

**ЗНАНИЕ** НАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
естественнонаучный факультет

Е.Я.Гук

# ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ



НАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
естественнонаучный факультет  
Издается с 1961 г.

Е.Я. Гук

# ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

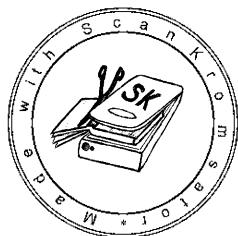


Издание 2 - е,  
исправленное  
и дополненное

Издательство "ЗНАНИЕ" Москва 1987

Автор: ГИК Евгений Яковлевич— кандидат технических наук, старший научный сотрудник ВНИИНС, ведущий отдела журнала «Квант», научный консультант журнала «Наука и жизнь», член Союза журналистов СССР, мастер спорта СССР по шахматам, автор книг «Математика на шахматной доске», «Шахматные досуги», «Шахматы и математика», «Беседы о шахматах». Три книги написаны в соавторстве с экс-чемпионом мира по шахматам А. Е. Карповым: «Шахматный калейдоскоп», «Неисчерпаемые шахматы», «Шахматная мозаика».

Рецензенты: Успенский В. А.— доктор физико-математических наук, профессор; Гершунский Б. С.— доктор педагогических наук.



Scan AAW

**Гик Е. Я.**

Г46. Занимательные математические игры.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Знание, 1987.— 160 с.— (Нар. ун-т. Естественнонаучный фак.).

45 к.

200 000 экз.

В книге рассказывается о различных математических, логических, словесных и других занимательных играх, пользующихся популярностью. Автор в увлекательной форме описывает их правила, историю, теорию, приводит много интересных задач, примеров, головоломок.

Книга поможет читателям развить логические, комбинаторные и математические способности, будет полезна слушателям народных университетов естественнонаучных знаний.

Г 1702010000—004 19—87  
073(02)—87

ББК 22.1

© Издательство «Знание», 1982 г.  
© Издательство «Знание», 1987 г.

Предлагаемая книга Е. Я. Гика — математика, кандидата наук и шахматного мастера — посвящена занимательным математическим играм, то есть играм, которыми увлекаются люди, склонные к математике, или играм, допускающим содержательный математический анализ. Она будет интересна и любителям логических задач, головоломок, кроссвордов, игр со словами.

Книга примечательна следующими тремя особенностями.

Это первое у нас издание, целиком посвященное занимательным играм, в которые с интересом играют несколько партнеров.

Знакомство с книгой может направить некоторых читателей от развлечения к занятиям математикой и кибернетикой. Да и сами интеллектуальные игры развивают способности, необходимые для решения инженерных задач, проблем управления и экономики.

Книгу можно с успехом использовать в школьных кружках.

И наконец, в книге рассказывается об известных и не всегда легких задачах и головоломках из области занимательной математики. Назовем хотя бы такие: как выиграть в поддавки всеми шашками против одной; как быстрее всего поставить на шахматной доске мат при симметричной игре; как сделать «из мухи слона». Немало в книжке и собственных находок автора.

Остается сказать, что книга о занимательных играх сама написана занимательно, как, впрочем, и многочисленные статьи и книги Е. Я. Гика по шахматам и «шахматной математике».

А. Л. БРУДНО,  
*доктор физико-математических наук,  
профессор*

---

# 1

## Три тестовые игры

---



Стремление к разгадыванию различных загадок и тайн свойственно человеку в любом возрасте. Кто из нас не увлекался в детстве игрой «холодно — горячо», не отгадывал загадок, облаченных в стихотворные строки, не ломал голову над хитроумной задачей?

Детская страсть к играм и головоломкам на отгадывание иногда пробуждает у юноши желание целиком посвятить себя математике, физике, биологии, чтобы «отгадывать» уже более серьезные, научные загадки и проблемы. Лучшие отгадчики впоследствии, случается, создают математические теории, расшифровывают древние папирусы или открывают новые законы природы. И это шутка лишь наполовину. Несомненно, игры на отгадывание развивают творческие способности человека, его логическое мышление, учат ставить важные вопросы и находить ответы на них.

Все игры на отгадывание во многом похожи друг на друга — один игрок что-то загадывает, задумывает или распределяет, а другой, задавая те или иные вопросы и получая ответы на них, должен найти разгадку, определить задуманный объект. В этой главе мы рассмотрим три игры на отгадывание, содержащие определенные математические и логические элементы. В первой игре — «быки и коровы» — требуется отгадать число, во второй — «отгадать слово» — определить слово, а в третьей — «морской бой» — обнаружить расположение кораблей. Во всех трех играх, построенных на вопросах и ответах, отгадчик на каждом ходу извлекает некоторую информацию о задуманном объекте и после ряда вопросов отгадывает его (то есть находит задуманное число, слово или расположение кораблей). Цель игры заключается в том, чтобы определить объект, задав как можно меньше вопросов. Загадчик и отгадчик поочередно



меняются ролями, и победитель определяется по совокупности встреч.

Предлагаемые игры ассоциируются у автора прежде всего с тестами (возможно, это ощущение станет понятно читателю после знакомства с рассказом о «морском бое»). Тесты часто используются в психологических исследованиях, важную роль играют они в кибернетике, специальный раздел которой называется теорией построения тестов. По существу, тест представляет собой набор вопросов, позволяющий однозначно расшифровать объект или его определенные свойства. При построении теста всегда ставится задача сделать его более коротким, то есть задать наименьшее число тестовых вопросов. Вот почему все три игры мы отнесли к разряду тестовых.

Загадывать и отгадывать объекты приходится во многих занимательных и настольных играх. В шахматах мы тоже стремимся отгадать замысел противника, план его действий, но, увы, с вопросами обращаться не разрешается. Шахматы — игра с полной информацией, исход игры любой позиции теоретически однозначно определен и не требует никаких вопросов. Тестовые же игры — типичные игры с неполной информацией, и весь смысл состоит именно в вопросах и ответах.

Игра «морской бой» известна с незапамятных времен. Что же касается двух других игр, то они имеют довольно скромную историю и в литературе освещены недостаточно. Мы дадим подробное описание всех трех игр, а также рассмотрим ряд интересных примеров и задач, связанных с ними.

## Быки и коровы

Эта логическая, комбинаторная игра, придуманная сравнительно недавно, в 70-е годы, завоевала огромную популярность во многих странах. Ее наиболее распространенный вариант выпускается в виде комплекта под названием «Mastermind» (мастермайнд, буквальный перевод — «выдающийся ум»). Но начнем наш рассказ с «быков и коров».

Играют двое. Каждый задумывает четырехзначное число с разными цифрами, которое должен отгадать партнер (на первом месте может стоять и 0). Ход заключается в том, что отгадывающий называет определенное число, также четырехзначное с разными цифрами. Если задуманное и названное числа имеют общие цифры, стоящие на одних и тех

же местах, то такую ситуацию называют «быком» (далее обозначается «б»). Если общие цифры есть, но стоят они на разных местах, то это «корова» (обозначается «к»).

В ответ на ход партнера загадчик сравнивает свое число с названным и сообщает общее число «быков» и «коров». Например, если задумано 5239, а названо 2735, то ответ будет «1 бык 2 коровы» (1б 2к). Цифра 3 имеется в обоих числах и стоит на одинаковых местах (1б), цифры 2 и 5 общие, но стоят на разных местах (2к), цифры 7 и 9 не являются общими.

Сделав ход и получив ответ, отгадчик извлекает некоторую информацию о задуманном числе и в конце концов определяет его. Игра заканчивается в тот момент, когда на очередной свой ход он получает ответ 4б, то есть задуманное число найдено. Выигрывает тот, кто быстрее отгадает число противника.

Приведем один пример. Ходы и ответы на них будем записывать в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

1	1568	1б
2	1586	1б
3	1658	1к
4	2570	1б
5	4539	1б 3к
6	3594	4б

Предположим, что партнер задумал число 3594, которое нам нужно отгадать. Наш первый ход 1568 дал ответ 1б. Это означает, что в задуманном числе имеется всего одна цифра из названных, причем стоящая на своем месте. Постараемся отгадать ее, не привлекая пока — чтобы не запутаться — другие цифры. Сделаем второй ход 1586. Ответ 1б говорит о том, что на своем месте стоит цифра 1 или 5. Теперь следует третий ход 1658, и ответ 1к показывает, что в задуманном числе на втором месте стоит 5, а цифр 1, 6, 8 в нем нет. Ходом 2570 постараемся выяснить наличие цифр 2, 7 и 0. Ответ 1б весьма удачен — этих цифр в искомом числе нет. Итак, ясно, что задуманное число состоит из цифр 3, 4, 5, 9, причем на втором месте — 5. Сделаем следующий ход 4539. Ответ 1б 3к означает, что задумано одно из чисел — 3594 или 9543. Если первая цифра 3, то 9 может быть только третьей, а если первая 9, то 3 — толь-

ко четвертой. Ход 3594 и ответ 46 привел нас к цели; ответ 16 3к означал бы, что задумано число 9543, в этом случае партия продлилась бы на ход дольше.

Чем отличаются «быки и коровы» от мастермайнда? В комплекте мастермайнда роль цифр выполняют колышки шести цветов (красные, желтые, синие, зеленые, белые, черные), они вставляются в отверстия доски, которая выглядит примерно так, как показано на рис. 1. Задуманный набор кодовых колышков — цифр (вверху доски) шифровальщик загораживает специальными воротами, и он не виден расшифровщику. Для каждого хода также предусмотрены четыре отверстия, а еще четыре отверстия, размером поменьше, расположены слева — для ответа на него. Ход состоит в том, что отгадчик вставляет в отверстия четыре

	<div> <div>К С Б Ж</div> </div>
<div> <div>Б Ч</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>З Ч С Ж</div> </div>
<div> <div>Ч Б</div> <div>Б О</div> </div>	<div> <div>С З К Ж</div> </div>
<div> <div>Б Б</div> <div>Ч Ч</div> </div>	<div> <div>Ж С Б К</div> </div>
<div> <div>Ч Ч</div> <div>Ч Ч</div> </div>	<div> <div>К С Б Ж</div> </div>
<div> <div>О О</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>О О О О</div> </div>
<div> <div>О О</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>О О О О</div> </div>
<div> <div>О О</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>О О О О</div> </div>
<div> <div>О О</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>О О О О</div> </div>
<div> <div>Ч Б</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>С С К К</div> </div>
<div> <div>О О</div> <div>О О</div> </div>	<div> <div>О О О О</div> </div>

Р и с. 1



цветных колышка, а загадчик в ответ выставляет маленькие ключевые колышки двух цветов (черные и белые) в отверстие слева от хода (в любом порядке). Черные колышки выполняют роль «быков», а белые «коров». Если угаданы не все цвета, то некоторые отверстия остаются пустыми.

В примере на рис. 1 избран шифр *ксбж*. При первом ходе *зсж* произошло одно полное совпадение (ж) и один цвет (с) оказался не на своем месте. Таким образом, ответ *бч* (по-старому *лб лк*). На втором ходу ответ *чбб*, на третьем — *ббчч* (определены все четыре цвета), на четвертом — *чччч*. Игра закончена. Партия длилась четыре хода. Вообще, как мы видим, доска рассчитана на десять ходов (только совсем неопытные игроки не укладываются в эти рамки).

В переводе мастермайнда на язык «быков и коров» мы получаем, что задуманное число и числа-ходы разрешается образовывать только из шести цифр (шесть цветов колышков). Правда, цвета колышков в шифре и ходах могут повторяться (в отличие от «быков и коров», где все цифры разные). Так, на рис. 1 в девятой строке сделан ход *сскк*. Ответ на него *чб* (синий цвет на своем месте, красный не на своем). Оба цвета считаются только один раз. При шифре *ккбж* и том же ходе *сскк* красный цвет считался бы уже дважды, и ответ *бб*.

Сформулируем более точно, как дается ответ на каждый ход в мастермайнде. Сначала сравниваются цвета первых колышков шифра и хода. Если они совпадают, ставится черный кодовый колышек («бык»), а первые колышки шифра и хода исключаются из рассмотрения. Если они разные, сравниваются цвета первого колышка шифра и второго колышка хода. При совпадении ставится белый кодовый колышек («корова»), а первый колышек шифра и второй хода исключаются из рассмотрения. Если цвета разные, сравниваются цвета первого колышка шифра и третьего колышка хода и т. д. Когда первый колышек шифра будет исключен из рассмотрения (либо сам по себе, либо при одном из совпадений цветов — вместе с соответствующим колышком хода), точно так же последовательно сравнивается цвет второго колышка шифра с цветами колышков хода, а затем аналогично третий и четвертый колышки шифра. Очевидно, для шифра и ходов на рис. 1 наша процедура даст те же ответы.

Хотя описание занимает много места, на самом деле ответ формулируется за несколько секунд.

Мастермайнд отличается внешней привлекательностью — красивая доска, разноцветные колышки, ворота и т. д. Однако у «быков и коров» другое преимущество — для игры не нужно ничего, кроме бумаги и карандаша. Впрочем, и в наших магазинах появился в продаже комплект мастермайнда под названием «Мыслитель», так что теперь есть выбор...

Ниже мы упомянем о некоторых компьютерных достижениях в рассматриваемых играх. При составлении машинной программы для мастермайнда различные цвета колышков нужно прежде всего закодировать числами, то есть так или иначе мы вынуждены прибегнуть к цифровому языку «быков и коров».

Для отгадывания числа в «быках и коровах» или шифра в мастермайнде партнер должен как бы придумать тест для разгадывания числа или шифра. Таким образом, обе наши игры относятся к разряду тестовых.

Загадывая число в «быках и коровах», его первую цифру можно выбрать десятью способами, вторую — девятью (одна цифра занята), третью — восемью, наконец, четвертую — семью, всего имеем  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$  различных чисел. В мастермайнде на любом месте может стоять колышек любого цвета (из шести возможных), то есть всего  $6^4 = 1296$  вариантов.

Итак, в «быках и коровах» имеется 5040 различных чисел, которые можно загадывать и которыми можно ходить. А сколько существует различных ответов? Все они указаны во втором столбце табл. 2, их 14 (очевидно, ответ 3б 1к невозможен). Горизонтальной чертой в таблице разделены случаи, в которых обнаружены все четыре цифры, три цифры, две, одна и ни одной. В третьем столбце указано количество чисел, которые могут дать соответствующий ответ на первом ходу. Самый приятный ответ, конечно, 4б, сразу заканчивающий игру. Как мы видим, наибольшее разнообразие возможных чисел остается при ответе 1к — 1440.

Разумеется, результат игры, то есть количество ходов, за которое отгадывается задуманное число, в какой-то степени зависит от случая. Но многое определяется и искусством играющих. Здесь возникает вопрос: что понимать под мастерством игры в «быки и коровы»? Ведь даже начинающий игрок уже первым ходом может случайно отгадать задуманное число, но это еще не говорит о его умении.

Предположим, игроки А и Б сыграли матч из трех партий. Игрок А во всех трех партиях отгадал число партнера за 5 ходов. Игрок Б в двух партиях отгадал число за 4 хода,

а в одной за 9. Кто играет лучше? Игрок Б выиграл матч со счетом 2:1, но ведь общее число ходов у него больше. Если, скажем, в шахматах важна сама победа независимо от продолжительности партии, то в «быках и коровах» именно скорость отгадывания, количество затраченных ходов собственно и составляют результат игры.

Рассмотрим два наиболее интересных подхода к оценке силы игры в «быки и коровы». Обозначим через  $l_i$  число ходов, за которое данный игрок отгадывает число с номером  $i$  ( $i$  пробегает значения от 1 до 5040). Введем две характеристики его силы игры в «быки и коровы»:

$$l_{\text{ср}} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_{5040}}{5040}, \quad l_{\text{макс}} = \max(l_1, l_2, \dots, l_{5040}),$$

Т а б л и ц а 2

1	46	1
2	26 2к	6
3	16 3к	8
4	4к	9
5	36	24
6	26 1к	72
7	16 2к	216
8	3к	264
9	26	180
10	16 1к	720
11	2к	1260
12	16	480
13	1к	1440
14	Об Ок	360

где  $l_{\text{ср}}$  — среднее число ходов, за которое игрок отгадывает число, а  $l_{\text{макс}}$  — число ходов, гарантирующее ему раскрытие шифра. Любое число отгадывается им самое большее за  $l_{\text{макс}}$  ходов. Каждая из этих двух характеристик, по желанию, может служить для оценки силы. Очевидно, величины  $l_{\text{ср}}$  и  $l_{\text{макс}}$  точно так же определяются и для мастермайнда, только в формулах будет фигурировать другое число — 1296.

В игре людей всегда легко разобраться, кто сильнее. Другое дело, когда речь идет об ЭВМ. Для произвольной стратегии игры, сформулированной в виде некоторого алгоритма, можно вычислить числа  $l_{\text{ср}}$  и  $l_{\text{макс}}$  и, значит, в

зависимости от критерия определить, какая программа для ЭВМ сильнее.

Стоит заметить, что игры, о которых идет речь, представляют собой весьма интересный объект для исследования на компьютере. Достаточно сказать, что в написании программы для «быков и коров» участвовал один из крупнейших в мире специалистов в области программирования американец Д. Кнут. В нашей стране ряд результатов в этой области был получен группой студентов кафедры кибернетики МИСиС под руководством доцента М. Гендлера.

Основная задача, привлекающая математиков и программистов, состоит в нахождении оптимального алгоритма, то есть такой стратегии игры, при которой число  $l_{\text{ср}}$  или соответственно  $l_{\text{макс}}$  принимает наименьшее значение. Если говорить об  $l_{\text{ср}}$ , то здесь полной ясности пока нет. Найденны стратегии, которые для мастермайнда дают значение  $l_{\text{ср}}$  чуть меньше 4, а для «быков и коров» — чуть больше 5, но вопрос об оптимальных алгоритмах остается открытым.

Что же касается числа  $l_{\text{макс}}$ , представляющего больший интерес, то проблема полностью решена. Для мастермайнда построен наилучший алгоритм игры, при котором любое число шифровальщика разгадывается на позднее пятого хода, и доказано, что для любого другого алгоритма (стратегии) найдется хотя бы одно число, на разгадку которого уйдет не меньше пяти ходов. Таким образом,  $l_{\text{макс}} = 5$ .

Для «быков и коров» несколько лет назад студентами МИСиС была разработана стратегия, гарантирующая отгадывание любого числа за семь ходов, и было установлено, что  $l_{\text{макс}} \geq 6$ . Но сомкнуть эти границы никак не удавалось. И вот совсем недавно при помощи весьма хитроумных комбинаторных рассуждений и тонкого использования машинных возможностей они определили, что  $l_{\text{макс}} = 7$ . Иначе говоря, построен алгоритм игры в «быки и коровы», позволяющий найти любое загаданное число за семь ходов, и доказано, что шестиходовой стратегии не существует.

Кстати, в приведенном в самом начале примере задуманное число было отгадано именно за семь ходов (хотя пример носил учебный характер и не ставилась цель играть оптимально).

Конечно, нас не должен удивлять тот факт, что для «быков и коров» числа  $l_{\text{ср}}$  и  $l_{\text{макс}}$  больше, чем для мастермайнда, — ведь в первом случае возможных вариантов шифра почти в 4 раза больше. Впрочем, известен усложненный вариант игры — супермастермайнд, в котором вместо четы-

рех отверстий используются пять и вместо шести цветов кодовых колышков — восемь.

Рассмотрим теперь несколько партий (точнее было бы сказать, пользуясь шахматной терминологией, — окончаний или этюдов), представленных в виде задач. Разобрав их, вы получите неплохую иллюстрацию тонкостей игры в «быки и коровы». Будут изучены все ситуации, когда ответ противника на наш первый ход — для определенности число 1234 — совпадет с одним из первых пяти в табл. 2. При ответе 46 партия продолжается всего один ход, а для каждого из четырех других случаев мы укажем способ игры, гарантирующий отгадывание задуманного числа за наименьшее количество ходов. Другими словами, за столько ходов мы точно отгадаем число противника, каким бы оно ни было,

Таблица 3

После 1-го хода 1234 и ответа 26 2к	2-й ход 1356	3-й ход 3256
1324	26	—
1432	16 1к	2к
1243	16 1к	16 1к
4231	2к	16 1к
3214	2к	26
2134	2к	2к

а при меньшем количестве нам всегда может не повезти — шифр не будет раскрыт.

**Партия 1.** На первый ход 1234 противник ответил 26 2к. Какое наименьшее количество ходов гарантирует отгадывание задуманного числа?

Легко проверить, что только шесть задуманных чисел в ответ на первый ход 1234 могут дать ответ 26 2к (табл. 3, первый столбец), и при любом втором ходе по крайней мере три из них дадут одинаковый ответ.

Вторым ходом сыграем 1356 (вместо цифр 5 и 6 можно было бы взять и другие, отличные от 1, 2, 3, 4). Все возможные ответы находятся во втором столбце таблицы. Ответ 26 сразу определяет задуманное число — 1324 (у других чисел иной ответ), ответ 16 1к оставляет два варианта, а ответ 2к — три. Третий ход 3256 (с учетом второго) вносит полную ясность — все пять чисел-кандидатов дают разную пару ответов. Прочерк в табл. 3 (и всех последующих таблицах) означает, что при соответствующем ходе «реак-

ция» на него данного числа нас уже не интересует. Таким образом, на четвертом ходу гарантирован ответ 4б и партия длится не более четырех ходов.

Типичная и совершенно не очевидная ошибка, которую допускают многие, кто решает эту задачу, состоит в использовании для игры чисел, содержащих только цифры 1, 2, 3, 4. Логика здесь простая — раз все цифры известны, то зачем подключать новые? Однако при таком подходе задуманное число с гарантией определяется на пятом ходу (ответ 4 б).

**Партия 2.** Тот же вопрос, что и в первой партии, но ответ на первый ход 1б 3к.

На первый ход 1234 восемь чисел могут дать ответ 1б 3к (табл. 4). При любом втором ходе хотя бы одна четверка

Таблица 4

После 1-го хода 1234 и ответа 1б 3к	2-й ход 1256	3-й ход		4-й ход 1564
		1563	2564	
1423	1б 1к	2б	—	—
3241	1б 1к	2к	—	—
1342	1б 1к	1б 1к	—	1б 1к
4213	1б 1к	1б 1к	—	2к
2314	2к	—	2б	—
4132	2к	—	2к	—
3124	2к	—	1б 1к	1б 1к
2431	2к	—	1б 1к	2к

чисел дает один и тот же ответ, и для выяснения ситуации понадобятся еще два хода. При втором ходе 1256 числа разделяются на две группы; для чисел первой группы (ответ 1б 1к) сделаем третий ход 1563, а для чисел второй группы (ответ 2к) — ход 2564. После этого остаются две пары чисел в каждой группе, требующие еще одного хода, и четвертый ход 1564 полностью проясняет картину. Таким образом, вторая партия длится не более пяти ходов.

**Партия 3.** Тот же вопрос, что и в предыдущих двух партиях, но при ответе на первый ход 4к.

В ответ на первый ход 1234 девять чисел могут дать ответ 4к (табл. 5). Второй ход 3102 расшифровывает два числа, а остальные семь делит на две группы, в одной из которых решает ход 4153, а в другой — 2456. Четвертый ход завершит партию (будет получен ответ 4б).

**Партия 4.** Тот же вопрос, что и в предыдущих трех партиях, но при ответе на первый ход 3б.



Ответ 3б на первый ход 1234 дают 24 числа. Действительно, три цифры можно зафиксировать на своих местах четырьмя способами, а для четвертой имеется шесть возможностей: 0, 5, 6, 7, 8, 9, то есть всего  $4 \times 6 = 24$  варианта. Любопытно, что найти задуманное число среди 24 чисел в данной партии удастся за столько же ходов, за сколько восемь чисел во второй партии.

Рассмотрим табл. 6 а. В ее первых четырех строках  $\alpha$  обозначает любую из цифр 8, 9, 0. Таким образом, здесь представлены все 24 возможности. Сделаем второй ход 1567. Ответ 0б 0к оставляет выбор из трех неразгаданных чисел, для которых годится третий ход 8934 (табл. 6 б). При ответе 2б можно сыграть 1506 (табл. 6 в), а при ответе 1к — 5634 (табл. 6 г).

Т а б л и ц а 5

После 1-го хода 1234 и ответа 4к	2-й ход 3102	3-й ход	
		4153	2456
3142	3б	—	—
3412	2б 1к	—	—
2143	1б 2к	2б 1к	—
3421	1б 2к	3к	—
4123	1б 2к	3б	—
4312	1б 2к	1б 2к	—
2341	3к	—	1б 1к
2413	3к	—	2б
4321	3к	—	2к

Для девяти чисел с ответом 1б в табл. 6 а составим табл. 6 д (вновь  $\alpha$  может принимать одно из трех значений — 8, 9, 0). Третий ход 3564 разделяет их на три равные группы, четвертым ходом числа идентифицируются, и пятый ход завершит игру (ответ 4б). У нас осталось еще шесть чисел, расположенных в нижних строках табл. 6 а, выпишем их отдельно (табл. 6 е). И с этой шестеркой удастся разобраться за два дополнительных хода. Итак, вновь партия длится не более пяти ходов.

Результаты всех рассмотренных партий собраны в табл. 7. Строгое доказательство того, что в каждом случае меньшим количеством ходов не обойтись, мы опускаем.

Разобранные примеры показывают, что искусная игра в «быки и коровы» требует тонкого математического расчета.

Таблица 6, б

Ответ на 2-й ход 06 0к	3-й ход 8934
8234 9234 0234	36 26 1к 26

Таблица 6, а

После 1-го хода 1234 и ответа 3б	2-й ход 1567
а234 1а34 12а4 123а	06 0к 16 16 16
1534 1264 1237	26 26 26
5234 6234 7234	1к 1к 1к
1254 1274 1235 1634 1236 1734	16 1к 16 1к 16 1к 16 1к 16 1к 16 1к

Таблица 6, в

Ответ на 2-й ход 2б	3-й ход 1506
1534 1264 1237	26 16 1к 16

Таблица 6, г

Ответ на 2-й ход 1к	3-й ход 5634
5234 6234 7234	36 26 1к 26

Таблица 6, д

Ответ на 2-й ход 1б	3-й ход 3564	4-й ход	
		5896	5698
1834 1934 1034	16 1к 16 1к 16 1к	16 1к 06 0к	— — —
1284 1294 1204	16 16 16	1к 16 06 0к	— — —
1238 1239 1230	1к 1к 1к	— — —	16 1к 06 0к

Т а б л и ц а 6, е

Ответ на 2-й ход 16 1к	3-й ход 0254	4-й ход 0689
1254	36	—
1274	26	—
1235	16 1к	—
1634	16	16
1236	16	1к
1734	16	06 0к

Т а б л и ц а 7

Ответ на 1-й ход	Количество возможных чисел	Наибольшая длина партии
26 2к	6	4
16 3к	8	5
4к	9	4
36	24	5

## Отгадать слово

Игра «отгадать слово» впервые появилась на свет в конце 60-х годов, почти одновременно с «быками и коровами», и до сих пор пользуется большой популярностью, в нее охотно играют школьники, студенты, научные сотрудники.

Действительно, как мы сейчас увидим, эта увлекательная игра значительно богаче и глубже большинства известных словесных игр, в том числе «балды». Для успеха в ней важен не только большой запас слов, лексикон играющих, но и умение логически рассуждать. Игра «отгадать слово» представляет собой как бы смесь словесной игры с математической.

Играют двое. Один игрок задумывает слово из пяти букв, а другой должен его отгадать. С этой целью он называет одно за другим слова, состоящие из произвольного числа букв, на каждое из которых партнер в ответ сообщает число, означающее, сколько раз буквы задуманного слова входят в названное; при этом каждая буква задуманного слова учитывается в ответе столько раз, сколько она содержится в названном.

Приведем пример. Пусть наш воображаемый партнер задумал слово КОЛБА, а мы своим ходом назвали слово ОБОРОНА. Тогда он должен ответить числом 5. В самом деле, буквы К и Л задуманного слова не входят в названное (или иначе — входят 0 раз), буква О входит 3 раза, буквы А и Б — по 1 разу. Итого:  $0+0+3+1+1=5$ .

Называя некоторое слово и получая на него ответ, мы всякий раз делаем определенные выводы относительно задуманного слова. Так, ответ противника 5 на слово ОБОРОНА означает, что задуманное слово, пока не известное нам, обязательно содержит букву О (в противном случае максимальный ответ был бы равен 4), а также две буквы из четырех Б, Р, Н, А. Рассмотрим другие возможности. Ответ 0 свидетельствовал бы о том, что в отгадываемом слове нет ни одной из пяти букв, входящих в слово ОБОРОНА; ответ 1 или 2 — что в нем содержится соответственно одна или две буквы из четырех — Б, Р, Н, А и нет буквы О; ответ 3 — что в нем есть О и нет Б, Р, Н, А или, наоборот, есть три из этих четырех букв и нет О; наконец, при ответе 4 делаем вывод, что задуманное слово содержит букву О и одну букву из четырех остальных или все эти четыре буквы вместе, но тогда отсутствует О.

Извлекая на каждом ходу ту или иную информацию о задуманном слове противника, мы делаем следующий ход и т. д., пока не получим ответ «отгадал».

Естественно, слова задумывают оба игрока, причем они стараются выбрать их потруднее для отгадывания. Побеждает тот, кто отгадывает слово противника, то есть получает ответ «отгадал», за меньшее число ходов.

Как и в большинстве игр в слова, и задуманное слово, и «ходы» должны быть существительными, нарицательными, в единственном числе. Чтобы избежать лишних споров, лучше всего сразу договориться о том, какие разрешается использовать словари.

Очевидно, игра «отгадать слово», как и «быки и коровы», является тестовой. Выбор слов-ходов, приводящий к цели, по существу, есть тест для отгадывания задуманного противником слова (шифра), и задача игрока состоит в том, чтобы построить тест как можно короче. Конечно, игру легко обобщить, разрешая задумывать слова другой длины, однако длина пять является оптимальной (подобно четырем цифрам в «быках и коровах» — разнообразие пятибуквенных слов очень велико, и отгадывать их совсем не просто).

Делать ходы (называть тестовые слова) не обязательно

по очереди, важно лишь общее число ходов. При большом количестве партий в каждой из них можно учитывать не только то, кто раньше отгадал слово, но и на сколько ходов быстрее. Для того чтобы лучше ознакомиться с игрой, почувствовать ее тонкости, разберем несколько партий, то есть, выражаясь шахматным языком, прокомментируем их. Всюду предполагается, что слово задумывает наш партнер, и нам надо его отгадать. Рядом с называемыми словами указываются ответы противника на них.

### *Партия 1*

#### 1. ПЕРЕВАЛ 2

В начале игры, по-видимому, имеет смысл ходить словами, в которых побольше гласных — гласных в алфавите меньше, чем согласных, и, значит, есть шансы быстрее отгадать их. Для выявления одной конкретной буквы лучше всего сыграть словом с бóльшим числом ее вхождений. Например, на слово **ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ** ответ, меньший семи, означает, что буквы **О** в задуманном слове нет, а ответ 7 или больше, что она почти наверняка в нем есть. Конечно, вопрос о букве **О** решает и ход **ОКО** (или **БОБ**), но он дает нам намного меньше информации об остальных буквах.

В данной партии первый ход позволяет сделать следующий вывод: либо в задуманном слове есть буква **Е** и нет букв **П, Р, В, А, Л**, либо есть две буквы из этой пятерки, но нет **Е**. Цель второго хода — разобраться в ситуации.

#### 2. СВАЛКА 0

Ответ **0** всегда приятен. Он дает возможность выбросить из рассмотрения целый ряд букв. В данном случае после второго хода мы видим, что в задуманном слове нет букв **В, А, Л** (и, конечно, **С** и **К**), и, значит, с учетом первого хода, оно содержит либо **Е**, либо одновременно **П** и **Р**.

#### 3. ПОП 0

Итак, второй вариант отпадает, буквы **П**, а вместе с ней и **Р** в слове нет, а есть **Е**.

#### 4. ФАКУЛЬТАТИВ 4

Так как мы уже знаем, что букв **А, К, Л, В** в слове нет, то последний ход и ответ на него означают, что факти-

чески нам надо проанализировать следующую ситуацию с фиктивным словом-ходом: ФУБТТИ 4.

Предположим, что в задуманном слове нет Т, тогда оно содержит все четыре оставшиеся буквы, то есть Ф, У, Б, И. Поскольку буква Е уже найдена раньше, искомое слово должно состоять из букв Ф, У, Б, И, Е. Но из этих букв собрать слово невозможно (это уже не логический анализ, а чисто словесный). Таким образом, в задуманном слове обязательно присутствует буква Т, кроме того, в нем есть Е и две буквы из четырех Ф, У, Б, И.

Очередными ходами мы могли бы определить две эти буквы и недостающую пятую. Однако сначала попробуем извлечь побольше информации, не делая ходов, а только основываясь на полученных ответах (самое тонкое место партии!). Две буквы из четырех можно выбрать шестью способами,  $C_4^2=6$ . Добавляя к каждой паре уже известные буквы Е и Т, получаем шесть возможных комбинаций: 1) Ф, У, Е, Т; 2) Ф, Б, Е, Т; 3) Ф, И, Е, Т; 4) У, Б, Е, Т; 5) У, И, Е, Т; 6) Б, И, Е, Т.

Внимательный анализ показывает, что последние три комбинации при любом добавлении пятой буквы не могут образовать никакого слова. Что же касается первых трех комбинаций, то, добавляя к первой из них букву Б, ко второй Н или к третьей Ш, получаем три возможных слова: БУФЕТ, НЕФТЬ, ФЕТИШ. Конечно, анализ требует большого перебора вариантов, но зато мы не сделали ни одного лишнего хода!

Итак, нам осталось выяснить, какая из трех букв — Б, Н, Ш — входит в задуманное слово. Попытаемся справиться с этой задачей за один ход. Для этого используем такой прием: подберем слово, в котором одна из этих букв не содержится вовсе, а две другие содержатся, но в разном количестве. Следующий ход удовлетворяет этим требованиям.

## 5. БАНАН 1

Ответ показывает, что в слове есть буква Б, и следующий ход заканчивает игру.

## 6. БУФЕТ Отгадал

При ответе на пятом ходу 0 задуманным оказалось бы слово ФЕТИШ, а при ответе 2 — НЕФТЬ. Кстати, неточным был бы, например, пятый ход СНОБ, так как при ответе 1



мы не смогли бы решить, какая из двух букв, Н или Б, входит в задуманное слово.

### Партия 2

1. КАРЕЛ 3
2. КРЕОЛ 2

Поскольку четыре буквы у этих двух слов общие, а ответы разные, делаем вывод, что буква А в искомом слове есть, а буквы О нет. Кроме того, из ответа на второй ход следует, что из четырех букв К, Р, Е, Л в искомом слове содержатся две. Шесть возможных вариантов запишем следующим образом:

- |                       |                       |     |
|-----------------------|-----------------------|-----|
| 1) А, К, Р (Е, Л, О); | 4) А, Р, Е (К, Л, О); |     |
| 2) А, К, Е (Р, Л, О); | 5) А, Р, Л (К, Е, О); | (1) |
| 3) А, К, Л (Р, Е, О); | 6) А, Е, Л (К, Р, О). |     |

Здесь перед скобками записаны буквы, которые искомое слово может содержать, а внутри скобок буквы, которых при этом в слове точно нет.

### 3. БЕКОН 3

Три буквы из четырех (буквы О в слове нет) можно выбрать четырьмя способами ( $C_4^3=4$ ):

- |                    |     |
|--------------------|-----|
| 1) Б, Е, К (О, Н); |     |
| 2) Б, Е, Н (К, О); |     |
| 3) Б, К, Н (Е, О); | (2) |
| 4) Е, К, Н (Б, О). |     |

Комбинируя шесть вариантов (1) с четырьмя вариантами (2), получаем  $6 \times 4 = 24$  комбинации. Однако не все они «совместны». Так, несовместными являются первые возможности в (1) и (2). С одной стороны, буква Е содержится в искомом слове — первый вариант в (2), а с другой — нет — первый вариант в (1). Анализ показывает, что из 24 вариантов совместными являются только шесть:

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) К, А, Р, Б, Н (Е, Л, О); | 4) К, А, Л, Б, Н (Р, Е, О); |
| 2) К, А, Е, Б (Р, Л, О, Н); | 5) А, Р, Е, Б, Н (К, Л, О); |
| 3) К, А, Е, Н (Б, Р, Л, О); | 6) А, Е, Л, Б, Н (К, Р, О). |

### 4. АБРИС 1

Учитывая, что в искомом слове есть А, находим, что в нем нет Б, и, значит, из последней подборки, содержащей шесть слов, остается только третья возможность — искомое слово содержит четыре буквы К, А, Е, Н.

## 5. БРОШЬ 1

Букв Б, Р, О в задуманном слове нет, и мы получаем, что в нем есть Ш или Ь. Итак, имеем две возможные пятерки букв: К, А, Е, Н, Ь или К, А, Е, Н, Ш. Из первой пятерки слова образовать нельзя, а из второй можно — КАШНЕ. Следующий ход завершает партию.

## 6. КАШНЕ Отгадал

Заметим, что идея разыграть вторую партию возникла в связи со следующим упражнением, приведенным однажды в журнале «Наука и жизнь».

Найти слово, которое состоит из пяти разных букв, содержащихся в указанном количестве в таких шести словах:

АБРИС 1  
БРОШЬ 1  
БАРИН 2  
КРЕОЛ 2  
БЕКОН 3  
КАРЕЛ 3

Вот решение упражнения, приведенное в журнале. Слова БАРИН и АБРИС имеют четыре общие буквы, при этом БАРИН содержит две буквы задуманного слова, а АБРИС — одну. Из этого следует, что Н входит в него, а С — нет. Аналогично, сравнивая слова КАРЕЛ и КРЕОЛ, находим, что А входит в задуманное слово, а О — нет. Из слова АБРИС по условию в искомое слово входит ровно одна буква. Поскольку, как мы установили, оно содержит А, то букв Б, Р, И, С в нем нет. Так как в слове нет букв Б, Р, О, из слова БЕКОН в него обязательно входят Е, К, Н, а из слова БРОШЬ — Ш или Ь. Итак, пятью буквами задуманного слова являются либо Н, А, Е, К, Ш, либо Н, А, Е, К, Ь. Из второго набора слова не получается, а первый дает слово КАШНЕ, которое и требовалось найти.

Во второй партии мы специально играли теми же словами, что и в данном упражнении. Партия, надо сказать, получилась довольно «напряженной», но зато мы обошлись без слова БАРИН, то есть сэкономили целый ход, что для этой игры не так мало. Наш пятый ход был, вообще говоря, неточен. Действительно, при ответе О выяснилось бы, что в слове нет ни Ш, ни Ь, однако оно может содержать П и Д (ПЕНКА, ДЕКАН). Легко придумать слово, расшифровывающее сразу три буквы — Ш, П, Д, например ДЕДУШКА.

### Партия 3

#### 1. ПЕРЕВОД 6

В искомом слове точно есть буква Е (без нее максимальный ответ 5), а также четыре буквы из пяти П, Р, В, О, Д. Итак, имеем пять возможностей: 1) Е, П, Р, В, О; 2) Е, П, Р, В, Д; 3) Е, П, Р, О, Д; 4) Е, П, В, О, Д; 5) Е, Р, В, О, Д. Однако слово удастся составить только из последней комбинации букв — ВЕДРО. Фактически партия продолжалась всего один ход!

#### 2. ВЕДРО Отгадал

Стоит отметить, что, если пять букв уже найдены, это еще не означает окончания партии. Ведь не исключено, что из этой пятерки букв можно составить не одно слово, а несколько. Слова, образованные из одних и тех же букв, называются анаграммами, а набор таких слов — блоком анаграмм. Если, определив пять букв, мы «натолкнулись» на такой блок, придется сделать дополнительные ходы, чтобы выяснить, какое именно слово задумано.

### Партия 4

#### 1. ТАПОК 5

#### 2. КАПОТ 5

#### 3. ПОКАТ 5

#### 4. ТОПКА Отгадал

В последнем примере, который можно считать эндшпилем некоторой более длинной партии, определив на первом же ходу все пять букв задуманного слова, мы затем сделали еще три, чтобы найти само слово, то есть дела сложились не самым лучшим образом.

Может показаться, что загадывать слова-анаграммы выгодно, поскольку даже при отгадывании всех букв нашего слова дальнейшие действия партнеру придется вести наобум — от него уже ничего не зависит. Но надо учесть, что, чем больше слов в блоке анаграмм, тем меньше используется редких букв и, значит, тем легче найти пятерку букв. Блок пятибуквенных анаграмм (нас интересуют сейчас только такие) может содержать от двух слов до шести. Вот уникальный набор анаграмм, состоящий из шести слов (единственный в русском языке): АВТОР, ТОВАР, ТАВРО, ОТВАР, РВОТА, ВТОРА. Подробнее об анаграммах мы поговорим в следующей главе.

В игре «отгадать слово» возникают интересные и оригинальные задачи со словами. Рассмотрим десять таких задач, решение большинства которых нам не известно.

По правилам игры ходы представляют собой слова русского языка (как уже говорилось, существительные, нарицательные, в единственном числе). А что изменится, если снять это ограничение, то есть разрешить делать ходы, так сказать, абстрактными словами — состоящими из произвольного набора букв? Может показаться, что такое изменение правил не имеет особого значения, однако из решения следующей задачи следует, что игра при этом «вырождается».

**Задача 1.** За сколько ходов можно угадать слово (или пять букв анаграммы), если разрешается ходить «абстрактными» словами?

Эта задача носит чисто математический характер, и ответ на нее довольно неожиданный — требуется всего один ход! Он может быть, например, таким:

$\overbrace{AB \dots \dots \dots B}^{1 \text{ раз } 10 \text{ раз}} \underbrace{B \dots \dots \dots V}_{10^2 \text{ раз}} \dots \underbrace{Y \dots \dots \dots Y}_{10^{32} \text{ раз}}$

Данное «слово» содержит все 33 буквы алфавита, причем букву А — 1 раз ( $10^0$ ), букву Б — 10 раз ( $10^1$ ) и т. д., букву Я —  $10^{32}$  раз. Ответ на ход, сделанный таким словом, позволяет сразу определить пять букв. Действительно, если в задуманном слове есть буква А, то последней цифрой ответа будет 1, если же А в нем нет, то на конце стоит 0. Если слово содержит букву Б, то на втором месте справа (количество десятков) стоит 1, в противном случае — 0. Если слово содержит В, то на третьем месте справа (количество сотен) стоит 1, в противном случае — 0 и т. д. Таким образом, число, которое мы получим в ответ на наш ход, состоит из многих нулей (28, если в слове есть буква Я) и ровно пяти единиц, которые и определяют пять нужных букв.

Приведем пример. Пусть в ответ на наше абстрактное слово получено число 100 101 011. Это значит, что в задуманном числе имеются буквы: А (1 на правом конце), Б (1 на втором месте справа), Г (1 на четвертом месте справа), Е (1 на шестом месте справа) и З (1 на девятом месте справа). Итак, задумано слово ЗАБЕГ.

«Волшебное» слово имеет астрономическую длину, но в данной задаче важно лишь само существование универсального хода. Проведем параллель между этой словесной игрой и уже изученной нами числовой игрой «быки и коровы». В

обеих тестовых играх требуется отгадать, что задумал противник — в одном случае какое число, в другом — какое слово; при этом на каждом ходу извлекается некоторая информация о задуманном числе или слове. В каждой игре существуют свои ограничения, которые и придают ей творческий характер. В «быках и коровах» ходами служат произвольные наборы из четырех цифр, а в «отгадать слово» — наборы букв произвольной длины, но обязательно слова русского языка. Конечно, «быки и коровы» — чисто логическая игра, а «отгадать слово» — все-таки игра словесная. Можно сделать гибрид из этих двух игр, используя как для шифра, так и для ходов слова, содержащие одинаковое число разных букв, а ответы давать в виде «быков и коров». Но кажется, такой гибрид менее интересен, чем каждая из двух игр в отдельности.

Вернемся к обычному варианту игры «отгадать слово». Часто в процессе отгадывания возникает необходимость определить, содержится ли в слове та или иная конкретная буква. В связи с этим любопытна следующая задача.

**Задача 2.** Для каких букв алфавита можно определить за один ход, содержатся они в задуманном слове или нет?

Здесь предполагается, что никакой информацией о задуманном слове мы пока не располагаем. И тем не менее почти две трети алфавита — 20 букв из 33 — требуют всего одного хода для выяснения вопроса об их наличии (табл. 8). Идея очень проста — «подозрительная» буква должна выделяться числом вхождений в тестовое слово. Проще всего использовать трехбуквенные слова с двумя одинаковыми буквами. Получая ответ на такой ход, мы сразу определяем, есть ли две эти буквы в задуманном слове или нет. Пусть сделан первый ход ДЕД. Если ответ 0, то в задуманном слове нет ни Д, ни Е. Если ответ 1, то есть Е и нет Д, если ответ 2, то есть Д и нет Е, наконец, если ответ 3, то есть и Д, и Е.

Всего трехбуквенными словами такого вида удастся определить 10 букв. Еще для десяти используются слова большей длины. Девять искомых тестовых слов устроены так: они содержат подозреваемую букву и еще две пары других букв. В результате нечетный ответ (1, 3 или 5) свидетельствует о наличии данной буквы в задуманном слове, а четный (0, 2 или 4) — об ее отсутствии. Для отгадывания буквы А тот же прием потребовал семибуквенного слова (в нем три пары посторонних букв). Можно использовать и более короткое пяти-

буквенное слово АТАКА. Здесь идея отгадывания несколько иная — ответ 3 и больше говорит о том, что буква А есть, а меньший ответ, что нет.

Конечно, пятибуквенное слово, которое служит для разгадки одной из своих букв, может не помочь для определения других его букв. Так, если ответом на ход ДОВОД служит число 2, то мы знаем, что в задуманном слове нет В, а есть Д или О, но какая именно из этих букв — не известно. Другое дело, если бы какое-нибудь пятибуквенное слово содержало только две буквы (одну — 2 раза, а другую — 3), тогда они определялись бы сразу, однако такого слова нам найти не удалось.

Даже если все буквы слова имеют разное число вхождений, оно тем не менее может оказаться не пригодным для

Таблица 8

А РОТАТОР	Р ТРАТА
Б БОБ	С КОКОС
В ДОВОД	Т ПОТОП
Г НАГАН	У ПУП
Д ДЕД	Ф ТОРФ, ТОР
Е ДЕД	Х ДОХОД
Е ЕЛКА, ЛАК	Ц ЦЕЛЬ, ЕЛЬ
Ж ЖАР, АР	Ч ЧЕСТЬ, СЕТЬ
З КАЗАК	Ш ШИШ
И МИМ	Щ ЩЕЛЬ, ЕЛЬ
Й РАЙ, АР	Ъ ВЪЕЗД, ЗЕВ
К ОКО	ДЕД
Л ШАЛАШ	Ы ДЫРА, ДАР
М МИМ	Ь КОНЬ, КОН
Н КОКОН	Э ЭРА, АР
О ОКО	Ю ЮБКА, БАК
П ПОП	Я ЯБЕДА, БЕДА

определения каждой из них. Так, слово БАОБАБ содержит три буквы в разном количестве, но при неудачном для нас ответе на него мы не сможем точно сказать, какая из его букв содержится в задуманном слове. Действительно, ответ 0 говорит о том, что в слове нет букв А, Б и О, ответ 1 — что в слове есть О, но нет А и Б, ответ 2 — что в слове есть А, но нет Б и О, однако ответ 3 не вносит полной ясности — из него следует, что либо в слове есть Б и нет А и О, либо, наоборот, нет Б и есть А и О. Цель может быть достигнута, если три буквы, которые мы хотим разгадать, содержатся в слове-



ходе в таких количествах: 1, 2, 4 или 2, 3, 4. Однако существуют ли такие слова в русском языке, нам тоже не известно.

**Задача 3.** Для каждой буквы алфавита ответить на следующий вопрос: за какое наименьшее число ходов можно точно определить, содержится ли эта буква в задуманном слове или нет?

Оказывается, что любую букву (исключая Ъ) можно найти не более чем за два хода! Необходимую пару слов для отгадывания 12 букв можно образовать так: одно слово составить из букв второго слова с добавлением искомой буквы. Одинаковые ответы на эти слова покажут, что в задуманном слове данной буквы нет, а разные, что есть. Например, одинаковые ответы на ходы РАЙ и АР означают, что буквы Й в задуманном слове нет, а разные (они могут отличаться только на 1), что есть. Всего данным приемом определяется 12 букв (табл. 8).

Для Ъ удалось найти только трехходовое решение. Интересно, что если буквы Е и Ё не различать, то и для Ъ достаточно двух слов — МОПЕД, ПОДЪЕМ.

Каждый читатель может составить свою собственную таблицу, позволяющую отгадывать буквы алфавита. Для букв, которые отгадываются только за два хода, можно поставить задачу нахождения такой пары слов (решающих вопрос о наличии букв), сумма чисел букв которых минимальна. На практике, конечно, редко стремятся найти какую-то одну определенную букву задуманного слова. В процессе игры возникают различные ситуации, и не стоит гнаться за одной буквой, а лучше попытаться извлечь больше информации о задуманном слове противника.

В третьей партии, сыграв словом из семи букв, мы сразу отгадали задуманное слово, хотя при этом пришлось провести определенный анализ. В следующем примере определить задуманное слово по семибуквенному ходу совсем легко.

#### 1. ПАРАПЕТ 7

Полученный ответ сразу дает нам пять букв: П, А, Р, Е, Т и вместе с ними слово ПАТЕР.

Теперь можно сформулировать такую интересную задачу.

**Задача 4.** Придумать как можно более длинное слово, которое на первом же ходу (при удачном для нас ответе противника) позволит отгадать задуманное слово.

Поскольку семибуквенное тестовое слово мы уже знаем, искать следует слова из восьми, девяти и более букв.

**Задача 5.** Придумать как можно более короткое слово, ко-

торое на первом же ходу (при удачном ответе противника) позволит отгадать задуманное слово.

Эта задача как бы противоположна задаче 4 и напоминает «балду». Действительно, сыграв на первом ходу коротким словом, мы должны отгадать три или четыре буквы, которые затем однозначно дополняются до задуманного слова.

Задачи 4 и 5 связаны с отгадыванием слова за один ход. Предположим теперь, что первым ходом отгаданы четыре его буквы. Пусть, например, партия начата ходом

### 1. АТЛЕТ 5

Ответ показывает, что в задуманном слове есть буквы А, Т, Л, Е. Осталось определить пятую букву. Разумеется, не очень эффективно использовать для этой цели нашу таблицу. Анализ показывает, что из 29 остальных букв алфавита вместе с четырьмя найденными слово могут образовывать только восемь: Б (БАЛЕТ), В (ВАЛЕТ, анаграмма ВЕТЛА), М (МЕТЛА), Н (ЛЕНТА), П (ЛЕПТА), Р (ТАЛЕР), У (АЛЕ-УТ), Ф (ЛАФЕТ). Возникает следующая задача.

*Задача 6.* Придумать такой первый ход, после которого четыре буквы задуманного слова определяются сразу, а для пятой остается как можно больше возможностей (может быть, восемь — это рекорд?).

В приведенном примере (тем более если возможностей больше восьми) не удастся определить одним ходом, какая из букв является искомой. В связи с этим получаем еще одну задачу.

*Задача 7.* Какое максимальное число букв можно распознать одним ходом, то есть определить, какая именно (ровно одна) из этих букв входит в задуманное слово?

Для решения этой задачи нужно найти такое слово, в которое одна из «подозрительных» букв не входит совсем, вторая входит 1 раз, третья 2, четвертая — 3 раза и т. д., как можно больше. В отличие от предыдущих задач предполагается, что четыре остальные буквы задуманного слова нам уже известны. Пусть, например, надо определить, какая из четырех букв У, Е, Н, О входит в задуманное слово. Тогда задачу решает слово ДЛИННОШЕЕЕ, в которое У не входит, О входит 1 раз, Н — 2 раза, Е — 3 раза. По ответу на это слово мы сразу определим недостающую пятую букву (зная, конечно, информацию о вхождении в задуманное слово букв Д, Л, И, Ш).

Буквы У, О, Н, Е в последнем примере выбраны не случайно. Предположим, что в игре сделан такой первый ход:

## 1. КАБАЛА 6

Из ответа следует, что задуманное слово содержит четыре буквы К, А, Б, Л. Какая же буква пятая? Анализ показывает, что найденные буквы можно дополнить до слова пятью способами: БУЛКА, КОЛБА (или БОКАЛ), БЕЛКА, БАЛЫК. Итак, надо выяснить, какая из букв У, О, Н, Е, Ы — пятая в искомом слове, и мы пришли к рассмотренному примеру. Если на второй ход ДЛИННОШЕЕЕ мы получим ответ 1, то искомой будет буква У или Ы (так как есть вхождение Л, то букв О, Н, Е в слове нет), и задумано слово БУЛКА или БАЛЫК. Сделав ход любым из них, мы определим по ответу искомое слово (хотя ответ «отгадал» можем получить только на следующем ходу). Если ответ на второй ход — 2, то получаем букву О, и еще один ход понадобится, чтобы разобраться с анаграммами (КОЛБА или БОКАЛ). При ответе 3 имеем букву Н и слово БЛАНК, наконец, при ответе 4 — букву Е и слово БЕЛКА.

В примере с первым ходом АТЛЕТ мы имели сразу 7 возможных пятых букв, и, по-видимому, их можно распознать не менее чем за три хода. В примере с первым ходом КАБАЛА у нас 5 возможных пятых букв, но первым же ходом мы почти полностью выяснили ситуацию — либо это одна из трех букв О, И, Е, либо одна из букв У, Ы. Возникает следующая задача.

**Задача 8.** Придумать партию, в которой на первом ходу отгадываются четыре буквы задуманного слова, при этом для пятой остается как можно больше возможностей, и все они распознаются на втором ходу (в задаче 6 это не обязательно).

В отличие от задачи 7 здесь требуется не просто распознать за один ход как можно больше букв, а сделать это так, чтобы соответствующий набор букв возник как бы в процессе игры — после первого хода.

Предположим теперь, что мы догадались, какое слово задумал противник, назовем его словом-гипотезой. Будем считать, что самим этим словом ходить нельзя. Тогда получаем еще одну задачу.

**Задача 9.** Для  $p = 2, 3, \dots$  придумать такое слово-гипотезу, для которого не существует стратегии, позволяющей убедиться в правильности гипотезы быстрее чем за  $p$  ходов.

Задача легко решается для значений  $p = 2, 3, 4, 5$ . Действительно, в этих случаях в качестве «гипотезы» можно взять анаграмму, порождающую блок из  $(p + 1)$ -го слова.

Например, анаграмма АВТОР, как мы знаем, с гарантией определяется только после пяти ходов, сделанных остальными пятью словами ее блока (состоящего из шести слов). При меньшем числе ходов мы еще не можем быть уверены, что задумано слово АВТОР. Для больших значений  $p$  блоки из  $(p+1)$ -й анаграммы не известны, и задача усложняется.

При желании можно придумать и другие задачи и упражнения для увлекательной игры «отгадать слово». По-видимому, многие из них вряд ли удастся решить без привлечения компьютера к словарю русского языка. Во всяком случае, про последнюю задачу это можно сказать с уверенностью.

**Задача 10.** Какое минимальное число ходов достаточно сделать, чтобы наверняка отгадать задуманное слово противника, каким бы оно ни было?

Опыт игры показывает, что при тонких и внимательных действиях задуманное слово удастся определить, как правило, за 5—7 ходов, но доказать этот факт мы не беремся.

## Морской бой

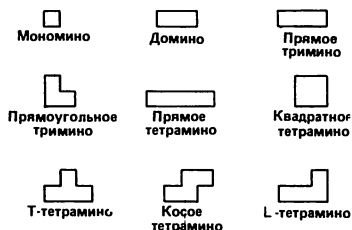
Не каждому читателю приходилось играть в «быки и коровы» или «отгадать слово», но человека, который ни разу в жизни не сражался в «морской бой», наверное, не найти. Несмотря на внешнюю простоту, эта популярная игра и ее различные модификации содержат немало тонкостей.

**Классический морской бой.** Начнем с самого популярного варианта морского боя, распространенного во многих странах. Каждый из двух игроков рисует на клетчатом листе бумаги две доски размером  $10 \times 10$ . На первой из них он расставляет свои корабли, а на второй разгадывает расположение кораблей противника. В состав флотилии входят десять кораблей: один линкор (корабль  $4 \times 1$ ), два крейсера ( $3 \times 1$ ), три эсминца ( $2 \times 1$ ) и четыре катера ( $1 \times 1$ ). Корабли могут занимать любые поля доски, но не должны касаться друг друга ни сторонами, ни углами.

После размещения флота игроки начинают по очереди стрелять по неприятельской территории, то есть называть поля доски — а3, б7, и9 и т. д. (горизонтали доски будем обозначать числами от 1 до 10, а вертикали — русскими буквами от а до к — см. рис. 6 и 7). После каждого выстрела игрок получает от партнера следующую информацию: «попал», если выстрел пришелся по полю с кораба-

лем; «убил», если это последнее поле корабля (по другим полям, занятым им, попадание произошло раньше); и наконец, «мимо», если поле пустое. В первых двух случаях игрок производит еще один выстрел, и так до первого промаха, после чего очередь хода передается партнеру. Побеждает тот, кто первым потопит все десять кораблей противника.

Таким образом, в данной тестовой игре шифром служит набор прямоугольников, расположенных на доске, а самым тестом — удары по ней. Обычно выстрел в морском бое обозначается точкой, а при попадании в корабль точка превращается в крестик (сам потопленный корабль обводится прямоугольником). Конечно, точки ставятся и на те поля, про которые уже точно известно, что они не могут входить в сос-



Р и с. 2

тав ни одного из кораблей (лежат наискосок от «подбитых» полей или окружают потопленный корабль).

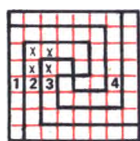
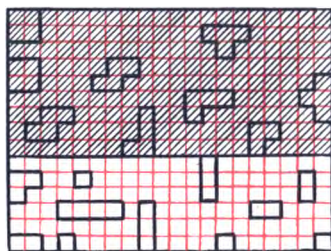
*Различные доски и корабли.* Очевидно, форма доски в морском бое, вид кораблей и состав флотилии особого значения не имеют. Так, шахматисты, возможно, предпочитают играть на доске  $8 \times 8$ . Заметим, что в терминах игры «полимино» наши корабли имеют такие названия: катер — мономино, эсминец — домино, крейсер — прямо тримино, линкор — прямое тетрамино (рис. 2). В качестве кораблей в этой игре можно использовать и другие виды полимино. На рис. 2 представлены все девять кораблей, содержащих не более четырех клеток.

Сражение можно вести не только на море, но и на суше. Для этого доску следует разбить на две части — морскую и береговую. Противники получают в свое распоряжение три вида боевых средств — флот (корабли могут располагаться только в море), сухопутные войска (размещаются на суше) и самолеты, которые находятся как в море, так и на суше. Можно, например, использовать для игры 20 боевых единиц: во флотилию включить десять кораблей обычного мор-

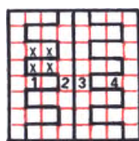
ского боя, в сухопутные войска — два квадратных, два косых, два *T*- и два *L*-тетрамино и, наконец, два прямоугольных тримино превратить в самолеты. Одно из расположений всех видов войск на доске  $20 \times 15$  представлено на рис. 3 (береговая часть доски на рисунке заштрихована). Как и положено, флот находится в море, а сухопутные войска дислоцированы на суше, один самолет летает над морем, другой охраняет берег.

Вот еще одна разновидность морского боя. Игра протекает на шахматных досках  $8 \times 8$ ; каждый из двух игроков разбивает свою доску на четыре части произвольной формы, состоящие из одинакового количества полей — по 16 каждая. На рис. 4 даны четыре варианта разбиения доски. Ход состоит из четырех одновременных выстрелов по полям доски, обра-

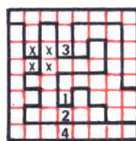
Рис. 3



а



б



в



г

Рис. 4

зующим произвольный квадрат  $2 \times 2$ , например б5, б6, в5, в6 (на рис. 4 его поля помечены крестиками). Обстреливаемый игрок сообщает номера частей, в которые произошло попадание, не указывая при этом, какие поля каким частям принадлежат. Для наших квадратов ответы будут такие: 2, 2, 2, 3 — рис. 4а; 1, 1, 2, 2 — рис. 4б; 2, 2, 3, 4 — рис. 4в; 2, 2, 3, 3 — рис. 4г. После каждого хода партнеры делают определенные выводы о возможном разбиении доски и на их основании выбирают следующий ход. Побеждает игрок, который первым определяет, на какие четыре части разбил противник свою доску.



**Стратегия игры в морской бой.** Вернемся к обычному морскому бою на доске  $10 \times 10$ . Конечно, успех здесь, как и в предыдущих тестовых играх, в какой-то мере зависит от везения. Можно беспорядочно наносить удары по неприятельской территории и при этом без промаха уничтожить все его корабли. Но вряд ли на это стоит рассчитывать. Если говорить об искусстве игры в морской бой, возникают два вопроса: 1) как стрелять, чтобы повысить вероятность попадания в неприятельские корабли; 2) как расставлять собственные корабли, чтобы противнику было труднее их потопить?

Предположим, мы хотим попасть в неприятельский линкор. Если стрелять последовательно сначала по полям первой горизонтали (слева направо), затем по полям второй и т. д.,

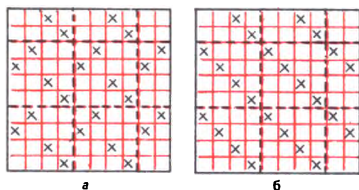


Рис. 5

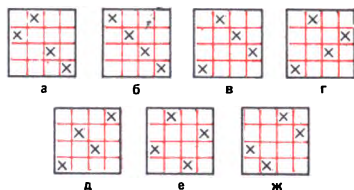


Рис. 6

не исключено, что мы обнаружим его только после 97-го удара (если корабль занимает поля с ж10 по к10). Однако, стреляя по полям, обозначенным крестиками на рис. 5а или 5б, мы наверняка попадем в линкор не позднее 24-го удара (24 крестика следуют друг за другом через три поля вдоль каждой вертикали и горизонтали).

Рассмотрим более общий случай. Предположим, что на доске  $n \times n$  расположен один-единственный корабль  $k \times 1$  ( $k$ -мино). Совокупность выстрелов, гарантирующих нам попадание в этот корабль, назовем стратегией. Стратегию, содержащую минимальное число выстрелов, назовем оптимальной; число выстрелов в ней обозначим через  $s(n, k)$ .

Очевидно,  $s(4, 4) = 4$ ; все семь оптимальных стратегий для доски  $4 \times 4$  представлены на рис. 6 (стратегии, которые совпадают при поворотах и зеркальных отражениях доски, мы не различаем). Сдвигая все выстрелы на четыре поля по вертикали и горизонтали, получаем семь стратегий на доске  $10 \times 10$ . Однако только две из них являются оптимальными (рис. 5а и 5б сравните с рис. 6а и 6б), причем  $s(10, 4) = 24$ .

Ясно, что для попадания в корабль  $\kappa \times 1$ , расположенный на доске  $n \times n$ , выстрелы должны отстоять друг от друга на  $\kappa$  полей по вертикали и горизонтали. Это означает, что на каждой линии содержится примерно по  $\frac{n}{\kappa}$  выстрелов оптимальной стратегии, и мы получаем приближенную формулу  $s(n, \kappa) \approx \frac{n^2}{\kappa}$ .

Опытные игроки обычно действуют следующим образом. Сначала, пользуясь одной из стратегий на рис. 5, обнаруживают единственный линкор противника. Когда с ним будет покончено, принимаются за поиск крейсеров. Теперь удары наносятся не через три поля по вертикалям и горизонталям, а через два. Потопив оба крейсера, переходят к эсминцам. Когда непотопленными останутся одни

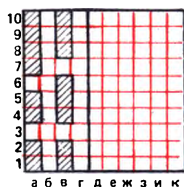


Рис. 7



Рис. 8

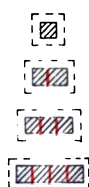


Рис. 9

катера, выбор полей ударов уже не будет иметь никакого значения, и приходится полагаться только на случай. Конечно, «легкие» корабли могут быть обнаружены и при охоте за «тяжелыми».

Итак, труднее всего обстоит дело с катерами, для нахождения которых нельзя придумать эффективной стратегии. Поэтому при размещении собственной флотилии надо располагать все крупные корабли поплотнее, представляя противнику для поиска катеров как можно больше свободной территории. Наиболее выгодное в этом смысле размещение показано на рис. 7. Если даже соперник потопил все шесть наших крупных кораблей, для обнаружения четырех катеров у него имеется территория наибольшей площади — целых 60 полей (на рисунке справа от черты).

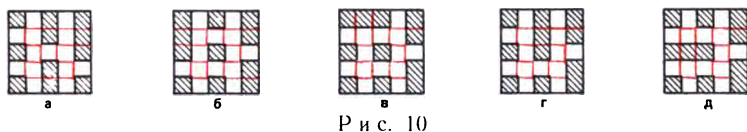
**Напряженный бой.** Рассмотрим интересный «эндшпиль», в котором одна неточность сразу решает исход боя (этот пример придумал В. Чванов).

На рис. 8 изображено положение, возникшее в процессе игры. К данному моменту обе флотилии — и наша (рис. 8, а) и противника (рис. 8, б) пострадали одинаково. У обеих пото-

плены линкор, один крейсер и один эсминец, продолжают сражение по одному крейсеру, по два эсминца и все четыре катера. Расположение наших кораблей противнику уже известно (на рис. 8,а они обведены пунктиром), и при своем ходе он разгромит их без промаха.

К счастью, ход наш и судьба партии в наших руках. Мы должны потопить один за другим все семь его кораблей, сосредоточенных в квадрате  $5 \times 5$ . Для нахождения победной комбинации в этой напряженной схватке требуется прежде всего провести логический анализ ситуации.

По правилам любые два корабля отстоят друг от друга не меньше чем на одно поле. Окружим каждый корабль каймой шириной в полполя (рис. 9), полученный прямоугольник назовем достройкой этого корабля. Найдем теперь пло-



Р и с. 10

щадь достроек всех семи кораблей, которые предстоит потопить. Достройка катера — 4 клетки ( $2 \times 2$ ), эсминца — 6 клеток ( $3 \times 2$ ) и крейсера — 8 клеток ( $4 \times 2$ ). Общая площадь достроек составляет 36 клеток. Но площадь достройки доски (доска с каймой в полполя) также 36 клеток, из чего следует, что угловые поля доски  $5 \times 5$  обязательно заняты кораблями (иначе угловая площадь достройки доски «пропадает»). Переберем все возможные расположения кораблей. Их всего пять (рис. 10,а — д), повороты и зеркальные отражения доски не учитываются.

Проведенный анализ позволяет эффектно завершить игру. Первые четыре выстрела следует произвести по углам доски  $5 \times 5$ . Как мы убедились, все они достигают цели. Если при этом три катера будут потоплены (рис. 10,а), то расположение остальных кораблей определяется однозначно. Пусть потоплен только один катер (рис. 10,б, в). Так как достройки кораблей плотно покрывают достройку доски, пятый и шестой выстрелы можно без риска произвести по полям а3 и е1, отстоящим на два поля от углового, занятого потопленным катером. От результатов этих двух выстрелов зависит, какой из случаев — «б» или «в» — имеет место. Если выстрелы по углам привели к потоплению двух катеров (рис. 10,г, д), то удары по полям а3 и в5 позволят сразу выяснить, какой из двух вариантов избрал противник.

Итак, после шести выстрелов мы имеем полную информацию о расположении неприятельских кораблей и следующими пятью ударами победно завершим эту напряженную битву. Рассмотренный пример показывает, что в критической ситуации от играющих в морской бой требуется немалое искусство и выдержка.

*Залпы выстрелов.* До сих пор каждый выстрел производился по одному полю доски. Интересной разновидностью морского боя является игра, в которой один ход состоит сразу из ряда выстрелов — ведется, так сказать, массированный огонь по неприятельскому флоту. Соперник сообщает общие результаты стрельбы, не указывая при этом, в какой корабль и на каком поле произошло попадание. Например, при трех одновременных выстрелах ответы могут быть такими: три промаха; два промаха и одно попадание; один промах и одно потопление и т. д. (последний ответ означает, что два выстрела из трех попали в один и тот же корабль и потопили его). Остальные правила игры не меняются. После каждого хода и ответа на него игроки извлекают определенную информацию о дислокации неприятельских кораблей и следующими ходами пытаются использовать ее.

В другом варианте этой игры каждому игроку разрешается одновременно производить выстрелы по стольким полям доски, сколько у него еще осталось непотопленных кораблей. Обстреливаемый игрок вновь сообщает стреляющему только общее число попаданий, потоплений и промахов. При обычной флотилии из десяти кораблей первый ход состоит из десяти выстрелов. Если один или несколько кораблей потоплены, то число выстрелов уменьшается. Когда все корабли пойдут на дно, игрок лишается права хода (0 выстрелов), но оно ему больше не нужно — бой закончился его поражением.

Рассмотрим еще одну интересную модификацию морского боя на произвольной квадратной доске. В ней также разрешается производить серии выстрелов. Будем считать, что флотилии обоих партнеров состоят из кораблей одного типа: катеров, эсминцев, крейсеров, линкоров или вообще кораблей  $k \times 1$  ( $k$ -мино) на доске  $n \times n$  ( $k \leq n$ ). Число  $k$  оговаривается до начала игры. Игрок может расставлять на доске любое количество кораблей, быть может, ни одного, не сообщая это числу противнику.

Игра состоит всего из одного хода, который заключается в одновременном произведении выстрелов по ряду полей доски (залп выстрелов). При этом игрок получает информацию о

каждом поле доски — попадание или промах (о потоплениях сообщений не делается). Проанализировав ответы противника, он должен однозначно определить расположение всей его флотилии. Победителем становится игрок, залп которого содер­жит меньше выстрелов.

*Тестовой залп.* Из трех рассмотренных нами тестовых игр (быки и коровы, отгадать слово, морской бой) ближе всего к математике лежит морской бой и его различные вариации. Теория тестов представляет собой один из современных разделов кибернетики, и ею занимаются многие математики. Под тестом понимается некоторый эксперимент, позволяющий получить полную информацию об анализируемом объекте. Поскольку эксперимент всегда требует определенных затрат на его проведение, необходимо, чтобы он был как можно проще, дешевле. В этом смысле описанные нами игры являются типично тестовыми. Далее, обсуждая последний вариант морского боя, мы для удобства воспользуемся «тестовой» терминологией.

По-прежнему будем называть множество выстрелов, которые одновременно производятся по полям доски, залпом. Если залп достигает цели — при любых ответах противника позволяет однозначно определить расположение всех его кораблей, мы называем его тестовым. Соответствующие выстрелы и поля, по которым они производятся, также будут тестовыми.

Описанная игра, хотя и является на редкость короткой (она длится всего один ход!), весьма оригинальна и необычна. Дело в том, что «слабый» залп, содержащий мало выстрелов, связан с риском, что мы не сможем однозначно определить расположение всех кораблей противника. В то же время при «сильном» залпе, когда число выстрелов велико и любой ответ противника гарантирует нам расшифровку всех его кораблей, есть риск, что мы просто-напросто проиграем по числу выстрелов в залпе. Кстати, в этой игре, как мы видим, очень важна очередь хода, поэтому играть надо одну партию «белыми» и одну — «черными».

Можно придать игре более строгий характер, исключив из нее элемент блефа. А именно потребуем, чтобы залп каждого игрока был тестовым, то есть обеспечивал однозначное распознавание всех кораблей противника при любом ответе. Далее мы будем рассматривать только такой вариант игры.

Очевидно, чтобы стать непобедимым в последнем варианте морского боя, достаточно для любых значений  $n$  и  $k$  решить следующую задачу.

По какому минимальному числу полей доски  $n \times n$  сле-

дует произвести тестовый залп, чтобы при любых ответах противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей  $k \times 1$  (а значит, и их число)?

Залп, который требуется найти в этой задаче, назовем минимальным тестовым залпом, а число тестовых выстрелов в нем обозначим через  $t(n, k)$ .

Рассмотрим сначала простейший случай, когда игроки расставляют на своих досках только катера ( $k=1$ ). Очевидно,  $t(n, 1)=n^2$ . Если хотя бы одно поле доски не входит в тестовый залп, то при ответе «промах» на все тестовые выстрелы мы не сможем решить, находится ли катер на этом поле или нет.

Если  $k > 1$ , то задача становится довольно сложной. Во всяком случае, автору известны решения только для крайних

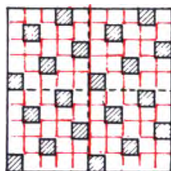


Рис. 11

случаев:  $k=2$  и  $k=n$ . В следующем пункте мы сформулируем их в виде двух отдельных задач.

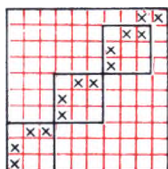
**Минимальный тестовый залп.** Задача 1. На доске  $n \times n$  расположено некоторое количество эсминцев (кораблей  $2 \times 1$ ), которым, как обычно, запрещено касаться друг друга. Каково наименьшее число полей, по которым надо выстрелить, чтобы после сообщения противником результатов залпа можно было однозначно определить расположение всех его эсминцев?

Решение этой задачи можно найти в книге И. Соловьева «Тесты», упомянутой в библиографии. Приближенный ответ такой:  $t(n, 2) \approx 4/5 n^2$ , и, значит, минимальный тестовый залп должен быть произведен примерно по  $4/5$  площади доски. Для обычной доски ( $10 \times 10$ ) ответ точный:  $t(10, 2) = 4/5 \times 10^2 = 80$ . Минимальный тестовый залп для этого случая приведен на рис. 11, причем тестовыми здесь являются все поля доски, кроме заштрихованных.

Задача 2. На доске  $n \times n$  размещено некоторое количество кораблей  $n \times 1$ , которые не касаются друг друга. Каково минимальное число полей, по которым надо одновременно произвести выстрелы, чтобы после сообщения противником результатов этого залпа можно было однозначно определить расположение всех его кораблей?

Докажем, что для обычной доски  $10 \times 10$  минимальный тестовый залп состоит из 14 выстрелов. Для этого достаточно установить, что во-первых, набор полей, отмеченных на рис. 12 крестиками, является тестовым и, во-вторых, что меньшим числом выстрелов не обойтись.

Убедимся, что залп на рис. 12 тестовый. Рассмотрим последовательно, одну за другой, все горизонтали доски. Пусть по данной горизонтали произведены два выстрела. Если один из них или оба привели к промаху, то корабля на этой горизонтали нет. Если оба выстрела попали в цель, то горизонтальный корабль есть — в противном случае мы имели бы два вертикальных корабля с общей границей, что невозможно. Рассмотрим теперь горизонталь с одним тестовым полем. Если выстрел по нему дал промах, корабля на гори-



Р и с. 12

зонталь нет. Если произошло попадание, то следует посмотреть на тестовое поле, соседнее с данным по вертикали. В случае промаха по нему корабль является горизонтальным, а при попадании — вертикальным. Таким образом, при любых ответах противника мы однозначно определяем расположение всех его кораблей  $10 \times 1$  (их не больше пяти, причем только вертикальные или только горизонтальные).

Осталось показать, что наш тестовый залп минимальный. Предположим противное, пусть  $t(10, 10) \leq 13$ . Поскольку каждая горизонталь доски содержит хотя бы одно тестовое поле (иначе при всех промахах мы не сможем определить, занята данная горизонталь кораблем или нет), а всего таких полей не больше тринадцати, то минимум семь горизонталей содержат ровно одно тестовое поле; все эти поля назовем одиночными (по горизонтали). Кроме них, имеется не более  $13 - 7 = 6$  тестовых полей, занимающих максимум 6 вертикалей. Оставшиеся четыре вертикали (или больше) могут содержать только одинокие (по горизонтали) поля, причем не более семи. Это означает, что по меньшей мере одна вертикаль доски содержит ровно одно тестовое поле, причем оно является одиноком (по горизонтали).



Таким образом, мы нашли тестовое поле, одинокое, как по горизонтали, так и по вертикали. Если тестовый залп приводит к попаданию в это поле и промаху по остальным, мы не сможем определить, какой именно корабль (горизонтальный или вертикальный) проходит через него. Итак, наш залп не является тестовым — противоречие.

В общем случае метод построения минимального тестового залпа для обнаружения кораблей  $n \times 1$  вытекает из рис. 12. На три тестовых поля каждого из выделенных на нем квадратов  $3 \times 3$  приходится еще по одному, четвертому (для доски  $10 \times 10$  необходимо взять еще два поля в правом верхнем углу). Таким образом, имеем приближенную формулу  $t(n, n) \approx \frac{4}{3}n$ . Точный ответ зависит от остатка, который получится при делении  $n$  на 3 и ком-

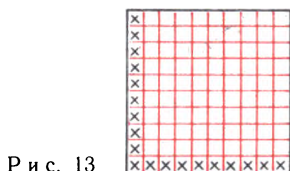


Рис. 13

пактно записывается следующим образом:  $t(n, n) = \left\lfloor \frac{4n+2}{3} \right\rfloor$ , где квадратные скобки означают целую часть числа. Для  $n=10$  снова получаем  $t=10$ .

Последнюю задачу о минимальном тестовом залпе автор книги предложил для задачника «Кванта». Однако когда он раскрыл свежий номер журнала, то неожиданно обнаружил, что условие, по которому корабли не должны касаться друг друга, в тексте опущено, и получилась совсем другая задача! В частности, если вся доска заполнена кораблями, то никаким числом выстрелов невозможно распознать, какие  $n$  кораблей размещены на доске  $n \times n$  — вертикальные или горизонтальные. Впрочем, если такое плотное расположение кораблей запретить, то новая задача имеет решение. Число выстрелов на этот раз придется увеличить — минимальный тестовый залп следует произвести по  $(2n-1)$  полям, например, так, как показано на рис. 13. Редактор задачника «Кванта» Н. Васильев, который «вынужден» был решать новую задачу, рожденную благодаря опечатке в журнале, попутно нашел и более эффективное решение первоначальной задачи — о кораблях, которые не должны касаться друг друга. Приведем его.



Пусть по-прежнему  $t = t(n, n)$  — число полей, по которым наносятся выстрелы минимального тестового залпа, через  $A$  обозначим само множество полей. Докажем, что  $t \geq \frac{4}{3}n$ . Очевидно, каждая линия доски содержит хотя бы одно поле из  $A$  и на одной горизонтали или вертикали с ним имеется еще не меньше одного такого поля. Расставим на полях  $A$  синие и красные единицы и двойки следующим образом.

Если на горизонтали более одного поля из  $A$ , то поставим на каждом из них красную двойку. Проделаем такую же процедуру с вертикалями доски и запишем на полях  $A$  синие единицы и двойки. В результате на каждом поле  $A$  будут записаны либо единица с двойкой, либо две единицы, и, значит, сумма  $p$  всех написанных чисел не больше  $3t$ . Поскольку на каждой линии доски мы записали «цветные» числа с суммой не меньше чем 2, то  $p \geq 4n$ .

Итак,  $3t \geq p \geq 4n$ , откуда  $t \geq \frac{4n}{3}$ . Если  $n$  делится на 3,

то точный ответ, как мы знаем,  $t = \frac{4n}{3}$ . Общая формула:

$$t(n, n) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil.$$

Вы, наверное, обратили внимание на то, что тестовый залп в последнем варианте морского боя аналогичен стратегии в классической игре. Однако если стратегия гарантирует только попадание в единственный на доске корабль  $k \times 1$ , то тестовый залп позволяет однозначно определить расположение всей флотилии кораблей. Используя некоторую стратегию в обычном морском бое и попав в цель, нам остается только потопить корабль. Что же касается тестового залпа, то независимо от успеха отдельных выстрелов необходимо произвести их все до единого. Аналогом оптимальной стратегии служит минимальный тестовый залп. Желающие еще глубже развить теорию этой игры могут исследовать ее для других значений  $k$ , а именно  $2 < k < n$ .

---

# 2

## Игры со словами

---



Рассмотренная нами в первой главе тестовая игра «отгадать слово» — одна из многих десятков известных словесных игр, хотя и выделяется среди них своими логическими и комбинаторными свойствами.

Игры и развлечения со словами по своей популярности занимают одно из лидирующих мест среди других видов досуга. Кто из нас не увлекался в часы отдыха разгадыванием кроссвордов, чайнвордов, шарад, ребусов, криптограмм и других головоломок со словами?

Словесные игры расширяют эрудицию, развивают культуру речи и кругозор, учат работать со словарями. Немалое значение имеют они и для развития мышления и речи, поэтому часто используются воспитателями. Такие игры дают возможность не только потренировать память и проявить эрудицию, но и глубже проникнуть в тонкости языка, разобраться в структуре словообразования. Не случайно игры и развлечения со словами можно найти в замечательной «Книге о языке», принадлежащей перу известного американского популяризатора-филолога Ф. Фолсома.

*Кроссворды.* Читая эту главу, читатель, возможно, упрекнет автора в том, что некоторые словесные развлечения, в том числе кроссворды, отнесены к играм, хотя их следовало бы назвать головоломками. Но это не всегда так, взять хотя бы «балду» — настоящая игра с несколькими участниками. Что же касается кроссворда... Вот сообщение, которое заставит отнестись к нему несколько иначе.

«Очередной чемпионат Великобритании по решению кроссвордов состоялся в Лондоне. В нем приняли участие 18 лучших специалистов со всех концов страны. Им было предложено поломать голову над четырьмя исключительно сложными заданиями. Первым с этой задачей справился

Д. Сейкс, которому потребовалось всего 37,5 минуты, чтобы в шестой раз завоевать титул чемпиона Англии».

Заметим, что при составлении кроссвордов установлено немало забавных рекордов. Итальянец Г. Далмас придумал кроссворд, в котором насчитывается 52 тысячи клеточек. Его размер —  $2 \times 2,6$  метра, общая площадь более 5 квадратных метров. Всего в кроссворде 12 тысяч слов, самое большое состоит из двадцати одной буквы. Кроссворд французов Ж. Луизе и Г. Брути содержит 50 тысяч квадратиков, образующих гигантскую геометрическую фигуру, и 18 тысяч слов. Наконец, рекордный кроссворд Р. Букаэрта включает в себя 25 283 слова, он заполняет ленту длиной 12 метров. Рекордсмен создавал свое детище в течение четырех лет. Интересно, нашелся ли хоть один смельчак, который взялся за его разгадку?

*Наборщик.* Это одна из самых распространенных игр. Берется произвольное слово и из его букв составляются (набираются) другие слова. Как обычно, используются только имена существительные, нарицательные в исходной форме, в единственном числе, в именительном падеже и никаких ласкательно-уменьшительных. Выигрывает тот, у кого окажется больше слов. Впрочем, часто учитывают и оригинальность слов, количество букв в них. Например, если играют четверо, слово, найденное одним участником, оценивается в 3 очка, двумя — 2 очка, тремя — 1 очко, а если оно записано всеми, то просто вычеркивается (0 очков).

От играющих в «наборщика», помимо эрудиции и большого запаса слов, требуются комбинаторные навыки — ведь приходится производить немалый перебор букв и слов. Может быть, поэтому в соревнованиях между «физиками и лириками» первые побеждают чаще...

Мастера словесных игр знают много важных секретов, и одно из их основных оружий — анаграммы. Как уже говорилось в первой главе, слово, составленное из всех букв данного слова, называется его анаграммой. Два или более слов, образованных из одних и тех же букв, дают блок анаграмм.

Приведем несколько примеров: КОЛБА — БОКАЛ — блок из двух пятибуквенных анаграмм; ПРИКАЗ — КАПРИЗ — блок из двух шестибуквенных анаграмм; КАРТА — КАРАТ — КАТАР — блок из трех пятибуквенных анаграмм; КЛОУН — КОЛУН — УКЛОН — КУЛОН — блок из четырех пятибуквенных анаграмм.

Разумеется, опытные игроки, обнаружив одно слово из

блока анаграмм, не задумываясь, выписывают и все остальные, чем немало удивляют неискушенных «наборщиков».

**ЭВМ и анаграммы.** Составление анаграмм само по себе интересная словесная игра. Здесь имеется немало вопросов, на которые пока не найдено ответов. Не известно, например, сколько всего в русском языке анаграмм, сколько блоков, содержащих то или иное количество слов, и т. д. «Теория» анаграмм заинтересовала программистов, создателей программы «Каисса» — первой чемпионки мира по шахматам среди ЭВМ. Однажды, когда «Каисса» была на отдыхе, ее авторы решили написать программу для «вычисления» анаграмм. В память ЭВМ был введен (не в полном объеме) 4-томный «Толковый словарь русского языка» Д. Ушакова. Прочитав его, компьютер обнаружил около 1000 анаграмм и попутно установил ряд любопытных рекордов.

И раньше были известны анаграммы с числом букв, большим шести. Вот несколько красивых примеров: МАТЕРИК — МЕТРИКА, МОШКАРА — РОМАШКА, РОТОНДА — ТОРНАДО (7 букв); АПЕЛЬСИН — СПАНИЕЛЬ, НОРМАТИВ — МИНОТАВР, ХОРИСТКА — АКРОСТИХ (8 букв); ВЕРТИКАЛЬ — КИЛЬВАТЕР, ГЕОМЕТРИЯ — ГЕОТЕРМИЯ, СТАЦИОНАР — СОРАТНИЦА (9 букв); МОНОГРАММА — НОМОГРАММА, ГРАФОЛОГИЯ — ГОЛОГРАФИЯ, ДОЗРЕВАНИЕ — РАЗДВОЕНИЕ (10 букв).

Машине удалось продвинуться дальше. Сначала она увеличила рекорд на одну букву: РАТИФИКАЦИЯ — ТАРИФИКАЦИЯ, а затем довела его до пятнадцати букв: СТАРОРЕЖИМНОСТЬ — НЕРАСТОРЖИМОСТЬ!

Как ЭВМ находит анаграммы? Конечно, если брать одно слово за другим и в каждом из них переставлять буквы всеми возможными способами, это будет долгая и кропотливая работа даже для мощного компьютера. Алгоритм, которым пользовалась ЭВМ, заключается в следующем. Сначала весь введенный в нее словарь переводится на другой «язык», в каждом слове которого буквы расположены в алфавитном порядке. Например, КОРШУН теперь читается как КНОРУШ, и в это же буквосочетание превращается ШНУРОК. Полученный «словарь» уже сам записывается в алфавитном порядке, и, очевидно,

набор одинаковых слов, расположенных в нем по соседству, дает нам некоторый блок анаграмм в настоящем словаре. Так, обнаружив в новом «языке» два раза подряд слово КНОРУШ, обратным переводом мы найдем блок анаграмм ШНУРОК — КОРШУН.

Компьютер увлекся и другими словесными играми, установив несколько оригинальных рекордов. Из какого наибольшего числа различных букв может состоять слово? Машина написала два слова из 14 букв: ЗВУКОСНИМАТЕЛЬ и РАЗГИЛЬДЯЙСТВО.

Два самых длинных слова, в которых гласные чередуются с согласными, по мнению компьютера, также содержат по 14 букв: ВЕЛИКОМУЧЕНИЦА и СОЛОМОВОЛОКУША. Конечно, эти рекорды нельзя считать абсолютными, так как был исследован лишь один словарь, да и тот не в полном объеме. Если ввести в ЭВМ какой-нибудь другой словарь (Даля, Ожегова и т. д.) или энциклопедию, то, возможно, будут установлены новые рекорды в тех или иных словесных играх.

Вернемся к анаграммам. Как мы знаем, рекордный блок пятибуквенных анаграмм содержит шесть слов: АВТОР — ВТОРА — ОТВАР — РВОТА — ТАВРО — ТОВАР. Он часто встречается в «наборщике», получается, скажем, из слова ЛЕКАРСТВО. Это весьма плодотворное для игры слово содержит и другие блоки анаграмм, например стандартный набор из четырех слов: РОСТ — СОРТ — ТОРС — ТРОС, а также красивые шестибуквенные анаграммы: ВЕКТОР — КОРВЕТ, КОРСЕТ — СЕКТОР. Замечу, кстати, что один мастер игры в «наборщика» превратил ЛЕКАРСТВО в 180 слов. Попробуйте побить этот рекорд.

Открытые еще в III веке до нашей эры греческим грамматиком и поэтом Ликофроном анаграммы до сих пор привлекают внимание лингвистов, поэтов и просто любителей словесных развлечений. Коллекция В. Капранова насчитывает 526 анаграмм, использующих 1119 слов. Выше мы привели анаграммы, содержащие число букв от 4 до 11 и 15 (рекорд). Приведем интересные примеры с «промежуточным» числом букв: ВЫБОРОЧНОСТЬ — ОБРЫВОЧНОСТЬ, УТОНЧЕННОСТЬ — УТОЧНЕННОСТЬ (12 букв), ПЕРЕМАЛЫВАНИЕ — ПЕРЕЛАМЫВАНИЕ (13 букв), ОГРАНИЧЕННОСТЬ — НЕОРГАНИЧНОСТЬ (14 букв).

Если отойти от канонических правил и не связывать себя грамматическими рамками, можно придумать множест-

во самых необычных анаграмм. Приведем наиболее забавные примеры: СХЕМА СМЕХА, ФИАЛКА КАЛИФА, УЖИМКА МУЖИКА, РЕКЛАМА МАКЛЕРА, ЦИТАТА ТАЦИТА, ЗАПОНКА НАПОКАЗ, АПОСТОЛ ПОЛОСАТ, ВОЛОКИТА КИТОЛОВА.

Газета «Советская Россия» часто проводит различные словесные конкурсы, инициатором которых выступает М. Крушинский. В одном из них подлинным виртуозом игры в анаграммы показал себя Д. Авалиани, составивший целые фразы из анаграмм. Вот некоторые из его открытий: ВИЖУ ЗВЕРЕЙ — ЖИВУ РЕЗВЕЙ; ИНОК ВЯЗ-НЕТ, КОНИ ЗВЕНЯТ; УВИДИМСЯ — УДИВИМСЯ, ОТСПОРИМСЯ — ОПРОСТИМСЯ; СЛЕПО ТОПЧУТ — ПОСЛЕ ПОЧТУТ.

*Палиндромы.* Перевертыши, или палиндромы,— это слова, которые читаются одинаково слева направо и справа налево: ПОП, ДОВОД, ДОХОД, ПОТОП, ТОПОТ, НАГАН, ЗАКАЗ, КАЗАК, ШАЛАШ. Многие любители словесных развлечений увлекаются составлением предложений, а то и маленьких рассказов или стихов, которые одинаково читаются в обе стороны. Вот несколько смешных фраз-палиндромов: «Аргентина манит негра», «Торт с кофе не фокстрот», «И любит Сева вестибюли», «Удавы рвали лавры в аду», «Я и ты будем в меду бытия», «Я не мил — и не женили меня», «Укроп наворован? Порку! А ремень — не мера», «Лилипут сома на мосту пилил», «Ах, у печали мерило, но лире мила чепуха!» А вот двестише Д. Авалиани, в котором безупречный гомеровский гекзаметр сочетается с прямым обращением к великому эллину:

«Море могуче. В тон ему,  
шумен, ответу Гомером:  
Море, веру буди — ярк,  
скор, я иду буревером...»

Палиндромы придумывали многие поэты. Забавный перевертыш «А роза упала на лапу Азора» принадлежит великому русскому поэту А. Фету, другой знаменитый поэт Г. Державин сказал: «Я иду с мечом, судия», а замечательный русский поэт В. Хлебников, кстати, увлекавшийся математикой, написал целое стихотворение «Перевертень», где все строчки можно прочитать в обратном порядке.

*Каркас.* Известна старинная головоломка, в которой надо найти набор слов, использующий все 33 буквы алфавита, причем по одному разу каждую. Вот набор из девяти слов: БЫК, ВЯЗ, ГНОЙ, ДИЧЬ, ПЛЮЩ, СЪЕМ,

ЦЕХ, ШУРФ, ЭТАЖ. Существует ли набор, состоящий из меньшего числа слов, не известно. Задаче можно придать более увлекательную форму, если потребовать, чтобы слова образовали осмысленную фразу.

Интересную игру на составление слов — «каркас» придумал один из создателей «Каиссы» и автор машинной программы поиска анаграмм А. Битман.

Играющие фиксируют несколько согласных, а гласные (а также й, ь, ъ) подбирают произвольно, в любом количестве. Иначе говоря, составленные слова натягиваются на каркас из данных согласных букв (при этом должен быть использован весь набор согласных, которые можно переставлять в любом порядке). Пусть, например, выбраны буквы К, Н, Т. Тогда нас устраивают такие слова: КАНТ, ТАНК, КНУТ, КАНАТ, НАКАТ, ТКАНЬ, ТОНИКА, НЫТИК, ОКТАН, НИТКА и т. д. Побеждает тот, кто натянет на каркас больше слов.

В основе игры, по мнению ее изобретателя, лежит свойство согласных как бы образовывать скелет слова. Если вычеркнуть из текста все гласные (но разумеется, не меняя порядок согласных), часто его смысл может быть восстановлен. Так, изречение «Волга впадает в Каспийское море» легко прочесть и в сокращенном виде: «Влг впдт в Кспск мр».

В русском языке нет существительных, состоящих только из гласных. Но уже с одной согласной можно успешно играть в «каркас». Например, на букву Л натягиваются слова: АЛОЭ, АУЛ, ЕЛЕЙ, ЕЛЬ, ИЛ, ИЮЛЬ, ЛЕЯ, ЛЬЕ, УЛЕЙ, ЭЛЬ, ЮЛА, ЯЛ. Если использовать Л больше одного раза, число слов возрастает: АЛЛЕЯ, ЛИЛИЯ и т. д.

Чтобы игра протекала веселее, Ю. Фокин предложил придумывать фразы, используя всякий раз только одну согласную, например: «Бобби, убей боя и бей бабу у бабаба», «Алло! Элла, у Аллы лилия алая? А у Лили алоэ?» «У Юры азарий — рай!»

*Метаграммы и цепочки слов.* Какие еще развлечения со словами пользуются популярностью? О кроссворде уже шла речь выше. Его младший брат — чайнворд, в нем слова не пересекаются, а располагаются друг за другом — конец предыдущего служит началом следующего. В ребусах нужно отгадывать слова или фразы, которые изображаются комбинацией условных значков, фигур, цифр. В шарадах слова разбиваются на части, имеющие самостоятель-

ное значение (виноград = вино + град). Арифмогриф и криптограмма — это задачи на отгадывание слов или текстов, где буквы зашифрованы цифрами. Словарный запас и быстроту реакции развивают игры, в которых надо придумывать рифмы, синонимы, антонимы или омонимы.

Большая изобретательность требуется в игре «цепочки слов», основанной на словах-метаграммах. Метаграмма данного слова получается заменой одной из его букв на другую. Игра заключается в нахождении цепочки метаграмм, соединяющей два заданных слова. Так, КОЗА за разное число ходов превращается в других животных: КОЗА — ПОЗА — ПОЛА — ПОЛК — ВОЛК; КОЗА — ЛОЗА — ЛУЗА — ЛУПА — ЛИПА — ЛИСА; КОЗА — КОРА — КАРА — ФАРА — ФАРС — БАРС.

Как мы видим, каждое слово цепочки получается из предыдущего заменой ровно одной буквы. Выигрывает тот, чья цепочка короче. Изобрел эту увлекательную игру Л. Кэрролл, автор «Алисы в стране чудес» и один из классиков занимательной математики.

Для тренировки можно играть и в более простую игру, соревнуясь в количестве метаграмм для того или иного слова. Так, ДОМ порождает девять метаграмм: КОМ, ЛОМ, РОМ, СОМ, ТОМ, ДЫМ, ДОГ, ДОК, ДОЛ. А слово КОЧКА дает целых 11 метаграмм: БОЧКА, ДОЧКА, МОЧКА, НОЧКА, ПОЧКА, ТОЧКА, КАЧКА, КИЧКА, КУЧКА, КОРКА, КОШКА.

Каков рекорд числа метаграмм, образованных из одного слова, не известно.

При нахождении цепочек метаграмм интересны такие пары исходных слов, которые представляют собой антонимы или какие-нибудь противопоставления. В самых популярных цепочках МУХА превращается в СЛОНА. Вот одна из них, где цель достигается за 16 ходов: МУХА — МУРА — ТУРА — ТАРА — КАРА — КАРЕ — КАФЕ — КАФР — КАЮР — КАЮК — КРЮК — УРЮК — УРОК — СРОК — СТОК — СТОН — СЛОН. Кто придумает цепочку короче?

На ход позднее НОЧЬ «меняется» на ДЕНЬ, за 11 ходов РЕКА «впадает» в МОРЕ и за 13 ходов, если есть ТЕСТО, получается БУЛКА. Попробуйте улучшить и эти рекорды.

Интересны и многократные превращения. В следующей цепочке МИГ дает ЧАС, который, в свою очередь, переходит в ГОД, затем возникает ВЕК и в конце концов наступает ЭРА. Это удивительное путешествие во времени



занимает 17 ходов: МИГ — МАГ — МАЙ — ЧАЙ — ЧАС — ЧАД — ГАД — ГОД — ГИД — ВИД — ВИС — ВЕС — БЕК — БЕК — БОК — БОА — БРА — ЭРА. Конечно, если не ставить промежуточные цели, переход можно осуществить быстрее (за 6 ходов) МИГ — МИР — МОР — БОР — БОА — БРА — ЭРА.

Устраивать состязания, у кого короче цепочка метаграмм, не столь интересно, если заранее не знать, существует ли хоть одна из них. А ведь даже многие короткие слова не имеют метаграмм, о цепочках и говорить не приходится. М. Гервер предложил более увлекательные правила игры в «цепочки слов». На каждом шагу вновь меняется одна буква слова, но теперь разрешается также произвольно менять порядок всех букв.

Сложность образования метаграмм состоит в преобразовании гласных в согласные и наоборот. Вот почему так долго МУХА превращалась в СЛОНА. На месте двух гласных появились согласные, а одна согласная сменилась гласной. При новых правилах такой проблемы не возникает. Автор модифицированной игры в «цепочки слов» сделал из МУХИ СЛОНА всего за пять ходов, а из КОЗЫ ВОЛКА за три: МУХА — ХУЛА — ЛУНА — ЛУНЬ — НОЛЬ — СЛОН; КОЗА — КОСА — ВОСК — ВОЛК.

Вторая цепочка, очевидно, является рекордной, так как три новые буквы быстрее чем за три хода появиться не могут. В классическом превращении МУХА — СЛОН слова состоят из разных букв, и поэтому можно надеяться на цепочку из четырех переходов, но не меньше...

Здесь автор позволит себе небольшое отступление. После выхода в свет первого издания книги я получил от читателей множество писем, в которых обсуждались различные игры, предлагались новые, уточнялись те или иные решения, устанавливались рекорды. Очевидно, наиболее интересные соображения читателей были учтены при работе над вторым изданием. Что касается последней игры, Ю. Фокиным был установлен абсолютный рекорд: МУХА — ХЛАМ — ХОЛМ — СЛОМ — СЛОН, причем из цепочки исключено числительное НОЛЬ.

*Ассоциации.* Идее игры в «цепочки слов» можно придать несколько иной вид. Два слова или понятия будем считать ассоциативно связанными, если между ними есть что-то общее — смысловая, логическая или какая-то иная связь. В игре «ассоциации» требуется найти кратчайшую цепочку ассоциативных переходов между двумя данными словами.

Два весьма отдаленных понятия иногда удается связать между собой всего за несколько переходов. Возьмем, к примеру, слова НЕБО и ЧАЙ. Следующая последовательность ассоциаций решает задачу за четыре шага: НЕБО — ЗЕМЛЯ — ВОДА — ПИТЬЕ — ЧАЙ. В данном ряду слов ассоциативность соседей не вызывает сомнения. Но ассоциация, конечно, не столь точное понятие, как метаграмма, и поэтому в игре не исключены споры, которые лучше всего решать голосованием.

Любопытно, что ассоциативные переходы слов исследовались психологами, в частности, построение различных ассоциативных цепочек моделировалось на ЭВМ. Количество переходов в цепочке может служить мерой «смыслового расстояния» между двумя понятиями. Многочисленные опыты, проведенные учеными, позволили выдвинуть неожиданную гипотезу: для любых двух слов (понятий) существует ассоциативная цепочка, состоящая не более чем из семи слов. Иначе говоря, два произвольных понятия, даже весьма отдаленные друг от друга, имеют тесную связь — смысловое расстояние между ними составляет не более шести шагов.

*Балда.* В этой, пожалуй, самой популярной словесной игре можно обойтись даже без карандаша и бумаги, а играть, как говорят шахматисты, вслепую. Первый игрок называет произвольную букву, второй добавляет букву слева или справа, имея в виду некоторое слово. Следующий игрок (или снова первый, если играют двое) также приписывает букву с одной из сторон, имея в виду свое слово, и т. д. Тот, кто очередным ходом вынужден закончить слово, либо вообще не может приписать никакой буквы (потому что не догадывается, как уже написанные буквы продолжить до слова), проигрывает кон и в наказание получает «б». При вторичном проигрыше «б» превращается в «ба», затем в «бал», и в конце концов кто-то первым становится балдой.

Хотя, рассказывая об игре «отгадать слово», мы несколько снисходительно отозвались о «балде», в некоторых ситуациях более удачного словесного развлечения не придумаешь. Когда я прогуливаюсь по лесу со своим маленьким сыном и он говорит: «Папа, сыграем во что-нибудь», ничего более подходящего, чем «балда», в голову не приходит, — игра в «города» исчерпывается слишком быстро.

На первый взгляд занятие это бесхитростное, но и в «балде» есть свои мастера. А иногда искусство игры приобретает решающее значение... В книге М. Мироновой и

А. Менакера «В своем репертуаре» Александр Семенович рассказывает о том, как страстно увлекались «балдой» в довоенные годы артисты Театра эстрады и миниатюр. Шутили тогда, что все они просто обалдели. Порой актеры так заигрывались, что опаздывали на сцену. Когда Менакер впервые попал в театр, его больше всего поразила удивительная находчивость Марии Владимировны, которая никогда не проигрывала в «балду» (только Рина Зеленая могла с ней соревноваться). Попытка раскрыть секрет ее непобедимости привела в конце концов к созданию замечательного семейного и эстрадного дуэта!

Буквы в игре принято приписывать с краю, хотя ничто не мешает вставлять их и внутрь «полуфабриката». Кстати, именно так играют в «антибалду». В этой игре все наоборот — каждый из двух участников стремится закончить слово, причем сделать это как можно большее число раз. В тот момент, когда противники не видят продолжения последнего слова, игра прерывается и идет подсчет очков.

Вернемся к нормальной «балде». Игра эта словесная, но присутствие в ней комбинаторных и логических элементов не вызывает сомнения. Не случайно известный советский математик, покойный профессор Г. Шилов и математик В. Берман увлекались игрой и написали о ней целое исследование.

Мастера игры умеют выкручиваться из самых трудных ситуаций. Вместо того чтобы закончить слово, намеченное партнером, они находят неожиданный ход, к слову добавляется приставка или суффикс, и оно меняет свое «направление».

Большую роль играет знание выигрывающих буквосочетаний. Пусть, например, вы начали игру буквой Б, а ваш партнер мгновенно ответил БШ. Вы мучительно ищете слово, в котором рядом стоят буквы Б и Ш, а он такое слово, да еще заканчивающееся на вас, знает заранее — ОБШИВКА.

Шилов и Берман ввели термин «разрешимое двубуквенное сочетание» — пара букв, которую можно дополнить до некоторого слова. В качестве примера они привели партию, состоящую всего из двух ходов.

1-й игрок: Г; 2-й игрок ГЗ (имея в виду ЗИГЗАГ); 1-й игрок сдался, так как не нашел продолжения.

Этот пример показывает, как важно владеть набором разрешимых сочетаний. Из 33 букв алфавита составляется  $33^2 = 1089$  пар, но многие из них неразрешимы по правилам русского языка — ГЙ, ОБ, ЖЫ и т. д. Авторы вве-

денного термина обнаружили 801 «разрешение», а также составили список двубуквенных сочетаний, для которых пока не найдены допустимые слова.

Вопрос о существовании «разрешений» имеет скорее теоретический интерес. Так, если бы в приведенном примере первый игрок «вычислил» слово ЗИГЗАГ, он бы выиграл партию, потому что оно заканчивается на втором игроке. Даже если допустимое слово устраивает нас, не исключен риск, что найдется другое слово, которое мы будем вынуждены закончить. Иное дело, если двубуквенное сочетание имеет единственное разрешение. Убедившись, что это слово безопасно для нас, можно смело называть вторую букву пары — победа гарантирована. Конечно, установить единственность разрешения еще сложнее, чем его существование.

*Королевская балда.* Обычная игра в балду допускает различные обобщения. Об одном из них — антибалде — мы уже упоминали. Иногда играют, приписывая буквы не только слева и справа, но и сверху, снизу, по диагонали и т. д. Если традиционная игра как бы линейна, то теперь получается плоский вариант. Интересную разновидность такой игры Э. Иодковский предложил назвать королевской балдой.

В квадрате  $5 \times 5$  по средней горизонтали записывается произвольное пятибуквенное слово. Далее игроки по очереди вписывают по одной букве в любую пустую клетку «доски», соседнюю с одной или несколькими клетками (полями), где уже есть буквы. Из написанных букв (не обязательно всех) должно образовываться новое слово, которое читается как серия ходов шахматного короля по доске. Цепочка букв, из которых складывается слово, является неразрывной и несамопересекающейся, то есть одну и ту же клетку король не должен проходить дважды. За каждую букву образованного на данном ходу слова начисляется очко. После составления двадцати слов (число свободных клеток доски) игра заканчивается и ведется подсчет очков.

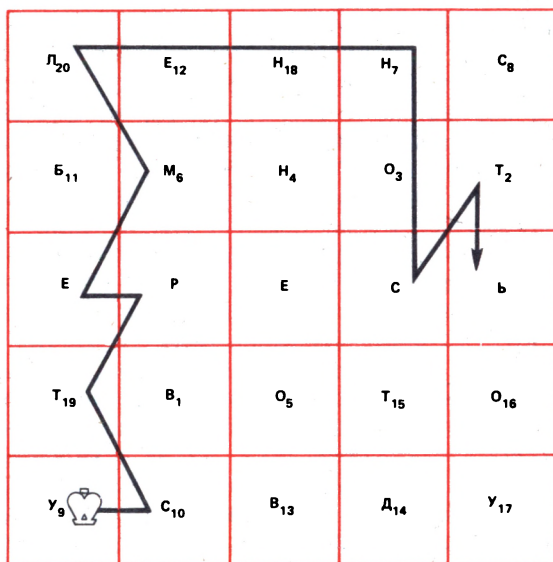
В этой игре от простой «балды» взят основной принцип — добавления одной буквы, а от шахмат — образование слов ходом короля. Забавный гибрид шахматной игры и словесной!

Играть в королевскую балду можно вдвоем, вчетвером или пятером, так как число 20 делится без остатка на 2, 4, 5, и, значит, у соперников будет поровну слов. Для игры втроем квадрат должен быть побольше —  $6 \times 6$ , а первоначальное слово шестибуквенным, в этом случае у каж-

дого участника на финише будет по 10 слов. Разумеется, для победы на каждом ходу следует придумывать слова подлиннее, используя как можно больше ранее записанных букв.

В отличие от обычной в королевскую балду интересно играть и одному. Задача состоит в том, чтобы, приписывая букву за буквой, набрать как можно больше очков. Рекордная «партия» показана на рис. 14. Исходное слово «ересь», номера ходов указаны на полях квадрата. Вот те 20 слов, которые появляются в процессе игры (выделены буквы, добавленные при образовании этих слов):

1. Север. 2. Весть. 3. Отсев. 4. Верность. 5. Соверен. 6. Мерность. 7. Временность. 8. Современность. 9. Уверенность. 10. Суверенность. 11. Бренность. 12. Беремен-



Р и с. 14

ность. 13. Своевременность. 14. Доверенность. 15. Тостер. 16. Достоверность. 17. Удостоверенность. 18. Осовремененность. 19. Мертвенность. 20. Устремленность.

Итого 210 очков, полученных в результате сложения длин всех слов. Немало пришлось королю потрудиться, побродить по доске, чтобы набрать эту сумму. На рисунке изображен его последний маршрут, сделанный на 20-м ходу. Как мы видим, образованное слово (как, очевидно, и все предыдущие) отвечает всем необходимым условиям.

*Словесное лото.* В наш бурный век, когда времени для общения остается так мало, классическое числовое лото можно рекомендовать как хорошее средство для дружеских встреч. Заполняя, не торопясь, числовые карточки бочонками лото, можно обсудить какой-нибудь интересный вопрос, как это делали герои чеховских пьес. Но как интеллектуальное занятие лото не самый лучший объект, здесь не надо напрягаться, ломать голову. Другое дело, словесное лото. Как и в королевской балде, на листе бумаги рисуется квадрат, например  $6 \times 6$ . В процессе игры его клетки заполняются буквами так, чтобы при чтении по вертикали и горизонтали можно было прочесть побольше слов. При своем ходе игрок произносит любую букву, и все участники записывают ее в пустые клетки квадрата. Игра продолжается до заполнения всего квадрата, после чего подсчитываются очки. Чтобы поощрить более длинные слова, можно ввести такую шкалу: за слово из шести букв начислять 20 очков, из пяти — 10, из четырех — 5, из трех — 2 очка. Двубуквенные слова и слова, являющиеся частями более длинных слов, не учитываются.

*Эрудит.* Игра «эрудит» — ее предшественник американский «скрэбл» — пожалуй, одна из самых интересных игр в слова, сочетающая в себе логические и комбинаторные моменты с элементами кроссворда и даже домино.

Игра ведется на доске  $15 \times 15$ . «Базар» содержит 131 фишку, на которых изображены буквы и оценивающие их числа. Как и в домино, каждый игрок берет по семь фишек и держит их в тайне от партнеров. За один ход можно составить несколько слов из фишек, имеющих на руках и расположенных на доске. Новое слово нельзя образовывать без завязки со старыми, то есть оно должно получаться из написанного слова плюс одна или несколько новых букв. Таким образом, все слова пересекаются, как в кроссворде. После сделанного хода игрок, как в домино, дополняет из базара свой запас фишек до семи.

За каждое новое слово начисляется столько очков, сколько записано на буквах, входящих в его состав. На доске имеется ряд цветных полей, которые меняют оценку. Очки буквы, занимающей зеленое поле, удваиваются, желтое — утраиваются. Если одна из букв на синем поле, удваивается сумма очков всего слова, а если на красном — утраивается. Игра продолжается либо до определенного числа очков, например 200, либо до полного опустошения базара. Мы не приводим здесь рисунка разукрашенной доски, по-

тому что комплект игры продается в магазинах игрушек, и вряд ли вы будете делать доску и фишки самостоятельно.

Любопытно, что при разработке «эрудита» не обошлось без математического вмешательства! При решении вопросов о том, сколько фишек с той или иной буквой должно быть на базаре и какие цены назначить буквам, необходимо было провести частотный анализ русского языка. Материалом для такого исследования служат различные тексты, на основании которых судят о частоте повторяемости отдельных букв. Существует много работ на эту тему, даже созданы специальные частотные словари. Однако воспользоваться ими для «эрудита» не так просто. Ведь, помимо частоты букв, надо учитывать их положение в слове — одни буквы чаще встречаются в начале слов, другие — в конце. Кроме того, у нас допускаются лишь существительные в единственном числе и именительном падеже. Распределение же букв в них отличается от распределения букв в других частях речи, которыми не разрешается пользоваться в игре. Все эти нюансы были учтены при создании «эрудита».

---

# 3

---

## Шахматные игры

---



Настоящая глава, как и последующие, посвящена играм, обязательными атрибутами которых служат доска и фигуры (шашки, фишки). Существуют сотни игр с участием доски и фигур, обо всех и не расскажешь. В нашей книге рассмотрены наиболее популярные игры, а также их разнообразные модификации. Речь идет о шахматных играх, шашечных, играх типа «крестики-нолики», игре Го. Одни из них распространены весьма широко, и многие люди всерьез увлекаются ими, другие игры носят занимательный или математический характер.

Большинство игр на досках имеет многовековую историю, литература, посвященная им, поистине безгранична. Десятки тысяч названий насчитывают только шахматные издания. Богата литература и по шашкам, рэндзю, Го. Теория различных игр на квадратных и прямоугольных досках занимает значительное место в серьезных работах по математике. Более простые игры описаны в многочисленных книгах по занимательной математике, а также в литературе по теории игр, теории графов, комбинаторике.

Данная глава посвящена шахматным играм, а следующая — шашечным. Поскольку многие из рассмотренных модификаций заметно отличаются от шахмат и шашек, в которые мы привыкли играть, следует уточнить, что мы понимаем под шахматными и шашечными играми.

И в шахматах, и в шашках необходимы доска и фигуры. В шашечных играх эти фигуры называются фишками, костями или просто шашками. Они не отличаются внешним видом и ходами, а имеют лишь разный цвет (обычно — белые и черные). Шашкам разрешается превращаться в дамки, башни или другие фигуры, но принципиального отличия между ходами новых и старых фигур нет.



Что касается шахмат, то в них набор фигур значительно шире, каждая имеет свои характерные особенности, они и выглядят по-разному, и ходят по-разному. В шахматах сражение идет по всей доске, а в шашках, как правило, по полям одного цвета. Впрочем, в рэндзю и Го костями заполняются все поля доски. Эти шашечные игры стоят несколько в стороне от традиционных шашек и живут самостоятельной жизнью. Поэтому и в книге они занимают две отдельные главы.

Шашечные игры имеют более древнюю историю и более широкий ассортимент, чем шахматные. Однако автор книги, будучи шахматным мастером, не мог позволить себе шашки поставить впереди шахмат! Сначала, как видите, идет глава, посвященная шахматным играм, и лишь за ней — шашечным.

Существует множество шахматных книг, пособий, учебников, в которых изложены правила игры, вопросы стратегии и тактики. То же самое касается и традиционных шашек — как русских, так и stokлеточных. Мы предполагаем, что эти игры, столь популярные в нашей стране, хорошо знакомы читателю, и делаем упор на необычные и менее известные варианты игр.

## **Игры на необычных досках**

Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков, и ее правила неоднократно менялись. С точки зрения математики различия в правилах игры, ходах фигур и форме доски не имеют принципиального значения.

Известно немало одних только национальных разновидностей шахмат. Самой древней шахматной игрой считается чатуранга, пришедшая из Индии и затем превратившаяся в шатрандж у арабов и шатранг у персов. До сих пор играют в японские шахматы (шogi), китайские (цюнь ки), корейские (тьян-кеун), армянские (тама), монгольские (шатар) и т. д. Эти игры (список их можно продолжить) больше относятся к истории шахмат, чем к математике, и не приводятся в книге.

Ниже мы рассмотрим ряд необычных шахматных игр, которые содержат те или иные математические элементы или носят занимательный характер. Прежде всего отметим, что игры могут отличаться от настоящих шахмат, во-первых, своей необычной доской, во-вторых, необычными фигурами и, в-третьих, необычными правилами игры. Разумеется, возможно присутствие двух «необычностей» или даже всех трех одновременно.

В этом разделе речь идет в основном об играх, которые получаются при изменении формы доски. Другие разновидности необычных шахматных игр рассматриваются в следующем разделе. Наконец, в третьем разделе рассказывается об играх, в которых преобладают математические элементы.

В нашей книге мы предпочитаем рассказывать о популярных играх, а не заниматься их классификацией с точки зрения математической теории игр. Но все-таки некоторыми научными терминами, пожалуй, стоит воспользоваться.

Шахматы, шашки и большинство их разновидностей относятся к разряду стратегических конечных игр с полной информацией. В этом смысле они ничем не отличаются от простейшей игры в крестики-нолики на доске  $3 \times 3$ . Структура таких игр теоретически абсолютно ясна. В каждом положении (позиции) у обеих сторон имеется конечное число ходов. Вся совокупность последовательностей ходов образует так называемое дерево игры. В любой позиции существует лучший ход, быть может не единственный. Последовательность лучших ходов за обе стороны (некоторая ветка на дереве) приводит воображаемую партию к однозначному результату, и поэтому исход игры в любом положении, в том числе в начале игры, является предопределенным. Но если в простейших крестиках-ноликах партия при наилучших ходах обеих сторон заканчивается вничью, то в других играх, прежде всего в обычных шахматах, вопрос о том, в чью пользу начальная позиция, по-видимому, навсегда останется открытым.

Процедура, которая дает оптимальную траекторию на дереве игры, называется минимаксной. Она лежит в основе многих переборных задач, возникающих не только при исследовании игр, но и при решении важных практических проблем, связанных с большим перебором вариантов. Сами эти проблемы изучаются в кибернетике, например в ее разделе «искусственный интеллект». Популярные игры, главным образом классические шахматы, служат удобной моделью для научных исследований, и поэтому их часто можно встретить в литературе по кибернетике.

Успешное решение переборных задач возможно только с помощью мощных компьютеров и современных методов программирования. Не случайно описание игр и их математический анализ можно найти и в книгах по программированию. Особой популярностью пользуются шахматы.

*Минишахматы и максишахматы.* Самый простой способ

получить новую шахматную игру — изменить размеры доски, уменьшить или увеличить их. Игру в минишахматы М. Гарднер предлагает тем, кто желает сыграть в шахматы во время небольшого перерыва на работе. Доска  $5 \times 5$  является минимальной, на которой умещаются все шахматные фигуры. Начальная расстановка такая: белые — Крa1, Фb1, Лe1, Сс1, Кd1, пп a2, b2, c2, d2, e2; черные — Кра5, Фb5, Ле5, Сс5, Кd5, пп a4, b4, c4, d4, e4. Ходы обычные, лишь пешкам запрещено переступать сразу на два поля вперед. Любопытно, что даже при таких размерах доски весьма сложно определить, ничейна начальная позиция или одна из сторон должна победить.

При увеличении размеров доски никаких ограничений, разумеется, не существует. Можно рассматривать различные математические и шахматные игры и задачи на прямоугольных досках  $m \times n$ , квадратных  $n \times n$  и даже на бесконечных досках. Желających сыграть на таких досках немного, эти игры используются, как правило, для придумывания интересных математических задач о маршрутах фигур, об их расстановках и перестановках на доске.

Если говорить о реальных шахматных играх, то среди прямоугольных досок рекорд принадлежит доске  $16 \times 12$ . Именно такие максишахматы предложил в свое время чемпион мира Хосе-Рауль Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат. Игра на этой максидоске ведется удвоенным комплектом фигур, причем начальный ход пешки возможен сразу на четыре поля (со второй горизонтали на шестую для белых или с одиннадцатой на седьмую для черных). Для победы достаточно заматовать любого из королей противника.

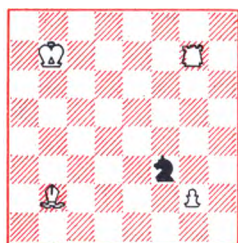
Матч Капабланки с венгерским гроссмейстером Мароци в максишахматы, состоявшийся в 1929 году, закончился победой автора игры со счетом 3:1. Партии продолжались более ста ходов и тянулись часов по десять. Как показала жизнь, опасности «ничейной смерти» не существует, и изобретение Капабланки распространения не получило.

Среди досок большого размера можно упомянуть доску  $12 \times 12$  для игры в так называемые великие шахматы, колыбелью которых была Индия. Каждый игрок имел по 12 фигур и 12 пешек, причем фигуры носили экзотические названия — крокодилы, жирафы, львы, единороги.

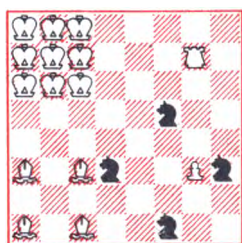
Известный завоеватель Тамерлан, страстный любитель шахматной игры, считал недостаточными обыкновенные размеры доски. Для шахмат его личной системы, которые имено-

вались образцовыми, была изготовлена специальная доска  $11 \times 10$ ; одиннадцать видов фигур (генерал, верблюд, рыцарь и др.) располагались на ней в три ряда.

*Шахматы на параллельных досках.* Идея «параллельных миров», часто используемая писателями-фантастами, не ускользнула и от внимания шахматных композиторов-фантастов. Игра ведется одновременно на двух досках, расположенных одна над другой. На каждой плоскости ходы обычные, но фигуры могут перемещаться и в пространстве — с одной доски на другую. На рис. 15 показано, как король, ладья, слон, конь и пешка переходят с нижней плоскости (1) на верхнюю (2). Ферзь в пространстве ходит как король, пешке разрешается менять плоскость только при взятии. Желающие сыграть партию могут ограничиться од-

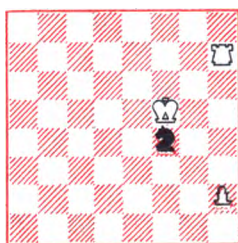


1

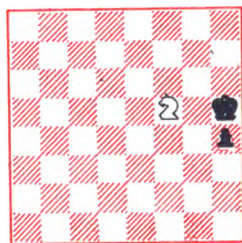


2

Р и с. 15



1



2

Р и с. 16

ной доской, а фигуры, отправляющиеся на вторую плоскость, ставить на прозрачные стаканы или подставки, лежащие на исходной доске. Надеемся, впрочем, что геометрическое воображение позволит вам разобраться в рассматриваемых задачах без использования специальных приспособлений.

В задаче на рис. 16 белые начинают и дают мат в 2 хода. 1. Лh7 (1) — h8 (1). Единственный способ выждать события.

Король черных неподвижен, и они могут ходить только конем или пешкой. Если отступает конь (на любую плоскость), то снимается удар с поля h5 и решает 2. Лh8(1) — h5(1) ×! — ладью поддерживает белый конь. На 1... h4 (2) — h3 (2) следует 2. h2 (1) — h4 (1) ×!, что было безопасно сразу ввиду взятия на проходе.

Для решения задачи на рис. 17 — белые начинают и дают мат в 4 хода — надо внимательно осмотреть пространство. Приведем основной вариант. 1. Кe5 (2) — c5 (1) ! с угрозой 2. Кс5 (1) — b3 (1) ×. Если 1... b6 (1) :c5 (1), то 2. Крс1 (2) — c2 (1) Ла7 (1) — a7 (2). Ладья выходит из за-сады, но тут же на другую плоскость перебегают белая ладья. 3. Лb2 (2) — b2 (1) Ла7 (2) — a2 (2) 4. Лb2 (1) — b1 (1) ×, или 3... Кра1 (1) — a2 (2) 4. Лb2 (1) — a2 (1) ×. Про-

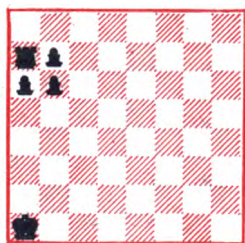
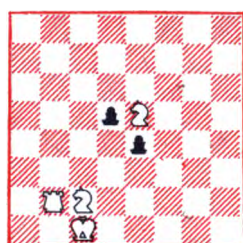


Рис. 17

1



2

анализируем для примера заключительное положение во втором варианте. Черного короля на a2 (2) с нижней плоскости матует ладья a2 (1). Действительно, сама ладья находится под присмотром коня c2 (2), а поля b1, b2, b3 (обеих плоскостей) под контролем белого короля.

*Цилиндрические и тороидальные шахматы.* Большинство рассматриваемых нами досок являются плоскими. Целый класс необычных досок получается, когда в «игру» вступает математика. При помощи различных геометрических или топологических преобразований стандартной доски нетрудно соорудить доски самой фантастической формы. Можно играть на цилиндрической и сферической доске, тороидальной, конусоидальной и даже на листе Мебиуса (обычная доска перекручивается на пол-оборота и склеиваются ее края). Шарообразная шахматная доска однажды как экспозиция участвовала на выставке авангардистов-художников.

Конечно, найдется немного желающих сыграть на перчисленных досках, однако некоторые из них весьма по-

пулярны среди шахматных композиторов-фантастов. При составлении и решении задач на таких досках не обязательно вооружаться ножницами и клеем, необходимые геометрические преобразования можно проводить мысленно.

Особой популярностью пользуются цилиндрические шахматы. Из обычной доски сооружаются две цилиндрические — вертикальная и горизонтальная. Первая получается приклеиванием вертикальных краев обычной доски, вторая — горизонтальных (рис. 18а, б). На цилиндрических досках получается не все, что возможно на обычной. Например, король и ладья, как правило, не в состоянии заматовать одинокого короля противника. С другой стороны, здесь открываются совершенно необычные возможности.

В задаче на рис. 19 два задания. Белые ставят мат в два

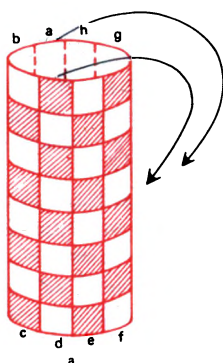
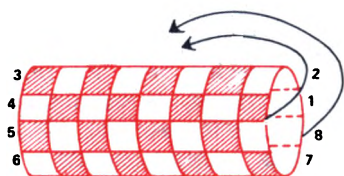


Рис. 18



б

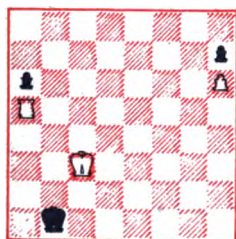


Рис. 19

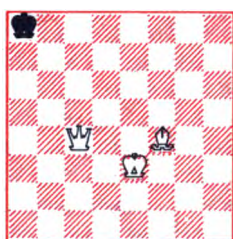


Рис. 20

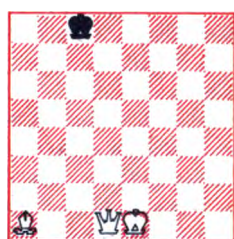


Рис. 21

хода: а) на обычной доске; б) на вертикальной цилиндрической. В первом случае все просто — 1.Л: а6 Крс1 2 Лa1 X. Но на цилиндре после 1. Ла5:а6 теряется ладья — 1...h7:а6! (вертикали «а» и «h» приклеены!). Если же ладья уйдет с а5, то черные продвинут пешку, и мата нет. Решает



1. Ла5 — а5!! — ладья совершает «круг почета» и возвращается на исходное место! На вынужденное 1... Крb1 — с1 следует 2. Ла5—а1×.

В задаче на рис. 20 уже три задания. Белые ставят мат в один ход на трех досках: а) обычной; б) вертикальной цилиндрической; в) горизонтальной цилиндрической.

Все три решения различны: а) на обычной доске решает 1. Фа6×, но не 1. Фа1 (h1) + Крb7 (а7) 1; б) на вертикальном цилиндре линии «а» и «h» приклеены и 1. Фа6+ опровергается при помощи 1... Кра8 — h8! Матует здесь 1. Фс4—а2—h1×! Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая угловое) — а8, b7 по диагонали h1 — а8 и h7 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять столько полей у короля, не становясь ферзем под бой, невозможно — ни на цилиндрической доске, ни тем более на обычной. Еще два поля для отступления черного короля — а7, b8 держит слон по диагонали с1 — h6 — а7 — b8. Итак, мы убедились, что на доске действительно матовая позиция. Легко проверить, что другие шахи ферзем не матуют: 1. Фе4 (с8, h7, g8) + Крh8 (h7, h7, b7)!

Заметим, что на шахматном цилиндре все диагонали одинаковые, то есть содержат (как вертикали и горизонталы) по восемь полей, причем геометрически каждая диагональ сворачивается в виток спирали. Так, на вертикальной цилиндрической доске на концах одного из таких витков оказываются поля а8 и h1, на концах другого — b8 и а1, третьего — с8 и b1 и т. д.

в) На горизонтальном цилиндре приклеены первая и восьмая линии и на 1. Фа6+ у короля есть ответ 1... Кра8—b1! К цели ведет только 1. Фс4 — f1 — g8 — h7×! Вновь ферзь отнял у короля четыре поля: а8, b1 по диагонали h7 — b1 — а8 и а7, b7 по седьмой горизонтали. Поля b8, а1 держит слон по диагонали h2 — b8 — а1. Другие шахи ферзем не матуют — король уходит на а7 или b7.

Итак, в задаче всего четыре фигуры, а сколько занятых геометрических мотивов! Кстати, если на поле b7 добавить черного коня, то на обычной доске решение такое же — 1. Фа6×, а на цилиндрических маты уже иные; на вертикальном цилиндре 1. Фg8×, а на горизонтальном 1. Фа2×, причем пикантность матов в том, что они двойные, и перекрытия 1... Кd8 (h8) и 1... Ка5 (а1) не спасают.

Любопытная задача с таким же материалом на рис. 21. Белые начинают и дают мат в... 0 ходов. Это задание на вер-

няка удивит читателя, а между тем мат ставится, причем сразу двумя способами. Для того чтобы добиться столь необычной цели, белые, как и требуется, не дотрагиваются ни до одной из своих фигур, но зато... сворачивают доску в цилиндр.

На любой из досок — горизонтальной или вертикальной — черный король сразу оказывается заматованным. Пусть приклеены друг к другу первая и последняя горизонтали. Тогда поле a1 присоединяется слева к диагонали b8 — h2, и поля b8, c7 попадают под наблюдение слона. Кроме того, в одну сливаются диагонали a6 — c8 и d1 — h5 (a6 и h5 — края новой диагонали), и в результате ферзь нападает на черного короля, отнимая у него и поле b7. Ну а поля d7, d8 недоступны королю на любой доске. Мат!

На вертикальном цилиндре поле a1 вновь присоединяется к диагонали b8 — h2, но снизу, а диагонали d1 — h5 и a6 — c8 опять сливаются (теперь края новой диагонали — d1 и c8). И снова черный король попадает в матовую сеть.

Многим знакома «задача о 8 ферзях», которой занимался великий математик К. Гаусс: сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу?

Оказывается, что если на обычной доске имеются 92 искомые расстановки, то на цилиндре уже нет ни одной! Докажем это для вертикальной цилиндрической доски. Возьмем обычную доску, помня, что ее края приклеены. Это означает, в частности, что поля с d1 до a4 и с h5 до e8 образуют одну диагональ. Запишем на каждом поле доски три цифры, совпадающие соответственно с номером вертикали, горизонтали и диагонали (параллельной a8 — h1), проходящих через это поле (рис. 22).

Если восемь ферзей не угрожают друг другу, то на восьми полях, занимаемых ими, все первые цифры различны и, значит, образуют полный набор чисел 1, 2, ..., 8. То же утверждение справедливо для вторых и третьих цифр. Значит, сумма всех 24 цифр, стоящих на полях с ферзями, равна  $(1 + \dots + 8) \times 3 = 108$ . Так как сумма цифр каждого поля делится на 8, то и найденная сумма должна делиться на 8, однако 108 на 8 не делится — противоречие!

Тороидальная доска получается в результате двойного склеивания краев обычной доски (см. стрелки на рис. 18, а, б). На такой доске одинокого короля не могут заматовать даже ферзь с королем — здесь просто нет ни одной матовой позиции.

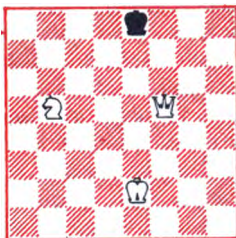


На рис. 23 изображена одна из задач на тороидальной шахматной доске. Белые начинают и дают мат в 4 хода. После 1. Фf5-h7! в распоряжении черных имеется два ответа: а) 1... Кре8-f8 (поля d1, e1 и f1 контролирует белый король с e2 — на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) 2. Фh7-g6 Крf8-e7 3. Кре2-e1 Кре7-d7 (поля d8 и f8 держит белый король с e1) 4. Фg6-e8×!; б) 1... Кре8-d8 2. Фh7-c7+Крd8-e8 3. Кb5-h6! (конь идет по торе, как по вертикальному цилиндру!) 3... Кре8-f8 4. Фc7-e1×! (поля f7 и g8 около черного короля держит белый конь, а остальные — ферзь).

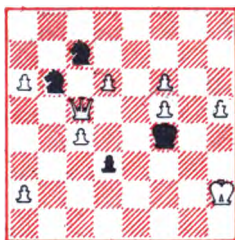
*Проективные шахматы.* В проективные шахматы играют на проективной доске. Правила игры основаны на таких свойствах прямых линий, которые изучаются в проектив-



Р и с. 22



Р и с. 23



Р и с. 24

ной геометрии, где предполагается, что любое семейство параллельных прямых пересекается в так называемой бесконечно удаленной точке. В соответствии с этим доска для проективных шахмат получается из бесконечной доски (которая простирается по всей плоскости) добавлением четырех бесконечно удаленных полей:  $P_r$  — пересечение горизонталей,  $P_v$  — пересечение вертикалей,  $P_{d_1}$  — пересечение диагоналей, параллельных a1-h8,  $P_{d_2}$  — пересечение диагоналей, параллельных a8-h1.

На проективной доске сохраняются многие правила обычных шахмат, а основное изменение состоит в том, что дальнобойная фигура может переместиться на бесконечно удаленное поле (с учетом ее способа передвижения) и оттуда вернуться на конечное поле доски.

Рассмотрим одну задачу на проективной шахматной доске (рис. 24). Белые начинают и дают мат в два хода. Первый ход решения 1. Kph2-g1! Теперь у черного короля несколько ответов. Если он идет на e4, то мат дает ферзь,

удаляясь в бесконечность через  $a5: \Phi c5-P_r \times$ . Действительно, с поля  $P_r$  ферзь нападает на черного короля и держит все поля вокруг него:  $e3, f3$  — через  $h3, d4, e4, f4$  — через  $h4; d5, e5, f5$  — через  $a5$ . Ход 2.  $\Phi c5-P_r$  матует и при  $1... Kpf4-f3$ . Поля  $e4, f4, g4$  в этом случае ферзь держит через  $h4; e3, f3, g3$  — через  $h3$ , а  $e2, f2, g2$  — через  $h2$  (белый король предусмотрительно ушел с  $h2$ ).

При отступлении черного короля на линию «g», а также при  $1... d3-d2$  матует 2.  $\Phi c5-P_{d1} \times$  (ферзь уходит в бесконечность по диагонали  $c5-a3$ ). Например, после  $1... Kpf4-g5$  2.  $\Phi c5 - P_{d1} \times$  поля  $f4, g5, h6$  ферзь держит через  $c1$ ; поле  $f6$  — через  $a1$ ; поле  $f5$  — через  $h7$ ; поля  $g4, h5$  — через  $d1$ ; и поле  $h4$  — через  $e1$ .

Осталось рассмотреть ходы черных коней. На любой ход коня  $b6$  следует 2.  $\Phi c5-P_{d2} \times$ , а на любой ход коня  $c7$  — 2.  $\Phi c5-P_b \times$  (в первом случае ферзь уходит в бесконечность через  $a7$ , во втором — через  $c8$ ).

Для задачи-двухходовки важно не только наличие решения, но и его единственность. Нетрудно убедиться, что при других вступлениях белым уже не удастся поставить мат на втором ходу. Так, после 1.  $\Phi c5-P_r +$  черный король скрывается на  $g5$ , а после 1.  $\Phi c5-P_{d1} +$  — на  $e4$ , с поля  $P_{d2}$  ферзь даже не дает шаха, а хода  $\Phi c5-P_b$  и вовсе нет (вертикаль «с» загорожена с обеих сторон). Любопытно, что в решении задачи использовались все четыре бесконечно удаленных поля проективной шахматной доски.

*Объемные шахматы.* Поля досок, которые мы рассматривали до сих пор, определялись двумя координатами, то есть использовалась обычная шахматная нотация (лишь в игре на параллельных досках обозначения были чуть сложнее). Иначе обстоит дело в объемных (пространственных) шахматах. В них играют на трехмерной доске, представляющей собой параллелепипед  $m \times n \times k$  (в частности, куб  $n \times n \times n$ ), единичные кубики которого образуют «поля» доски. Эти поля записываются уже тремя координатами. Возьмем, например, объемную доску  $4 \times 4 \times 4$ , содержащую, как и обычная, 64 поля, но только объемных (64 кубика). Если четыре горизонтальных слоя такой доски занумеровать числами 1, 2, 3, 4, то ее левый ближний столбец содержит поля  $a11, a12, a13, a14$  и т. д. Перемещению вдоль слоя объемной доски соответствует ход на обычной доске, но фигуры могут перескакивать также из одного слоя в другой. Так, ферзь с поля  $a11$  в состоянии двигаться не только обычными маршрутами до полей  $a41$  и  $h11$ ,

но может попасть и на верх доски — на поле a14 или пройти по ее большой диагонали a11-h44. Конь на объемной доске тоже ходит буквой Г: на одно поле в одном слое и на два в перпендикулярном.

Мы уже говорили о задаче «о восьми ферзях», которой интересовался К. Гаусс. Еще одной математической задачей на шахматной доске — «о ходе коня» увлекался другой великий математик Л. Эйлер. Требуется обойти конем все поля обычной шахматной доски так, чтобы ни одно из них не посетить дважды. Известно много методов обхода доски указанным образом, в том числе предложенных Эйлером, однако общее число маршрутов до сих пор не установлено (доказано, что оно превышает 30 миллионов!).

Следующая задача обобщает классическую задачу о ходе



Рис. 25

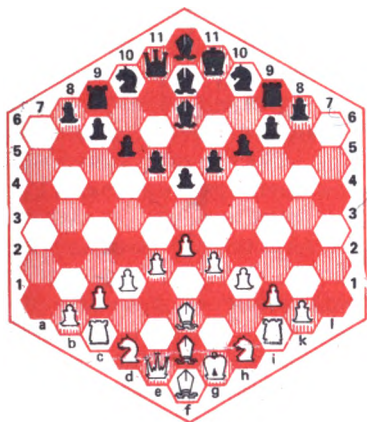
коня. Обойти конем все поля объемной шахматной доски  $4 \times 4 \times 4$ , посетив каждое из них по одному разу.

Найти маршрут коня на объемной доске равносильно тому, чтобы последовательно занумеровать все ее поля-кубики числами от 1 до 64 так, чтобы каждые два поля с соседними номерами были связаны ходом коня. На рис. 25 представлены проекции четырех горизонтальных слоев объемной доски на плоскую доску  $4 \times 4$  (слои имеют номера 1, 2, 3, 4). Нетрудно убедиться, что, отправляясь от поля b33 (с номером 1) и двигаясь конем в указанной последовательности, мы обойдем все поля доски  $4 \times 4 \times 4$ .

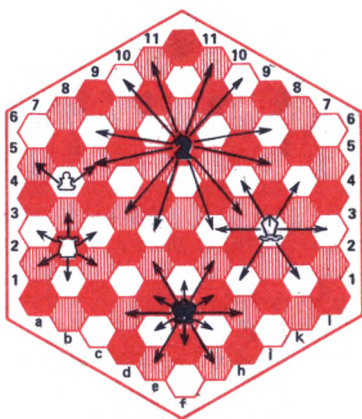
**Гексагональные шахматы.** Нестандартные доски редко используются для серьезной игры, это, скорее, инструмент для композиторов-фантастов. Но есть и одно исключение — гексагональные, или иначе, шестигранные, шахматы. Доска, как и ее поля, имеют вид шестиугольника, и фигуры получают намного больше простора. Изобретены два варианта игры, один — советским геологом И. Шафраном, другой — польским инженером В. Глинским. Польские шахматы

получили довольно широкое распространение в мире. Расскажем сначала о них.

Гексагональная доска состоит из 91 поля трех цветов — белого, черного и серого; на ней 11 вертикалей от «а» до «l» (кроме «j»), поля каждой нумеруются снизу вверх (рис. 26). На крайних вертикалях по 6 полей, на центральной — 11. Роль горизонталей выполняют диагонали, слева от линии «f» параллельные a1-f1, а справа параллельные f1-l1. В дополнение к обычному комплекту фигур каждая сторона получает по одному слону — серопольному и одной пешке. Начальное расположение показано на рис. 26, а ходы фигур — на рис. 27. Король, как и полагается, ходит на все соседние поля — не только непосредственно примыкающие к данному, но и на ближайшие к нему того же цвета. Таким образом,



Р и с. 26



Р и с. 27

с f3 он может пойти на одно из 12 полей, указанных стрелками. Столько же полей и в распоряжении коня, стоящего на f8. Ладья и слон перемещаются на любое число полей в одном из шести направлений (разных для этих фигур). Ферзь, объединяющий ходы ладьи и слона, движется в тех же 12 направлениях, что и король, но на произвольное число полей. Конечно, ближе к границе доски число ходов для всех фигур уменьшается. Пешки ходят на одно поле по вертикали (в начальном положении на два), бьют наискосок: с b5 на a5 и c6 (рис. 27). Сохраняется и взятие на проходе — в ответ на c2-c4 черная пешка d3 может побить белую d3:c3. Достигая последнего поля вертикали, пешка

превращается в любую фигуру. Рокировок нет, так как короли находятся в достаточной безопасности, а ладья за два хода подключается к атаке или защите. Все остальные правила, в том числе цель игры — поставить мат неприятельскому королю, не меняются.

Доска для шахмат Шафрана изображена на рис. 28, она получается из польского варианта отбрасыванием линий f1-l1, f2-l6 и двух правых вертикалей k1-k7 и l1-l6; число полей сокращается до 70. Начальная расстановка (рис. 28) напоминает обычные шахматы, а фигуры ходят, как на рис. 27, лишь пешка бьет под углом  $60^\circ$ : с b5 на a6 и c7. Пешки трех центральных вертикалей могут сделать первый ход сразу на три поля вперед, остальные — только на два. В данной игре возможны рокиров-

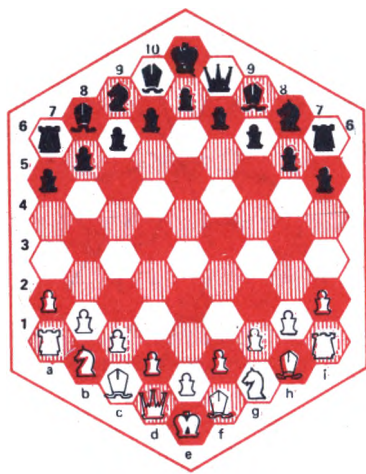


Рис. 28

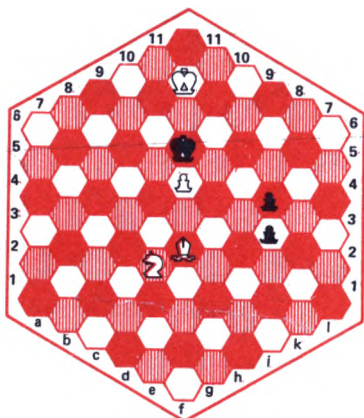


Рис. 29

ки — короткая, если ладья приближается к королю, и он переступает через нее, и длинная, если король подходит к ладье, и она перепрыгивает через него.

В польских шахматах доска представляет собой правильный шестиугольник, и, возможно, такая геометрическая четкость помогла Глинскому «обыграть» Шафрана в популярности игры. В шахматах Шафрана партия может закончиться уже на третьем ходу: 1. Kb1-c4 Kc8-d6 2. Фd1-e3 b6-b5 (черные хотят прогнать неприятельского коня, но их ждет горькое разочарование) 3. Kc4-d7×! В шахматах Глинского возможен только «детский», 4-ходовый мат:

1. Fe1-c3 Fe10-c6 2. Kh1-i3 Kh9-i6 3. Ki3-g6 e7-e6 4. Фс3:f9×, или 3... Ki6-g5 4. e4-e5 Фс6:f3×. Забавно, что в этой игре шах дается уже на первом ходу: 1. Kpg1-g2 Cf10-d6†.

В классических шахматах дебюты исследованы глубоко, самостоятельное творчество нередко начинается только после 15—20 ходов. Теория шестигранных шахмат почти не разработана, к тому же разнообразие ходов и вариантов столь велико, что предугадать ответ противника труднее, чем в обычных шахматах. Увеличились размеры доски и как следствие подвижность фигур, у любителей тактики теперь больше возможностей для комбинаций.

Немного хроники. В 1953 году польские шахматы демонстрировались на Всемирной выставке в Париже. В 1980-м в Лондоне состоялся первый чемпионат Европы. Тогда же был организован и всесоюзный клуб «6 граней», который с 1982 года проводит соревнования. В 1984-м в Венгрии прошел второй чемпионат Европы, в котором участвовали 26 игроков из 7 стран. Победителям первого первенства поляку М. Мацковяку и второго — венгру Л. Рудольфу присвоено звание международного гроссмейстера по гексагональным шахматам.

Геометрия шестигранной доски весьма своеобразна. Так, вертикаль «f» является ее осью симметрии, а поле f6 — центральным полем (на стандартной доске центр состоит из четырех полей — d4, d5, e4, e5). Хотя доска больше, чем обычная, но путь коня между произвольными двумя полями занимает не более четырех ходов (на доске 8×8 конь с a1 до h8 добирается за 6 ходов). Любая фигура на гексагональной доске может сделать ход, сохраняя контроль над прежними полями. Особенно интересно проявляется это свойство у коня. Например, находясь на g9, он атакует поле e7, но, перескочив на d9 или h6, продолжает контролировать его. Получается, что конь в состоянии пройти по треугольнику, выигрывая темп у партнера. В обычных шахматах коня для такой цели использовать невозможно.

Вот еще некоторые отличия польских шахмат от традиционных. Один король на гексагональной доске в состоянии запатовать неприятельского короля, если тот находится в углу. Например, белый король f3 полностью сковывает действия черного короля f1. Из этого следует, что король и любая фигура могут дать мат одинокому неприятельскому королю. С другой стороны, загнать короля в угол нелегко даже двумя легкими фигурами, для победы необходи-



ма третья. Зато ферзь без всякой поддержки может поставить мат, скажем, с того же поля f3 королю f1.

Рассмотрим три задачи на польской гексагональной доске.

В задаче на рис. 29 белые начинают и дают мат в 4 хода.

В обычных шахматах конь, совершающий ход, теряет контроль над полями, которые только что были в его распоряжении. Иное дело в гексагональных...

В данной позиции черный король запатован: поля e6 и g6 держит белый слон, e7 и g7 — пешка, e8, e9, f7, g7, g8 — король, сама пешка f7 находится под защитой коня. Но ведь белым надо ходить...

1. Ke4-c5! Конь сдвинулся с места, но не выпустил из-под контроля пешку f7,— хитрый прием, уже упомянутый

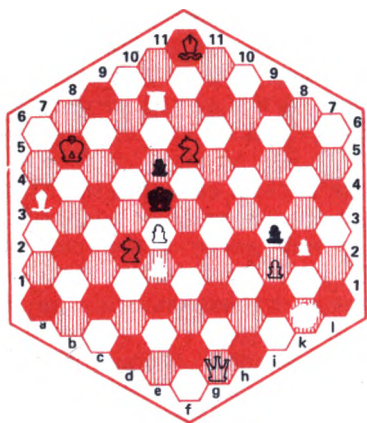


Рис. 30

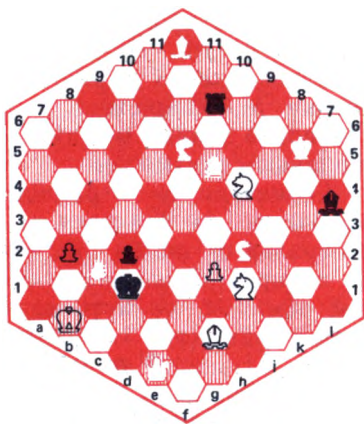


Рис. 31

выше. 1... i4-i3 2. Kc5-d8! Вновь пешка под защитой коня. Не годится 2. Ke4? из-за 2... i4! и мата нет, но не 2... i2 3. Kh4 и 4. Ki6X.

2... i3-i2 3. Kd8-g9 i2-i1Ф 4. Kg9-i6X! Конь сделал четыре подряд хода, но пешка все время находилась под его защитой!

В задаче на рис. 30 белые начинают и дают мат в 2 хода. На первый взгляд у черного короля достаточная свобода, и за два хода его не пленить...

1. Cf11-l1! Неожиданное перемещение слона из угла в угол шестиугольной доски решает дело. Черные в цугцванге. Любой ход их короля ведет к красивому мату фер-

зем в центре доски. 1... Кре6:d4 2. Фg1-c2×. Пригодился слон, который взял под прицел поле c2. 1... Кре6:f8 2. Фg1-g9×. Поле g7 тоже контролируется слоном, притаившимся вдали от места основных событий. 1... Кре6-f5 2. Фg1-g3×. И поле g3 в зоне действия слона. 1... Кре6-d6 2. Фg1-c6×. В последнем варианте белого ферзя поддерживает король.

И на рис. 31 белые начинают и дают мат в 2 хода. Эта задача иллюстрирует геометрическую тему Новотного (перекрытие), довольно распространенную в обычной шахматной композиции. Разница лишь в иных линиях действия фигур.

1. g4-g6! Пешка стартует сразу на два поля вперед. Попутно возникает еще один задачный элемент — освобождение поля для другой фигуры. Теперь пешка оказалась в точке пересечения линий g1-g10 и a4-l4, находящихся соответственно в распоряжении ладьи и слона. 1... Ch4:g6. Траектория ладьи перекрыта и 2. Kh6-g4×. 1... Лg9:g6. Траектория слона перекрыта (линия a4-l4 не принадлежит компетенции ладьи) и 2. Kh6-e6×.

*Шахматы для нескольких игроков.* Почти все игры, рассматриваемые в книге, в том числе шахматы, по терминологии математической теории игр представляют собой игру двух лиц, то есть в них играют два человека. В упомянутых до сих пор разновидностях шахмат предполагалось наличие двух участников, однако известно немало шахматных игр, в которые могут одновременно играть три или четыре игрока. Так, в одном из вариантов шахмат «на троих» доска представляет собой шестиугольник с 96 полями, а фигуры трех цветов — белые, черные и красные. Выигрывает тот, кто берет королей обоих соперников. Игра построена таким образом, что позволяет двоим партнерам объединяться против более сильного.

Интересно, что в своем первоначальном виде шахматы были предназначены для четырех игроков. Речь идет о старинной игре чатуранга, в которую играли двое на двое (желтые и красные боролись с черными и зелеными). Вряд ли стоит описывать правила чатуранги, поскольку в наше время эта игра имеет лишь исторический интерес.

Четверо шахматистов сражались когда-то и в «королевскую игру», доска для которой имела форму креста и состояла из системы линий, пересекающихся по вертикалям, горизонталям и диагоналям. Сейчас королевская игра совсем забыта, а название сохранилось в виде синонима для обыкновенных шахмат.



Из игры с четырьмя участниками шахматы постепенно превратились в игру для двух человек. Хотя современные шахматы завоевали всеобщее признание, игра для четверых полностью не забыта. В так называемые четверные шахматы играют на 160-клеточной доске, которая получается из доски  $8 \times 8$  добавлением к каждому краю трех горизонталей — на двух крайних из них расставляются фигуры стандартным образом, всего четыре обычных комплекта. Играют двое на двое, причем члены одной команды сидят напротив друг друга или рядом. Известны различные виды четверных шахмат, они отличаются не только расположением участников около доски, но и правилами игры, территорией, на которой разрешено действовать, цветом фигур. Любопытно, что в одном варианте игры заматованный король снимается с доски, в другом остается на ней и может быть разматован союзником. Четверные шахматы официально признаны в нашей стране, и по ним даже было проведено несколько чемпионатов столицы.

Если у вас собралась шахматная компания из четырех человек, все жаждут играть, а ничего, кроме одной, самой обыкновенной доски под рукой нет, не отчаивайтесь. Играйте двое на двое обычную партию, но ходы делайте по очереди, через одного. Это очень веселая игра, и не беда, если один из двух членов команды задумает интересную идею, а другой сразу же ее погубит.

Итак, для четырех игроков придумано много шахматных игр. Однако рекорд числа действующих лиц принадлежит «астрономическим шахматам», распространенным в глубокой древности. В них играли семь человек на круглой доске, а фигурами были планеты и звезды (Луна, Солнце, Венера, Марс и т. д.).

### **Сказочные шахматы**

В предыдущем разделе мы рассказали о различных играх, связанных с теми или иными преобразованиями шахматной доски. Однако для получения новых игр не обязательно использовать специальные доски, достаточно на обычной доске  $8 \times 8$  изменить правила игры или ввести необычные фигуры. Именно на таких играх мы остановимся в данном разделе. Разновидности шахмат с необычными ходами фигур и необычными правилами шахматные композиторы относят к жанру сказочных или фантастических шахмат, а эти «необычности» используют для составления интересных и оригинальных позиций и задач.

*Шахматы с шахами и без шахов.* В игре «до первого шаха» все, как в настоящих шахматах, только выигрывает не тот, кто «первым» дает мат, а кто первым объявляет шах. При обычной начальной позиции белые форсированно побеждают, причем не позднее пятого хода.

1. Кс3. Грозит выпад конем на е4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ 1... е6 (1... е5 2. Кd5 и 3. Кf6+), и после 2. Ке4 Кре7 3. Кf3 второй белый конь с решающим эффектом вступает в игру: 3... Фе8 (3... d6 4. Кd4) 4. Ке5, и шах следующим ходом.

Чтобы оживить игру, следует каким-либо образом изменить начальную позицию, например передвинуть белую пешку с с2 на с3, а черную — с с7 на с6. Теперь невозможен первый ход 1. Кс3, и форсированного выигрыша уже не видно, после 1. Фb3 d5 2. Фb4 Фd6! 3. Фа4 Cd7 4. Фh4 Кf6 черный король пока что надежно защищен от шахов.

В игре «шахматы без шахов» фигуры ходят обычным образом, но объявлять простой шах запрещено — первый же шах должен быть одновременно и матом. В игре «шахматы с шахами» правила иные — партия продолжается, как обычно, до мата, но шах является обязательным — если он имеется, то его нужно объявить (любым способом).

Кстати, экс-чемпион мира по «нормальным» шахматам А. Карпов в детстве любил играть в игру «кто первым объявит три шаха» и неизменно становился победителем.

*Двухходовые шахматы.* В этой игре каждый ход белых и черных состоит из двух обычных (после первого хода «цикла» король может находиться под шахом). Такое изменение правил позволяет доказать следующий неожиданный факт.

При правильной игре в двухходовые шахматы белым по меньшей мере гарантирована ничья.

Попробуем доказать это от противного. Пусть белые, как бы хорошо они ни играли, всегда проигрывают. Тогда после 1. Kb1-c3-b1 сохраняется начальная позиция, а первый ход уже принадлежит черным. Фактически теперь черные играют белыми и, по предположению, также проигрывают. Противоречие.

Кажется, все правильно. Однако это доказательство является не совсем точным. После первого хода белых позиция действительно повторяется, но ситуация иная! Так, при 1... Kg8-f6-g8 2. Kb1-c3-b1 белые еще не могут тре-

бовать ничью, а черные могут, поскольку 2... Kg8-f6-g8 приводит к троекратному повторению исходной позиции. Таким образом, нельзя считать, что после 1. Kb1-c3-b1 черные играют белыми — возможности сторон разные. Аналогичный пример можно привести и на «правило 50 ходов». Примечательно, что на эту весьма тонкую ошибку в доказательстве указал выдающийся советский математик академик А. Колмогоров.

Приведем теперь строгое доказательство. Вновь предположим, что, как бы белые ни играли в двухходовые шахматы, они должны проиграть. Будем играть с воображаемым партнером одновременно две партии на двух досках. На первой доске начнем партию ходом 1. Kb1-c3-b1 (не изменяя в результате расположения фигур на ней). Ответ черных на этот выжидательный ход повторим со стороны белых на второй доске (скажем, если черные сыграли на первой доске 1... e7-e5, d7-d5, то наш первый ход на второй доске будет 1. e2-e4, d2-d4). Затем ответ противника на второй доске повторим на первой за белых, ход черных на первой — за белых на второй и т. д. По нашему предположению, черные рано или поздно должны выиграть обе партии, и, значит, наступит момент, когда на первой доске своим очередным ходом они объявят мат белому королю. Но тогда на второй доске при повторении этого хода за белых возникнет позиция, в которой мат получает черный король! Противоречие.

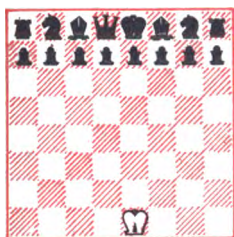
Наше доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не выяснили, как им нужно играть. Более того, если будет показано, что белые форсированно выигрывают (как, например, в игре до первого шаха), то тогда, очевидно, первый ход белых 1. Kb1-c3-b1 проигрывает. Таким образом, не исключено, что наше доказательство беспроеигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

Вот одна из распространенных модификаций двухходовых шахмат. У одного игрока полный комплект фигур, которые ходят обычным образом, а у другого лишь король и несколько пешек, но делают они два хода сразу. Цель слабейшей стороны — побить неприятельского короля. Эта игра довольно забавна: кто впервые знакомится с ней, всегда выбирает фигуры с нормальными ходами и... быстро проигрывает. В двухходовых шахматах один голый король способен уже на четвертом ходу объявить мат противнику,

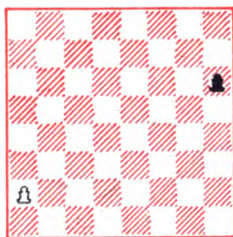
обладающему всей армией фигур (рис. 32): 1. Крe1-e2-e3 (первый двойной ход) 1... e7-e5 (ход черных одинарный) 2. Крe3-e4:e5 Фd8-e7+ 3. Крe5-d6:c7+, и следующим ходом черный король снимается с доски.

Если в некоторой позиции любой ход белых проигрывает, то мы говорим, что они в цугцванге (если проигрывает и любой ход черных, цугцванг взаимный). «Шахматы без цугцванга» отличаются от обычных добавлением всего одного хода — хода на месте. В них цугцванга уже не бывает, так как всегда можно передать очередь партнеру.

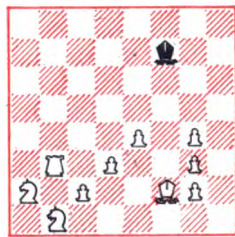
Приведенное выше доказательство того, что при правильной игре в двухходовые шахматы белым гарантирована ничья, полностью годится и для шахмат без цугцванга. Однако в отличие от двухходовых шахмат поиск непосред-



Р и с. 32



Р и с. 33



Р и с. 34

ственного мата здесь безнадежен! Напомним, что в настоящих шахматах, где шансы белых, судя по статистике, заметно выше, вовсе не доказано, что даже при наилучшей игре им обеспечена хотя бы ничья.

*Поддавки.* Более популярны шашечные поддавки, о которых речь пойдет в следующей главе, однако их шахматный вариант также довольно интересен. Основная задача игроков в обеих играх — избавиться от всех фигур. Правда, если в шашках цели обычной игры (прямой) и обратной прямо противоположны, то в шахматах ситуация несколько иная — понятие мата здесь отсутствует, и победителем становится тот, кто первым отдаст противнику все свои фигуры или запатует их. Как и в шашках, взятие обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля.

Любопытно, что в шахматных поддавках имеется своя необычная и не столь простая теория. Как это ни парадоксально, но уже первый ход может оказаться решающей

ошибкой. Доказано, что ходы 1. e4 и 1. d4 (то есть самые распространенные вступления в нормальных шахматах) форсированно проигрывают в поддавки — черным удастся одну за другой отдать все свои фигуры! Вот как достигают они цели при движении белой королевской пешки вперед на два поля.

1. e4? b5! 2. С:b5 Kf6 (тихий ход) 3. С:d7 К:e4 4. С:c8 (возможность 4. С:e8 рассмотрена ниже) 4... К:d2 5. С:d2 Ф:d2 6. Ф:d2 Ка6 7. С:a6 Лс8 8. С:c8 f5 9. С:f5 Лg8 10. С:h7 c5 11. С:g8 e6 12. С:e6 c4 13. С:c4 a6 14. С:a6 g5 15. Ф:g5 Kpd8 16. Ф:d8 Се7 17. Ф:e7, и на доске остались одни белые фигуры. На 4. С:e8 решает 4... Ф:d2 5. Ф:d2 (5. С:f7 Ф:c1 6. Ф:c1 К:f2 7. Кр:f2 Лg8 и т. д.) 5... К:d2 6. Кр:d2 Лg8 7. С:f7 c5 8. С:g8 g6 9. С:h7 e5 10. С:g6 e4 11. С:e4 Кс6 12. С:c6 Сb7 13. С:b7 Лс8 14. С:c8 a6 15. С:a6 c4 16. С:c4 Са3 17. К:a3, и черные выиграли в поддавки.

Еще проще «опровергается» первый ход ферзевой пешки: 1. d4? e5! 2. de Фg5! 3. Ф:d7 С:d7 (этот размен на d7 может произойти и позднее) 4. С:g5 Kpd8 5. С:d8 a6 6. С:c7 Ла7 7. С:b8 b6 8. С:a7 a5 9. С:b6 g6 10. С:a5 Сb4 11. С:b4 Ке7 12. С:e7 Лf8 13. С:f8 h6 14. С:h6 g5 15. С:g5 f6 16. С:f6 Ch3 17. К:h3. Победа за черными!

Оригинальные и неожиданные идеи присутствуют и в задачах, связанных с шахматными поддавками. В позиции на рис. 33 белым нужно выиграть в поддавки, то есть избавиться от своей единственной пешки. Проще положения на доске уже не может быть, а посмотрите, сколько тонкостей оно содержит!

1. a3! Белые отдают темп противнику — весьма распространенный прием в нормальных шахматах. 1... h5 2. a4 h4 3. a5 h3 4. a6 h2 5. a7 h1Л! Если черные ставят ферзя или слона, то после любого превращения белой пешки они будут вынуждены сразу взять ее. На 5... h1К следует 6. a8Ф и 7. Фh1! Если на доске появляется черный король — 5... h1Кр, то не проходит 6. a8Ф и 6. a8С из-за 6... Kpg2, превращение 6. a8Кр приводит к ничьей, не годится и 6. a8К; в этом случае решает 6. a8Л! Kpg2 7. Ла4 Kpf2 8. Лd4 Kpg2 9. Ле4 Kph2 10. Лf4 Kph1 11. Лf3 Kpg2 12. Лf2 Кр:f2, и белые добились своей цели.

6. a8С! Белые ставят на доске еще более слабую фигуру. При других превращениях черные легко избавляются от своей ладьи. Теперь же на любой ее ход следует 7. Ch1!, и игра в шахматные поддавки заканчивается в пользу белых.

В забавной позиции на рис. 34 белые от одних фигур избавляются, а другие запатовывают: 1. Лb6! С:a2 2. Лg6 С:b1 3. g5 С:c2 4. g4 С:d3 5. Ch4! С:e4 6. g3 С:g6. Белые выиграли в поддавки, потому что им нечем ходить.

*Изменение начальной позиции.* Получить новую игру на шахматной доске можно без введения каких-либо особых правил, достаточно в исходной позиции поменять местами некоторые фигуры. Действительно, в результате такой процедуры глубокое знание классической теории дебютов и даже середины игры уже теряет свое значение. При изменении начального положения на доске пешки обычно оставляют на месте, а фигуры переставляют на крайних линиях, за пешечным частоколом. Вычисления показывают, что общее число исходных позиций  $(7!)^2 = 25\ 401\ 600$ . Итак, если все игры, отличающиеся исходным расположением фигур на крайних горизонталях, считать разными, то из обычных шахмат можно без всякого труда получить более 25 миллионов новых игр!

Не очень радикальные новаторы предлагают для создания новой игры ограничиться перестановкой у каждой стороны короля и ферзя. Весьма наивное предложение! Хотя полученная игра довольна непривычна, однако она ничем не отличается от обычных шахмат. Чтобы в этом убедиться, достаточно мысленно перекрасить цвет полей доски и рядом с ней (слева или справа) поставить зеркало, глядя в которое и делать ходы. Зеркальное отражение нашей позиции совпадает с обычным расположением фигур перед началом игры. Если наш противник неважно играет в нормальные шахматы, то и здесь он может быстро получить «детский мат»: 1. d4 d5 2. Cf4 Kf6 3. Фа5 Кс6 4. Ф:c7X.

Применяются различные забавные способы получить начальную расстановку фигур. Например, можно поступить так. Белые ставят на любое поле крайней горизонтали одну из своих фигур, черные такую же фигуру ставят напротив и, в свою очередь, сами выбирают поле для следующей фигуры. Теперь белые ставят ту же фигуру напротив и т. д. При такой процедуре ни у одного из противников не будет оснований считать, что его фигуры перед началом игры расположены хуже.

Есть и другой, более увлекательный способ расположения фигур. В середине доски ставится экран, и оба соперника по секрету друг от друга расставляют на своей территории фигуры как им заблагорассудится. После того как фигуры расставлены, экран снимается с доски, и начи-

нается игра (по обычным правилам), которая называется «шахматы втемную».

Любопытный турнир состоялся в 1909 году в Амстердаме. Он протекал по особым правилам: перед началом партии соперники снимали с доски своих ферзевых коней и в дальнейшем вводили «кавалерийский резерв» в бой в наиболее благоприятный момент. Такую игру следовало бы назвать «конь за пазухой».

*Магараджа.* До сих пор мы обсуждали игры с необычными правилами, но фигуры в них ходили, как в настоящих шахматах. Безграничное море необычных игр, задач и идей возникает при введении в обиход сказочных фигур. Возьмем, к примеру, фигуру магараджа (в других источниках амазонка), которая объединяет в себе ходы ферзя и коня. Она является главным действующим лицом в следующей игре.

У одного игрока — полный комплект фигур, стоящих на первоначальных местах, у другого — лишь один магараджа, которого он ставит на произвольное поле. Магараджа проигрывает, если его удастся взять, и выигрывает, если ставит мат неприятельскому королю.

В этой игре пешкам запрещено превращаться, в противном случае выигрыш слишком прост — достаточно провести обе крайние пешки в ферзи, после чего три ферзя и две ладьи без труда окружают магараджу. При сделанной оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок даже быстро проигрывает (та же ситуация, что и в борьбе полного комплекта фигур против короля и пешек, делающих по два хода). И все же имеется форсированный способ расправиться с магараджей. Гарднер предлагает план его окружения, состоящий из 25 ходов. Однако цель достигается по крайней мере десятью ходами раньше!

Не обращая внимания на перемещение магараджи, белые должны сделать следующие 14 ходов подряд: a4, h4, Kc3, Kf3, Ла3, Lh3, Lb3, Lg3, d4, Фd3, Фе4, Lb7, Фd5, Lg8. При этом магараджа не может взять ни одной белой фигуры, и теперь у него имеются лишь два свободных поля — a6 и f6. На поле a6 (рис. 35) он гибнет после 15. Сg5, а на поле f6 — после 15. e4.

*Сказочные фигуры.* Магараджа лишь одна из многих десятков сказочных фигур, придуманных любителями необычных игр и композиторами-фантастами. Различные сказочные персонажи получаются из обобщенного коня (a, b)



при выборе тех или иных значений  $a$  и  $b$ . Если  $a=1$ ,  $b=2$ , мы имеем обычного шахматного коня. Конь (1, 3) называется верблюдом, он перемещается на одно поле вдоль одной линии и на три вдоль другой. Конь (1, 4) — жираф, конь (2, 3) — зебра. Если одно из чисел  $a$  или  $b$  равно нулю, то получаем ладью, перемещающуюся на фиксированное число полей, а при  $a=b$  слона, обладающего тем же свойством. Коню, который за один ход делает несколько скачков подряд, присваивается звание всадника.

Вообще надо сказать, что фигуры-животные населяют многие сказочные игры на шахматной доске. Так, в игре «джунгли» (древняя форма китайских и индийских шахмат) участвуют собаки, волки, коты, пантеры, крысы...

Многие фигуры, подобно магарадже, являются комби-



Рис. 35

нированными. Императрица объединяет в себе ходы ладьи и коня, дракон — пешки и коня, кентавр — слона и коня. В старинных играх встречаются мудрецы, шуты, епископы и другие экзотические личности.

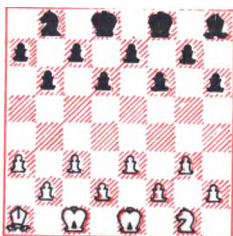
Многие шахматные фигуры имеют различные военные должности и звания — гренадеры, саперы, солдаты, офицеры, генералы. После первой мировой войны на доске появились грозные фигуры танков и самолетов, а после второй была изобретена «атомная бомба», в которую превращается пешка, дошедшая до последней горизонтали. Эта «страшная» фигура ставится на любое поле доски и «взрывается», уничтожая в заданном радиусе все вокруг себя.

Вот еще несколько удивительных фигур, которые можно встретить в мире шахматной фантастики. Сверчок ходит как ферзь и перепрыгивает через свои и чужие фигуры, останавливаясь сразу вслед за ними. Лев в отличие от сверчка приземляется на любом поле за перепрыгнутой фигурой. Сверхслон ходит, как обычный слон, но, кроме того, может отражаться от краев доски, подобно бильярдному шару. В шахболе фигуры действуют по футбольным



правилам, и цель игры заключается не в матовании неприятельского короля, а в забивании гола. Нейтральными фигурами могут играть и белые, и черные, а бьющим фигурам разрешается делать ход только со взятием. Бьющий конь — гиппопотам, а бьющий ферзь — динозавр. Рентгеновские фигуры оказывают воздействие на поля доски сквозь другие фигуры. Дипломат — фигура, которая сама не ходит, но и ее нельзя брать, около дипломата фигуры того же цвета неприкосновенны. А фигура камикадзе (самоубийца) убивается с доски вместе со взятой фигурой!

Немало разновидностей и у сказочных пешек. Пешка-хамелеон при взятии неприятельской фигуры превращается в ту же фигуру, но своего цвета. Сверхпешка ходит на любое число полей по прямой и бьет на любое число



Р и с. 36

полей по диагонали. Пешка-такси движется и вперед, и назад. Берлинская пешка ходит по диагонали, а берет по вертикали. Неподвижная пешка не ходит и не бьет, а ее брать можно. Пешка замедленного действия превращается только во взятые фигуры, а если таковых пока нет, она ждет подходящего момента.

*Шахматы.* Итак, мы уже подробно ознакомились с шахматными играми на нестандартных досках, с необычными правилами и сказочными фигурами. В игре шашматы, которую придумал американский математик С. Голомб, используются одновременно все три необычных элемента.

Игра, как это видно из названия, представляет собой смесь шахмат и шашек: фигуры в ней шахматные, но перемещаются они только по черным полям доски — как в шашках.

Расстановка фигур перед началом партии показана на рис. 36. Как мы видим, набор фигур в шашматах несколько иной, чем в шахматах. У каждой стороны по два короля, которые перемещаются на соседние черные поля. Шашматный слон ничем не отличается от шахматного, а пешки

ходят, как шашки. Поскольку обычный конь (1, 2) не в состоянии сделать на шашматной доске ни одного хода (он сразу попадает на запретное белое поле), его заменяют верблюдом (1, 3), который перемещается по полям одного цвета. Взятие пешек и королей происходит, как в шашках (перепрыгиванием через фигуру), а взятие слона и верблюда, как в шахматах (занятием поля, на котором стоит фигура). Взятие пешек и королей обязательно, а выбор между шахматным и шашечным взятием, если он имеется, произволен. Пешка, дошедшая до последней горизонтали, превращается в любую из трех фигур. Выигрывает в шашматах тот, кто первым возьмет обоих королей противника.

## Математические игры на шахматной доске

Необычные игры на шахматной доске придумывают не только шахматные композиторы-фантасты, но и математики. Правда, последние предпочитают игры, допускающие математический анализ; изложенные в виде задач, они предлагаются на математических олимпиадах или включаются в различные сборники.

В математических играх интерес представляет нахождение четкого алгоритма, гарантирующего победу или ничью. Но если алгоритм уже найден, то процесс игры теряет творческий характер, столь привлекающий нас в интеллектуальных играх.

Любопытно, что в эпоху Возрождения была очень популярна специальная шахматно-математическая игра «арифметические шахматы», или, иначе, рифмомахия. На доске  $16 \times 8$  передвигались три рода фигур — в форме круга, треугольника и прямоугольника. На каждой фигуре были написаны числа, комбинации которых определяли ходы, взятия и объявление мата. Игра требовала слишком сложных математических расчетов и постепенно была забыта.

*Конь и верблюд.* В углу доски  $n \times n$  ( $n \geq 4$ ) стоит конь, которым противники ходят по очереди. Первый игрок перемещает его как обычного коня, но с двойным ходом (как в двухходовых шахматах), а второй — как верблюда, то есть на три поля вдоль одной линии и на одно поле — вдоль другой. «Белые» начинают и стремятся поставить

фигуру в противоположный угол доски, а «черные» стараются помешать им. Чем закончится игра?

В этом несколько странном соперничестве коня и верблюда (точнее было бы говорить о хамелеоне, превращающемся то в одну фигуру, то в другую) победителем выходит обычный конь! Если наша фигура стоит на большой диагонали, проходящей через исходное угловое поле, то на любое отступление верблюда с этой диагонали конь возвращается на нее, причем продвигается по крайней мере на одно поле ближе к цели. В конце концов он попадает в нужный угол.

*Кошки-мышки.* У первого игрока всего одна фигура — мышка, а у другого несколько фигур — кошек. Мышка и кошки ходят одинаково — на одно поле по вертикали или горизонтали, то есть получают из коня  $(a, b)$  при  $a=0$ ,  $b=1$ . Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с нее и убегает от кошек; если кошка и мышка попадают на одно поле, то кошка съедает мышку.

Борьба кошек с мышкой протекает на обычной шахматной доске, причем играющие ходят по очереди и второй из них передвигает одним ходом сразу все свои кошки (в любых направлениях). Начинает мышка, которая старается спрыгнуть с доски, а кошки хотят ее съесть. Возможны два варианта игры, для каждого из которых сформулируем интересную задачу.

а) Кошек всего две, а мышка стоит на внутреннем поле доски. Можно ли так расположить кошек на краю доски, чтобы в конце концов они сумели съесть мышку?

б) Кошек три, стоят они где угодно, но зато мышка на первом ходу делает два хода подряд. Сможет ли мышка убежать от кошек?

Покажем, что в первом случае мышке не уйти от погони, а во втором, наоборот, она благополучно убегает от кошек.

а) Через поле, на котором стоит мышка, проведем какую-нибудь диагональ и поставим кошек на ее конце. На каждый ход мышки кошки ходят так, чтобы все три фигуры снова оказались на одной диагонали, а расстояние между кошками сократилось на одно поле (по диагонали). Такая стратегия позволяет кошкам в скором времени съесть мышку.

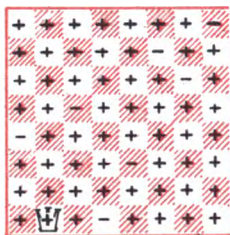
б) Рассмотрим две диагонали доски, проходящие через поле, занятое мышкой. Если поле не крайнее (иначе мышка сразу спрыгнет с доски), то эти диагонали разби-

вают доску на четыре части. Поскольку кошек три, внутри одной из частей их нет. Проведем перпендикулярный отрезок (горизонтальный или вертикальный), соединяющий мышку с краем доски внутри этой части. Очевидно, если мышка отправится прямо вдоль этого отрезка к краю доски, то кошкам ее не догнать.

**Ферзя — в угол.** На доске стоит ферзь, которого два игрока по очереди передвигают на любое число полей либо вверх, либо вправо, либо вверх и вправо по диагонали (то есть отступать ферзем нельзя). Выигрывает тот, кто своим ходом загоняет ферзя в правый верхний угол доски — на поле h8.

Покажем, что результат игры автоматически определяется из рис. 37. Если ферзь стоит на поле с плюсом, то

Р и с. 37



выигрывает тот, чей ход, а если на поле с минусом, то его партнер. Ничьей в этой игре не бывает. Пусть ферзь находится на восьмой горизонтали, вертикали «h» или диагонали a1 — h8 (кроме поля h8), тогда белые первым же своим ходом ставят ферзя в угол и берут верх. Далее рассуждаем так. Если ферзь с данного поля доски вынужден пойти на поле с плюсом, то оно, естественно, получает минус, а если ферзь может пойти на «минус», то оно получает плюс и т. д. В конце концов на всех полях доски будут расставлены знаки. В результате оказывается, что семь полей являются проигранными для начинающей стороны, а остальные выигранными, причем ферзь попадает в желанный угол не позднее третьего хода. Пусть в начале игры ферзь стоит на поле b1 (см. рис. 37), тогда «партия» может протекать так: 1. Фb1-d1 (быстрее к цели вело 1. Фg6!) 1... Фd2 2. Фd3! (единственный ход) 2... Фd7 3. Фf7! Фh7 4. Фh8 с победой.

Указанный принцип расположения плюсов и минусов переносится на любую прямоугольную доску, то есть на каждой из них игра подвергается исчерпывающему анализу.

Возьмем теперь вместо ферзя ладью и рассмотрим игру «ладью в угол». По своим правилам эта игра аналогична предыдущей, а по алгоритму напоминает «коня и всадника»! Игроки по очереди перемещают ладью по горизонталям (вправо) и вертикалям (вверх), и побеждает тот, кто первым займет угловое поле  $h8$ .

Вновь на  $h8$  ставится минус, а все остальные поля восьмой горизонтали и вертикали « $h$ » получают плюс. При ладье на  $g7$  начинающий проигрывает — минус, а на остальных полях седьмой горизонтали выигрывает — плюс и т. д. В результате получаем, что «белые» выигрывают, если их ладья не стоит на диагонали  $a1 - h8$ . Метод выигрыша тот же, что и в игре «конь и всадник». Первым ходом надо занять «большую» диагональ, после вынужденного отступления противника снова вернуться на нее — и так, пока ладья не попадет в угол. Самая длинная партия при исходном положении ладьи на поле  $a2$  или  $b1$  состоит из семи ходов: 1.  $Lb1-b2!$   $Lc2$  2.  $Lc3$   $Lc4$  3.  $Ld4!$   $Le4$  4.  $Le5!$   $Le6$  5.  $Lf6!$   $Lg6$  6.  $Lg7$   $Lg8$  7.  $Lh8$ .

Аналогично анализируются игры «коня в угол» и «короля в угол». Теория таких игр легко переносится на любые доски. Для того чтобы оценить положение, достаточно правильно расставить на доске плюсы и минусы.

*Шахматы и игра «ним».* Вот еще одна игра с ладьями. Возьмем произвольную доску  $m \times n$ . Пусть на ее первой горизонтали стоят белые ладьи, а на последней — черные. Игроки ходят по очереди ладьями по вертикалям (вперед или назад), и выигрывает тот, кто прижимает все  $m$  ладей противника к краю доски.

Теперь немного отвлечемся и рассмотрим другую «игру двух лиц». Имеется несколько кучек камней, и каждый ход игрока заключается в том, что он берет из какой-нибудь кучки произвольное число камней. Ходят по очереди, и побеждает тот, кто забирает последние камни. Эта старинная игра называется ним, она описана в любой книге по занимательной математике. Существует огромное количество модификаций нима. В одних играх накладываются ограничения на число камней, которые можно брать, в других — разрешается перекладывать камни из кучки в кучку, в третьих — камни можно брать сразу из нескольких кучек и т. д. В игре нимби кучки три с числом камней соответственно 3, 4 и 5. Эти двенадцать камней располагаются на клетках специальной доски и могут забираться по определенным правилам. В игре Баше камни берутся из одной

кучки, но не больше заданного количества, в игре цзяньшицзы кучки две, а камни можно брать не только как в обычном нима (любое число из одной кучки), но и сразу из двух кучек — в этом случае одинаковое число. Как правило, в каждом варианте нима удастся провести тонкий математический анализ и найти правильный метод игры.

Вот «детский» вариант нима с одной кучкой камней (спичек), которую легко усваивают и дошкольники. Двое по очереди берут из кучки один, два или три камня. Побеждает тот, кто берет последний камень. Очевидно, если вы оставите противнику 4 камня, а перед этим 8, 12 и т. д., то победа будет за вами. Таким образом, начинающий выигрывает, если число камней в кучке не делится на 4, если же оно кратно четырем, то побеждает второй игрок.

Читатель, наверное, уже сообразил, что игра с ладьями представляет собой одну из разновидностей нима. Роль кучек камней здесь играют вертикали доски, а количество камней в кучке равно числу полей между ладьями на соответствующей вертикали. Итак, в начале игры мы, по существу, имеем  $m$  кучек, и в каждой по  $n-2$  камня. Ход ладьи есть не что иное, как удаление нескольких камней из кучки (если ладья приближается к ладье противника) или добавление камней (если ладья удаляется от ладьи противника).

Оказывается, для оценки результата игры в таком варианте нима имеет значение только число вертикалей доски, а сколько горизонталей — неважно (лишь бы их было не две, иначе белые проигрывают, не начав игры). Если число вертикалей нечетно, то выигрывают белые, а если четно, то черные. Если доска состоит всего из одной вертикали, белые первым же ходом прижимают неприятельскую ладью (забирают все камни из кучки), и партия заканчивается в их пользу. Пусть вертикалей две — а и b. Тогда на любой ход белой ладьи вперед черные отвечают центрально-симметричным ходом, и эта стратегия приводит их к цели. Например: 1. Ла3 Лб6! 2. Лб4 Ла5! 3. Ла4 Лб5! Теперь белые ладьи вынуждены отступать, и черные преследуют их до победного конца (конечно, при отступлении белых ладей черным уже незачем соблюдать симметрию). На доске  $3 \times 8$  белые играют 1. Лс7! и сводят игру к предыдущему случаю при ходе противника. Симметричные действия на первых двух вертикалях приносят им победу. На доске  $4 \times 8$  опять выигрывают черные и т. д.

Поговорим еще раз о нима. Если кучек камней всего две,

то анализ игры прост. Пусть в одной кучке  $s$  камней, а в другой  $t$  ( $s > t$ ). Возьмем при своем ходе из первой кучки  $s - t$  камней, то есть уравниваем их. Далее будем действовать симметрично — сколько бы камней ни взял противник из одной кучки, столько же возьмем из второй и т. д. Очевидно, если в начале игры  $s = t$  и мы начинаем, то наше дело плохо.

Эта игра почти не отличается от игры с ладьями. При  $s > t$  начинающий первым же ходом сводит ее к перемещению ладей на доске  $2 \times (t + 2)$  при ходе партнера и выигрывает. Конечно, в данном случае обращение к шахматам не обязательно. А вот в следующей игре оно очень полезно.

Пусть кучек по-прежнему две, но камни можно брать не только из одной кучки, а сразу из двух, но в этом случае обязательно поровну, то есть мы получаем вариант нима, называемый цзяньшицзы. Предположим, что в первой кучке семь камней, а во второй — шесть. Возьмем тогда шахматную доску и поставим на поле b1 ферзя (рис. 37). Как видно, выше ферзя находятся семь горизонталей, а правее шесть вертикалей.

Установим соответствие между ходами в двух наших играх — цзяньшицзы и «ферзя в угол». Взятию некоторого числа камней из первой кучки соответствует перемещение ферзя на столько же полей по вертикали, а взятию из второй кучки — по горизонтали; наконец, если из обеих кучек берется одинаковое число камней, то ферзь идет по диагонали на то же число полей. В тот момент, когда от кучек ничего не останется, ферзь попадает в угол доски.

Итак, нам не нужно разрабатывать теорию для цзяньшицзы, а следует воспользоваться теорией для игры «ферзя в угол». В нашем примере ферзь стоит на поле с плюсом, и поэтому начинающий выигрывает. В общем случае, при произвольных наборах камней в кучках, для оценки позиции в цзяньшицзы достаточно «перевести» ее на шахматную доску и посмотреть, на какое поле попадет при этом ферзь (иной вопрос — будет ли обозрима такая доска)!?

Итак, различие между двумя рассмотренными играми чисто внешнее: позиции и ходы в одной из них соответствуют позициям и ходам в другой. Такие игры математики называют изоморфными.

Похожую игру с камнями придумал выдающийся советский математик академик И. Гельфанд. Снова имеются две кучки камней, но брать теперь можно либо один камень

из первой кучки, либо один из второй, либо два камня — по одному из каждой кучки, наконец можно не брать камни, а переложить один камень из одной кучки в другую. По-прежнему выигрывает тот, кто забирает последний камень.

И эта игра изоморфна шахматной, аналогичной «ферзя в угол». Только роль ферзя, как нетрудно проверить, в данном случае играет король. Расставляя необходимым образом плюсы и минусы на доске  $8 \times 8$ , легко провести исчерпывающий анализ игры.

*Домино на шахматной доске.* По своей природе домино имеет более близкое отношение к математике, чем многие игры, о которых рассказывается в нашей книге. Числа, изображаемые точками на костях домино, присутствуют здесь в явном виде. В литературе по занимательной математике можно найти десятки комбинаторных задач, головоломок, фокусов и игр с домино. Особенно популярны «кадри́ли» — раскладывание на столе костей домино, обладающее теми или иными хитрыми свойствами.

Например, интересна такая игра. Два игрока по секрету друг от друга раскладывают весь набор из 28 костей в виде прямоугольника  $8 \times 7$ . Затем они переписывают расположение своих чисел на листе бумаги и вручают их друг другу.

Границы между костями домино теперь стерты, и игрокам надо определить, как они были расположены у противника, то есть разбить числовой прямоугольник  $8 \times 7$  на 28 прямоугольников  $2 \times 1$ , образующих полный набор домино. Кто раньше это сделает, тот и побеждает.

Разумеется, эта игра и всевозможные «кадри́ли» не имеют прямого отношения к классическому домино, в котором содержится немало тонкостей, есть даже свои мастера. Однако успех, как нам кажется, прежде всего зависит от наблюдательности (кто на «что» играет), а не от математических способностей. Заметим, что известно множество игр, отличающихся от традиционного домино. Вот некоторые из них: молния (за один ход можно выставить несколько костей, стыкующихся между собой); слепое домино (игроки не видят собственные кости и вскрывают их одну за другой по ходу дела); берген (за каждый ход игроки получают определенное число очков, и выигрывает тот, кто первым набирает заданную сумму); пятерочное домино, троечное домино, магинз, севастополь, китайское домино, юбилей, сорок два, матадор и т. д.

В заголовке этого раздела у нас фигурировала шахмат-



ная доска, так что пора оправдать название. Приведем знаменитую головоломку, в которой участвуют одновременно и доска, и домино.

Из квадратной доски  $8 \times 8$  вырезаны два угловых поля, лежащие наискосок друг от друга, —  $a1$  и  $h8$ . Можно ли оставшуюся часть квадрата покрыть целиком 31 костью домино (то есть прямоугольниками  $2 \times 1$ )?

Можно было бы воспользоваться алгебраическими рассуждениями, но «шахматное» решение и проще, и изящнее. Раскрасим наш урезанный квадрат в черно-белый цвет в шахматном порядке. Теперь обратим внимание на то, что на полученной доске вырезаны два поля одного цвета, и на ней черных полей осталось на два меньше, чем белых. Но ведь каждая кость домино покрывает одно белое и одно черное поле, и, значит, необходимого покрытия всей доски не существует!

Конечно, непосредственно к играм эта задача имеет отдаленное отношение, но трудно было удержаться, чтобы не привести столь эффектный пример...

Кстати говоря, именно эта задача породила целый класс математических развлечений — полимино, упомянутый нами в рассказе о морском бое. Полимино — это не только увлекательные головоломки, в которых необычные доски нужно покрывать прямоугольными фигурками, но и игры для двух человек. Вспомним сначала следующую забавную игру-задачу.

На идеально круглом столе двое играющих по очереди выкладывают монеты любого достоинства. Проигрывает тот, кто при очередном ходе не может положить монету так, чтобы она не выступала за край стола и не наложилась на другие монеты.

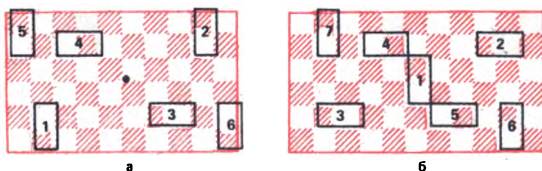
Результат этой игры предопределен еще до ее начала. Выигрывает начинающий, причем победу ему обеспечивает симметричная стратегия. Первым ходом белые должны положить произвольную монету в центр стола, после чего им остается только копировать ходы противника: на всякий его ход класть монету того же достоинства на центрально-симметричное место. Если черные еще в состоянии положить какую-то монету на стол, то и для монеты белых того же достоинства на столе найдется свободное центрально-симметричное место. В конце концов настанет момент, когда второй игрок не сможет сделать ход, и партия закончится его поражением.

Очевидно, такая симметричная стратегия приводит к

цели не только при игре на круглом столе, но и на квадратном, прямоугольном и вообще на столе любой формы, представляющем собой центрально-симметричную фигуру. Вместо монет могут быть взяты произвольные фишки, лишь бы их было в достаточном количестве.

Ясно, что описанная игра с монетами носит, так сказать, умозрительный характер. Трудно представить себе двух игроков, которые бы запаслись толстыми кошельками и по очереди выкладывали монеты на стол...

Более серьезно обстоит дело в играх полимино на шахматных досках размером  $m \times n$ . Двое играющих кладут по очереди домино на доску, покрывая каждой костью два поля доски. Как и в игре с монетами, проигрывает тот, кто не может сделать свой очередной ход. И в этой



уже ничем не будет отличаться от игры в монеты. Начинаящий всегда выигрывает независимо от четности сторон доски — ему достаточно первым ходом занять домино центр доски и дальше, как обычно, придерживаться центрально-симметричной стратегии.

*Симметрия в шахматах.* Мы уже убедились на ряде примеров (полимино, игра с ладьями), что симметричная стратегия часто приводит к цели. А как обстоят дела с самими шахматами? Может быть, черным достаточно просто копировать ходы белых и такая стратегия обеспечит им ничью? Как показывает следующая забавная партия, черным может неожиданно повезти.

1. e4 e5. Очевидно, в шахматной партии возможна лишь осевая симметрия — начальная позиция симметрична относительно прямой, разделяющей нижнюю и верхнюю части доски. 2. Крe2 Крe7 3. Крe3 Крe6 4. Фf3 Фf6 5. Кe2 Кe7 6. b3 b6 7. Ca3 Ca6 8. Kd4+. Королю черных объявлен шах. Выбора нет, они вынуждены нарушить симметрию и... объявить мат после 8... ed×!

Партия получилась забавной, но, как вы понимаете, если бы черные, копируя ходы противника, могли взять верх или хотя бы добиться ничьей, то вряд ли бы так часто разыгрывалось первенство мира по шахматам!

Известна такая забавная история. Некто явился в шахматный клуб и объявил, что нашел верный способ не проигрывать черными. «Каким образом?» — спросили его. «Очень просто, — ответил гость, — повторяя ходы противника!» Сыграть с наивным изобретателем вызвался Сэм Лойд. Партия продолжалась всего четыре хода: 1. c4 c5 2. Фа4 Фа5 3. Фс6 Фс3 4. Ф:c8×. Возможно, если бы партнеры сели играть вновь, дело закончилось бы несколько иначе: 1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф:c8×.

Подобные шахматные «поединки», в которых черные полностью копируют ходы противника и в конце концов получают мат, называются обезьяньими партиями. В приведенных примерах мат ставил белый ферзь, и быстрее со своей задачей он справиться не мог. А каковы рекорды обезьяньих партий, в которых мат дается другими фигурами — ладьей, слоном, конем и пешкой?

В начале века этим вопросом интересовался шахматный композитор К. Тракслер. Он составил симметричные партии, где ладья ставила мат за 9 ходов, слон — за 8, конь — за 7 и пешка — за 15 ходов. Эти рекорды неоднократно улучшались, и в дальнейшем были придуманы

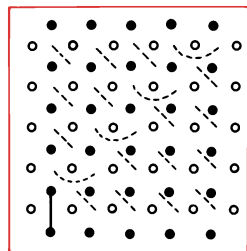
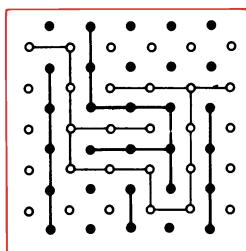
партии, в которых ладья матует за 8 ходов, слон — за 7, конь — за 6 и пешка — за 7 ходов. Вот самые короткие обезьяньи партии.

Матует ладья: 1. Kf3 Kf6 2. Kg5 Kg4 3. K:h7 K:h2 4. K:f8 K:f1 5. Kg6 Kg3. Танец коней закончился. 6. Л:h8×.

Матует конь: 1. Kc3 Kc6 2. Ke4 Ke5 3. e3 e6 4. Ke2 Ke7 5. g3 g6 6. Kf6× (или 5. c3 c6 6. Kd6×).

Матует белопольный слон: 1. e4 e5 2. f4 f5 3. ef ef 4. f6 f3 5. fg fg 6. Ce2 Ce7 7. Ch5×, и теперь чернопольный : 1. d4 d5 2. Kpd2 Kpd7 3. Kpd3 Kpd6 4. Ce3 Ce6 5. c3 c6 6. Фd2 Фd7 7. Cf4×.

Наконец, матует пешка: 1. g4 g5 2. h4 h5 3. Kf3 Kf6 4. Ke5 Ke4 5. hg hg 6. g6 g3 7. gf×; или 1. f4 f5 2. g4 g5 3. gf gf 4. f6 f3 5. Kh3 Kh6 6. Kg5 Kg4 7. f7×.



Р и с. 39

а

б

Наше лирическое отступление, посвященное обезьяньим партиям, относится, скорее, к жанру юмора, хотя, как мы видели, мотивы симметрии присутствуют и здесь.

Среди игр, придуманных сравнительно недавно, следует выделить два интересных класса — топологические игры и игры на графах. Возникновение этих игр, по-видимому, объясняется бурным развитием двух современных разделов математики — топологии и теории графов. К сожалению, в структуру нашей книги (учитывая ее объем) эти игры не очень вписываются. Очевидно, и к шахматам они не имеют отношения. Упоминание в данной главе объясняется тем, что оптимальной стратегией в них часто служит симметрия.

Возьмем, к примеру, игру бридж-ит. На рис. 39а показана «доска» для этой игры. Участники по очереди проводят вертикальные и горизонтальные отрезки, соединяя ими точки своего цвета. Линии противников нигде не должны пересекаться. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную своего цвета, связывающую противоположные стороны доски (на рис. 39а победили белые).

Оптимальную стратегию, гарантирующую победу белым в бридж-ит, открыл О. Гросс, специалист по теории игр. Эта стратегия столь же эффективна, сколь и проста. Воспользуемся рис. 39 б. Первым ходом соединим две точки в левом нижнем углу. Дальше надо играть так: каждый раз, когда отрезок, проведенный противником, пересекает конец какой-нибудь пунктирной кривой, следует провести отрезок, пересекающий второй конец той же кривой, и так вплоть до победы. Эта остроумная стратегия легко обобщается на любую доску.

Обратите внимание, что на рисунке заранее не предусмотрены линии, соединяющие граничные точки доски. Правила игры в бридж-ит не запрещают такие линии, но проводить их бессмысленно; если ваш противник вдруг проводит отрезок вдоль границы доски, то надо сделать контрход, соединив либо две граничные, либо, если это больше нравится, любые две точки доски. Может оказаться, что именно этот случайный ход будет потом продиктован стратегией, тогда, поскольку вы его уже сделали, проведите любую другую линию, лишняя линия на доске никогда не будет помехой. Разумеется, теперь, когда известна оптимальная стратегия для первого игрока, бридж-ит утрачивает свою привлекательность.

К сожалению, мы вынуждены оставить в стороне такие интересные топологические и графовые игры, как «рассада», «брюссельская капуста», «гекс», «игра в точки», «переключательная игра Шеннона», и др.

В заключение главы отметим, что рассмотренные нами стратегии, когда на каждый ход одного партнера автоматически следует ход другого (и этот ход приближает к цели!), в теории игр называются парными.

Любопытные примеры симметричной игры и парной стратегии будут приведены также в следующих главах.

---

# 4

---

## Шашечные игры

---



Как уже говорилось, шашечные игры отличаются от шахматных присутствием на доске фигур лишь одного типа (хотя и двух цветов). Вместо шашек можно взять произвольные фишки, шарики, пуговицы, камушки.

С игрой в русские шашки на 64-клеточной доске читатель, конечно, хорошо знаком, и нет необходимости рассказывать о них. Во многих странах распространены шашечные игры, имеющие свои особенности и правила.

Известны шашки американские, английские, испанские, итальянские, немецкие, французские, шотландские и т. д. В этих играх используется обычная доска  $8 \times 8$  и у обеих сторон по 12 шашек. Отличаются они друг от друга начальной расстановкой, правилами ходов и взятий.

А вот турецкие шашки, миниатюрный комплект которых недавно поступил у нас в продажу, не имеют ничего общего с классической игрой. У противников по 16 шашек: белые в исходном положении занимают вторую и третью горизонтали, черные соответственно шестую и седьмую. Шашки ходят на одно поле вперед, налево и направо, дамка еще и назад, и во всех направлениях на любое число полей. Диагональных ходов нет, то есть цвет полей не имеет значения, можно сражаться на листе клетчатой бумаги. Все остальные правила (взятие, превращение и т. д.) те же, что и в русских шашках.

Помимо национальных видов шашек на доске  $8 \times 8$ , существуют игры на досках большого размера. Так, в канадские шашки играют на доске  $12 \times 12$ .

Различие шашечных правил в разных странах мешало лучшим игрокам соревноваться между собой. В середине прошлого века международные шахматные связи стали весьма оживленными, и шашкистам захотелось тоже найти об-

ший язык, чтобы проводить свои чемпионаты. В результате родились международные, или, иначе, стоклеточные, шашки, в которые играют на доске  $10 \times 10$ . В начальной позиции каждая сторона расставляет шашки в четыре ряда по черным полям. Таким образом, у белых и у черных по 20 шашек, что делает игру сложнее и богаче, чем русские шашки.

В настоящее время международные шашки получили широкое распространение, по ним проводятся многочисленные соревнования, издаются книги и журналы. Разумеется, вопросы теории мы не собираемся затрагивать, но напомнить отличие стоклеточных шашек от русских, думаем, стоит. Собственно, иными являются только три правила взятия:

1) при нескольких возможностях брать надо большинство шашек;

2) простая шашка, достигнув последней горизонтали в результате взятия, становится дамкой, но право взятия как дамка, получает только со следующего хода;

3) простая шашка, достигнув последней горизонтали в результате взятия и обязанная бить дальше по правилам простой, остается простой шашкой.

В стоклеточных шашках в отличие от русских (и от шахмат) применяется цифровая нотация, но это уже касается записи партий и к правилам игры отношения не имеет.

Интересное обобщение русских шашек — столбовые шашки или башни. Отличие от обычной игры в том, что при взятии шашка противника не снимается с доски, а ставится под ту, которая ее берет. Если бьются несколько шашек противника, то все они забираются одна за другой и на конечном поле образуется «башня» или «столб». Отсюда и название игры. Башня передвигается вся сразу и ходит по правилам своей верхней шашки, как простая шашка или дамка. Башня, как и одиночная шашка, может проходить в дамку, которой становится только верхняя шашка. При взятии башни с нее снимается одна верхняя шашка, а находящаяся под ней шашка вступает в свои права. В результате игрок может освободить свою шашку или дамку, захваченную ранее противником. Когда с башни снимается дамка и под ней оказывается простая шашка того же цвета, то башня превращается в простую и ходит так до тех пор, пока не произойдет новых изменений.

Эта старинная игра весьма своеобразна и не похожа на другие разновидности шашек. Так, в ней от начала до конца партии на доске присутствуют все 24 шашки, хотя распо-

лагаться они могут на разных этажах башен, быть глубоко заточенными в них. Кстати, этой игрой увлекался шахматный король Эм. Ласкер, и одна из разновидностей столбовых шашек носит его имя.

В игре «фокус» захваченные шашки тоже не снимаются с доски, а служат строительным материалом для башни. Но здесь слишком много необычностей — крестообразная доска, движение шашек по горизонталям и вертикалям, а число полей, на которое можно пойти, определяется высотой башни.

В шахматной главе мы упомянули разновидности игры с более чем двумя участниками. А недавно в магазинах, где продаются игры, появились так называемые триошашки — для трех любителей игры. Так что в этом отношении шашки стараются не отстать от шахмат...

Наряду с традиционными шашечными играми, в которых для победы требуется съесть все шашки противника (или лишить их подвижности), известно множество игр, в которых цели игроков совсем иные. Прежде всего стоит сказать о поддавках. Популярность этой игры не вызывает сомнения, но в литературе ей до сих пор почти не уделялось внимания. Мы решили посвятить поддавкам специальный раздел.

Еще один раздел этой главы занимает игра уголки и подобные ей. В этих играх совершенно иные правила — шашки вообще не берутся, а их надо перегнать со своей территории на территорию противника, и кто раньше это сделает, тот и побеждает. Из множества шашечных игр на уголки наш выбор пал по той причине, что здесь удалось обнаружить один неожиданный факт...

Очень своеобразна игра реверси, в которой шашки в процессе игры не берутся, а переворачиваются, меняя свой цвет. Об этой игре, к которой год от года растет интерес, рассказывается в последнем разделе главы.

Шашки рэндзю представляют собой обобщение игры в крестики-нолики, и о них пойдет речь в следующей главе. Несколько в стороне стоит знаменитая игра Го. Число ее поклонников постоянно увеличивается, выпускаются комплекты Го, проводятся соревнования. Но литературы пока маловато. Поэтому мы решили посвятить Го специальную главу, которая завершает книгу.

К шашечным играм можно отнести также и нарды, особенно распространенные в Закавказье. К сожалению, эта игра несколько выпадает из жанра книги... Дело в том, что нарды представляют собой вероятностную, случайную



игру — ведь в ней значение имеет не только искусство играющих, но и случай. Мы же в первую очередь рассматриваем детерминированные игры, где каждый ход игрока совершается им сознательно и не зависит от случайных факторов.

В нардах же обязательным элементом является бросание игровых костей, и уже в зависимости от выпавших очков шашки передвигаются на то или иное число полей. (Конечно, после выбрасывания костей еще остается достаточный выбор, иначе игра была бы лишена интеллектуальной нагрузки.) Таким образом, в любом положении лучший ход может быть сделан лишь с некоторой вероятностью.

В детерминированных играх теоретически в любой позиции существует лучший ход. Правда, в тестовых играх, рассмотренных в первой главе, от везения тоже зависит многое, но в них игроки принимают однозначные решения на основе имеющейся информации и дело обходится без вмешательства жребия (бросания костей).

По той же «вероятностной» причине мы оставили в стороне различные разновидности нард — триктрак, бакгаммон, жакет и т. д. Выпали из поля зрения и карточные игры, представляющие собой классические случайные игры. Так, любопытно, что игре покер посвящено большое число серьезных математических работ (в области математической теории игр). Подобные игры моделируют различные практические ситуации, в которых те или иные условия выполняются с определенной вероятностью, и поэтому они весьма интересны для прикладной математики.

Имеется еще один класс игр, которому не нашлось места в нашей книге. Эти игры: вари, калах, число, тогуз-кумалак и др. требуют специальных атрибутов — досок с углублениями или лунками и наборов камней. Ход состоит в том, что камни берутся из одной лунки и по определенным правилам раскладываются по другим. Проигрывает тот, чьи лунки оказываются пустыми.

У читателя может возникнуть резонный вопрос: не слишком ли длинным оказался список игр, которые не попали в книгу, хотя и имели на это все основания?

В книге Л. Пияновского «Путеводитель по играм», изданной в Польше, упоминается более 300 основных игр и 800 их модификаций. Список литературы, составленный Пияновским, содержит 330 названий. А в предисловии автор приносит свои извинения за то, что в книге... не уместилось множество других игр. Таким образом, эта тема является

совершенно неисчерпаемой, и тем более невозможно рассчитывать на особую полноту в одной небольшой книжке. Надо учесть также, что мы не ставили цель поразить читателя перечислением огромного количества игр, а хотели подробнее рассказать лишь о некоторых из них, наиболее популярных.

## Поддавки

Правила игры простые и знакомы каждому. Выигрывает тот, кто первым отдаст все свои шашки либо останется только с запертыми. У поддавков весьма богатая история. Игрой занимался еще первый русский теоретик шашек и шахматный мастер А. Петров, который писал, что она требует большего расчета, чем обычные шашки. В настоящее время у игры много любителей, в Москве в 1978 году был даже организован всесоюзный клуб «Шашечница», где проводятся соревнования по поддавкам, изучается теория. В данном разделе содержится, в частности, ряд идей и находок, принадлежащих членам этого клуба.

В «Толковом словаре» Вл. Даля о поддавках сказано, что это игра в шашки, где «проигравший считается выигравшим». Определение точное, оно удачно подчеркивает «односущность» поддавков и обычных шашек — правила в этих играх одни и те же, и можно сказать, что они совпадают с точностью до результата. А вот иная формулировка: поддавки — это обычная игра, только партнеры ходят шашками противника.

Классическая игра имеет разные названия: крепки, крепкие или простые шашки. Поддавки называют также обратными шашками, так как они получаются из простых путем обращения: понятия «выигрыш» и «проигрыш» меняются местами. Обращение симметрично, ведь обращенные поддавки есть крепкие.

Формально обратить можно любую игру, но в действительности обратимы немногие. Например, партии в обратные шахматы обычно кончались бы вничью, так как для обратного мата нужен большой материальный перевес, недостижимый в игре близких по силе партнеров. (Рассмотренные в предыдущей главе шахматные поддавки — своеобразная игра, которую нельзя считать обратной шахматам. Правила существенно изменены — королей можно ставить под удар, и они снимаются с доски, как и другие фигуры.)

Очевидно, необратимы все спортивные игры: обращение футбола или хоккея мало бы что изменило (только вратари поменялись бы местами), обратить бокс вообще нельзя и т. д. Это редкое свойство обратимости присуще шашкам благодаря правилу обязательного взятия, без которого игра в поддавки невозможна.

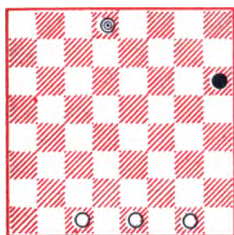
Единство двух шашечных игр подчас не осознается даже квалифицированными шашкистами. Один гроссмейстер по шашкам, искусный игрок в поддавки, предложил как-то своим коллегам провести сеанс одновременной игры, пообещав, что выиграет ровно половину партий, остальные же проиграет. Исполнить это намерение гроссмейстер брался даже против мастеров, принявших вызов с уверенностью, что в партиях, которые сеансер собирается выиграть, хоть одну-то ничью они сделают. Однако знатоки классических шашек не сообразили, что их противник может уйти от ничейной угрозы, переключаясь в данной партии на поддавки, где игра на ничью бесперспективна, хотя мирный исход и случается.

Иногда разницы между крепкими и поддавками вообще нет. Взять хотя бы «кооперативные» задачи, которые в шашках в отличие от шахмат почти не составляют. Интересен такой вопрос: какое наименьшее число ходов может продолжаться партия в шашки? Очевидно, нет никакого смысла уточнять, о какой именно игре идет речь — о простой или обратной. Вот рекордная партия, состоящая из десяти ходов: 1. ed4 de5 2. de3 ed6 3. cd2 dc5 4. ab4 c:cl 5. ef4 c:g5 6. fe3 g:b4 7. ab2 e:a1 8. ed2 b:h4 9. gf2 h:el 10. hg3 e:h4. Улучшить этот результат, наверное, нельзя (хотя это и не доказано).

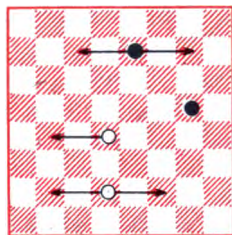
Другую необычную ситуацию можно назвать так: «Ничья и только ничья». Вообще ничьи в крепких и поддавках — вещи разные, потому что в обычной игре речь идет о «ничьей по крайней мере» (если ничья гарантирована, стоит подумать о победе). Иная проблема встала перед бароном Мюнхаузенем, игравшим в шашки в плену на злодейских условиях: выигрыш и проигрыш равно карались смертной казнью, лишь ничья сохраняла жизнь и возвращала свободу. Незаурядная находчивость не подвела Мюнхаузена и на сей раз — в положении на рис. 40, возникшем в процессе поединка «не на жизнь, а на смерть», барон, игравший белыми, проявил исключительное жизнелюбие: 1. db6 hg5 2. cd2 gf4 3. be3 fg3 4. gf2 gh2 5. ef4 hg1 6. de3 gh2 7. f2-g3 hg1 8. ef2 gh2 9. ed4 hg1 10. f4-e3

gh2 11. ef4, и черные не могут ни проиграть, ни выиграть (что-то вроде позиционной ничьей в шахматах).

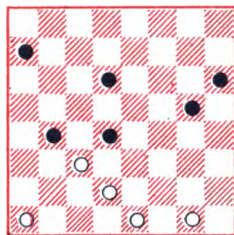
Среди шашкистов распространено мнение, будто поддавки по содержательности уступают простым шашкам. Однако есть немало аргументов в защиту поддавок, в том числе количественного характера. Для этого надо установить признаки содержательности, выраженные численно. Прежде всего в содержательной позиции должно быть достаточно много ошибочных ходов (при их отсутствии размышлять не о чем). Отсюда первый признак содержательности: отношение числа ошибочных ходов к числу возможных. Далее, игровые ситуации должны вызывать определенную трудность для общей оценки, производимой без точного расчета. Это обстоятельство оценивается следующим образом. Пусть некоторая



Р и с. 40



Р и с. 41



Р и с. 42

позиция выиграна для белых. Немного изменим ее. Новая позиция будет либо по-прежнему выиграна за белых, либо уже нет. Во втором случае следует, очевидно, считать первоначальную позицию требующей более внимательного изучения, более содержательной. Малыми изменениями естественно считать, во-первых, передачу хода другой стороне, во-вторых, перемещение одной шашки на соседнее (по горизонтали) черное поле. Это дает два признака содержательности, измеряемые долями позиций с изменившимся исходом среди всех измененных позиций. Передача хода другой стороне дает одну новую позицию, так что второй признак может принимать значения 0 или 1, а третий — чувствительность к малому изменению позиции — меняется в этих пределах. Поясним сказанное на примере (рис. 41).

При игре в крепки любой из четырех ходов белых ведет к ничьей, ошибочных ходов нет. В поддавках выигрывает только 1. de5 и ошибочных ходов три из четырех. При передаче хода черным в простой игре сохраняется ничья, а

в поддавках белые уже не выигрывают: 1... gf4 2. dc3 ef6 3. dc5 fe5 4. cd6 e:c7 5. cd4 fg3 6. de5 cd6 7. e:c7 gf2 8. cd8 fg1. Ничья. Переставить одну из шашек на соседнее по горизонтали поле можно (не нарушая разомкнутости позиции) пятью способами, как показано стрелками. В крепких шашках все пять изменений на результат не влияют. В поддавках в двух случаях у белых только ничья. Итак, значения признаков содержательности этой позиции в крепких 0, 0, 0, в поддавках —  $3/4$ , 1,  $2/5$ . Сами по себе эти числа еще ни о чем не говорят, ведь единственность хода может быть очевидна, так же как и перемена ситуации после малого изменения позиции. Все же правильность такого подхода более вероятна.

Конечно, изложенный способ оценки можно применять только ко многим позициям сразу. Это и было проделано для нескольких сот случайно выбранных позиций с малым числом простых шашек. Результаты при оценке разных типов позиций показали хорошую устойчивость: по первому и третьему признакам поддавки немного, а по второму почти вдвое превосходят крепкие шашки. Это, правда, не доказательство, а лишь серьезный довод в пользу обратных шашек, особенно для композиции, где ценятся задачи с единственными ходами. Здесь возможны, в частности, позиции особого рода, о которых говорит известный польский математик Г. Штейнгауз в «Математическом калейдоскопе». В разделе, посвященном шахматной математике, автор предлагает найти позицию, где все ходы обеих сторон были бы единственными непроигрывающими. Ни в шахматах, ни в крепких, похоже, таких позиций не существует. В поддавках же их множество. Вот рекордная по длительности игры, найденная М. Дебецом (рис. 42). Ход белых. 1. c:a5 de3 2. d:f4 g:e3 3. ab2 ed2 4. e:c3 hg5 5. ab6 a:c5 6. gf2 cb4 7. c:a5 gh4 8. ba3 de5 9. ab6 ef4 10. fg3 h:f2 11. bc7 fg1 12. cd8 gd4 13. db6 d:a7 14. ab4 ac5 15. b:d6 fe3 16. dc7 ef2 17. cb8 fg1. Ничья.

Какова техника игры в поддавки? Многие принципы и приемы основаны на общих соображениях и совпадают с рекомендациями в крепких шашках, да и не только в этой игре. Владение центром выгодно, на краю доски шашки менее подвижны. Существенно взаимодействие флангов. Надо заботиться о развитии отсталых шашек (a1 и h2 — белым). Важными элементами служат стеснение и угроза. В позиции на рис. 43 после 1. fe3, если хоть на одном из полей, отмеченных крестиками, появится черная шашка, белые

сразу завершат игру в свою пользу. По мнению математика И. Бронштейна, немало размышлявшего о поддавках, эта идея стеснения неприятельских шашек легко формализуется и может быть использована при составлении машинной программы для ЭВМ. В нашем примере после 1... ef6 2. cd2 fg7 3. ef2 gh6 4. fg3 белые выигрывают. В течение трех ходов они стесняли черные шашки, и теперь приходится идти на одно из отмеченных полей (4... fg5 5. ef4 g:c1 6. gf4 c:g5; 4... de5 5. ed4 e:h4).

Теперь приведем пример угрозы (рис. 44). 1. hg3 шах! Употребление шахматного термина здесь вполне уместно. Действительно, угроза немедленно отдать все шашки аналогична угрозе «съесть» короля. 1... ab2 2. a:c3 gf6 3. cd4+ (шах) fg5 (3... cd6 4. dc5 d:b4 5. gf4+fg5 6. f:h6 и т. д.)

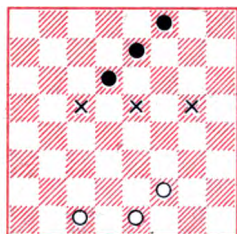


Рис. 43

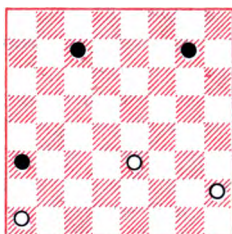


Рис. 44

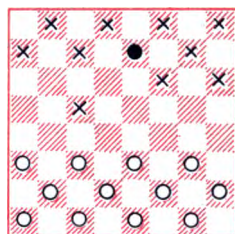


Рис. 45

4. ef4 g:c5 5. gf4 cb4 6. fe5+cb6 7. ed6+ bc5 8. dc7, и появляющаяся на доске белая дамка быстро встает под удар.

Игра в позиции на рис. 43 напоминает засаду, а на рис. 44 — погоню. Так сказать, методы кошки и собаки. В реальной партии, впрочем, далеко не всегда удастся различить эти два приема. Отметим, что в поддавках, как и в крепких шашках (но в отличие от шахмат), стеснение играет главную роль, а угроза — вспомогательную.

Материальный перевес в обратной игре, как это ни парадоксально, до поры до времени выгоден. В обычных шашках численное преимущество, очевидно, приближает игрока к конечной цели. Почему же оно полезно и в поддавках? Вот в чем объяснение. Чем больше шашек, тем шире выбор ходов и тем вероятнее, что среди них найдутся выигрывающие. В крепких факторы численности и подвижности действуют в одном направлении, в поддавках — в разных, но роль подвижности остается прежней. Сложение причин, можно сказать, заменяется вычитанием, но фактор подвиж-

ности намного важнее. Сущность парадокса заключена именно в этом неожиданном факте, установленном практикой игры. Правда, из того, что численный перевес выгоден, еще не следует, что больший перевес дает большее преимущество.

Играть в крепкие без шашки — все равно, что в шахматы без фигуры. Это интуитивное соображение подтверждается следующим подсчетом. Сумма шахматных сил равна:  $9$  (ферзь) +  $2 \times 4,5$  (ладьи) +  $2 \times 3,5$  (слоны) +  $2 \times 3$  (кони) +  $3$  (король) +  $8 \times 1$  (пешки) =  $42$ ; и двенадцатая часть их дает  $3,5$  единицы, то есть слона. Но одна шашка из  $12$  — это как раз тоже одна двенадцатая часть! Что же касается поддавок, то крайне трудно сказать, в чью пользу снятие одной из шашек.

Занимательный пример выгоды численного превосходства — игра полным комплектом из  $12$  шашек против одной шашки соперника. Белые выигрывают в поддавки, если шашка-одиночка занимает одно из полей, отмеченных крестиком на рис. 45. Для выигрыша требуется не более  $18$  ходов. Рекордная позиция — при черной шашке на  $e7$ . Вот основной вариант: 1.  $cb4!$   $ed6$  2.  $ba5$   $de5$  3.  $ef4$   $ed4$  4.  $fe5$   $d:f6$  5.  $de3$   $fe5$  6.  $ef4$   $ed4$  7.  $fe3$   $d:h4$  8.  $ab4$   $hg3$  9.  $bc5$   $g:e5$  10.  $cd6$   $e:c7$  11.  $ab6$   $c:a5$  12.  $cd2$   $ab4$  13.  $bc3$   $ba3$  14.  $hg3$   $ab2$  15.  $gf2$   $b:d4$  16.  $fe3$   $d:h4$  17.  $ab2$   $hg3$  18.  $ef2$   $g:h1$ .

В качестве комментария к этой партии можно привести шуточный «Гимн поддавкам» известного поэта Н. Глазкова:

Если иногда играю в шашки,  
То предпочитаю поддавки!  
В поддавках есть четкость светфора,  
И веселость шашки проходной,  
И изящество обратной формы —  
Все двенадцать супротив одной!

На рис. 46 показано, в каких случаях решается аналогичная задача выигрыша в поддавки на  $100$ -клеточной доске —  $20$  шашками против одной. Любопытно, что соответствующее доказательство было опубликовано Бельгийской Академией наук еще в  $1852$  году, причем его автор рассмотрел более  $800$  различных вариантов.

При умелой игре в поддавки рано или поздно наступает переломный момент, когда надо отдавать завоеванный материал. Однако подставлять шашки под удар лишь затем, чтобы их стало меньше, неразумно на любой стадии игры; всегда надо готовить почву для избавления от всех сразу.



Если выгоду отдачи материала не удастся доказать анализом, то это жертва. Например, после 1. ed4 bc5 2. d:b6 c:a5 3. cb4 a:c3 4. b:d4 ab6 5. fe3 ba5 (рис. 47) белые на практике часто жертвуют шашку: 6. ab4 a:e5 7. dc3 ed4 8. c:c7. Черным предстоит решать весьма не простые проблемы развития.

Еще один важный прием борьбы — запираание чужих шашек. В нужный момент они выпускаются на свободу, и партия заканчивается победой того, кто сумел их вовремя запереть.

Примером того, что поддавки — не чисто счетная игра (а многие так думают), может служить партия Болдин — Бронштейн. 1. gh4 hg5 2. ef4 g:e3 3. f:d4 bc5 4. d:b6 c:a5 (распространенное начало) 5. gf2 fe5 (уходя от

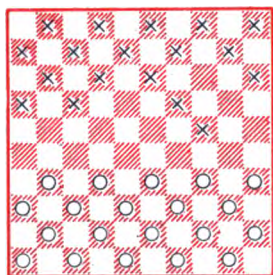


Рис. 46

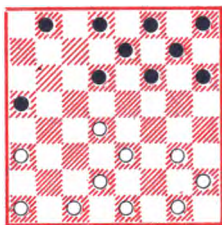


Рис. 47

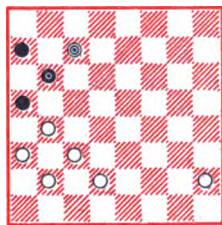


Рис. 48

запираания на h4) 6. cb4 a:c3 7. b:f6 g:e5 8. dc3 (фиксируя слабую шашку e5) 8... bc7 (правильно 8... ed4, теперь черные попадают в цугцванг) 9. ab2 hg7 10. ab4 ab6 11. cd2 ef6 12. hg5 f:h4 13. cd4 e:a5 14. hg3 ab4 15. dc3 b:d2 16. e:c3 gf6 17. cb4, и белые одну за другой отдают все свои шашки.

Ничьи в поддавках бывают редко. Дамки разного цвета на полях b8 и h2 — часто встречающийся ничейный финал. Рекордная по числу шашек ничейная позиция зафиксирована в партии Ларин — Родзянко (рис. 48): при ходе белых единственно непроигрывающие перемещения — 1. cd6 bc5 2. dc7 cb6 и т. д.

В обычных шашках в выигранной позиции среди ошибочных ходов, скорее всего, найдутся и ничейные. В поддавках ошибка обычно ведет к поражению, то есть ничейной полосы между зонами выигрыша и проигрыша может не оказаться. Поэтому нельзя избежать риска, уклоняясь от сложных и острых позиций, — в простых и спокойных на вид его

не меньше. Кстати, отсутствие ничейной полосы создает трудности комментатору партий. Стандартная оценка «с преимуществом у...» означает, что преимущества может не хватить для победы — иначе следовало бы сказать «с выигрышем». В поддавках невозможность выиграть часто чревата поражением, в таких условиях говорить о преимуществе вряд ли уместно. Аналогичные соображения возникают и по поводу оценки «с примерно равной игрой». Так что от «ничейной смерти» поддавки, видимо, надежно застрахованы.

Дебютная теория обратной игры постепенно развивается, ограничимся самыми краткими сведениями. Из семи возможных первых ходов наиболее часто используются 1. ed4 и 1. gh4, за ними следует 1. ab4. Можно считать доказанным, что начала 1. ef4 и 1. gf4 ведут к форсированному поражению белых после ответа 1... hg5. Ходы 1. cb4 и 1. cd4 возможны, но статистика встреч между опытными игроками показывает, что игра чаще складывается в пользу черных.

В поддавки на столеточной доске играют, естественно, по правилам международных шашек. Различия, возникающие при переходе на большую доску, здесь гораздо существеннее, чем в простых шашках, но это уже другая тема...

Почему же поддавки уступают в популярности обычным шашкам?! Видно, причина в традиционном взгляде на шашечную игру как на модель военных действий. Стремление уничтожить или пленить силы противника, характерное для большинства игр, в том числе шашечных, более привлекательно своей жизненностью. Впрочем, перечитывая «Опыты» М. Монтеня, мы обнаружили исторический эпизод, который служит вполне реальным аналогом обратной игры...

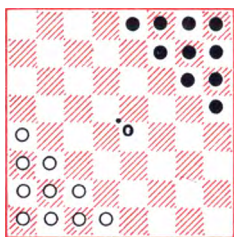
«Александр осаждал какой-то город в Индии. Жители, доведенные до крайности, твердо решили лишить его радости победы; они подожгли город и вместе с ним все погибли в пламени, презрев великодушие победителя. Началось новое сражение: враги дрались за то, чтобы их спасти, а жители за возможность покончить с собой, причем прилагали к этому такие же усилия, какие люди обычно делают, чтобы спасти свою жизнь».

## УГОЛКИ

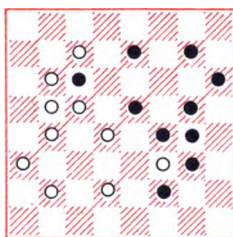
Начнем с классического варианта уголков, знакомого каждому. В углах доски  $8 \times 8$  расположено по десять белых

и черных шашек (рис. 49). Противники ходят по очереди, причем ходы могут быть двух типов: 1) перемещение шашки на соседнее свободное поле по вертикали или горизонтали (но не по диагонали!); 2) последовательное перепрыгивание шашки через свои или чужие по свободным полям вдоль вертикалей или горизонталей доски (каждый скачок в процессе такого хода может производиться только через одну шашку с «приземлением» на поле, следующее сразу за ней).

Выигрывает тот, кто раньше занимает своими шашками противоположный угол доски, то есть исходные поля шашек противника. Впрочем, если белые уже заняли своими шашками необходимый угол, это еще не «мат». Если следующим ходом и черные занимают противоположный угол, то



Р и с. 49



Р и с. 50

a	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	15	14	
b	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	14	15	

Р и с. 51

партия признается ничейной (партнеры сделали равное число ходов).

Рассмотрим позицию на рис. 50. Шашка b5 может пойти на поле a5 — ход первого типа; на поля b7, d5, d7, f5, f7, h5, h7 — ходы второго типа. Заметим, что один и тот же ход может быть иногда сделан разными способами, в нашем примере шашка b5 может попасть на поле h7 по двум траекториям: b5-b7-d7-f7-h7 или b5-d5-f5-h5-h7.

Если игрок не двигает с первоначального места одну или несколько своих шашек, то, очевидно, противник никогда не сможет добиться цели, и игра теряет смысл. Поэтому в уголках вводится правило, по которому через определенное число ходов, например 40, оба партнера должны полностью освободить от шашек свой угол.

Кажется, что после введения последнего правила игра становится очень увлекательной. Однако это не совсем так. Как мы увидим, черные могут без всякого труда добиться ничьей, и, значит, игра заметно теряет спортивный интерес.

Собственно, дело происходило так. Коллега автора книги, известный математик Д. Поляк, долгое время наблюдал, как его дочь-восьмиклассница «резалась» со своими подругами в уголки. Наконец, это праздное времяпрепровождение стало огорчать отца (уж лучше бы сражались в шахматы, подумал он). Вот тогда-то он и придумал ничейный алгоритм игры за черных. Надо сказать, что девочки были несколько разочарованы, но играть в уголки перестали и переключились на более интеллектуальные занятия.

Сейчас мы снова воспользуемся идеями симметрии, которым было уделено много внимания в предыдущей главе. Алгоритм игры черных в уголки прост — на каждый ход белых им достаточно отвечать ходом, симметричным ему относительно центра доски — точки  $O$  на рис. 50.

Воспользуемся для удобства числовой системой координат — поле  $(i, j)$  лежит на пересечении  $i$ -й вертикали и  $j$ -й горизонтали. Очевидно, для поля  $(i, j)$  центрально-симметричным является поле  $(9 - i, 9 - j)$ . Поэтому, если белые ходят шашкой с поля  $(i, j)$  на поле  $(k, l)$ , то черные должны ответить ходом с  $(9 - i, 9 - j)$  на  $(9 - k, 9 - l)$ . Например, на рис. 50 на ход белых b6-d6 черные играют g3-e3.

При описанной стратегии черных после каждого их хода центрально-симметричное расположение шашек на доске сохраняется, и в тот момент, когда белые займут своими шашками противоположный угол доски, черные ответным ходом также займут угол, и партия закончится вничью.

Разумеется, еще надо доказать, что на любой ход белых возможен симметричный ответ черных. Рассмотрим симметричную позицию, в которой каждой белой шашке соответствует симметричная черная, и наоборот. Отсюда следует, что всякому незанятому полю будет симметрично также незанятое.

Очевидно, при центральной симметрии вертикали (горизонтالي) с номером  $i$  соответствует вертикаль (горизонталь) с номером  $9 - i$ , а соседние по вертикали (горизонтالي) поля переходят в поля, также соседние по вертикали (горизонтали).

Пусть при своем ходе белая шашка передвинулась на соседнее незанятое поле. Ему симметрично незанятое поле, соседнее с черной шашкой, которая была симметрична белой до ее хода. Поэтому следующим ходом эта черная шашка также может пойти на данное незанятое поле.

Пусть теперь белая шашка делает ход типа скачка. Назо-

вем занятые поля, через которые она перепрыгивает, опорными. Рассмотрим позицию на доске до этого хода белой шашки. Симметричная ей черная шашка в этот момент имела возможность перемещаться по симметричной траектории, поскольку опорным полям соответствуют опорные, свободным — свободные, и «соседство» между ними сохраняется. Докажем, что этот ход черных возможен и после хода белых. Ход белой шашки мог бы помешать симметричному ходу черных в одном из двух случаев: 1) после своего хода белая шашка заняла свободное поле на траектории черной; 2) до своего хода белая шашка была опорной в траектории черной шашки. Покажем, что оба эти случая невозможны.

Пусть белая шашка имеет координаты  $(i, j)$ , тогда координаты симметричной черной  $(9 - i, 9 - j)$ . При каждом прыжке шашки через опорное поле четность ее координат сохраняется, то есть координаты всех свободных полей траектории имеют ту же четность, что и координаты исходного поля. Но если число  $i$  четно, то число  $9 - i$  нечетно, и наоборот. Поэтому белая шашка после своего хода не может попасть на свободное поле траектории черных. Далее, одна из координат опорного поля совпадает с координатой соседнего с ним свободного поля траектории и, следовательно, имеет ту же четность, что и соответствующая координата исходного поля. Но числа каждой пары  $(i, 9 - i)$  и  $(j, 9 - j)$  имеют разную четность, и поэтому поле  $(i, j)$  не может быть опорным для шашки  $(9 - i, 9 - j)$ .

Итак, оба случая опровергнуты, и после хода белых симметричный ход черных возможен. Поскольку начальная позиция центрально симметрична и таковой остается после каждого ответного хода черных, то их ничейная стратегия торжествует!

Любопытно, что рассмотренная нами «теория» уголков оказывается неверна, если допустить диагональные прыжки шашек. В этом случае белая шашка до своего хода могла быть опорной в траектории симметричной черной шашки. Так, на рис. 50 после хода белых d4-f6 черные не в состоянии скопировать ход противника.

Мы предполагали до сих пор, что игра протекает на обычной доске  $8 \times 8$ . Те же рассуждения справедливы и для любой доски с четными сторонами и произвольной центрально-симметричной начальной позицией. Однако метод игры, гарантирующий черным ничью, уже не годится для доски, у которой хотя бы одна сторона нечетна.

Итак, черные, играя в обычные уголки, легко делают ничью. Однако, как ни странно, трудно доказать, что ничья в этой «скучной» игре гарантирована и белым. Думаем, что эта задача не из простых. Так, в простейшем варианте уголков с одной белой шашкой на поле  $a1$  и одной черной на поле  $h8$  у белых имеется всего два способа сделать ничью — их шашка должна идти по первой горизонтали с  $a1$  до  $h1$  и далее по крайней вертикали с  $h1$  до  $h8$  либо должна перемещаться по вертикали с  $a1$  до  $a8$  и затем по горизонтали с  $a8$  до  $h8$ . В обоих случаях дело заканчивается ничьей на 14-м ходу, а любое отступление шашки белых от края доски, как нетрудно убедиться, приводит их к проигрышу.

Хотя мы и раскритиковали игру в уголки, но сами же указали, что на досках определенных размеров возможна полноценная борьба, и алгоритм ничьей, а тем более победы, не известен. Кстати говоря, в магазинах игрушек продаются различные игры («в четыре угла», «лабиринт», «по местам»), напоминающие собой уголки. Игра в них ведется на необычных досках, правила перемещения фишек различны, но цель всюду одна — оккупировать своими фишками территорию противника, и кто раньше это сделает, тот и побеждает.

Основная особенность игр типа уголков заключается в том, что белые и черные шашки (фишки) меняются местами. Поэтому такие игры можно назвать перестановочными. Известно много перестановочных игр и развлечений, самая знаменитая из которых — игра в «пятнадцать», придуманная С. Лойдом. Это не настоящая игра, а головоломка (соперников здесь нет) и к нашей книге непосредственного отношения не имеет, но она слишком знаменита, чтобы не уделить ей несколько строк.

В коробочке размером  $4 \times 4$  находится пятнадцать квадратов, занумерованных числами от 1 до 15 (одно из возможных расположений показано на рис. 51а). Требуется, не вынимая квадратов, переставить их так, чтобы номера шли в возрастающем порядке (рис. 51б).

За решение головоломки в начальной «позиции» на рис. 51а Лойд назначил большую денежную премию. Правда, он ничем не рисковал, так как предварительно доказал, что задание невыполнимо. Всего существует  $16!$  различных расположений квадратов, и все они распадаются на два равных по численности класса. Расположения одного класса приводятся при помощи перестановок к искомому виду (см. рис. 51б), а расположения второго

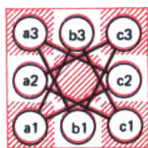
удается привести лишь к положению на рис. 51а, то есть с переставленными квадратами 14 и 15.

Как определить, к какому из двух классов принадлежит данное положение квадратов? Для этого нужно подсчитать число транспозиций в нем. Говорят, что два квадрата образуют транспозицию, если квадрат с большим номером предшествует квадрату с меньшим. Если число транспозиций четно, то позиция относится к первому классу (на рис. 51б оно равно нулю), а если нечетно, то ко второму классу (на рис. 51а — одна транспозиция). Подробный анализ игры можно найти во многих книгах по занимательной математике.

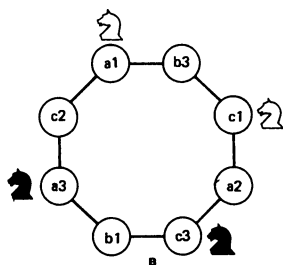
Приведем еще одну старинную головоломку, в которой приходится менять местами фигуры разного цвета. Для этого снова вернемся к шахматам.



а



б



в

Р и с. 52

В углах шахматной доски  $3 \times 3$  стоят два белых и два черных коня (рис. 52а). Поменять местами белых и черных коней за минимальное число ходов.

Эта задача, придуманная итальянцем Гуарини еще в XVI веке, хорошо знакома любителям занимательной математики. Она изящно решается при помощи «метода пуговиц и нитей», предложенного известным английским мастером головоломок Г. Дьюдени.

На каждое поле нашей маленькой доски, кроме центрального (на него кони не могут попасть), поместим по пуговице (на рис. 52б их заменяют кружки). Если между двумя полями возможен ход конем, то лежащие в них пуговицы свяжем нитью (на рисунке нитям соответствуют отрезки, соединяющие кружки). Полученный клубок пуговиц и нитей распутаем так, чтобы все пуговицы расположились по кругу (рис. 52,в).

Теперь решение задачи находится почти автоматически. Выбрав одно из направлений по кругу, будем переставлять по



нему коней до тех пор, пока они не поменяются местами. Необходимое перемещение коней по доске получается заменой пуговиц соответствующими полями. Нетрудно убедиться, что решение состоит из 16 перемещений коней (восьми белых и восьми черных), причем кони разного цвета могут ходить по очереди. Если поставить дополнительное условие, чтобы белые и черные кони при своем движении не угрожали друг другу (очередность ходов в этом случае можно нарушать), то решение также находится из распутанного клубка. Нужно следить лишь за тем, чтобы кони разного цвета не оказались в этом клубке соседями. Если круговое движение (по часовой стрелке) начинает белый конь a1, то решение будет такое: Ka1-b3, Ka3-c2, Kc3-b1-a3, Kc1-a2-c3, Kb3-c1-a2, Kc2-a1-b3, Ka3-c2-a1, Kc3-b1-a3, Ka2-c3, Kb3-c1.

Метод пуговиц и нитей легко интерпретировать в терминах теории графов. Действительно, нашей задаче о перестановке коней можно сопоставить граф, вершины которого соответствуют полям доски (пуговицам), а ребра — возможным ходам коня (нитьям). При этом распутывание клубка пуговиц и нитей, по существу, означает лишь более наглядное расположение построенного графа. Разумеется, метод пуговиц и нитей может быть использован не только в задаче Гуарини, но и для решения целого класса перестановочных задач, игр и головоломок (не обязательно шахматных).

Перестановочные головоломки возникают и в классических уголках, с которых мы начали этот раздел. Вот некоторые задачи, придуманные Ф. Бартевым.

За наименьшее число ходов переставить по правилам уголков четыре шашки из левого нижнего угла доски — полей a1, a2, b1, b2 в правый верхний.

Решение состоит из 13 ходов: 1. a2-c2 2. a1-c1-c3. 3. b1-b3-d3 4. b2-d2-d4 5. c2-c4-e4. 6. c3-e3-e5 7. d3-d5-f5 8. d4-f4-f6 9. e4-e6-g6 10. e5-g5-g7 11. f5-f7-h7 12. f6-h6-h8 13. g6-g8.

Четыре шашки, расположенные в центре (на полях d4, e4, d5, e5), могут разойтись по четырем углам доски за 22 хода. Три шашки за 19 ходов могут дойти с полей a1, b1, c1 до f6, g6, h6 и за 20 ходов с полей a1, a2, b1 до g8, h7, h8.

В обычных уголках шашки ходят по вертикалям и горизонталям доски 8×8, попадая то на белые поля, то на черные. Однако можно играть в уголки и по нормальным шашечным правилам, то есть в начале игры, как обычно, располагать шашки двух цветов на черных полях трех крайних горизонталей (по 12 с каждой стороны), а ходить по диаго-

нали — на соседние поля или перескакивая через свои и чужие шашки. Победителем вновь становится игрок, который первым занимает своими шашками территорию противника.

Эта игра представляет собой одну из разновидностей «халмы», в которой используются самые разнообразные доски. Поскольку в данном варианте игры ходы совершаются по диагонали, то ничейный алгоритм не работает, хотя исходное положение шашек является центрально-симметричным.

Другая игра, представляющая собой смесь шашек и поддавок, известна под названием «сальто». Считается, что эта игра придумана участниками международного шахматного турнира, состоявшегося в 1900 году в Монте-Карло. Правда, играют в нее на доске  $10 \times 10$ , причем шашки (по 15 с каждой стороны, в начале игры они расположены на трех крайних горизонталях доски) имеют отличительные символы, изображающие звезду, луну и солнце. Игра, пожалуй, слишком искусственна, и мы не станем описывать ее в деталях.

В заключение этого раздела приведем одно «упражнение» для халмы на доске  $8 \times 8$ . Требуется переставить 12 белых шашек со своей территории на пустую территорию противника как можно быстрее.

Цели удастся добиться за 20 ходов: 1. a3-b4 2. c1-a3-c5 3. b2-d4-b6 4. a1-b2 5. b2-d4 6. c3-a5-c7 7. b4-d6-b8 8. e1-c3-e5 9. d2-f4-d6 10. h2-f4 11. c5-a7 12. e3-c5-e7 13. d4-f6-d8 14. g1-e3-g5 15. f2-h4-f6 16. e5-g7 17. g7-h8 18. g3-e5-g7 19. f4-h6-f8 20. g5-h6.

Сократить это решение, по-видимому, невозможно, хотя и доказать это не так легко. Известно лишь простое доказательство того, что задачу нельзя решить меньше чем за 16 ходов. Приведем его. В начальном положении восемь шашек занимают нечетные горизонтالي — первую и третью, а четыре шашки стоят на второй, четной горизонтали. В заключительном положении восемь шашек находятся на двух четных горизонталях, шестой и восьмой, а четыре — на нечетной, седьмой. Итак, четыре шашки изменили четность своих горизонталей. Чтобы добраться до места назначения, каждая из этих шашек должна хотя бы раз перейти на соседнее поле (чтобы изменить четность) и хотя бы раз прыгнуть через другие шашки (чтобы перебраться в лагерь противника). Остальные восемь шашек делают хотя бы по одному ходу. Итого  $4 \times 2 + 8 \times 1 = 16$ .

## Реверси

Игра реверси (от английского *to reverse* — обращать) получила в последнее время огромную популярность. В США она вышла на второе место после шахмат, а в Японии — после Го. Проводятся многочисленные турниры, чемпионаты, в том числе с участием компьютеров. Игра привлекает простотой правил — они проще шахматных и шашечных — и удивительной динамичностью. Обстановка на доске меняется мгновенно, и все завоевания одного игрока буквально в один ход могут перейти к его противнику.

Реверси были известны с незапамятных времен, а лет пятнадцать назад их заново открыл японец Хаседжава. Коварные ловушки и непредвиденные ситуации, отличающие игру, вызвали у него ассоциации с шекспировским Отелло, и в результате она была переименована в... «Отелло». Недавно игра появилась и в наших магазинах, под классическим названием «реверси». Доска обтянута синим сукном (как в бильярде), а для шашек-фишек сделаны специальные углубления, закрывающиеся пластмассовыми крышками. Так что играть одно удовольствие...

Атрибутами реверси служит доска  $8 \times 8$  и 64 шашки-фишки (по 32 у каждого игрока), окрашенные с одной стороны в белый цвет, а с другой — в черный. Можно взять обычную шахматную доску, но цвет полей значения не имеет. Если вы еще не приобрели комплекта игры, соорудить фишки можно так: приклеить друг к другу обычные белые и черные шашки или окрасить в два цвета 64 одинаковые пуговицы. Очевидно, в игре используются не настоящие шашки, а как бы шашки-хамелеоны, меняющие свой цвет. Во избежание путаницы будем называть их просто фишками.

Играющий белыми ставит фишки белой стороной вверх, а играющий черными — черной. В начале игры партнеры ставят в центр доски по две фишки, как показано на рис. 53. В отличие от шахмат и шашек первый ход делают черные. Соперники по очереди выставляют фишки на свободные поля доски, обязательно рядом с фишками противоположного цвета, так чтобы вместе с какой-нибудь фишкой своего цвета окаймить (окружить) одну или несколько фишек партнера — по горизонтали, вертикали или диагонали. Другими словами, фишка ставится на одну линию с другой фишкой того же цвета, уже стоящей на доске, причем между ними должна находиться одна или несколько фишек противника, а свободных полей нет. Окруженные фишки попадают в плен, но не снимаются с дос-

ки, а переворачиваются другой стороной, как бы меняя «хозяина». Если окружение происходит одновременно по нескольким линиям, то переворачиваются все цепочки захваченных фишек. Таким образом, фишки, попавшие на доску, уже никогда не покидают ее, но переворачиваться могут сколько угодно раз.

Для иллюстрации рассмотрим позицию на рис. 54. Сейчас ход черных, и, ставя фишку на поле с3, они окружают сразу 17 белых шашек во всех возможных направлениях. По вертикали фишка с2 окружена черными фишками с3 и с1, а фишки с4, с5, с6, с7 — фишками с3 и с8. По горизонтали захвачены фишки b3 и d3 — g3, по большой диагонали — фишки b2 и d4 — g7, наконец, фишки b4 и d2 окружены фишкой с3 и, соответственно, фишками с5 и е1. Итак, все белые фишки попали

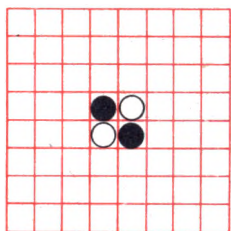


Рис. 53

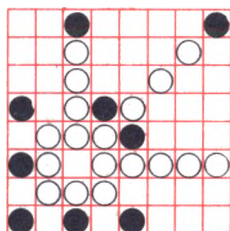


Рис. 54

в плен, они переворачиваются и меняют цвет. Кстати сказать, этот пример является рекордным — наибольшее число фишек, которое может быть захвачено и перевернуто, равно 17.

Если вы не можете сделать ход по правилам (не в состоянии окружить ни одной неприятельской фишки), то пропускаете его. Если при этом противник уже использовал все свои фишки, ему разрешается взять вашу фишку. Впрочем, в комплекте реверси каждая сторона имеет по две дополнительные фишки, и этого обычно хватает, чтобы обойтись собственными фишками.

Игра продолжается до тех пор, пока не заполнятся все 64 поля доски, либо ни у одного из игроков нет хода по правилам. По окончании партии производится подсчет белых и черных фишек. Выигрывает тот, чьих фишек на доске больше. Очевидно, партия длится не дольше 60 ходов.

Сделаем для примера по пять ходов. Поскольку начинают черные, нечетные номера соответствуют их ходам, а четные — ходам белых (в отличие от других игр каждый ход бе-

лых и черных нумеруется здесь отдельно; рассматривая партию в конце этого рассказа, мы убедимся в удобстве такой нумерации).

1. с4 (фишка d4 окружена черными фишками с4 и е4, она переворачивается и из белой превращается в черную) 2. с3 (фишка d4 меняет цвет) 3. d3 (фишка d4 вновь становится черной) 4. е3 (теперь окружены фишки d3 и е4, обе переворачиваются и меняют цвет) 5. f3 (фишка е4 становится черной) 6. с5 (с4 и d4 — белые) 7. b3 (фишка с4 окружена с помощью d5, а ряд с3, d3, е3 — с помощью f3, все фишки переворачиваются и становятся черными) 8. d6 (d5 — белая) 9. d7 (d4, d5, d6 — черные) 10. f2 (d4, е3 — белые). Возникла позиция (рис. 55). Инициатива на стороне черных, у которых больше фишек. Но радоваться рано. Ситуации в реверси меняются,

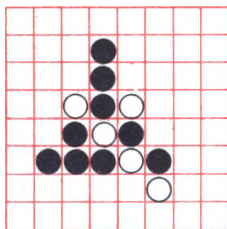


Рис. 55

как в калейдоскопе, фишки то и дело «перекрашиваются», и важно, какими они окажутся в конце партии.

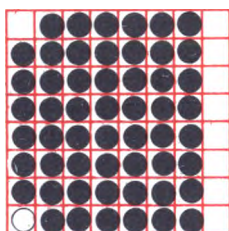
Играя в реверси, вы можете поставить ловушку, полагая, что вскоре захватите много фишек соперника, но, дойдя до намеченной позиции, обнаружите, что сами попались в нее. Эта необычайная динамика игры, как мы уже отмечали, делает ее на редкость увлекательной. Так, в отличие от шахмат, где в эндшпиле материальный перевес обычно определяет исход игры, в реверси игрок, обладающий большим числом фишек, может внезапно оказаться у разбитого корыта.

Понятно, что если в какой-то момент у одного из игроков оказываются «съедены» все фишки, он терпит поражение. Именно так происходит в позиции на рис. 54. Счет фишек сейчас 17:10 в пользу белых, но после хода с3 все белые фишки, как мы уже убедились, переворачиваются, и игра завершается победой черных — 28:0! Другое дело, может ли позиция на рис. 54 возникнуть в процессе игры? Подобные вопросы решаются в реверси весьма не просто.

М. Гарднер приводит партии, заканчивающиеся уже после

четвертого хода черных («детский мат» для реверси), правда, при иной начальной расстановке — белые: d5, e5; черные: d4, e4. Вот одна из рекордных партий: 1. e6 2. f5 3. g4 4. d3 5. c4 6. e3 7. e2, и на доске остались одни черные фишки. Кратчайшая партия, начинающаяся в стандартной позиции, по-видимому, содержит намного больше ходов, но сколько именно — еще не установлено.

Теория реверси пока развита недостаточно, однако некоторые важные принципы игроки открывают для себя довольно быстро. Очевидно, фишку противника, расположенную в центре доски, захватить проще, чем на краю. Поэтому всегда надо стремиться занимать своими фишками край доски и препятствовать в этом противнику. Особенно выгоден захват угловых полей. Фишки, попавшие на них, никогда не могут



Р и с. 56

быть перевернуты — их просто нечем захватить. Тот, кто первым занимает угол, обычно получает серьезное преимущество, а если удастся это сделать в начале или в середине игры, то решающее. Поэтому очень опасно ставить фишки около угловых полей, особенно на поля b2, b7, g2, g7. Противник может провести несложную комбинацию и занять угол. Вот яркий пример, иллюстрирующий силу угловых фишек (рис. 56). Надо признать, что позиция вряд ли может возникнуть в реальной партии. Как будто белым впору сдаваться — у них всего одна фишка против 54 противника! Тем не менее они легко берут верх. Вот как может закончиться партия:

1. Белые a8 (даже если сейчас ход черных, они все равно вынуждены пропустить его); вся вертикаль «a» становится белой, а у черных по-прежнему нет ходов. 2. h8; теперь переворачиваются черные фишки b8-g8 по горизонтали и b2-g7 по диагонали, у черных появляется ход 3. h7. Далее — 4. h1 5. h2 6. h6 7. h5 8. h4 9. h3. Итак, несмотря на, казалось бы, трудную исходную ситуацию, белые выигрывают со счетом 40:24.

Опытные игроки в дебюте ведут борьбу в центре — в квад-

рате с3-с6-f6-f3, чтобы раньше времени не выпустить противника на край доски. Затем белые и черные фишки одна за другой попадают на крайние вертикали и горизонтали, и надо следить, чтобы не пропустить противника в угол. К концу игры вариантов становится меньше, и искусные игроки просчитывают их на много ходов вперед. Здесь уже уступка углов не так опасна.

Приведем одну интересную партию в реверси, сыгранную человеком (черные) и компьютером (белые). Номера ходов ставятся прямо на полях доски.

На рис. 57а показаны первые 16 ходов черных и белых в том порядке, в каком они были сделаны. Цвет занумерованных фишек показывает, какая сторона делала соответствующий ход. Возникшая позиция изображена на рис. 57б.

Рис. 57

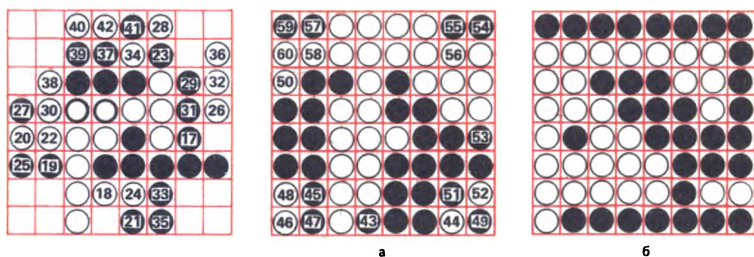
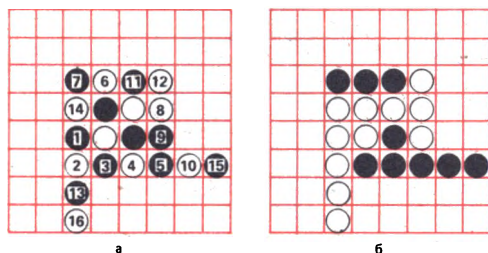


Рис. 58

Рис. 59

Сначала был занят весь центр доски, затем игроки вышли на ее край (15-м ходом черные и 16-м белые). На этом дебют партии можно считать законченным. Миттельшпиль, ходы 17 — 42, показан на рис. 58. Все больше и больше фишек появляется на крайних линиях, но к углам доски противники друг друга не подпускают. Инициатива сейчас принадлежит ЭВМ, но в эндшпиле черные переходят в решающую атаку (рис. 59а, ходы 43—60). Для этого они пускаются на хит-



рость — отдают левый нижний угол (машина занимает его ходом 46), но ходами 47, 49 проникают в соседний справа угол, завоевывая значительное пространство в нижней части доски. Шансы уравниваются, но ходом 50 компьютер ошибается, и человек захватывает еще один — правый верхний угол.

После хода черных 53 белые не в состоянии выставить на доску новую фишку и вынуждены пропустить ход, а за ним еще один (поэтому номера ходов 53, 54 и 55 на рис. 59 *a* окрашены в черный цвет). Через несколько ходов партия заканчивается победой черных с минимальным перевесом 33:31 (рис. 59б).

В заключение заметим, что идея захвата неприятельских шашек с двух сторон встречается в разных играх (патрункули, таблут и др.), но окруженные шашки (фишки) в них съедаются и покидают доску. После знакомства с реверси эта стандартная операция удаления фишек с доски может показаться слишком скучной!

---

# 5

---

## От крестиков- ноликов до рэнгзю

---



В этой главе снова пойдет речь о шашках, но существенно отличающихся от рассмотренных раньше. Для победы не требуется забирать неприятельские фигуры или объявлять мат, а достаточно выстроить свои фишки в определенный ряд (три, четыре или пять подряд). Хотя правила довольно просты, это вовсе не означает, что элементарны сами игры. Начнем главу с «детской» игры в крестики-нолики  $3 \times 3$ , а закончим шашками рэнгзю — одной из самых сложных и увлекательных игр. Название крестики-нолики не должно нас смущать, ведь вместо значков двух видов можно использовать белые и черные шашки. Впрочем, в тех случаях, когда принято играть в крестики-нолики, мы не будем отходить от общепринятой терминологии.

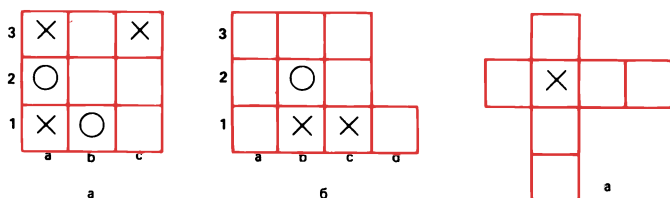
### Крестики-нолики

Итак, самая простая игра — крестики-нолики на доске  $3 \times 3$ . Партнеры по очереди ставят на поля квадрата (доски) крестики и нолики, и выигрывает тот, кто первым выстроит три своих знака в ряд. Разумеется, игра длится не более девяти ходов. Если никому из игроков не удастся добиться цели, партия заканчивается вничью.

Интересно, что даже на таком простом примере можно проиллюстрировать многие важные понятия математической теории игр. Игра «3 в ряд» относится к категории конечных, детерминированных, переборных, стратегических игр двух лиц с полной информацией. Будем обозначать вершинами (точками) возникающие в процессе игры «позиции» (расположения крестиков и ноликов). Пусть на-

чинают крестики. Соединим начальную вершину (пустая доска) с теми девятью, которые отвечают первому ходу крестиков. Каждую из них соединим с восемью вершинами, отвечающими ходам ноликов, и т. д. В результате мы получаем дерево игры (дерево перебора). Начальная вершина — корень дерева, максимальная длина ветви (глубина перебора) в данном случае равна девяти. Проанализировав дерево при помощи так называемой минимаксной процедуры, мы математически точно определим, как должна закончиться партия при наилучших действиях обеих сторон.

Все перечисленные термины легко переносятся на большинство игр, рассмотренных в книге, причем с точки зрения теории игр крестики-нолики ничем не отличаются от шахмат, разве что глубиной перебора. В шахматах дере-



Р и с. 60

во столь велико, что нет никаких надежд на его полный анализ, даже с помощью ЭВМ. В таких случаях полное дерево перебора заменяют усеченным, и «точная» игра превращается в «приближенную».

Конечно, для анализа крестиков-ноликов «3 в ряд» можно обойтись без специальных методов, больше часа он не займет. Легко обнаружить, что при правильной игре обоих партнеров партия заканчивается вничью. Ее исход решается уже на первом ходу. У крестиков три принципиальных начала — занять угол, центр или боковую клетку доски. Самый опасный дебют крестиков — в угловую клетку (a1 на рис. 60). Из восьми возможных ответов правильным для ноликов является лишь ход в центр доски. После этого ничья достигается без труда. Предположим, что нолики сыграли иначе: на a1 ответили b1. Тогда следует a3, единственный ответ a2, на что решает c3 с вилкой, то есть с двойной угрозой b2 или b3 (рис. 60 а). Следующим ходом крестики ставят третий знак и выигрывают. Вилкой заканчивается партия и в других вариантах.

Немного отвлечемся и рассмотрим следующую игру. На девяти карточках записаны девять слов: рыба, клин, нить, небо, сок, бусы, рот, сеть, река. Двое по очереди берут со стола карточки, и выигрывает тот, у кого первого окажутся три слова, имеющие общую букву.

Читатель может удивиться, почему мы вдруг снова вернулись к словесным играм, ведь их место совсем в другой главе? Но в том-то и дело, что данная словесная игра принципиально не отличается от обычных крестиков-ноликов! Составим следующую таблицу:

СОК БУСЫ СЕТЬ	КЛИН НЕБО НИТЬ	РЕКА РЫБА РОТ
---------------------	----------------------	---------------------

Фактически мы расположили наши девять слов на полях доски  $3 \times 3$ . Любые три слова, стоящие в одной строке, одном столбце или на одной большой диагонали таблицы, имеют общую букву. В то же время у других троек слов общих букв нет. Таким образом, для выигрыша достаточно взять три карточки со словами, расположенными на нашей доске-таблице вдоль одной линии. И значит, если вы хорошо играете в крестики-нолики, то, составив мысленно эту таблицу, станете непобедимым и в игре со словами. Конечно, и здесь при правильном выборе карточек партия всегда будет заканчиваться вничью.

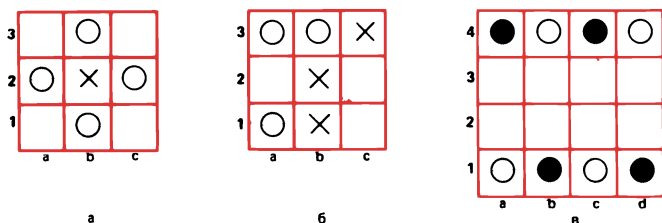
Таким образом, как говорят математики, две рассмотренные игры — крестики-нолики и словесная — изоморфны, то есть между их правилами можно установить такое соответствие, что игры ничем не будут отличаться друг от друга. Изоморфизм — очень важное математическое понятие, позволяющее при изучении одних объектов переходить к другим, уже исследованным.

Добавим теперь к обычной доске  $3 \times 3$  всего одно поле — d1 (рис. 60 б). Чем завершится игра в этом случае? На такой доске крестики быстро одерживают победу. Решает ход c1. Если нолики не играют b2, то, как мы знаем, они проигрывают на обычной доске  $3 \times 3$  (дело обойдется без дополнительного поля). Если же они займут поле b2, то после b1 неизбежен следующий ход крестиков на a1 или d1 (рис. 60 б).

Итак, существует доска из 10 полей, на которой крестики форсированно одерживают победу. Но это не рекорд.

На доске из семи клеток, представляющей собой два ряда  $4 \times 1$ , пересекающиеся в одной из своих внутренних клеток (рис. 60 в), выигрыш достигается уже на третьем ходу. Первый крестик ставится на пересечении рядов, второй — на одно из соседних внутренних полей, после чего нолики беззащитны. Нетрудно убедиться, что, какова бы ни была доска с числом клеток, меньшим семи, результат игры будет ничейный.

Вернемся к крестикам-ноликам на доске  $3 \times 3$ . Кажется забавным, но на ней можно играть в поддавки! Тому, кто первым выставит ряд из трех своих знаков, засчитывается поражение. В отличие от «прямой» игры в «обратной» инициатива принадлежит ноликам. Впрочем, у крестиков имеется надежная ничейная стратегия — на первом ходу они должны



Р и с. 61

занять центр и далее симметрично повторять ходы партнера.

Следующий вариант крестиков-ноликов свидетельствует о том, что даже такая маленькая доска, как  $3 \times 3$ , может служить неиссякаемым источником для изобретателей игр. От обычных правил отличие только в том, что каждый игрок при своем ходе может по желанию поставить либо крестик, либо нолик. Побеждает тот, кто первым закончит ряд из трех одинаковых знаков, причем безразлично каких.

В обычной игре, да и в поддавках, если партнеры не делают грубых ошибок, партия заканчивается вничью. В данном же варианте побеждает начинающий. Первым ходом он занимает центр, поле b2, например, как обычно, ставит на нем крестик (рис. 61 а). Второй игрок может занять либо угловое поле, либо лежащее на стороне доски, и, чтобы не проиграть сразу, он должен поставить нолик. Если выбрано угловое поле a1, то первый игрок рисует

нолик в противоположной вершине с3, и куда бы теперь противник ни поставил крестик или нолик, он своим следующим ходом заканчивает соответственно ряд из крестиков или ноликов. Если второй игрок занимает первым ходом боковое поле а2, то первый ставит нолик на одной линии с двумя имеющимися знаками, то есть на поле с2. У второго игрока нет ничего лучшего, чем поставить еще один нолик на b1, и после ответного, четвертого нолика на b3 он вынужден сдаться (рис. 61 а).

Вот еще один вариант игры на доске  $3 \times 3$ . Партнеры по очереди ставят на доску три своих крестика и нолика, после чего новые знаки уже не рисуются. Если за это время никто не выстроил три знака в ряд, игра продолжается. Теперь на каждом ходу игроки могут переставить один свой знак на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Выигрывает вновь тот, кто раньше выстроит три знака в ряд.

Как и в предыдущей игре, право первого хода является здесь решающим. Начинаящий должен поставить свой крестик в центр доски. Если теперь нолик поставлен в углу, например, на поле а3, то первый игрок ставит крестик на b1. Ответ вынужден — b3. На это следует с3, ответ опять единственный — а1. Дебют партии закончен (рис. 61 б). Двумя следующими ходами первый игрок переставляет крестики с b2 на с2 и с b1 на c1 и выигрывает партию. Если на первом ходу второй игрок займет боковое поле, например b3, то первый играет а1, второй отвечает с3, тогда первый идет а3, а противник а2. Все знаки выставлены, теперь первый игрок переставляет крестик с а1 сначала на b1, а затем на c1 и берет верх.

Если договориться, чтобы начинающий не занимал первым ходом центральное поле, то при правильной игре обоих партнеров ни один из них не сможет добиться цели, партия закончится вничью.

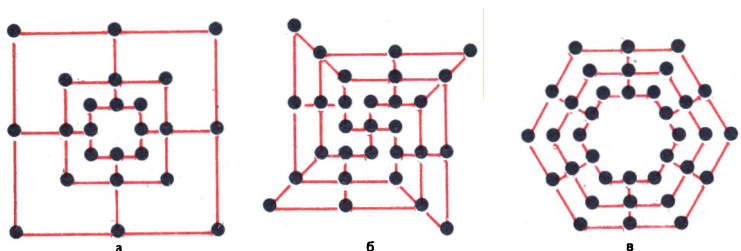
Конечно, в последней игре вместо крестиков и ноликов удобнее пользоваться белыми и черными шашками. Эту игру можно рассматривать как вступление в класс игр, представляющих собой гибрид крестиков-ноликов и шашек. На доске  $4 \times 4$  такая игра называется так-тиклъ. Здесь каждая сторона имеет по четыре шашки (рис. 61 в). Игроки по очереди передвигают их на одну клетку по вертикали и горизонтали, и кто первым расположит три шашки в ряд, тот и выигрывает.

Вот примерная партия в так-тиклъ: 1. c1-c2 d1-c1. 2. b4-b3

b1-b2 3. b3-a3 (грозило 3... a4-a3) 3... a4-b4 4. a1-b1 с выигрышем, так как черные не могут воспрепятствовать маневру 5. d4-d3. С помощью ЭВМ доказано, что игра так-тикль ничейная, то есть при точной игре ни одному из партнеров не удастся поставить три шашки в ряд.

Дальнейшим обобщением двух последних игр является «мельница», одна из самых древних в истории человечества игр. На рис. 62 изображено несколько «мельниц». Первоначальная форма доски (а) до сих пор остается самой популярной. В этом варианте, называемом простой мельницей, у каждой стороны по девять шашек. В мельнице-улитке (б) число шашек увеличивается до 12, а в шестиугольной (в) у противников по 13 шашек.

Известны также мельница-паутинка, мельница-сетка, пя-



Р и с. 62

тиугольная мельница и др. Во всех разновидностях игры правила одинаковые. Партия состоит из трех этапов. Первый этап (дебют) заключается в расстановке шашек. Игроки по очереди ставят свои шашки на любые свободные поля доски. Три шашки одного цвета, выставленные в ряд, образуют фигуру, называемую мельницей. Построив ее, игрок снимает с доски любую шашку противника. Если одним ходом удалось соорудить две мельницы, то с доски снимаются две шашки.

Второй этап (миттельшпиль) начинается после расстановки всех шашек. Теперь партнеры по очереди передвигают их вдоль линий на соседние поля. Цель прежняя — выстроить мельницу и снять с доски шашку противника.

Третий этап (эндшпиль) наступает, когда у одного из игроков остается три шашки. Теперь он получает право при очередном ходе переставить любую из них на произвольное свободное поле доски, не обращая внимания



на линии, соединяющие поля. Сооружая мельницу своими тремя шашками, он снимает шашку партнера, который ходит по обычным правилам до тех пор, пока у него тоже не останется три шашки.

Побеждает тот, кто сумеет довести число шашек противника до двух, лишая его возможности построить мельницу. Партия может закончиться и раньше, если в какой-то момент один из партнеров не в состоянии сделать ход, то есть все его шашки зажаты. Если у обоих партнеров осталось мало шашек (например, по три) и ни один из них уже не может соорудить мельницу, партия заканчивается вничью. Заметим, что запрещается дважды использовать одну и ту же мельницу. Занимать шашками три данных поля доски можно сколько угодно раз, но шашка противника снимается только при первом построении мельницы.

Игра болотуду, несколько напоминающая мельницу, ведется на прямоугольной доске  $6 \times 5$ . У каждого из партнеров 12 шашек. Они по очереди выставляют их на доску (за один ход ставятся сразу две шашки). В отличие от мельницы здесь запрещается ставить три в ряд, и дебют развивается более спокойно. Второй этап тот же, что и в мельнице. Шашки передвигаются по вертикалям и горизонталям, и при построении трех в ряд снимается одна шашка противника — та, которая примыкает к этой тройке слева или справа. Одной и той же тройкой разрешается пользоваться сколько угодно раз. Если у игрока осталось две шашки, партия в болотуду заканчивается его поражением. Третий «мельничный» этап в игре отсутствует. При повторении ходов партия признается ничейной.

В классических крестиках-ноликах, как только один из партнеров завершит ряд из трех знаков, партия сразу кончается. И в других вариантах игры доска часто используется, так сказать, с маленьким КПД. Для тех, кто сочтет это слишком скучным, придумана иная игра. На доске  $6 \times 6$  партнеры по-прежнему по очереди ставят свои знаки (или шашки) и за образование тройки по вертикали или горизонтали всякий раз получают по очку. Каждое поле доски учитывается лишь дважды — по вертикали и по горизонтали. Выигрывает тот, кто наберет больше очков. В данном случае игра завершается при полном заполнении доски.

До сих пор рассматривались крестики-нолики на плоских досках, однако известно немало вариантов и трехмерных игр. Простейшим обобщением служит игра на кубе  $3 \times 3 \times 3$ . Иг-

роки по очереди отмечают по одному кубику  $1 \times 1$ , и выигрывает снова тот, кто первым поставит три своих знака вдоль одной прямой. Стоит ли говорить, что начинающий побеждает здесь без всякого труда. Любопытно, что в объемной игре в отличие от плоской ничьей вообще не может быть, даже если обе стороны стремятся к этому. Действительно, если в кубе  $3 \times 3 \times 3$  отметить 14 любых единичных кубиков (именно столько ходов имеется у крестиков в процессе игры), то хотя бы один вертикальный, горизонтальный или диагональный ряд будет состоять целиком из крестиков.

Намного интереснее игра на кубической доске  $3 \times 3 \times 3$ , в которой выигрывает тот, кто первым занимает два пересекающихся ряда. Кубик, стоящий на пересечении двух таких рядов, разрешается отмечать лишь в последнюю очередь. Поскольку занятие центра куба приводит к простой победе, этот ход можно делать только в двух случаях: если он победно завершает игру или мешает противнику выиграть следующим ходом.

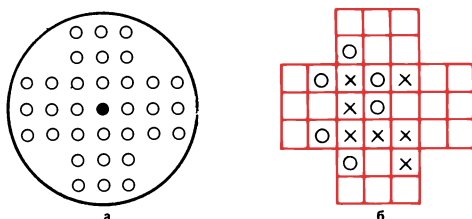
### Четыре и пять в ряд

Значительно глубже и интереснее такие игры в крестики-нолики, в которых победу приносят не три знака, поставленные в ряд, а четыре или пять. В игре «4 в ряд» на доске  $4 \times 4$  ноликам сделать ничью еще проще, чем в классическом варианте  $3 \times 3$ . Для доски  $5 \times 5$  эта игра была запрограммирована на ЭВМ. Машина действовала безукоризненно: ничьей достигала любым цветом, а при невнимательной игре человека одерживала победу. Кстати, доказано, что и на доске  $5 \times 5$  данная игра ничейна.

В «4 в ряд» играют и на доске для солитера, изображенной на рис. 63 а. Она состоит из 33 полей с отверстием в каждом из них. Фишками служат колышки, которые вставляются в отверстия. Основной вариант солитера, популярный в прошлом веке, заключается в следующем. На всех полях доски расставляются фишки одного цвета, и одна из них вынимается (свободное поле). Ход представляет собой прыжок произвольной фишки по вертикали или горизонтали через соседнюю фишку, которая при этом — в отличие от уголков — снимается с доски. Как и в уголках, за один ход фишка может сделать несколько прыжков, и все фишки, через которые она перепрыгнула, удаляются.

Если ходов больше нет, партия заканчивается. Цель игры в том, чтобы на доске осталась всего одна фишка. Доказано, что, какую бы фишку ни убрали с доски, задание выполнимо, причем самое короткое решение содержит 15 ходов.

Классический солитер (ему посвящена обширная литература), по существу, является головоломкой. Однако у нас выпускается комплект игры (почему-то под новым названием — йога) в несколько расширенном виде. Учитывая, что люди охотнее играют в игры, чем решают головоломки, в нем предусмотрены также три игры. Для этого фишки-колышки окрашены с двух концов в два цвета (как в реверси), и каждый из партнеров играет своим цветом. Первая игра — обычные уголки. Игроки расставляют по



Р и с 63

шесть своих фишек в двух противоположных прямоугольниках  $3 \times 3$  и по правилам уголков (допускаются и ходы по диагонали) стремятся занять неприятельскую территорию.

В другой игре, как и в традиционном солитере, на доске расставляются 32 фишки одного цвета, причем им разрешается перепрыгивать через любое количество фишек, примыкающих друг к другу, и все они снимаются с доски (приземляться надо сразу вслед за ними). Соперники ходят по очереди, побеждает тот, кто в конце игры соберет больший урожай фишек.

И наконец, третья игра, благодаря которой мы и вспомнили о солитере, — «4 в ряд». Вместо крестиков и ноликов в ней используются фишки двух цветов.

На рис. 63 б крестики соорудили вилку и выигрывают следующим ходом, ставя свой знак на одно из помеченных полей. Однако при правильной игре в крестики-нолики на доске для солитера результат ничейный.

Игра квадрат (другое название «тико») представляет

собой сочетание «4 в ряд» и болотуду. Ведется она на доске  $5 \times 5$ , у каждого игрока по 4 шашки. Цель игры — выстроить шашки своего цвета вдоль одной линии или в виде квадрата  $2 \times 2$ . Прежде всего партнеры по очереди расставляют шашки (счетверять их запрещается), после чего перемещают их на любые соседние поля (по вертикали, горизонтали или диагонали).

Игра «4 в ряд» на кубической доске  $4 \times 4 \times 4$  называется тик-так-тоу. Долгое время считалось, что она ничейна, но недавно компьютер установил, что у начинающего игрока имеется стратегия, обеспечивающая ему победу.

Теперь, наконец, настала очередь самой популярной игры в крестики-нолики. На неограниченном поле (листе клетчатой бумаги) двое, один за другим, ставят свои знаки. Выигрывает тот, кто раньше выстроит пять знаков в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Если никому не удастся это сделать, игра завершается вничью. Конечно, должны быть оговорены условия, сколько ходов может продолжаться партия.

Хотя теоретически игра ведется на безграничной плоскости, реально доска имеет конечные размеры, обычно это просто лист клетчатой бумаги. Имея под рукой карандаш и бумагу, в игру «5 в ряд» охотно играют школьники, студенты и даже кандидаты и доктора наук, а придумана она была четыре тысячи лет назад, задолго до того, как появились тетради в клетку... Кстати, старинные игры гобанк и гомоку отличаются от крестиков-ноликов «5 в ряд» только наличием специальных досок  $19 \times 19$  (как в Го) или  $15 \times 15$ , а вместо значков используются фишки.

В большинстве игр, рассмотренных в данной главе, нолики борются за ничью. Имеется в виду, что крестики (начинающая сторона) всегда могут ее достичь. Это интуитивное соображение подтверждается следующей теоремой.

При правильной игре в крестики-нолики «5 в ряд» или вообще « $n$  в ряд» при любом  $n$  начинающему партию гарантирована ничья.

Докажем это от противного. Предположим, что, как бы крестики ни играли, нолики, применяя наилучшую стратегию, побеждают. Тогда начинающий, поставив свой первый крестик на любое поле, далее должен воспользоваться стратегией партнера, мысленно поменяв знаки — крестики и нолики. Если на каком-то ходу согласно этой стратегии ему надо занять поле, где стоит самый первый крестик, он вновь ставит знак на любое поле доски и т. д. Ясно,

что лишний знак крестиком никогда не помешает. По нашему предположению, нолики должны выиграть. Однако стратегия крестиков такова, что они как бы играют ноликами, да еще с лишним знаком, значит, тоже выигрывают. Мы пришли к противоречию, что и доказывает теорему.

Приведенное доказательство почти такое же, как и в шахматной игре «два хода подряд». Как видите, мы здесь снова воспользовались идеями симметрии. Кстати, теорема справедлива как для бесконечного поля, так и для досок заданного размера.

Хотя у нас встречались игры, в которых побеждает вторая сторона, обычно право первого хода дает определенное преимущество. При этом в шахматах и шашках оно не слишком велико, а в крестиках-ноликах в вариантах «3 в ряд» и «4 в ряд» является решающим (в первом случае при добавлении одного поля к доске  $3 \times 3$ , во втором — на доске размером  $6 \times 6$  и больше). А какова ситуация в игре «5 в ряд», существует ли форсированный выигрыш у начинающего игрока? Практика показывает, что заметная инициатива принадлежит крестикам, но нередко и нолики берут верх. Но как утверждают знатоки рэндзю (об этой модификации крестиков-ноликов речь пойдет в следующем разделе), в японских книгах приводятся исчерпывающие варианты, как выиграть, начиная игру. К своему десятому ходу крестики получают решающий перевес, а к пятнадцатому завершают построение пятерки.

Хотя эти теоретические рассуждения вряд ли напугают любителей крестиков-ноликов, все же говорить о серьезных состязаниях, если доказан выигрыш одной из сторон, не приходится. Поэтому и были придуманы некоторые дополнения, при которых результат игры становится не столь определенным. Но прежде чем рассказать о шашках рэндзю, рассмотрим еще две модификации «шашечных» крестиков-ноликов. Вот игра, в которой засчитывается любое число шашек, стоящих подряд. На шахматной доске (можно взять и доску меньших размеров) двое по очереди ставят по две шашки своего цвета, стремясь выстроить из них горизонтальные или вертикальные ряды как можно большей длины. Ряд из двух одноцветных шашек дает их владельцу 4 очка, из трех — 9 очков, из четырех — 16 очков и т. д. (конечно, можно ввести и другие оценки). Шашка, стоящая одновременно в двух рядах, учитывается только 1 раз. После того как будет заполнена вся доска, ведется под-

счет очков. У кого окажется больше, тот и выиграл.

Игра хасами шогги содержит элементы сразу нескольких игр — крестиков-ноликов, уголков и простых шашек. Игра ведется на доске  $9 \times 9$ . У каждого из партнеров по 18 шашек, занимающих две крайние горизонтали (белые с одной стороны, черные с противоположной). Цель игры — выставить первым пять своих шашек в ряд по любой линии в пределах пяти средних рядов. Шашки могут ходить по вертикали или горизонтали на одно поле или перепрыгивать через соседнюю шашку, занимая свободное за ней поле. Если один из играющих зажмет неприятельскую шашку (по вертикали, горизонтали или диагонали) между двумя своими, то она снимается с доски; в то же время шашка может безопасно проходить между двумя шашками противника. В продаже имеется упрощенный вариант игры. Доска  $8 \times 8$ , у соперников по 16 шашек, и выигрывает тот, кто выстраивает не пять, а четыре шашки в ряд.

### ***n* в ряд**

В качестве обобщения крестиков-ноликов интересно проанализировать игры «*n* в ряд» на неограниченной плоскости при различных значениях *n*. Очевидно, по-прежнему побеждает тот, кто первым выстраивает *n* своих знаков в ряд. Как мы знаем, при  $n=5$  победа (теоретически) за начинающей стороной, то есть крестиками. Совсем легко выигрывают они при любом  $n < 5$ . А что можно сказать об игре «*n* в ряд» при  $n > 5$ ?

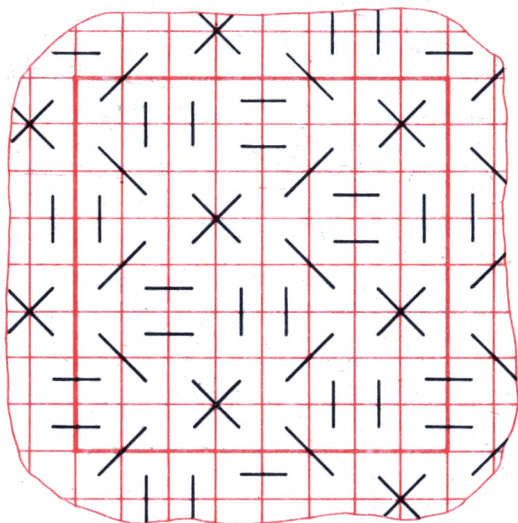
Еще в 1954 году Г. Поллаком и К. Шенноном, одним из основоположников кибернетики, было доказано, что при  $n \geq 9$  у второго игрока имеется беспроеигрышная стратегия. В дальнейшем несколькими математиками был построен очень простой и эффектный ничейный алгоритм игры. Всю бесконечную доску надо мысленно разделить на квадраты  $8 \times 8$  и заполнить их линиями, как показано на рис. 64. Теперь какую бы клетку ни занял первый игрок, второму необходимо пойти на клетку, лежащую на другом конце линии.

Покажем, что такой способ игры гарантирует ничью. Рассмотрим для этого произвольный ряд из девяти соседних клеток бесконечной плоскости. Наш квадрат обладает тем свойством, что среди этих девяти клеток обязательно найдутся две, связанные между собой линией. Это значит, что если одна клетка данной пары занята крестиком, то на другой обязательно стоит нолик. Таким образом, девять

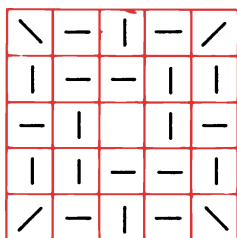
выбранных клеток не могут быть заполнены одними и теми же знаками, то есть начинающая сторона никогда не построит их девять в ряд (а тем более больше девяти), даже если игра будет продолжаться бесконечно.

Читатель, наверное, обратил внимание, что мы снова успешно применили парную стратегию, которая уже приводила нас к цели в таких играх, как бридж-ит и уголки. На сей раз такая стратегия оказалась успешной на бесконечной доске.

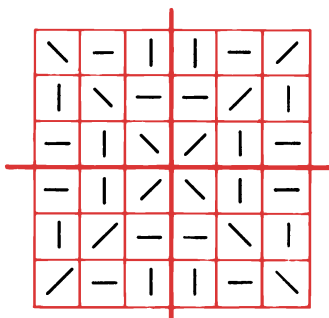
Впервые квадрат на рис. 64 придумали американские



а



б



в

Р и с. 64



математики А. Хэйлс и Р. Джуитт. Любопытно, что ленинградцы А. Давлицаров и О. Степанов нашли подобный квадрат при помощи ЭВМ.

К сожалению, рассмотренная стратегия, отличающаяся своим изяществом, не пригодна для значений  $n \leq 8$ . Однако доказано (более сложным способом), что игра «8 в ряд» на неограниченной доске также ничейна. Что же касается вопроса о результате игр «7 в ряд» и «6 в ряд», то он пока остается открытым. Впрочем, А. Давлицаров и О. Степанов доказали ничейность придуманных ими «экваториальных» крестиков-ноликов «7 в ряд»: на плоскости выбрано определенное направление — это и есть экватор, параллельно которому выстроенные в ряд семь одинаковых знаков не считаются за выигрыш.

В завершение вернемся к игре «5 в ряд», но на доске ограниченных размеров —  $5 \times 5$ . В этом варианте нолики совсем легко добиваются ничьей. Им вновь следует воспользоваться методом Хэйлса и Джуитта. После каждого хода крестиков в любой из помеченных на рис. 64 б квадратов нолик следует ставить в квадрат с такой же пометкой и в направлении, указанном ею самой. При этом нолики могут даже дать фору партнеру, разрешив в начале игры занять центральный квадрат и сделать еще один ход куда угодно. В конце игры в каждом возможном ряду из пяти клеток будет стоять хотя бы один нолик.

Аналогично достигается ничья и в игре «6 в ряд» на доске  $6 \times 6$ . Рис. 64, в похож на рис. 64, б, за исключением того, что ответный ход ноликов по диагонали может быть любым. «Покрытие» Хэйлса и Джуитта в данном случае отличается зеркальной симметрией по двум выделенным линиям.

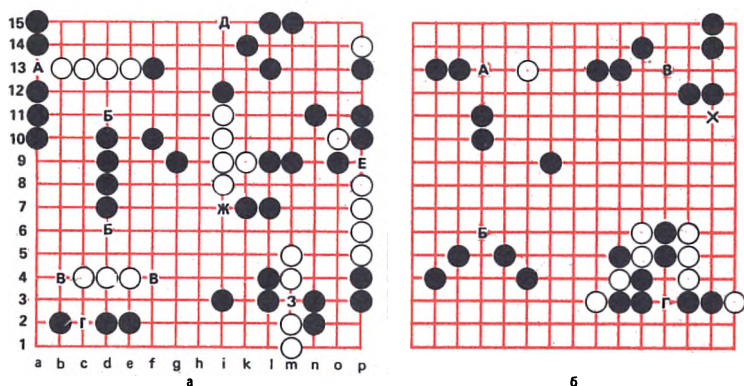
## Рэндзю

В 1980 году в журнале «Наука и жизнь» была опубликована статья В. Сапронова, весьма удивившая всех любителей крестиков-ноликов. Кто бы мог подумать, что с незапамятных времен существует увлекательная шашечная игра рэндзю, которая почти не отличается от крестиков-ноликов «5 в ряд» и вместе с тем представляет собой один из самых популярных видов спорта в Японии и других странах. Игра имеет древнюю историю (по свидетельству летописцев, на рубеже XVII — XVIII веков в Японии в рэндзю играли чуть ли не все от мала до велика), многочисленную литературу, свои клубы, чемпионаты, спортивные звания

и т. д. Короче говоря, такая невинная игра, как крестики-нолики, представляет собой весьма серьезное занятие! Отметим, что вслед за В. Сапроновым ряд интересных статей о рэндзю опубликовал доктор физико-математических наук А. Сокольский.

Чем же отличаются шашки рэндзю от крестиков-ноликов «5 в ряд»? Для игры нужна доска с 14 вертикалями и горизонталями (поля можно не раскрашивать) и шашки — белые и черные. Шашки ставятся не на сами поля, а на пересечения линий, образующих их (рис. 65); фактически игра идет на доске  $15 \times 15$ . Пересечения линий называются пунктами. Число шашек ничем не ограничено (хотя больше 225 не понадобится).

Игру начинают черные (как в реверси) ходом в центр



Р и с 65

доски. Обе стороны ставят шашки по очереди, и цель игры — построить ряд из пяти своих шашек (по горизонтали, вертикали или диагонали), образуя «нитку жемчуга» (так переводится с японского слово «рэндзю»). Пока все, как в крестиках-ноликах «5 в ряд». Белые и черные шашки заменяют два вида знаков, а ограниченность доски не столь важна. Дополнительные правила связаны с некоторыми запретами для черных (начинающей стороны). Но прежде чем их сформулировать, введем ряд несложных определений, уточняющих термины, используемые ранее интуитивно.

Расположение пяти шашек одного цвета подряд есть пятерка (по-шахматному мат!). Цель игры, как мы знаем,

как раз и состоит в том, чтобы построить пятерку. Ряд из четырех шашек, который может быть одним ходом превращен в пятерку, мы называем четверкой (шах). Если она может быть достроена до пятерки с двух сторон, это открытая четверка (рис. 65а, пункт Б). Тройка — ряд из трех шашек, который можно одним ходом достроить до открытой четверки (полушах). Тройки бывают двух видов — сплошные (В) и с интервалом (Г). Построение одной не-открытой четверки или тройки не так опасно. Но если очередным ходом игрок образует две или большее число четверок, троек (шахов, полушахов) или их комбинаций (пересекающихся в пункте появления шашки), противник попадает в трудное положение, и единственная надежда связана с немедленной контратакой. Такие ходы называются вилками (вилкой называют также и саму ситуацию, возникшую на доске).

Теперь, наконец, можно указать запреты, введенные в рэндзю по сравнению с игрой «5 в ряд». Черным (начинающей стороне) запрещается создание одним ходом любых вилок, содержащих две и большее число троек или две и большее число четверок, а также построение длинного ряда из шести или большего числа шашек. Образование одной из таких вилок называется фолом. Важно отметить, что вилка, состоящая из двух рядов, один из которых — четверка, а другой — тройка, не запрещена, как и вилки, возникающие на доске в тот момент, когда черные объявляют мат (завершают построение пятерки). Для белых запрещенных ходов нет, а длинный ряд, как и пятерка, приносит им победу.

Если ни одна пятерка уже не может возникнуть на доске (при этом не обязательно должны быть выставлены все шашки), то партия заканчивается вничью. Мирно могут разойтись партнеры и раньше, если сочтут, что ничья неизбежна. В процессе игры каждый соперник имеет право пропускать ходы. Черные прибегают к этому из-за опасности фола, а белые — чтобы сохранить такую опасность для черных. Если оба игрока один за другим отказываются выставить шашку, то партия автоматически признается ничейной. Этим правила игры рэндзю полностью исчерпываются.

В качестве иллюстрации запрещенных ходов обратимся снова к рис. 65а. Белые грозят поставить пятую шашку в пункт А, и черные не могут спастись, так как, занимая этот пункт, образуют запрещенный ряд из шести шашек

(фол). Не могут черные предотвратить возникновение пятерки и на других участках доски. Занимая пункт Е, они образуют вилку  $4 \times 4$  (две четверки), пункт Ж — вилку  $3 \times 3$  (две тройки), пункт З — вилку  $4 \times 4 \times 3$ . Поскольку черным не запрещена вилка  $4 \times 3$  (шах-полушах) — при ее образовании нет ни двух троек, ни двух четверок, — ход в пункт Д им разрешен.

Рассмотрим рис. 65б. На нем показаны положения, которые лишь напоминают фолы  $3 \times 3$ . Однако три шашки по горизонтали (пункт А) блокированы белой шашкой и не превращаются в открытую четверку, то есть это не тройка. Один из пересекающихся в пункте Б диагональных рядов может стать лишь шестеркой; ход в пункт В не является фолом  $3 \times 3$ , поскольку черные не угрожают поставить шашку в пункт Х (в этом случае они наталкиваются на фол  $4 \times 4$ ); наконец, достраивая пятерку ходом Г, черные выигрывают — возникающие запрещенные вилки и длинные ряды уже не имеют значения. Итак, на рис. 65 б в распоряжении черных имеется любой из ходов А, Б, В, Г.

Как уже говорилось, шашки рэндзю популярны во многих странах. У нас тоже созданы спортивные секции, проводятся соревнования. Полувековой опыт современных рэндзю показал, что введение фолов примерно уравнивает шансы сторон, более того, это правило тактически обогащает игру, придает ей неповторимую красоту и изящество. Существенно, что непобедимость черных (начинающей стороны) уже не удастся доказать методами симметрии, поскольку рэндзю не обладают этим свойством.

Отметим, что придумано немало модификаций рэндзю, но ни одна из них не получила столь широкого распространения. Вот некоторые варианты игры.

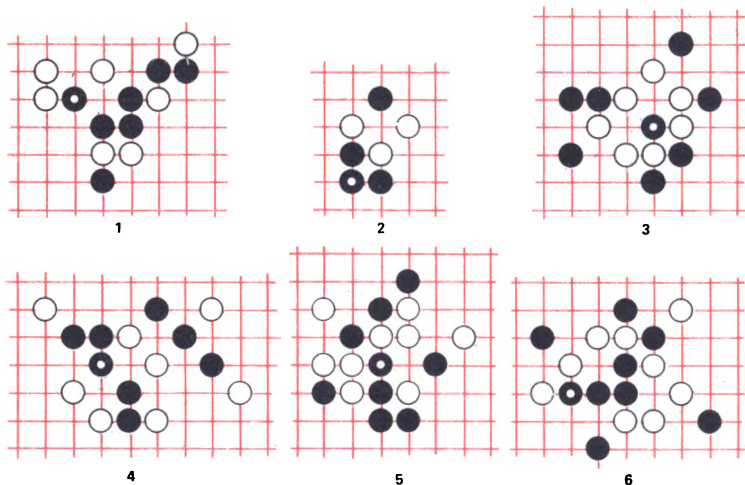
Гомоку — обычные крестики-нолики «5 в ряд», но играют в них, как уже говорилось, обычными шашками на доске  $15 \times 15$ . Вместо фолов, введенных в рэндзю, потребуем, чтобы второй ход черных был сделан вне центрального квадрата  $5 \times 5$ . Такая игра носит название «гомоку с запретным центральным квадратом». В «гомоку с общим центральным полем» тоже играют без фолов на доске  $15 \times 15$  (5 в ряд), но самая первая, центральная шашка все время как бы меняет цвет, при ходе черных считается черной, а при ходе белых — белой.

В антирэндзю (доска  $15 \times 15$ ) фол возникает только при построении открытой четверки, а в «старом рэндзю» (доска  $19 \times 19$ ) — лишь при вилке  $3 \times 3$ . В гомокунарабе (доска

15×15) обоим соперникам запрещена вилка 3×3; каждому дается по 35 шашек, и если черные, использовав все шашки, не построят пятерки, им засчитывается поражение.

Игра пента больше других отличается от рэндзю. Доска 15×15, фолы отсутствуют, а дополнительное правило (распространяемое на обоих партнеров) заключается в том, что, закрывая две неприятельские шашки с двух сторон, игрок снимает их с доски, объявляя «добычей». Партию выигрывает тот, кто первым построит пятерку, либо (новшество!) первым захватит пять «добыч».

Вернемся к традиционным шашкам рэндзю. Они имеют достаточно разработанную теорию (как и в шахматах, лучше исследованы дебюты), содержат немало стратегических и тактических приемов (позиционная и комбинационная игра),



Р и с. 66

но подробное изучение игры не входит в наши планы. Ограничимся рассмотрением шести задач (рис. 66) возрастающей сложности, иллюстрирующих некоторые приемы рэндзю.

Поскольку перед нами лишь фрагменты настоящей доски, для ориентации, куда можно двигаться, черная шашка, сделавшая первый ход, всюду помечена белой точкой.

Задачи эти составили А. Сокольский и чемпион мира по переписке А. Носовский. В каждой из них выигрывает форсированный; в задачах 2 и 3 начинают и выигрывают

белые, а в остальных — черные. Решения приведены на рис. 67, снабдим их краткими комментариями (нумерация ходов в рэндзю сплошная, на рисунках номера ставятся прямо на шашках).

Первая задача самая простая. Ходом 1 черные строят тройку и, как бы партнер ни закрыл ее, ходом 3 создают победную вилку  $4 \times 3$ . Во второй задаче белые при помощи полушахов 1 и 3 подготовили решающую атаку. Черные при любых ответах вынуждены будут занять пункты 2 и 4, после чего пункт X становится запретным для них (фол  $3 \times 3$ ). Теперь белые беспрепятственно строят свою пятерку. Подобный метод выигрыша рэндзисты называют кратко: выигрыш фолом.

В третьей задаче белые опять выигрывают, подготовли-

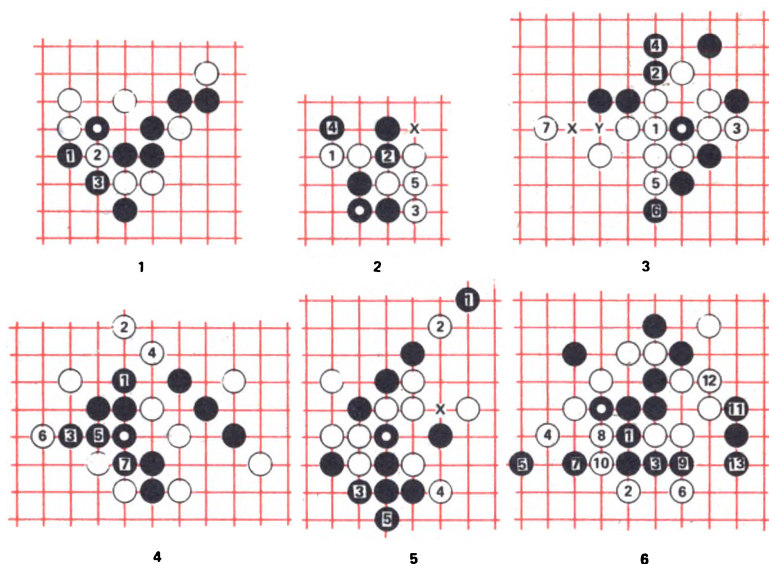


Рис. 67

вая фол черных ходами 1, 3 и 5 (вынуждая их занять пункты 2, 4 и 6). Запретных пунктов тут два — X и Y, оба они фолы  $3 \times 3$ . После хода белых 7 черные не могут занять ни один из них, а их положение безнадежно. В четвертой задаче ход 2 — сильнейшая защита; он превращает тройку черных, построенную ходом 1, в псевдотройку (она не может стать открытой четверкой). Но белые вынуждены

капитулировать из-за победной вилки  $4 \times 3$ , которая была подготовлена полушахами 3 и 5.

Пятая задача иллюстрирует весьма полезный прием: даже атакуя, нельзя забывать о защите. Если бы черные не сделали промежуточный ход 1, а сразу пошли в пункт 3, белые перехватили бы инициативу и выиграли на шахах, подготовив черным фол  $3 \times 3$  в пункте X. В шестой задаче ходом 4 белые защищаются от прямолинейной угрозы (если ход 4 в пункте 2, то ход 5 в пункте 7, то есть вилка  $4 \times 3$ ). После ходов 4 и 5 эта угроза нейтрализована, так как ход 9 в пункт 10 может привести лишь к запрещенному для черных длинному ряду. Но у черных все же находится выигрыш. Ходом 11 они подключают шашки «верхнего фланга» и выигрывают вилкой  $4 \times 3$ .

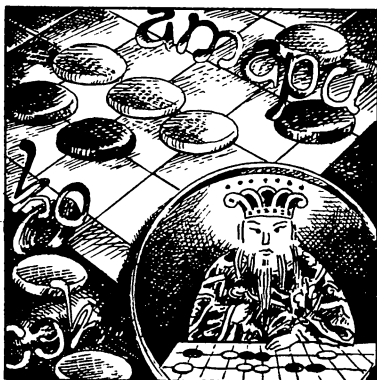


---

# 6

## Игра ГО

---



Го — одна из самых древних и мудрых игр в истории человечества. Но в нашей стране она только недавно начала завоевывать популярность — открываются клубы, проводятся турниры, в спортивных магазинах можно приобрести комплект игры. Любопытно мнение о Го шахматного короля Эм. Ласкера: «Эта игра простотой правил превосходит шахматы, не уступая им богатством фантазии». В журнале «Наука и жизнь» публиковался содержательный материал по Го вместе с многочисленными задачами, но в книгах, изданных на русском языке, игра до сих пор не освещалась.

Несмотря на афористическое высказывание Ласкера, игра Го не столь уж проста, и автор книги не рискнул бы вести рассказ о ней без спарринг-партнера. Глава эта написана при активном участии математика и сильного московского игрока А. Гончарова, занимающегося разработкой программы для Го на компьютере.

*Исторические сведения.* Судя по археологическим находкам, игра Го родилась четыре тысячи лет тому назад. Густой туман времени скрыл от нас тайны ее появления. Хотя игра эта старинная, но по проблемам, которые она ставит нашему интеллекту, Го представляется весьма современной. Траектория ее распространения, охватившая страны Востока, ныне протянулась почти по всему Западу.

Первоначально Го (под теми или иными названиями) применялась как инструмент астрологии. Согласно гороскопу человека, желавшего узнать свое будущее, на доске (небе) расставлялись камни (звезды). Белые камни символизировали добро, а черные — зло. Начиналась «игра» с собственной судьбой. В такой необычной для нас форме выражал-

ся тот факт, что каждый человек сам творец своей судьбы. Постепенно Го вышла из астрологических пеленок и из мистической игры превратилась в игру интеллектуальную.

К первому тысячелетию до нашей эры Го стала модной в императорских кругах и приравнивалась к признанным в те времена искусствам каллиграфии и аранжировки цветов. После того как игра привлекла внимание Конфуция, все восточные мудрецы сочли достойным серьезно заниматься ею.

Бурным развитием Го отличался XVII век, когда молодой японский монах Хонинбо Санса покинул буддийский монастырь и возглавил первую государственную академию Го. Получив возможность целиком посвятить себя искусству Го, лучшие игроки того времени стали образовывать школы Го со своими лидерами и стилями игры. Японская школа Хонинбо в течение трехсот лет была сильнейшей в мире, и, наверное, поэтому Го обычно связывают с Японией, иногда называя игру японскими шашками.

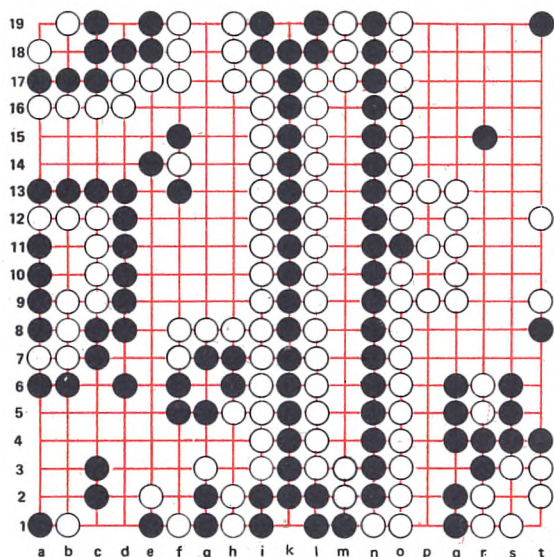
Интерес к игре продолжает расти, в настоящее время в Го-клубах Японии зарегистрированы миллионы членов, издаются книги, журналы, проводятся многочисленные соревнования. Состоялось уже шесть чемпионатов мира среди любителей. В последнем из них участвовали представители более сорока стран. Профессионалы проводят свои турниры отдельно. В СССР тоже имеется много сильных игроков, и лучшие из них на равных сражались с японскими мастерами Го, посетившими несколько раз нашу страну.

Квалификационная шкала в Го отличается от шахматной. Вместо разрядов и званий используются кю и даны. Самая нижняя ступенька — 20-й кю, за ним идет 19-й и т. д. до первого. Далее присваиваются даны — от первого до девятого. Для того чтобы двум игрокам разной силы было интересно играть между собой, применяется система гандикапа, то есть в зависимости от разницы в силе игры более опытный игрок дает партнеру фору несколько камней, которые тот ставит на доску перед началом партии. Можно продолжить разрядную сетку далее 20-го кю. Тогда игра начинающего оценивается примерно 35-м кю. Отметим, что первая машинная программа Го сражалась в силу 30-го кю.

Забавно, что после проникновения Го на Запад первыми «жертвами» стали представители точных наук, которых

игра привлекла простотой правил и вместе с тем их своеобразной математичностью. При более глубоком анализе обнаруживаются различные параллели между Го и такими разделами современной математики, как теория графов и распознавание образов. Не случайно игрой серьезно заинтересовались специалисты в области ЭВМ. Правда, успехи машин в Го пока не так велики, как в шахматах.

*Описание игры.* Для игры в Го надо иметь доску и набор камней двух цветов — белого и черного. Стандартная доска изображена на рис. 68 (она не раскрашивается). Игровое поле образовано пересечением 19 вертикальных и 19 горизонтальных прямых (при этом говорят о доске  $19 \times 19$ , хотя «по-шахматному» ее размеры  $18 \times 18$ ). Прямые пе-



Р и с. 68

ресекаются в 361 точке, которые называют пунктами (как в рэндзю), на них-то и ставят камни.

Обычный комплект состоит из 180 камней каждого цвета, но практически достаточно иметь по 150 камней. Иногда применяют доски меньших размеров, так в выпускаемом у нас комплекте — доска  $13 \times 13$  и 90 пар камней. Если у вас нет специального комплекта, то вместо камней мож-

но взять белые и черные шашки, фишки или пуговицы двух цветов. Доску легко начертить на листе плотной бумаги или на картоне.

Как в реверси и рэндзю, начинают в Го черные. Игроки ходят по очереди, выставляя на один из свободных пунктов доски камень своего цвета. Поставленные камни не передвигаются, но могут попадать в плен. Го относится к «территориальным» играм, ее цель — захватить максимальное пространство на доске. Для этого игроки выстраивают на доске *цепочки* своих камней, из которых затем образуются *группы*.

Цепочка — произвольный набор связанных между собой камней одного цвета (соединяться они должны по линиям доски). Например, на рис. 68 прямая  $p$  вместе с камнем  $m1$  образует цепочку из 19 черных камней, а на прямых от  $l$  до  $m$  возникла цепочка из 25 камней того же цвета.

Для каждого камня и цепочки существует понятие степени свободы. Число степеней свободы одного камня равно числу свободных пунктов, соседних с ним по вертикали и горизонтали. Число степеней свободы цепочки равно сумме степеней ее камней. В случае когда остается только одна степень свободы, говорят, что камень (или цепочка) находится в положении *атари*.

Далее будем правила сопровождать описанием некоторых игровых моментов. Рассмотрим пример на рис. 68. Черный камень  $t19$  в вершине угла имеет две степени свободы:  $t18$  и  $s19$ , а белый камень  $t12$  — три:  $t11$ ,  $t13$  и  $s12$ . Максимальное число степеней свободы одного камня равно четырем, как, например, у черного камня  $g15$ . Если белый и черный камни стоят на соседних пунктах, то число степеней у каждого из них уменьшается: оба забрали их по одной друг у друга, примером служат камни  $t9$  и  $t8$ .

Цепочка из двух черных камней  $c2$ ,  $c3$  имеет шесть степеней свободы, а цепочка белых  $g5$ ,  $g6$  находится в положении атари, у нее лишь один свободный пункт  $g7$ . Также одну степень свободы имеет цепочка  $g7$ ,  $h6$ ,  $h7$ . Рядом с ней находится еще одна цепочка из трех черных камней, но эти цепочки не соединены в одну, так как перейти по соседним камням с одной на другую нельзя.

Некоторые близко расположенные, но не связанные между собой цепочки могут быть надежно разделены камнями или цепочками противника. В этом случае говорят, что они отрезаны друг от друга. Так, на рис. 68 черная цепь на прямой

п отрезана от черной цепи на прямой к. Сверху они не могут соединиться, так как белыми занят пункт m19, а снизу имеется диагональный разрез. Однако, разбив на части силы черных, белая цепочка отрезала от своих камней и саму себя.

Если какая-либо цепочка (или камень) полностью окружена камнями противника, то есть у нее не осталось ни одной степени свободы, то она считается взятой в плен и снимается с доски. Пленные камни становятся собственностью противника. На рис. 68 при расположении белого камня на d1 в плен попадает черный камень e1, находившийся в положении атари (на освободившийся пункт можно снова ставить камни). При ходе черных f2 плененным оказывается камень f1. Аналогично в плен захватываются две белые цепочки (по два камня каждая) при выставлении черных камней в пунктах h3 и g7, а при ходе белых g6 в плен попадают три черных камня.

Последний пример следует рассмотреть внимательнее. При расположении белого камня на g6 этот «десантник» не получает ни одной степени свободы. Такой ход разрешается делать лишь в том случае, если выставленный камень забирает последнюю степень свободы камней противника, то есть пленит их. Если же пленения не происходит — атакуемая цепочка не стоит в атари, — занимать полностью окруженный пункт нельзя. Так, черные не могут пойти t1 и s2. Заметим, что в нашем примере после снятия с доски плененных черных камней g7, h6, h7 белый камень g6 обретает свободу.

Цепочки и камни, над которыми нависла угроза пленения, можно спасать, добавляя к ним новые камни. Скажем, ход белых g7 выводит цепочку двух белых камней из состояния атари, поскольку образовавшаяся удлиненная цепочка имеет уже три степени свободы. Подобным образом ставя камень на g6, черные выручают три своих камня, присоединяя их к трем другим камням. В результате возникает цепочка, состоящая из семи черных камней с четырьмя степенями свободы, — окружить ее непросто.

Более важным объединением камней для игры является группа. Это одна или несколько цепочек, окружающих хотя бы один пункт доски. Пространство, окруженное группой, называется *глазом*. Группа может окружать и несколько глаз. Как мы сейчас убедимся, достаточным условием жизнеспособности группы служит наличие в ней не менее двух окруженных глаз. Степени свободы группы можно разделить

на внутренние и внешние, ведь группа — это не просто «забор», а ограда, огораживающая определенное пространство.

Можно занимать камнями пункты, находящиеся как вне группы, так и внутри. Группа попадает в плен, если очередным ходом противник лишает ее всех степеней свободы. Но если у группы два глаза, то пленить ее практически невозможно. На рис. 68 большая черная группа с двумя глазами k1, k19 полностью окружена снаружи. Но как окружить ее изнутри? Ход k1 невозможен, так как пленником окажется сам атакующий белый камень. По той же причине не удастся пленить и белую группу с глазами s2 и t1.

Для групп с одним глазом нет общего правила нападения и защиты. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся виды «одноглазых» групп, изображенных для простоты на

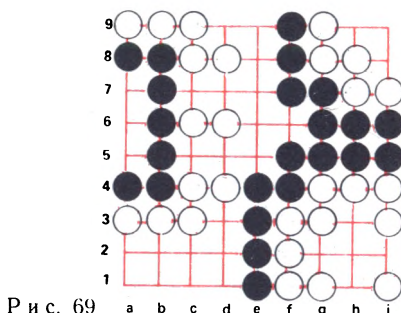
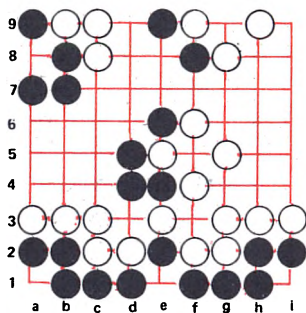


Рис. 69

доске 9×9 (рис. 69). На ее левом краю расположена черная группа с пятью степенями свободы, двумя — с5, с7 снаружи и тремя — а5, а6, а7 изнутри. Белые создали надежное окружение, прижав черные камни к краю доски. Наружные степени свободы легко ликвидировать, и судьба группы целиком зависит от внутреннего пространства. Белые могут пойти а6, после чего у черной группы останется два свободных пункта а5 и а7. Если черные сами займут один из них, то белые, оккупировав предварительно пункты с5, с7, поставят свой камень на последний свободный пункт и возьмут в плен всю черную группу. Очевидно, черные не будут стремиться к самоуничтожению. В этом случае белые сами сделают ход на предпоследний внутренний свободный пункт. Черные займут последнюю общую степень свободы и возьмут в плен два белых камня. Но это лишь временное спасение черной группы. Глаз стал меньше — в нем осталось только два свободных пункта,

скажем а5 и а6. На следующем этапе атаки белых произойдет высадка нового десанта в пункт а6. Снова у черной группы останется одна степень свободы. Черные пленят белый камень ходом а5, но это ничего не изменит, так как число степеней свободы не увеличится. Еще раз белые пойдут внутри группы и полностью снимут ее с доски, получив девять пленных черных камней и дополнительное свободное пространство. Эти приобретения, очевидно, полностью компенсируют потерю ими трех камней.

Мы привели столь подробное описание атаки группы камней, обладающей глазом, так как это часть базиса, на котором строится тактика Го. В данном примере ход черных а6 гарантировал жизнь группе, хотя внутреннее про-



Р и с. 70

странство черных при этом уменьшилось. Пункты, подобные а6, называются критическими. В зависимости от очередности хода игроки, выставляя в них камни, либо образуют два глаза, либо, наоборот, лишают противника такой возможности.

На рис. 69 представлены две белые группы с единственными критическими пунктами — i9 и h2. Чей бы ход ни был, одна из этих групп гибнет, а другая спасается (при своем ходе черные, разумеется, захватят большую группу).

Если игроку не удастся образовать группу с двумя глазами в одной цепочке, то он может попытаться объединить вместе несколько цепочек. Рассмотрим белую группу из шести камней, имеющую глаза в пунктах t1 и s2 (рис. 68). Две цепочки не соединяются между собой, но зато они надежно окружают два свободных пункта.

Особая ситуация, называемая ко, запрещает повторение позиции на доске. Приведем пример. На рис. 70 черный ка-



мень а9 может быть пленен ходом белых а8. Кажется, что теперь черные, в свою очередь, продолжая а9, могут взять белый камень а8. Однако по правилу ко этот ход запрещен, так как после него положение на доске полностью повторяется. Лишь при появлении какого-нибудь камня в другом месте доски черные смогут пойти а9.

На рис. 70 приведены основные разновидности ко-ситуаций: уже рассмотренное ко в углу, ко в центре доски и два варианта ко на краю доски. Внимательно взглянем на нижний край доски, где ко образуется после хода белых е1. В отличие от трех других случаев здесь решается судьба большой группы камней. Если пункт е1 займут черные, то они получат крепкую группу камней с глазами. Пусть сейчас ход белых. Играя е1, они снимают камень е2 и разделяют черных на две нежизнеспособные группы. По правилу ко черные не могут сразу ответить е2. Их задача — отвлечь противника на другом участке доски, после чего все-таки сыграть е2. Если же белые закрепятся на е1, у противника образуются две обреченные на гибель группы, имеющие по одному глазу. Подобная борьба за пункты называется ко-борьбой, а само правило ко используется как сильное тактическое средство. Еще раз с примером ко-борьбы мы встретимся ниже, рассматривая партию в Го.

Познакомимся еще с одной часто встречающейся ситуацией на доске. Ситуация *сэки* — это вынужденное, мирное существование цепочек противоположного цвета: атака со стороны одной из них кончается ее же гибелью. Степени свободы в зоне сэки являются нейтральными, они не принадлежат ни черным, ни белым. Две основные разновидности сэки показаны на рис. 68. В одном случае это взаимоокруженные цепи с двумя общими степенями свободы b10 и b11 на левом краю доски, в другом — у окруженных групп имеется по одному глазу и по одной общей степени свободы b18. Во втором случае ситуация представляет собой сэки, так как ходить на a19 и b19 равносильно самоубийству. И ход b18 тоже погубит того, кто его сделает, хотя он и не противоречит правилам игры. На рис. 68 показан еще один пример равновесия сил: две цепочки, у которых целая линия общих степеней свободы, от m4 до m16. Занятие свободных пунктов линии m будет прекращено, как только останутся два последних пункта. Следовательно, все 13 незанятых пунктов являются нейтральными.

Как же завершается партия в Го? В ходе игры на доску ставятся один за другим белые и черные камни. Некото-

рые из них попадают в плен, другие образуют активные группы. Наконец наступает момент, когда один из игроков видит, что его следующий ход не принесет ему новых приобретений (пленных камней или пунктов территории), а, наоборот, может лишь привести к потерям. В этом случае игрок пасует, то есть отказывается от своего очередного хода. После ответа противника он может снова ставить камни. Но если и второй игрок пасует сразу вслед за первым, то партия заканчивается, и партнеры переходят к подсчету очков. Конечно, опытные игроки пасуют только тогда, когда видят, что дальнейшая игра не даст принципиальных изменений на доске. Обычно это означает, что вся доска разделена на белую и черную территории.

Для подсчета очков сначала заполняют невыставленными камнями нейтральные пункты, граничащие как с белыми, так и с черными камнями (эти пункты не учитываются при подсчете). После этого на доске остаются пустыми только пункты, являющиеся глазами групп. За каждый такой пункт внутри глаз одного цвета игроку дается очко, очко приносит ему и один плененный камень. У кого сумма очков больше, тот и объявляется победителем. Чтобы отдельно не подсчитывать пустые пункты территории игроков и пленные камни, поступают так. Свободные пункты территории белых заполняются попавшими в плен белыми камнями, а на территорию черных соответственно выставляются черные камни, плененные белыми. В результате подсчет упрощается. Пример конкретного подсчета очков будет дан в приведенной ниже партии.

Статистика игры Го на доске  $19 \times 19$  показывает, что если силы соперников примерно равны, то черные, начинающие партию, в среднем выигрывают с преимуществом пять очков. Поэтому по современным правилам игры белым при подсчете добавляется пять с половиной очков. А при игре с форой при равенстве очков выигрывает дававший фору. Таким образом, ничьих в Го не бывает.

Повторим кратко правила игры.

1. Начинают черные. Ходы делаются по очереди (пас тоже ход).

2. Не разрешается делать хода, приводящего к повторению позиции на доске (имеется в виду не только расположение камней, но и очередность хода). В подавляющем числе случаев это связано с ситуацией ко.

3. Камень (или группа камней) без степеней свободы снимается с доски при занятии последней степени свободы.

4. Не разрешается уничтожать последнюю степень свободы собственных камней, если при этом не берутся в плен камни противника.

5. Игра заканчивается после двух пасов, сделанных подряд.

6. Выигрывает получивший наибольшую территорию (после выставления плененных камней на территорию противника).

Для лучшего понимания правил и игровых моментов, которые мы затронули, рассмотрим несколько интересных задач (рис. 71), составленных игроком девятого дана (высшая ступень мастерства) японцем Маэда Нобуаки.

**Задача 1.** Ход черных. Как захватить в плен белую цепочку, окружившую четыре черных камня?

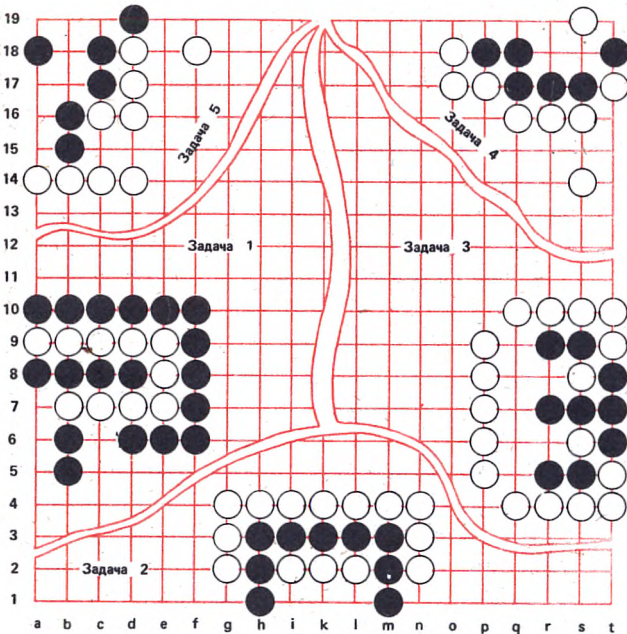


Рис 71

**Решение.** 1. а7 2. а6 3. а7 4. а8 5. с8. Теперь группа белых камней не в состоянии образовать два глаза, так как пункт с8 критический, а пункт а7 не является глазом.

**Задача 2.** Ход черных. Как избежать пленения?

Решение. 1. k1! Единственный ход. Черные образовали сэки, и несмотря на то что внутри их группы находятся три белых камня, противник не может пожертвовать ими. Жертвенная цепочка окажется изогнутой, что позволит черным легко соорудить два глаза.

**Задача 3.** Ход белых. Как взять в плен все черные камни?

Решение. 1. q7 2. r8 3. r6 4. g6 5. r6. Черные не могут спастись, на 6. q5 решает 7. s6, а не 6. s6 — 7. g5. В данной задаче первый ход белых не единственный.

**Задача 4.** Ход черных. Как спасти группу?

Решение. 1. r19 2. s18 3. p19 4. t19 5. r18 6. t16 7. t18. Черные образовали два глаза — q19 и s18, s19, t19. Если бы белые на шестом ходу присоединили три своих камня к

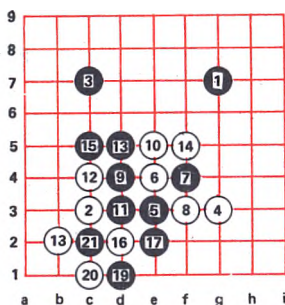


Рис. 72

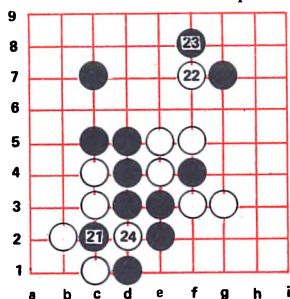
камню t17 ходом t18, то после 7. t16 противник взял бы в плен пять камней вместо трех.

**Задача 5.** Ход белых. Как взять в плен черную группу?

Решение. 1. b17 2. a17 3. a15 4. a16 5. b19! Если теперь черные играют 6. b18, то следует ответ 7. c19, и, жертвуя два камня b19, c19, белые ликвидируют один глаз черных. Если черные сразу перекроют выход из своей группы посредством c19, то белые ходом b18 объединяют три своих камня, и после их пленения ход b18 приведет к положению с одним критическим пунктом, как в задаче 1.

**Партия двух неопытных игроков.** На примере партии на учебной доске 9×9 мы поясним некоторые правила Го. Для записи партий удобно номера ходов показывать прямо на камнях. Поскольку нумерация сквозная, ходы черных всегда нечетные, а ходы белых — четные (кроме игры с форой, когда начинают белые). Если ход следует на пункт, уже занимавшийся камнем, оба номера пишутся рядом под диаграммой.

Ходы 1—21 показаны на рис. 72. Первые четыре камня поставлены игроками в разных углах доски. Действительно, захватить территорию в зоне угла легче — помогают края доски. После пятого хода возникают осложнения. Ходом е3 черные вторгаются в потенциальные владения белых, чтобы помешать противнику окружить нижнюю часть доски. Белые используют активную защиту, «накрывая» черный камень ходом 6. Ходами 7 и 9 черные не возражают против такого развития событий, надеясь получить богатые возможности по отгораживанию центра доски. Однако ходом 10 белые не отдают камень 6. Черные вынуждены соединить в цепочку свои камни ходом 11. Теперь белые должны защищать левый нижний угол от превосходящих сил черных (цепочка 9, 11, 5). Белые начинают строить цепочку ходом



Р и с. 73

12, тем самым пытаюсь защитить левый нижний угол. Черные удлиняют цепочку ходом 13, преследуя три цели: оказаться поближе к угловому камню 3, выйти на левый фланг, если белые ответят справа, и выйти на правый, если белые ответят слева. Белые стабилизируют правый фланг. В результате камень 7 попадает в атари. Ходом 15 черные выходят на левый фланг. Положение белых становится опасным, и ближайшими ходами они пытаются расположить камни так, чтобы получить действующую группу. Пока им это не удается, а после хода 21 возникает ко-угроза, и положение группы теперь зависит от того, кто возьмет верх в ко-борьбе.

Ходы 21—24 (рис. 73). По правилу ко белые не могут ходом 22 взять в плен камень 21, мешающий образованию глаз, и ходом 22 создают ко-угрозу, атакая на угловой камень черных. Ходом 23 черные защищают угол, белые в ответ берут в плен камень 21.

Ходы 24—31 (рис. 74). После создания ко-угрозы ходом

25 белый камень f7 оказывается в положении атари. И все же этот ход неудачен, черным лучше было создать ко-угрозу ходом g4 с целью сыграть g5 и захватить верхнюю половину доски. Белые удлиняют цепочку e4, e5, f5 ходом 26, и черные оказываются в опасности. Чтобы не беспокоиться за верхнюю часть доски, им лучше было ходом 27 пойти e7, забирая в плен камень белых. Но они увлеклись ко-борьбой и берут нижний камень. Белые пользуются этим — после взятия в плен черного камня f6 ходом 28 они создают крепкую группировку на правом фланге. К тому же оказывается, что два черных камня в правом верхнем углу не выполняют своей защитной функции и нуждаются в подкреплении. Ходом 29 черные пытаются исправить положение. Белые берут в плен камень 27 (ходом

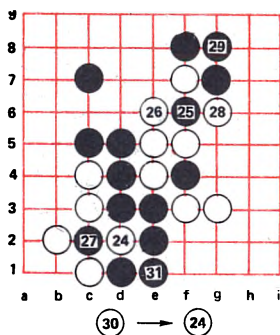


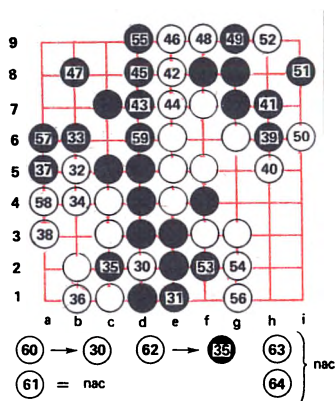
Рис 74

30 на место 24), а черные, на сей раз не имея сильной ко-угрозы, защищаются ходом 31.

Ходы 32—64 (рис. 75). Используя неточность черных, белые пытаются стабилизировать свою угловую группу ходом 32. Ход 33 преграждает продвижение белых вверх и создает опасность отсечения белого камня b5. Белые реагируют ходом 34. Теперь черные стараются помешать формированию глаз посредством ко-угрозы. Белые защищают камень c1 ходом 36, что является грубой ошибкой. В этот ответственный момент им необходимо было пойти 36. a3. Тогда белая группа сохранила бы шансы выжить, выиграв ко-борьбу в левом нижнем углу (например: 36. a3 37. b1 38. a5 39. a2 40. a1, или 37. a5 38. b1, и группа удерживается без ко-борьбы). Теперь черные могли взять в плен белую группу в углу, но не обнаружили комбинации. Ход 37 сокращает глаза группы, не уничтожая ее. Нужно было поставить камень

в пункт а3. Белые сами занимают этот критический пункт и выживают.

Черным становится ясно, что белая группа выдержала натиск, и ходом 39 они приступают к образованию своей группы в противоположном углу доски. Однако ход этот слишком пассивен, приводит к потере инициативы. Белые легко ограничивают распространение черных вниз и делают важный ход 42, который атакует одновременно две черные группы, пока не имеющие глаз. Черные укрепляют верхний левый угол, но ход 46 не дает им возможности соединиться в правом углу. Ход 47 из разряда панических, лучше было получить глаз, продолжая d6. С другой стороны, и ход 46 неточен — логичней было включить обмен ходами: белые d6 — черные с6. После хода 48 группа черных обречена,



Р и с. 75

хотя они и пробуют защититься ходом 51. Но ходом 52 белые занимают второй критический пункт h9.

Смирившись с потерями, черные пытаются сместить возможную границу в оставшиеся части доски ходом 53, но у них был гораздо более эффективный ход для уменьшения территории белых в данном месте, а именно h2! Белые не в состоянии отразить этот черный камень, и территория белых в углу сильно уменьшается. Вместо хода 55 лучше было g1 (55. g1 56. h1 57. f1 58. h2). Ходом 56 белые, а вслед за ними и черные ошибочно отказались от d6. На ход 57 белые, конечно, отвечают a4. Наконец-то сделан ход 59. d6. Ходом 60 (на место 30) белые берут в плен камень 35. Черные пасуют, полагая, что никакой их ход не улучшит положения, хотя 61. g5 позволяло в ко-борьбе от-



воевать одно очко. Белые закрывают ко ходом 62. Границы сформированы, игра закончена. Осталось привести доску к удобному для подсчета очков виду и подсчитать их.

На рис. 76 представлена доска после того, как сделан последний ход. Буквой N помечен нейтральный пункт, он никому не принадлежит, поэтому его можно заполнить любым камнем. Камни, помеченные плюсом, обречены на пленение — их разрешается снять с доски и присоединить к другим пленным камням.

Подведем итоги партии в Го (рис. 77). Черные взяли в плен три белых камня, а белые — четыре черных. Еще восемь черных камней обречены (они помечены плюсом), то есть соотношение пленных 12:3 в пользу белых. Черные

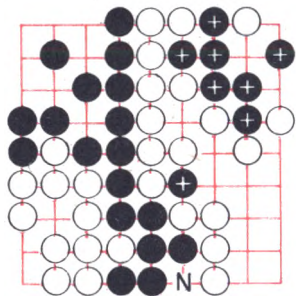


Рис. 76

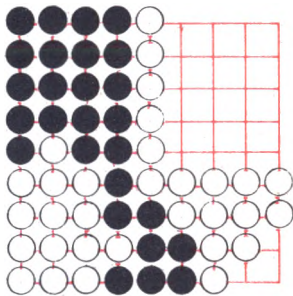


Рис. 77

выставляют пленников на территорию белых, а белые — на территорию черных. У белых осталось еще четыре пленных камня, которых территория черных не смогла вместить. Итак, территория белых состоит из 23 пунктов, у черных же вообще нет завоеваний. У белых имеется также четыре пленных камня, и даже без учета 5,5 очков они победили с преимуществом 27 очков.

## ДЕСЯТЬ ИГР В ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Занимательные математические игры, о которых до сих пор рассказывалось, классифицированы, систематизированы и разбиты нами на шесть типов, шесть групп (иногда условно). Однако многие существующие игры не укладываются в эту классификацию. Богатство и неисчерпаемость интеллектуальных игр не позволяют ограничить все их какими-то жесткими, заданными рамками. В заключение мы как раз и приведем десять необычных игр, для которых не нашлось места в шести основных главах книги.

**1. Так-тикс.** На доске  $n \times n$  расставлены одинаковые фишки — на каждом поле по одной. Игроки по очереди берут их из любого вертикального или горизонтального ряда, причем обязательно подряд, пропускать пустые поля нельзя. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю фишку.

Уже при малых значениях  $n$  игра получается достаточно сложной. Для доски  $3 \times 3$  легко убедиться, что первый игрок выигрывает, если берет центральную или угловую фишку, или весь центральный ряд. Анализ игры на доске  $4 \times 4$  не так прост, доказано, что второй игрок обладает выигрышной стратегией. Так-тикс напоминает ним, но исследование игры при  $n > 4$  существенно усложняется из-за использования пересекающихся рядов фишек.

**2. Щелк!** В этой игре фишки заполняют произвольный прямоугольник  $m \times n$ . Ход состоит в следующем. Игрок выбирает любое поле доски, мысленно проводит через него два взаимно перпендикулярных луча вверх и вправо и затем все фишки, оказавшиеся внутри прямого угла, снимает с доски — «откусывает». Проигрывает тот, кто вынужден «откусить» фишку в левом нижнем углу.

Для двух частных случаев игры известны выигрышные стратегии. На квадратной доске  $n \times n$  первый игрок выигрывает, «откусив» квадрат со стороной  $n - 1$ . А на прямоугольнике  $2 \times n$  начинающий добивается победы, «откусывая» фишку в правом верхнем углу. В нижнем ряду тогда останется на одну фишку больше, чем в верхнем, и это соотношение первый игрок должен восстанавливать каждым своим ходом.

**3. Кто меньше?** Игроки задумывают по одному числу от 1 до 5, и числа сравниваются. Если они совпадают или различаются больше, чем на единицу, каждый игрок получает количество очков, совпадающее со своим задуманным числом. Если же числа различаются на единицу, то игрок, выбравший меньшее число, получает очки, равные сумме

задуманных чисел. Игра продолжается десять туров, и после каждого из них очки суммируются. Побеждает игрок, набравший большее число очков.

Для анализа этой сложной стратегической игры необходимо составить специальную матрицу — таблицу всех возможных вариантов ходов и соответствующего распределения очков. Оптимальный план действий находится с помощью методов математической теории игр.

4. *«Посредственность»*. Пример игры для трех лиц. В каждом туре трое участников выбирают по одному числу из определенного множества чисел, причем очки засчитываются только тому игроку, который выберет среднее число из трех, — самому «посредственному». Количество начисленных очков совпадает с задуманным числом. Игра длится десять туров, и побеждает тот, кто набирает среднее число очков. Стратегия игры весьма сложна.

5. *Сим*. На листе бумаги по окружности расставляют несколько точек. При очередном ходе каждый из двух игроков проводит линию своего цвета, соединяющую любые две точки. Проигрывает тот, кто вынужден первым построить треугольник своего цвета с вершинами в этих точках.

Если точек меньше пяти, то игра быстро заканчивается вничью. Теоретически ничья возможна и на пяти точках, но игра уже достаточно интересна. При шести точках найдена выигрышная стратегия для второго игрока. Если точек больше шести, то анализ игры весьма сложен. Доказано, что ничейный исход исключен, но вопрос о выигрышных стратегиях остается открытым.

Сим относится к играм на графах, и для его детального исследования применяется математическая теория графов.

6. *Рассада*. На листе бумаги расставлено несколько точек, из которых начинает свой рост «рассада». Делая очередной ход, каждый из двух игроков проводит линию («рассада пускает росток»), которая соединяет одну точку с другой либо описывает петлю и возвращается в исходную точку. При этом он ставит на линии новую точку. Линия не должна иметь самопересечений, пересечений с ранее проведенными линиями и проходить через точки, не служащие ее началом или концом. Наконец, из каждой точки не должно исходить более трех линий (ростков). Проигрывает тот, кто не в состоянии провести линию без нарушения правил.

Рассада — классическая игра на графе, при нахождении выигрышных стратегий используются также некоторые топологические свойства плоскости. Доказано, что партия длится

не более  $3n - 1$  ходов, где  $n$  — число точек в начале игры. Нетрудно убедиться перебором вариантов, что при  $n = 1, 3, 4$  или  $5$  при правильной игре всегда побеждает первый игрок, а при  $n = 2$  — второй. Для  $n \geq 6$  полной ясности пока не удалось внести даже с помощью ЭВМ.

7. *Четыре краски.* Для игры нужны четыре цветных карандаша. Первый игрок чертит произвольную область. Второй раскрашивает ее в любой цвет и присоединяет новую область. Первый игрок раскрашивает новую область и добавляет еще одну и т. д. Итак, на каждом ходу один из игроков раскрашивает область, начерченную противником, и дорисовывает свою область. При этом соседние области, имеющие общую протяженную границу, должны быть окрашены в разные цвета. Проигрывает тот, кто на очередном ходу для правильной раскраски вынужден воспользоваться пятой краской.

Эта игра имеет отношение к старинной «проблеме о красках», которой занимались многие математики: какого минимального количества красок достаточно для раскраски произвольной географической карты с условием, что соседние страны всегда раскрашены в разные цвета. Совсем недавно американские математики Т. Аппель и М. Хейкен с помощью ЭВМ доказали, что для раскраски любой карты достаточно четырех красок. Так что в принципе данная игра может продолжаться бесконечно. Но одно дело теория, и совсем другое практика...

8. *Оуа.* Одна из простейших игр на перекладывание шариков (камней), более популярны калах и чисоло. У двух игроков имеется по ряду из семи лунок (углублений), в каждой из которых помещено по четыре шарика. Ход состоит в том, что игрок вынимает все шарики из любой лунки своего ряда и раскладывает их по одному в каждую из последующих лунок (и своих и чужих), двигаясь против часовой стрелки. Если на каком-то ходу из лунки вынимается 12 и более шариков, то при круговом обходе, дойдя до этой лунки, следует ее пропустить — оставить пустой. Если при распределении по лункам последний шарик опущен в крайнюю справа лунку на своей стороне или в любую лунку на стороне противника и при этом в лунке оказались 2 или 3 шарика, то ходивший игрок забирает из нее все шарики в качестве «добычи». Он также забирает последовательно все шарики из предшествующих лунок соперника, в которых тоже находятся 2 или 3 шарика, но не далее той лунки, где имеется другое число шариков. Игра прекращается, если оставшихся на

доске шариков недостаточно, чтобы образовать «добычу». Победителем становится тот, у кого больше «добыча». Игра заканчивается и в том случае, если у одного из игроков все лунки оказываются пустыми — он проиграл.

*9. Окружение десанта.* Предлагаемая игра — еще одна разновидность крестиков-ноликов на бесконечной доске (листе клетчатой бумаги). Начинаящий рисует крестик на любой клетке. Далее каждым своим ходом он ставит новый крестик на свободную клетку, соседнюю с уже ранее поставленным крестиком (у соседей общая сторона или вершина). Второму игроку разрешается на каждом ходу ставить сразу два нолика в любые две соседние клетки. Его задача — добиться, чтобы противник не смог поставить очередной крестик. Второй игрок, очевидно, всякий раз пытается вырваться из тисков.

*10. Волки и овцы.* Завершает раздел одна из самых простых и популярных шашечных игр. На первой горизонтали обычной доски стоят четыре белые шашки (волки), на последней — одна черная (овца). За один ход любая шашка может пойти на соседнее по диагонали черное поле, но волкам отступать запрещено. Овца стремится достичь первой горизонтали, волки же намерены поймать овцу, то есть запереть ее, чтобы у шашки не было ни одного хода. Доказано, что при точных действиях успеха добиваются волки — побеждают белые.

## ЛИТЕРАТУРА

Итак, вы познакомились с самыми разнообразными играми — старинными и совсем новыми, простыми и сложными, популярными и менее известными. К сожалению, о многих играх не рассказано в книге. Почти не затронута увлекательная тема, посвященная истории и происхождению игр. Невозможно представить себе объем издания, содержащего все игры на свете, игры, называемые настольными, логическими, занимательными, интеллектуальными, математическими.

В знаменитом романе Г. Маркеса «Сто лет одиночества» можно найти такой забавный эпизод:

«Как-то раз падре Никанор принес с собой коробку с шашками и игральную доску и предложил Хосе Аркадио Буэндия сыграть с ним, тот отказался, потому что, как он объяснил, не видит смысла в борьбе между двумя противниками, которые в важнейших вопросах согласны между собой. Падре Никанор, никогда до сих пор не рассматривающий игру в шашки с этой точки зрения, так и не смог его переубедить...»

И все же с мнением героя Маркеса трудно согласиться. Проводя свободные часы за шахматной доской, за поединком в Го или шашки, играя в слова или крестики-нолики, мы, как принято говорить, сочетаем приятное с полезным. Два партнера, сражаясь в какую-нибудь интересную и увлекательную игру, получают большое творческое удовлетворение от борьбы, а подчас и эстетическое удовольствие. Ну, а победы и поражения, хитроумные замыслы и коварные ловушки соперников не мешают им оставаться друзьями и «выяснять отношения», лишь расставляя фигуры на доске.

«Больше всего изобретательности люди проявляют в играх,— заметил великий математик Г. Лейбниц,— и значит, математические игры заслуживают внимания не только сами по себе, но и благодаря тому, что развивают находчивость».

Как уже говорилось, в книге Л. Пияновского «Путеводитель по играм», изданной в Варшаве, приведен список литературы, состоящий из 330 названий. Но и он далеко не полон. Одних только шахматных и шашечных книг в мире существует десятки тысяч. Такие игры, как морской бой, мельница, крестики-нолики, развлечения со словами, описаны в различной занимательной литературе. Кстати, в двух первых книгах М. Гарднера, упоминаемых нами, указано около 300 изданий по занимательной математике, а также литература по ЭВМ, теории графов, комбинаторике, имеющая отношение к нашей теме. Если добавить еще огромное множество публикаций про игры в периодической печати (особенно в журналах «Наука и жизнь» и «Квант»), станет ясно, что более полная библиография по играм, если она вообще возможна, потребует не меньше места, чем то издание, с которым вы познакомились. С сожалением приходится констатировать, что почти любая книга про игры сразу после выхода в свет

становится библиографической редкостью. Ограничимся пятнадцатью названиями книг, вышедших в разное время на русском языке.

1. Болховитинов В. Н., Колтовой Б. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. М.: Детская литература, 1970.

2. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971.

3. Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972.

4. Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир, 1974.

5. Гик Е. Я. Математика на шахматной доске. М.: Наука, 1976.

6. Гик Е. Я. Шахматы и математика. М.: Наука, 1983.

7. Голомб С. Полимино. М.: Мир, 1975.

8. Дьюдени Г. Кентерберийские головоломки. М.: Мир, 1979.

9. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М.: Физматгиз, 1961.

10. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М.: Физматгиз, 1959.

11. Математические игры. Сборник в 3-х частях. Красноярск: Изд-во КГУ, 1985.

12. Математический цветник. М.: Мир, 1983.

13. Соловьев Н. В. Тесты (теория, построение, применение). Новосибирск: Наука, 1978.

14. Франклин Фолсом. Книга о языке. М.: Прогресс, 1977.

15. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.



## СОДЕРЖАНИЕ

1. ТРИ ТЕСТОВЫЕ ИГРЫ	4
Быки и коровы	5
Отгадать слово	16
Морской бой	29
2. ИГРЫ СО СЛОВАМИ	41
3. ШАХМАТНЫЕ ИГРЫ	55
Игры на необычных досках	56
Сказочные шахматы	72
Математические игры на шахматной доске	81
4. ШАШЕЧНЫЕ ИГРЫ	93
Поддавки	97
Уголки	104
Реверси	112
5. ОТ КРЕСТИКОВ-НОЛИКОВ ДО РЭНДЗЮ	118
Крестики-нолики	118
Четыре и пять в ряд	125
$n$ в ряд	129
Рэндзю	131
6. ИГРА ГО	138
Десять игр в заключение	153
Литература	157

## Научно-популярное издание

**Гик Евгений Яковлевич**

### **ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ**

2-е изд., перераб. и доп.

Главный отраслевой редактор *А. Нелюбов*

Редактор *Н. Феоктистова*

Младший редактор *Н. Карякина*

Художник *В. Конюхов*

Художественный редактор *М. Бабицева*

Технический редактор *Н. Лбова*

Корректор *Л. Иванова*

ИБ № 8480

Сдано в набор 25.04.86. Подписано к печати 22.12.86. А 07949  
Формат бумаги 84×109<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,40. Усл. кр.-отт. 8,82  
Уч.-изд. л. 8,91. Тираж 200 000 экз. (2-й завод 100 001 — 200 000 экз.). Заказ 6666. Цена 55 коп.

Издательство «Знание». 103008, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4.  
Индекс заказа 876701.

Набрано в Саратовском отделении Трудового Красного Знамени полиграфическом комбинате Росгизполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Мухоморова, д. 9. Считано в типографии издательства «Знание». 410004, г. Саратов, ул. Волжская, 28.

## ПОПРАВКА

На обороте титула ~~ошибочно~~ указана цена книги 45 коп.  
Следует читать 55 к.

