end{array}$

Это дает возможность умножать с помощью данного приема числа с различным числом разрядов.

Рассмотрим два примера на использование метода:

$\begin{array}{r} 379 \\ \times \\ \hline 486 \end{array}$	1) $\begin{array}{r} 379 \\ \\ 486 \end{array}$	2) $\begin{array}{r} 379 \\ \times \times \times \\ 486 \end{array}$	2а) $7 \times 8 + 8 \times 9 = 114$	3) $\begin{array}{r} 379 \\ \times \times \times \\ 486 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 125654 \end{array}$	$\begin{array}{r} 125654 \\ 5314 \end{array}$	2б) $3 \times 8 + 4 \times 7 = 52$	$\begin{array}{r} 125654 \\ + 5314 \\ \hline 54 \\ \hline 184194 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3547 \\ \times \\ \hline 391 \end{array}$	1) $\begin{array}{r} 2547 \\ \\ 0391 \end{array}$	2) $\begin{array}{r} 2547 \\ \times \times \times \times \\ 0391 \end{array}$	3) $\begin{array}{r} 2547 \\ \times \times \times \times \\ 0391 \end{array}$	3а) $4 \times 9 + 3 \times 6 = 54$
	$\begin{array}{r} 153607 \end{array}$	$\begin{array}{r} 00153607 \\ 65767 \end{array}$	$\begin{array}{r} 153607 \\ 65767 \\ \hline 1826 \end{array}$	3а) $5 \times 1 + 7 \times 3 = 26$
				3б) $2 \times 9 + 0 \times 4 = 18$

$$\begin{array}{r} 4) \begin{array}{r} 2547 \\ \times \times \times \times \\ 0391 \end{array} \\ \hline 153607 \\ + 65767 \\ \hline 1826 \\ \hline 2 \\ \hline 995877 \end{array}$$

Решите самостоятельно следующие примеры, используя описанный метод:

$$1) \begin{array}{r} \times 391 \\ 458 \end{array} \quad 2) \begin{array}{r} \times 1243 \\ 3564 \end{array} \quad 3) \begin{array}{r} \times 28 \\ 67 \end{array} \quad 4) \begin{array}{r} \times 455 \\ 634 \end{array} \quad 5) \begin{array}{r} \times 4455 \\ 634 \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 179 078; 2) 4 430 052; 3) 1876; 4) 288 470; 5) 2 824 470.

Доказательство метода аналогично доказательству, приведенному в предыдущем пункте.

Метод сдвига. К общим методам, упрощающим вычисление произведений чисел произвольной значности, относится и метод сдвига, который является разновидностью метода, изложенного выше.

Рассмотрим применение метода на конкретном примере

$$\begin{array}{r} \times 362 \\ 145 \end{array}$$

Запишем второй множитель в обратном порядке

541

Ниже запишем первый множитель так, чтобы число единиц первого множителя стояло под цифрой сотен второго множителя (в обратной его записи)

$$\begin{array}{r} 541 \\ 1 \\ \times 362 \\ \hline \end{array}$$

1) перемножим цифры, стоящие друг под другом. Получим единицы окончательного результата. Если число двузначное — десятки запомним:

$$\begin{array}{r} 541 \\ 1 \\ \times 362 \\ \hline 10 \end{array}$$

2) мысленно сдвинем влево первый множитель на 1 знак. Стоящие друг под другом цифры перемножим и произведения сложим. Сумма (с учетом запомненного числа) даст нам десятки окончательного результата:

$$\begin{array}{r} 541 \\ 11 \quad 2 \times 4 + 5 \times 1 = 38, 38 + 1 = 39 \\ \times 362 \\ \hline 390 \end{array}$$

Каждый последующий шаг будет заключаться в сдвиге верхнего множителя влево на один разряд, нахождении произведений стоящих друг под другом цифр и нахождении этих произведений суммы, единицы которой записываются в окончательный результат.

$$\begin{array}{r}
 3) \quad \begin{array}{r} 541 \\ 111 \\ \hline 362 \\ \hline 4490 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 1 + 4 \times 6 + 5 \times 3 = 41 \\ 41 + 3 = 44 \end{array} \quad 4) \quad \begin{array}{r} 541 \\ 11 \\ \hline 362 \\ \hline 2490 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \times 6 + 4 \times 3 = 18 \\ 18 + 4 = 22 \end{array} \\
 5) \quad \begin{array}{r} 541 \\ 1 \\ \hline 362 \\ \hline 52490 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \times 1 = 3 \\ 3 + 2 = 5 \end{array} \quad 362 \times 145 = 52490
 \end{array}$$

При использовании метода не забудьте, что один из сомножителей должен быть записан в обратном порядке. Числа должны быть записаны так, чтобы единицы чисел, которые необходимо перемножить, были подписаны друг под другом.

$$3541 \times 2167 =$$

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 1 \\ \hline 2167 \\ \hline 7 \end{array} \quad 2) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 11 \\ \hline 2167 \\ \hline 347 \end{array} \quad 4 \times 7 + 6 \times 1 = 34
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 111 \\ \hline 2167 \\ \hline 6347 \end{array} \quad 5 \times 7 + 4 \times 6 + 1 \times 1 = 60 \\
 60 + 3 = 63
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 1111 \\ \hline 2167 \\ \hline 63347 \end{array} \quad 3 \times 7 + 5 \times 6 + 4 \times 1 + 1 \times 2 = 57 \\
 57 + 6 = 63
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 111 \\ \hline 2167 \\ \hline 373347 \end{array} \quad 3 \times 6 + 5 \times 1 + 4 \times 2 = 31 \\
 31 + 6 = 37
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6) \quad \begin{array}{r} 1453 \\ 11 \\ \hline 2167 \\ \hline 673347 \end{array} \quad 3 \times 1 + 5 \times 2 = 13 \\
 13 + 3 = 16
 \end{array}$$

$$7) \quad 1453 \quad 3 \times 2 = 6 \quad 6 + 1 = 7 \quad 3541 \times 2167 = 7\,673\,347$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2167 \\ \hline 7\,673\,347 \end{array}$$

Метод применим для умножения чисел любой значности и чисел, имеющих различное число разрядов.

Прodelайте самостоятельно приводимые ниже вычисления, используя метод сдвига:

$$\begin{array}{rclclclclcl} 1) & 315 & 2) & 4258 & 3) & 452 & 4) & 43 & 5) & 35\,412 \\ \times & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ \hline & 427 & & 4321 & & 349 & & 24 & & 239 \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 134 505; 2) 18 398 818; 3) 157 748; 4) 1032; 5) 8 463 468.

Доказательство правильности метода совпадает с доказательством корректности предыдущих приемов (выполняем умножение двух чисел в общем виде столбиком и затем убеждаемся в том, что слагаемые в обоих случаях одни и те же).

3. РУССКИЙ СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

(способ изменения сомножителей)

Изложение метода в общем виде. Если один из сомножителей увеличить в m раз, а второй сомножитель во столько же раз уменьшить, то произведение не изменится. Этим свойством произведения можно пользоваться для облегчения вычислений. Например:

$$\begin{aligned} 25 \times 24 &= (25 \times 4) \times (24 : 4) = 100 \times 6 = 600, \\ 13 \times 18 &= (13 \times 6) \times (18 : 6) = 78 \times 3 = 234. \end{aligned}$$

Прием дает хорошие результаты при умножении на двузначные числа. Применяя его, очень часто удается свести умножение на двузначное число к умножению на однозначное число с последующим умножением опять на однозначное число

$$23 \times 15 = 115 \times 3 = 345.$$

Активное усвоение метода заключается в том, чтобы в каждом отдельном случае быстро сообразить, как можно упростить множимое или множитель. При этом сведение к умножению на однозначное число — только частный случай.

$$35 \times 55 = (34 : 2) \times (55 \times 2) = 17 \times 110.$$

Умножать на 110 проще, чем на 55.

Умножение на число вида $5 \cdot 10^n$. Способ изменения сомножителей упрощает умножение на числа вида $5 \cdot 10^n$. Если необходимо умножить

$$246 \times 5,$$

то, уменьшая первый множитель в 2 раза, а второй множитель увеличивая в 2 раза, получим:

$$(246:2) \times (5 \times 2) = 123 \times 10 = 1230,$$

$$257 \times 5 = 128,5 \times 10 = 1285,$$

$$349 \times 5 = 174,5 \times 10 = 1745.$$

Отсюда вытекает правило: чтобы умножить число на 5, его необходимо умножить на 10 и разделить на 2

$$257 \times 5 = 2570:2 = 1285,$$

$$349 \times 5 = 3490:2 = 1745.$$

Аналогично происходит умножение на $5 \cdot 10^n$.

$$7292 \times 5 \cdot 10^n = 36\,460 \cdot 10^n$$

$$273 \times 500 = 136,5 \times 10 \times 100 = 136\,500$$

$$43 \times 0,005 = 43 \times 5 \cdot 10^{-3} = 215 \cdot 10^{-3} = 0,215.$$

Решите самостоятельно:

$$1) 397 \times 50 = \quad 3) 12,54 \times 500 = \quad 5) 18\,500 \times 0,005 =$$

$$2) 423 \times 5 \cdot 10^7 = \quad 4) 136,54 \times 5 \cdot 10^{-4} = \quad 6) 159 \times 0,5 =$$

Ответы для проверки: 1) 19 850; 2) $2115 \cdot 10^7$; 3) 6270; 4) $6827 \cdot 10^{-5}$; 5) 92,5; 6) 79,5.

Умножение на $25 \cdot 10^n$. Чтобы умножить число на 25, его необходимо умножить на 100 и разделить на 4:

$$1232 \times 25 = 123200:4 = 30\,900$$

$$9532 \times 25 = 953200:4 = 238\,300.$$

Множитель $10^{\pm n}$ не меняет алгоритма нахождения произведения:

$$378 \times 25 \cdot 10^4 = 37\,800:4 \cdot 10^4 = 9600 \cdot 10^4 = 96 \cdot 10^6,$$

$$36 \times 25 \cdot 10^{-2} = 3600:4 \cdot 10^{-2} = 900 \cdot 10^{-2} = 9,$$

$$157 \times 2500 = 15\,700:4 \cdot 100 = 392\,500.$$

Найдите самостоятельно:

$$1) 15\,432 \times 2500 =$$

$$4) 297 \times 0,25 =$$

$$2) 458 \times 25 \cdot 10^7 =$$

$$5) 666 \times 0,025 =$$

$$3) 236 \times 25 \cdot 10^{-2} =$$

$$6) 1756 \times 25 \cdot 10^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 38 580 000; 2) $1145 \cdot 10^8$; 3) 59; 4) 74,25; 5) 16,65; 6) $439 \cdot 10^4$.

Умножение на $125 \cdot 10^n$. Чтобы умножить число на 125, необходимо это число умножить на 1000 и разделить на 8.

$$453 \times 125 = 453\,000:8 = 56\,625,$$

$$129 \times 125 = 129\,000:8 = 16\,150.$$

Так же, как и в предыдущих случаях, наличие множителя $10^{\pm n}$ не изменяет характера вычислений

$$354 \cdot 0,125 = 354\,000 : 8 \cdot 10^{-3};$$

множитель $10^{\pm n}$ проще учитывать на конечной стадии вычислений.

Решите самостоятельно:

$$1) \quad 1253 \times 125 \cdot 10^3 = \quad 4) \quad 475 \times 125 \cdot 10^{-2} =$$

$$2) \quad 459 \times 12\,500 = \quad 5) \quad 707 \times 125 \cdot 10^4 =$$

$$3) \quad 174 \times 0,0125 = \quad 6) \quad 734 \times 125\,000 =$$

Ответы для проверки: 1) $156\,625 \cdot 10^3$; 2) $5\,737\,500$; 3) $2,175$; 4) $59\,375 \cdot 10^{-2}$; 5) $88\,375 \cdot 10^4$; 6) $91\,750\,000$.

Деление на $5 \cdot 10^n$; $25 \cdot 10^n$; $125 \cdot 10^n$. Освоив умножение на 5, 25, 125, легко перейти и к делению на эти числа. Чтобы разделить число на 5, его надо умножить на 2 и разделить на 10:

$$537:5 = (537 \times 2):10 = 1074:10 = 107,4,$$

$$254:5 = (254 \times 2):10 = 508:10 = 50,8.$$

Чтобы разделить число на 25, его надо умножить на 4 и разделить на 100:

$$120:25 = (120 \times 4):100 = 4,8,$$

$$231:25 = (231 \times 4):100 = 9,24.$$

Чтобы разделить число на 125, необходимо его умножить на 8 и разделить на 1000:

$$6:125 = (6 \times 8):1000 = 0,048,$$

$$2431:125 = (2431 \times 8):1000 = 19,448.$$

Наличие в делителе множителя вида $10^{\pm n}$ не меняет порядка вычислительного процесса. Множитель $10^{\pm n}$ проще всего учитывать в конечном результате, не забывая, что при этом меняется знак у n :

$$231:(5 \cdot 10^4) = (231 \times 2):10 \cdot 10^{-4} = 46,2 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 462 \cdot 10^{-5} = 0,00462,$$

$$229:(25 \cdot 10^{-3}) = (229 \times 4):100 \cdot 10^3 = 9160,$$

$$130:12\,500 = (130 \times 8):1000 \cdot 10^{-2} = 104 \cdot 10^{-4},$$

Выполните самостоятельно вычисления:

$$1) \quad 293:(125 \cdot 10^{-2}) = \quad 3) \quad 6:(125 \cdot 10^3) = \quad 5) \quad 712:(5 \cdot 10^{-3}) =$$

$$2) \quad 124:500 = \quad 4) \quad 51:25 = \quad 6) \quad 429:1,25 =$$

Ответы для проверки: 1) $234,4$; 2) $0,248$; 3) 48 ; 4) $2,04$; 5) $142\,400$; 6) $343,2$.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ НА СЛАГАЕМЫЕ

Иногда один из сомножителей можно представить в виде суммы чисел, умножение на которые легко выполняется. Этим можно воспользоваться для упрощения вычисления. Предположим, необходимо найти произведение

$$1254 \times 175.$$

Существуют простые способы умножения на 125 и 50 (смотри пункт 3 данной главы). Если вам хорошо известны эти способы упрощенного умножения, то целесообразно представить множитель в виде суммы $175 = 125 + 50$:

$$1254 \times (125 + 50) = 156\,750 + 62\,700 = 219\,450.$$

При реальном счете тоже приходится делать промежуточные записи, но их выгоднее делать так:

$$\begin{array}{r} 1254 \times 175 = 156\,750 \\ + 62\,700 \\ \hline 219\,450 \end{array}$$

Еще один пример на применение метода:

$$\begin{array}{r} 325 \times 36 = 325 \times (25 + 11) = 8125 \\ + 3575 \\ \hline 11\,700 \end{array}$$

Применение данного метода требует знания упрощенных методов умножения на отдельные числа, поэтому практическое применение он может найти только после освоения основного материала данной главы.

5. МЕТОД, УПРОЩАЮЩИЙ УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО, В СОСТАВ КОТОРОГО ВХОДЯТ ЦИФРЫ 6, 7, 8 И 9

(«метод отрицательных цифр»)

Хорошо известно, что умножать на цифры 1, 2, 3, 4 легче, чем на цифры 6, 7, 8, 9. Ниже излагается метод, позволяющий сводить умножение на 9 умножением на 1, умножение на 8 умножением на 2 и т. д. Этот прием чаще используется при работе с арифмометром, но и при письменном нахождении произведения может упростить выкладки. Заменяем каждое из чисел 6, 7, 8, 9 разностью $10 - 4$, $10 - 3$, $10 - 2$, $10 - 1$, записываем их в виде суммы $10 + \overline{4}$, $10 + \overline{3}$, $10 + \overline{2}$, $10 + \overline{1}$, обозначая отрицательные числа знаком «минус» сверху. Теперь любое натуральное

число можно записать, не пользуясь цифрами 6—9. Например, вместо 27 пишем 33, вместо 168 пишем $2\bar{3}\bar{2}$, вместо 2994 пишем $30\bar{1}4$. Применяя такую запись многозначного множителя, мы будем иметь наряду с обычными положительными частными произведениями также и частные произведения отрицательные. Пример такого умножения с применением «отрицательных цифр»:

$$\begin{array}{r}
 82467 \\
 \times 2984 \\
 \hline
 329868 \\
 + 659736 \\
 744203 \\
 164934 \\
 \hline
 246081528
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 82467 \\
 \times 30\bar{2}4 \\
 \hline
 329868 \\
 + \bar{1}64\bar{9}34 \\
 247401 \\
 \hline
 246081528
 \end{array}$$

Находя итоговую сумму, учитываем, что некоторые частные произведения (в нашем примере 164934) надо не складывать с остальными частными произведениями, а вычитать.

Поясним метод двумя примерами на использование «отрицательных цифр»:

$$\begin{array}{r}
 325 \times 593 = \qquad 442\,134 \times 399\,183 = \\
 \begin{array}{r}
 \times 325 \\
 6\bar{1}3 \\
 \hline
 975 \\
 + \bar{3}\bar{2}\bar{5} \\
 1950 \\
 \hline
 192725
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \times 442\,134 \\
 40\bar{1}\,2\bar{2}\bar{3} \\
 \hline
 1326\,402 \\
 \bar{8}84\,2\bar{6}\bar{8} \\
 \hline
 + \quad 884\,268 \\
 \quad 442\,134 \\
 \hline
 1768536 \\
 \hline
 176\,492\,376\,522
 \end{array}
 \end{array}$$

6. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ, БЛИЗКИХ К 10^n ,

$2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, $A \cdot 10^n$

(метод дополнений)

Одним из самых эффективных и эффектных методов, используемых при необходимости перемножить два числа, близких к 10^n , является метод дополнений. Под дополнением числа B до числа A будем понимать разность $A - B$ (смотри гл. I, пункт 6). Обозначим ее через α . Из определения видно, что дополнение может быть как числом положительным, так и числом отрицательным. Например, дополнение числа 95 до числа 100 равно 5, а дополнение числа 103 до числа 100 будет — 3. Суть

метода дополнений проще всего рассмотреть на примере умножения двух чисел, близких к 100

Умножение чисел, близких к 100. Предположим, надо умножить

$$94 \times 98.$$

Дополнением множимого до 100 будет $\alpha_1 = 100 - 94 = 6$,
дополнением множителя до 100 будет $\alpha_2 = 100 - 98 = 2$.
Запишем это для наглядности так: !

$$\begin{array}{r} 94 \times 98 \\ 6 \quad 2 \end{array}$$

Чтобы получить произведение двух чисел, близких к 100, необходимо:

1) из любого сомножителя вычесть дополнение второго сомножителя до 100

$$98 - 6 = 92 \text{ или } 94 - 2 = 92;$$

2) найти произведение дополнений

$$6 \times 2 = 12;$$

3) к разности сомножителя и дополнения приписать полученное произведение дополнений

$$94 \times 98 = 9212.$$

Упрощение в вычислениях очень существенное.

Несколько примеров на умножение двузначных чисел:

$$\begin{array}{r} 99 \times 95 = \\ 1 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 99 - 5 = 95 - 1 = 94, \\ 2) 5 \times 1 = 5, \\ 3) 99 \times 95 = 9405 \end{array}$$

(обратите внимание на то, что при приписывании произведения дополнений оно должно занимать два разряда)

$$\begin{array}{r} 91 \times 98 = \\ 9 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 91 - 2 = 98 - 9 = 89, \\ 2) 2 \times 9 = 18, \\ 3) 91 \times 98 = 8918. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \times 84 = \\ 1 \quad 16 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 84 - 1 = 99 - 16 = 83, \\ 2) 1 \times 16 = 16, \\ 3) 99 \times 84 = 8316. \end{array}$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{llll} 1) 94 \times 98 = & 3) 91 \times 97 = & 5) 97 \times 97 = & 7) 98 \times 89 = \\ 2) 99 \times 99 = & 4) 97 \times 85 = & 6) 93 \times 96 = & 8) 99 \times 87 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 9212; 2) 9801; 3) 8827; 4) 8245;
5) 9409; 6) 8928; 7) 8722; 8) 8613.

Умножение чисел, близких, но меньших 10ⁿ. Сформулируем общее правило для перемножения чисел, близ-

ких к 10^n . Чтобы перемножить два числа, близких к 10^n (например, 997×998), необходимо:

1) найти дополнение каждого числа до 10^n

$$1000 - 997 = 3,$$

$$1000 - 998 = 2;$$

2) из одного из сомножителей вычесть дополнение второго сомножителя до 10^n

$$997 - 2 = 995 \text{ или } 998 - 3 = 995;$$

3) найти произведение дополнений

$$3 \times 2 = 6;$$

4) результат, полученный во втором пункте, умножить на 10^n (приписать n нулей) и к полученному произведению прибавить произведение дополнений

$$995 \times 1000 + 6 = 995\,006.$$

$$997 \times 998 = 995\,006.$$

Последний пункт можно сформулировать по-другому:

4а) к результату, полученному во втором пункте, приписать произведение дополнений, следя за тем, чтобы оно занимало бы столько же разрядов, сколько их в числе, к которому приписывается произведение.

Два примера для закрепления метода:

$$99\,991 \times 99\,995 =$$

$$9973 \times 9997 =$$

$$1) \quad 100\,000 - 99\,991 = 9,$$

$$1) \quad 10\,000 - 9973 = 27,$$

$$100\,000 - 99\,995 = 5,$$

$$10\,000 - 9997 = 3,$$

$$2) \quad 99\,991 - 5 = 99\,986,$$

$$2) \quad 9973 - 3 = 9970,$$

$$3) \quad 9 \times 5 = 45,$$

$$3) \quad 27 \times 3 = 81,$$

$$4) \quad 99\,991 \times 99\,995 = 9\,998\,600\,045,$$

$$4) \quad 9973 \times 9997 = 99\,700\,081.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) \quad 999 \times 999 =$$

$$4) \quad 9\,999\,989 \times 9\,999\,991 =$$

$$2) \quad 9909 \times 9990 =$$

$$5) \quad 9951 \times 9991 =$$

$$3) \quad 9988 \times 9997 =$$

$$6) \quad 9911 \times 9999 =$$

Ответы для проверки: 1) $998\,001$; 2) $98\,990\,910$;

3) $99\,850\,036$; 4) $99\,999\,800\,000\,099$; 5) $99\,420\,441$;

6) $99\,100\,089$.

При решении примеров необходимо обращать особое внимание на число разрядов, отводимых в окончательном результате для произведения дополнений.

Обоснование метода.

Предположим, что необходимо перемножить два числа x и y , причем α_x — есть дополнение x до 10^n , α_y — дополнение y до 10^n , т. е. $x + \alpha_x = 10^n$ и $y + \alpha_y = 10^n$. Тогда $x \cdot y = (10^n - \alpha_x) \cdot (10^n - \alpha_y) = (10^n - \alpha_x - \alpha_y) \cdot 10^n + \alpha_x \cdot \alpha_y = (x - \alpha_y) \cdot 10^n + \alpha_x \cdot \alpha_y = (y - \alpha_x) \cdot 10^n + \alpha_x \cdot \alpha_y$.

Расшифруем полученные результаты:

$y - \alpha_x$ — разность между одним из сомножителей и дополнением второго сомножителя до 10^n .

Наличие множителя 10^n говорит о том, что произведение дополнений $\alpha_x \cdot \alpha_y$ можно «приписать» к разности $(y - \alpha_x)$, если это произведение представляет собой число, в котором не более n цифр.

Умножение чисел, близких, но больших 10^n . Для перемножения чисел, близких, но больших 10^n , воспользуемся без изменения правилом, изложенным выше. Необходимо только помнить, что «дополнение» — величина алгебраическая.

Итак, чтобы перемножить два числа, близких к 10^n (например, 104×102 , где $n=2$), необходимо:

1) найти дополнение каждого из сомножителей до 10^n

$$\begin{aligned} 100 - 104 &= -4, \\ 100 - 102 &= -2; \end{aligned}$$

2) из одного из сомножителей вычесть дополнение второго сомножителя до 10^n

$$104 - (-2) = 102 - (-4) = 106;$$

3) найти произведение дополнений

$$(-4) \times (-2) = 8;$$

4) к результату, полученному во втором пункте, приписать произведение дополнений, следя за тем, чтобы оно занимало n разрядов

$$104 \times 102 = 10\,608.$$

Несколько поясняющих примеров

$1003 \times 1021 =$	$1098 - 1099 =$
1) $1000 - 1003 = -3$	1) $1000 - 1098 = -98,$
$1000 - 1021 = -21,$	$1000 - 1099 = -99,$
2) $1021 - (-3) = 1024,$	2) $1098 - (-99) = 1197,$
3) $(-3) \times (-21) = 63,$	3) $(-98) \times (-99) = 9702,$
4) $1003 \times 1021 = 1\,024\,063.$	(произведение находим, используя метод дополнений)
	4) $1098 \times 1099 = 1197$
	$\begin{array}{r} + 9702 \\ \hline 1\,206\,702. \end{array}$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $109 \times 103 =$	4) $100\,354 \times 100\,002 =$
2) $12\,001 \times 10\,004 =$	5) $12\,331 \times 10\,003 =$
3) $221 \times 104 =$	6) $1008 \times 1008 =$

Ответы для проверки: 1) 11 227; 2) 120 058 004; 3) 22 984; 4) 10 035 600 708; 5) 123 346 993; 6) 1 016 064.

Перемножение чисел вида $10^n + x$. В предыдущем разделе мы рассмотрели, по сути дела, перемножение именно таких чисел, но с оговоркой, что x мало. Снимем это ограничение. В этом случае может случиться, что устно ответ получить не удастся, но умножение сведется к числам, которые на порядок меньше первоначальных.

Пусть необходимо перемножить числа 142 и 123. Будем поступать согласно рекомендациям предыдущего раздела:

1) находим дополнения сомножителей до 10^n (в нашем случае до 100)

$$100 - 142 = -42,$$

$$100 - 123 = -23;$$

2) из одного из сомножителей вычитаем дополнение второго сомножителя

$$123 - (-42) = 165 \text{ или } 142 - (-23) = 165;$$

3) к полученному результату приписываем произведение дополнений

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 23 \\ \hline 126 \\ + 84 \\ \hline 966 \end{array} \quad 142 \times 123 = 17\,466$$

(необходимо внимательно следить за числом знаков, отводимых под произведение дополнений, иначе получим ошибочный ответ 165 966). Найти в уме произведение чисел 42 и 23 затруднительно, поэтому это вычисление выполнено «в столбик», но использование метода дополнений позволило свести умножение трехзначных чисел к умножению чисел двузначных.

В данном варианте использования метода дополнений необходимо особенно внимательно следить за тем, чтобы в приписываемом произведении дополнений было бы знаков на 1 меньше, чем в числе, к которому оно приписывается. Поясним это на примере:

$$\begin{array}{l} 183 \times 125 \\ 1) \ 100 - 183 = -83, \\ \quad 100 - 125 = -25, \\ 2) \ 183 - (-25) = 125 - (-83) = 208, \\ 3) \ (-83) \times (-25) = 2075. \end{array}$$

Вот здесь важно не ошибиться. В числе, к которому необходимо приписать произведение дополнений (208), три знака, а в приписываемом числе — четыре. Нетрудно догадаться, как надо поступить в этом случае

$$\begin{array}{r} + 208 \\ 2075 \\ \hline 22875 \end{array}$$

Итак, $183 \times 125 = 22875$.

В предыдущем разделе отмечалось, что число знаков для приписываемого произведения должно быть равно числу знаков в числе, к которому оно приписывается. Здесь же говорится, что число знаков для приписываемого произведения должно быть на 1 меньше. Здесь нет противоречия. В обоих случаях число разрядов, отводимых под произведение дополнений, равно n . Если число меньше 10^n , то в нем n знаков. Если число больше 10^n , то в нем $(n+1)$ разряд.

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{lll} 1) 153 \times 121 = & 3) 253 \times 109 = & 5) 10354 \times 10021 = \\ 2) 1037 \times 1037 = & 4) 131 \times 124 = & 6) 153 \times 153 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 18513; 2) 1075369; 3) 27577; 4) 16244; 5) 103757434; 6) 23409.

Умножение чисел, близких к 10^n , одно из которых больше 10^n , а другое — меньше 10^n . Посмотрим, как можно применить метод дополнений в данном наиболее сложном случае. Канва рассуждений остается та же.

Для того чтобы перемножить 2 числа, близких к 10^n , одно из которых больше 10^n , а другое — меньше 10^n (например, 107×95), необходимо:

1) найти дополнение каждого из сомножителей до 10^n

$$\begin{array}{l} 100 - 107 = -7, \\ 100 - 95 = 5; \end{array}$$

2) из одного из сомножителей вычесть дополнение второго сомножителя до 10^n

$$107 - 5 = 95 - (-7) = 102;$$

3) найти произведение дополнений

$$(-7) \times 5 = -35.$$

Произведение получилось отрицательным. Поэтому придется вспомнить, что на с. 38 последний пункт имеет еще и более строгую трактовку;

4) результат, полученный в пункте 2, умножить на

10^n (т. е. приписать к результату, полученному в пункте 2, n нулей) и к полученному произведению прибавить произведение дополнений. Нетрудно сообразить, что этот пункт остается в силе, если под суммой понимать сумму алгебраическую.

Проще это можно, наверное, сформулировать следующим образом в двух пунктах:

- 4) вычесть из 10^n произведение дополнений
 $100 - 35 = 65;$

5) к результату, полученному в пункте 2 и уменьшенному на единицу, приписать результат вычислений пункта 4

$$107 \times 95 = 10\,165.$$

Два примера для закрепления навыков применения данного метода:

$$10\,024 \times 9998 =$$

- 1) $10\,000 - 10\,024 = -24,$
 $10\,000 - 9998 = 2,$
 2) $10\,024 - 2 = 9998 - (-24) = 10\,022,$
 3) $-24 \times 2 = -48,$
 4) $10\,000 - 48 = 9952,$
 5) $10\,024 \times 9998 = 100\,219\,952.$

$$121 \times 99 =$$

- 1) $100 - 121 = -21,$
 $100 - 99 = 1,$
 2) $121 - 1 = 99 - (-21) = 120,$
 3) $-21 \times 1 = -21,$
 4) $100 - 21 = 79,$
 5) $121 \times 99 = 11\,979.$

В практике возможны случаи, когда произведение дополнений будет по абсолютной величине превышать 10^n . В этом случае надо пользоваться не пунктами 4 и 5, а основной формулировкой: результат, полученный в пункте 2, умножить на 10^n и из полученного произведения вычесть произведение дополнений:

$$2032 \times 997 =$$

- 1) $1000 - 2032 = 1032,$
 $1000 - 997 = 3,$
 2) $2032 - 3 = 2029,$
 3) $-1032 \times 3 = 3096,$
 4) $2029 \times 10^3 = 2\,029\,000,$

$$\begin{array}{r} 2\,029\,000 \\ - \quad 3096 \\ \hline 2\,025\,904 \end{array}$$

$$2032 \times 997 = 2\,025\,904$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 10\,031 \times 9999 =$$

$$4) 990 \times 4354 =$$

$$2) 3024 \times 998 =$$

$$5) 981 \times 1003 =$$

$$3) 99\,988 \times 100\,012 =$$

$$6) 10\,101 \times 9909 =$$

Ответы для проверки: 1) 100 299 969; 2) 3 017 952;
3) 9 999 999 856; 4) 4 310 460; 5) 983 943; 6) 100 090 809.

Умножение чисел, близких к 10^{-n} . Поскольку все изложенное в предыдущих разделах остается в силе и при отрицательном значении n (а также при n , равном нулю), метод дополнений представляет исключительную ценность для инженеров, занимающихся расчетом надежности элементов и систем, где приходится перемножать десятичные дроби, очень близкие к единице (случай $n=0$). Рассмотрим общий случай умножения десятичных дробей, близких к 10^{-n} .

Для того чтобы перемножить две десятичные дроби (например, $0,0997 \times 0,099$), близкие к 10^{-n} (в нашем случае близкие к 0,1, т. е. $n=-1$), необходимо:

1) каждый из сомножителей умножить на 10^m , где m — число знаков после запятой сомножителя, имеющего большее число десятичных знаков:

в числе 0,0997 — четыре знака;

в числе 0,099 — три знака,

следовательно, $m=4$

$$0,0997 \times 10\,000 = 997,$$

$$0,099 \times 10\,000 = 990;$$

2) перемножить получившиеся целые числа

$$997 \times 990 =$$

$$1000 - 997 = 3,$$

$$1000 - 990 = 10,$$

$$990 - 3 = 987,$$

$$3 \times 10 = 30,$$

$$997 \times 990 = 987\,030;$$

3) отделить запятой в получившемся произведении $2\,m$ знаков

$$0,0997 \times 0,99 = 0,009\,870\,30.$$

В данном случае отделяем $2 \times 4 = 8$ знаков. Нуль в конце произведения, вполне естественно, можно не писать.

Метод получения произведения остался без изменений. Первый и третий пункты призваны дать способ нахождения числа разрядов после запятой в окончательном результате. Тот же способ перемножения можно описать и несколько по-другому.

Пусть необходимо перемножить числа

$$0,00998 \times 0,0098 =$$

1) выравниваем число знаков после запятой дописыванием в одном из сомножителей необходимого числа нулей:

$$0,00998 \times 0,00980 =$$

2) перемножаем сомножители как целые числа, не обращая внимания на нули, стоящие перед значащими цифрами,

$$998 \times 980 =$$

$$1000 - 998 = 2$$

$$1000 - 980 = 20$$

$$998 - 20 = 978$$

$$2 \times 20 = 40$$

$$998 - 980 = 978\ 040$$

3) в окончательном результате отделяем запятой число цифр, равное сумме числа цифр после запятой в обоих сомножителях после выравнивания

$$0,00998 \times 0,00980 = 0,0000978040.$$

Примеры для закрепления материала:

$$0,981 \times 0,999 =$$

1) $m=3$, выравнивания не требуется,

$$2) 981 \times 999 = 980\ 019 \text{ (см. с. 38),}$$

$$3) 0,981 \times 0,999 = 0,980019,$$

$$99,98 \times 99,97 =$$

$$1) m=2,$$

$$2) 9998 \times 9997 = 99\ 950\ 006,$$

$$3) 99,98 \times 99,97 = 9995,0006.$$

$$1,003 \times 1,0022 =$$

$$1) m=4, 1,0030 \times 1,0022 =$$

$$2) 10\ 030 \times 10\ 022 = 100\ 520\ 660 \text{ (см. с. 39),}$$

$$3) 1,003 \times 1,0022 = 1,00520660.$$

$$0,0097^2 =$$

$$1) m=4,$$

$$2) 97^2 = 9409 \text{ (см. с. 37),}$$

$$3) 0,0097^2 = 0,00009409.$$

Решите самостоятельно:

2) находим дополнение каждого из сомножителей до $2 \cdot 10^n$

$$\begin{aligned}20\,000 - 19\,999 &= 1, \\ 20\,000 - 20\,010 &= -10;\end{aligned}$$

3) из одного из сомножителей вычитаем дополнение другого сомножителя до $2 \cdot 10^n$

$$19\,999 - (-10) = 20\,009 \text{ или } 20\,010 - 1 = 20\,009;$$

4) полученный результат умножаем на $2 \cdot 10^n$

$$20\,009 \times 20\,000 = 400\,180\,000;$$

5) находим произведение дополнений

$$-10 \times 1 = -10;$$

6) к результату, полученному в пункте 4, алгебраически прибавляем произведение дополнений

$$400\,180\,000 - 10 = 400\,179\,990;$$

7) в полученном результате (пункт 6) отделяем запятой число знаков, равное сумме числа знаков после запятой в каждом из сомножителей (после выравнивания), — см. пункт 1.

$$199,99 \times 200,10 = 40017,9990.$$

В приводимых ниже примерах номера операций не соответствуют указанным выше, но, будем надеяться, вычисления будут ясны:

$$1988 \times 1997 = \quad 1) \quad 1988 - 3 = 1985,$$

$$\begin{array}{cc} 12 & 3 \end{array} \quad 2) \quad 1985 \times 2 = 3970,$$

3) $12 \times 3 = 036$ (записываем с учетом числа разрядов, которое должно занимать произведение дополнений),

$$4) \quad 1998 \times 1997 = 3\,970\,036.$$

$$2017 \times 1998 = \quad 1) \quad 2017 - 2 = 1998 - (-17) = 2015,$$

$$\begin{array}{cc} -17 & 2 \end{array} \quad 2) \quad 2015 \times 2000 = 4\,030\,000,$$

$$3) \quad (-17) \times 2 = -34,$$

$$4) \quad 2017 \times 1998 = 4\,030\,000 - 34 = 4\,029\,966.$$

Обоснование метода.

Пусть $x = 2 \cdot 10^n - \alpha_x$, $y = 2 \cdot 10^n - \alpha_y$ (α_x и α_y могут быть как положительными, так и отрицательными числами); тогда $x \cdot y = (2 \cdot 10^n - \alpha_x) \cdot (2 \cdot 10^n - \alpha_y) = 4 \cdot 10^{2n} - 2 \cdot 10^n \cdot \alpha_x - 2 \cdot 10^n \cdot \alpha_y + \alpha_x \cdot \alpha_y = (2 \cdot 10^n - \alpha_x - \alpha_y) \cdot 2 \cdot 10^n + \alpha_x \cdot \alpha_y$.

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) \quad 209 \times 211 = \quad 4) \quad 0,021 \times 0,0199 =$$

$$2) \quad 179 \times 199 = \quad 5) \quad 0,19 \times 0,19 =$$

$$3) \quad 2011 \times 1997 = \quad 6) \quad 0,00201 \times 0,00203 =$$

Ответы для проверки: 1) 44 099; 2) 35 621; 3) 4 015 967; 4) 0,0004179; 5) 0,0361; 6) 0,0000040803.

Умножение чисел, близких к $5 \cdot 10^n$ (т. е. близких к 50, 500, 5000 и т. д.). Метод дополнений дает хорошие результаты и при применении его для умножения чисел, близких к $5 \cdot 10^n$.

Для того чтобы получить произведение двух чисел, близких к $5 \cdot 10^n$ (например, 48×47 , где $n=1$), необходимо:

1) найти дополнение каждого из сомножителей до $5 \cdot 10^n$ (в конкретном случае до 50)

$$50 - 48 = 2,$$

$$50 - 47 = 3;$$

2) из одного из сомножителей вычесть дополнение другого

$$48 - 3 = 47 - 2 = 45;$$

3) к полученному результату приписать столько нулей, сколько цифр в каждом из сомножителей, и затем полученное число поделить на 2

$$4500 : 2 = 2250.$$

Другая формулировка этого пункта: полученный результат умножить на 10^{n+1} и поделить на 2

$$45 \cdot 10^2 : 2 = 2250;$$

(или полученный результат умножить на 5×10^n

$$45 \times 50 = 2250);$$

4) найти произведение дополнений

$$2 \times 3 = 6;$$

5) к полученному в пункте 3 результату алгебраически прибавить произведение дополнений

$$48 \times 47 = 2250 + 6 = 2256.$$

Рассмотрим данный метод на нескольких примерах:

$$499 \times 495 =$$

$$1) 500 - 499 = 1,$$

$$500 - 495 = 5,$$

$$2) 495 - 1 = 494,$$

$$3) 494\,000 : 2 = 247\,000,$$

$$4) 5 \times 1 = 5,$$

$$5) 499 \times 495 = 247\,000 + 5 = 247\,005.$$

$$503 \times 505 =$$

$$1) 500 - 503 = -3,$$

$$500 - 505 = -5,$$

$$2) 503 - (-5) = 508,$$

$$3) 508\,000 : 2 = 254\,000,$$

$$4) (-3) \times (-5) = 15,$$

$$5) 503 \times 505 = 254\,000 + 15 = 254\,015.$$

$$501 \times 498 =$$

$$1) 500 - 501 = -1,$$

$$500 - 498 = 2,$$

$$2) 501 - 2 = 499,$$

$$3) 499\,000 : 2 = 249\,500,$$

$$4) -1 \times 2 = -2,$$

$$5) 501 \times 498 = 249\,500 - 2 = 249\,498.$$

$$0,504 \times 0,511 =$$

Умножая каждый сомножитель на 10^3 , сводим пример к виду 504×511 .

$$1) 500 - 504 = -4,$$

$$500 - 511 = -11,$$

$$2) 511 - (-4) = 515,$$

$$3) 515\,000 : 2 = 257\,500,$$

$$4) (-4) \times (-11) = 55,$$

$$5) 504 \times 511 = 257\,500 + 55 = 257\,555,$$

6) $0,504 \times 0,511 = 0,257555$ (отделяем запятой 6 знаков, так как первоначально мы каждый из сомножителей умножили на 1000, а все произведение увеличили в 1 000 000 раз). После освоения метода можно рекомендовать следующий порядок вычислений. Для перемножения чисел 58×57 необходимо:

1) разность одного из сомножителей и дополнения второго сомножителя поделить на 2

$$58 - (-7) : 2 = 65 : 2 = 32,5$$

(запятая потребовалась только для того, чтобы при записи не нарушилось формальное равенство);

2) к полученному равенству приписываем произведение дополнений (если это произведение положительное), помня, что оно должно занимать столько разрядов, сколько их в каждом сомножителе (в случае, если результат вычислений пункта 1 число целое), или на 1 разряд меньше, если результат — число дробное. В последнем случае может возникнуть необходимость произвести соответствующее сложение:

$$\begin{array}{r} 325 \\ + 56 \\ \hline 3306 \\ 58 \times 57 = 3306. \end{array}$$

Обоснование метода.

Пусть:

$$x = 5 \cdot 10^n - \alpha_x, \quad y = 5 \cdot 10^n - \alpha_y. \quad \text{Тогда} \quad x \cdot y = (5 \cdot 10^n - \alpha_x) \cdot (5 \cdot 10^n - \alpha_y) = (5 \cdot 10^n)^2 - 5 \cdot 10^n \cdot \alpha_x - 5 \cdot 10^n \cdot \alpha_y + \alpha_x \cdot \alpha_y = \\ = (50 \cdot 10^{2n} - 10^{n+1} \cdot \alpha_x - 10^{n+1} \cdot \alpha_y) : 2 + \alpha_x \cdot \alpha_y = (5 \cdot 10^n - \alpha_x - \alpha_y) \cdot 10^{n+1} : 2 + \alpha_x \cdot \alpha_y = (x - \alpha_y) \cdot 10^{n+1} : 2 + \alpha_x \cdot \alpha_y = \\ = (y - \alpha_x) \cdot 10^{n+1} : 2 + \alpha_x \cdot \alpha_y.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{ll} 1) 5003 \times 4993 = & 4) 0,497 \times 0,497 = \\ 2) 4999 \times 4999 = & 5) 49\,989 \times 49\,991 = \\ 3) 0,5088 \times 0,5004 = & 6) 0,049 \times 0,053 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 24 979 979; 2) 24 990 001; 3) 0,25460352; 4) 0,247009; 5) 2 499 000 099; 6) 0,002597.

Перемножение чисел, близких к $a \cdot 10^n$ (где a — однозначное число). Сформулируем результаты, полученные ранее для общего случая. Чтобы перемножить два числа, близких к $a \cdot 10^n$ (например, 402×401 , где $a=4$, $n=2$), необходимо:

1) найти дополнение каждого сомножителя до $a \cdot 10^n$ (в нашем случае до 400)

$$\begin{array}{l} 400 - 402 = -2, \\ 400 - 401 = -1; \end{array}$$

2) из одного из сомножителей вычесть дополнение другого сомножителя

$$402 - (-1) = 403;$$

3) полученную разность умножить на $a \cdot 10^n$ (т. е. на 400)

$$403 \times 400 = 161\,200;$$

4) к результату, полученному в пункте 3, прибавить (алгебраически) произведение дополнений

$$\begin{array}{l} (-2) \times (-1) = 2, \\ 402 \times 401 = 161\,200 + 2 = 161\,202. \end{array}$$

Практически проще выполнять вычисления по данному алгоритму в другой последовательности.

Необходимо умножить $51 \times 54 = (a=5, n=1)$:

1) находим произведение дополнений — результат дает нам низшие разряды произведения. Записываем его

$$\begin{aligned}(-1) \times (-4) &= 4; \\ 51 \times 54 &= \dots 4.\end{aligned}$$

Следим, чтобы произведение занимало n разрядов (в нашем случае $n=1$ и произведение занимает 1 разряд). Если произведение занимает менее n разрядов, то недостающие разряды заполняем нулями, например, если произведение дополнений равно 12, а $n=3$, то результат запишем так: ...012. Если произведение занимает больше разрядов, чем n , то значение старшего разряда запоминаем. Например, произведение дополнений равно 15, $n=1$. В этом случае записываем ...5 (единицу запоминаем);

2) к одному из сомножителей прибавляем единицы другого сомножителя (если второй сомножитель больше, чем $a \cdot 10^n$) или вычитаем дополнение другого сомножителя (если второй сомножитель меньше, чем $a \cdot 10^n$):

$$51 + 4 = 54 + 1 = 55;$$

3) умножаем полученное число на число десятков (a) и записываем последовательно получающееся произведение перед записанным уже произведением единиц, не забывая в случае необходимости учесть запомненное число десятков, получившееся при нахождении произведения дополнений,

$$51 \times 54 = 2754.$$

Основное преимущество данного алгоритма в том, что можно сразу записывать окончательный результат. Проверьте на следующих примерах, насколько вы освоили описанный метод:

$$\begin{array}{r} 81 \times 83 = \\ -1 - 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 83 - (-1) = 81 - (-3) = 84, \\ 2) 84 \times 8 = 672, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) (-1) \times (-3) = 3, \\ 4) 81 \times 83 = 6723. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \times 78 = \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 79 - 2 = 78 - 1 = 77, \\ 2) 77 \times 8 = 616, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) 2 \times 1 = 2 \\ 4) 79 \times 78 = 6162. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \times 25 = \\ 2 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) 28 - 5 = 25 - 2 = 23, \\ 2) 23 \times 3 = 69, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) 2 \times 5 = 10, \\ 4) 28 \times 25 = 690 + 10 = 700. \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 41 \times 39 = 1) \quad 41 - 1 = 39(-1) = 40, \\
 -1 \quad 1 \quad 2) \quad 40 \times 4 = 160, \\
 3) \quad 1 \times (-1) = -1, \\
 4) \quad 41 \times 39 = 1600 - 1 = 1599.
 \end{array}$$

(в этом случае поступаем по основному алгоритму).

- Обоснование метода.

$$\begin{aligned}
 &\text{Пусть } x = a \cdot 10^n + b, \quad y = a \cdot 10^n + c, \quad \text{тогда } x \cdot y = \\
 &= (a \cdot 10^n + b) \cdot (a \cdot 10^n + c) = (a \cdot 10^n + b + c) \cdot a \cdot 10^n + b \cdot c = \\
 &= (y + b) \cdot a \cdot 10^n + b \cdot c = (x + c) \cdot a \cdot 10^n + b \cdot c.
 \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad 69 \times 69 = & 4) \quad 5,01 \times 5,08 = \\
 2) \quad 3007 \times 3003 = & 5) \quad 27 \times 29 = \\
 3) \quad 509 \times 504 = & 6) \quad 31 \times 28 =
 \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 4761; 2) 9 030 021; 3) 256 536; 4) 25,4508; 5) 783; 6) 868.

Умножение чисел разного порядка, близких к 10^n , $2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$. После изучения материала, изложенного выше, легко освоить и случай, когда сомножители имеют разные порядки. Приводимые примеры не требуют дополнительных пояснений.

$$993 \times 98 = 993 \times 980 : 10 =$$

$$\begin{array}{cc}
 7 & 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 993 - 20 = 980 - 7 = 973, \\
 2) \quad 20 \times 7 = 140, \\
 3) \quad 993 \times 980 = 973140, \\
 4) \quad 993 \times 98 = 97314.
 \end{array}$$

$$1008 \times 109 = 1008 \times 1090 : 10 =$$

$$\begin{array}{cc}
 -8 & -90
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 1008 - (-90) = 1090 - (-8) = 1098, \\
 2) \quad (-8) \times (-90) = 720, \\
 3) \quad 1008 \times 1090 = 1\,098\,720, \\
 4) \quad 1008 \times 109 = 109\,872.
 \end{array}$$

$$10009 \times 99 = 10009 \times 9900 : 100 =$$

$$\begin{array}{cc}
 -9 & 100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 10\,009 - 100 = 9900 - (-9) = 9909, \\
 2) \quad (-9) \times 100 = -900, \\
 3) \quad 10\,009 \times 9900 = 9909 \times 10\,000 - 900 = \\
 = 99\,089\,100, \\
 4) \quad 10\,009 \times 99 = 990\,891.
 \end{array}$$

$$202 \times 2002 = 2020 \times 2002 : 10 =$$

$$\begin{array}{cc}
 -20 & -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 2020 - (-2) = 2002 - (-20) = 2022, \\
 2) \quad (-20) \times (-2) = 40, \\
 3) \quad 2020 \times 2002 = 4\,044\,000 + 40 = 4\,044\,040, \\
 4) \quad 202 \times 2002 = 404\,404.
 \end{array}$$

Необходимо отметить, что не всегда целесообразно пользоваться сокращенными приемами умножения, например, последний пример, наверно, проще решить, сделав умножение столбиком в уме.

$$199 \times 19 = 199 \times 190 =$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 10 \\ 199 - 10 = 190 - 1 = 189, \end{array}$$

$$1) 199 - 10 = 190 - 1 = 189,$$

$$2) 189 \times 100 \times 2 = 37\,800,$$

$$3) 10 \times 1 = 10,$$

$$4) 199 \times 190 = 37\,800 + 10 = 37\,810,$$

$$5) 199 \times 19 = 3781.$$

$$23 \times 197 = 230 \times 197 : 10 =$$

$$\begin{array}{r} -30 \quad 3 \\ 230 - 3 = 197 - (-30) = 227, \end{array}$$

$$1) 230 - 3 = 197 - (-30) = 227,$$

$$2) 227 \times 100 \times 2 = 45\,400,$$

$$3) (-30) \times 3 = -90,$$

$$4) 230 \times 197 = 45\,400 - 90 = 45\,310,$$

$$5) 23 \times 197 = 4531.$$

$$52 \times 508 = 520 \times 508 : 10 =$$

$$\begin{array}{r} -20 \quad -8 \\ 520 - (-8) = 508 - (-20) = 528, \end{array}$$

$$1) 520 - (-8) = 508 - (-20) = 528,$$

$$2) 528 \times 1000 : 2 = 264\,000,$$

$$3) (-20) \times (-8) = 160,$$

$$4) 520 \times 508 = 264\,000 + 160 = 264\,160,$$

$$5) 52 \times 508 = 26416.$$

$$49 \times 4991 = 4900 \times 4991 : 100 =$$

$$\begin{array}{r} 100 \quad 9 \\ 4900 - 9 = 4991 - 100 = 4891, \end{array}$$

$$1) 4900 - 9 = 4991 - 100 = 4891,$$

$$2) 4891 \times 10\,000 : 2 = 24\,455\,000,$$

$$3) 100 \times 9 = 900,$$

$$4) 4900 \times 4991 = 24\,455\,000 + 900 =$$

$$= 24\,455\,900,$$

$$5) 49 \times 4991 = 244\,559.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 999 \times 99 =$$

$$10) 99\,975 \times 97 =$$

$$2) 10\,007 \times 1007 =$$

$$11) 9931 \times 100\,003 =$$

$$3) 10\,031 \times 99 =$$

$$12) 997 \times 99\,998 =$$

$$4) 591 \times 51 =$$

$$13) 50,01 \times 500,2 =$$

$$5) 0,495 \times 49,999 =$$

$$14) 5,09 \times 50,9 =$$

$$6) 511 \times 4996 =$$

$$15) 4988 \times 498 =$$

$$7) 1,999 \times 20,003 =$$

$$16) 2,0034 \times 19 =$$

$$8) 1,996 \times 0,0199 =$$

$$17) 19 \times 198 =$$

$$9) 1981 \times 191 =$$

$$18) 0,0211 \times 0,19 =$$

Ответы для проверки: 1) 98 901; 2) 10 077 049; 3) 993 069; 4) 30 141; 5) 24,749505; 6) 2 552 956; 7) 39,985997; 8) 0,0397204; 9) 378 371; 10) 9 697 575; 11) 993 129 793; 12) 99 698 006; 13) 25015,002; 14) 259,081; 15) 2 484 024; 16) 38,0646; 17) 3762; 18) 0,004009.

Умножение двузначных чисел на двузначные, десятки которых не равны, можно свести к основному случаю, описанному выше, если вспомнить, что дополнения могут быть по абсолютной величине и больше десяти:

$$\begin{array}{r} 82 \times 61 \\ -22 \quad -1 \end{array}$$

За a принимаем число десятков меньшего числа ($a=6$):

- 1) $(-22) \times (-1) = 22$
 $82 \times 61 = \dots^{22}$ (2 запоминаем),
- 2) $82 - (-1) = 83$,
- 3) $83 \times 60 = 4980$,
- 4) $82 \times 61 = 4980 + 22 = 5002$.

Такой способ нахождения произведения пригоден для любых двузначных чисел, но наиболее эффективен он тогда, когда: а) число десятков меньшего сомножителя мало; б) число единиц мало в обоих сомножителях (или хотя бы в одном из сомножителей).

$$\begin{array}{r} 22 \times 53 = \\ -2 \quad -33 \end{array}$$

- 1) $(-2) \times (-33) = 66$,
 $22 \times 53 = \dots^{66}$ (6 запоминаем)
- 2) $53 - (-2) = 55$,
- 3) $55 \times 20 = 1100$,
- 4) $22 \times 53 = 1166$.

$$\begin{array}{r} 62 \times 52 = \\ -12 \quad -2 \end{array}$$

- 1) $(-12) \times (-2) = 24$,
 $62 \times 52 = \dots^{24}$,
- 2) $62 - (-2) = 64$,
- 3) $64 \times 50 = 3200$,
- 4) $62 \times 52 = 3224$.

Не менее эффективен способ, когда число единиц в обоих сомножителях (или в одном из них) близко к 10. В этом случае часто выгодно принять за a число десятков большего сомножителя, увеличенное на 1.

$$\begin{array}{r} 27 \times 39 = \\ 13 \quad 1 \end{array}$$

- 1) $13 \times 1 = 13$ ($a=4$),
- 2) $39 - 13 = 26$,
- 3) $26 \times 40 = 1040$,
- 4) $27 \times 39 = 1040 + 13 = 1053$.

$$\begin{array}{r} 59 \times 69 = \\ 11 \quad 1 \end{array}$$

$$1) 11 \times 1 = 11 (a=7),$$

$$2) 59 - 1 = 58,$$

$$3) 58 \times 70 = 4060,$$

$$4) 59 \times 69 = 4071.$$

Если число единиц большего сомножителя мало, а число единиц меньшего сомножителя велико, то за $a \cdot 10$ целесообразно брать число, большее, чем меньший сомножитель, и меньшее, чем больший сомножитель.

$$61 \times 49 = \text{за } a \cdot 10 \text{ берем } 50.$$

$$\begin{array}{r} -11 \quad 1 \quad 1) (-11) \times 1 = -11, \end{array}$$

$$2) 61 - 1 = 60,$$

$$3) 60 \times 50 = 3000,$$

$$4) 61 \times 49 = 3000 - 11 = 2989,$$

$$72 \times 49 \text{ за } a \cdot 10 \text{ берем } 50.$$

$$\begin{array}{r} -22 \quad 1 \quad 1) 72 - 1 = 71, \end{array}$$

$$2) 71 \times 50 = 3550,$$

$$3) (-22) \times 1 = -22,$$

$$4) 72 \times 49 = 3550 - 22 = 3528.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 29 \times 49 = \quad 3) 43 \times 29 = \quad 5) 69 \times 49 =$$

$$2) 31 \times 52 = \quad 4) 71 \times 81 = \quad 6) 23 \times 43 =$$

Ответы для проверки: 1) 1421; 2) 1612; 3) 1240; 4) 5751; 5) 3381; 6) 989.

Распространение метода на случай нахождения произведения трех сомножителей. Для того чтобы найти произведение трех сомножителей, близких к 100,

$$97 \times 98 \times 99$$

необходимо:

1) найти дополнение каждого множителя до 100

$$97 \times 98 \times 99;$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array}$$

2) из одного из сомножителей вычесть сумму дополнений двух других сомножителей

$$97 - 2 - 1 = 98 - 3 - 1 = 99 - 3 - 2 = 94,$$

полученная разность дает первые две цифры окончательного результата

$$97 \times 98 \times 99 = 94...;$$

3) найти сумму попарных произведений дополнений

$$3 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1 = 11;$$

результат, уменьшенный на единицу ($11 - 1 = 10$), дает следующие две цифры окончательного результата:

$$97 \times 98 \times 99 = 9410...$$

(если сумма произведений будет больше 99, то число сотен прибавляется к последней цифре результата предыдущего пункта.)

4) перемножить дополнения и найти дополнение полученного произведения до 100

$$\begin{aligned} 3 \times 2 \times 1 &= 6, \\ 100 - 6 &= 94, \end{aligned}$$

полученный результат дает последние две цифры окончательного результата

$$97 \times 98 \times 99 = 941\,094.$$

Если произведение дополнений дает трехзначное число, то число сотен надо вычесть из последней цифры окончательного результата, полученного в пункте 3.

Рассмотрим нахождение произведения в общем виде. Пусть необходимо произвести умножение трех чисел x , y и z , причем каждое из них близко к 10^n : $x = 10^n - a$, $y = 10^n - b$, $z = 10^n - c$: $x \cdot y \cdot z = (10^n - a) \cdot (10^n - b) \cdot (10^n - c) = 10^{3n} - 10^{2n}(a + b + c) + 10^n(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) - a \cdot b \cdot c = (10^n - a - b - c) \cdot 10^{2n} + (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) \cdot 10^n + (10^n - a \cdot b \cdot c)$.

Из полученного результата видно, что первые n цифр получаются путем вычитания из любого сомножителя дополнений двух других сомножителей, следующие n цифр — путем нахождения суммы произведений дополнений (уменьшенной на единицу) и, наконец, последние n цифр — дополнение произведения $a \cdot b \cdot c$ до 10^n .

Пример: $995 \times 997 \times 991 =$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 3 & 9 \end{array}$$

1) $995 - 3 - 9 = 983$,

2) $5 \times 3 + 5 \times 9 + 3 \times 9 = 87$ (в окончательный результат запишется 087),

3) $5 \times 3 \times 9 = 135$,

4) $983\,087\,000 - 135 = 983\,086\,865$.

К такому же результату мы придем, если будем действовать так, как описано при умножении чисел, близких к 100:

1) $995 - 3 - 5 = 983$,

2) $5 \times 3 + 5 \times 9 + 3 \times 9 = 87$, $87 - 1 = 086$,

3) $5 \times 3 \times 9 = 135$,

4) $1000 - 135 = 865$,

5) $995 \times 997 \times 991 = 983\,086\,865$.

Используя общую формулировку, легко понять, ка-

кие необходимо производить действия для умножения чисел, больших 10^n .

Приведем пример:

$$\begin{array}{r} 1003 \times 1004 \times 1007 = \\ -3 \quad -4 \quad -7 \end{array}$$

1) $1003 + 4 + 7 = 1014$,

2) $(-3) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-7) + (-3) \cdot (-7) = 61$ (в результат запишется 061)

3) $3 \times 4 \times 7 = 84$ (в результат запишется 084),

4) $1003 \times 1004 \times 1007 = 1\,014\,061\,084$.

Аналогично находятся произведения, когда один или два сомножителя имеют дополнения другого знака, чем третий сомножитель. Достаточно в приведенной выше формуле учесть знаки дополнений.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $12 \times 14 \times 15 =$ 3) $103 \times 99 \times 101 =$ 5) $999 \times 997 \times 996 =$

2) $95 \times 99 \times 98 =$ 4) $103 \times 110 \times 105 =$ 6) $997 \times 995 \times 1003 =$

Ответы для проверки: 1) 2520; 2) 921 690; 3) 1 029 897; 4) 1 189 650; 5) 992 018 988; 6) 994 991 045.

Необходимо заметить, что прием эффективен только в случае, если все сомножители близки к 10^n . Если отличие хотя бы у одного сомножителя от 10^n существенно, то расчеты становятся достаточно громоздкими для устных вычислений.

Читатель может самостоятельно рассмотреть умножение трех сомножителей, близких к $5 \cdot 10^n$ или к $2 \cdot 10^n$. Получающиеся при этом формулы требуют определенного навыка для использования их при устных вычислениях и поэтому здесь не приводятся.

7. УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО, БЛИЗКОЕ К 10^n

Умножение двузначного числа на число, близкое к 100. Чтобы умножить произвольное двузначное число (например, 66) на число, близкое к 100 (например, 98), необходимо:

1) от числа отнять дополнение второго множителя до 100

$$66 - (100 - 98) = 64$$

Результат дает число сотен окончательного результата

$$66 \times 98 = 64\dots;$$

2) найти дополнение первого числа до 100

$$100 - 66 = 34;$$

3) умножить полученное дополнение на дополнение второго числа до 100

$$34 \times 2 = 68;$$

4) к результату, полученному в пункте 1, приписываем результат, полученный в предыдущем пункте, следя за тем, чтобы он занимал два разряда,

$$66 \times 98 = 6468.$$

Если произведение дополнений является числом трехзначным, то число сотен произведения складывается с числом сотен, полученных в пункте 1. Например:

$$66 \times 97 = \quad 1) \quad 100 - 97 = 3,$$

$$66 - 3 = 63,$$

$$2) \quad 100 - 66 = 34,$$

$$3) \quad 34 \times 3 = 102,$$

$$4) \quad 66 \times 97 = 63$$

$$+ \quad 102$$

$$\hline 6402$$

Несколько поясняющих примеров:

$$83 \times 98 = \quad 1) \quad 100 - 98 = 2,$$

$$83 - 2 = 81,$$

$$2) \quad 100 - 83 = 17,$$

$$3) \quad 17 \times 2 = 34,$$

$$4) \quad 83 \times 98 = 8134.$$

$$39 \times 95 = \quad 1) \quad 100 - 95 = 5,$$

$$39 - 5 = 34,$$

$$2) \quad 100 - 39 = 61,$$

$$3) \quad 61 \times 5 = 305,$$

$$4) \quad 39 \times 95 = 34$$

$$+ 305$$

$$\hline 3705$$

Прodelайте самостоятельно следующие вычисления:

$$1) \quad 58 \times 97 = \quad 3) \quad 75 \times 95 = \quad 5) \quad 92 \times 97 =$$

$$2) \quad 29 \times 98 = \quad 4) \quad 88 \times 94 = \quad 6) \quad 87 \times 89 =$$

Ответы для проверки: 1) 5626; 2) 2842; 3) 7125; 4) 8272; 5) 8924; 6) 7743.

Умножение многозначного числа на число, близкое к 100. Чтобы многозначное число умножить на число, близкое к 100 (например, 452×98), необходимо:

1) найти разность между множимым и произведением числа сотен множимого, увеличенного на единицу ($4 + 1 = 5$), на дополнение множителя до 100 ($100 - 98 = 2$)

$$452 - (5 \times 2) = 442.$$

2) к полученному числу надо приписать произведение дополнения до 100 числа, образованного последними

двумя цифрами множимого ($100 - 52 = 48$), на дополнение множителя ($100 - 98 = 2$)

$$\begin{aligned}48 \times 2 &= 96, \\452 \times 98 &= 44\,296.\end{aligned}$$

Пример на применение метода:

$$289 \times 97 =$$

1) находим произведение числа сотен множимого, увеличенного на единицу, и дополнения множителя до 100

$$(2+1) \times (100-97) = 9;$$

2) из множимого вычитаем полученное произведение

$$289 - 9 = 280;$$

3) находим дополнение до 100 числа, образованного последними двумя цифрами множимого

$$100 - 89 = 11;$$

4) произведение дополнений множимого и множителя дают последние две цифры окончательного результата

$$11 \times 3 = 33.$$

Итак, $289 \times 97 = 28\,033$.

Более математически точно данный метод надо сформулировать так: при умножении целого числа на число, близкое к 100, число сотен произведения находится как разность между множимым и произведением числа его сотен, увеличенного на единицу, на дополнение множителя до 100. Произведение дополнений числа, образованного последними двумя цифрами множимого и множителя до 100, дает число единиц окончательного результата.

Уточнение второй формулировки заключается в том, что при нахождении произведения дополнений части множимого и множителя иногда может получаться и трёхзначное число. В этом случае число сотен этого произведения надо сложить с последней цифрой разности, полученной при нахождении числа сотен окончательного произведения («приписывание» справедливо только в том случае, если произведение дополнений дает двузначное число).

$$341 \times 98 = 1) (3+1) \times (100-98) = 8,$$

$$2) 341 - 8 = 333,$$

$$3) 100 - 41 = 59,$$

$$4) 59 \times 2 = 118,$$

$$5) 341 \times 98 = 333 \times 100 + 118 = 33\,418.$$

$$899 \times 98 = 1) (8+1) \times 2 = 18,$$

$$2) 899 - 18 = 881,$$

$$3) 100 - 99 = 1,$$

$$4) 1 \times 2 = 2,$$

$$5) 899 \times 97 = 88\,102.$$

Обратите внимание на то, что в примере $899 \times 97 =$ число разрядов, отводимое под произведение дополнений, равно двум.

Метод умножения не столь сложен, как это может показаться с первого взгляда, а для освоивших метод дополнений (пункт 6) вообще не представляет затруднений, так как является его развитием или повторением.

Доказательство правильности метода.

Пусть множимое равно $(100a + 10b + c)$, а множитель — $100 - x$, где x — дополнение множителя до 100. Составляем выражение согласно приведенному правилу $[(100a + 10b + c) + (a + 1)] \cdot 100 + (100 - 10b - c) \cdot x$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, убеждаемся, что получается тот же ответ, что и при раскрытии скобок выражения $(100a + 10b + c) \times (100 - x)$.

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 851 \times 96 = \quad 3) 2099 \times 96 = \quad 5) 789 \times 97 =$$

$$2) 75 \times 98 = \quad 4) 391 \times 97 = \quad 6) 69 \times 98 =$$

Ответы для проверки: 1) 81 696; 2) 7350; 3) 201 504; 4) 37 927; 5) 76 533; 6) 6762.

Умножение на число, близкое к 10^n . Поняв и освоив способ умножения на число, близкое к 100, легко обобщить метод для умножения на число, близкое к 10^n . Хотя при этом приходится оперировать с большими числами и метод становится малоприменимым для устных вычислений, тем не менее его применение дает существенное упрощение при письменных вычислениях.

При умножении m -значного числа на число, близкое к 10^n , число, образованное первыми $(m - n)$ цифрами множимого, надо увеличить на единицу и умножить на дополнение множителя до 10^n . Это произведение надо вычесть из множимого. К полученной разности, умноженной на 10^n , необходимо прибавить произведение дополнения до 10^n числа, образованного последним n цифрами множимого, на дополнение множителя до 10^n :

$$12\,789 \times 998 = (m=5, n=3),$$

1) число, образованное первыми $(m - n)$ цифрами множимого, увеличиваем на 1 и умножаем на дополнение множителя

$$(12 + 1) \times (1000 - 998) = 26;$$

2) полученное произведение вычитаем из множимого и разность умножаем на 10^3

$$(12\,789 - 26) \times 10^3 = 12\,763\,000;$$

3) находим произведение дополнения до 10^n (т. е. до 1000 в нашем случае) числа, образованного последними 3 цифрами множимого, на дополнение множителя

$$(1000 - 789) \times 2 = 211 \times 2 = 422;$$

окончательный результат

$$12\,789 \times 998 = 12\,763\,422.$$

Так же, как и в предыдущем случае, правильность метода доказывается составлением выражения согласно описанному алгоритму и непосредственной проверкой его раскрытием скобок.

Два примера на применение метода:

$$877 \times 997 = 1) (0+1) \times 3 = 3,$$

$$2) 877 - 3 = 874,$$

$$3) 1000 - 877 = 123,$$

$$4) 123 \times 3 = 369,$$

$$5) 877 \times 997 = 874\,369.$$

$$54 \times 998 = 1) (0+1) \times 2 = 2,$$

$$2) 54 - 2 = 52,$$

$$3) 1000 - 54 = 946,$$

$$4) 946 \times 2 = 1892,$$

$$5) 54 \times 998 = 53\,892.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 973\,129 \times 9997 = \quad 4) 78 \times 9997 =$$

$$2) 159 \times 996 = \quad 5) 6666 \times 996 =$$

$$3) 3443 \times 9998 = \quad 6) 359 \times 999 =$$

Ответы для проверки: 1) 97 228 370 613; 2) 158 364;
3) 34 423 114; 4) 779 766; 5) 6 639 336; 6) 358 641.

8. УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО ВИДА 9, 99, 999, ... $10^n - 1$

Умножение на 9 однозначных чисел. Приводимый ниже способ может существенно облегчить изучение (вернее, запоминание) последнего столбика таблицы умножения, а именно — умножения однозначных чисел на 9.

Предположим, необходимо перемножить

$$4 \times 9.$$

Положим на стол рядом обе руки с вытянутыми пальцами. Приподнимем соответствующий палец, обозначающий множимое (считая с левой стороны). Умножение выполнено: число пальцев левее поднятого пальца дает число десятков произведения, а число пальцев правее

поднятого пальца — число единиц результата. В нашем примере надо поднять четвертый палец (считая слева). При этом число пальцев, лежащее левее поднятого пальца, будет числом десятков произведения (3), а число пальцев, лежащее направо от поднятого пальца, — числом единиц (6).

Проверьте правильность метода при умножении 9 на другие цифры.

Умножение на 9 многозначных чисел. При умножении на 9 наиболее часто пользуются следующим приемом: множимое увеличивают в 10 раз и затем из полученного произведения вычитают множимое

$$576 \times 9 = 576 \times 10 - 576 = 5184.$$

Однако существует более простой способ: чтобы умножить целое число на 9, достаточно вычесть из множимого число десятков, увеличенное на единицу, и к полученному результату приписать дополнение цифры единиц множимого до десяти

$$576 \times 9 =$$

1) число десятков множимого увеличиваем на единицу

$$57 + 1 = 58$$

и вычитаем из множимого

$$576 - 58 = 518;$$

2) к полученному результату приписываем дополнение цифры единиц множимого до 10

$$10 - 6 = 4,$$

$$576 \times 9 = 5184.$$

Для нахождения произведения потребовалось найти в уме разность между числами 576 и 58, что сделать проще, чем найти разность между

$$5760 - 576.$$

Примеры:

$$253 \times 9 = 1) 253 - (25 + 1) = 227,$$

$$2) 10 - 3 = 7,$$

$$3) 253 \times 9 = 2277.$$

$$194 \times 9 = 1) 194 - (19 + 1) = 174,$$

$$2) 10 - 4 = 6,$$

$$3) 194 \times 9 = 1746.$$

Доказательство справедливости приема.

В соответствии с предложенным правилом составляем выражение

$$[(10a + b) - (a + 1)] \cdot 10 + (10 - b),$$

где $(10a+b)$ — множимое число. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$90 \cdot a + 9 \cdot b = 9 \cdot (10a + b).$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{lll} 1) 28 \times 9 = & 3) 53 \times 9 = & 5) 751 \times 9 = \\ 2) 39 \times 9 = & 4) 156 \times 9 = & 6) 239 \times 9 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 257; 2) 351; 3) 477; 4) 1404; 5) 6759; 6) 2151.

Умножение на 99. Хорошо известный способ умножения на 99, заключающийся в использовании формулы $a \cdot 99 = 100a - a$, целесообразно применять только в случае, когда a мало, например $7 \times 99 = 700 - 7 = 693$. В остальных случаях более эффективен следующий прием.

Чтобы умножить целое число на 99, необходимо из этого числа вычесть число его сотен, увеличенное на единицу, и к полученной разности приписать дополнение до 100 числа, образованного двумя последними цифрами множимого,

$$462 \times 99 =$$

1) из числа вычитаем число его сотен, увеличенное на 1,

$$462 - (4 + 1) = 457;$$

2) находим дополнение числа, образованного двумя последними цифрами до 100,

$$100 - 62 = 38;$$

3) приписываем дополнение к предшествующему результату

$$462 \times 99 = 45\,738.$$

Если в нижеприведенном равенстве открыть скобки и привести подобные члены, то можно убедиться в правильности данного правила

$$(100a + 10b + c) \times 99 = [(100a + 10b + c) - (a + 1)] \cdot 100 + (100 - 10b - c).$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{lll} 1) 4578 \times 99 = & 3) 269 \times 99 = & 5) 931 \times 99 = \\ 2) 345 \times 99 = & 4) 889 \times 99 = & 6) 1378 \times 99 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 453 222; 2) 34 155; 3) 26 631; 4) 88 011; 5) 92 169; 6) 136 422.

Умножение на 99 двузначных чисел. Правило умножения произвольного числа на 99 для случая умножения двузначных чисел можно сформулировать более изящно.

Чтобы умножить двузначное число на 99, достаточно

к предшествующему числу приписать его дополнение до 100

$$78 \times 99 = 7722.$$

Правило становится настолько простым, что расчленять его на ряд последовательных действий нецелесообразно. Несколько примеров на употребление данного правила:

$$64 \times 99 = 6336,$$

$$19 \times 99 = 1881,$$

$$76 \times 99 = 7524.$$

Доказательство правильности правила следует из доказательства изложенного в предыдущем разделе при $a=0$.

Умножение на 999. Так же, как и при умножении числа на 99, можно либо воспользоваться формулой $a \cdot 999 = 1000a - a$, что целесообразно делать при малых a : $12 \times 999 = 12\,000 - 12 = 11\,988$, либо использовать прием, аналогичный приему умножения на 99: чтобы умножить целое число на 999, достаточно из умножаемого вычесть число тысяч, увеличенное на единицу, и к полученной разности приписать дополнение до 1000 числа, образованного последними тремя цифрами множимого:

$$2453 \times 999 =$$

1) из умножаемого вычитаем число тысяч, увеличенное на единицу,

$$2453 - (2 + 1) = 2450;$$

2) находим дополнение до 1000 числа, образованного последними тремя цифрами множимого,

$$1000 - 453 = 547;$$

3) приписываем полученное дополнение к предыдущему результату

$$2453 \times 999 = 2\,450\,547.$$

Примеры использования данного метода:

$$12349 \times 999 =$$

$$78 \times 999 =$$

$$1) \quad 12\,349 - (12 + 1) = 12\,336, \quad 1) \quad 78 - (0 + 1) = 77,$$

$$2) \quad 1000 - 349 = 651,$$

$$2) \quad 1000 - 78 = 922,$$

$$3) \quad 12\,349 \times 999 = 12\,336\,651, \quad 3) \quad 78 \times 999 = 77\,922.$$

$$7\,158 \times 999 =$$

$$5999 \times 999 =$$

$$1) \quad 7\,158 - (7 + 1) = 7\,150,$$

$$1) \quad 5999 - (5 + 1) = 5993,$$

$$2) \quad 1000 - 158 = 842,$$

$$2) \quad 1000 - 999 = 1,$$

$$3) \quad 7\,158 \times 999 = 7\,150\,842.$$

$$3) \quad 5999 \times 999 = 5\,993\,001.$$

(в примере 5999×999 дополнение должно занимать 3 разряда). Так же, как и в предыдущем варианте умножения на 99, можно сформулировать правило для случая, когда число знаков в множимом не больше трех

(практически это несколько другая словесная формулировка для соотношения $a \cdot 999 = 1000a - a$): чтобы умножить m -значное число ($m \leq 3$) на 999, достаточно к предшествующему числу приписать его дополнение до 1000 (дополнение должно занимать 3 разряда).

Доказательство приема аналогично доказательству правильности алгоритма умножения на 99 и вытекает из справедливости соотношения

$$(1000a + 100b + 10c + d) \times 999 = [(1000a + 100b + 10c + d) - (a + 1)] \cdot 1000 + (1000 - 100b - 10c - d).$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 7897 \times 999 = \quad 3) 91 \times 999 = \quad 5) 9125 \times 999 =$$

$$2) 653 \times 999 = \quad 4) 1357 \times 999 = \quad 6) 379 \times 999 =$$

Ответы для проверки: 1) 7 889 103; 2) 652 347; 3) 90 909; 4) 1 355 643; 5) 9 115 875; 6) 378 621.

Общая формулировка метода умножения числа на $(10^n - 1)$. Чтобы умножить m -значное число на $(10^n - 1)$, где $m > n$, необходимо из множимого вычесть увеличенное на единицу число, образованное первыми $(m - n)$ цифрами этого же числа, и к полученному результату приписать дополнение до 10^n числа, образованного последними n цифрами множимого

$$23\,439 \times 9999 =$$

Здесь $m = 5$, $n = 4$.

1) из умножаемого вычитаем увеличенное на единицу число, образованное $(m - n)$ его первыми цифрами,
 $23\,439 - (2 + 1) = 23\,436;$

2) находим дополнение до 10^4 числа, образованного последними 4-мя цифрами множимого,
 $10\,000 - 3439 = 6561;$

3) полученный результат приписываем к разности, полученной в пункте 1, следя за тем, чтобы дополнение занимало n разрядов,

$$23\,439 \times 9999 = 234\,366\,561.$$

Примеры на использование метода:

$$499\,329 \times 99\,999 = 1) 499\,329 - (4 + 1) = 49\,932,$$

$$2) 100\,000 - 99\,329 = 671,$$

$$3) 499\,329 \times 99\,999 = 4\,993\,200\,671.$$

(обратите внимание на число разрядов в приписываемом дополнении).

$$5691 \times 999 = 1) 5691 - (5 + 1) = 5685,$$

$$2) 1000 - 691 = 309,$$

$$3) 5691 \times 999 = 5\,685\,309.$$

$$3927 \times 999 = 1) 3927 - (3 + 1) = 3923,$$

$$2) 1000 - 927 = 073,$$

$$3) 3927 \times 999 = 3\,923\,073.$$

Если $m \leq n$, то проще применять соотношение $a \cdot 10^n - a$ в уже описанной формулировке; если необходимо умножить на $(10^n - 1)$ число, меньшее 10^n , то достаточно к предыдущему числу приписать его дополнение до 10^n , соблюдая условие, чтобы в дополнении было n разрядов:

$$379 \times 9999 = (m=3, n=4).$$

К предыдущему числу (378) приписываем его дополнение до 10 000 $(10\,000 - 379) = 9621$.

$$379 \times 9999 = 3\,789\,621.$$

Хотя приведенная формула фактически использует соотношение $10^n \cdot a - a$, но необходимо отметить ее существенное преимущество в методологическом отношении: если первая формула определяет вычисление как единичное действие с «длинными» числами, то во втором случае процесс вычисления разбивается на 2 самостоятельных, более коротких и более простых вычисления.

Результат получается, начиная со старших разрядов, что тоже является большим преимуществом особенно при выполнении приближенных вычислений. Получение результата в порядке старшинства разрядов не нарушается, и при нахождении дополнения. Для получения любой цифры дополнения (кроме последней) надо из 9 вычесть соответствующую цифру числа, дополнение которого находится.

Примеры:

$$295 \times 999 = \begin{array}{l} 1) 295 - 1 = 294, \\ 2) 1000 - 295 = 705, \\ 3) 295 \times 999 = 294\,705. \end{array}$$

$$79 \times 999 = \begin{array}{l} 1) 79 - 1 = 78, \\ 2) 1000 - 79 = 921, \\ 3) 79 \times 999 = 78\,921. \end{array}$$

$$59\,996 \times 9999 = \begin{array}{l} 1) 59\,996 - (5+1) = 59\,990, \\ 2) 10\,000 - 9996 = 0004, \\ 3) 59\,996 \times 9999 = 599\,900\,004. \end{array}$$

Доказательство справедливости общего метода: пусть $a = b \cdot 10^n + c$, где b — произвольное число, а $c < 10^n$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a \cdot (10^n - 1) &= (b \cdot 10^n + c) \cdot (10^n - 1) = \\ &= [(b \cdot 10^n + c) - (b + 1)] \cdot 10^n + (10^n - c). \end{aligned}$$

Положив $b=0$, мы получим формулу для случая $m \leq n$. Для усвоения метода решите следующие примеры:

- 1) $3995 \times 99 =$ 3) $1972 \times 9999 =$ 5) $29\,937 \times 9999 =$
 2) $7777 \times 999 =$ 4) $156 \times 9 =$ 6) $3578 \times 999\,999 =$
 Ответы для проверки: 1) 395 505; 2) 7 769 223;
 3) 19 718 028; 4) 1251; 5) 299 340 063.

9. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ, У КОТОРЫХ СУММА ЦИФР ЕДИНИЦ СОСТАВЛЯЕТ 10

Общая формулировка метода. Чтобы умножить два числа, у которых сумма цифр единиц составляет десять

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 38 \\ \hline \end{array}$$

необходимо:

1) число, полученное вычитанием из большего числа меньшего без единиц,

$$62 - 30 = 32,$$

умножить на число единиц меньшего числа

$$32 \times 8 = 256.$$

Две последние цифры дают десятки и единицы окончательного результата

$$62 \times 38 = \dots 56.$$

Число сотен (2) запоминаем;

2) умножаем число десятков меньшего числа на число десятков большего числа, увеличенное на единицу,

$$3 \times (6 + 1) = 21;$$

к полученному числу прибавляем запомненное число сотен

$$21 + 2 = 23.$$

Полученное число дает сотни окончательного результата

$$62 \times 38 = 2356.$$

Примеры на нахождение произведений с использованием данного метода:

$$76 \times 14 = 1) \quad 76 - 10 = 66;$$

$$66 \times 4 = 264; \quad 76 \times 14 = \dots 64;$$

$$2) \quad 1 \times (7 + 1) = 8;$$

$$8 + 2 = 10; \quad 76 \times 14 = 1064.$$

$$23 \times 67 = 1) \quad 67 - 20 = 47;$$

$$47 \times 3 = 141; \quad 23 \times 67 = \dots 141;$$

$$2) \quad 2 \times (6 + 1) = 14;$$

$$14 + 1 = 15; \quad 23 \times 67 = 1541.$$

$$32 \times 88 = 1) \quad 88 - 30 = 58;$$

$$58 \times 2 = 116; \quad 32 \times 88 = \dots 16,$$

$$2) \quad 3 \times (8+1) = 27;$$

$$27+1=28. \quad 32 \times 88 = 2816.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) \quad 66 \times 94 = \quad 3) \quad 76 \times 14 = \quad 5) \quad 92 \times 78 =$$

$$2) \quad 49 \times 91 = \quad 4) \quad 53 \times 17 = \quad 6) \quad 39 \times 41 =$$

Ответы для проверки: 1) 6204; 2) 4459; 3) 1064; 4) 901; 5) 7176; 6) 1599.

Доказательство справедливости метода вытекает из следующих тождественных преобразований.

Необходимо умножить числа $(10a_1+b_1)$ и $(10a_2+b_2)$, причем $a_2 > a_1$ и $b_1+b_2=10$,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (a_2+1) \cdot 100 + b_1 [(a_2-a_1) \cdot 10 + b_2] &= 100a_1 \cdot a_2 + \\ + 100 \cdot a_1 + 10b_1 \cdot a_2 - 10a_1 \cdot b_1 + b_1 b_2 &= 100a_1 \cdot a_2 + \\ + 10(b_1+b_2) \cdot a_1 + 10b_1 \cdot a_2 - 10a_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2 &= \\ = 100a_1 \cdot a_2 + 10a_1 \cdot b_2 + 10a_2 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2 &= \\ = (10a_1+b_1) \cdot (10a_2+b_2). \end{aligned}$$

Из рассмотрения приводимых преобразований легко заметить, что на a не накладывается каких-либо ограничений — это может быть одно- или многозначное число. Следовательно, метод справедлив и для многозначных чисел:

$$124 \times 146$$

1) из большего числа вычитаем меньшее число без единиц

$$146 - 120 = 26,$$

умножаем полученное число на число единиц меньшего числа

$$26 \times 4 = 104.$$

Две последние цифры произведения дают десятки и единицы окончательного результата; число сотен запоминаем

$$124 \times 146 = \dots 104;$$

2) число десятков меньшего числа умножаем на число десятков большего числа, увеличенное на единицу,

$$12 \times (14+1) = 180,$$

к полученному результату прибавляем запомненное число

$$180+1=181,$$

Окончательный результат $124 \times 146 = 18104$.

Найти устно произведение 12×15 , т. е. двузначного числа на двузначное, в общем случае затруднительно, это проще сделать на бумаге, но использование данного

метода позволяет заменить умножение трехзначных чисел на умножение двузначных чисел.

Решите самостоятельно:

$$1) 3057 \times 3043 = \quad 3) 134 \times 136 = \quad 5) 111 \times 159 =$$

$$2) 243 \times 257 = \quad 4) 261 \times 249 = \quad 6) 532 \times 548 =$$

Ответы для проверки: 1) 9 302 451; 2) 62 451; 3) 18 224; 4) 64 989; 5) 17 649; 6) 291 536.

Умножение чисел, у которых сумма цифр единиц составляет десять, а число десятков различается на единицу

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$$

В этом частном случае находим произведение, оперируя только с большим числом:

1) число десятков (большого числа) возводим в квадрат и отнимаем единицу

$$6 \times 6 - 1 = 35;$$

2) число единиц большего числа возводим в квадрат

$$7 \times 7 = 49;$$

3) находим дополнение полученного произведения до 100

$$100 - 49 = 51;$$

4) полученное дополнение приписываем к числу, полученному в первом пункте,

$$53 \times 67 = 3551.$$

Метод без изменений применим к многозначным числам:

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 336 \\ \hline \end{array}$$

1) число десятков большего числа возводим в квадрат и вычитаем единицу

$$33 \times 33 - 1 = 1088,$$

получаем число сотен окончательного результата

$$324 \times 336 = 1088 \dots;$$

2) число единиц большего числа возводим в квадрат

$$6 \times 6 = 36;$$

3) находим дополнение полученного произведения до 100

$$100 - 36 = 64;$$

4) полученное дополнение приписываем к числу, полученному в первом пункте,

$$324 \times 336 = 108\,864.$$

Примеры на применение приема:

$$75 \times 65 = 1) 7 \times 7 - 1 = 48,$$

$$2) 5 \times 5 = 25,$$

$$3) 100 - 25 = 75,$$

$$75 \times 65 = 4875.$$

$$29 \times 31 = 1) 3 \times 3 - 1 = 8,$$

$$2) 1 \times 1 = 1,$$

$$3) 100 - 1 = 99,$$

$$29 \times 31 = 899.$$

$$154 \times 146 = 1) 15 \times 15 - 1 = 224,$$

$$2) 4 \times 4 = 16,$$

$$3) 100 - 16 = 84,$$

$$154 \times 146 = 22\,484.$$

$$207 \times 213 = 1) 21 \times 21 - 1 = 440,$$

$$2) 3 \times 3 = 9,$$

$$3) 100 - 9 = 91,$$

$$207 \times 213 = 44\,091.$$

Доказательство правильности метода аналогично приведенному на с. 67. Умножаем $(10a+b)$ и $(10c+d)$, причем $a=c-1$ и $b=10-d$

$$(10a+b) \cdot (10c+d) = 100ac + 10a \cdot d + 10c \cdot b + b \cdot d =$$

$$100 \cdot c(c-1) + 10(c-1) \cdot d + 10c(10-d) + d =$$

$$= 100(c^2-1) + 100-d^2.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 32 \times 48 = \quad 3) 464 \times 476 = \quad 5) 81 \times 99 =$$

$$2) 229 \times 231 = \quad 4) 89 \times 71 = \quad 6) 523 \times 537 =$$

Ответы для проверки: 1) 1536; 2) 52 899; 3) 220 864; 4) 6319; 5) 8019; 6) 280 851.

10. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ, У КОТОРЫХ ЧИСЛО ДЕСЯТКОВ ОДИНАКОВО, А СУММА ЕДИНИЦ СОМНОЖИТЕЛЕЙ СОСТАВЛЯЕТ 10, И ДРУГИЕ СЛУЧАИ

Общая формулировка метода. Чтобы перемножить два числа, у которых число десятков одинаково, а сумма цифр единиц сомножителей составляет десять

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times 71 \\ \hline \end{array}$$

или, чтобы перемножить два числа с равным числом единиц, сумма цифр десятков у которых равна десяти

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 78 \\ \hline \end{array}$$

или, чтобы перемножить два числа, цифры одного из которых одинаковы, а цифры другого в сумме составляют десять

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

применяем следующее общее для всех трех случаев, правило:

1) к произведению десятков сомножителей прибавляется повторяющаяся цифра. Результат дает число сотен произведения:

$$\text{для 1-го примера } 7 \times 7 + 7 = 56 \quad 79 \times 71 = 56 \dots,$$

$$\text{для 2-го примера } 3 \times 7 + 8 = 29 \quad 38 \times 78 = 29 \dots,$$

$$\text{для 3-го примера } 2 \times 6 + 6 = 18 \quad 66 \times 28 = 18 \dots;$$

2) к полученному числу приписываем двузначное число, равное произведению единиц обоих чисел:

$$\text{для 1-го примера } 9 \times 1 = 9 \quad 79 \times 71 = 5609;$$

$$\text{для 2-го примера } 8 \times 8 = 64 \quad 38 \times 78 = 2964;$$

$$\text{для 3-го примера } 6 \times 8 = 48 \quad 66 \times 28 = 1848.$$

В первом примере приписываем 09, а не 9, так как в правиле сказано: «...приписываем двузначное число, которое...»

Примеры на применение метода:

$$43 \times 63 = 1) \quad 4 \times 6 + 3 = 27,$$

$$2) \quad 3 \times 3 = 9.$$

$$43 \times 63 = 2709.$$

$$62 \times 68 = 1) \quad 6 \times 6 + 6 = 42,$$

$$2) \quad 2 \times 8 = 16.$$

$$62 \times 68 = 4216.$$

$$88 \times 37 = 1) \quad 8 \times 3 + 8 = 32,$$

$$2) \quad 7 \times 8 = 56.$$

$$88 \times 37 = 3256.$$

Докажем обоснованность метода.

1) Пусть нам необходимо перемножить два числа $(10a_1 + b_1)$ и $(10a_2 + b_2)$, причем $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 + b_2 = 10$.

$$(10a + b_1) \cdot (10a + b_2) = 100a^2 + 10a \cdot b_2 + 10a \cdot b_1$$

$$+ b_1 \cdot b_2 = 100a^2 + 10a(b_1 + b_2) + b_1 \cdot b_2 = 100a^2 +$$

$$+ 10a \cdot 10 + b_1 \cdot b_2 = (a \cdot a + a) \cdot 100 + b_1 \cdot b_2.$$

2) Второй случай: перемножаем числа $(10a_1 + b_1)$ и $(10a_2 + b_2)$, причем $b_1 = b_2 = b$, $a_1 + a_2 = 10$.

$$(10a_1 + b) \cdot (10a_2 + b) = 100a_1 \cdot a_2 + 10a_1 \cdot b +$$

$$+ 10a_2 \cdot b + b^2 = 100a_1 \cdot a_2 + 10b \cdot (a_1 + a_2) + b^2 =$$

$$= 100a_1 \cdot a_2 + 10b \cdot 10 + b^2 = 100(a_1 \cdot a_2 + b) + b^2.$$

3) Третий случай: необходимо перемножить числа $(10a_2+b_2)$ и $(10a_1+b_1)$, где $a_1=b_1=c$, $a_2+b_2=10$.

$$(10c+c) \cdot (10a_2+b_2) = 100a_2 \cdot c + 10c \cdot a_2 + 10c \cdot b_2 + c \cdot b_2 = 100(c \cdot a_2 + c) + c \cdot b_2.$$

В каждом из трех случаев мы получаем соотношения, выражающие в аналитической форме изложенное выше правило.

Примеры для самостоятельного решения:

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $84 \times 86 =$ | 5) $44 \times 37 =$ | 9) $27 \times 87 =$ |
| 2) $63 \times 67 =$ | 6) $66 \times 64 =$ | 10) $19 \times 99 =$ |
| 3) $97 \times 17 =$ | 7) $29 \times 21 =$ | 11) $33 \times 46 =$ |
| 4) $54 \times 54 =$ | 8) $33 \times 37 =$ | 12) $77 \times 73 =$ |

Ответы для проверки: 1) 7224; 2) 4221; 3) 1649; 4) 2916; 5) 1628; 6) 4224; 7) 609; 8) 1221; 9) 2349; 10) 1881; 11) 1518; 12) 5621.

Умножение двух чисел с одинаковым числом десятков, сумма цифр единиц которых равна 10. Результаты предыдущего раздела для этого случая можно сформулировать несколько по-другому.

Чтобы перемножить два произвольных числа, различающихся только цифрами единиц, сумма которых составляет 10, надо записать произведение числа десятков на следующее за ним натуральное число и приписать справа число, представляющее собой произведение единиц сомножителей.

$$\begin{array}{lll} 67 \times 63 = & 1) \ 6 \times 7 = 42, & 24 \times 26 = \\ & 2) \ 7 \times 3 = 21, & 1) \ 2 \times 3 = 6, \\ & 67 \times 63 = 4221, & 2) \ 4 \times 6 = 24, \\ & & 24 \times 26 = 624. \end{array}$$

Рассмотрение доказательства правильности этого метода, приведенного на с. 70, показывает, что под a можно понимать не только любую цифру, но и любое натуральное число, — выводы остаются справедливыми:

$$\begin{array}{ll} 134 \times 136 = & 1) \ 13 \times 14 = 182, \\ & 2) \ 4 \times 6 = 24, \\ & 134 \times 136 = 18\ 224. \\ 1625 \times 1625 = & 1) \ 162 \times 163 = 26\ 406 \\ & 2) \ 5 \times 5 = 25 \\ & 1625 \times 1625 = 2\ 640\ 625. \end{array}$$

Хотя умножение этих трех- и четырехзначных чисел не относится к устному счету, однако и при письменных вычислениях с его помощью можно получить значитель-

ное упрощение в выкладках: перемножение трехзначных чисел сводится к перемножению чисел двузначных, перемножение четырехзначных чисел сводится к перемножению трехзначных чисел и т. д.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $1981 \times 1989 =$ (для умножения 198×199 использовать метод дополнений — пункт 6 этой главы)

2) $81 \times 89 =$ 4) $0,997 \times 0,993 =$

3) $99 \times 91 =$ 5) $59 \times 51 =$

Ответы для проверки: 1) 3 940 209; 2) 7209; 3) 9009; 4) 0, 990 021; 5) 3009.

Обычно это правило знают для еще более частного случая.

Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся на 5, надо число десятков умножить на следующее за ним натуральное число и приписать справа 25:

$35 \times 35 =$ 1) $3 \times 4 = 12,$
2) $35 \times 35 = 1225.$

$65 \times 65 =$ 1) $6 \times 7 = 42,$
2) $65 \times 65 = 4225.$

Решите самостоятельно:

1) $95 \times 95 =$ 3) $45 \times 45 =$

2) $15 \times 15 =$ 4) $75 \times 75 =$

Ответы для проверки: 1) 9025; 2) 225; 3) 2025; 4) 5625.

11. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С РАВНЫМ ЧИСЛОМ ДЕСЯТКОВ ИЛИ С РАВНЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ, ИЛИ НА ЧИСЛО, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Общая формулировка метода. Чтобы перемножить два двузначных числа, у которых одинаково число десятков

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 59 \\ \hline \end{array}$$

или одинаково число единиц

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 58 \\ \hline \end{array}$$

или один из сомножителей состоит из одинаковых цифр

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$$

необходимо:

1) перемножить цифры десятков сомножителей. Результат дает сотни окончательного ответа результата:

для 1-го примера $5 \times 5 = 25$;

для 2-го примера $6 \times 5 = 30$;

для 3-го примера $4 \times 3 = 12$;

2) перемножить сумму различных цифр на общую цифру. Результат дает десятки окончательного результата:

для 1-го примера $(9+3) \times 5 = 60$;

для 2-го примера $(6+5) \times 8 = 88$;

для 3-го примера $(3+2) \times 4 = 20$;

3) произведение единиц сомножителей дает единица окончательного результата:

для 1-го примера $3 \times 9 = 27$;

для 2-го примера $8 \times 8 = 64$;

для 3-го примера $2 \times 4 = 08$;

4) окончательный результат находим соответствующим суммированием:

для 1-го примера $53 \times 59 = 2500 + 600 + 27 = 3127$;

для 2-го примера $68 \times 58 = 3000 + 880 + 64 = 3944$;

для 3-го примера $44 \times 32 = 1200 + 200 + 08 = 1408$.

На практике метод применяется следующим образом. Пусть необходимо умножить 64×67 :

1) находим произведение единиц сомножителей—оно дает единицы окончательного результата (если произведение двузначное — число десятков запоминаем)

$$4 \times 7 = 28,$$

$$64 \times 67 = \dots ^{28};$$

2) сумму различных цифр умножаем на общую цифру. Получаем десятки окончательного результата. При записи учитываем запомненное число десятков, если такое было,

$$(4+7) \times 6 = 66,$$

$$66 + 2 = 68,$$

$$64 \times 67 = \dots ^{68};$$

3) перемножаем цифры десятков сомножителей и завершаем вычисление

$$6 \times 6 = 36,$$

$$36+6=42,$$

$$64 \times 67 = 4288.$$

Несколько примеров на применение метода:

$$23 \times 26 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 3 \times 6 = 18, & 23 \times 26 = \dots ^1 8, \\ 2) (3+6) \times 2 = 18, & 18+1=19, \quad 23 \times 26 = \dots ^1 98, \\ 3) 2 \times 2 = 4, & 4+1=5, \quad 23 \times 26 = 598. \end{array}$$

$$61 \times 67 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 7 \times 1 = 7, & 61 \times 67 = \dots ^7, \\ 2) (7+1) \times 6 = 48, & 61 \times 67 = \dots ^4 87, \\ 3) 6 \times 6 = 36, \quad 36+4=40, & 61 \times 67 = 4087. \end{array}$$

$$67 \times 37 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 7 \times 7 = 49, & 67 \times 37 = \dots ^4 9, \\ 2) (6+3) \times 7 = 63, & 63+4=67, \quad 67 \times 37 = \dots ^6 79, \\ 3) 6 \times 3 = 18, \quad 18+6=24, & 67 \times 37 = 2479. \end{array}$$

$$83 \times 63 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 3 \times 3 = 9, & 83 \times 63 = \dots ^9, \\ 2) (8+6) \times 3 = 42, & 83 \times 63 = \dots ^4 29, \\ 3) 8 \times 6 = 48, & 48+4=52, \quad 83 \times 63 = 5229. \end{array}$$

$$33 \times 84 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 3 \times 4 = 12, & 33 \times 84 = \dots ^{12}, \\ 2) (8+4) \times 3 = 36, & 36+1=37, \quad 33 \times 84 = \dots ^3 72, \\ 3) 3 \times 8 = 24, & 24+3=27, \quad 33 \times 84 = 2772. \end{array}$$

$$88 \times 19 =$$

$$\begin{array}{ll} 1) 8 \times 9 = 72, & 88 \times 19 = \dots ^{72}, \\ 2) (1+9) \times 8 = 80, & 80+7=87, \quad 88 \times 19 = \dots ^8 72, \\ 3) 8 \times 1 = 8, & 8+8=16, \quad 88 \times 19 = 1672. \end{array}$$

Правильность метода следует из правильности следующих равенств:

$$\begin{array}{l} \text{а) } (10a+b) \times (10a+c) = 100a^2 + 10a(b+c) + bc, \\ \text{б) } (10a+b) \times (10c+b) = 100ac + 10b(b+c) + b^2, \\ \text{в) } (10a+a) \times (10b+c) = 100ab + 10a(b+c) + ac, \end{array}$$

которые доказываются непосредственной проверкой,
Примеры для самостоятельного решения:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $69 \times 65 =$ | 4) $58 \times 56 =$ | 7) $42 \times 45 =$ |
| 2) $37 \times 47 =$ | 5) $26 \times 76 =$ | 8) $23 \times 93 =$ |
| 3) $55 \times 64 =$ | 6) $33 \times 89 =$ | 9) $66 \times 73 =$ |

Ответы для проверки: 1) 4485; 2) 1739; 3) 352; 4) 3248; 5) 1976; 6) 2937; 7) 1890; 8) 2139; 9) 4818.

Умножение двузначных чисел в случаях, когда оба числа начинаются (53×51) или оканчиваются (45×85) цифрой пять или когда одно из чисел состоит из одних пятерок (55×97), подчиняется следующему правилу: к сумме, полученной от сложения произведения цифр десятков обоих чисел и полусуммы «не пятерок», необходимо приписать произведение единиц сомножителей, которое занимает 2 разряда: $53 \times 51 =$

1) находим произведение десятков

$$5 \times 5 = 25;$$

2) находим полусумму «не пятерок»

$$(3+1):2=2;$$

3) складываем первые два результата

$$25+2=27;$$

4) находим произведение единиц сомножителей

$$3 \times 1 = 3;$$

5) найденное произведение приписываем к результату, полученному в пункте 3,

$$53 \times 51 = 2703.$$

Аналогично поступаем в двух других случаях:

$$45 \times 85 =$$

1) $4 \times 8 = 32,$

2) $(4+8):2=6,$

3) $32+6=38,$

4) $5 \times 5 = 25,$

5) $45 \times 85 = 3825.$

$$55 \times 97 =$$

1) $5 \times 9 = 45,$

2) $(9+7):2=8,$

3) $45+8=53,$

4) $7 \times 5 = 35,$

5) $55 \times 97 = 5335.$

При использовании данного метода можно столкнуться со случаем, когда полусумма «не пятерок» представляет собой дробь:

$$69 \times 55 =$$

1) $6 \times 5 = 30,$

2) $(6+9):2=7,5.$

В этом случае к первому результату прибавляем целую часть полусуммы

$$3) 30+7=37,$$

$$4) 5 \times 9 = 45,$$

приписываем произведение единиц, увеличенное на 50,

$$69 \times 55 = 3795.$$

Примеры на применение метода:

$$56 \times 54 =$$

$$1) 5 \times 5 = 25,$$

$$2) (6+4) : 2 = 5,$$

$$3) 25+5=30,$$

$$4) 6 \times 4 = 24,$$

$$5) 56 \times 54 = 3024.$$

$$75 \times 15 =$$

$$1) 7 \times 1 = 7,$$

$$2) (7+1) : 2 = 4,$$

$$3) 7+4=11,$$

$$4) 5 \times 5 = 25,$$

$$5) 75 \times 15 = 1125.$$

$$57 \times 52 =$$

$$1) 5 \times 5 = 25,$$

$$2) (7+2) : 2 = 4,5,$$

$$3) 25+4=29,$$

$$4) 7 \times 2 = 14, \quad 14+50=64,$$

$$5) 57 \times 52 = 2964.$$

$$68 \times 55 =$$

$$1) 6 \times 5 = 30,$$

$$2) (6+8) : 2 = 7,$$

$$3) 30+7=37,$$

$$4) 5 \times 8 = 40,$$

$$5) 68 \times 55 = 3740.$$

$$35 \times 65 =$$

$$1) 3 \times 6 = 18,$$

$$2) (3+6) : 2 = 4,5,$$

$$3) 18+4=22,$$

$$4) 5 \times 5 = 25, \quad 25+50=75,$$

$$5) 35 \times 65 = 2275.$$

$$74 \times 55 =$$

$$1) 7 \times 5 = 35,$$

$$2) (7+4) : 2 = 5,5,$$

$$3) 35+5=40,$$

$$4) 4 \times 5 = 20, \quad 20+50=70,$$

$$5) 74 \times 55 = 4070.$$

Обоснованность метода следует из тождеств

$$1) (50 + a) \cdot (50 + b) = \left(25 + \frac{a+b}{2}\right) \cdot 100 + ab;$$

$$2) (10a + 5) \cdot (10b + 5) = \left(ab + \frac{a+b}{2}\right) \cdot 100 + 25;$$

$$3) (10a + b) \cdot 55 = \left(5a + \frac{a+b}{2}\right) \cdot 100 + 5b,$$

правильность которых доказывается раскрытием скобок.

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 53 \times 59 = \quad 3) 65 \times 75 = \quad 5) 85 \times 45 = \quad 7) 48 \times 55 =$$

$$2) 54 \times 54 = \quad 4) 95 \times 25 = \quad 6) 57 \times 57 = \quad 8) 55 \times 39 =$$

Ответы для проверки: 1) 3127; 2) 2916; 3) 4875; 4) 2375; 5) 3825; 6) 3249; 7) 2640; 8) 2145.

12. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВИДА $(a+b)(a-b)$

В данном случае речь идет об использовании хорошо известной формулы

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

Применение данной формулы очень часто дает большую экономию в вычислениях, но пользуются ею неоправданно редко, так как далеко не всегда удается с первого взгляда определить, что именно в данном случае она подходит. Поэтому здесь достаточно внимательно посмотреть приводимые примеры и запомнить стандартные случаи применения этой формулы:

$$\begin{aligned} 69 \times 71 &= (70+1) \cdot (70-1) = 4900 - 1 = 4899; \\ 111 \times 89 &= (100+11) \cdot (100-11) = 10\,000 - 121 = 9879; \\ 66 \times 64 &= (65+1) \cdot (65-1) = 4225 - 1 = 4224 \\ &\quad (\text{умножение } 65 \times 65 \text{ см. п. 10}). \end{aligned}$$

13. УМНОЖЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, ОКАНЧИВАЮЩИХСЯ НА 1

Чтобы умножить два числа, оканчивающихся на 1 (41×31), необходимо:

1) в разряд единиц произведения записать 1:

$$41 \times 31 = \dots 1;$$

2) в разряд десятков произведения записать сумму десятков чисел

$$4+7=7, \quad 41 \times 31 = \dots 71,$$

если сумма — число двузначное, то в произведение записываем единицы суммы, а десятки запоминаем;

3) найти произведение десятков и закончить вычисления

$$4 \times 3 = 12, \quad 41 \times 31 = 1271.$$

Несколько примеров на использование метода:

$$71 \times 61 =$$

1) $71 \times 61 = \dots 1,$

2) $6 + 7 = 13,$ $71 \times 61 = \dots 131,$

3) $6 \times 7 = 42,$ $42 + 1 = 43,$ $71 \times 61 = 4331.$

$$21 \times 51 =$$

1) $21 \times 51 = \dots 1,$

2) $2 + 5 = 7,$ $21 \times 51 = \dots 71,$

3) $2 \times 5 = 10,$ $21 \times 51 = 1071.$

$$91 \times 91 =$$

1) $91 \times 91 = \dots 1,$

2) $9 + 9 = 18,$ $91 \times 91 = \dots 181,$

3) $9 \times 9 = 81,$ $81 + 1 = 82,$ $91 \times 91 = 8281.$

Справедливость приема непосредственно вытекает из рассмотрения равенства

$$(10a+1) \times (10b+1) = 100ab + 10(a+b) + 1.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1) $41 \times 21 =$ 3) $81 \times 41 =$ 5) $21 \times 21 =$

2) $71 \times 91 =$ 4) $51 \times 51 =$ 6) $61 \times 61 =$

Ответы для проверки: 1) 861; 2) 6461; 3) 3321; 4) 2601; 5) 441; 6) 3721.

14. УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ, ЗАКЛЮЧЕННЫХ МЕЖДУ 10 И 20

Чтобы умножить два числа, заключенных между 10 и 20 (18×14), используем формулу

$$(10+a)(10+b) = 100 + 10(a+b) + ab,$$

говорящую о том, что

1) к одному из сомножителей надо прибавить единицы второго сомножителя и сумму умножить на 10

$$(18+4) \times 10 = 220;$$

2) к полученному результату прибавить произведение единиц

$$(8 \times 4) = 32, \\ 18 \times 14 = 220 + 32 = 252.$$

Примеры на применение метода:

$$17 \times 13 =$$

1) $(17+3) \times 10 = 200,$

2) $3 \times 7 = 21,$

3) $17 \times 13 = 221.$

$$18 \times 18 =$$

$$1) (18+8) \times 10 = 260,$$

$$2) 8 \times 8 = 64,$$

$$3) 18 \times 18 = 324.$$

Этот же метод можно применять и в другой трактовке: чтобы умножить два числа, заключенные между 10 и 20 (19×13), необходимо:

1) перемножить числа единиц сомножителей

$$9 \times 3 = 27,$$

число единиц произведения записываем в окончательный результат

$$19 \times 13 = \dots^{27},$$

число десятков запоминаем;

2) складываем числа единиц

$$9 + 3 = 12.$$

Прибавляем к полученному числу запомненное число и число 10

$$12 + 2 + 10 = 24.$$

Записываем полученное число перед записанной ранее цифрой.

Вычисления закончены:

$$19 \times 13 = 247.$$

Два примера на употребление метода в последней трактовке

$$16 \times 16 = 1) 6 \times 6 = 36,$$

$$16 \times 16 = \dots^{36},$$

$$2) 6 + 6 + 3 + 10 = 25.$$

$$16 \times 16 = 256.$$

$$17 \times 15 = 1) 7 \times 5 = 35,$$

$$17 \times 15 = \dots^{35},$$

$$2) 5 + 7 + 3 + 10 = 25,$$

$$17 \times 15 = 255.$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 19 \times 19 = \quad 3) 13 \times 16 = \quad 5) 15 \times 19 =$$

$$2) 14 \times 18 = \quad 4) 17 \times 17 = \quad 6) 16 \times 12 =$$

Ответы для проверки: 1) 361; 2) 252; 3) 208; 4) 289; 5) 285; 6) 192.

15. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ НА ЧИСЛО, БЛИЗКОЕ К 10^n

(метод дополнений)

Обычная процедура деления многозначного числа на число, близкое к 10^n (например $354\,211 : 98$, где $n=2$) достаточно громоздка. Ее можно существенно упростить,

использовав метод дополнений, который отлично зарекомендовал себя при нахождении произведений.

Итак, чтобы разделить многозначное число (354 211) на число, близкое к 10^n (98; в этом случае $n=2$), необходимо:

1) от делимого с правой стороны отделить вертикальной чертой n цифр (в нашем примере $n=2$)

$$3542|11;$$

2) найти дополнение делителя до 10^n

$$100-98=2;$$

3) число, стоящее с левой стороны от вертикальной черты, умножаем на дополнение делителя до 10^n

$$3542 \times 2 = 7084;$$

4) подписываем полученное число под делимым, следя за тем, чтобы единицы были под единицами, десятки под десятками и т. д.,

$$\begin{array}{r} 3542|11 \\ 70|84 \end{array}$$

5) число, получившееся по левую сторону черты, опять умножаем на дополнение и подписываем аналогично результату, полученному в пункте 4,

$$70 \times 2 = 140$$

$$\begin{array}{r} 3542|11 \\ 70|84 \\ 1|40 \end{array}$$

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока весь результат не будет помещаться с правой стороны черты,

$$1 \times 2 = 2$$

$$\begin{array}{r} 3542|11 \\ 70|84 \\ 1|40 \\ |2 \end{array}$$

6) сложим все числа, стоящие правее вертикальной черты,

$$\begin{array}{r} 3542|11 \\ 70|84 \\ 1|40 \\ |2 \\ \hline 1|37 \end{array}$$

Если полученная сумма даст цифры, переходящие за черту (в нашем случае 1), то по отношению к ним повторяем процедуру 5) и затем 6).

$$\begin{array}{r|l}
 3542 & 11 \\
 70 & 84 \\
 1 & 40 \\
 \hline
 & 2 \\
 1 & 37 \\
 & 2 \\
 \hline
 & 39
 \end{array}$$

7) если итоговая сумма размещается правее черты, то складываем все числа, стоящие левее вертикальной черты,

$$\begin{array}{r|l}
 3542 & 11 \\
 70 & 84 \\
 1 & 40 \\
 \hline
 & 2 \\
 1 & 37 \\
 & 2 \\
 \hline
 3614 & 39
 \end{array}$$

Эта сумма дает нам окончательное значение частного. Число, стоящее правее черты, остаток:

$$354\,211 : 98 = 3614 \frac{39}{98}$$

Поясним данный метод несколькими примерами:

$$\begin{array}{r}
 12\,853\,412 : 996 = \qquad\qquad\qquad (n=3) \\
 1000 - 996 = 4 \\
 12\,835 \mid 412 \\
 51 \mid 340 \\
 \hline
 \mid 204 \\
 \hline
 12\,886 \mid 956 \\
 128\,354\,12 : 996 = 12\,886 \frac{956}{996}
 \end{array}$$

При желании дробь $\frac{956}{996}$ можно упростить: $\frac{956}{996} = \frac{239}{249}$

$$\begin{array}{r}
 273\,249 : 97 = \qquad\qquad\qquad n=2 \qquad 100 - 97 = 3 \\
 2732 \mid 50 \qquad\qquad\qquad 2732 \times 3 = 8196 \\
 81 \mid 96 \qquad\qquad\qquad 81 \times 3 = 243 \\
 2 \mid 43 \qquad\qquad\qquad 2 \times 3 = 6 \\
 \hline
 \mid 6 \\
 1 \mid 95 \qquad\qquad\qquad 1 \times 3 = 3 \\
 \mid 3 \\
 \hline
 2816 \mid 98
 \end{array}$$

В данном случае остаток получается больше делителя. Не представляет труда произвести необходимые поправки в окончательном результате:

$$273\,250 : 97 = 2816\frac{98}{97} = 2817\frac{1}{97}.$$

Для закрепления навыка решите самостоятельно несколько примеров:

$$\begin{array}{lll} 1) 154\,895 : 995 = & 3) 234\,574 : 98 = & 5) 659\,341 : 999 = \\ 2) 135\,521 : 9997 = & 4) 654\,792 : 91 = & 6) 349\,278 : 9998 = \end{array}$$

Ответы для проверки; 1) $155\frac{670}{995}$; 2) $13\frac{5560}{9997}$; 3) $2393\frac{60}{98}$;

$$4) 7195\frac{47}{91}; \quad 5) 660\frac{1}{999}; \quad 6) 34\frac{9346}{9998}.$$

16. ДЕЛЕНИЕ НА ЧИСЛО, БЛИЗКОЕ К «КРУГЛОМУ»

Предположим, что нам необходимо выполнить деление

$$45\,938 : 97 =$$

Делим число на ближайшее круглое число делителя (в нашем случае 100), внося необходимые поправки. Запись будем вести очень подробную, которую при практическом вычислении, конечно, делать не стоит.

$$\begin{array}{r} 45\,938 \overline{) 97(100)} \\ \underline{400} \quad | \quad 4... \\ 59 \end{array}$$

Первая цифра частного 4. Остаток 59. К остатку прибавляем произведение первой цифры частного (4) на дополнение числа до 100 ($100 - 97 = 3$). Сносим следующий знак делимого (3)

$$\begin{array}{r} 4 \times 3 = 12 \\ \underline{45938 \overline{) 97(100)}} \\ \underline{400} \quad | \quad 4... \\ 59 \\ + 12 \\ \hline 713 \end{array}$$

Процедура продолжается по описанной схеме:

$$\begin{array}{r}
 -45938 \quad | 97(100) \\
 \underline{400} \quad | 473 \text{ остаток } 57 \\
 +5) \\
 \underline{12} \\
 \underline{713} \\
 -700 \\
 \underline{13} \\
 +21 \\
 \underline{348} \\
 -300 \\
 \underline{48} \\
 +9 \\
 \underline{57}
 \end{array}$$

При практическом использовании метода запись делают более лаконичной. Для вышеприведенного примера

$$\begin{array}{r}
 45938 \\
 \underline{713} \\
 \underline{348} \\
 \underline{57}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} 97 \\ 473(\text{остаток } 57) \end{array} \right.$$

Обратите внимание на то, чтобы не ошибиться при определении остатка: в конце делим 348 на 100, получаем остаток 48, но к нему необходимо еще прибавить произведение последней цифры частного (3) на дополнение делителя до круглого числа (3)

$$48 + 9 = 57.$$

Рассмотрим несколько примеров на использование метода.

Найти $245\,423 : 68 =$

— ближайшее «круглое» число 70, дополнение 2.

$$\begin{array}{r}
 -245423 \quad | 68(70) \\
 \underline{210} \quad | 3(5)60(8)9 \text{ остаток } 11 \\
 +35 \\
 \underline{6} \\
 -414 \\
 \underline{350} \\
 \underline{64} \\
 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \cdot 74 \\
 - 68 \\
 \hline
 623 \\
 - 560 \\
 \hline
 63 \\
 + 16 \\
 \hline
 79 \\
 - 68 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

— получили остаток больше делителя. Вносим поправку: увеличиваем частное на единицу, из остатка вычитаем 68.

— опять приходится вносить поправку.

Окончательный результат $245\,423 : 68 = 3609$ остаток 11.

Такого рода поправки бывают достаточно редко. В случаях их возникновения можно выйти из тупика так, как описано выше, а можно и по-другому:

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots \\
 414 \\
 - 350 \\
 \hline
 64 \\
 + 10 \\
 \hline
 74
 \end{array}$$

получили остаток больше делителя. Прибавляем к последней цифре частного единицу. Умножаем получившуюся цифру на дополнение ($6 \times 2 = 12$), прибавляем произведение не к остатку, а к числу, получающемуся на шаг раньше:

$$\begin{array}{r}
 414 \\
 + 12 \\
 \hline
 426 \\
 - 420 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

После чего продолжаем вычисления по приведенной схеме. Первый способ внесения поправок, по-видимому, более удачен, так как меньше требует исправлений, меньше «грязи».

Найти частное $329\,901 : 39 =$

$$\begin{array}{r}
 329901 \quad | \quad \begin{array}{l} 39(40) \\ 815(8)9 \end{array} \\
 \underline{320} \\
 \quad 9 \\
 \quad + 8 \\
 \underline{\quad} \\
 \quad 179 \\
 \underline{160} \\
 \quad 19 \\
 \quad + 4 \\
 \underline{\quad} \\
 \quad 230 \\
 \underline{200} \\
 \quad 30 \\
 \quad + 5 \\
 \underline{\quad} \\
 \quad 351 \\
 \underline{320} \\
 \quad 31 \\
 \quad + 8 \\
 \underline{\quad} \\
 \quad 39
 \end{array}$$

— ближайшее круглое число 40,
дополнение 1.

Вычислите самостоятельно:

- 1) $359\,437 : 28 =$ 3) $479\,891 : 67 =$ 5) $654\,423 : 55 =$
 2) $639\,128 : 66 =$ 4) $854\,347 : 98 =$ 6) $105\,304 : 96 =$

Ответы для проверки:

- 1) $12837 \frac{1}{28}$; 2) $9683 \frac{50}{66}$; 3) $7132 \frac{37}{67}$; 4) $8717 \frac{81}{98}$; 5) $11898 \frac{33}{55}$,
 6) $1096 \frac{88}{96}$.

17. ДЕЛЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УМНОЖЕНИЯ (ИЛИ ДЕЛЕНИЯ) ДЕЛИМОГО И ДЕЛИТЕЛЯ НА ОДНО И ТО ЖЕ ЧИСЛО

Как известно, умножение делимого и делителя на один и тот же множитель не приводит к изменению конечного результата. Это иногда целесообразно использовать для упрощения вычислительного процесса.

Допустим, нам необходимо разделить

$$435 : 15 =$$

Устно выполнить деление затруднительно, но если мы догадаемся умножить делимое и делитель на 2

$$870 : 30 =$$

то результат без труда найдем устно

$$870 : 30 = 29.$$

Аналогично можно иногда выполнять деление не сразу на все число, а только на один из множителей. При необходимости выполнить вычисление

$$168 : 24 =$$

замечаем, что делимое и делитель можно разделить на 4. Получим

$$42 : 6 = 7.$$

Несколько примеров для закрепления приема:

$$\begin{array}{ll} 336 : 42 = 56 : 7 = 8, & 665 : 35 = 1330 : 70 = 19, \\ 351 : 27 = 117 : 9 = 13, & 765 : 45 = 1530 : 90 = 17. \end{array}$$



МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ УПРОСТИТЬ ВОЗВЕДЕНИЕ ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ ЧИСЛА КОРНЯ n -И СТЕПЕНИ



Возведение числа в квадрат эквивалентно умножению числа на то же число. Поэтому подавляющее большинство методов, упрощающих нахождение произведения, применимо и при нахождении квадрата числа. Например, метод возведения в квадрат чисел, близких к 1000, например 997×997 , с исчерпывающей полнотой изложен в пункте 6 гл. II, где дается описание метода дополнений.

Некоторые специфические способы упрощенного возведения числа в квадрат, тесно связанные или вытекающие из методов сокращенного умножения, также даны при описании соответствующего метода в гл. II. Например, возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, описано в пункте 10, так как является следствием более общего способа умножения чисел, у которых число десятков равно, а сумма единиц сомножителей составляет 10.

1. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ЦЕЛОГО ЧИСЛА a , ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН КВАДРАТ ПРЕДЫДУЩЕГО $(a-1)$ ИЛИ ПОСЛЕДУЮЩЕГО $(a+1)$ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Если известен (или легко вычислим) квадрат одного из соседних натуральных чисел, то целесообразно воспользоваться одной из следующих формул:

для случая, когда известен квадрат предыдущего числа

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

или эквивалентная, но иногда более легкоприменимая формула

$$(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1),$$

говорящая о том, что для нахождения квадрата числа

$(a+1)$ надо прибавить это число к квадрату предыдущего числа и к полученной сумме прибавить предыдущее число.

Аналогичны формулы для нахождения квадрата числа, если известен квадрат последующего натурального числа:

$$a^2 = (a+1)^2 - 2a - 1 \text{ или} \\ a^2 = (a+1)^2 - (a+1) - a.$$

Примеры на применение метода:

$$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441,$$

$$19^2 = 20^2 - 20 - 19 = 361,$$

$$36^2 = 35^2 + 35 + 36 = 1225 + 71 = 1296,$$

$$34^2 = 35^2 - 35 - 34 = 1225 - 69 = 1156.$$

(Квадрат 35 легко вычислим, смотри пункт 10 гл. II.) Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 46^2 = \quad 3) 41^2 = \quad 5) 71^2 =$$

$$2) 44^2 = \quad 4) 39^2 = \quad 6) 69^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 2116; 2) 1936; 3) 1681; 4) 1521; 5) 5041; 6) 4761.

2. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ЦЕЛОГО ЧИСЛА a ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ИЗВЕСТЕН КВАДРАТ ЧИСЛА $(a-2)$ ИЛИ ЧИСЛА $(a+2)$

Для того чтобы найти квадрат числа a , если известен или легко вычислим квадрат числа $(a+2)$, необходимо из числа $(a+2)^2$ вычесть сумму чисел $a + (a+2)$, умноженную на 2. Например, $38^2 = 40^2 - (38+40) \cdot 2 = 1600 - 156 = 1444$.

Для того чтобы найти квадрат числа a , если известен или легко вычислим квадрат числа $(a-2)$, необходимо к числу $(a-2)^2$ прибавить удвоенную сумму чисел a и $(a-2)$.

Например, $42^2 = 40^2 + (40+42) \cdot 2 = 1600 + 164 = 1764$.

Примеры, иллюстрирующие описанный прием:

$$52^2 = 50^2 + (50+52) \times 2 = 2704,$$

$$48^2 = 50^2 - (48+50) \times 2 = 2304,$$

$$57^2 = 55^2 + (55+57) \times 2 = 3249,$$

$$53^2 = 55^2 - (53+55) \times 2 = 2809.$$

Попробуйте решить самостоятельно:

$$1) 62^2 = \quad 3) 32^2 = \quad 5) 47^2 =$$

$$2) 58^2 = \quad 4) 28^2 = \quad 6) 43^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 3844; 2) 3364; 3) 1024; 4) 784; 5) 2209; 6) 1849.

Правильность метода следует из следующих тождественных преобразований:

$$a^2 = (a+2)^2 - [a + (a+2)] \cdot 2 = a^2 + 4a + 4 - 4a - 4 = a^2;$$

$$a^2 = (a-2)^2 + [a + (a-2)] \cdot 2 = a^2 - 4a + 4 + 4a - 4 = a^2.$$

3. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ЧИСЕЛ, ОКАНЧИВАЮЩИХСЯ НА 25 И 75

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 25.
Для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 25 (например, 325×325), необходимо:

1) к квадрату числа сотен (3×3) прибавить половину числа сотен $9 + 1,5 = 10,5$;

2) результат, полученный в пункте 1, умножить на 10 $10,5 \times 10 = 105$;

3) к полученному произведению приписать 625
 $325 \times 325 = 105\ 625$.

Несколько примеров на применение метода:
 $625 \times 625 = 1) \ 36 + 3 = 39,$

$$2) \ 39 \times 10 = 390,$$

$$3) \ 625 \times 625 = 390\ 625.$$

$$1525 \times 1525 = 1) \ 15^2 + 7,5 = 232,5,$$

$$2) \ 232,5 \times 10 = 2325,$$

$$3) \ 1525 \times 1525 = 2\ 325\ 625.$$

Обоснование метода.

Необходимо умножить $(a \cdot 100 + 25)$ на $(a \cdot 100 + 25)$.
 $(a \cdot 100 + 25) \times (a \cdot 100 + 25) = (a^2 + 0,5 \cdot a) \times 10 \times 1000 + 625 = (a \cdot 100)^2 + 2 \cdot (a \cdot 100) \cdot 25 + 25^2 = (a \cdot 100 + 25)^2.$

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 75.
Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся на 75 (например, 975^2), необходимо:

1) к числу сотен (9) приписать 5 (95) и полученное число умножить на число сотен, увеличенное на 1 ($9 + 1$),
 $95 \times 10 = 950$;

2) к полученному числу приписать 625
 $975 \times 975 = 950\ 625$.

Проиллюстрируем прием несколькими примерами:

$$375 \times 375 = 1) \ 35 \times 4 = 140,$$

$$2) \ 375 \times 375 = 140\ 625.$$

$$475 \times 475 = 1) \ 45 \times 5 = 225,$$

$$2) \ 475 \times 475 = 225\ 625.$$

$$3375 \times 3375 = 1) \ 335 \times 34 = 11\ 390,$$

$$2) \ 3375 \times 3375 = 11\ 390\ 625.$$

В последнем примере вычисление выполняется лишь

менно, но умножение двух четырехзначных чисел свелось к умножению трехзначного числа на двузначное.

Обоснование метода.

Необходимо найти квадрат числа $(a \cdot 100 + 75)$, где a — произвольное натуральное число.

$$\begin{aligned}(a \cdot 100 + 75)^2 &= (a \cdot 10 + 5) \cdot (a + 1) \cdot 1000 + 625 = \\ &= (10a^2 + 15a + 5) \cdot 1000 + 625 = (100a)^2 + 2 \cdot 100a \cdot 75 + \\ &\quad + 5625 = (100a + 75)^2.\end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения:

$$1) 675 \times 675 = \quad 3) 2275 \times 2275 = \quad 5) 8375 \times 8375 =$$

$$2) 1375 \times 1375 = \quad 4) 775 \times 775 = \quad 6) 1175 \times 1175 =$$

Ответы для проверки: 1) 455 625; 2) 1 890 625;

3) 5 175 625; 4) 600 625; 5) 70 140 625; 6) 1 380 625.

4. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, ОКАНЧИВАЮЩИХСЯ НА 5

В гл. II пункт 10 приводится общее правило возведения в квадрат чисел вида $(a \cdot 10 + 5)$. Алгоритм получения результата следующий:

1) находим произведение $a \cdot (a + 1)$;

2) к полученному результату приписываем 25.

Например, $75 \times 75 =$ 1) $7 \times 8 = 56$,

2) $75 \times 75 = 5625$.

При нахождении квадрата трехзначных чисел, согласно этому правилу, необходимо находить произведение двузначных чисел на двузначные, что затруднительно выполнять устно. Например,

$$325 \times 325 = \quad 1) 32 \times 33 = 1056,$$

$$2) 325 \times 325 = 105\,625.$$

Для возведения в квадрат трехзначных чисел можно предложить метод, упрощающий еще больше вычислительный процесс:

$$415 \times 415 =$$

1) число, образованное цифрами десятков и единиц, делим на 5

$$15 : 5 = 3;$$

2) к числу сотен (4) приписываем результат деления (3) и полученное число умножаем на число сотен

$$43 \times 4 = 172;$$

3) к результату, полученному в предыдущем пункте, приписываем квадрат числа, образованного цифрами десятков и единиц,

$$415 \times 415 = 172\,225.$$

(возводить в квадрат двузначные числа, оканчивающиеся на 5, мы уже умеем — см. гл. II, пункт 10).

При приписывании результата возведения в квадрат числа, образованного двумя последними цифрами, необходимо помнить, что для этого произведения в окончательном результате отводится три знака. Если в произведении получается четыре знака, то три последних знака приписываются, а старший знак складывается с последней цифрой результата вычисления пункта 2:

$$245 \times 245 = \begin{array}{l} 1) 45 : 5 = 9, \\ 2) 29 \times 2 = 58, \\ 3) 45 \times 45 = 2025, \\ 4) 245 \times 245 = 60\,025. \end{array}$$

$$435 \times 435 = \begin{array}{l} 1) 35 : 5 = 7, \\ 2) 47 \times 4 = 188, \\ 3) 35 \times 35 = 1225, \\ 4) 435 \times 435 = 189\,225. \end{array}$$

Нетрудно сообразить, как надо реагировать, если в результате вычисления частного от деления числа, образованного двумя последними цифрами на 5, получится двузначное число:

$$375 \times 375 = \begin{array}{l} 1) 75 : 5 = 15, \\ 2) 45 \times 3 = 135, \\ 3) 75 \times 75 = 5625, \\ 4) 375 \times 375 = 140\,625. \end{array}$$

$$665 \times 665 = \begin{array}{l} 1) 65 : 5 = 13, \\ 2) 73 \times 6 = 438, \\ 3) 65 \times 65 = 4225, \\ 4) 665 \times 665 = 442\,225. \end{array}$$

Обоснование метода.

Возводим в квадрат число $a \cdot 100 + b \cdot 10 + 5$.

$$\begin{aligned} (a \cdot 100 + b \cdot 10 + 5)^2 &= [a \cdot 10 + (b \cdot 10 + 5) : 5] \cdot a \cdot 1000 + \\ &+ (b \cdot 10 + 5)^2 = (a \cdot 100)^2 + (b \cdot 10 + 5) \cdot (a \cdot 100) \cdot 2 + \\ &+ (b \cdot 10 + 5)^2 = (a \cdot 100 + b \cdot 10 + 5)^2. \end{aligned}$$

Несколько примеров для самостоятельного решения:

$$\begin{array}{lll} 1) 395 \times 395 = & 3) 445 \times 445 = & 5) 115 \times 115 = \\ 2) 225 \times 225 = & 4) 285 \times 285 = & 6) 905 \times 905 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 156 025; 2) 50 625; 3) 198 025; 4) 81 225; 5) 13 225; 6) 819 025.

5. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ЧИСЕЛ ВИДА $50 \pm a$

(или в общем виде чисел вида $5 \cdot 10^n \pm a$)

Описывая прием возведения в квадрат чисел вида $50 \pm a$, будем иллюстрировать вычислительный процесс на двух примерах — нахождении 59^2 и 47^2 .

Для возведения в квадрат числа, близкого к 50,

$$59^2 = \qquad 47^2 =$$

необходимо:

1) из числа, возводимого в квадрат, вычесть 25

$$59 - 25 = 34, \qquad 47 - 25 = 22,$$

полученный результат дает сотни окончательного результата

$$59^2 = 34... \qquad 47^2 = 22...$$

2) найти дополнение числа, возводимого в квадрат, до 50 и возвести это дополнение в квадрат:

$$\begin{aligned} 50 - 59 &= (-9); & 50 - 47 &= 3; \\ (-9)^2 &= 81, & 3^2 &= 9. \end{aligned}$$

3) к результату, полученному в пункте 1, приписать результат, полученный в пункте 2, помня, что для приписывания результата отводятся 2 разряда:

$$59^2 = 3481, \qquad 47^2 = 2209.$$

Во втором примере квадрат дополнения — однозначное число, поэтому необходимо приписать 09.

Строго говоря, в данном методе необходимо не приписать квадрат дополнения, а прибавить квадрат дополнения к числу сотен, полученному в пункте 1, т. е.

$$\begin{array}{r} 3400 \\ + 81 \\ \hline 3481 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2200 \\ + 9 \\ \hline 2209 \end{array}$$

Квадрат дополнения может быть не только одно- или двузначным числом, но может занимать и три разряда. В этом случае после последнего разъяснения ясно, как необходимо поступать:

$$62^2 =$$

$$1) 62 - 25 = 37,$$

$$2) 50 - 62 = -12,$$

$$(-12)^2 = 144,$$

$$3) 3700$$

$$\begin{array}{r} + 144 \\ \hline 3844 \end{array}$$

Описанный метод можно изложить (причем в более общем виде) следующим образом.

Чтобы возвести в квадрат число $(50 \pm a)$, необходимо:

- 1) к числу 25 прибавить (алгебраически) число a ;
- 2) к полученному результату приписать a^2 (с оговорками, касающимися «приписывания»).

Несколько поясняющих примеров:

$$49 \times 49 = (50 - 1)^2 = \begin{array}{l} 1) 25 - 1 = 24, \\ 2) 1^2 = 1, \\ 3) 49^2 = 2401. \end{array}$$

$$63 \times 63 = (50 + 13)^2 = \begin{array}{l} 1) 25 + 13 = 38, \\ 2) 13^2 = 169, \\ 3) 63^2 = 3969. \end{array}$$

$$54 \times 54 = (50 + 4)^2 = \begin{array}{l} 1) 25 + 4 = 29, \\ 2) 4^2 = 16, \\ 3) 54^2 = 2916. \end{array}$$

Решите самостоятельно следующие примеры:

$$\begin{array}{lll} 1) 62 \times 62 = & 3) 39 \times 39 = & 5) 41 \times 41 = \\ 2) 57 \times 57 = & 4) 44 \times 44 = & 6) 64 \times 64 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 3844; 2) 3249; 3) 1521; 4) 1936; 5) 1681; 6) 4096.

Правильность метода следует из правильности соотношения

$$(50 + a) \cdot (50 + a) = (25 + a) \cdot 100 + a^2,$$

которое справедливо всегда независимо от знака и величины a . Следовательно, метод целесообразно применять тогда, когда известна величина a^2 .

Допустим, нам известно, что $26^2 = 676$. Необходимо найти 24^2 . Пользуемся данным методом:

$$24^2 = (50 - 26)^2 = \begin{array}{l} 1) 25 - 26 = -1, \\ 2) 26^2 = 676, \\ 3) -100 \\ \quad + 676 \\ \hline 24^2 = 576 \end{array}$$

Рассмотрим возведение в квадрат чисел вида $A = (5 \cdot 10^n \pm a)$. Соотношение $(50 + a)^2 = (25 + a) \cdot 100 + a^2$ в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A^2 &= (5 \cdot 10^n + a)^2 = (A - 25 \cdot 10^{n-1}) \cdot 10^{n+1} + a^2 = \\ &= (25 \cdot 10^{n-1} + a) \cdot 10^{n+1} + a^2. \end{aligned}$$

Запишем порядок вычисления квадрата числа $A =$

$= 5 \cdot 10^n + a$ по данным формулам на примере нахождения квадрата чисел 507 и 4990.

1) Представляем число, возводимое в квадрат, в виде $5 \cdot 10^n + a$

$$507 = 500 + 7 \quad (n=2); \quad 4990 = 5000 - 10 \quad (n=3).$$

Эта операция нам нужна только для того, чтобы найти, чему равно a ;

2) из A вычитаем $25 \cdot 10^{n-1}$ (практически в полученном представлении $A_1 = 500 + 7$ или $A_2 = 5000 - 10$ делим пополам первое слагаемое в одном примере и уменьшаем во втором примере):

$$\begin{aligned} A_1 - 25 \cdot 10^n &= 500 : 2 + 7 = 257, \\ A_2 - 25 \cdot 10^n &= 5000 : 2 - 10 = 2490; \end{aligned}$$

3) возводим в квадрат a

$$a^2 = 7 \times 7 = 49, \quad a^2 = (-10)^2 = 100;$$

4) к результату, полученному в пункте 2, приписываем a^2 , следя за тем, чтобы приписываемое число занимало $(n+1)$ разряд (т. е. число разрядов должно быть на 1 больше числа нулей в числе $5 \cdot 10^n$: в первом числе $5 \cdot 10^n = 500$ ($n=2$) число разрядов для приписываемого числа равно 3, во втором примере $5 \cdot 10^n = 5000$ ($n=3$) число разрядов приписываемого числа равно 4).

$$A_1^2 = 507^2 = 257\,049; \quad A_2^2 = 4990^2 = 24\,900\,100.$$

Несколько поясняющих примеров:

$$5125 \times 5125 = 1) \quad 5125 = 5000 + 125 \quad (n=3),$$

$$2) \quad 2500 + 125 = 2625,$$

$$3) \quad 125 \times 125 = 15\,625,$$

$$4) \quad 5125^2 = 2625$$

$$+ \frac{15\,625}{26\,265\,625}$$

$$499\,870 \times 499\,870 = 1) \quad 499\,870 = 500\,000 - 130 \quad (n=5),$$

$$2) \quad \begin{aligned} 500\,000 : 2 - 130 &= 249\,870 \quad \text{или} \\ 499\,870 - 250\,000 &= 249\,870, \end{aligned}$$

$$3) \quad 130^2 = 16\,900,$$

$$4) \quad 499\,870^2 = 249\,870\,016\,900$$

$$500\,030 \times 500\,030 = 1) \quad 500\,030 = 500\,000 + 30 \quad (n=5),$$

$$2) \quad \begin{aligned} 500\,000 : 2 + 30 &= 250\,030 \quad \text{или} \\ 500\,030 - 250\,000 &= 250\,030, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3) 30^2 = 900, \\
 & 4) 500\,030^2 = 250\,030\,000\,900. \\
 4909 \times 4109 = & 1) 4909 = 5000 - 91 \quad (n = 3), \\
 & 2) 5000 : 2 - 91 = 2409 \text{ или} \\
 & \quad 4909 - 2500 = 2409, \\
 & 3) 91^2 = 8281, \\
 & 4) 4909^2 = 24\,098\,281.
 \end{aligned}$$

Для освоения метода решите самостоятельно следующие примеры:

$$\begin{aligned}
 1) & 49\,979 \times 49\,979 = \\
 2) & 50\,001\,001 \times 50\,001\,001 = \\
 3) & 497 \times 497 = \\
 4) & 512 \times 512 = \\
 5) & 500\,113 \times 500\,113 = \\
 6) & 499\,931 \times 499\,931 =
 \end{aligned}$$

Ответы для проверки: 1) 2 497 900 441;
 2) 2 500 100 101 002 001; 3) 247 009; 4) 262 144;
 5) 250 113 012 769; 6) 249 931 004 761.

6. ОБЩИЕ МЕТОДЫ, УПРОЩАЮЩИЕ ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ЧИСЕЛ ВИДА $a \cdot 10^n \pm b$ ГДЕ a — ЛЮБАЯ ЗНАЧАЩАЯ ЦИФРА, b — ЧИСЛО, КВАДРАТ КОТОРОГО ИЗВЕСТЕН

Обе предлагаемые ниже формулы предназначены упростить вычислительный процесс, заменяя нахождение произведения двузначного числа на двузначное (или многозначного числа на многозначное) вычислением произведения двузначного (многозначного) числа на однозначное. Это дает возможность получать окончательный результат цифру за цифрой последовательно и существенно облегчает вычисления.

Использование формулы $x^2 = (x-a) \cdot (x+a) + a^2$ для возведения в квадрат двузначных чисел. В этом случае умножение двузначных чисел всегда сводится к умножению двузначного числа на однозначное. Практически выполняются следующие вычислительные процедуры, которые рассматриваются на примере возведения в квадрат числа 46.

1) Выбираем значение a . Здесь возможны два варианта:

а) за a принимаем дополнение 46 до следующего пол-

ного числа десятков, т. е. в нашем случае до $50(a=4)$. В этом случае формула для вычисления приобретает вид:

$$(46+4) \cdot (46-4) + 4^2 = 50 \times 42 + 4^2;$$

б) за a принимаем число единиц возводимого в квадрат числа. Тогда формула для вычисления квадрата примет вид:

$$(46-6) \cdot (46+6) + 6^2 = 40 \times 52 + 6^2.$$

Независимо от того, какой вариант мы избрали, конечный результат будет, вполне естественно, один и тот же. Для определенности в дальнейшем ведем вычисления по формуле первого варианта;

2) возводим в квадрат число a и единицы полученного результата записываем на место единиц окончательного результата. Число десятков запоминаем

$$46^2 = 50 \times 42 + 4^2 = \dots 16;$$

3) последовательно выполняем вычисление 42×5 и получающиеся произведения записываем в окончательный результат, помня, что первая получающаяся цифра произведения в конечном результате должна стоять на месте десятков:

$$46^2 = 50 \times 42 + 4^2 = \dots 16;$$

$$46^2 = 2116.$$

Для закрепления метода проведем все вычисления для варианта $46^2 = (46-6)(46+6) + 6^2$:

$$46^2 = 40 \times 52 + 6^2 = \dots 36,$$

$$2 \times 4 = 8, \quad 8 + 3 = 11; \quad 46^2 = \dots 16,$$

$$5 \times 4 = 20, \quad 20 + 1 = 21; \quad 46^2 = 2116.$$

Попробуйте проделать несколько расчетов самостоятельно, сразу записывая окончательный результат. Проверьте получаемые ответы:

$$1) 87^2 = \quad 3) 54^2 = \quad 5) 22^2 =$$

$$2) 93^2 = \quad 4) 38^2 = \quad 6) 19^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 7569; 2) 8649; 3) 2916; 4) 7744; 5) 484; 6) 361.

Использование формулы $x^2 = (x-a) \cdot (x+a) + a^2$ для возведения в квадрат многозначных чисел. Если приведенная выше формула всегда может быть рекомендована для возведения в квадрат двузначных чисел, то в случае многозначных чисел существенный выигрыш получается только в том случае, если возводимое в квадрат число имеет вид $A \times 10 \pm B$, где A — любая значащая цифра, а B — число, квадрат которого известен. Техника вычислений полностью аналогична описанной в предыдущем пункте, но на один момент надо обратить внимание,

В окончательном результате для B^2 должно отводиться n разрядов. Двухзначные числа в общем виде имеют вид $A \cdot 10^1 \pm B$, т. е. $n = 1$. Не акцентируя на этом внимание, мы тем не менее отвели для B^2 именно один разряд. Если мы будем возводить в квадрат число $2005 (2 \cdot 10^3 + 5)$, то в окончательном результате для 5^2 будет отведено 3 разряда:

$$2005^2 = (2005 - 5) \cdot (2005 + 5) + 5^2,$$

$$2000 \times 2010 + 25 = \dots 025,$$

$$2005^2 = 4\,020\,025.$$

Рассмотрим еще два примера:

$$397^2 = (397 + 3)(397 - 3) + 3^2,$$

$$= 400 \times 394 + 3^2 = \dots 09.$$

(n практически равно числу нулей в первом сомножителе) $397^2 = \dots 1609 = \dots 3709 = 15\,709$.

$$3025^2 = 3000 \times 3050 + 25^2 = \dots 625 = \dots 0625 = 9\,150\,625.$$

Теперь решите самостоятельно несколько примеров:

$$1) 496^2 = \quad 3) 630^2 = \quad 5) 690^2 =$$

$$2) 50\,015^2 = \quad 4) 4009^2 = \quad 6) 715^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 246 016; 2) 2 501 500 225; 3) 396 900; 4) 16 072 081; 5) 476 100; 6) 511 225.

Использование формулы $x^2 = (A \cdot 10^n + B)^2 = (x + B) \cdot 10^n + A + B^2$. Вынесенная в заголовок формула эквивалентна формуле, приведенной на с. 95: $x^2 = (x + a)(x - a) + a^2$, где $a = B$. Область применения ее несколько уже, но формулировка хорошо запоминается, поэтому ее и выделили в отдельный раздел.

Для двухзначных чисел метод формулируется так: чтобы возвести в квадрат двухзначное число, надо возвести в квадрат число единиц и записать полученное число в разряд единиц окончательного результата. (Если этот квадрат двухзначное число, число десятков запоминаем). Затем к числу прибавляем число единиц и умножаем на число десятков. Произведение записываем в окончательный результат перед квадратом единиц:

$$24^2 = (24 + 4) \cdot 2 + 16 = \dots 16 = 576.$$

Если вами освоен материал предыдущих двух разделов, то дополнительных пояснений по использованию формулы для возведения в квадрат многозначных чисел не требуется. Приведем поясняющие примеры:

$309^2 = (309 + 9) \cdot 3 \cdot 10^2 + 9^2$ — практически мы имеем дело с выражением $(309 + 9) \cdot 3$, к которому приписыва-

ем 81, так как множитель 10^2 мы учитываем, когда для 9^2 отводим 2 разряда.

$$\begin{aligned} 309^2 &= 318 \cdot 3 \cdot (10^2) + 9^2 = \dots 81 = \dots {}^2481 = \dots 5481 = \\ &= 95\,481; \quad 60\,025^2 = (60\,025 + 25) \cdot 6 \cdot (10^4) + 25^2 = \\ &= \dots 0625 = 3\,603\,000\,625. \end{aligned}$$

Закрепите материал самостоятельным решением примеров:

$$\begin{array}{lll} 1) \, 83^2 = & 3) \, 5011^2 = & 5) \, 66^2 = \\ 2) \, 803^2 = & 4) \, 74^2 = & 6) \, 70030^2 = \end{array}$$

Ответы для проверки: 1) 6889; 2) 644 809; 3) 25 110 121; 4) 5476; 5) 4356; 6) 4 904 200 900.

7. ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

а) Для того чтобы возвести в квадрат произвольное двузначное число, значение разряда единиц которого больше 5 (например, 37×37 ; 76×76), необходимо:

1) возвести в квадрат число единиц и значение разряда единиц квадрата записать в младший разряд окончательного результата:

$$\begin{array}{ll} 7 \times 7 = 49, & 6 \times 6, \\ 37 \times 37 = \dots 9, & 76 \times 76 = \dots 6; \end{array}$$

2) число десятков, увеличенное на единицу, умножить на младший разряд удвоенного числа единиц основания (если число единиц равно 6, то к результату вычислений прибавим еще 1 единицу). Это произведение дает десятки окончательного результата. Если оно двузначное, число десятков запоминаем:

$$\begin{aligned} 7 \times 2 &= 14, \\ (3 + 1) \times 4 &= 16, \\ 37 \times 37 &= \dots {}^169, \\ 6 \times 2 &= 12, \\ (7 + 1) \times 2 &= 16, \quad 16 + 1 = 17 \text{ (так как число единиц} = 6\text{)}. \\ 76 \times 76 &= \dots {}^176; \end{aligned}$$

3) найти произведение числа десятков на число десятков, увеличенное на единицу. Это произведение (с учетом запомненного числа десятков предыдущего шага вычислений) даст сотни окончательного результата:

$$\begin{array}{ll} 3 \times 4 = 12, & 7 \times 8 = 56, \\ 12 + 1 = 13, & 56 + 1 = 57, \\ 37 \times 37 = 1369. & 76 \times 76 = 5776. \end{array}$$

б) Для возведения в квадрат произвольного двузначного числа с единицами меньше 5 (например, 23×23 , 94×94) надо:

1) записать в окончательный результат квадрат единиц основания (если квадрат число двузначное, число десятков запоминаем):

$$\begin{array}{ll} 3 \times 3 = 9, & 4 \times 4 = 16, \\ 23 \times 23 = \dots 9, & 94 \times 94 = \dots 16. \end{array}$$

2) удвоенное число единиц умножить на число десятков. В случае необходимости прибавить запомненное число десятков предыдущего шага вычислений. Результат дает число десятков окончательного результата:

$$\begin{array}{ll} 3 \times 2 \times 2 = 12, & 4 \times 2 \times 9 = 72, \\ & 72 + 1 = 73, \\ 23 \times 23 = \dots 129, & 94 \times 94 = \dots 736. \end{array}$$

3) перемножить десятки. Учесть перенос разряда десятков предыдущего шага вычислений

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 = 4, & 9 \times 9 = 81, \\ 4 + 1 = 5, & 81 + 7 = 88, \\ 23 \times 23 = 529, & 94 \times 94 = 8836. \end{array}$$

Несколько примеров на применение метода:

$$58 \times 58 =$$

$$\begin{array}{l} 1) 8 \times 8 = 64, 58 \times 58 = \dots 4, \\ 2) 8 \times 2 = 16, (5+1) \times 6 = 36, 58 \times 58 = \dots 364, \\ 3) 5 \times (5+1) = 30, 30 + 3 = 33, 58 \times 58 = 3364. \end{array}$$

$$86 \times 86 =$$

$$\begin{array}{l} 1) 6 \times 6 = 36, 86 \times 86 = \dots 6, \\ 2) 6 \times 2 = 12, (8+1) \times 2 = 18. \end{array}$$

В основании число единиц равно 6, следовательно,

$$\begin{array}{l} 18 + 1 = 19, \\ 86 \times 86 = \dots 196, \\ 3) 8 \cdot (8+1) = 72, 72 + 1 = 73, 86 \cdot 86 = 7396. \\ 32 \times 32 = 1) 2 \cdot 2 = 4, 32 \cdot 32 = \dots 4, \\ 2) 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, 32 \cdot 32 = \dots 124, \\ 3) 3 \cdot 3 = 9, 9 + 1 = 10, 32 \cdot 32 = 1024. \end{array}$$

Обоснование метода.

Необходимо возвести в квадрат число $(10a+b)$, где $b \geq 6$. При обосновании метода будут использованы выражения для a через число десятков квадрата числа b .

$$\begin{cases} a = 2b - 10 + 1, & \text{если } b = 6, \\ a = 2b - 10, & \text{если } b = 7, 8, 9, \end{cases}$$

в правильности которых легко убедиться непосредственной проверкой.

Составляем выражения согласно алгоритму метода и после элементарных преобразований убеждаемся, что они равны $(10a+b)^2$:

$$\text{а) } a \cdot (a+1) \cdot 100 + (a+1) \cdot a \cdot 10 + (b^2 - a \cdot 10) = 100a^2 + 100a + a \cdot a \cdot 10 + a \cdot 10 + b^2 - a \cdot 10 = (10a+b)^2;$$

$$\text{б) } (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot b + b^2 = (10a+b)^2.$$

Решите самостоятельно:

$$1) 72^2 = \quad 3) 88^2 = \quad 5) 47^2 =$$

$$2) 64^2 = \quad 4) 93^2 = \quad 6) 66^2 =$$

Ответы для проверки: 1) 5184; 2) 4096; 3) 7744; 4) 8649; 5) 2209; 6) 4356.

8. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ КВАДРАТНОГО ИЗ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛНЫЙ КВАДРАТ

Описанный ниже способ позволит устно вычислять корни квадратные из четырехзначных чисел, но требует от использующего этот метод определенной культуры вычислительных работ. Поэтому, по-видимому, целесообразно остановиться на ряде общих соображений.

Рассматривая число, из которого предстоит извлечь корень квадратный (например, 7921), можно оценить искомое число, а иногда и сразу сказать готовый ответ.

Вспомним значение квадратов первых чисел натурального ряда: $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$; $4^2=16$; $5^2=25$; $6^2=36$; $7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$. Анализируя их, мы видим, что можем по виду числа, вернее, по его последней цифре сказать с точностью до 2 цифр, чем оканчивается искомое число. В нашем примере это будет двузначное число, оканчивающееся либо на 1, либо на 9.

Рассматривая 2 старших разряда, мы можем точно назвать число десятков искомого числа: $80^2=6400 < 7921 < 90^2=8100$. Следовательно, число десятков равно 8. Итак, мы, не произведя никаких вычислений по извлечению корня, уже почти определили искомое число: им может быть либо 81, либо 89. (В данном конкретном случае из соотношений 6400 много меньше 7921 и 7921 близко к 8100 можем точно сказать, что $7921=89$, но для общего рассмотрения это не типично.)

Введем в арсенал используемых нами знаний значе-

ние квадратов первого десятка двузначных чисел: $11^2=121$; $12^2=144$; $13^2=169$; $14^2=196$; $15^2=225$; $16^2=256$; $17^2=289$; $18^2=324$; $19^2=361$; $20^2=400$. Обратим внимание на то, что числа, образованные двумя последними цифрами, все между собой различаются. Этот факт мы и будем в дальнейшем использовать.

Рассмотрим два тождества:

$$\sqrt{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} + b = a.$$

$$\sqrt{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} - b = a.$$

Возьмем первое тождество и потребуем, чтобы

$$a + b = 100.$$

В этом случае нахождение корня квадратного становится очень простым. Технику вычислений продемонстрируем на двух примерах:

$$\text{а) } \sqrt{8649} = \quad \text{б) } \sqrt{7056} =$$

1) анализируем две последние цифры числа, из которого извлекается корень; если они образуют полный квадрат (как, например, в примере а), то берем это число за b^2 :

$$\text{а) } b^2 = 49, \quad b = 7;$$

если последние две цифры не образуют полного квадрата, то стараемся вспомнить двузначное число, квадрат которого оканчивался бы на эти 2 цифры. При этом легче действовать, полагаясь не на память, а на узнавание (используя подсказку последней цифры числа):

56 — квадрат не образует,

156 — нет такого квадрата,

256 — это квадрат числа 16.

$$\text{Итак, б) } b^2 = 256, \quad b = 16.$$

Далее действуем, следуя формуле $a = \frac{a^2 - b^2}{a + b} + b$.

2) находим $(a^2 - b^2) : 100$. Это сделать несложно, так как либо достаточно просто отбросить два последних знака, либо, кроме того, из числа, образованного первыми двумя цифрами, надо вычесть число сотен числа b^2 :

$$\text{а) } (8649 - 49) : 100 = 86,$$

$$\text{б) } (7056 - 256) : 100 = 68;$$

3) к полученному результату прибавляем b

а) $86+7=93$, $\sqrt[3]{8649}=93$;

б) $68+16=84$, $\sqrt[3]{7056}=84$;

4) в заключение обязательно осуществляем проверку по формуле

$$a+b=100;$$

а) $93+7=100$;

б) $84+16=100$.

Эта проверка гарантирует правильность вычислений.

Предлагаемый алгоритм можно использовать при извлечении корня квадратного из чисел $a^2 > 5625$ ($a > 75$). Для чисел $2500 < a^2 < 5625$ ($50 < a < 75$) используется формула

$$a^2 = \frac{a^2 - b^2}{a - b} - b = a, \text{ где } a - b = 50.$$

Практически вычисления проводятся так же, как и в предыдущем случае:

$$\sqrt[3]{3721} =$$

$b^2 = 121$, $b = 11$, $(3721 - 121) : 100 = 36$. Так как нам надо разделить не на 100, а на 50, то полученный результат умножаем на 2 $36 \times 2 = 72$.

Вычитаем b и получаем окончательный результат

$$72 - 11 = 61.$$

Обязательно выполняем проверку:

$$a - b = 50,$$

$$61 - 11 = 50 —$$

вычисления проведены правильно.

Наконец, при $a^2 < 2500$, $a < 50$ используем формулы

$$\sqrt{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} + b, \quad a + b = 50.$$

Пример: $\sqrt{1156} = b^2 = 256$, $b = 16$.

$$(a^2 - b^2) : 100 \times 2 = (1156 - 256) : 100 \times 2 = 9 \times 2 = 18,$$

$$a = 18 + b = 18 + 16 = 34.$$

Выполняем проверку: $34 + 16 = 50$ — вычисления проведены правильно.

При беглом чтении создается впечатление запутанности и сложности метода: необходимо запоминать какие-то граничные числа, разные формулы и т. д. На самом деле все обстоит гораздо проще. Посмотрим, как можно использовать метод с минимальным запоминанием вспомогательной информации:

- $$\sqrt[3]{3844} =$$
- 1) решаю вопрос: 1) $a < 50$?
 - 2) $50 < a < 75$?
 - 3) $75 < a < 100$?

Анализирую первые две цифры 38 и 25.

Считаю, что имею дело с третьим случаем;

2) нахожу $b^2 : b^2 = 144$, $b = 12$ (независимо от вариантов),

3) нахожу $a^2 - b^2 = 3844 - 144 = 3700$,

4) так как я решил, что имею дело с третьим случаем — делю на 100 (если бы я решил, что имею дело с первым или вторым случаем, то полученный результат надо еще умножить на 2) $3700 : 100 = 37$;

5) получаю окончательный результат
 $a = 37 + 12 = 49$;

6) выполняю проверку
 $49 + 12 \neq 100$.

Вычисления сделаны неверно. Ошибочно вычисления отнес к случаю 3. На самом деле имеем случай 2;

4а) возвращаюсь ко второй части процедуры 4
 $37 \times 2 = 74$;

5) так как $a > 50$, то b надо вычитать
 $74 - 12 = 62$;

6) проверка: $62 - 12 = 50$. Вычисления проведены правильно.

Запомнить, что надо делать в процедуре 5 — складывать или вычитать — очень просто. Если $a < 50$, то до 50 надо что-то добавить. Следовательно, и в пятой процедуре, и при проверке надо будет складывать. Если $a > 50$, то из a надо что-то вычитать, следовательно, и в пятой процедуре, и при проверке надо будет сделать вычитание.

Несколько примеров на вычисление с использованием описанного метода:

$\sqrt[3]{5776}$ — не удастся вспомнить квадрат числа, который бы оканчивался на 76. Метод бессилён оказать помощь.

$\sqrt[3]{5776}$ — вспомнить не удастся, но пытаюсь подобрать. Это должно быть число > 20 , оканчивающееся на 4 или 6. Проверяю $24 \times 24 = 576$; подходит, следовательно, $b = 24$. $5776 - 576 = 5200$, $5200 : 100 = 52$ — число десятков a равно 5. Считаю, что это случай, когда $75 < a < 100$; $52 + 24 = 76$.

Проверка: $76 + 24 = 100$.
 $\sqrt[2]{2601} \quad b^2 = 1, \quad b = 1, \quad a^2 - b^2 = 2601 - 1 = 2600$ — случай
 $50 < a < 75. \quad 2600 : 100 \times 2 = 52$. Ответ: $52 - 1 = 51$.

Проверка: $51 - 1 = 50$.

Следующие вычисления выполните самостоятельно, записывая только окончательный результат:

$$1) \sqrt[5]{5625} = \quad 3) \sqrt[4]{4096} = \quad 5) \sqrt[2]{2209} =$$

$$2) \sqrt[4]{4356} = \quad 4) \sqrt[3]{9409} = \quad 6) \sqrt[3]{12544} =$$

Пример 6 не укладывается в описанную схему вычислений. Но если вы поняли суть метода, то и этот пример сможете решить устно.

Ответы для проверки: 1) 75; 2) 66; 3) 64; 4) 97; 5) 47; 6) 112.

9. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ ИЗ ЧИСЕЛ, ЧИСЛО ЦИФР В КОТОРЫХ НЕ ПРЕВЫШАЕТ ЗНАЧЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ КОРНЯ

Когда в подкоренном числе число цифр не превышает показателя корня, то корень определяется по последней цифре подкоренного числа. Рассмотрим основные варианты:

1) если подкоренное число оканчивается на 5, то эта цифра и является ответом:

$$A = \sqrt[9]{1953125} = 5;$$

2) если остаток от деления показателя корня на 4 равен 1, то последняя цифра подкоренного числа является ответом:

$$A = \sqrt[13]{96854710407} \quad 13 : 4 = 3 \text{ и в остатке } 1.$$

Следовательно, $A = 7$;

3) если тот же остаток равен 2, то по последней цифре находятся два числа, одно из которых является ответом (исключение составляет окончание числа на 1, которое однозначно определяет искомое число 9). При последней цифре 4 — это числа 2 и 8, при последней цифре 6 — это числа 4 и 6, при последней цифре 9 — это числа 3 и 9 (как из пары чисел выбрать правильный ответ, будет сказано ниже):

$$A = \sqrt[14]{4398046511104} \quad A = 2 \text{ или } 8;$$

$$A = \sqrt[10]{3486784401} \quad A = 9 ;$$

4) если остаток равен 3, то искомый корень равен или последней цифре подкоренного числа, или ее дополнению до 10 (это справедливо и при нахождении корня кубического):

$$\sqrt[19]{609359740010496} = 6,$$

$$\sqrt[15]{4745880809943} = 7,$$

5) остаток равен 0. Подкоренное число в этом случае оканчивается либо на 1, либо на 6 (окончание числа на 5 мы не рассматриваем, так как этот случай оговорен в первом пункте). Если число оканчивается на 6, то искомый корень — одно из четных чисел 2, 4, 6, 8. Если число оканчивается на 1, то искомый корень одно из нечетных чисел 3, 7, 9:

$$A = \sqrt[8]{43046721} \quad A = 3,7 \text{ или } 9,$$

$$A = \sqrt[4]{1296} \quad A = 2,4,6 \text{ или } 8.$$

Для окончательного определения значения корня пользуются признаками делимости чисел, а также зависимостью между числом цифр в подкоренном числе и значением показателя степени: для выбора между цифрами 4 и 6, 3 и 7 проверяем, делится ли оно на 3. Если делится, то корень равен 6 или 3, в противном случае 4 или 7 соответственно. Выбор между цифрами 2—4—8 и 3—9 осуществляем по числу цифр в подкоренном числе: если число цифр в подкоренном числе не превышает половины показателя корня, то искомый корень 2 или 3; если оно больше половины, но не больше $\frac{3}{4}$ его, то корень равен 4, и, наконец, если оно больше $\frac{3}{4}$, то искомый корень равен 8 или 9.

Первоначально создается впечатление, что метод достаточно трудно использовать, так как трудно запомнить, какие числа соответствуют каким остаткам. Можно не запоминать. Иногда проще составить табличку:

	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	6	5	6	9	4	1
3	8	7	4	5	6	3	2	9
4	6	1	6	5	6	1	6	1
5	2	3	4	5	6	7	8	9

По горизонтали отложены цифры от 2 до 9. По вертикали степени этих чисел от 1 до 5. В таблице расположе-

ны цифры, на которые оканчиваются соответствующие степени (например, 7 в 4 степени равно числу, которое оканчивается на 1). Анализ таблицы обосновывает применение метода и служит подсказкой к его применению. Несколько поясняющих примеров:

$A = \sqrt[10]{1048576}$, $10 : 4 = 2$ и 2 в остатке, подкоренное число оканчивается на 6. Следовательно, $A = 4$ или 6. Проверяем, делится ли подкоренное число на 3 (а следовательно, и на 6, так как число четное): $1+0+4+8+5+7+6 = 31$, 31 на 3 не делится. Ответ: $A = 4$.

$A = \sqrt[8]{16777216}$, $8 : 4 = 2$, остаток $= 0$, $A = 2, 4, 6$ или 8. 6 исключается, так как 16 777 216 на 3 не делится. Так как в подкоренном числе число цифр $> \frac{3}{4}$ значения показателя корня, то делаем вывод, что $A = 8$.

$A = \sqrt[7]{823543}$, $7 : 4 = 1$ и 3 в остатке, подкоренное число оканчивается на 3, следовательно, $A = 3$ или 7, число 823 543 на 3 не делится. Ответ: $A = 7$.

Решите самостоятельно:

1) $\sqrt[13]{1594323} =$

4) $\sqrt[7]{6377292} =$

2) $\sqrt[10]{9765625} =$

5) $\sqrt[8]{5764807} =$

3) $\sqrt[15]{1073741824} =$

6) $\sqrt[9]{262144} =$

Ответы для проверки: 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 9; 5) 7; 6) 4.



ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ВЫПОЛНЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ



аиболее полную проверку можно произвести, только вторично произведя полностью вычисление другим методом или же произведя проверку обратным действием (сложение можно проверить вычитанием, деление — умножением, умножение — делением и т. д.). Но проверка повторным вычислением очень трудоемка и поэтому может быть рекомендована только для проверки особо важных результатов в исключительных случаях. При обычных расчетах можно рекомендовать другие способы проверки, дающие хорошие результаты и не требующие много времени для их проведения.

1. ПРОВЕРКА ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ 9

Метод нахождения остатка от деления числа на 9. Вспомним признак делимости числа на 9: для того, чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы сумма цифр этого числа делилась на 9. Например, число 12 348 на 9 делится, так как сумма цифр числа $1+2+3+4+8=18$ делится на 9 ($18:9=2$), а число 12 345 на 9 не делится, так как сумма цифр числа $1+2+3+4+5=15$ на 9 не делится. Больше того, можно сказать, какой будет остаток при делении числа 12 345 на 9. Для этого достаточно разделить сумму цифр 15 на 9; получаем $15:9=1$ и 6 в остатке. К полученной сумме цифр 15 мы можем опять применить признак делимости числа на 9, т. е. сложить цифры числа 15, и посмотреть, будет ли эта сумма делиться на 9: $1+5=6$ на 9 не делится. Таким образом, мы можем, складывая цифры произвольного числа, свести сумму цифр к однозначному числу. Если это число не будет равно 9, то число на 9 не делится и дает при делении на 9 остаток, равный полученному числу. Рас-

смотрим число 4 879 876. Находим сумму цифр $4+8+7+9+8+7+6=49$, повторяем операцию $4+9=13$, еще раз повторяем операцию $1+3=4$. Заключение — число 4 879 876 на 9 не делится. При делении на 9 дает остаток 4.

При практическом нахождении суммы цифр многозначных чисел можно воспользоваться следующими рекомендациями:

1) выполняя сложение цифр, приводите к однозначному числу промежуточные суммы, не дожидаясь получения окончательного результата. Сведение промежуточной суммы к однозначному числу целесообразно проводить каждый раз, как только она становится неудобной для дальнейшего счета. Найдем остаток от деления числа 48 457 384 на 9: $4+8=12$, $12+4=16$ — сводим промежуточную сумму к однозначному числу $1+6=7$ и продолжаем вычисление: $7+5=12$; $12+7=19$, $1+9=10$, $1+0=1$; $1+3=4$; $4+8=12$; $12+4=16$; $1+6=7$. Ответ: остаток 7.

Результат не зависит от того, когда мы сводим промежуточные суммы к однозначному числу;

2) при подсчете суммы можно не обращать внимание на встречающиеся в числе девятки или на группы цифр, дающие в сумме 9, или на промежуточные суммы, равные 9. Результат от этого не изменится. Если число на 9 не делится, то остаток будет получен тот же. Если число на 9 делится, то мы можем в итоге получить число 9 или 0. В последующем нам придется производить арифметические действия с остатками. Помните, что выводы, которые будут сделаны из рассмотрения результатов вычисления, будут одни и те же, будет ли в них участвовать 9 или 0. Этим иногда можно воспользоваться, заменяя для упрощения вычислений 9 на 0 или наоборот.

Найти остаток от деления числа 342 699 723 на 9: $3+4=7$; $7+2=9$ (отбрасываем); $0+6=6$, 2 следующие цифры во внимание не принимаем, так как это девятки; последующие 2 цифры тоже во внимание не принимаем, так как они в сумме дают $9(7+2)$; $6+3=9$. В итоге получили 9 или (отбросив 9) 0. Это эквивалентно. Ответ: число 342 699 723 делится на 9 без остатка.

Проверка с помощью 9 сложения и вычитания. В предыдущем пункте мы научились представлять число A в виде $A=9a+b$ (число a остается неизвестным). Рассмотрим, чему равна сумма двух чисел, представленных

в таком виде $A_1 + A_2 = (9a_1 + b_1) + (9a_2 + b_2) = 9(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$. Итак, если нам известны остатки слагаемых от деления их на 9, то остаток суммы от деления ее на 9 будет равен сумме остатков слагаемых (приведенных к однозначному числу).

Используем это свойство для проверки правильности выполнения сложения. Для проверки правильности нахождения суммы чисел

$$\begin{array}{r} 3824 \\ 2031 \\ + 2959 \\ \hline 3541 \\ \hline 12\ 355 \end{array}$$

находим сумму всех цифр слагаемых

$$3 + 8 + 2 + 4 + 2 + 3 + 1 + 2 + 9 + 5 + 9 + 3 + 5 + 4 + 1 = 61,$$

и сводим ее к однозначному числу $6 + 1 = 7$.

Находим сумму цифр суммы, тоже сведенную к однозначному числу

$$1 + 2 + 3 + 5 + 5 = 16, \quad 1 + 6 = 7,$$

если сумма цифр всех слагаемых, сведенная к однозначному числу, равна сумме цифр суммы, сведенной к однозначному числу, то сложение выполнено верно (о точности проверки данным методом смотри раздел на с. 114).

Аналогично проверяется и правильность выполнения вычитания. Находим остатки уменьшаемого, вычитаемого и разности. Далее выбираем один из двух вариантов:

1) складываем остатки вычитаемого и разности и сравниваем остаток полученной суммы с остатком уменьшаемого. Равенство этих чисел говорит о правильности полученного результата

$$\begin{array}{r} 12\ 354 \quad 15 \quad 1+5=6 \quad 8+7=15 \quad 1+5=6 \quad 6=6. \\ - \quad 278 \quad 8 \\ \hline 12\ 076 \quad 7 \end{array}$$

Разность найдена правильно.

35 415 0 (при подсчете суммы отброшены девятки)
 $- \quad 1360 \quad 1 \quad 8+1=9$, в уменьшаемом 0, что эквивалентно 9 (смотри предыдущий раздел). Результат верен;

2) этот способ менее удобен: из остатка уменьшаемого вычитаем остаток вычитаемого. Остаток разности сравниваем с остатком разности.

Если при нахождении разности между остатками уменьшаемого и вычитаемого окажется, что остаток уменьшаемого меньше остатка вычитаемого, то предварительно прибавляем к нему 9.

$$\begin{array}{r} 123\ 431 \quad 5 \quad 1+2+3+4+3+1=14, 1+4=5; \\ - 27\ 681 \quad 6 \quad 2+7+6+8+1=24, 2+4=6, \quad 6 \text{ больше } 5; \\ \hline 95\ 750 \quad 8 \quad 5+9=14; 14-6=8; \\ \quad \quad \quad 9+5+7+5=26, 2+6=8; 8=8. \end{array}$$

Первый метод тем и удобен, что не приходится прибегать к вспомогательным операциям.

Проверьте самостоятельно следующие вычисления:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 12\ 379 \quad 2) \quad 27\ 845 \quad 3) \quad 35\ 473 \quad 4) \quad 459\ 373 \\ \quad 52\ 485 \quad \quad 35\ 424 \quad - \quad 1\ 294 \quad - \quad 368\ 594 \\ + \quad 35\ 494 \quad + \quad 12\ 937 \quad \quad 34\ 279 \quad \quad 91\ 779 \\ \quad 67\ 139 \quad \quad 65\ 989 \\ \hline 167\ 497 \quad \cdot \quad 142\ 196 \end{array}$$

Ответы для проверки: пример 1 решен верно, остальные — с ошибками.

Проверка с помощью 9 умножения и деления. Необходимым требованием правильности выполнения умножения является равенство произведения остатков от деления сомножителей на 9 остатку произведения от деления на то же число:

$$\begin{array}{r} 5429 \quad 5+4+2+9=20, 2+0=2; \\ \times 2435 \quad 2+4+3+5=14, 1+4=5; \\ \hline 13\ 219\ 615 \quad 1+3+2+1+9+6+1+5=28, 2+8=10, \\ \quad \quad \quad 1+0=1; \\ 2 \times 5 = 10; \quad 1+0=1; \quad 1=1 \text{ — вычисления верны.} \\ 27\ 936 \quad 2+7+9+3+6=27, 2+7=9 \text{ (или 0);} \\ \times \quad 723 \quad 7+2+3=12, 1+2=3; \\ \hline 20\ 197\ 728 \quad 2+1+9+7+7+2+8=36, 3+6=9. \end{array}$$

Возможны два варианта:

1) $9 \times 3 = 27, 2+7=9$ (при умножении любого числа (кроме 0) на 9 получится число, сумма цифр которого будет равна после сведения ее к однозначному числу 9). Сравниваем $9=9$. Умножение выполнено правильно.

2) $0 \times 3 = 0$, но 0 в признаке делимости числа на 9 эквивалентен девятке. Поэтому делаем заключение, что умножение выполнено правильно.

На этом примере надо остановиться. Внимательно просмотрев его, можно сделать следующий вывод: если при проверке остаток от деления первого сомножителя на 9 равен 0 (или 9), то нет смысла искать остаток от

деления второго сомножителя на девять. Сразу приступаем к нахождению остатка от деления произведения на 9. При правильном выполнении умножения этот остаток должен быть равен 0 (или 9).

$$\begin{array}{r} 125\,721 \\ \times 459 \\ \hline 5\,770\,939 \end{array}$$

$$1+2+5+7+2+1=18, 1+8=9;$$

$$5+7+7+5+9+3+9=45, 4+5=9 \text{ — произведение найдено верно.}$$

Возникает вопрос — если мы не принимаем во внимание второй сомножитель, насколько применим метод проверки 9 в данном случае? Ведь я могу поставить вместо второго сомножителя (459) любое другое число (например, 365), и проверка покажет, что произведение найдено правильно. Проверка 9 не дает 100%-ной гарантии правильности вычислений. Подробнее о границах применимости данной проверки сказано в разделе на с. 114.

Проверка правильности выполнения деления аналогична. Для проверки находим остатки от деления делимого, делителя и частного на 9. Произведение остатков делителя и частного должно равняться остатку делимого:

$$\begin{array}{l} 824\,901 : 3571 = 231, \\ 2+3+1=6; \\ 3+5+7+1=16, 1+6=7; \\ 8+2+4+9+1=24, 2+4=6; \\ 6 \times 7 = 42 \quad 4+2=6; \\ 6=6 \text{ — частное найдено правильно.} \end{array}$$

Рассмотрим проверку правильности вычисления частного в случае, когда число делится с остатком

$14\,937\,381 : 3548 = 421$, остаток 301, случай не требует подробных объяснений, и можно ограничиться приведением соответствующих выкладок:

$$\begin{array}{l} 1+4+9+3+7+3+8+1=36; 3+6=9; \\ 3+5+4+8=20, 2+0=2; \\ 4+2+1=7; \\ 3+0+1=4; \\ 2 \times 7 + 4 = 18, 1+8=9; \\ 9=9 \text{ — вычисление проведено верно.} \end{array}$$

Проверьте самостоятельно следующие вычисления:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 397 \\ \times 424 \\ \hline 168\,328 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) \quad 5931 \\ \times 1278 \\ \hline 7\,579\,818 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3) \quad 238\,464 : 324 = 736; \\ 4) \quad 36\,653 : 196 = 187; \end{array}$$

$$5) \quad 33\,113 : 239 = 138, \text{ остаток } 131;$$

6) $483\,718 : 695 = 685$, остаток 693.

Ответы для проверки: результаты примеров 1, 2, 3 и 5 — правильны; результаты примеров 4 и 6 — ошибочны.

Проверка с помощью 9 возведения числа в степень и извлечение корня n -й степени. Возведение числа в степень проверяется по тому же правилу, что и произведение. Различие здесь только в том, что сомножители одинаковые. Это позволяет несколько упростить проверку.

Проверка вычислений в общем случае:

$$359^2 = 128\,881$$

$$3+5+9=17, 1+7=8;$$

$$1+2+8+8+8+1=28, 2+8=10, 1+0=1;$$

$$8 \times 8 = 64, 6+4=10, 1+0=1;$$

$$1=1 \text{ — вычисление выполнено правильно.}$$

Учитывая, что нам приходится возводить в квадрат остаток, который может быть равен от 1 до 8 (если остаток равен 9, то мы ищем остаток результата, который при правильном вычислении должен быть равен 9); найдем квадраты возможных остатков и сведем их к однозначному числу.

$$1^2=1; 2^2=4; 3^2=9; 4^2=16; 1+6=7; 5^2=25, 2+5=7; 6^2=36, 3+6=9; 7^2=49, 4+9=13; 1+3=4; 8^2=64, 6+4=10, 1+0=1.$$

Нетрудно заметить, что остаток от деления квадрата любого числа на 9 может быть равен только одному из четырех чисел: 1, 4, 7 и 9. Поэтому проверку целесообразно начинать с результата: если остаток результата равен 2, 3, 5, 6 или 8, то сразу можно сделать заключение об ошибочности вычислений.

$$679^2 = 461\,051$$

$$4+6+1+5+1=17, 1+7=8.$$

Находить остаток от деления основания на 9 нет необходимости: вычисления выполнены неверно.

$$538^2 = 289\,744$$

$$2+8+9+7+4+4=34, 3+4=7 \text{ — число возможное.}$$

Продолжаем проверку:

$$5+3+8=16, 1+6=7;$$

$$7 \times 7 = 49, 4+9=13, 1+3=4;$$

$$4 \neq 7 \text{ — вычисления выполнены неверно.}$$

На проверке вычисления корня n -й степени останавливаться специально нет смысла, так как проверка производится аналогично проверке возведения в степень, что будет показано на примерах.

Рассмотрим примеры проверки возведения в степень и извлечения корня:

$$\begin{aligned}38^2 &= 2\,085\,136 \\ 2+8+5+1+3+6 &= 25, \quad 2+5=7; \\ 3+8 &= 1, \quad 1+1=2; \\ 2^4 &= 16, \quad 1+6=7; \\ 7 &= 7 \text{ — вычисление выполнено верно.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{110\,592} &= 48 \\ 1+1+5+9+2 &= 18, \quad 1+8=9; \\ 4+8 &= 12, \quad 1+2=3; \\ 3^3 &= 27, \quad 2+7=9; \\ 9 &= 9 \text{ — вычисление выполнено верно.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}666^2 &= 443\,556 \\ 4+4+3+5+5+6 &= 27, \quad 2+7=9; \\ 6+6+6 &= 18, \quad 1+8=9.\end{aligned}$$

Нет необходимости возводить 9 в квадрат, мы все равно получим в итоге 9:

$$\begin{aligned}9 &= 9 \text{ — вычисления выполнены верно} \\ 7^8 &= 5\,764\,801 \\ 5+7+6+4+8+1 &= 31, \quad 3+1=4.\end{aligned}$$

Как быть с 7^8 ? Вычислять восьмую степень 7 — значит повторить вычисления. Но выход есть:

$7^2=49$, $4+9=13$, $1+3=4$
для 7^4 $4 \times 4=16$, $1+6=7$; (используем результат предыдущих вычислений и оперируем с остатками); для 7^8 $7 \times 7=49$, $4+9=13$, $1+3=4$; здесь также используем результат предыдущих вычислений.

Приводя разбор примеров, я везде нахожу полную сумму цифр числа с учетом всех девяток. Это делается только для наглядности, чтобы не было сомнений, цифры какого числа складываются. При практическом нахождении остатка не забывайте использовать методы, упрощающие его нахождение, изложенные в начале главы.

Проверьте самостоятельно результаты вычислений:

- 1) $253^2=64\,809$; 3) $\sqrt[3]{4\,330\,747}=163$;
- 2) $5^7=78\,125$; 4) $157 \times 324 \times 29=1\,475\,172$;
- 5) $13^3=2\,097$;
- 6) $444^2=197\,136$;

Ответы для проверки: в примерах 2, 3 и 6 вычисления выполнены правильно; в примерах 1, 4, 5 — ошибочно

Ошибки, которые нельзя выявить с помощью проверки 9. Проверка с помощью 9 проста и выявляет большую часть ошибок, допускаемых при вычислениях. К сожалению, способ не позволяет выявить ошибки в вычислениях, если в результате ошибки получилась величина, отличающаяся от правильной на число, кратное 9. Какие ошибки пропускает, не обнаруживает метод?

1) Прежде всего ошибки, к сожалению, возникающие относительно часто при использовании малых вычислительных машин и т. д., — перемену цифр местами. Поясню на примере: оператору необходимо было найти произведение чисел $25\,784 \times 425 = ?$ При наборе множимого по ошибке было набрано число 25 874. Фактически было найдено произведение $25\,874 \times 425 = 10\,996\,450$, но оператор считает, вполне естественно, что найдено произведение

$$25\,784 \times 425 = 10\,996\,450.$$

Проверка не обнаруживает ошибку:

$$2+5+7+8+4=26, \quad 2+6=8;$$

$$4+2+5=11, \quad 1+1=2;$$

$$1+9+9+6+4+5=34, \quad 3+4=7;$$

$$2 \times 8 = 16, \quad 1+6=7;$$

$$7=7.$$

Такого же типа ошибки (обмен местами двух цифр) иногда допускают и машинистки при перепечатке числовых данных. Поэтому вычисления, проводимые на каких-либо клавишных вычислительных машинах, нецелесообразно проверить с помощью девятки.

2) Если произошла ошибка в 10 раз, с помощью описанного метода найти ошибку не удастся: числа 135, 1350, 13 500 и т. д. с точки зрения проверки девяткой одни и те же. Кстати, не отличимы от них и числа 1305, 100 305 и т. д. Но чаще встречаются ошибки, когда «забывают» о нулях на конце числа.

3) Метод не позволяет обнаружить ошибки, если они допущены в двух цифрах так, что сумма ошибок в цифрах равна нулю: если вместо числа 272 931 получено число 472 731 ($+2-2=0$ — первая цифра увеличена на 2 единицы, но настолько же уменьшена четвертая цифра), то проверка с помощью девятки бессильна выявить ошибку. Но такого рода ошибки бывают достаточно редко, и ими можно пренебречь.

При вычислениях, выполняемых вручную, данный метод проверки правильности результатов является одним

из наиболее простых и эффективных. Конкурировать с ним может только метод проверки результатов с помощью 11, который описан в следующем пункте.

2. ПРОВЕРКА С ПОМОЩЬЮ 11

Прием проверки результатов вычислений с помощью остатков от деления чисел, участвующих в вычислительном процессе, на 11 очень похож на принцип проверки вычислений с помощью остатков от деления, используемых при вычислении чисел на 9. Незначительно сложнее предыдущего приема проверки, метод позволяет выявлять ошибки, связанные с перестановкой цифр. Это делает его более ценным, чем метод проверки с помощью 9. Если вы не сталкивались ни с тем ни с другим методом проверки, то стоит осваивать проверку с помощью способа, описываемого в данном пункте.

Техника нахождения остатка от деления числа на 11. Признаки делимости на 11:

1) число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, равно 0 или делится на 11. Число 1 462 032 делится на 11, так как разность $1-4+6-2+0-3+2$ между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, равна 0; число 9 213 831 также делится на 11, ибо разность между суммой цифр, стоящих на нечетных и четных местах $3-1+9-0+9-2+1-3+8-3+1=22$, равна числу, делящемуся на 11 (к числу 22 мы можем опять применить признак делимости чисел на 11, т. е. найти разность цифр, стоящих на нечетных и четных местах, $2-2=0$ и получить в итоге 0).

Разность может быть и отрицательная, это не имеет значения:

$$\begin{array}{r} 48\ 392\ 817 \\ 4-8+3-9+2-8+1-7=-22 \end{array}$$

число делится на 11;

2) число делится на 11, если сумма двуцифрных граней числа делится на 11: число 311 475 901 делится на 11, так как сумма $3+11+47+59+01=121$ делится на 11. Если вы затрудняетесь сказать, делится ли число 121 на 11, то примените признак еще раз: $1+21=22$ — число делится на 11. Этот признак делимости можно применить и по-другому. При этом вычисления упростятся. Разбив

справа число на грани, складывать остатки от деления числа каждой грани на 11. В приведенном примере последовательность вычислений будет следующая:

$$3+0(11-11=0)+3(47-44=3)+4(59-55=4)+1=11.$$

Для обладающих элементарными навыками вычислений данный вариант проверки делимости числа на 11 является наиболее простым.

Несколько примеров на нахождение остатка от деления числа на 11:

1) 35 412 539 784 — разбиваем на грани по 2 цифры с правой стороны 3.54.12.53.97.84.

$3+10+1+9+9+7=$, находя сумму, отбрасываем числа, кратные 11:

$$3+10=13, 13-11=2; 2+1+9=12, 12-11=1;$$

$$1+9+7=17, 17-11=6; \text{остаток равен } 6;$$

2) 489 376 645

а) $4+1+4+0+1=10$ — остаток равен 10,

б) $4-8+9-3+7-6+6-4+5=10$ — результат тот же;

3) 678 354 193

$6+1+2+8+5=22$, 22 делится на 11, следовательно, число делится на 11 без остатка.

Проверка правильности вычислений с помощью 11.

Принципы проверки результатов с помощью остатков от деления чисел, используемых в вычислениях, на 11 совершенно аналогичны принципам проверки результатов с помощью 9. Поэтому рекомендуем прочитать перед изучением этого материала предыдущий пункт.

При сложении складываем остатки слагаемых и сравниваем с остатком суммы

$$\begin{array}{r} 37.92.95 \\ 15.43.21 \\ + 45.97.68 \\ \hline 35.41.69 \\ \hline 1.34.75.53 \end{array}$$

1) $4(37-33=4)+4(92-88=4)+7(95-88=7)+$
 $+ (15-11=4)+10(43-33=10)+10(21-11=10)+$
 $+1(45-44)+9(97-88=9)+2(68-66=2)+2(35-$
 $-33=2)+8(41-33=8)+3(69-66=3)=64, 64-55=9,$

2) 1, 34, 75, 53.

$1+1(34-33)+9(75-66=9)+9(53-44=9)=20,$
 $20-11=9,$

3) $9=9$ — вычисления выполнены правильно.

Проверить правильность вычислений:

- 4.93.54 1) $4+5(93-88=5)+10(54-44=10)=19$,
 — $\frac{12.42}{1.81.12}$ 19—11=8,
 2) $1(12-11=1)+9(42-33=9)=10$,
 3) $1+4(81-77=4)+1(12-11=1)=6$,
 4) $10+6=16$, $16-11=5$,
 5) $8=5$ — вычисления ошибочны.

Проверить результат: $694 \times 375 = 26\ 025$

- 1) $6+6(94-88=6)=12$, $12-11=1$,
 2) $3+9(75-66=9)=12$, $12-11=1$,
 3) $2+5(60-55=5)+3(25-22=3)=10$,
 4) $1 \times 1 = 1$,
 5) $10 \neq 1$ — вычисления ошибочны.

Проверить результат: $694 \times 375 = 260\ 250$

- 1) $6+6(94-88=6)=12$, $12-11=1$.
 2) $3+9(75-66=9)=12$, $12-11=1$.
 3) $4(26-22=4)+2+6(50-44=6)=12$, $12-11=1$
 4) $1 \times 1 = 1$,
 5) $1=1$ — вычисления выполнены правильно.

Проверить результат: $312\ 074 : 674 = 463$, остаток 12.

- 1) $31.20.74$, $9(31-22=9)+9(20-11=9)+8(74-66)=$
 $=26$, $26-22=4$,
 2) 6.74 , $6+8(74-66=8)=14$, $14-11=3$,
 3) 4.63 , $4+8(63-55=8)=12$, $12-11=1$,
 4) $12-11=1$,
 5) $3 \times 1 + 1 = 4$,
 6) $4=4$ — вычисления выполнены верно.

Проверить результат: $678^2 = 459\ 684$

- 1) $45.96.84$, $1(45-44=1)+8(96-88=8)+7(84-77=)$
 $=7)=16$, $16-11=5$,
 2) 6.78 , $6+1(78-77=1)=7$,
 3) $7 \times 7 = 49$, $49-44=5$,
 4) $5=5$ — вычисления правильны.

Проверьте результат: $\sqrt[3]{546\ 121} = 739$

- 1) $54.61.21$, $10+6+10=26$, $26-22=4$,
 2) 7.39 , $7+6=13$, $13-11=2$,
 3) $2 \times 2 = 4$,
 4) $4=4$ — результат верен.

Метод проверки с помощью остатков от деления используемых в вычислениях чисел на 11 выявляет все ошибки, кроме ошибок, при которых происходит изменение числа на число, кратное 11, или изменение числа в 10^{2n} раз. Ошибку в 10 раз и вообще в 10^{2n+1} раз метод обнаруживает. Сравнивая возможности данного способа

проверки с проверкой девяткой, ясно видно его преимущество. Проверьте самостоятельно правильность приводимых вычислений, но предварительно еще раз внимательно прочтите предыдущий пункт — все замечания по упрощению вычислений, приводимые в нем, надо использовать и при проверке одиннадцатью.

$$1) 576 \times 138 \times 13 = 1\,033\,354 \quad 2) 878 \times 927 = 8\,113\,906$$

$$3) 673^2 = 456\,929 \quad 4) 1247^2 = 1\,555\,009$$

$$5) \begin{array}{r} 65\,432 \\ 1\,379 \\ \hline \end{array} \quad 6) \begin{array}{r} 12\,374 \\ 4\,266 \\ \hline \end{array} \quad 7) \begin{array}{r} 693\,387 \\ - 38\,561 \\ \hline \end{array} \quad 8) \begin{array}{r} 943\,725 \\ - 939\,634 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 673\,984 \\ 287 \\ \hline 743\,082 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 57\,639 \\ 1\,248 \\ \hline 75\,537 \end{array} \quad \begin{array}{r} 655\,826 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4\,091 \\ \hline \end{array}$$

$$9) 189\,086 : 399 = 473, \text{ в остатке } 359$$

$$10) 260\,809 : 1491 = 174, \text{ в остатке } 1375.$$

$$11) \sqrt{2924287} = 143 \quad 12) \sqrt{83521} = 17$$

Ответы для проверки: примеры 2, 4 и 8 решены верно; примеры 1, 3, 5, 6 и 7 — ошибочно.

ЛИТЕРАТУРА

Берман Г. Н. Приемы счета. М., Физматгиз, 1959.

Гольдштейн Д. Н. Техника быстрых вычислений. М., Учпедгиз, 1948.

Каган Л. С. Устный счет и рационализация вычислений. — В сб.: «Устный счет, рационализация вычислений и решение задач в общем виде». Минск, Гос. изд-во при СНК БССР (Учебно-пед. редакция), 1940.

Катляр З., Мак-Шейн Р. Система быстрого счета по Трахтенбергу. Пер. с англ. М., «Просвещение», 1967.

Меннхен Ф. Некоторые тайны артистов-вычислителей. Одесса, 1923.

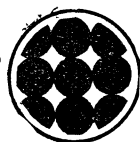
Попов И. Г. Устные вычисления. М., Учпедгиз, 1950.

Прищепенко Д. Ключ радикалов (извлечение корней всех степеней посредством простого деления). Кронштадт. Тип. газеты «Котлин», 1910.

Ришар Л. Быстросчет (стенаритмия). Искусство производить в уме вычисления с быстротою мысли. Пер. с франц. С. В. Лурье. М., 1927.

Фридман Л. М., Безгина М. А. Любопытный способ деления целых чисел. — «Математика в школе», 1962, № 1, с. 62—63.

Чевелев И. И. Приемы устного счета и вычисления на счетных приборах. М., «Просвещение», 1964.



СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I. Методы, упрощающие сложение и вычитание	6
1. Устное сложение многозначных чисел	6
2. Сложение методом «корневых» чисел	7
3. Использование при сложении метода среднего числа (формулы суммы арифметической прогрессии)	8
4. Соединение соседних разрядов при сложении и вычитании	9
5. Использование округления чисел при сложении и вычитании (метод использования «круглых» чисел)	11
6. Вычитание из чисел вида $a \cdot 10^n$ или $a \cdot 10^n + \alpha$, где α мало	12
Глава II. Методы, упрощающие умножение и деление	16
1. Использование порядка выполнения действий для облегчения вычисления произведения	16
2. Общие методы, упрощающие умножение	22
3. Русский способ умножения и деления (способ изменения сомножителей)	32
4. Разложение множителей на слагаемые	35
5. Метод, упрощающий умножение на число, в состав которого входят цифры 6, 7, 8 и 9 («метод отрицательных цифр»)	35
6. Умножение чисел, близких к 10^n , $2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, $a \cdot 10^n$ (метод дополнений)	36
7. Умножение на число, близкое к 10^n	56
8. Умножение на число вида 9, 99, 999, ..., $(10^n - 1)$	60
9. Умножение чисел, у которых сумма цифр единиц составляет 10	66
10. Умножение чисел, у которых число десятков одинаково, а сумма единиц сомножителей составляет 10, и другие случаи	69
11. Умножение чисел с равным числом десятков или с равным числом единиц, или на число, состоящее из одинаковых цифр	72
12. Нахождение произведений вида $(a+b) \cdot (a-b)$	77
13. Умножение двузначных чисел, оканчивающихся на 1	77
14. Умножение чисел, заключенных между 10 и 20	78
15. Деление многозначных чисел на число, близкое к 10^n (метод дополнений)	79
16. Деление на число, близкое к «круглому»	82
17. Деление с использованием умножения (или деления) делимого и делителя на одно и то же число.	85

Глава III. Методы, позволяющие упростить возведение числа в степень и извлечение из числа корня n-й степени	87
1. Возведение в квадрат целого числа a , если известен квадрат предыдущего $(a-1)$ или последующего $(a+1)$ натурального числа	87
2. Возведение в квадрат целого числа a при условии, что известен квадрат числа $(a-2)$ или числа $(a+2)$	88
3. Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 25 и 75	89
4. Возведение в квадрат трехзначных чисел, оканчивающихся на 5	90
5. Возведение в квадрат чисел вида $50 \pm a$ (или в общем виде чисел вида $5 \cdot 10^n \pm a$)	92
6. Общие методы, упрощающие возведение в квадрат чисел вида $a \cdot 10^n \pm b$, где a — любая значащая цифра, b — число, квадрат которого известен	95
7. Возведение в квадрат произвольных двузначных чисел	98
8. Извлечение корня квадратного из четырехзначных чисел, представляющих полный квадрат	100
9. Извлечение корня высших степеней из чисел, число цифр в которых не превышает значение показателя корня	104
Глава IV. Проверка правильности выполненных вычислений	107
1. Проверка вычислений с помощью 9	107
2. Проверка с помощью 11	115
Литература	118

АНДРЕЙ СЕРАФИМОВИЧ СОРОКИН

ТЕХНИКА СЧЕТА

(Методы рациональных вычислений)

Редактор Н. Феоктистова

Художник А. Савелов.

Худож. редактор Т. Добровольнова.

Техн. редактор Ф. Ривилис.

Корректор Л. Добролюбова

А03352. Индекс заказа 66704. Сдано в набор 2/IV.1976 г. Подписано к печати 27/IX.1976 г. Формат бумаги $84 \times 108^{1/32}$. Бумага типографская № 3. Бум. л. 1,875. Печ. л. 3,75. Усл. печ. л. 6,30. Уч.-изд. л. 5,24. Тираж 100 000 (2 завод 40001—100 000). Заказ 4079. Типография издательства «Коммунист». Саратов, Волжская, 28. Цена 17 коп.