ШЕДЕВРЫ
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

Выпуск • 97

МАТЕМАТИКА

Мартин
Гарднер

ВПЕРВЫЕ
НА
РУССКОМ
ЯЗЫКЕ!

ЗАГАДКИ СФИНКСА
И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

Martin Gardner

RIDDLES OF THE SPHINX
AND OTHER MATHEMATICAL PUZZLE TALES

URSS

НАУКУ – ВСЕМ! 97
Мартин Гарднер
ЗАГАДКИ СФИНКСА И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ
URSS

НАУКУ — ВСЕМ!
Шедевры научно-популярной литературы (математика) • № 97

Martin Gardner

RIDDLES OF THE SPHINX
AND OTHER MATHEMATICAL PUZZLE TALES

Мартин Гарднер

ЗАГАДКИ СФИНКСА И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

Перевод с английского
Т. И. Врублевской-Токер

URSS
МОСКВА

ББК 22.1о 22.12 22.130 22.3о 22.312 84 87.1 87.4

Гарднер Мартин

Загадки Сфинкса и другие математические головоломки: Пер. с англ. М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2015. — 304 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы (математика). № 97.)

Перед читателем — впервые переведенная на русский язык работа выдающегося американского математика и популяризатора науки Мартина Гарднера. Автор как всегда остается верен своему уникальному стилю, который характеризуют яркость, доходчивость, тонкий юмор, блеск мысли, постоянное вовлечения читателя в самостоятельное творчество.

В книге представлены занимательные математические задачи и головоломки, публиковавшиеся автором в течение ряда лет на страницах «Журнала научной фантастики Айзека Азимова». Эти задачи, составленные самим М. Гарднером, увлеченными читателями его журнальной колонки, друзьями и коллегами автора, в равной мере относятся как к миру собственно математики, так и к миру логических парадоксов, многие из которых изложены в виде фантастических историй на загадочных далеких планетах.

Материал книги построен таким образом, что к каждой из головоломок дается ответ, который в большинстве случаев порождает новые вопросы, связанные с соответствующей темой. Решение этих новых вопросов приводится уже на следующем уровне ответов. Всего в книге четыре раздела с ответами и решениями, так что читатель может последовательно переходить с одного раздела на другой, постепенно углубляя свое понимание.

Книга не оставит равнодушными как профессиональных математиков, учителей и руководителей математических кружков, так и самый широкий круг любителей занимательных математических и логических задач и головоломок, ценителей научно-фантастического жанра.

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Заказ № ВЗК-02198-15.

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати — ВЯТКА».
610033, Кировская обл., Киров, ул. Московская, д. 122.

ISBN 978-5-9710-2140-7 (ЛЕНАНД)
ISBN 978-5-453-00104-0 (УРСС)

14379 ID 193545

9 785971 021407

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS
E-mail: URSS@URSS.ru
Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

Содержание

Предисловие

Это третья и последняя часть коллекции головоломок из моей колонки в «Журнале научной фантастики Айзека Азимова», которую я вел около десяти лет. Она составлена точно так же, как и две предыдущие книги: «Научно-фантастические головоломки» (1981) и «Загадки иных миров» (1984).

В каждом параграфе задается вопрос, ответ на который можно отыскать в разделе «Первые ответы». Это решение, в свою очередь, поднимает новый вопрос. За ответом можно обратиться к разделу «Вторые ответы». Вам может быть предложен также третий, а, в некоторых случаях, и четвертый вопрос. Моими источниками стали письма читателей «Журнала научной фантастики», мои собственные записи, а также другие идеи, чьих авторов я назову ниже.

Большинство задач завлечет вас в непривычные области математики и других наук. Во всяком случае, их корни весьма глубоки. Я также надеюсь, что читатель найдет эти задачи вполне занятными и, воспользовавшись возможностью, получит удовольствие, упражняя свой острый ум.

Хочу высказать особую благодарность Питеру Унгару за необычайно скрупулезное прочтение рукописи, за предложенный им восхитительный новый материал, а также Аннели Лакс за ее превосходную редакторскую работу и кропотливый издательский труд. Я глубоко признателен Бэзилу Гордону и Ричарду Гаю за бесчисленные

правки и прекрасные идеи. Питеру Ренцу я чрезвычайно обязан тем, что он посоветовал мне издательство Американского математического общества, отыскал идеальные иллюстрации [1], руководил изданием книги и был неоценимым помощником во многих отношениях.

Мартин Гарднер

[1] *Прим. пер.:* в издании на русском языке некоторые иллюстрации опущены.

Посвящается Соломону В. Голомбу,
чья блистательная находчивость остается
неисчерпаемым источником изысканных
математических сюрпризов

Загадки

Первые ответы

Вторые ответы

Третьи ответы

Четвертые ответы

1

1

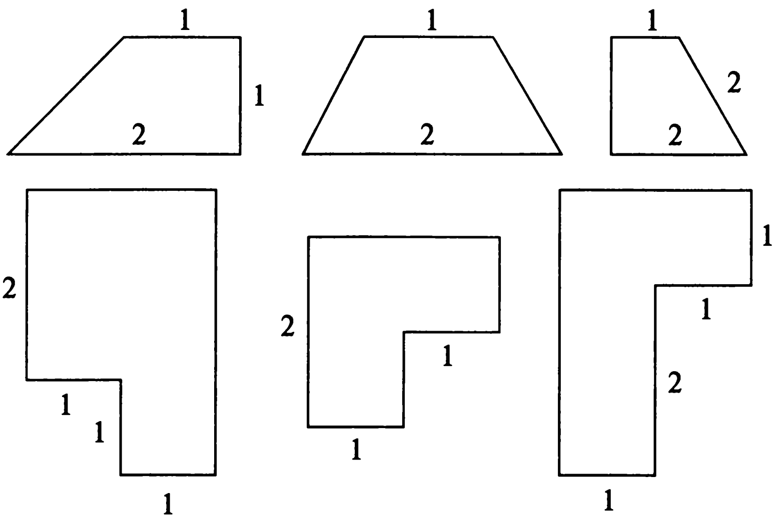
Загадки Сфинкса

Доктор Митсу Матсу, прославленный инженер-генетик, первым вывел двухмерные формы жизни. Вообще-то не совсем двухмерные, но почти. Это микроорганизмы, похожие на кристаллы. Они во множестве разрастаются в однослойных культурах, то есть культурах толщиной всего в одну молекулу.

Доктор Матсу назвал эти организмы «реплитки» по двум причинам: по форме они напоминают плитку — многоугольные изразцы, а, размножаясь, воссоздают свои точные копии, реплики. Реплитки настолько малы, что их нельзя увидеть невооруженным глазом; для этого нам понадобился бы нейтринный микроскоп. Они медленно перемещаются в монослойной среде при помощи ресничек, окаймляющих их тела, а пищу впитывают через «кожу». Вырастая, реплитки сохраняют свою многоугольную форму. Достигая предельного размера, они не делятся надвое, по примеру амебы, а распадаются на четыре маленьких изразца, которые совпадают друг с другом и являются копиями исходной, материнской реплитки. «Новорожденные» реплитки не обязательно сохраняют родительское «направление вращения», так что одна или более могут быть зеркальным отражением оригинала.

На первых порах доктору Матсу удалось создать только треугольные и квадратные реплитки. Мы все прекрасно знаем, как треугольник T может быть разделен на четыре конгруэнтных треугольника, подобных исходному T. Также ни для кого не секрет, как параллелограмм можно разделить на четыре подобных параллелограмма меньшего размера.

Несколько месяцев спустя доктор Матсу сумел вывести еще три вида четырехсторонних реплиток и три вида — шестисторонних. Они показаны на рисунке внизу.



Посмотрим, насколько быстро Вы сможете начертить линии, по которым эти шесть фигур распадаются на четыре одинаковых части, каждая их которых подобна исходной. Решение предложено в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 124.

2

2

Ясновидение и таинственная семерка

Предлагаю Вам небольшое развлечение: несколько занятных цифровых фокусов, для которых нужен всего лишь маленький калькулятор. Прежде чем продолжить чтение, вооружитесь карманным или настольным калькулятором и проделывайте трюки по порядку. Все они содержат число семь — ту самую семерку, которую древние и средневековые мистики наделяли невероятным количеством магических свойств. Я также буду просить Вас задумать несколько случайных чисел — я хочу поупражнять свои экстрасенсорные способности и предсказать результаты Ваших вычислений.

Для начала введите на табло загадочное число 15 873. Выберите любую цифру от 1 до 9 и умножьте на нее 15 873. А теперь умножьте полученный результат на 7. На табло окажется выбранная Вами цифра, повторенная шесть раз.

В чем секрет? 15 873 раза по 7 — это 111 111, а любая цифра, взятая 111 111 раз, конечно же, предстанет перед Вами в своем шестикратном повторении. Если Вы хотите получить цифровой ряд подлиннее, умножьте 12 345 679 (обратите внимание, цифра 8 здесь пропущена) на любое число от 1 до 9, а затем умножьте результат на 9. Фокус в том, что 12 345 679 раз по 9 — это 111 111 111.

А теперь давайте попробуем что-нибудь менее банальное. Предвижу, что Вы старше 9, но младше 100 лет. Наберите Ваш возраст на табло калькулятора. Умножьте это число на магическое число 1443, а полученный результат вновь умножьте на 7. И, о чудо! Ваш возраст повторился на экране три раза!

Секрет этого трюка в том, что 1443 раза по 7 — это 10 101. Нетрудно догадаться, что любое двузначное число при умножении на 10 101 «заедает» три раза.

Теперь еще один фокус, подобный предыдущему. Наберите на табло калькулятора любое трехзначное число. И еще раз нажмите те же клавиши в том же порядке. Иными словами, у Вас должно получиться шестизначное число вида ABCABC, где A, B и C – не обязательно разные цифры. Поделите Ваше число на 13. Оно поделится нацело. Результат поделите на 11. И снова остатка нет! А теперь поделите полученное число на 7. И перед Вами исходное трехзначное число!

Чтобы разгадать секрет этого фокуса, умножьте 7 на 11, а потом — на 13. Вы получите 1001. Очевидно, что любое ABC число, взятое 1001 раз, превратится в ABCABC. Выполняя фокус, Вы просто проделываете обратные операции. Число ABCABC, при последовательном делении на 13, 11 и 7 (а это все равно, что сразу поделить на 1001), превратится в ABC. Этот трюк можно с легкостью показывать и с более длинными числами, чьи цифры «заедают». Вы уже догадались, почему число вида ABCDABCD при делении на 137, а потом на 73 превращается в ABCD?

И еще один фокус. Наберите на табло 999 999. Бросьте игральный кубик, чтобы выбрать число от 1 до 6. Если под рукой у Вас нет подходящего кубика, бросьте воображаемую игральную кость и выберите то число, которое Вам выпадет. Умножьте 999 999 на это число, а результат поделите на 7. В разделе первых ответов я предскажу Вам результат.

См. ответ на стр. 126.

3

3

Идем к Хармиане!

В начале 1983 года был запущен IRAS (инфракрасный астрономический сателлит). Позже, в том же году, информация с этого спутника вызвала небольшой переполох, когда появилось предположение, согласно которому множество объектов, вращающихся вокруг звезды Вега, вероятно, является системой планет. Еще бóльшую сенсацию создал IRAS II в конце 1998 года, прислав доказательство существования десятой планеты, которая двигалась по чрезвычайно эксцентрической орбите, намного дальше траектории движения Плутона.

Было ли это небесное тело и в самом деле планетой? Некоторые астрономы утверждали, что это, по всей вероятности, группа астероидов, другие — что это крохотная черная дыра. Минуло не так уж и много десятков лет, когда космический корабль «Бублик», в ходе одной из своих экспедиций к пределам Солнечной системы, в конце концов, подтвердил, что этот объект и в самом деле является планетой.

Задолго до этого небесное тело было названо Ирас, по аббревиатуре названия обнаружившего его сателлита. Оказалось, что размеры и масса Ирас немногим больше Марса, но меньше Венеры. Пока «Бублик» кружил вокруг планеты, выясняя размеры, период вращения, скорость и направление орбиты Ирас, Таня забавлялась игрой в слова с названиями планет. Таня, девочка-подросток, была дочерью полковника Рональда Лоска, главы компьютерного отсека на корабле.

Сперва Таня составляла анаграммы из названий планет, но ничего особенно интересного не нашла. Переставленные буквы в слове МАРС составили слова СРАМ и РАМС. САТУРН превратился в слова СТРУНА и САНТУР. А УРАН — в слова УРНА и РУНА. ИРАС наоборот стала САРИ. А записанные по правилам сокращения слова САТУРН, УРАН и НЕПТУН стали снова словом САТ.УР.Н.

Затем Таня выстроила в ряд заглавные буквы английских названий планет, считая от Солнца: MVEMJSUNPI. Она была поражена, обнаружив слово SUN («солнце»), которое получилось из букв, ставших друг за другом. Но как она изумилась, когда, расставив те же буквы в порядке возрастания размера и массы планет: PMMIVEUNSJ, она увидела еще одно прекрасное совпадение. А Вы видите его? Последовательность из пяти букв VEUNS превращается в VENUS («Венера»), стоит только поменять местами буквы U и N!

Когда в компьютерный отсек вошел Танин отец, она была увлечена составлением списков из десяти слов, каждое из которых ассоциировалось бы с названием одной планеты, в порядке начиная от Солнца. Например: «термометр», «без рук», «почва», «война», «молния», «кольца» и т. д.

— Ты занята чем-то серьезным? — спросил полковник Лоск.

— Ничего особенного. Я развлекаюсь игрой с названиями планет, располагая их по какому-нибудь признаку, по размеру или расстоянию от Солнца.

— Ты слышала что-нибудь о теореме Эрдёша—Секереша?

Таня отрицательно покачала головой.

— Проще всего объяснить ее суть можно на примере шеренги из десяти солдат, в которой все солдаты разного роста. Солдаты могу стоять по росту, начиная с самого высокого или самого низкого, или как угодно. Теорема сообщает нам, что, независимо от порядка построения солдат, в шеренге будет, по крайней мере, четыре из десяти солдат, не обязательно стоящих друг за другом, чей рост будет идти в порядке убывания или возрастания. Более того, есть построения, в которых не может быть пяти солдат, стоящих ни по убыванию, ни по увеличению роста.

В общем виде теорема выглядит так. Пусть n — любое целое положительное число. Пусть k — наименьшее целое число, квадрат которого равен, по крайней мере, n. Последовательность n разных чисел всегда будет иметь монотонную (возрастающую или убывающую) подпоследовательность длиной k, а для каждого n существуют последовательности, не имеющие монотонных подпоследовательностей длиной $k+1$.

— Ясно, — сказала Таня, — какая прелестная маленькая теорема! Она подсказывает мне, что если я расположу девять планет в любом порядке, по крайней мере три из них встанут по возрастанию или убыванию своего размера, хотя бы три — в порядке увеличения или уменьшения расстояния до Солнца, и три, по меньшей мере, — в порядке приближенности или удаленности от Земли.

— Точно.

Таня достала колоду карт и вынула из нее карты от двойки до девятки и туза. Ей хотелось посмотреть, сможет ли она разложить карты так, чтобы никакая четверка карт не составляла монотонной последовательности. Сначала она разложила карты вот так: 647 193 825. На мгновение ей показалось, что у нее получилось. Но, нет — 6432 составляли убывающую подпоследовательность. Вообще-то, есть целых 84 способа сделать это. В общем виде число способов выглядит так:

$$2(k^2)!\prod_{i=0}^{k-1}\frac{i!}{(k+i)!}.$$

1. Посмотрим, сможете ли Вы найти один из них.

2. Сколько вариантов нумерации планет нам нужно составить, чтобы убедиться: если планеты расположены в алфавитном порядке, среди них будет четыре, чьи номера, по крайней мере в одной нумерации, составят монотонную последовательность?

См. ответ на стр. 129.

4

4

Технологии с планеты Чътуа

Любой бывалый астронавт-уфолог знает, что разум, гораздо более совершенный, чем наш, уже миллионы лет изучает планетарные цивилизации по всей галактике. Предлагаю Вашему вниманию несколько отрывков из отчета, хранящегося в обширнейшей базе данных компьютера на одной из очень далеких планет.

«Обитатели планеты Чътуа, которая вращается вокруг звезды Нрусиъ, разработали технологии, чрезвычайно упрощающие их жизнь. Большинство их машин потребляет исключительно мало энергии и фактически не имеет проблем при эксплуатации.

1. Боковые части их жилищ составлены из конгруэнтных модульных секций в форме прямоугольных параллелепипедов. Их соединения образовывают правильные трехмерные соты. Соотношение граней этих секций приблизительно составляет 2 : 3 : 6, их соединяет весьма прочное связующее вещество. Также используются секции с гораздо бóльшим соотношением сторон, изготовленные из мягких органических материалов. Их соединяют с помощью небольших металлических цилиндров, конических с одной стороны и снабженных плоским диском — с другой. Цилиндры проталкивают в такие секции, используя примитивный ударный инструмент.

2. Одежду регулярно стирают с помощью одного остроумного механизма. Его принцип действия предполагает растяжение и сжатие материала во время его движения из стороны в сторону вдоль поверхности, изогнутой

подобно синусоиде. Устройство не имеет движущихся частей и не нуждается в электромагнитной энергии.

3. Мокрую одежду сушат при помощи еще более простого механизма, который также не имеет движущихся частей. Устройство запускается естественными колебаниями атмосферы на планете и представляет собой по сути длинный гибкий цилиндр.

4. Существам на планете Чътуа необходимо сохранять свою пищу в умеренно холодном состоянии. В этом им помогает машина, основанная на единственном принципе: тепло поглощается, когда вещество переходит из твердого в жидкое состояние. И в этом случае аппарат был настолько упрощен, что его единственная движущаяся часть — это панель, которая открывается и закрывается, обеспечивая доступ во внутреннюю часть механизма.

5. Математические вычисления и обработка данных обычно выполняется при помощи устройства невероятной простоты. Оно маленькое, переносное, энергонезависимое и не излучает радиации. Оно работает практически бесшумно. Оно способно воспроизводить все символы всего множества языков, на которых говорят многие разумные виды белковой жизни, столь бурно цветущей на этой планете, как и любое графическое изображение. Мы рекомендуем Высшему Совету рассмотреть потенциальную полезность такого устройства для обучения наших детей.

6. На планете Чътуа есть один в высшей степени странный технологический казус: главное средство передвижения, используемое как для перевозки самих существ, так и для перемещения других вещей из одного места в другое, невероятно сложно. Вместо колес в нем используются излишне громоздкие и неуклюжие рычаги. Четыре независимых комплекта рычагов соединены между собой и управляются мудреным механизмом, приводящим и разводящим их. Направление движения ры-

чагов, вероятно, определяется небольшим компьютером, расположенном в верхней части транспортного средства. Машина, без сомнения, работает на топливе. Топливо поступает через небольшое отверстие в передней части, и, подобно древнейшим моделям наших космических кораблей, газ и отработанные остатки сбрасываются через небольшое отверстие, расположенное в задней части. Машина оснащена перцептронами, которые, по неизвестной причине, расположены справа и слева, а не развернуты вперед. Перцептроны направляют транспортное средство в любую желаемую сторону. Машина обычно движется медленно, но она способна развивать различную скорость.

7. Мы наблюдали еще одну особенность поведения форм жизни на планете Чътуа. Более разумные их виды постоянно обмениваются круглыми предметами разного размера, сделанными из различных металлов и сплавов. На большинство из них нанесены изображения с портретами их лидеров. Также этим существам, судя по всему, нравятся производимые ими миллионы прямоугольных крошечных гравюр с полноцветными изображениями различных форм жизни и других объектов. Они наклеивают их на прямоугольники большего размера, которые они регулярно вбрасывают в контейнеры, после чего это все распределяется по другим местам на всей планете.

8. Согласно нашим наблюдениям, в поведении этих существ прочно устоялись многочисленные практики, не поддающиеся пониманию. Приводим описание двух из них.

Регулярно, через определенные интервалы, существа, если не пребывают в состоянии покоя или непродолжительной спячки, вставляют в свои топливные отверстия цилиндрические объекты и поджигают их. Они позволяют этим цилиндрам сгореть практически полностью прежде, чем избавятся от них. Мы оказались не в силах определить смысл этого причудливого обычая.

Временами, с непредсказуемой частотой, этих существ охватывает внезапный пароксизм. Громкий взрывной звук, обычно повторяемый два и более раз, сопровождает неожиданный выхлоп воздуха из протуберанца забавной формы, расположенного между перцептронами существа и его топливным отверстием».

О чем идет речь в отчете, догадаться совсем не сложно. Если же эти сообщения все же озадачили Вас, обратитесь к разделу первых ответов.

См. ответ на стр. 131.

5

5

Долина потерянных вещей

Жизнь мрачного Амброза Бирса
Была полна приключений и риска.
И самым загадочным образом
В Мексике исчез он.

Пол Кэрри Стил (Paul Curry Steele)

«Дот и Тот в Стране Веселья» (L. Frank Baum, «Dot and Tot of Merryland») — одно из длинных юношеских произведений в стиле фэнтези Л. Фрэнка Баума, которое так и не увидело свет. Баум, который вырос в северной части штата Нью-Йорк, вероятно, слышал о месте под названием Мэриленд, куда можно добраться, спускаясь вниз по реке Гудзон, а затем продвигаясь по берегу на юг. Как бы то ни было, герои его романа, друзья Тот и Дот, маленькие мальчики (из них двоих Дот был чуть постарше) играли в лодке в тот момент, когда швартовы отвязались и лодка поплыла вниз по реке, прямо в Страну Веселья.

Королевой Страны Веселья была кукла, точнее восковая фигура. Она показала Тоту и Доту несколько волшебных долин, последней из которых была Долина потерянных вещей. Это место, куда обязательно попадают все потерянные вещи.

Баум не объясняет, как предметы попадают туда, но, кажется, я знаю. Как утверждают философы-панспириты, любая вещь в той или иной мере разумна и обладает сознанием. То, что мы считаем свойством исключительно человеческим, постепенно ослабевает в эволюционном континууме и в незначительно степени передается микроорганизмам, а затем, в гораздо меньшей степени, и таким неодушевленным видам бытия, как камни, молекулы, атомы и частицы.

«Даже картошка в темном подвале, — писал Самюэль Батлер, — обладает крупицей разума...» А Вы не замечали, что с резинкой происходит то же самое? Когда вы растягиваете резинку, чтобы перехватить ею что-нибудь, а она лопается, то не исчезает ли она тут же? И если Вы, после долгих поисков, наконец-то находите ее, не оказывается ли, что она спряталась там, где вы меньше всего чаяли ее найти? Резинка, конечно же, отчаянно пытается исчезнуть из этого мира. А если же Вы все таки не находите ее, она тихонько лежит месяцами в своем укромном месте, а потом, одной темной ночью, проскальзывает сквозь четвертое измерение в Долину потерянных вещей.

Как Вы, должно быть, помните, мне удалось разработать технику, позволяющую входить в транс, в котором мое астральное тело может путешествовать не только во времени и пространстве, но также и попадать в вымышленные миры. Вот таким ВТО (внетелесным опытом) я и воспользовался, чтобы посетить Долину потерянных вещей.

Баум описывает долину как пустынное место — там нет ничего, только целые груды булавок, иголок, наперстков, мелких монет, карандашей, пуговиц, колец, галош, шляп, перчаток, платков и игрушек. Я проплыл и мимо огромных холмов скрепок, спичечных коробков, зонтов, шахмат и разных деталей, болтов и гаек; мне повстречалась также и гигантская гора потерянных игральных карт. Но Баум ошибался, думая, что долина необитаема. Совсем рядом оказалось Селение затерянных душ.

Его мэром был судья Картер. Джимми Хоффа был начальником полиции, Эдвин Друд возглавлял городское управление канализации, а Амелия Эрхарт была начальником аэропорта. Я встретил дюжины других людей, которые бесследно исчезли в свое время, но возможности мои ограничены, и я расскажу лишь о своей встрече с Амброзом Бирсом, американским писателем, одним из первых сочинителей ужасов в стиле фэнтези. Кто-то из вас, вероятно, знает, что в конце 1913 года «Горький Бирс», как его звали, поехал в Мексику, и с тех пор о нем никто не слышал. Чарльз Форт в книге «Магия повседневности. Дикие таланты» пишет, что, за шесть лет до исчезновения Бирса, в Канаде исчез человек по имени Амброз Смол. «Может, кто-то коллекционирует Амброзов?» — интересуется Форт.

Бирс любил шахматы и написал рассказ «Хозяин Моксона» о машине для игры в шахматы, которая задушила своего изобретателя, когда проиграла. А еще Бирс любил головоломки. Конечно же, он рассказал мне, что его главным увлечением с тех пор, как он обосновался в Селении затерянных душ, стало составление головоломок с использованием бесконечного запаса потерянных вещей. Он показал мне много любопытных задачек с монетками, зубочистками, скрепками, игральными костями и домино и так далее, но самой незабываемой была головоломка с пятью игральными картами.

Бирс делил маленькую комнату с Джеймсом Филмором, который, если верить доктору Джону Ватсону, вернулся «домой, чтобы взять зонт» и «его больше не видели в этом мире», однако в комнате не было карт. «Я должен показать Вам этот математический трюк, — сказал Бирс. — Ваши читатели просто выпадут в осадок. Гора потерянных карт всего в нескольких шагах отсюда».

Поспешать за большими шагами Бирса было нелегко. Это был высокий мускулистый человек, седовласый, со светлой кожей, шутливыми серо-голубыми глазами и пушистыми, пшеничного цвета, усами. Он тщательно осмотрелся на Горе потерянных карт и нашел пять с одинаковыми рубашками.

«Какие у Вас карты, не имеет значения, — сказал он, — достаточно, чтобы среди них не было двух одного достоинства, а рубашки были бы все одинаковые. Когда будете объяснять этот трюк, настаивайте, чтобы у Ваших читателей было пять карт и чтобы они тщательно выполняли инструкцию. В результате трюка карты будут повреждены, так что предупредите их, чтобы они взяли старую колоду, где несколько карт пропали. Почти у каждого есть такая колода где-нибудь дома. Пропавшие карты, конечно же, притасовались сюда, чтобы воссоединиться со своими потерянными братьями».

Здесь я сделаю паузу. Мой дорогой читатель, поднимитесь, пожалуйста, и найдите пять старых карт, которые Вы не против испортить. Если Вы не можете их найти, тогда нарисуйте пять карт на старых карточках или листках бумаги прямоугольной формы. Мне осталось только сказать, чтобы Вы взяли карту в руки. Поверьте мне, Ваши усилия стоят того! Так что, вперед, за картами. Большой Брат следит!

Возьмите все пять карт и порвите пополам, как если бы порвали одну карту.

Положите половинки одни поверх других так, чтобы получилась стопка из десяти полу-карт. «Срежьте» эту стопку так, как Вы обычно это делаете, одним срезом.

Сдвиньте пять карт в сторону. Положите обе стопки карт на стол, рядом друг с другом, рубашками кверху. Правую стопку переверните лицом вверх.

А теперь Вам предстоит перемешивать карты в каждой стопке, записывая фамилии четырех знаменитых писателей-фантастов. Первое имя — LOVECRAFT (Лавкрафт). Напишите L и переместите верхнюю карту под низ в любой из стопок. Положите стопку на место. Затем напишите O, снова возьмите любую стопку — это может быть и та, что Вы брали до этого, и другая. Переложите верхнюю карту под низ.

Для оставшихся семи букв ...VECRAFT повторите ту же самую процедуру. Записывая каждую следующую букву, выбирайте любую стопку и перемещайте верхнюю карту под низ. После того, как Вы напишите LOVECRAFT, снимите с каждой стопки по одной карте, сложите их вместе (но ту, что лежит рубашкой вверх, не переворачивайте!) и отложите в сторону.

Теперь в каждой стопке у Вас осталось по четыре полу-карты. Теперь напишите слово POE (По). Как и прежде, записывая каждую букву, перемещайте по одной карте под низ стопки, беря их в случайном порядке. Когда слово будет написано, снимите сверху по одной карте и отложите их в сторону.

Теперь число полу-карт в стопках уменьшилось до трех. Напишите слово BRADBURY (Брэдбери).

На столе осталось по две полу-карты в каждой стопке. Напишите слово BLOCH (Блох). Отложите в сторону верхние карты.

На столе осталась пара полу-карт, одна повернута вверх лицом, другая — рубашкой. Записывая каждое слово, Вы выбирали стопки в случайном порядке, поэтому, если эти половинки совпадут, случившееся будет поистине сверхъестественным совпадением, не так ли? Переверните ту половинку, что лежит рубашкой вверх. Если Вы самым тщательным образом следовали инструкции, то это должны быть половинки одной карты!

И это еще не все. Вторая кульминация трюка просто взорвет ваш мозг. Проверьте пары полу-карт, отложенные ранее. В каждой из них половинки совпадают!

Почему это всегда срабатывает? Объяснение приведено в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 132.

6

Путешествие по Солнечной системе

В этой главе мы узнаем о фантастическом математическом волшебном трюке. Я представлю его в виде головоломки — в духе «почему это всегда срабатывает?» — но, конечно же, Вы можете демонстрировать его друзьям как удивительный пример экстрасенсорных способностей.

Вот как этот трюк выглядит для аудитории. Вы стоите спиной к зрителям, предварительно попросив когонибудь положить монету в 10 копеек на любой из девяти квадратов, показанных на рисунке ниже. Не оборачиваясь, Вы даете инструкции: перемещать монету в случайном порядке по матрице, как будто бы это космический корабль совершает путешествие по Солнечной системе. Как только случайные ходы сделаны, Вы блокируете определенные клетки, попросив положить на них по 1 копейке. В конце концов, на восьми клетках окажутся монетки в 1 копейку. Оставаясь спиной к зрителям, Вы называете планету, на которой остановился «космический корабль».

Здесь на минутку остановимся и убедимся, что у Вас есть монетка в 10 копеек и восемь по 1 копейке. Вместо монет можно использовать кнопки, шашки и прочие предметы, которые будут служить Вам фишками. Теперь я возьму на себя роль волшебника, в то время как Вы будете в роли зрителя.

Выберите одну из девяти клеток и положите на нее монету в 10 копеек. Это полностью свободный выбор с вашей стороны, и, очевидно, у меня нет никакой возможности узнать, что за выбор Вы сделали. Перемещая

Меркурий	Уран	Венера
Марс	Юпитер	Сатурн
Нептун	Луна	Плутон

монету согласно моим инструкциям, Вам следует перемещаться только на одну клетку за один ход, по горизонтали или вертикали. *Диагональные ходы не допускаются!* Делая каждый ход, Вы записываете букву из названия той клетки, в которую Вы изначально положили монетку. Например, если Вы начинаете путешествие с «Марса», то Вы пишете М-А-Р-С, перемещая гривенник на один квадрат на восток, на запад, на север или на юг в случайном порядке. Один шаг — одна буква.

Когда Вы закончите записывать название стартовой клетки, положите 1 копейку на клетку «Венера». Я, конечно, могу поспорить, что, независимо от того, откуда Вы начали ходить, или как перемещали гривенник, он не остановится на «Венере». Отныне на каждой стадии Вашего «путешествия по Солнечной системе» Вы будете перемещать «космический корабль» только семь раз, независимо от количества букв в названии очередной клетки. Эти шаги Вы, как и раньше, делаете случайно, но теперь они ограничены свободными клетками. Этих свободных квадратов будет все меньше и меньше, поскольку все больше и больше копеек Вы будете класть на матрицу.

Сделав семь ходов, положите копейку на «Марс».

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Меркурий». Как любил говорить мэр Нью-Йорка Эд Кох, «Ну, как я справляюсь?». Все ли копейки совершили посадку на свободные клетки?

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Уран».

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Нептун».

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Сатурн».

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Юпитер».

Сделайте семь ходов. Положите копейку на «Луну».

Если Вы правильно следовали инструкциям, Ваш «космический корабль» сейчас должен быть на «Плутоне»!

Когда Вы будете показывать этот фокус кому-нибудь, обязательно повернитесь спиной, давая эти инструкции. Если хотите, можете добавить таинственности, позволив зрителю на нескольких этапах двигаться, записывая по буквам З-Е-М-Л-Я вместо того, чтобы считать до семи. После того, как он положит копейку на «Луну», Вы можете смело сказать ему, что его гривенник прибыл на «Плутон», даже не оборачиваясь, чтобы своими глазами на это взглянуть.

Почему трюк всегда срабатывает? Ответ познакомит Вас с понятием «четность». Это понятие имеет огромное значение, как в комбинаторной математике, так и в современной физике элементарных частиц. Загляните в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 134.

7

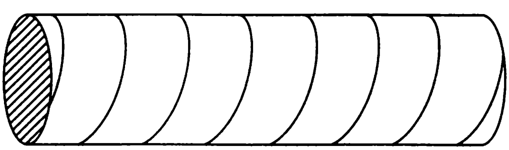
Полоса на Паришестрии

На улице все недвижимо — лишь медленно вращается полосатый шест над парикмахерской, и по нему бесконечно бегут красные и белые полосы, выскальзывают из ниоткуда и исчезают в никуда — перетекают из одной тайны в другую[1].

Рэй Брэдбери, «Электрическое тело пою!»,
рассказ «Друг Николаса Никльби — мой друг».

Космический корабль «Бублик» выполнял очередной долгий исследовательский полет. «Бог мой! — донеслось с наблюдательной вышки. — Что я вижу?! Это невероятно!»

Лейтенант Фларп не спеша подошел, чтобы взглянуть на передний экран корабельного телескопа. То, что появилось на мониторе, должно быть, было планетой в форме идеального цилиндра с правой поляризацией!



— Вероятно, это искусственно созданное тело, — сказал Фларп. — Невозможно, чтобы планета, подобная этой, возникла под действием сил естественной гравитации. Наверное, это космическая станция.

[1] Пер. Н. Григорьевой, В. Грушецкого.

— Слишком большая, — сказал наблюдатель. — ГЛАС (корабельный компьютер) сообщает, что длина цилиндра составляет 14 400 километров. Это больше, чем диаметр Земли.

— Запроси у ГЛАСа длину окружности.

ГЛАС прислал данные: 8100 км.

Когда Фларп увеличил изображение на экране, его глаза округлились, а челюсть отвисла. Вдоль серой гладкой поверхности цилиндра тянулась темная красноватая полоса, похожая на полосы бело-красного шеста, вращавшегося над каждой парикмахерской на среднем Западе. Гораздо более невероятным было то, что цилиндр вращался очень быстро, так что спиральная линия, казалось, двигалась вдоль него.

— Это точно не планета, — сказал Фларп. — Здесь нет атмосферы. Кроме того, эта чертова штука вертится так быстро, что центробежная сила наверняка свела на нет всякую гравитацию на ее поверхности. Я полагаю, что это может быть полая внутри космическая станция, которая вращается для создания внутреннего гравитационного поля.

Как показано на рисунке, спиральная линия делает ровно семь витков по боковой поверхности цилиндра.

Вскоре «Бублик» устремился вперед, чтобы поближе взглянуть и, возможно, приземлиться на то, что команда корабля назвала «Паришестрия». А вот и Ваш вопрос: какой длины эта полоса?

Вам может показаться, что это сложный вопрос, но если Вас постигнет нужное озарение, и Вы скажете правильное «ага!», Вы поймете, что это до смешного просто. Попытайтесь найти ответ прежде, чем заглянете в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 136.

8

8

По дороге в Мандалай

По дороге в Мандалай,
Незабвенный птичий рай... [2]

Во время одного из моих внетелесных путешествий в будущее я перевоплотился в теле молодого человека, который ехал по двадцатиполосной скоростной дороге. Дорога была забита автомобилями и гигантскими грузовиками, все они катили со скоростью около 200 км/час. Солнце недавно село, и водители, то здесь, то там, начали включать фары. Опасности столкновений не было, потому что каждый автомобиль контролировался мощным компьютером на основе сложных сенсорных устройств.

После полудня я проехал Техас и Оклахому, направляясь на восток, в мой родной город Мандалай. Мандалай? Это небольшой сонный городок, жители которого выращивают на фермах хлопок, в 35 км к юго-западу от города Блайтвилль, штат Арканзас. Я окончил свой первый год в университете Аризоны, планировал выбрать специальность «математика» и ехал домой на лето.

Автомобиль, на котором я ехал, назывался «Hustle», или «Задира»; его собрали в Гонконге роботы, и он был оснащен самой передовой голосовой компьютерной системой на всем международном автомобильном рынке.

Чтобы не тратиться на мотель, я решил ехать ночь напролет. После короткого сна, во время которого автомобиль принял на себя рулевое управление, я настроил

[2] *Прим. пер.:* из поэмы Р. Киплинга «Мандалай» (перефразировано).

приборы на панели управления так, чтобы «Задира» получил доступ к обширному банку данных логических и математических задач.

— Что-то нет настроения для музыки, — сказал я. — Не могли бы Вы подбросить мне парочку головоломок, достаточно простых, чтобы решить их в уме?

— Конечно же, подброшу, — ответил автомобиль. — Я запрограммирован выполнять все, что Вам захочется — если, конечно, я способен выполнить это.

В этот момент стая зябликов (а может, воробьев) пролетела над машиной, оставив три белых пятна на лобовом стекле.

— Как это досадно, — сказал автомобиль. — Но, прежде чем я вымою ветровое стекло, обратите внимание, что эти три пятна — как вершины углов треугольника со сторонами, близкими к соотношению три, четыре и пять.

— Клянусь Евклидом, Вы правы!

— Какой имеет бо́льшую площадь? Треугольник со сторонами три, четыре, пять, или треугольник со сторонами 300, 400 и 700?

— Естественно, второй.

— А вот и нет! — автомобиль отстреливался, сопровождая восклицания металлическим смешком, который бесил меня невероятно. — Второй треугольник является вырожденным. Это — прямая. Его площадь равна нулю.

— Ладно, ладно, приятель, — сказал я. — Я еще не выключил мозги. Давайте попробуем еще раз. И, пожалуйста, никакого хихиканья, если я отвечу неправильно.

Я смог решить большинство головоломок автомобиля. Вот некоторые из тех, которые я либо не смог раскусить, либо дал неправильный ответ. Может быть, у Вас лучше получится. На вопросы нужно отвечать, не используя карандаш, бумагу или калькулятор. И помните, автомобиль жульничает.

1. «Взгляните на мои цифровые часы, — сказал автомобиль. — Они показывают восемь часов. Сколько цифр 5 появится на часах между нынешним моментом и девятью?»

2. «Сколько раз между полуднем и полуночью часы покажут по крайней мере три одинаковые цифры? Они не обязательно должны быть соседними».

3. «Предположим, Вам пришлось остановиться, чтобы сменить спущенное колесо, — сказал автомобиль. — Как Вы, должно быть, знаете, каждое из моих колес имеет четыре гайки. Вы положили гайки на землю. Пока Вы возились, доставая запаску, белка стащила все четыре гайки. Как Вам теперь лучше всего благополучно доставить меня до ближайшей СТО?»

4. «Чтобы проехать 10 000 км, Вы, предположим, вращаете мои шины так, чтобы я одинаково использовал все пять. Сколько километров износа выдержит каждая шина?»

5. «Допустим, Вы и Ваш друг на другом автомобиле выехали в одно и то же время из Тусона. Он ни разу не превысил установленный предел скорости, а мы ни разу за всю дорогу не обогнали его. Можно ли нас оштрафовать за превышение скорости (и виновны ли мы в этом)?»

6. Когда мы проехали мимо фермы, отгороженной квадратным забором, автомобиль задал вопрос, который, казалось, был так прост, что я захотел пнуть себя, дав маху, отвечая на него. «Если периметр фермы 400 метров, по 100 с каждой стороны, и фермер расставил столбы забора через каждые десять метров, то сколько всего столбов он использовал?»

7. После того, как я рассчитался на платном мосту, автомобиль спросил: «Какова наибольшая сумма амери-

канских монет, которой нельзя разменять долларовую купюру, и как эту сумму можно набрать наибольшим количеством монет, но так, чтобы этими монетами все еще нельзя было разменять один доллар?» Я предположил, что это $ 1,19 одиннадцатью монетами — три по двадцать пять центов, четыре — по десять центов и четыре пенни.

8. «И Вы еще хотите стать математиком? — спросил автомобиль. — Может быть, Вам больше повезет вот с этим. Каково наименьшее число монет, которым можно разменять долларовую купюру, при условии, что у Вас не будет четного числа монет одного достоинства. Например, Вы не можете взять две монеты по пятьдесят центов или четыре — по двадцать пять».

Ответы на эти вопросы Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 138.

9

Черная дыра Калькутты

Кэлвин Каттер, или «Калькутта», как прозвали его друзья, был собирателем и изобретателем парадоксов. Но это были не такие парадоксы, которые можно записать на бумаге; я говорю о физических объектах, которые кажутся невозможными.

Я навестил Калькутту весной 2085 года, в тот самый момент, когда он перевозил свою коллекцию в небольшой домик на заднем дворе своего дома. Одна из комнат уже была доверху заполнена топологическими диковинками. Там были огромные стеклянные модели бутылки Клейна, проективные плоскости, сомкнутые поверхностями ни внутрь, ни наружу. Огромные куски стали, похожие на две ленты Мебиуса, вложенные одна в другую. Вы могли бы пробежать пальцами вдоль петли, между лентами, чтобы доказать, что они раздельны, но, нет, это была одна лента, просто завитая дважды. Два больших деревянных кольца, каждое из которых было сделано из другой породы дерева, были соединены вместе. Тщательный осмотр показывал, что ни одно из колец не имело ни одного разреза.

— Как, черт возьми, ты все это сделал? — спросил я.

— Обычно я не даю пояснений, — сказал Кэлвин, — но для тебя сделаю исключение. В детстве я сделал зарубку на одной молодой сосенке, в лесу, неподалеку от места, где я жил. В зарубку я вогнал тор из красного дерева. Через тридцать лет, когда дерево обвило тор и проросло сквозь него, я спилил фрагмент дерева и вырезал второе кольцо. Затем я покрыл древесину морилкой и тщательно ее отполировал. Красота, не правда ли?

— Наш друг, Сесил Уич, — сказал я, — говорил, что отправил тебе подробное описание одной парадоксальной воронки, которую он изобрел, а ты ее сконструировал. Это правда?

— Так оно и есть, — ответил Кэлвин, — воронка становится все меньше и меньше по мере того, как ты опускаешься в нее, сужаясь до столь малой толики, что мне пришлось закопать воронку на заднем дворе, чтобы защитить ее хрупкий кончик. Идем — я покажу ее тебе.

Калькутта привел меня к небольшому отгороженному участку позади его музея; защитный забор стоял вокруг чего-то, похожего на огромную воронку кубической формы. Ее стенки были сделаны из металла и покрашены в черный цвет. Надпись на табличке гласила: «Черная дыра. Автор Кэлвин Каттер».

— Еще десять лет назад создать такое чудовище было бы невозможно, — сказал Кэлвин. — Но ты знаешь, что в 2076 году великий китайский физик Нет Лим Сум произвел революцию в квантовой механике, открыв, что материю формирует бесконечная иерархия все более и более мелких частиц.

Я кивнул.

— Как с китайскими шкатулками. Последовательность не заканчивается. Самой маленькой просто нет.

— Точно. А еще несколько лет спустя химики из лаборатории в Ливерморе разработали технологию создания композитных субкварковых материалов, которые могут быть сколь угодно малы.

Здесь я должен остановиться, чтобы описать воронку, сделанную Кэлвином. Она состояла из бесконечной последовательности кубических сегментов, которые уменьшались в прогрессии. Представьте себе воронку (ее верхний участок показан на рисунке) из кубов без верха и дна.

Длина ребра самого большого куба составляла ровно 1 декаметр (около 33 футов). Сразу под ним был куб с ребром $1/\sqrt{2}$, или около 0,7 декаметра. Ребро третье-

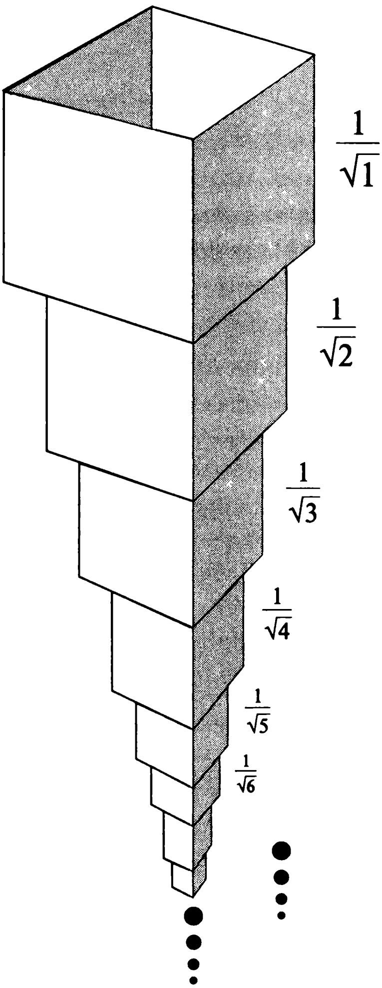


Схема-диаграмма черной дыры Кэлвина Каттера

го куба было $1/\sqrt{3}$, или приблизительно 0,57 декаметра. Четвертый куб был с ребром $1/\sqrt{4}$, что равнялось 0,5 декаметра, и так далее, до бесконечной последовательности все меньших и меньших сегментов. Таким образом, если

n — позиция куба в ряду, считая от верха, то ребро любого куба — $1/\sqrt{n}$.

Мы можем представить длину ребер сегментов воронки вот так:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Учитывая, что объем n-го куба $1/\sqrt{n}\times 1/\sqrt{n}\times 1/\sqrt{n}$, то объемы сегментов воронки запишем так:

$$\frac{1}{1\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Представленная выше последовательность, как объяснил Кэлвин, стремится к пределу. Это значит, что ее сумма — конечное число. Точная сумма мне неизвестна, но она составляет немногим менее 3 кубических декаметров.

— Покрасить воронку изнутри было легко, — сказал Кэлвин, — я просто заполнил ее черной краской. Конечно же, мне пришлось воспользоваться особой краской, состоящей из бесконечно малых молекул. Иначе молекулы конечного размера засорили бы воронку там, где ее размер меньше молекулы. Потом я откачал краску, и, таким образом, воронка оказалась покрашена, как видишь.

— Это все как раз понятно, — сказал я, — а в чем же парадокс?

Калькутта загадочно улыбнулся.

— Парадокс подымает свою кошмарную голову, когда ты вычислишь площадь окрашенной поверхности. Давай спустимся вниз, и я покажу тебе элементарную математику.

Кэлвин оказался прав. Когда мы закончили вычисление площади внутренней поверхности воронки, результат почти что взорвал мой мозг. Постарайтесь и Вы определить его прежде, чем заглянете в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 141.

10

10

Викторина в стиле научной фантастики

Предлагаю Вам девять коротких вопросов с научно-фантастическим уклоном. Для ответа на некоторые из них Вам понадобится знание основ физики, но большинство из них решается легко, особенно если Вас посетит озарение.

1. На какой планете Вы можете бросить камень таким образом, что он пролетит короткое расстояние, остановится в воздухе, развернется и отправится обратно к Вам. Нет, он ни от чего не отскакивает.

2. Астронавт, проводя исследования на Луне, заключает пари со своим напарником о том, что может пройти расстояние ровно в один километр с плотно закрытыми глазами. Как он выиграл пари?

3. Что появилось раньше, курица или яйцо?

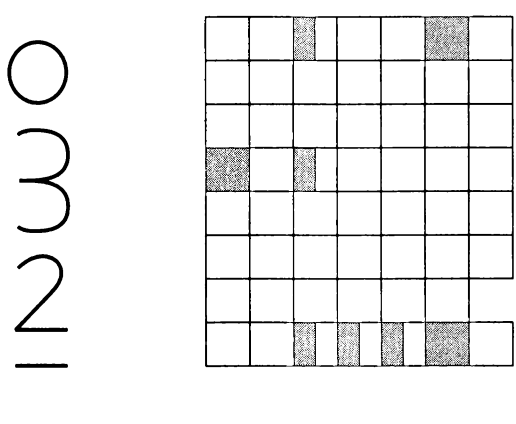
4. В «Четвертой Книге Джоркенса» (Lord Dunsany, «The Fourth Book of Jorkens») Лорда Дансени Джоркенс настаивает на том, что шестью месяцами ранее он совершил путешествие в пространстве в одну из точек Солнечной системы, расположенную по другую сторону Солнца, как раз напротив той точки, где сейчас находится Земля. Один скептически настроенный член бильярдного клуба поставил пять фунтов на то, что он не сможет этого доказать. Как Джоркенс выиграть пари?

5. Есть ли на Земле сооружение, созданное руками человека, которое можно увидеть с Луны невооруженным глазом?

6. В научно-фантастическом рассказе Росса Роклина «В центре тяжести» (Ross Rocklynne, «At the Center of Gravity») некоторые люди оказались в ловушке в центре полой сферы, такой же большой, как Земля. Их притянула туда сила тяжести. В романе Уэллса «Первые люди на Луне» сила тяжести тянет космических путешественников Уэллса к центру сферического корабля. Что тут не так?

7. Представьте себе огромный гироскоп, построенный на экваторе. Во время вращения Земли ось гироскопа будет держать свою ориентацию относительно звезд. Относительно же Земли ось делает полный оборот каждые 24 часа. Является ли это формой вечного движения, которая позволяет получать полезную энергию из вращения гироскопа?

8. Ниже приведены числа 1, 2, 3 и нуль. 1 начертана горизонтально, как это часто делают в Японии. Какой известный журнал, публикующий научную фантастику, представлен таким образом?



9. Диаграммы можно легко отправлять на межзвездные расстояния в двоичном импульсном коде, который указывает, какие клетки в прямоугольной матрице должны быть черными. Какое сообщение передается с помощью матрицы, показанной выше?

См. ответ на стр. 143.

11

Парикмахеры с Паришестрии

В задаче 7 мы оставили экипаж космического корабля «Бублик» размышлять, почему темно-красная полоса спиралью огибает цилиндрическую планету, на которую они случайно наткнулись. Экипаж назвал загадочную планету Паришестрия, потому что она вращалась, подобно разноцветному шесту над американскими парикмахерскими.

Когда Центр разрешил «Бублику» начать разведку на цилиндрическом объекте, капитан Ларк Суук и его экзобиолог Стэнли Лозофф отчалили на маленьком корабле-челноке. Они осторожно кружили над планетой. В центре одного из ее концов был, казалось бы, большой вход на металлической поверхности.

Когда корабль-разведчик опустился на поверхность планеты, трое гуманоидов в скафандрах появились из этого хода и, казалось, подавали дружественные приветствия. Суука и Лозоффа сопроводили внутрь. Сенсорные устройства на поясе Лозоффа передали данные об атмосфере цилиндра ГЛАСу, суперкомпьютеру «Бублика». Воздух был похож на земной, прислал ответ ГЛАС, и можно было дышать без опаски.

Суук, Лозофф и трое паришестрийцев сняли шлемы. Лица туземцев были полностью покрыты короткой рыжеватой шерстью. В остальном они выглядели совсем как люди, только их глаза были гораздо меньше, носы — площе, а рты — шире. Суук и Лозофф едва могли поверить собственным ушам, когда один из местных жителей воскликнул, с любопытным акцентом, но на узнаваемом английском: «Добро пожаловать, люди Земли, на нашу планету!»

В течение нескольких недель Суук и Лозофф развлекались по полной. Цилиндрическая планета, которая вращалась, генерируя гравитационное поле, уровнем культуры и технологий была подобна Земле. Туземцы прежде заселяли планету в другой части Вселенной, но когда ядерная война сделала ее поверхность совершенно необитаемой, выжившие сочли необходимым построить искусственную планету. Она вращалась вокруг небольшой черной дыры, которой пользовались и как источником энергии, и как измельчителем отходов. Спиральная полоса? Это была гигантская труба, по которой атмосфера, нагнетаемая огромными машинами на концах цилиндра, распределялась по всей планете.

За сто лет до постройки цилиндра группа паришестрийцев посетила Землю. Суук и Лозофф узнали, что разведчики прилетали на кораблях, похожих на тарелки. Вероятно, именно эти корабли были причиной мании НЛО, охватившей Землю во второй половине XX века.

— Мы были крайне осторожны, чтобы избежать любого взаимодействия с людьми, — сказал один из тех паришестрийцев, которые выучили английский, — но после нескольких десятилетий наблюдений мы освоили английский язык достаточно хорошо, мы смогли читать много книг, которыми нам удалось завладеть, чтобы понять наши записи ваших разговоров. А ваши вращающиеся шесты над парикмахерскими заинтриговали нас потому, что стрижка и мытье волос — один из главных аспектов нашей жизни. И когда нам понадобилось обвить нашу планету воздушной трубой, мы покрасили ее красным цветом, так что, когда цилиндр вращается, она напоминает один из ваших прекрасных символов парикмахерской.

— Я видел, — сказал Суук, — на ваших улицах много таких шестов, вращающихся над маленькими магазинчиками. Это парикмахерские?

— Они самые, — ответил местный житель. — У нас их тысячи в каждом городе. Как видите, все наше тело с головы до ног покрыто густыми волосами. Наш вид эволюционировал на планете, гораздо более холодной, чем ваша, и наш защитный слой волос растет гораздо быстрее, чем волосы у вас на головах. В контролируемом теплом климате нашей новой планеты нам приходится постоянно подстригать волосы и мыть их шампунем.

Суук и Лозофф, посещая парикмахерскую, были поражены тем, как быстро и умело работали парикмахеры. Местные жители носили разную одежду, но волосы покрывали их тела настолько, что единственным способом узнать, что перед тобой женщина, было крохотное пятнышко у нее на голове, лишенное волос.

Все парикмахеры были женщинами. Иногда они помогали друг другу, когда салон был переполнен. Используя электрическую машинку для стрижки, парикмахер может полностью обработать тело клиента за десять минут. Мытье шампунем занимает пять минут.

Предположим, что трое мужчин-паришестрийцев, A, B, и C, пришли в салон в одно и то же время. Каждый из них заказывает стрижку и мытье шампунем. В слоне только два дежурных парикмахера. Мытье шампунем следует провести за один непрерывный период времени длиной в пять минут; при этом клиентов может обслуживать только один парикмахер. Двум парикмахерам одновременно не разрешается обслуживать клиента, хотя один парикмахер может начать стрижку, а другой, с временны́м интервалом, — закончить ее. Порядок процедур — стрижка, а потом мытье или наоборот — не имеет значения.

Сколько времени понадобится двум парикмахерам на то, чтобы постричь и вымыть шампунем троих клиентов? За ответом Вы можете обратиться в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 145.

12

12

Все дело в зеркалах

...в зеркалах есть что-то жуткое.

Хорхе Луис Борхес, «Тлен, Укбар, Orbis Tertius»

После того как космический корабль «Бублик» покинул Паришестрию, капитан Ларк Суук перевел корабль в режим инерционного гипердвигателя. Несколько дней без особых происшествий «Бублик» мчался по галактике Млечный Путь почти со скоростью света. Как вдруг гигантский корабль врезался в совершенно неожиданное искривление пространства, созданное странствующей черной дырой.

Система освещения корабля на мгновение отключилась. Мебель и другие объекты в беспорядке разлетелись, члены экипажа начали кричать, и в течение нескольких минут «Бублик», казалось, кувыркался, как ребенок, делающий сальто. Нет, вот метафора получше: это было так, как будто какое-то чудовищное существо подняло корабль, а затем подбросило его так, как обычно подбрасывают монетку. Затем все так же внезапно успокоилось, и корабль продолжил свое плавное движение по заданному курсу.

Лейтенант Фларп, дежурный офицер в диспетчерской, тут же доложил капитану Сууку.

— Мы пока не знаем, что произошло, — сказал он; его лицо все еще было пепельно-серым, — но повреждения двигательной системы незначительны. Технический отдел сообщает, что их будет трудно устранить во время движения судна. Они запросили посадку.

Суук только что сам поднялся с пола и все еще ощупывал части своего тела. Нет, кости сломаны не были, хотя было несколько болезненных синяков.

— Мы приземлимся на первой же подходящей планете, — сказал он. — Я вскоре приму командование на себя.

«Бублик» проходил через неизведанные области галактики, но, по счастливой случайности, на экране радара показалась планета, немногим больше Земли. Тщательный анализ лазерных зондов с бортового суперкомпьютера ГЛАС подтвердил отсутствие жизни на планете. Там также не было атмосферы, но, поскольку ремонт можно было сделать изнутри, это не создавало никаких проблем.

«Бублик» произвел мягкую посадку. Пока шла починка корабля, Фларп умылся и заклеил небольшой порез над левым глазом. Он расчесывался перед зеркалом, когда вдруг на него снизошло причудливое озарение.

— ГЛАС сообщил, — сказал он себе, — что «Бублик» зажало несколько раз, когда он проходил через пятимерный пространственно-временной континуум. Это означает, что он, должно быть, вывернул наше трехмерное пространство. Великий Азимов! Если мы перевернулись нечетное число раз, то наш корабль вместе со всем, что было внутри, зеркально отразился. Этот порез на самом деле находится над моим правым глазом, так, как он выглядит в этом зеркале.

Фларп открыл аптечку. Этикетки на банках выглядели обычно. «Какой же я идиот, — подумал он, хлопнув себя по лбу с неповрежденной стороны. — Конечно же надписи читались бы так же, даже если бы мы перевернулись. Вся моя голова, включая глаза и мозг, поменяли бы лево и право местами. Если надпись перевернуть, она попрежнему будет выглядеть обычно».

Фларп нахмурился и потер щеку. «Нужно посмотреть, что скажет ГЛАС». ГЛАС внимательно выслушал запрос Фларпа о том, сколько раз корабль перевернулся в четырехмерном пространстве.

— К сожалению, — ответил он, — у меня нет таких данных. Все схемы, в том числе и мои, отключились, когда мы прошли через искривление пространства.

— Тогда возможно, — сказал Фларп, — что все мы теперь — зеркальные отражения наших бывших собственных я. Если бы вы взяли асимметричного жителя Плоской планеты из его плоскости, перевернули его нечетное число раз в трехмерном пространстве, а затем вернули бы его в его плоский мир, он был бы зеркально перевернут. Это то же самое, что...

— Вы не должны объяснять, — прервал его ГЛАС. — Я все прекрасно понимаю. Вы забываете, что я запрограммирован на визуализацию и в более высоких измерениях. Но не волнуйтесь. Мы не являемся нашими отражениями. Хотя мы едва спаслись. И кое-кому стоило бы посоветоваться со мной, прежде чем мы приземлились для ремонта.

Почему ГЛАС был так уверен, что «Бублик» перевернулся четное число раз? И почему он был так озабочен посадкой?

См. ответ на стр. 146.

13

iДьявол

Недавно мне представился случай провести несколько недель в Сан-Франциско. В один из прекрасных дней я обедал в «Caffe Puccini» в районе Норт Бич — это место, где обычно зависают некоторые из моих наиболее эксцентричных друзей из Силиконовой долины — как вдруг к моему столику, за которым я сидел в полном одиночестве, подошла привлекательная молодая женщина с рыжими волосами.

— Вы Мартин Гарднер? — спросила она.

— Да, это я, — ответил я, отложив газету.

— Разрешите присесть?

— Конечно, прошу Вас.

Один наш общий друг, призналась она, подсказал ей, где меня найти. Она была подписчицей «Журнала научной фантастики Айзека Азимова» и каждый месяц читала мою колонку головоломок. Она хотела рассказать мне одну странную историю. Она была уверена, что я могу использовать ее в своей колонке.

— Все началось три года назад, — сказала она, — всего через несколько недель после того, как я защитила диссертацию по астрофизике в Стэнфорде. Темой моего исследования были новейшие модели расширяющейся Вселенной — Вы знаете, что Вселенная, начинаясь с Большого взрыва, постоянно расширяется и...

— Вам не стоит объяснять столь подробно, — перебил я. — Я знаком с этими моделями.

— Так вот, — продолжила она, — как-то ночью я засиделась с моим Apple MacBook Pro. Было поздно, около трех часов ночи, я, должно быть, задремала. Мои пальцы по инерции блуждали над клавишами...

— Вы устали и Вам было не по себе? — спросил я. — Подобной той органистке, которая взяла не тот аккорд?

— Именно так, — сказала она. — Вот как все произошло. Я не могу вспомнить, о чем я тогда думала или что мне снилось, но вдруг раздался громкий хлопок. Комната наполнилась дымом. Вонь стояла ужасная. Когда дым рассеялся, в комнате был Дьявол; он искоса, как-то хитро, поглядывал на меня.

Я не смог сдержать усмешку.

— И как же старик выглядит теперь?

— Так же, как и его изображения, — сказала она. — Он был высокий, красивый, одетый в красные лосины, с черными усами и острой бородкой. У него на голове были маленькие рожки и длинный раздвоенный хвост. Он сказал, что мои пальцы отстучали на клавиатуре старую каббалистическую комбинацию цифр и букв, которая и заставила его появиться. Он предложил мне все, что я пожелаю.

— Вы, конечно же, отказались.

— Конечно же, нет, — сказала она. — Меня слишком заботило то, как возник космос. В своей диссертации я проанализировала все последние модели Большого взрыва, но, естественно, я не знаю, какая из них истинная. Может быть, все они ложны. Я хотела знать, что же на самом деле там произошло, где-то пятнадцать-двадцать миллиардов лет назад.

— И он рассказал Вам?

— Да, он сказал. Но, надо признаться, его ответ поставил меня в тупик. Хотя, может быть, мне не стоило так удивляться. В конце концов, если бы не было Библии, мы бы не узнали, что дьявол существовал, верно?

— Точно, — сказал я. — Что же, черт возьми, он Вам сказал?

— Он сказал мне, что Вселенная была создана именно так, как сказано в Книге Бытия. Господь создал все из ничего за шесть дней, каждый из которых длился двадцать четыре часа. А на седьмой день Он отдыхал.

— Если так и было, — сказал я, — то Вселенной должно быть всего лишь шесть-десять тысяч лет. А как же звезды, которые так далеко от нас, что их свет, который мы видим, должен был возникнуть миллионы лет назад?

— Я спросила дьявола об этом, — ответила она. — Он сказал мне, что Вселенная была создана вместе со всем этим светом.

— А окаменелости?

— Это свидетельства существования растений и животных, уничтоженных Великим потопом.

— Вы хотите сказать, — продолжил я, — что фундаменталисты правы? Теория эволюции ложна, и все возникло буквально за шесть дней, именно так, как сказано в Ветхом Завете?

— Да, — сказала она печально. — Это то, что я узнала от дьявола. Уж он-то должен знать. Ведь он был там, когда все случилось.

Я внимательно рассматривал свою собеседницу. У нее было красивое лицо, с умными, бесхитростными глазами, которые смотрели прямо на меня, и в них не было ни малейшего следа неискренности. Внезапно меня осенила мысль.

— А ведь у дьявола, — сказал я, — репутация того, кто ничего не дает даром. Он всегда заключает сделку. Что-то он должен был Вам предложить. Что Вы отдали в обмен на его информацию?

Она едва заметно улыбнулась, нервно осмотрелась вокруг, потом наклонилась ко мне и прошептала.

— Я отказалась от возможности когда-либо говорить правду тому, кого я встречаю впервые.

См. ответ на стр. 148.

14

14

Как-Вы-сказали Фланаган

Я знаком с целым рядом лучших писателей-фантастов наших дней, но ничей разговор не был более удивительным, чем манера Фреда Фланагана. Вам не знакомо его имя, потому что Фред пишет под десятками псевдонимов. Его романы и рассказы известны своими дикими космологиями и причудливыми планетами. Он заслужил свое необычное прозвище Как-Вы-сказали, или Квас, для краткости, когда был еще студентом в Школе естественных наук в Бронксе. Это прозвище он получил благодаря своей привычке постоянно делать такие занятные и диковинные замечания, что слушатели невольно откликались: «Как Вы сказали?»

Несколько месяцев назад я приехал к Фланагану в то, что он называл «Квас-Хаус», дом на берегу Парадокс Лэйк, небольшого озера в округе Эссекс, штат Нью-Йорк, что примерно в шести милях к западу от верхнего течения реки Гудзон. Несмотря на то, что ему было едва за сорок, Фред отпустил длинную бороду, осветлив ее добела, что сделало его похожим на учителя дзен. Чтобы избежать неудобств с мытьем и стрижкой волос, он брил голову раз в несколько дней.

— Эти джинсы на Вас, — сказал я, указывая ему под ноги, — ужасно узкие внизу. Как Вам удается просовывать в них ноги?

— Я и не пытался, — ответил он. — Я надеваю их через голову.

Я должен объяснить кое-что: Фред унаследовал от своей мамы особую любовь угощать всех мясными пирожками с яблоками. Однажды я спросил его, почему у них с его бывшей женой никогда не было детей.

— Бесплодие, — ответил он. — Моя жена была не в состоянии забеременеть. Этот дефект ей передался по наследству, от ее матери.

Я помню, тогда я еще спросил: «Как Вы сказали?»

Мы гребли по Парадокс Лэйк в каноэ Фланагана, когда мне вспомнилась теория Калуцы—Клейна, а именно странная гипотеза, которую я довольно подробно рассматривал в моей книге «Симметричная Вселенная» (Martin Gardner, «Ambidextrous Universe»). Я называю ее странной, потому что согласно ей четвертое пространственное измерение закручивается, подобно кругу, с диаметром намного меньше радиуса атома! Эйнштейн отверг эту теорию, и я никак не ожидал, что она когда-либо возродится. К моему бесконечному удивлению, общая теория Калуцы—Клейна, с более чем четырьмя пространственными измерениями, теперь стала горячей темой новейших GUT (Теорий Великого объединения), которые пытаются объединить все силы природы и объяснить квантовые свойства всех элементарных частиц.

— Я совсем не удивлен, — сказал Фланаган. — Пространство-время должно быть, по крайней мере, пятимерным, поскольку доказать, что куб имеет четыре пространственных измерения, очень просто.

— Как Вы сказали?

— Возьмем квадрат, — сказал Фред. — Его диагонали перпендикулярны друг другу. Это доказывает, что квадрат является двухмерным. Теперь возьмем куб. У него четыре пространственных диагонали, каждая их которых соединяет противоположные пары углов. Как видите, любые две из этих диагоналей перпендикулярны друг другу. Естественно, что четыре взаимно перпендикулярные линии могут быть проведены только в четырехмерном пространстве.

Я хотел было возразить, но Фланаган перебил меня.

— Вы знаете, что такое голая сингулярность?

Я кивнул.

— Некоторые космологи полагают, что после взрыва звезды может сформироваться нечто, гораздо хуже черной дыры. Эта сингулярность в пространстве-времени «раздевается», если можно так выразиться, черной дырой. Свет может обвиться вокруг нее и исчезнуть.

— Точно, — сказал Фред. — Космолог из Кембриджа по имени Джордж Эллис на голой сингулярности построил изумительную модель Вселенной. Он полагает, что Вселенная — это поверхность огромной четырехмерной сферы; так было и в некоторых моделях раньше, только эта сфера не расширяется.

— Тогда как же Эллис объясняет красное смещение? — спросил я. — Вы же знаете, что это смещение спектра далеких звезд к красному, что являет собой убедительное доказательство расширяющейся Вселенной.

— Ерунда, — ответил Фланаган. — Есть десятки способов объяснить красное смещение. Эллис объясняет это следующим образом. Наша галактика Млечный Путь — точка на поверхности гиперсферы, находящаяся точно напротив чудовищной голой сингулярности. Это чудовище втягивает в себя всю материю, которая извергается из взрывающихся сверхновых звезд и других космических событий. Оно преобразует эту материю в водород, который извергает обратно. Такая переработка вещества поддерживает устойчивое состояние космоса.

— А как же красное смещение?

— Я подхожу к этому. Чем дальше галактика от нас, тем ближе она к голой сингулярности. Сила гравитационного поля вокруг сингулярности сдвигает звездный свет к красному. Чем ближе звезда к монстру, тем больше сдвиг. Для наблюдателей с Земли это создает иллюзию расширяющейся Вселенной. Если бы мы могли посмотреть на нашу галактику с планеты, находящейся около сингулярности, мы бы увидели свет, сдвинутый к синему.

— А может, это невероятная случайность, что наша галактика и сингулярность диаметрально противоположны?

— Вовсе нет, — ответил Фланаган. — Только та галактика, которая находится далеко от сингулярности, будет достаточно холодной, чтобы могла развиваться жизнь. Мы здесь потому, что мы не могли эволюционировать в другом месте.

— И Вы все это воспринимаете всерьез?

— Это лучшая модель из всех, что у нас есть. Конечно, у нее есть один большой недостаток. Она предполагает, что гравитация — это сила притяжения.

— Как Вы сказали?

— Вы никогда не задумывались над тем, почему шар, наполненный газом, поднимается?

— Гравитация тянет воздух вниз, создавая давление снизу.

— Но это же абсурд, — сказал Фланаган. — Там же такое давление воздуха на верхнюю часть шара. Может быть, есть небольшая разница между давлением сверху и снизу, но она слишком мала, чтобы поднять воздушный шар так быстро, как он это делает. Нет, шар выталкивается вверх под действием силы тяжести.

— Но если гравитация толкает его вверх, — сказал я, — то что же заставляет камень падать?

— Огромное давление всех бесчисленных миллиардов и миллиардов виртуальных частиц, которые непрерывно кипят в квантовой пене так называемого космического вакуума.

Я решил сменить тему.

— В этом озере есть рыба?

— Полно, — ответил Фред. — Но я никогда не ловлю рыбу. Я ненавижу рыбалку, и, более того, я рад, что я ее ненавижу.

— Как же так?

— Потому, — сказал он, — что если бы я любил ловить рыбу, я бы тратил на рыбалку много времени, и это надоело бы мне до смерти. Один из моих соседей любит порыбачить. К сожалению, он потерял левую руку в автомобильной аварии много лет назад, поэтому ему приходится ловить рыбу одной рукой. На днях он сказал мне, что поймал рыбу, настолько большую...

Фланаган заложил левую руку за спину, подражая однорукому человеку. Затем он протянул правую руку ладонью влево, чтобы показать, насколько велика была рыба.

— Кстати, — сказал он, — это каноэ напоминает мне одну затейливую задачку в духе игр в слова. Вашим читателям она могла бы прийтись по вкусу. Спросите их, могут ли они переставить буквы в слове «canoe» так, чтобы получилось еще одно простое английское слово?

Через несколько дней после моего возвращения домой я получил от Фланагана открытку. На стороне с адресом была приклеена небольшая наклейка, которая гласила: «Пожалуйста, немедленно уведомите почту, если эта наклейка отвалится в пути».

На обратной стороне карты значилось:

Не трать свое время, читая это. Здесь ничего не написано.

Разгадать жульническую уловку с кубом, объяснить, почему воздушные шары поднимаются, а также найти анаграмму слова «canoe», должно быть, просто. Загляните в раздел первых ответов.

Что касается Джорджа Эллиса, то он на самом деле выдающийся британский космолог, чья модель была принята всерьез. Вы можете узнать о ней больше в книге Пола Дэвиса «На краю бесконечности» (Paul Davies, «The Edge of Infinity»).

См. ответ на стр. 150.

15

Скажу Вам как релятивист...

— Капитан говорил мне, у Вас возникли некоторые проблемы с теорией относительности, — сказал лейтенант Фларп мичману Палверу. Офицеры болтали за чашкой кофе в кафетерии космического корабля «Бублик».

— Все так, — вздохнул Палвер. — Старик говорит, что он не представит меня к повышению, пока я не пройду тест по специальной теории относительности.

— Какая-то определенная проблема? Может быть, я могу чем-то помочь.

Палвер поставил чашку и открыл новую пачку сигарет «Марсборо». Изготовленные из отборного табака, выращиваемого на Марсе, они выпускались в ярко-красных пачках по 50 тонких сигарет в каждой.

— Я все думаю о ситуациях, которые я не в состоянии понять. Мне кажется, они подрывают всю теорию.

— Например?

— Ну, предположим, я нахожусь на планете, а два космических корабля проходят прямо у меня над головой в противоположных направлениях. Каждое судно движется со скоростью, скажем, в три четверти скорости света. Разве они не отдаляются друг от друга со скоростью, в полтора раза превышающей скорость света?

— Именно так.

— Но не теория ли относительности говорит нам, что ни один объект не может уходить от другого со скоростью большей, чем скорость света?

— Это действительно так, — сказал Фларп, — но это относится только к наблюдателям на самих объектах.

Из Вашей фиксированной системы отсчета на планете Вы бы увидели, как корабли проносятся с относительными скоростями, превышающими скорость света. Но если Вы находитесь на одном из кораблей, это совсем другая история. Вы должны были бы учесть изменения расстояния и времени, возникающие при высоких относительных скоростях.

— А для этого есть формула?

— Есть, — ответил Фларп, — и очень простая. В физике Ньютона Вы бы, конечно, просто сложили бы скорости двух кораблей. Но в теории относительности скорости не являются аддитивными. Если один корабль идет в одном направлении со скоростью x, а другой идет в противоположную сторону со скоростью y, скорость прохождения для наблюдателя на любом из кораблей — это не x плюс y. Скорость будет равна x плюс y, делить на 1 плюс xy, деленное на c^2, где c — скорость света.

Палвер отложил пачку сигарет и записал на бумажной салфетке вот такую формулу:

$$\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}.$$

(Детальный анализ относительных скоростей Вы найдете в работе: Шиффер М. М., Боуден Л., «Роль математики в науке» (Schiffer M. M., Bowden L., «The Role of Mathematics in Science» // New Mathematical Library. 1984. V. 30. Mathematical Association of America).)

Он заменил x на 3c/4 (три четвертых скорости света), и то же самое проделал для y. Хватило всего нескольких минут, чтобы увидеть, что при сокращении формулы сокращается c^2, давая в результате 24c/25 или 24/25-х скорости света для скорости прохождения двух кораблей.

— Прекрасно! — воскликнул Палвер. — Я и представить себе не мог, что вычисления так просты. Позвольте, я спрошу у Вас еще кое-что. Представьте себе огромные космические ножницы. Длина их лезвий равна диаметру Солнечной системы. Теперь представим, что лезвия медленно начинают сходиться. Точка пересечения их режущих кромок будет двигаться к вершине ножниц с постоянно возрастающей скоростью. Не превысит ли скорость этой точки пересечения, относительно меня, скорость света?

— Превысит, — сказал Фларп. — Но я уверен, вы отдаете себе отчет в том, что здесь движется геометрическая точка, а не материальный объект. Теория относительности позволяет любым вещам двигаться быстрее скорости света. Вы можете перемещать луч света в темной комнате, и световое пятно на стене может двигаться быстрее скорости света.

— Да, я понимаю, — ответил Палвер, — но вот что беспокоит меня. Предположим, ручки ножниц находятся на Земле, а точка, в которой пересекаются края лезвий — на Плутоне. Не можем ли мы «стричь» ножницами так, чтобы точка пересечения перемещалась вперед и назад, и тем самым отправить закодированное сообщение на Плутон быстрее скорости света? Я могу и ошибаться, но не теория ли относительности абсолютно запрещает отправку сообщений со скоростью, превышающую скорость света?

— Запрещает, конечно, — сказал Фларп. И он продолжил объяснять, почему гигантские ножницы не могут быть использованы в качестве сигнального устройства, передающего сообщения быстрее скорости света. Если у Вас не получилось выдумать такое объяснение, загляните в раздел следующих ответов.

См. ответ на стр. 151.

16

16

Пари в баре «Бублика»

Мичман Палвер, лейтенант Фларп и полковник Лоск отдыхали в баре космического корабля «Бублик». Палвер был страстным любителем забавных трюков и головоломок, но особенную страсть он питал к головоломкам с предварительным ответом. Палвер взял коробок спичек.

— Вы можете не верить, — сказал он, указывая на стакан воды на столе, — но я могу зажечь спичку и заставить ее гореть под водой в этом стакане.

Фларп застонал.

— Хорошо, Палвер. Я не верю в это. Давайте посмотрим, как это делается.

Фларп чиркнул спичкой. Потом он поднял стакан воды и поднес горящую спичку ко дну стакана. Фларп снова застонал, но только громче.

Палвер вытащил еще одну спичку из коробка.

— Вот еще одна классная задачка. Бьюсь об заклад, Вы не сможете бросить эту спичку на стол с высоты в один метр так, чтобы она приземлилась вершиной.

— Эту я знаю, — сказал полковник Лоск. Он взял спичку, сломал ее в форме буквы V и бросил.

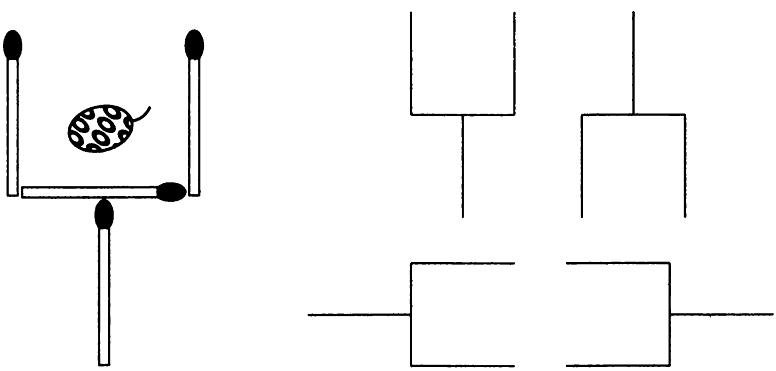
Палвера, казалось, не вовсе не покоробило. Он вытащил из кармана монетку, размером примерно с ту, какой была монета в 10 центов в США еще в двадцатом веке.

— А как насчет этого? Бросьте монету с высоты шесть сантиметров так, чтобы она приземлилась на столе, прямо на ребро.

Фларп и Лоск думали, как это сделать, потягивая малиново-красный Марсианский мартини. Когда они сдались, Палвер окунул монету в стакан с водой, прилепил ее с наружной стороны стакана у самой его кромки, а затем отпустил. Вода удерживала монету на ровной стенке стакана. И монета скользнула вниз, оставаясь при этом приклеенной к стеклу, а потом приземлилась на стол, на ребро.

На этот раз Фларп и Лоск застонали оба.

— Теперь моя очередь показать Вам кое-что, — сказал Лоск Палверу. Он расположил четыре спички на столе так, чтобы они образовали бокал Марсианского мартини. Потом достал вишеливку из своего коктейля и поместил ее в стакане из спичек так, как показано на нижнем рисунке слева. (Вишеливки – это крошечные коричневые ягодки, плоды дерева вишелива, полученного путем скрещивания оливкового и вишневого деревьев. Эти гибридные деревья начали выращивать на Марсе, где их плоды быстро стали популярным ингредиентом большинства марсианских коктейлей.)



— Так в чем проблема? — спросил Палвер.

— Очень просто, — ответил Лоск. — Вам нужно переложить всего две спички так, чтобы сложить новый бокал мартини, но с вишеливкой снаружи. Бокал должен быть таким же, как исходный, хотя и не обязательно повернутый ножкой вниз.

— Я так понимаю, вишеливку мне трогать нельзя.

— Вы правильно понимаете, — сказал Лоск. — В противном случае Вы бы просто могли переложить саму вишеливку за пределы бокала, не трогая спички.

Позвольте мне еще раз объяснить задачу так, чтобы было понятнее. Переложите всего две спички так, чтобы получился бокал мартини того же размера и формы, как исходный, но с ягодкой снаружи. Переделанный бокал может быть развернут любым из четырех способов, показанных на рисунке вверху справа.

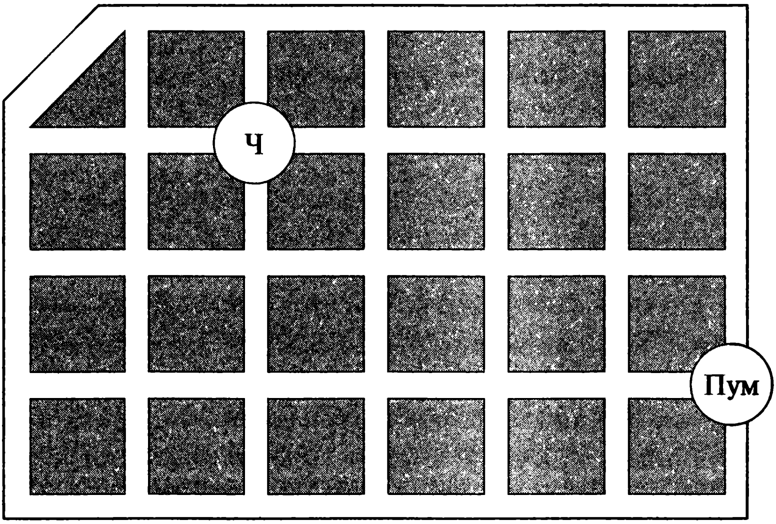
Это прекрасная головоломка для дружеских компаний. Вы удивитесь, насколько это трудно, хотя, если Вас посетит правильное озарение, Вы сможете решить головоломку прежде, чем заглянете в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 153.

17

Поймай пучеглазого монстра

На планете Чет-нечет самым популярным домашним животным был Пум (маленький пучеглазый монстр), по характеру подобный земной собаке, только гораздо меньше поддающийся дрессировке. На рисунке внизу Вы видите план городских улиц на Чет-нечете. Чет-нечетанин, на плане обозначенный «Ч», пытается поймать своего питомца Пума на перекрестке к юго-востоку от себя.



Положите копеечную монету на кружок «Ч» и десять копеек на «Пума». Теперь перед Вами занятная игра для двоих друзей. Ее правила просты:

1. Игроки ходят по очереди, один передвигает копейку, другой — десять копеек. Чет-нечетанин («Ч») всегда ходит первым.

2. Каждый ход позволяет пройти одну сторону одного квадрата в любом направлении.

3. Чет-нечетанин поймал Пума, если он положит копейку поверх десяти копеек.

4. Чет-нечетанин выигрывает, если он сможет поймать Пума за 50 или менее своих ходов. Пум выигрывает, если за это время его не поймали.

Начав игру, Вы через некоторое время поймете, что поймать монстра не так уж и просто. Загнать зверюгу в угол, кажется, невозможно. Как бы то ни было, но существует тайная стратегия, которая не позволяет хозяину слишком быстро поймать своего питомца. Загляните в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 155.

18

Крестик — нолик — человечек

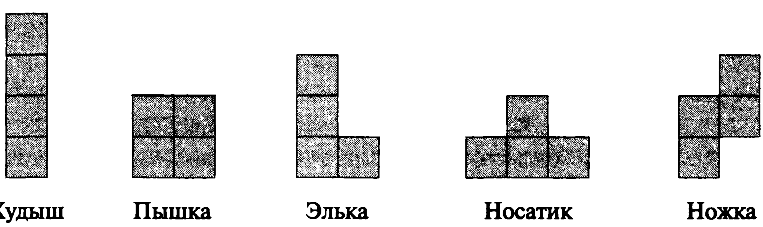
Если Вы не слышали о полимино, значит, Вы пропустили одну из наиболее захватывающих областей современной развлекательной математики. Артур Кларк был настолько очарован ими, что он описал их в своем романе «Земная империя» как символы комбинаторных возможностей жизни. В его книге «Выход на орбиту» (Arthur C. Clarke, «Ascent to Orbit») Вы найдете главу под названием «Помогите! Я — пентоминоман!» Помните игру в шахматы, в которую играл HAL 9000, компьютер из фильма «2001: космическая одиссея»? Сначала в картине снимали игру в пентомино, но по различным причинам ее заменили на шахматы.

Пентомино — это один из видов полимино. «Полимино?» — спросите вы. Это конструкция из единичных квадратов, соединенных своими сторонами. Один квадрат называется мономино. Два составляют домино. Три, соединенные двумя различными способами, составляют два тромино. Четыре квадрата соединяются в пять разных тетромино, а также существует двенадцать различных пентомино из пяти квадратов каждое. Эту терминологию изобрел профессор Соломон В. Голомб, из университета Южной Калифорнии, который первым детально изучил полимино. Он автор целой книги под названием «Полимино» (Solomon W. Golomb, «Polyominoes», 1965), которая, к сожалению, больше в печати не выходила.

А существует ли формула, которая позволяет сразу узнать число различных n-мино для каждого n? Наверное, нет; это одна из самых сложных проблем в комбинаторной геометрии. Лучшие компьютерные алгоритмы перечисления всех полимино для данного n рекурсивны — они сначала определяют все полимино для $n - 1$, прежде чем перейти к n. Никто пока не обнаружил, как найти количество различных n-мино менее трудоемким способом.

Фрэнк Харари, специалист по теории графов из университета Мичигана, любит представлять полимино как n-клеточных «животных». Большинство задач с полимино связано с составлением схем для заданной группы животных, но в последние несколько лет Гэрари изобрел обескураживающе большое количество простых и очень веселых игр с этими зверушками. Некоторые из игр затрагивают глубинные вопросы комбинаторики, еще не нашедшие своего ответа.

Для этой игры нам понадобится лист бумаги как для игры в крестики-нолики. Основная задача двух игроков — по очереди отмечать клетки квадратной матрицы ноликами и крестиками, но вместо того чтобы поставить три знака в ряд, они пытаются получить определенное животное или его зеркальное отражение. У каждой игры есть своя обратная версия — Гэрари называет ее игрой на ускользание — в ней первый, у кого получилось животное, проигрывает. Анализировать игры избегания, как правило, гораздо труднее.



Пять четырехклеточных животных

Допустим, животное, с которым мы будем играть — это «Ножка», как его называет Гэрари (см. рисунок выше). Играют на поле третьего порядка (квадрат три на три). Первый игрок, у которого получится Ножка, в любой из своих зеркальных форм, выигрывает. Когда я впервые опубликовал эту игру в журнале «Scientific American» в 1979 году, и Гэрари, и я полагали, что игра заканчивается вничью, если противники играют рационально (то есть стараются выиграть), но Теренс Мартин, тогда студент Гэрари в Энн-Арбор, нашел простую стратегию, с помощью которой первый игрок может всегда побеждать.

Вам понравится играть в «Ножку» с друзьями. Посмотрим, сможете ли Вы найти выигрышную стратегию первого игрока. Она описана в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 157.

19

Вскрыть за 60 секунд

У каждого офицера на космическом корабле «Бублик» есть личный сейф для хранения ценностей. На рисунке показана схема кнопок каждого сейфа. Офицер выбирает комбинацию из трех букв, а затем программирует замок так, что он открывается, только если три буквы нажаты в правильном порядке.

A	B	C	D	E	F	G
H	I	J	K	L	M	N
O	P	Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z	•	••

Повторяющиеся буквы разрешаются, так что число возможных троек составляет 26 × 26 × 26 = 17 576. Сейф открывается нажатием кнопки с одной точкой. Кнопка с двумя точками закрывает его. Офицеры могут изменять троичный шифр, когда захотят.

Таня, юная дочь полковника Лоска, главы корабельного компьютерного подразделения, читал биографию великого физика двадцатого века Ричарда Фейнмана. Еще молодым человеком, в Лос-Аламосе, где ученые работали над созданием первых атомных бомб, Фейнман стал искусно отгадывать комбинации цифр, которые его сотрудники использовали для офисных сейфов. Он любил оставлять в их сейфах коротенькие записочки с предупреждениями о необходимости более жестких мер безопасности.

Таня вскоре принялась развлекаться, делая то же самое на «Бублике», чем ужасно докучала членам команды. Офицеры обычно использовали шифры из трех букв, которые легко запоминались и имели особое значение для них самих. Название бортового компьютера VOZ было популярным словом. Оно было получено сдвигом на 14 позиций вперед в английском алфавите названия HAL — компьютера из известного романа Артура Кларка. А мичман Палвер, например, чрезвычайно увлекался научной фантастикой польского писателя Станислава Лема. Однажды Таня прокралась в его комнату, и, конечно же, LEM открыл сейф. Если Вы сдвинете каждую букву в слове LEM вперед на 14 позиций, Вы получите ZSA, имя актрисы Жа Жа Габор (Zsa Zsa Gabor), популярное слово-шифр среди тех членов экипажа, которые были любителями черно-белого кино.

Таня составила список необычных слов из трех букв, таких как PYX, CWM, PSI, GRR, TCH, PST, и аббревиатур вроде IBM, USA, FBI, RBI, и так далее. Ей нужно было всего несколько минут, чтобы пробежать по всему списку и понять, откроет ли очередной сейф какое-нибудь слово из списка.

— Ты оказала нам всем большую услугу, — сказал полковник Лоск дочери. — Меры безопасности на корабле стали гораздо жестче с тех пор, как ты принялась угадывать секретное слово каждого из нас. Офицеры сейчас намного сильнее заботятся о случайном составе слова-ключа.

— А ты уже выбрал случайную комбинацию для последнего ключа? — спросила Таня.

— Нет. Я выбрал обычное математическое слово. В нем буквы, расположенные только на серых клавишах.

Таня подошла к сейфу на стене и посмотрела на кнопки.

— Но как такое может быть? Ведь здесь все гласные — на белом. Даже «Y» белый.

— Я знаю, — сказал полковник Лоск. — Это и вправду удивительное совпадение, что A, E, I, O, U, и Y стоят на нечетных позициях в алфавите. Тем не менее, существует распространенное слово из трех букв — ты постоянно слышишь его от меня — и все его буквы находятся на серых клетках этой панели.

А Вы уже догадались, что это за слово? Оно находится в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 160.

20

Любовь у полиминойцев

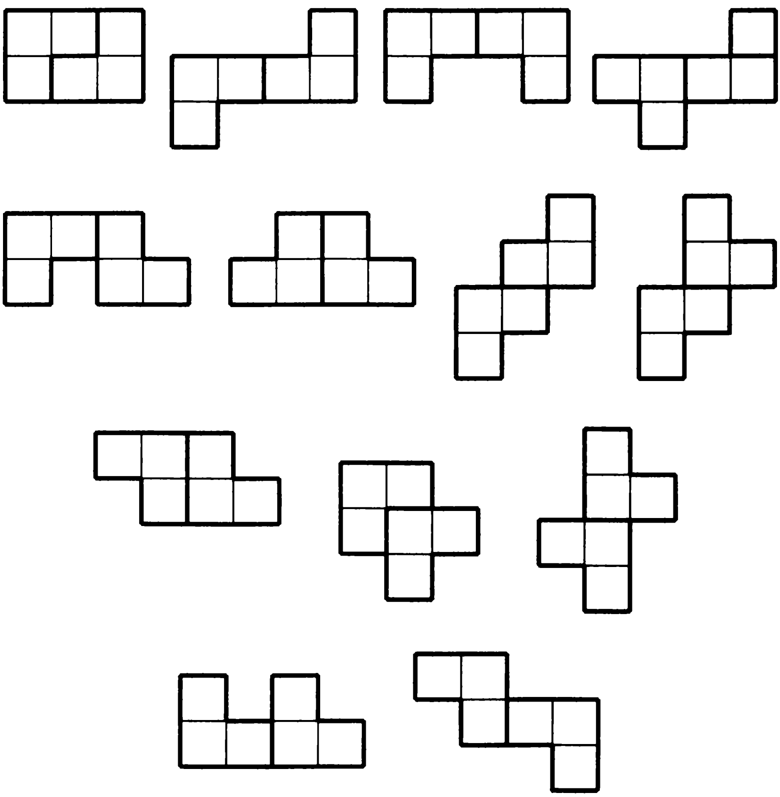
Вы, должно быть, помните, что в первой главе я рассказывал о революционном открытии ведущего японского генетика, доктора Митсу Матсу. Используя новейшие методы генной инженерии, доктору Матсу удалось создать фактически двухмерные микроорганизмы, способные жить и размножаться в жидких монослойных культурах, то есть культурах всего лишь в одну молекулу толщиной. Они населяют ту увлекательнейшую пограничную нишу, которая находится между неживой средой кристаллов и органическими формами жизни. Я рассказывал об этих микроскопических существах, созданных великолепным гением доктора Матсу и названных им «реплитки», потому что они воспроизводят сами себя делением на четыре свои уменьшенные копии.

Со времени опубликования отчета о них доктор Матсу продолжил свои сенсационные исследования. В начале этого года он успешно закончил создание однослойных организмов в форме плоских полимино, разновидности многоугольника, которые обсуждались в задаче 18. Определить полимино легко. Оно представляет собой многоугольник, сложенный из одинаковых единичных квадратов, соединенных своими сторонами.

Полиминойцы, а именно так их назвал доктор Матсу, «спариваются», соединяясь в полимино большего размера. Как и следовало ожидать, спариваться полиминойцы могут только с особями своего размера и формы. (Зеркальное отражение полимино не считается другим.)

После обмена генетической информацией две копии отделяются друг от друга. Каждая из них растет, добавляя новые элементарные ячейки, пока не станет в два раза больше; тогда она снова распадается надвое, подобно амебе.

На рисунке ниже показано 13 различных способов, которыми изогнутые тромино (один из двух возможных видов трехклеточного животного) могут спариваться по двое, чтобы создавать 13 различных гексомино, или 6-элементные формы. На самом деле, существует и 14-й способ соединения двух особей, не показанный здесь. Насколько быстро Вы можете определить, какой вид отсутствует? Иными словами, нарисуйте гексомино, кото-



рое не было бы результатом вращения или зеркальным отражением любой из 13 фигур, показанных на рисунке, но которое можно разделить на два изогнутых тромино. Если у Вас не получится, загляните в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 162.

21

21

Викторина внутренних планет

Для разнообразия испытайте Ваш интеллект на этих головоломных вопросах о четырех планетах, которые находятся ближе всего к Солнцу.

1. **Меркурий.** Место событий многих научно-фантастических рассказов — «сумеречная зона» Меркурия — кольцеобразная область вечного сумрака между пылающей горячей стороной Меркурия и его ледяной стороной вечной ночи. Вот несколько характерных примеров:

Ларри Нивен, «Самое холодное место» (Larry Niven, «The Coldest Planet»),

Алан Нурс, «Через Солнечную сторону» (Alan Nourse, «Brightside Crossing»),

Роберт Сильверберг, «Сумеречный пояс» (Robert Silverberg, «Twilight Belt»),

Артур Дж. Кокс, «Сумеречная планета» (Arthur J. Cox, «The Twilight Planet»).

Тема сумеречной зоны Меркурия полностью исчезла из современной научной фантастики. Почему?

2. **Венера.** Вы находитесь на поверхности Венеры. Густые облака скрывают звезды, но Вы знаете, что Земля находится прямо у Вас над головой, а Солнце находится в западной части горизонта. Солнце восходит или садится?

В соответствии с вращением планеты, Земля будет двигаться на восток или на запад по венерианскому небу?

3. **Земля.** Представьте себе, что Земля уменьшилась до размеров бильярдного шара, и все ее горы и долины

уменьшились пропорционально. Протрите шар полотенцем, удаляя остатки соленой воды, затем пробежитесь пальцами по поверхности шара. Вы сможете прощупать горы и бассейны океанов?

Если орбиту Земли начертить в масштабе на листе бумаги размера книжной страницы, например этой, сможете ли Вы сказать, что этот путь имеет форму эллипса?

4. **Марс.** Бьюсь об заклад, Вы не знали, что лица двух марсианских чудовищ нанесены на долларовую купюру. Конечно, никаких форм жизни сейчас на Марсе нет, так что это, должно быть, существа, населявшие эту планету еще до того, как на ней закончилась вода. Чтобы найти этих монстров, Вы должны сложить купюру определенным образом.

Ответы на эти вопросы и еще четыре новых загадки Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 164.

22

22

Загадки Плоской планеты

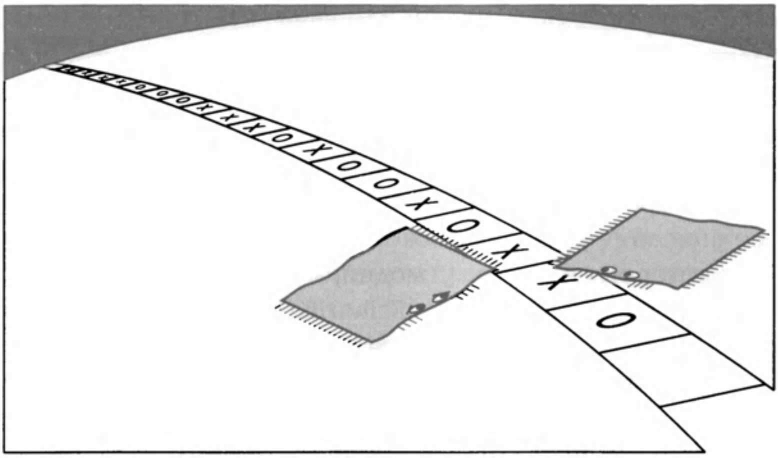
Из романа Артура Кларка «Конец детства» (глава 18) (Arthur C. Clarke, «Childhood's End») мы узнаем о планете Гексанеракс 2:

> *Планета была совершенно плоская. Непомерное тяготение давным-давно придавило и сровняло с поверхностью былые горы ее огненной юности — горы, чьи самые могучие вершины и тогда не превышали нескольких метров. И, однако, здесь была жизнь: все покрывали мириады словно бы с помощью линейки и циркуля вычерченных узоров, они двигались, переползали с места на место, меняли окраску. Это был мир двух измерений, и населяли его существа толщиной в малую долю сантиметра.* [3]

Возможно ли, чтобы разумные формы жизни эволюционировали в двухмерный мир? Если Вас беспокоит нереальность плоских форм, представьте их себе (как в описании Кларка) толщиной в малую долю сантиметра, подобно листкам картона, скользящим по плоской поверхности.

Хотя несколько лет назад возникло предположение, что никакой плоский мир не может быть реален физически. В 1884 году Эдвин Эббот написал свой знаменитый роман «Флатландия» (Edwin Abbott, «Flatland»), а в 1907 Чарльз Хинтон придумал целую, весьма правдоподобную, плоскую вселенную, описав ее в книге «Случай во Флатландии» (Charles Hinton, «An Episode of Flatland») с подзаголовком «Как плоский народ открыл третье измерение». Оба романа — занимательное чтение в жанре фан-

[3] Пер. Норы Галь.



тастики. И ни в том, ни в другом всерьез не рассматривается возможность бурного расцвета любой, пускай даже исключительно разумной, формы жизни в двухмерном мире.

Бомба взорвалась в 1979 году, когда Александр Киватин Дьюдни, специалист по теории вычислительных систем из университета Западного Онтарио, опубликовал свою удивительную работу «Двухмерная наука и технология» (Alexander K. Dewdney, «Two-Dimensional Science and Technology»). В этой книге он в изумительных деталях показал, как логически возможно существование двухмерного мира — вселенной, которая питается солнечной энергией, в которой действуют законы физики, материя состоит из атомов, погода подобна земной, жизнь разумна, а машины могут делать почти все то же самое, что и наши машины. Моя колонка в «Scientific American» в июле 1980 года, посвященная этой теме, вызвала целую волну откликов, даже ведущих ученых, с сотнями находок из области плоских технологий.

Используя эти материалы, а также несколько собственных находок, Дьюдни в 1984 году написал одно из самых поразительных и в высшей степени талантливых произведений в истории научной фантастики: роман

«Планиверсум» (Alexander K. Dewdney, «The Planiverse»)[4]. Сюжет этой увлекательной, богато иллюстрированной книги, рассказывает о компьютерном контакте автора и его студентов с двухмерным существом по имени Индюкд (замените букву «к» на «ь», и Вы получите Дьюдни наоборот). Индюкд дает им, в конце концов, детальное описание круглой плоской планеты Арда, у внешнего края которой он и жил. (Дьюдни, между прочим, вел рубрику киберразвлечений в «Scientific American».)

Мы, трехмерные существа, полагаем, что в математические игры удобно играть на бумаге или двухмерных досках. Естественно, можно допустить, что обитатели плоской вселенной находят удобной игру на одномерных «досках», т. е. на линиях. Как это ни удивительно, но у многих наших игр есть нетривиальные одномерные аналоги. В своем романе Дьюдни рассказывает об одномерных го, а я, в своей колонке, посвященной плоской вселенной, — о линейных шашках и шахматах. Даже линейные крестики-нолики совсем не банальны. Двухмерные существа различают значки по длине линий, пользуются карандашами двух цветов или фишками разного цвета и формы.

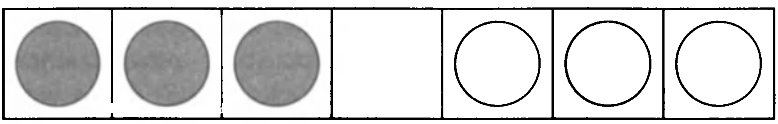
Насколько мне известно, игру в крестики-нолики никто полностью не анализировал. Игроки по очереди расставляют «X» и «O» в конечном ряду n клеток; выигрывает тот, кто первым сможет составить ряд из трех значков. Второй игрок ни за что не сможет выиграть, если первый не поддастся, но он может свести игру вничью. Это также справедливо и для перевернутой игры — первый, кто составит ряд из трех значков, проигрывает.

Если оба игрока используют один и тот же значок, например «X», это называется одноцветными крестиками-ноликами. Ничья, очевидно, невозможна. Первый игрок может выиграть на любом поле с нечетным ко-

[4] *Прим. пер.:* рус. пер. *Дьюдни А.* Планиверсум. Виртуальный контакт с двухмерным миром. М.: Книговек, 2010.

личеством клеток, занимая клетку посередине, а затем, расставляя значки симметрично противоположно ходам своего соперника до тех пор, пока он не увидит возможность выигрыша. Но если игровое поле состоит из четного числа клеток, то игру в ее обычном виде проанализировать чрезвычайно сложно; с перевернутой версией игры (как на поле с четным, так и с нечетным количеством клеток) дело обстоит еще сложнее. Компьютер может определить победителя на маленьком игровом поле, однако общая стратегия игры (если такая вообще возможна) остается не выявленной как для прямой версии на поле с четным количеством клеток, так и для версии перевернутой, на обоих видах поля. (Вы можете больше прочесть об этой игре в главе 12 моей книги «Путешествия во времени и другие математические неясности» («Time Travel and Other Mathematical Bewilderments»).)

A B C D E F G



Индюкд утверждал, что жителям его планеты известны сотни привычных игр с фишками на линейной «доске». Возьмем, например, ряд из семи клеток, такой, как показан на рисунке вверху. Положите по одной копейке в клетки A, B и C, как показано на рисунке. В клетки E, F и G — по одному гривеннику. Вы можете ходить одним из двух способов — или скользнуть в соседнюю свободную клетку, или перепрыгнуть (как в шашках) на пустую клетку. Монетки, через которые Вы перепрыгнули, с поля не убирают. Задача: поменять местами копейки и гривенники за наименьшее число ходов.

Возможный минимум ходов: 15. А Вы сможете совершить этот обмен за 15 ходов, не заглядывая в раздел первых ответов?

См. ответ на стр. 168.

23

23

Ножницы Дирака

Пол Адриан Морис Дирак был одним из величайших творческих гениев современной квантовой теории. В этой главе я хотел бы предложить Вам восхитительную топологическую головоломку с использованием пары ножниц и некоторого количества веревки. Дирак изобрел ее, когда ему было немногим больше двадцати лет, как подспорье в объяснении одного из самых странных свойств электрона.

Если повернуть стул на 360 градусов, он возвращается в прежнее положение по отношению ко всему, что находится в комнате. Но если электрон вращается на 360 градусов, он не возвращается в то же положение, что и раньше. Нужно сделать еще один полный оборот; всего получится 720 градусов, чтобы вернуть его в прежнее положение по отношению к его окружению.

Почему это так, понять невозможно, если не вдаваться в современные исследования по математике и квантовой механике. Обнаружив, что его студенты первого года были сконфужены таким странным свойством элементарных частиц, Дирак придумал способ продемонстрировать нечто аналогичное. Я впервые узнал о ножницах Дирака, а именно так была названа его головоломка, в 1959 году, когда вел колонку математических игр в «Scientific American». Я написал Дираку об этом, и одним из моих драгоценных приобретений стал его немногословный ответ из Кембриджского университета:

Уважаемый г-н Гарднер!

Я сожалею, что был слишком занят, чтобы ответить на ваше письмо раньше. Я впервые задумался о задаче с веревками году в 1929. Я использовал ее, чтобы проиллюстрировать свойство вращения, при котором два оборота тела вокруг оси могут непрерывно превращаться, через набор движений, каждое из которых завершается в своей исходной позиции, в полное отсутствие движения.

Это является следствием того свойства вращений, при котором вращающееся тело может обладать половиной кванта момента импульса, но не может обладать иной долей кванта.

С уважением, П. А. М. Дирак

В последних строках Дирак ссылается на то, что спин всех частиц, известный как фермионов, составляет плюс или минус $^1/_2$, в зависимости от направления вращения. К сожалению, здесь нет возможности поговорить о тайне спина частицы, или о том, как Джеймс Блиш использует ее в своих научно-фантастических романах, описывая работу своего антигравитационного устройства, «вращевращателя». Спин — это нечто смутно напоминающее вращение на вершине частицы, но это невозможно представить или объяснить с точки зрения классической физики.

Теперь, пожалуйста, прервитесь ненадолго и возьмите пару ножниц и моток веревки. Вам понадобится два куска, каждый длиной около десяти метров.

Проденьте каждый из них через ручки ножниц, затем свяжите концы так, чтобы получилась петля. Встаньте на петли, как показано на рисунке, так, чтобы, когда Вы поднимете ножницы на уровень лица, петли образовали бы четыре не спутанных шнура, идущие от ножниц к полу.

Держите ножницы вертикально, острием в потолок, а затем поверните ножницы на 360 градусов (в любом направлении) вокруг вертикальной оси. При этом шнуры, конечно же, закрутятся.

23

Можно ли раскрутить шнуры, никак не поворачивая ножницы? Вы можете переносить ножницы в пространстве и трогать веревку, как Вам захочется (но, конечно же, они должны оставаться под Вашими ступнями), но ножницы должны всегда сохранять ту же ориентацию в пространстве. Ответ — в этих условиях распутать веревки невозможно. Вы сможете по-другому запутывать веревки, но никакое количество манипуляций с ними не приведет их обратно в исходное состояние.

После того, как Вы убедитесь в невыполнимости задачи, вернитесь в исходное, не спутанное, положение. Теперь сделайте ножницами на два полных оборота (720 градусов) в любом направлении. Верите или нет, но сейчас можно вернуть ножницы и веревку в исходное состояние, никак не поворачивая ножницы! Для тополога это означает, что после двух полных оборотов ножниц топологическая структура ножниц и веревки по отношению к Вам и всему остальному в комнате не была изменена.

Если у Вас не получились манипуляции с ножницами, распутывающие веревку, помните, ножницы должны быть всегда направлены острием вверх, а не поворачиваться произвольным образом. Вы обнаружите удивительное решение в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 170.

24

Выстрелы «в яблочко» и «в молоко»

Учитывая тот факт, что в научно-фантастических историях по всему земному шару тысячи предсказаний делаются каждый год, неудивительно, что среди них встречаются случайные попадания поразительной точности, подобно стрельбе из дробовика в цель. Есть, конечно же, и еще более колоссальные промахи. Иногда попадания и промахи сопровождают друг друга. Жюль Верн делал фантастический выстрел, рассказывая о старте первого космического корабля к Луне из некой точки во Флориде, когда его корабль стартовал из гигантской подземной пушки. Сотни научно-фантастических рассказов предвосхищали прогулки по Луне. И, насколько я знаю, только один автор догадался, что первая прогулка будет показана с экранов телевизоров на Земле: Артур Кларк в романе «Прелюдия к космосу» («Prelude to space»). Впервые он был опубликован в журнале Galaxy Science Fiction в феврале 1951 года, позже он переиздавался под другими названиями.

Составить полный список удач и промахов Герберта Д. Уэллса — задача не из легких. Его наиболее впечатляющий успех — во вступительной главе книги «Освобожденный мир» («The World Set Free», 1914), — переизданной в моей антологии «Священный жук и другие замечательные опыты в науке» («The Sacred Beetle and Other Great Essays in Science»), — в которой Уэллс рассказывает, как впервые был расщеплен атом. В этом романе Вторая мировая война начинается в сороковых годах, и он содержит красочное описание того, как «атомная бомба» (да, Уэллс использует этот термин!) падает на врага. Но бомба находится у человека, который бросает ее через люк в нижней части самолета.

В своей коллекции пророческих эссе 1902 года «Прозрения» («Anticipations») Уэллс зорко предвидел широкие асфальтовые транспортные артерии, петли транспортных развязок над и под местами пересечения дорог, а также разделяющие барьеры между противоположными направлениями движения. Глава, посвященная приемам ведения войны в двадцатом веке, удивительно точна во многих отношениях, но воздушные сражения происходят на воздушных шарах, а о подводных лодках Уэллс говорил вот что: «Я должен признаться, что мое воображение, несмотря на всю его живость, отказывается видеть какую бы то ни было подводную лодку делающей что-то, кроме удушения ее экипажа, и уходящей в морскую пучину». Справедливо было замечено, что Уэллс чаще попадал «в яблочко» в своих научно-фантастических книгах, чем в научной литературе. В работе «Гражданские силы в Англии и Америке» («Social Forces in England and America»), опубликованной в том же году, что и «Освобожденный мир», он рассказывает об «обуздании атомной энергии, но это будет еще через двести лет».

В течение многих десятилетий я пытался собрать всю серию чудесного журнала «Наука и изобретательство» Хьюго Гернсбека (Hugo Gernsback, «Science and Invention»), особенно его золотого периода — двадцатых годов. Зловещие обложки его выпусков являют собой забавное смешение попаданий и промахов. Среди попаданий: вертолеты, несущие балки для строительства небоскреба, использование огнеметов на войне, и (мое любимое) мужчина и женщина в обнимку, с проводами, подключенными к различным частям их тел для измерения сердцебиения, дыхания, потоотделения и так далее. Это иллюстрация к статье Гернсбека о научном изучении пола и сексуальности. Среди промахов: гигантский роботполицейский и картина того, как выглядит марсианин. «Ральф 124C41+» («Ralph 124C41 +») Гернсбека, вероятно, худшее научно-фантастическое произведение из когда-либо опубликованных (оно заканчивается с ужасным каламбуром о том, что «каждый предусмотрит за каждым»), но и в нем есть несколько самых точных прогнозов, из всех, когда-либо сделанных в такого рода романах.

Если Вас интересуют небывалые промахи в прогнозах будущего, я рекомендую Вам работу Кристофера Серфа и Виктора Наваски «Эксперты говорят: окончательный сборник авторитетных дезинформаций» (Christopher Cerf, Victor Navasky, «The Experts Speak: The Definitive Compendium of Authoritative Misinformation»). Попадания «в точку» авторов научно-фантастических произведений Вы можете найти в статье «Предсказание» («Prediction») в «Энциклопедии научной фантастики» под редакцией Питера Николлса («The Science Fiction Encyclopedia», Peter Nicholls edit.). Ниже я предлагаю Вам выдающиеся экземпляры удивительных догадок писателей — не фантастов из моей коллекции. Посмотрим, сможете ли Вы узнать, кто автор и в каком столетии он творил.

1. «И, наконец, на морском берегу, разбивающем волны,
Платье сыреет всегда, а на солнце вися, оно сохнет;
Видеть, однако, нельзя, как влага на нем оседает,
Да и не видно того, как она исчезает от зноя.
Значит, дробится вода на такие мельчайшие части,
Что недоступны они совершенно для нашего глаза.»

2. «Основные элементы материи, на мой взгляд, совершенно неделимые и нерасширяемые точки; они так разбросаны в беспредельном вакууме, что любые два из них отделены друг от друга определенным расстоянием».

3. «...две маленьких звезды или два спутника, обращающихся около Марса, из которых ближайший к Марсу удален от центра этой планеты на расстояние, равное

трем ее диаметрам, а более отдаленный находится от нее на расстоянии пяти таких же диаметров. Первый совершает свое обращение в течение десяти часов, а второй в течение двадцати одного с половиной часа...»

4. «Если господин Б. выпьет большое количество воды, желчь, что разъедает его внутренности, будет разбавлена, если причина только в желчи; но я подозреваю, что дизентерию вызывают крохотные живые организмы, а как убить их, мне не ведомо».

5. «Я знаю способ, позволяющий достаточно просто услышать, что говорят за стеной, толщиной в ярд... Я могу заверить читателя, что мне удалось, с помощью протянутого провода, распространить звук на очень значительное расстояние в один миг или со скоростью, близкой к движению света ...и это не только по линии прямой, или непрерывной, но по линии, изогнутой под многими углами».

6. «Такие изменения в поверхностных частях земного шара, полагаю, вряд ли случились бы, если бы Земля была твердой в центре. Поэтому я представил, что внутренние ее части могут быть жидкостью, более плотной и с большим удельным весом, чем у любой из твердых частиц, известных нам; и которые, следовательно, могут плавать на поверхности или в самой этой жидкости. Таким образом, поверхность земного шара может быть оболочкой, способной разрушаться и утрачивать целостность под яростными движениями жидкости, на которой она покоится».

7. «Не слишком ли смелым было бы вообразить, что, по прошествии значительного отрезка времени, с тех пор как мир начал существовать, возможно, за миллионы веков до начала истории человечества — не слишком ли смелой была бы идея, что все теплокровные животные возникли из одной живой нити, которую Великая Первопричина наделила животным началом и властью об-

ретения новых частей, снабдила новыми наклонностями, движимых раздражениями, ощущениями, желаниями и связями, и, таким образом, дала ей способность совершенствовать себя в своей внутренней деятельности и передавать эти улучшения другим поколениям своего потомства, и что мироздание не имеет конца?»

8. «Да и сам я, дерзновенный взор в грядущее вперив,
Созерцал Виденье мира и без счета дивных див!
Караван судов торговых плыл среди небесных круч,
Приземлялись с ценным грузом лоцманы багровых туч.
Воздух задрожал от гула, пала страшная роса:
Бились в вышине армады, сотрясая небеса.
Из конца в конец над миром южный ветер пролетал,
В клочья рвал знамена наций громовой ревущий шквал.
Вот умолкли барабаны; стяги ратные легли
Пред Парламентом Народов, Федерацией Земли,
Дабы распри усмирились здравым смыслом большинства
В мире, где ненарушимы суверенные права» [5].

См. ответ на стр. 174.

[5] Пер. Д. Катара.

25

Фларп снова подбрасывает монетку

Лейтенант Фларп, штурман космического корабля «Бублик», мичман Палвер и Таня только что расправились с первой порцией своих напитков в просторном холле «Бублика», крупнейшего корабля планеты Земля. Тане недавно исполнилось двадцать — это была девушка с льняными волосами, настолько же красавица, насколько и умница. Ее отец, полковник Лоск, возглавлял компьютерный отсек космического корабля.

Фларп достал из кармана монету в пять долларов. Это была большая монета, изготовленная из легкого металлического сплава.

— Давайте подбросим и узнаем, кто платит за следующую порцию выпивки: ты или я, — сказал Фларп Палверу. — Но я подброшу монету не один раз, а пять. Если орел выпадет четное число раз, плачу я. Если нечетное — платишь ты.

— Держи карман шире! — воскликнул Палвер. — Ты, наверное, думаешь, что я болван. Есть всего три варианта выбросить нечетное число орлов — один, три или пять. И только два — выбросить четное число: два орла или четыре. Нечетные выигрывают три к двум в твою пользу.

— Я не думаю, что ты болван, — сказал Фларп с улыбкой. — Но я думаю, что ты не очень-то хорошо разбираешься в теории вероятности.

Фларп взял бумажную подставку из-под своего стакана и перевернул ее.

Список Фларпа

	1.	О	О	О	О	О
✓	2.	О	О	О	О	Р
✓	3.	О	О	О	Р	О
	4.	О	О	О	Р	Р
✓	5.	О	О	Р	О	О
	6.	О	О	Р	О	Р
	7.	О	О	Р	Р	О
✓	8.	О	О	Р	Р	Р
✓	9.	О	Р	О	О	О
	10.	О	Р	О	О	Р
	11.	О	Р	О	Р	О
✓	12.	О	Р	О	Р	Р
	13.	О	Р	Р	О	О
✓	14.	О	Р	Р	О	Р
✓	15.	О	Р	Р	Р	О
	16.	О	Р	Р	Р	Р
✓	17.	Р	О	О	О	О
	18.	Р	О	О	О	Р
	19.	Р	О	О	Р	О
✓	20.	Р	О	О	Р	Р
	21.	Р	О	Р	О	О
✓	22.	Р	О	Р	О	Р
✓	23.	Р	О	Р	Р	О
	24.	Р	О	Р	Р	Р
	25.	Р	Р	О	О	О
✓	26.	Р	Р	О	О	Р
✓	27.	Р	Р	О	Р	О
	28.	Р	Р	О	Р	Р
✓	29.	Р	Р	Р	О	О
	30.	Р	Р	Р	О	Р
	31.	Р	Р	Р	Р	О
✓	32.	Р	Р	Р	Р	Р

— Одинаково возможные результаты пяти бросков — два к тридцати двум. Я перечислю их все.

Фларп записал все 32 комбинации. Он справился быстро, поскольку воспользовался простым приемом. Он чередовал по одной О и Р (орел и решка) в пятой колонке, в четвертой колонке чередовались пары О и Р, четверки — в третьей колонке, группы по восемь — во второй и две группы по 16 — в первом столбце. Затем он пометил все комбинации с четным числом орлов, как показано на схеме Фларпа, в том числе, конечно же, и случай РРРРР с четным числом 0.

Палвер еще раз сверил метки. Их было 16, ровно половина от 32. Когда сбитый с толку Палвер принялся изучать список, Таня расхохоталась.

— Вам не стоило так себя утруждать, — сказала она Фларпу. — Есть до смешного простой способ доказать, что это честное пари. Нужно записать всего одну комбинацию.

А Вы догадались, что Таня имеет в виду? Если нет, обратитесь к разделу первых ответов.

См. ответ на стр. 176.

26

Ночной калейдоскоп

Хромо — небольшая планета, на которой обитают три вида гуманоидов. Они различаются цветом кожи: розовые, зеленые и синие.

Сейчас там проводится громкое судебное разбирательство по делу об убийстве. Показания дает офицер полиции. Все полицейские на планете, конечно же, синие.

— На пульт дежурного поступило сообщение, — сказал полицейский, — о том, что в розовом районе города кричала женщина; на нее наверняка было совершено нападение. Я подъехал к ее дому как раз в тот момент, когда из дверей выбегал зеленый мужчина. Я погнался за ним, но ему удалось скрыться.

— Вы уверены, что это был зеленый мужчина, — спросил представитель защиты. Обвиняемый в убийстве женщины был зеленым.

— Ну, — сказал полицейский, поглаживая свой синий подбородок. — Я не могу сказать, что я абсолютно уверен. Время было за полночь, а фонари на этой улице не такие уж и яркие. Преступник мог быть и синим.

Тогда адвокат подсудимого представил суду результаты теста, целью которого было проверить способность офицера отличать синий цвет от зеленого (он никогда не путал зеленый или синий с розовым) при освещении, бывшем на улице в ночь убийства. Полицейский точно определили цвет кожи в 80 процентах случаев. Иными словами, он ошибся один раз из пяти.

Следующие несколько дней присяжные с жаром обсуждали вопрос: «Какова вероятность того, что мужчина, которого видели убегающим с места преступления, был все же синим».

— Не вижу никакой сложности, — сказала одна из розовых присяжных. — Полицейский правильно назвал цвет кожи 4 раза из пяти и ошибся 1 раз из пяти. Судя по его словам, тот мужчина был зеленым. Значит, возможность того, что он был зеленым, составляет 4/5, а того, что синим — 1/5.

— Вы неправы как никогда, — сказал зеленый присяжный. — Вы забываете, что в этом городе число синих превосходит число зеленых в отношении 85 : 15.

— Мне это известно, — сказала розовая присяжная. — И что с того? Как это может повлиять на нашу оценку самой возможности ошибки полицейского, сказавшего, что он видел зеленого мужчину.

Кто из присяжных прав? Это очень коварный вопрос, который, похоже, доставит Вам немало головной боли, пока Вы будете обдумывать его. Тот факт, что в городе на каждых 15 зеленых жителей приходится 85 синих, представляет собой вводную информацию, которая в теории вероятности Байеса называется «основным показателем». Релевантна ли она вопросу? Или можно считать, подобно розовой даме из числа присяжных, что беглец был синего цвета с вероятностью 1/5? Анализ нашей задачи дан в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 177.

27

Еще раз, как Вы сказали?

Прошел почти год с тех пор, как я в последний раз навещал моего друга Фреда («Как-Вы-сказали?») Фланагана, известного писателя-фантаста, который жил на берегу Парадокс Лэйк, в округе Эссекс, Нью-Йорк. Фред всегда был хорошим источником забавных фактов. Он не только был обладателем обширной коллекции умопомрачительных парадоксов, но и сам выдавал потоки парадоксальных замечаний.

Когда я в последний раз видел Фреда (см. задачу 14), он обрил голову и разукрасил себя пергидрольно-белой бородой, но когда я попал к нему в ноябре, он сменил локализацию растительности. Его лицо было чисто выбрито, а густые черные волосы спадали ниже плеч. Большой значок, приколотый на грязном свитере, гласил:

BUT = TRUTH

— Не понял, — сказал я.

— Би-ю-ти, красота, — ответил Фред. — Это та чудная строка из Китса.

— Я никогда не понимал, что имел в виду Китс, — сказал я, улыбаясь.

— Я тоже в этом сомневался, — сказал Фред. — А теперь я не так уверен в этом.

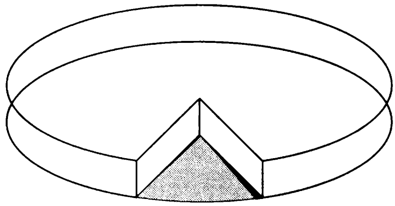
Я кивнул в сторону большой квадратной доски на стене. Картинка, что изображена на рисунке внизу, на доске была выведена тяжелыми черными линиями.

— Что все это значит?

— Это потерянный кусочек пирога, — сказал Фред, подходя к рисунку, — но где же он?

Он повернул доску на 180 градусов (доска крепилась к стене посередине). Кусочек нашелся!

— Какая восхитительная иллюзия! — Воскликнул я.



— Вовсе нет, — ответил Фред. — Она просто так выглядит.

— Как ты сказал?

— Я имею в виду, что наш мозг привык видеть пироги сверху — и никогда — перевернутыми снизу, так что это дает нам лучшую из возможных в свете опыта уверенностей. Вот почему кратеры на Луне выглядят как горы, если посмотреть на снимок Луны, где солнечный свет падает на них снизу.

Из всех странных парадоксов, рассказанных Фредом в тот холодный ноябрьский день, самым странным был парадокс ходов шахматного короля на доске 3 × 3. Вам придется тщательно придерживаться описания, потому что это не простой аргумент.

Взгляните на доску, показанную на рисунке ниже. Король не ходит по диагонали – ему доступны только верх, низ, лево и право, и лишь на одну клетку за один ход. Обозначим его ходы: В, Н, Л, П.

Король может сделать ход и уткнуться в границу доски.

Когда это происходит, король остается на той же клетке, а мы подчеркиваем ту букву, которая «привела» к столкновению. Например, если король начинает с клетки 4 и движется Н-<u>Н</u>, это означает, что сначала он переходит на 7, а затем пытается спуститься снова, но упирается в границу. Если король начинает с клетки 4 и движется Л-Л, он натыкается на границу дважды в одном и том же направлении, оставаясь на 4. Если он начнет ходить с клетки 3 и будет двигаться В-П, то он наткнется на границу дважды в двух разных направлениях, оставаясь на 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Предположим, что кто-то в другой комнате поставил короля на любую клетку и сделал два случайных хода. Вам сказали только их обозначения. Можете ли Вы всегда определить номер клетки, на которой король теперь стоит?

Иногда — да. Например, если даны ходы В-Л, Вы знаете, что король должен быть на клетке 1, потому что эта последовательность ходов не может привести короля ни на какую другую клетку.

Теперь — два ключевых определения. Мы называем клетку *неразрешимой*, если нет двухходовой последовательности, из которой мы можем заключить, на какой клетке оказался король. Если такая последовательность есть, клетка называется *разрешимой.*

Предположим, человек в другой комнате говорит Вам, что он передвинул короля дважды, и теперь он стоит на неразрешимой клетке. Возможно ли, что он говорит правду, делая такое заявление? Перед Вами доказательство того, что это невозможно, потому что нет неразрешимых клеток, предложенное Фланаганом.

Ни одна угловая клетка не может быть неразрешимой. В-Л делает клетку 1 разрешимой, так как эта последовательность ходов не может привести короля на любую другую клетку. В-П делает разрешимой клетку 3. Н-Л составляет разрешимость клетки 7, а Н-П — клетки 9. Король не может быть на угловой клетке.

Ни одна из клеток по сторонам (2, 4, 6, 8) также не может быть неразрешимой. Рассмотрим В-В. Эта комбинация не может означать переход с 4 на 1 или с 6 на 3, потому что в каждом случае король встал бы на угловую клетку, а мы исключили возможность того, что король находится в углу. В-В может означать только то, что король идет с клетки 5 на 2, что делает клетку 2 разрешимой. Аналогичные рассуждения составляют разрешимость клетки 4 (Л-Л). Клетка 6 разрешима путем (П-П), а 8 разрешима при Н-Н. Король не может стоять на клетках по сторонам.

Остается только клетка 5. А поскольку мы заключили, что король должен стоять на клетке 5, она тоже стала разрешимой. Все клетки разрешимы. Человек, который говорит, что он поставил короля на неразрешимую клетку, солгал, поскольку мы обнаружили противоречие в его словах.

Настал решающий момент. Доказав, что ни одна клетка не является неразрешимой, Фланаган продолжил доказывать, следуя столь же железной логике, что все клетки, кроме угловых, неразрешимы! Чтобы увидеть как, загляните в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 181.

28

Алиса в Стране пчел

В книгах Льюиса Кэрролла о приключениях Алисы нет пчел, если не считать слонов в первом абзаце главы про насекомых из «Алисы в Зазеркалье». Сначала Алиса приняла их за пчел, потому что она видела издалека, как они хоботками собирали нектар гигантских цветов. Тем не менее, в Стране чудес есть процветающая колония высокоинтеллектуальных пчел.

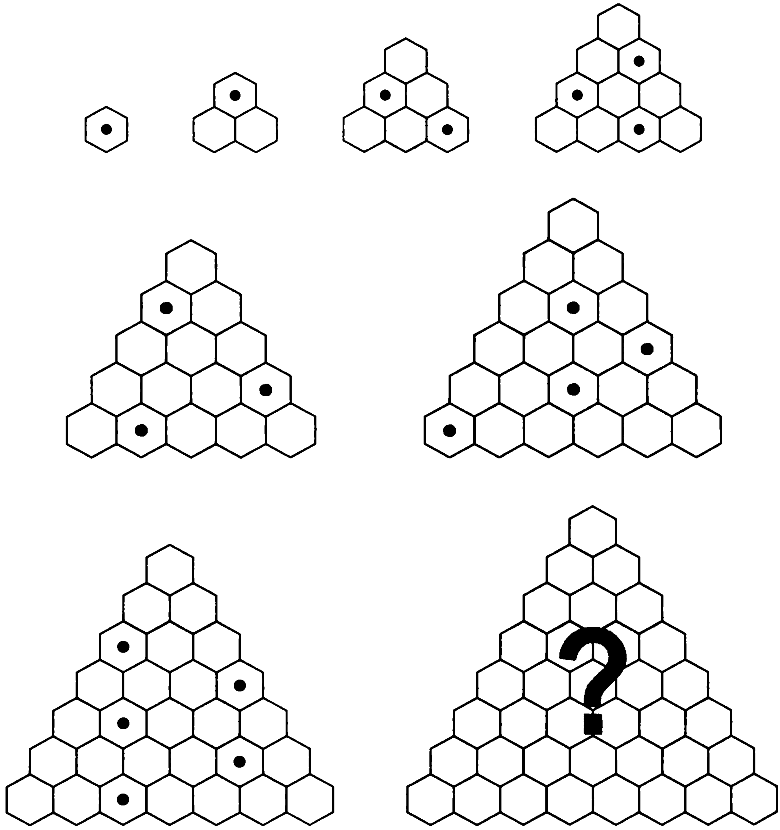
— Как странно, — сказала Алиса, увидев, как две рабочие пчелы играли в шахматы на треугольной доске, где клетки были расположены подобно сотам. — С другой сторона зеркала мы играем в шахматы на квадратах.

— Я в курсе этого, милая, — сказала пчела, игравшая черными фигурами. — Но мы считаем, что с квадратными клетками игра выходит очень унылой. Ваши ладьи движутся только в четырех направлениях. Наши — в шести.

— Господин Доджсон научил меня одной чудесной головоломке на нашей шахматной доске, — сказала Алиса. — Задача требует расставить восемь ферзей на доске так, чтобы ни одна королева не атаковала другую.

— Я прекрасно знаю эту головоломку, — сказал пчела, которая играла белыми. — Для нашей шахматной доски есть аналогичная задача не атакующих ладей.

После окончания игры Герберт — пчела, которая играла белыми — показала Алисе на сотовой доске, что математики из Страны пчел обнаружили в комбинаторной задаче не атакующих пчелиных ладей. На рисунке внизу показано, как можно разместить максимальное число пчелиных ладей на треугольных досках со сторонами



от 1 до 7 клеток так, чтобы ни одна из них не атаковала другую. Наибольшее число, которое можно поставить на доске со стороной в 8 клеток, оставленной пустой, — пять. Можете ли Вы сделать это прежде, чем заглянете в раздел первых ответов?

См. ответ на стр. 183.

29

«Задира» едет в Баффало

Время: середина двадцать первого века. Место: участок светящегося шоссе между Нью-Йорком и Баффало. Это было мое новое внетелесное путешествие в будущее. Я ехал в той самой машине, на «Hustle», или «Задире», в шестом ряду стандартной двадцатиполосной скоростной дороги. Мои читатели, должно быть, помнят, из задачи 8, что мой автомобиль китайского производства был оснащен последней моделью суперкомпьютера, созданного на протеиновой основе. Его сенсорные устройства позволяли ему видеть, слышать и даже чувствовать запахи. Он также мог поддерживать интеллектуальную беседу.

Как обычно, во время длинных скучных поездок мне нравилось, когда «Задира» брал управление на себя. Тогда мы коротали время, задавая друг другу интересные вопросы из области математики, а также развлекались играми в слова. Автомобиль особенно любил загадки дорожной тематики.

— Я только что определил, — отметил «Задира», — что мы проехали половину нашего пути в Баффало. Если быть точным, то разница между расстоянием, которое мы проехали, и расстоянием, которое нам еще предстоит, равно 70 км. Скажите, сколько еще километров мы должны поехать, чтобы увеличить эту разницу до 100 км?

— Это просто, — сказал я. — Мы должны проехать еще более тридцати километров.

— Снова неверно! — воскликнул «Задира», сопровождая свой возглас металлическим смешком, который бесил ужасно. — Ответ — 15 км.

Конечно, Зэ был прав. Я ответил слишком поспешно.

— Ладно, приятель. Вы поймали меня на этот раз. А теперь у меня есть кое-что для Вас. Примерно полчаса назад нас обогнал автомобиль с наклейкой на бампере, которая гласила: «Я ♡ Нью-Йорк», только слово «люблю» было заменено символом игральной карты — черви.

— Мне знакома такая наклейка, — сказал автомобиль, — в районе Нью-Йорка я много таких встречаю.

— На днях, — продолжал я, — я видел на бампере другую наклейку, она начиналась со слова «Я», потом — карточный символ пики. Можете ли Вы угадать, что там было дальше?

«Задира» рылся в своем банке памяти в течение нескольких минут, но потом все же сдался.

— Ответ, — сказал я, — «Я ♠ котов».

— Я ♠ котов? — спросил «Задира». — Но это же бессмыслица!

Я был удивлен, что Зэ не сумел раскусить этот каламбур. Он молча слушал, а я напомнил ему, что по-английски «spade» — не только «пиковая масть», но также и «кастрировать».

— Как насчет парочки жестких географических головоломок? — предложил я. Зэ знал новейшую версию мирового атласа наизусть, и географические загадки были одним из его коньков.

— Очень хорошо, — сказал автомобиль через несколько секунд. — Вы говорите «географических». Это слово начинается на «Г» и заканчивается на «Х». Посмотрим, насколько быстро Вы сможете назвать два штата США, один, чье название заканчивается на «Г», и второй, последней буквой в имени которого была бы «Х». По-английски, разумеется.

Первый я определили сходу, но не второй. Оба названия Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 185.

30

Аркады Раймонда Палмера

Раймонд Диаволо Палмер (некоторые мои читатели наверняка вспомнят его) — это маленький человечек, очень похожий на гнома, ростом где-то метр тридцать, с лицом херувима и водянистыми голубыми глазами. Он имеет привычку перебираться из города в город и открывать там магазины с необычными товарами. Однажды я купил у него бутылку Клейна, в которой жил джинн. С тех пор как я купил несколько старых научно-фантастических журналов в одном из его магазинов в Чикаго (см. главу 15 моих «Загадок иных миров» («Puzzles from Others Worlds»)), прошло несколько лет.

Недавно мне представился случай побывать в Немецком районе, что на востоке верхнего Манхэттена. Когда я проходил аркаду компьютерной игры, вывеска над дверью сказала мне: «Научно-фантастическая галактика Рэя Палмера».

В просторной комнате было почти совсем темно, только люминесцентные экраны компьютеров освещали ее. Зал был забит подростками, в основном мальчишками. Он был наполнен шумом, свистом и всеми другими странными звуками, которые доносились из машин. Темой всех игр была научная фантастика и фэнтэзи. По большей части это были игры типа «Звездных Войн», но в некоторых шла охота на инопланетных монстров, в других необходимо было перехитрить злых колдунов, исследуя чуждые планеты, и так далее.

Рэй был там, в фартуке с большими карманами, набитыми монетами для расчетов и сдачи. С тех пор, как я последний раз встречал его, он отпустил длинную седую бороду и стал еще больше похож на гнома.

Я бродил по залу, наблюдая за играми из-за спин игроки. В задней части этой сводчатой галереи был лифт. Вывеска на дверях гласила: НЕ ВХОДИТЬ! ТОЛЬКО ДЛЯ ПЕРСОНАЛА. Еще на улице я заметил, что аркада располагалась в низком плоском здании, в котором был только один этаж. Куда же мог идти этот лифт?

Всегда охочий до приключений, я открыл дверь и шагнул внутрь. В лифте были только две большие кнопки, внизу на передней стенке. На одной из них значилось «dn». На другой кнопке были точно такие же две буквы, только вверх ногами: «up». Я нажал на кнопку «dn». Через небольшое окошко я увидел, как злющий Палмер бросился к лифту, но было слишком поздно.

В окно я увидел, что лифт быстро набирает скорость, я мог чувствовать ускорение по тому, как уменьшился мой вес. Вскоре лифт пошел с постоянной скоростью. Я не мог поверить в это! Целых пять минут он ускорялся, идя вниз.

Когда лифт остановился, у меня подогнулись колени. А затем произошло еще что-то гораздо более фантастическое. Лифт начал двигаться в сторону! Это продолжалось целых десять минут, прежде чем он продолжил опускаться вертикально. По моим часам, лифт опускался почти 20 минут, прежде чем он остановился и дверь открылась.

Я ступил в огромную пещеру. Она была пронизана гигантскими сталагмитами и сталактитами. Ее освещало странное фиолетовое свечение, которое, казалось, было частью атмосферы. Карлик-гуманоид, ростом даже меньше, чем Палмер, подошел ко мне. Он (а я предположил, что он был мужского пола) был наг, но полностью покрыт черными волосами. Его нос и уши немного походили на слоновьи.

— Добро пожаловать, — сказал он, сделав неуклюжий жест рукой, — в обиталище бесов.

Конечно, я знал о бесах. Считается, что это злые существа, жившие под землей, как описано у Ричарда Шэйвера, в его пресловутых научно-фантастических сказках конца сороковых годов. Я всегда считал, что рассказы Шэйвера были чистой фикцией, но вот он я, разговариваю с бесом!

— Вы Мартин Гарднер, — сказал бес, — и Вы составляете головоломки для одного убогого бульварного журнальчика, что носит имя этого архи-скептика Айзека Азимова.

— Как, в преисподней, вы узнали об этом?

Бес улыбнулся, скривив рот, но его злые глаза не изменились.

— У нас есть чрезвычайные psi-силы. Мое дистанционное ви́дение сказало мне, что Вы садитесь в лифт Палмера. Я проверил Ваши документы в бумажнике.

— Мои колени, — сказал я, — по-прежнему дрожат от этой дикой поездки на лифте.

— Ах да, — сказал бес. — Инерция. Это то же самое, знаете ли, что и гравитация. Эйнштейн думал, что он обнаружил эту эквивалентность, но мы знали об этом еще за пятьдесят тысяч лет.

— Я знаком с принципом эквивалентности. Ведь я написал популярную книгу о теории относительности. Ньютон предположил бы, что сила инерции внутри ускоряющегося лифта доказывает абсолютность движения. Ты не можешь предположить, что лифт стоит на месте, а Вселенная движется, потому что тогда что вызывало бы силы инерции?

— Правильно, — сказал бес. — Как Вам известно, Эйнштейн использовал мысленный эксперимент с лифтом, чтобы объяснить, почему это не так. Предположим, Ваш лифт находится в покое, а Вселенная ускоряется, двигаясь вверх или вниз. Ускорение Вселенной создает гравитационные поля, которые производят инерционные эффекты.

— Вы действительно знаете теорию относительности, — ответил я. — Как я уже писал в своей книге, не важно, что на самом деле движется, лифт или Вселенная. Это все равно, что спросить, находится ли мороженое сверху на пироге или это пирог — под мороженым. Только относительное движение имеет значение. Если Вы берете Вселенную как неподвижную систему отсчета — что, безусловно, сделать проще всего — эффекты в лифте будут называться инерционными. Если вы берете лифт в качестве фиксированного объекта (что, конечно же, гораздо менее удобно), силы в лифте будут называться гравитационными. Тензорные уравнения, описывающие поле, одинаковы в обоих случаях. Существует только одно поле, но Вы можете говорить об этом двумя разными способами.

Бес снова улыбнулся своей мрачной улыбкой.

— Перед тем как уйти — мы не можем позволить Вам оставаться дольше — задам Вам вопрос для Ваших идиотских читателей. Представьте, что Вы в лифте с непрозрачными стенами. Гравитационное поле такое же, как на Земле. Возникает вопрос: Вы в состоянии покоя на планете с g полем или Вы в лифте, идущим с ускорением вверх, со скоростью, которая имитирует g поле? Помните, лифт является непрозрачным. Вам не видно, что происходит снаружи. Предположим, что лифт достаточно большой, чтобы вместить все сложные измерительные приборы, какие только Вам нужны. Существует ли эксперимент, который Вы можете провести, чтобы отличить две возможности — ускорение лифта, идущего вверх, и состояние покоя на планете?

Я знал ответ, но, прежде чем я успел ответить, появилось еще шестеро бесов. Они затолкали меня в лифт, нажали кнопку вверх и захлопнули дверь. Лифт неожиданно наполнился клубами пурпурного дыма. Пара вдохов, и я потерял сознание.

Когда я пришел в себя, лифт стоял на месте. Дверь медленно открылась. На стене я увидел обычный ряд кнопок для многих этажей. Когда я вышел, то оказалось, что я на верхнем этаже универмага «Macy's».

Каков же ответ на вопрос беса? Согласно объяснению Эйнштейна, Вы не можете использовать световые лучи, чтобы обнаружить эту разницу, потому что свет, как любой материальный объект, в равной степени зависит от тяжести и от инерции. Тем не менее, есть простой тест, который Вы можете провести. Предположим, что поле тяготения планеты таково, что как будто бы вся ее масса сосредоточена в одной точке в ее центре, и что притяжение в лифте и в любых множествах, движущихся в соответствии с ним, равно нулю. Описание эксперимента Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 187.

31

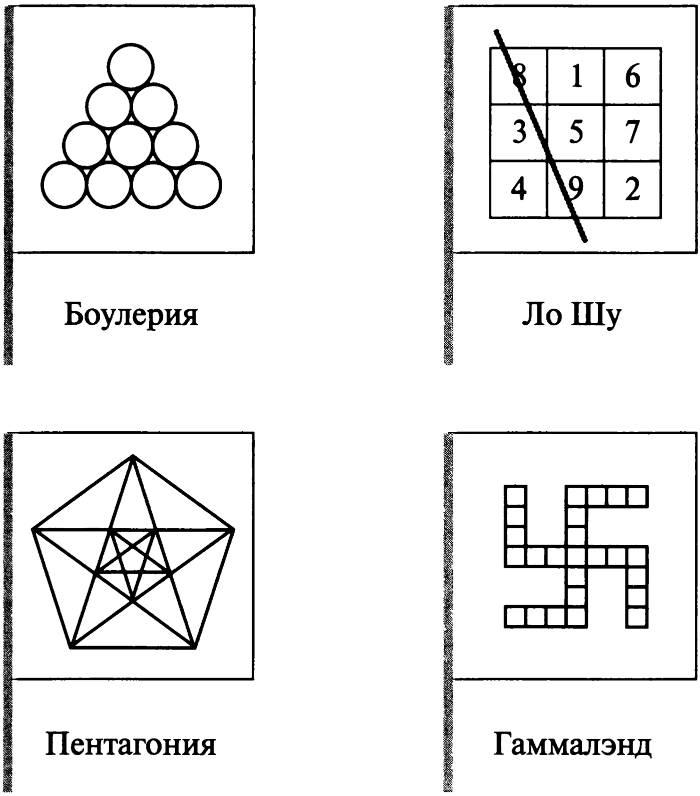
Ребус с флагами на Марсе

К середине XXI века на красной планете процветали сотни колоний, каждая из которых помещалась под огромным прозрачным куполом. Такой купол пропускал солнечный свет, поддерживал искусственную атмосферу и делал возможным сельское хозяйство. У каждой колонии была свой собственный флаг, который находился на вершине ее купола.

Любители занимательной математики найдут головоломку практически везде, где есть математическая структура, и схемы с флагами не исключение. Я выбрал четыре марсианских флага, которые дают нам простые, но увлекательные головоломки. Кроме того, эти головоломки пока еще не так широко известны.

Рассмотрим сначала флаг колонии под названием Боулерия, основанной группой американцев, страстных любителей боулинга. Как видите, на их флаге — десять кругов, расположенных подобно кеглям для боулинга, если смотреть сверху (левый верхний рисунок). Ваша задача заключается в том, чтобы зарисовать четыре окружности так, чтобы круги, оставшиеся без штриховки, не отмечали бы собой вершины равностороннего треугольника. Есть, в сущности, только один способ сделать это.

Кстати, раскрасить круги двумя цветами так, чтобы три круга одного цвета не отмечали бы собой вершин равностороннего треугольника, невозможно. Доказать это сложнее, чем данная задача. Если это Вас заинтересовало, Вы найдете доказательства в главе 7 моей книги «Парадокс узника».



Рассмотрим еще один флаг. Это флаг китайской колонии на Марсе, которая называется Ло Шу. Ло шу — это древнее китайское название классического магического квадрата 3 × 3. Флаг показан на картинке вверху справа. Не считая поворотов и отражений, это единственный способ разместить первые девять натуральных чисел таким образом, чтобы в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух главных диагоналей их сумма равнялась 15.

Ваша задача — провести одну прямую линию от одной стороны ло шу до другой так, что она пересекала клетки с наибольшей возможной суммой. На рисунке Вы видите линию, пересекающую четыре клетки. Сумма чисел в них — 25, но Вы можете найти решение лучше.

Вот еще два вопроса о, магическом квадрате 3 × 3, на которые Вы с легкостью найдете ответ, если Вас посетит правильное «ага!» прозрение. Можете ли Вы составить магический квадрат 3 × 3 с последовательностью четных чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18? Можно ли составить такой квадрат с последовательностью нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17?

Герой нашей третьей головоломки — флаг Пентагонии, колонии, основанной в 2030-х годах группой испанских исследователей. Флаг Вы можете видеть на нижнем левом рисунке. Его пятисторонний символ тесно связан с пентаграммой древнегреческого братства Пифагора. У нее есть много любопытных геометрических свойств, но Ваша задача — просто подсчитать количество заглавных букв «А» — инициалов Азимова — на схеме.

Мы должны тщательно определить, что подразумевается под «А». Два отрезка, которые соединяются на вершине, должны быть равны по длине, а поперечина должна «отрезать» от них равнобедренный треугольник. «А» может быть настолько широкой или узкой, насколько Вы пожелаете. Ее «ноги» ниже поперечины могут быть короткими или длинными. Все пять узлов «А» должны быть узлами на диаграмме, и, конечно же, буква может быть повернута как угодно.

Когда эта задача была впервые опубликована в аргентинском журнале игр и головоломок под названием «Cacumen» («*Умник*») в декабре 1984, редакторы дали ответ: 25. Читатели же поспешили указать, что это неправильно. Схема содержит больше, чем 25 букв «А».

Наша последняя головоломка, самая трудная из четырех, задействует знак гаммадиона на флаге в нижнем правом углу. Ваша задача — разрезать знак гаммадиона по внутренним линиям на наименьшее количество частей, которые можно переставить так, чтобы получился квадрат размером 5×5.

Когда эта хитроумная задача на разрезание впервые появилась в журнале «Pi Mu Epsilon Journal» осенью 1983 года, автор, предложивший ее, думал, что это в решении не может быть меньше пяти частей. (Одно особенно симпатичное решение состоит в том, чтобы вырезать 5-клеточный Греческий крест из центра знака гаммадиона, а затем расположить четыре укороченных «руки» симметрично вокруг него.) К великому удивлению автора задачи, один из читателей, Эмиль Словински, придумал рассечение из четырех частей.

Ответы на другие головоломки с флагами, предложенные здесь, Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 188.

32

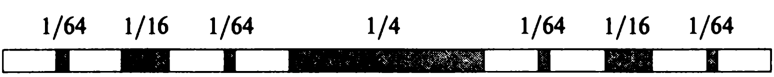
Исчезающая планка

Черный Туннель, известный физикам как «кротовая нора» Джона Уилера, начинается внутри черной дыры, которая вращается в центре галактики Млечный Путь. Туннель проходит по четвертой пространственной координате через бесконечное число параллельных вселенных, находящихся рядом друг с другом, подобно листкам чудовищной четырехмерной книги. У входа в Туннель располагается отель «Алеф-Нуль», названный в честь самой маленькой бесконечной иерархии трансфинитных чисел Георга Кантора (алеф-нуль состоит из целых чисел: 1, 2, 3, 4...).

В гостинице «Алеф-нуль» бесконечность номеров. Это приводит ко многим любопытным парадоксам, некоторые из которых обсуждались в двух предыдущих книжных подборках моих научно-фантастических головоломок. Как Вы уже догадались, эта гостиница предлагает такого рода развлечения, каких никто и никогда в этом мире не видел. Есть, например, искусные танцоры, некоторые с двадцатью ногами, способные выполнять бесконечное количество шагов, которые становятся все быстрее и быстрее, что позволяет обычную танцевальную программу завершить за конечное время. И есть чудесные певцы, некоторые с двумя ртами, которые позволяют им петь дуэты с самими собой. Они увлекают зрителей «фрактальными» песнями. Это мелодии, в которых бесконечное число нот, подобно танцевальным па, заключено в конечном периоде времени.

Великий Алеф, маг и чародей, который регулярно выступает в кабаре «Алеф-Нуль», — искусный иллюзионист. Его конек — иллюзии, основанные на бесконечных множествах. Рассмотрим одну из его любимых — «Невероятная исчезающая планка». Планка имеет длину один метр, ее ширина — шесть сантиметров, а толщина — полсантиметра. Она сделана не из дерева, а из вещества, совершенно не похожего на любое вещество в нашей галактике. У нас вся материя состоит из дискретных частиц. А планка Великого Алефа, сделанная в другой вселенной, представляет собой плотный континуум бесконечно делимой материи, больше похожей на материю, описанную в физике Аристотеля, чем на материю из физики греческих атомистов.

Великий Алеф начинает представление с того, что заставляет планку плавать в воздухе над сценой. Затем, с помощью режущего устройства, которое работает с постоянно растущей скоростью, Великий Алеф отсекает 1/4 планки прямо из ее центра. Удаленную часть он отбрасывает. Затем он удаляет фрагмент длиной 1/16 из середины каждой из двух оставшихся частей. У него остаются четыре отдельные части. Из середины каждой из них он вырезает фрагмент длиной 1/64. Таким образом, всякий раз из середин всех оставшихся частей вырезается одна четвертая длины, отсеченной до этого. И так процедура продолжается до бесконечности. На рисунке ниже показана планка в поперечном сечении. Черные части — это фрагменты, вырезанные на первых трех шагах иллюзии.



Первый шаг отнимает 1/4 планки. Второй шаг удаляет 1/16 + 1/16, или 1/8 ее первоначальной длины. Третий шаг удаляет 1/64 + 1/64 + 1/64 + 1/64, или 1/16 исходной планки. Общая длина удаленных на каждом шаге фрагментов образует бесконечную последовательность 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ..., которая в сумме дает 1/2. Каждый шаг длится ровно столько, сколько отсекается от планки на этом шаге. Первый шаг занимает 1/4 минуты, второй шаг — 1/8 минуты, третий — 1/16, и так далее. Следовательно, это длится ровно половину минуты. В конце этого времени ровно половина исходной планки оказывается удаленной. Исчезла ли планка полностью или от нее еще что-то осталось? «Доказательство» ее исчезновения Вы найдете в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 190.

33

987 654 321

На каждый из следующих девяти вопросов можно ответить быстро, если Вам знакомы некоторые элементарные теоремы о целых числах, и если Вас посетит правильное озарение. Каждый вопрос посвящен одной и той же последовательности цифр: 987 654 321. Постарайтесь ответить на вопросы без помощи калькулятора.

9. Простое число — это число, которое делится только на себя и на 1. Докажите, что 987 654 321 не является простым числом.

8. Факториал — это произведение $1\times 2\times 3\times ...\times n$, он записывается $n!$ Докажите, что 987 654 321 не является факториалом.

7. Представьте, что сверхсущества в некотором, более высоком измерении, играют в карты колодой, состоящей из n карт, где n – наша последовательность 987 654 321, повторенная один миллион раз. Мы знаем из ответа на вопрос 9, что карты могут быть распределены среди 9 или 3 игроков. Можно ли их поровну раздать 8, 7, 6, 5, 4 или 2 игрокам?

6. Можно ли сдать такую колоду поровну 11 игрокам?

5. Можно ли сдать карты поровну 1 000 000 001 игроку?

4. Совершенное число является суммой всех своих делителей, включая 1, но не само себя. Шесть — совершенное число, потому что 6 = 1 + 2 + 3; и 28 совершенное, потому что 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Неизвестно, существует ли бесконечность совершенных чисел

или существует ли нечетное совершенное число. К концу 1986 года были определены только 30 совершенных чисел. Докажите, что 987 654 321 не является совершенным числом.

3. Старая забава с числами, в которой нужно расставлять знаки «плюс» или «минус» в пределах последовательности 123 456 789 или в пределах его перевернутой версии — 987 654 321 так, чтобы получилось заданное число. Например, единственный способ составить возрастающую последовательность с суммой 100, используя только три знака: $123 - 45 - 67 + 89 = 100$. Вы найдете все решения для 100, для обеих последовательностей, с помощью любого количества знаков (в том числе со знаком «минус» перед первой цифрой) в главе 6 из моей книги «Волшебные числа доктора Матрицы» («Magic Numbers of Dr. Matrix»). Все решения для 666, библейского числа Зверя, приведены в главе 31 из моих «Загадок иных миров» («Puzzles from Other Worlds»).

Ваша задача — расставить семь знаков в 987 654 321, чтобы получить нуль.

2. Давайте вернемся к вопросу 7, где мы рассматривали число, полученное путем повторения последовательности 987 654 321 миллион раз. Могут ли первые n цифр из этой последовательности, где n — любое целое число, меньше или равное девяти миллионам, образовать простое число?

1. Выньте из колоды девять карт пиковой масти от туза до девяти. Вас просят расположить их в таком порядке, который позволил бы выполнить следующий трюк с написанием.

Возьмите стопку из девяти карт, все лицом вниз, в левую руку. Перекладывая всякий раз только одну карту сверху вниз, записывайте по одной букве слова «девять». После того как Вы переложите вниз шесть карт, переверните верхнюю карту. Это девять пик. Отложите ее в сторону. Теперь пишите «восемь», перекладывая шесть карт по одной под низ. Теперь верхняя карта — восемь пик. Отложите и ее. Продолжайте в том же духе, записывая и откладывая 7 («семь»), 6 («шесть»), 5 («пять»), 4 («четыре»), 3 («три»), и 2 («два») пик. У Вас в руках останется туз.

Вы, наверное, думаете, что это маловероятно — сложить девять карт так, чтобы получился такой занятный фокус с написанием, который, кажется вовсе и не связан с записью цифр. На самом деле найти нужное расположение карт легко, это можно сделать всего за несколько минут. Как? За ответами и комментариями ко всем девяти задачам обратитесь в раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 191.

34

Там, где время идет вспять

Одно из монументальных астрономических открытий двадцать первого века было сделано профессором Александром Грэмом Хлоппом, известным британскими астрофизиком. Используя передовые приборы, подсоединенные к радиотелескопу на космической станции, он первым установил, что половина галактик во Вселенной состоит из антивещества. Более того, он обнаружил, что во всех галактиках направление времени противоположно нашему, в галактике Млечный Путь.

Если есть разумные существа в тех галактиках, где время идет вспять, то им, конечно же, кажется, что оно идет обычным образом. Для них наша стрела времени повернута в обратную сторону. Эта ситуация аналогична истории о двух мирах с двух сторон зеркала в «Алисе в Зазеркалье».

Обычно среди физиков существовала договоренность о том, что общение между жителями двух миров, в каждом из которых время идет в обратном направлении, было бы невозможно. Профессор Хлопп думал иначе.

— Что ты печатаешь, Алекс? — спросила Ада Лавлик, симпатичная ассистентка профессора.

— Это трактат о коммуникации между мирами с разнонаправленным временем, — ответил Хлопп. — Мой компьютерный поиск в Библиотеке Британского музея нашел увлекательную статью шотландского философа по имени Мюррей Мак-Бит. Она увидела свет в философском журнале под названием «Synthese» более пятидесяти лет назад [1983. Т. 56. С. 27—46]. В этой работе

Мак-Бит изложил простой способ наладить такую коммуникацию.

— Это смешно, — сказала Ада. — Как работает схема Мак-Бита?

Хлопп убрал руки с клавиатуры своего лазерного текстового процессора и развернул кресло, на котором сидел.

— Для упрощения мысленного эксперимента давай предположим, что два мира одинаковы во всех отношениях, за исключением направления их времени. Их жители говорят на одном языке. Их дни — это одинаковые интервалы времени. Представим также, что существует огромный экран на границе между двумя мирами, на котором можно мгновенно размещать и читать сообщения с любой стороны.

Ада на минуту задумалась.

— Достаточно четко. Я знаю, что в большинстве мысленных экспериментов мы должны делать дикие предположения, идущие вразрез с любыми фактами, но здесь я не вижу ничего концептуально невозможно из того, что ты предлагаешь.

Хлопп кивнул.

— Сейчас я программирую компьютер, чтобы в День 1 это сообщение высветилось на большом экране.

Он нажал кнопку для вызова текста на мониторе. Сообщение начиналось так:

ПРОШУ ОТВЕТИТЬ НА СЛЕДУЮЩИЕ ВОПРОСЫ. НО НЕ ОСТАВЛЯЙТЕ ВАШ ОТВЕТ НА ЭКРАНЕ ЕЩЕ 99 ДНЕЙ ОТ НЫНЕШНЕГО МОМЕНТА, ПО ВАШЕМУ ВРЕМЕНИ. ПРИ ОТВЕТЕ ЗАДАВАЙТЕ СОБСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

Ада выглядела озадаченной.

— Вот та умная идея, что лежит в основе плана, — продолжил Хлопп. — Я указал компьютеру отправить сообщение на мой День 100.

Ада была настолько же сообразительной, насколько и красивой.

— Я предвижу, чем это кончится. Ваш корреспондент, живущий по времени, идущему вспять, увидит твое сообщение за 100 дней до твоего Дня 1. Он отложит ответ до своего Дня 99, который будет твоим Днем 2. Так что на твой День 2 ты получишь ответ на сообщение, которое компьютер пошлет в твой День 100.

— Точно, — сказал Хлопп, потирая руки и улыбаясь. — И мы сможем посылать сообщения туда и обратно в возвратно-поступательной манере. Я запрограммирую появление моего ответа на экране через 98 дней, в моем будущем. Он программирует появление своего следующего ответа на экране через 97 дней, в его будущем. Я увижу этот ответ в свой День 3. Мы можем продолжать обмениваться вопросами и ответами до середины временного периода, после чего обмен становится невозможным. Конечно, нет необходимости ограничивать разговор 100 днями. Это может быть и 100 лет, и так долго, как мы хотим.

Издевательская ухмылка медленно расползлась по лицу Ады.

— К сожалению, Алекс, в схеме Мак-Бита есть колоссальный логический изъян. Она не сможет работать.

После того, как Ада объяснила, в чем состоял этот недостаток, профессор Хлопп вздохнул, хлопнул себя по лбу и стер с компьютера все, что он до этого написал. Что же за изъян Ада имеет в виду?

См. ответ на стр. 198.

35

Мудрость Соломонова

Согласно ветхозаветной притче (I Царств 4:31) Соломон «был мудрейшим из людей». Мы все знаем историю (I Царств 3) о том, как он разрешил ожесточенный спор между двумя блудницами, каждая из которых утверждала, что она является матерью новорожденного ребенка. Соломон торжественно предложил разрубить мечом ребенка пополам и отдать каждой претендентке по половине. Одна блудница согласилась. Соломон присудил ребенка второй женщине, когда она согласилась отказаться от ребенка, лишь бы только Соломон сохранил ему жизнь.

В книге Царств 10 и II Паралипоменон 9 рассказывается об огнепоклоннице царице Савской (или «Королеве Юга», как назвал ее Иисус в Евангелии от Матфея 12:42), которая совершила паломничество в Иерусалим, чтобы испытать мудрость Соломона «трудными вопросами». Ветхий Завет не содержит никаких подробностей касательно этих вопросов, но о них есть много красочных легенд в Талмуде и других древнееврейских документах, в Коране и его ранних комментариях, а также в исламском фольклоре.

Одна из легенд гласит, что Балкис (как она называется в Коране) представила группу мальчиков и девочек, одетых совершенно одинаково. Соломона попросили определить, кто какого пола, не разговаривая с детьми и не прикасаясь к ним. Соломон попросил мальчиков и девочек вымыть руки в бассейне с водой. Девочки закатали свои длинные рукава, а мальчики этот не сделали.

Это напоминает рассказ о том, как женская маскировка Гекльберри Финна была раскрыта, когда ему на колени был брошен свинцовый шарик. Инстинктивно он свел колени, чтобы поймать его, а не стал их разводить пошире в стороны. (Он также неправильно продевал нитку в иголку и бросил свинцовый шарик так, как это делает мальчик.)

Еще одна легенда рассказывает о том, как царица преподнесла Соломону два букета цветов, один настоящий, другой искусственный, и попросила его сказать, какой из них — какой, не нюхая цветы и не касаясь их. А Вы догадались, как Соломон решил эту проблему? Ответ появится в разделе первых ответов.

См. ответ на стр. 200.

36

Тэнг, пожиратель планет

Моим первым рассказом, который увидел свет, была коротенькая история о сверхсуществе по имени Тэнг, которое, предположительно, обитает в четвертом измерении. Этот рассказ был включен в несколько сборников, самый последний из которых «Профессор без сторон и другие научно-фантастические и философские сказки, шутки и загадки» («No-Sided Professor and Other Tales of Fantasy, Humor, Mystery, and Philosophy», 1987). Тэнг любил проникать в галактику Млечный Путь, собирать планеты и есть их, подобно тому, как мы едим яблоки.

Может быть, лучшей аналогией, поскольку Тэнг четырехмерный, будет то, как мы едим очень-очень тонкие блины.

Представьте себе, что Тэнг нашел солнечную систему себе по вкусу, и что ему понадобилось семь дней, чтобы съесть все планеты. В первый день он съел 1/7 часть всех планет. На второй день он съел 1/6 часть оставшихся планет. На третий день он съел 1/5, на четвертый день съел 1/4, на пятый день он съел 1/3, на шестой — съел 1/2. На седьмой день он съел одну единственную оставшуюся планету. Сколько планет было в Солнечной системе? Ответ простой. Их было семь. Тэнг просто съедал по одной планете в день.

Давайте усложним задачу. Тэнг нашел еще одну солнечную систему, которую захотел съесть. На этот раз он изменил прежнюю процедуру. В первый день он съел одну планету. На второй день он съел половину оставшегося количества планет. На третий день он съел 1/3, и так далее до седьмого дня, когда он съел 1/7 часть еще не съеденных планет. Некоторое количество целых планет осталось.

Ваша задача заключается в следующем. Определите, какое наименьшее число планет может иметь эта солнечная система, чтобы удовлетворять такому сценарию? Смотрите раздел первых ответов.

См. ответ на стр. 202.

Загадки

Первые ответы

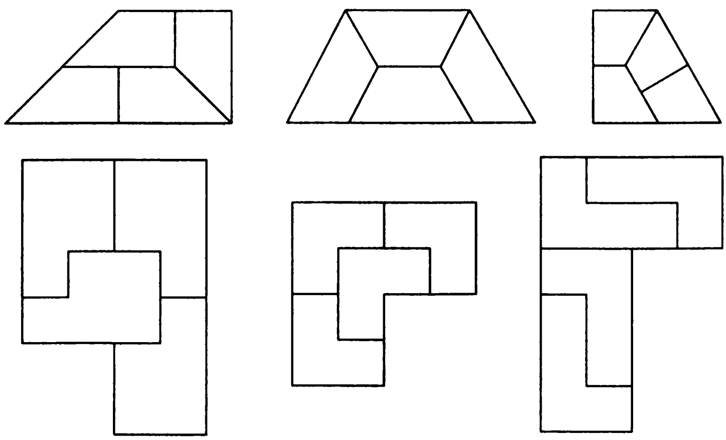
Вторые ответы

Третьи ответы

Четвертые ответы

1

Загадки Сфинкса



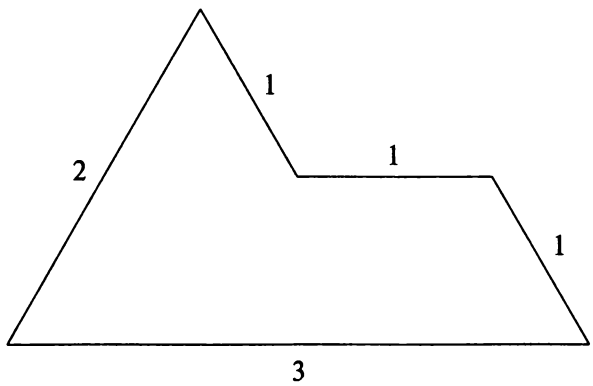
На рисунке показано, как делятся эти реплитки.

Почти год профессор Матсу пытался создать пентагональный вид реплитки, то есть особь с пятью сторонами, но все безуспешно. И вот однажды его коллеге, доктору Беатрис Минус, которая специально переехала в Токио из Филадельфии, желая изучать революционные технологии профессора Матсу, удалось вывести именно такой вид этих простейших. Его Вы можете увидеть на рисунке ниже.

— Это прекрасно! Это великолепно! — восклицал профессор Матсу, разглядывая вместе с доктором Минус в окуляр микроскопа новый организм в тысячекратном увеличении, — Как мы его назовем?

— Может быть, сфинкс? — предложила доктор Минус. — Его форма напоминает профиль Сфинкса, той самой статуи, что была у подножья Большой египетской пирамиды.

— Ах, так и есть, — сказал профессор Матсу, — Вы правы. Жаль только, что Сфинкс был разрушен во время Великой Ближневосточной войны 2019 года.



Посмотрим, удастся ли Вам разделить нашу загадочную реплитку на четыре одинаковых маленьких сфинкса прежде, чем Вы заглянете в раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 204.

2

Ясновидение и таинственная семерка

2

Предрекаю Вам: в ответе будут цифры 1, 2, 4, 5, 7 и 8 в любом порядке, и никогда не будет цифр 3, 6 и 9. Как я это узнал? Ну, я мог просто перебрать все возможные комбинации. Но есть и менее скучный способ. Давайте посмотрим, как он работает. В общем виде моя инструкция выглядит так:

$$\frac{1}{7}\cdot 999\,999\cdot d = \frac{d}{7}(10^6 - 1) = \frac{d}{7}\cdot 10^6 - \frac{d}{7},$$

где d — то самое число, которое выпало Вам на кубике или игральной кости. 1/7 дает 0,142857..., причем 142 857 — период этого числа. Таким образом, все шесть возможных ненулевых остатков были выявлены в ходе нашего деления.

А теперь деление 2/7 состоит из арифметических шагов, которые мы проделали после того, как достигли остатка 2 при вычислении 1/7. Это был второй наш остаток, и, таким образом, мы получаем: $2/7 = 0{,}285714\ldots$, и вновь — 285 714 составляют период полученной дроби. Как видим, в ответе мы получили те же самые цифры, только в другом порядке: начиная с двойки, а не с единицы. Подобную картину мы наблюдаем и в остальных случаях деления: $3/7, \ldots, 6/7$.

Очевидно, в свою очередь, что

$$1\,000\,000/7 = 142\,857{,}14\,285\,714\ldots\ ;$$

при вычитании отсюда 1/7, которое суть та же самая последовательность чисел после запятой, мы получаем: $999\,999/7 = 142\,857$. Приведенные выше замечания относительно $2/7, \ldots, 6/7$ позволяют заключить, что 2 ×

$\times$ 999 999/7 и т. д. представляют собой циклическую перестановку цифр числа 142 857. Нам даже известен порядок этой перестановки; $i/7$ начинается с i-го наименьшего из этих шести чисел.

Смотрите, мы не просто доказали, что каждое из чисел 1, 2, 4, 5, 7, 8 только один раз появится в нашем шестизначном ответе, мы извлекли гораздо более детальную информацию. Заметьте, попроси мы кого-нибудь доказать эту более сильную теорему, он счел бы, что это сделать проще, чем доказать более слабую, которая была дана нам. А все потому, что более строгая формулировка очень прозрачно намекает на то, что за ней скрывается, а именно всего-навсего одна десятичная периодическая дробь.

142 857 — это целое положительное число, чьи шесть наименьших кратных (включая само это число) представлены циклической перестановкой их цифр. Известно, что целого числа, чьи десять наименьших кратных обладали бы такой особенностью, не существует, если только вы не поставите спереди 0. Есть числа, чьи 9 наименьших кратных представляют собой циклическую перестановку их цифр, но чтобы найти их, потребуется приложить усилия, хоть и не столь огромные, если воспользоваться программируемым калькулятором или компьютером. Сможете найти одно такое? Загляните в раздел следующих ответов.

Семерка была символом божественного совершенства в средневековой нумерологии. Более двадцати лет назад Алан Сирил Бейтс из Чикаго прислал мне свой лимерик о числе 777 и его трех простых множителях: 3, 7 и 37.

У числа семьсот семьдесят семь
Есть три цифры, и каждая — семь.
Также множитель — три,
Есть и семь, посмотри.
А еще в одном — тройка и семь.

2

А теперь еще одна задачка. Нам понадобится семь цифр Вашего номера телефона. Напишите на листке бумаги Ваш номер телефона, из его цифр составьте два разных семизначных числа. Наберите большее из двух на табло калькулятора и вычтите из него меньшее. А теперь отнимите 2 и поделите результат на 9. В остатке у Вас получится десятичная дробь. В разделе вторых ответов я подробнее расскажу Вам об этом остатке.

См. ответ на стр. 206.

3

Идем к Хармиане!

1. Если цифры расположить 321 654 987 (или наоборот), такой порядок не будет содержать возрастающей или убывающей подпоследовательности из четырех знаков. Напомним, что все четыре знака не обязательно должны следовать друг за другом. Они могут быть разбросаны по всей последовательности. Если Вас заинтересовало доказательство теоремы в общем виде или другие источники по этой теме, обратите внимание на мою книгу «Волшебное математическое шоу», глава 15 («Mathematical Magic Show»).

2. Поскольку существует 84 способа расположить номера планет так, чтобы ни одна четверка знаков не составляла бы монотонной подпоследовательности, наш ответ — 85.

Теорема Эрдёша—Секереша лежит в основе занятной карточной игры. Двое игроков по очереди тянут карты из стопки с десятью картами, достоинством от 1 до 10. Каждый игрок складывает карты перед собой в ряд в том порядке, в каком он их вытянул. Выигрывает тот, кто первым составит ряд из четырех карт в монотонной последовательности. Например, первый игрок, назовем его А, берет туза. Второй игрок, В, уверен, что выиграет, если возьмет двойку. А вынужден взять десятку. В берет девятку. Теперь не имеет значения, какую карту возьмет А. В может составить монотонную подпоследовательность из четырех карт на следующем ходу.

В эту игру можно играть и наоборот: первый, у кого получится монотонная подпоследовательность из четырех карт, проигрывает. Ни в стандартном, ни в перевернутом виде эта игра не может окончиться вничью. Анализ игр, основанных на составлении монотонных последовательностей, не может быть полным, несмотря на то, что некоторые будущие результаты известны заранее.

Однако вернемся к нашим планетам. В тот день, когда Вы впервые прочли это предложение, какая из планет была ближайшей к Вам? Загляните в раздел вторых ответов, чтобы узнать ответ.

См. ответ на стр. 208.

4

Технологии с планеты Чътуа

В отчете описана жизнь на Земле последних веков первого тысячелетия. Модульные строительные секции — это, конечно же, кирпичи, а доски скрепляются гвоздями. Одежду стирали с помощью стиральной доски, а сушили на бельевой веревке. Продукты хранятся охлажденными в холодильнике. Математические вычисления и обработка данных проводится с помощью карандаша. А транспортное средство — это лошадь. Круглые объекты — это монеты, а гравюры — почтовые марки. Два вида поведения — курение и чихание.

А теперь загадка для вас, любители игр в слова. Какой простенький шифр я использовал для названий планеты и звезды, вокруг которой она вращается? Отгадку Вы найдете в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 209.

5

Долина потерянных вещей

5

Сначала, для пущей определенности, предположим, что у нас есть пять карт достоинством 1, 2, 3, 4, 5, и в таком порядке они идут от низа до верха стопки. Также будет проще показать и рассказать все о трюке, если мы не будем резать карты надвое, а возьмем стопку таких же карт, только с рубашками другого цвета.

Даже многократное деление колоды оставляет циклический порядок карт неизменным; в частности, между двумя любыми картами одного достоинства всегда будет ровно 4 карты. До того, как мы перевернули правую половинку разрезанной стопки карт лицом вверх, в каждой половинке была карта с одним из пяти номеров, а карты с одинаковыми номерами шли в одинаковом порядке.

Мы гораздо более отчетливо представим, что случится потом, если допустим, что правая половинка стопки лицом вверх не перевернута. Для того чтобы воспроизвести операции, как это было описано вначале, нам нужно изменить нашу процедуру следующим образом. Беря правую половинку стопки, вместо того чтобы переместить верхнюю карту вниз, мы будем перекладывать нижнюю карту наверх; а когда мы будем снимать карты, из правой стопки мы уберем не верхнюю карту, а нижнюю.

В такой измененной системе, как мы уже успели убедиться, карты одного достоинства идут в одинаковом порядке. (Число считается сравнимым ($\equiv$) с n по модулю k, если n является остатком при делении числа на k. Например, $15 \equiv 3$ (модуль 12).) Записывая каждую букву ключевого слова, мы повышаем порядок карты в левой стопке на 1 (модуль 5) или понижаем порядок карты в правой стопке на 1 (модуль 5). Наше выражение (модуль 5), вероятно, несколько пространное, но мы хотели обозначить, что порядок, изменяемый в ряду 0—4, когда мы повышаем или понижаем его на 1, восстанавливается вычитанием или прибавлением 5. Нижняя карта при этом имеет порядковый номер 0.

Мы видим, что после каждого хода порядок карты в левой стопке — порядок карты с тем же номером справа возрастает на 1 (модуль 5). Таким образом, после 9 ходов разница составит 4 (модуль 5), а верхняя карта из левой стопки имеет тот же номер, что и нижняя карта в правой стопке. После того как мы их уберем, у нас останется по 4 карты в стопках, а карты одного достоинства будут идти в том же порядке. Проделай мы теперь 7 ходов, или любое другое их число, сравнимое с 3 по модулю 4, верхняя карта из левой стопки будет того же достоинства, что и нижняя карта — в правой, и т. д.

6

6

Путешествие по Солнечной системе

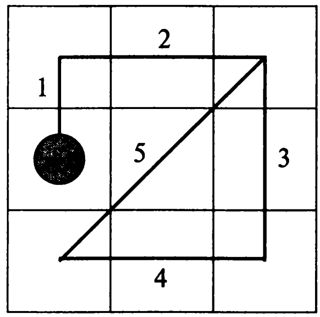
Обратите внимание, что названия планет в серых клетках имеют нечетное число букв, а в тех именах, что на белых клетках — число букв четное. Математики говорят, что две группы квадратов, в соответствии с их именами, имеют противоположную четность. Одна группа — четная, другая — нечетная. Каждый раз, когда гривенник переходит на соседнюю клетку, это меняет четность.

Если Вы стартуете с любой клетки и будете переходить в соответствии с буквами из названия этой клетки, Ваша монета, несомненно, остановится на белой клетке. Поскольку теперь гривенник приобрел четность, и все серые клетки должны быть незанятыми, можно спокойно поставить копейку на серой клетке «Венера».

Отныне на каждом этапе гривенник будет двигаться нечетное количество раз. И не имеет никакого значения, переместится ли он семь раз (или любое другое нечетное число раз), или будет ходить в соответствии с пятью буквами слова З-Е-М-Л-Я, или согласно любому другому слову с нечетным количеством букв. Если имя или фамилия кого-либо из зрителей имеет нечетное число букв, Вы смело можете использовать их для написания и ходов. Каждый раз, когда гривенник перемещается, его четность изменяется. Это позволяет Вам направлять копейки на свободные клетки с четностью, противоположной четности гривенника. После восьми этапов незанятой останется только клетка «Луна», а десять копеек будут отдыхать на «Плутон».

Если Вы хотите повторить трюк с другим конечным результатом, Вам нужно будет разработать другой набор инструкций. С помощью подходящих инструкций Вы сможете, конечно же, заставить гривенник закончить свой путь на любой из серых клеток. Будьте, тем не менее, осторожны — исключая клетки в таком порядке, летящий «космический корабль» всегда имеет доступ ко всем остальным незанятым клеткам.

А теперь — простая, но хитрая маленькая задачка, в которой использован еще один вид «турне» по той же самой матрице.



Поместите гривенник на «Марс». Вы должны перемещать его последовательно по прямым линиям, каждая из которых может быть любой длины, в горизонтальном, вертикальном или диагональном направлении. Задача состоит в том, чтобы пройтись гривенником по всем оставшимся восьми клеткам и сделать это за наименьшее число ходов. Например, на рисунке вверху показано, как это можно сделать за пять ходов. Это может показаться невероятным, но если Вас посетит правильное «ага!» озарение, Вы сможете сделать это и за четыре хода. Большинство людей считают эту задачу невыполнимо трудной, но не стоит портить себе удовольствие от работы над этой умной комбинаторной головоломкой, заглядывая во второй раздел ответов, прежде чем Вы сделаете все возможное, чтобы решить ее. Надо только представить, что гривенник — это на самом деле точка, и что он проходит через центральные точки каждой клетки.

См. ответ на стр. 210.

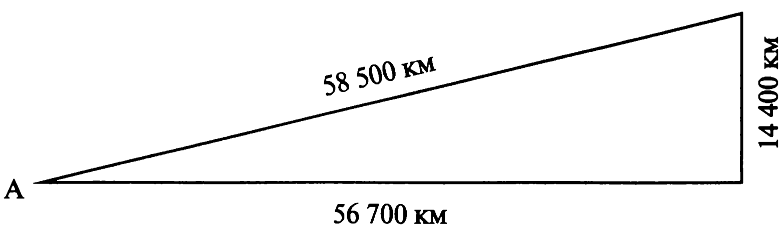
7

7

Полоса на Паришестрии

Вырезав из бумаги правильный треугольник и свернув его трубочкой вдоль основания, Вы увидите, что гипотенуза превратится в спиральную линию, обвивающую цилиндр от одного конца до другого.

Представьте, что цилиндр, изображенный в нашей задаче, появился именно таким образом. Мысленно разверните скрученный треугольник, начиная с вершины А. Высота правого угла соответствует длине цилиндра. В нашем случае это 14 400 км. Учитывая то, что спиральная линия обвивает цилиндр семь раз, основание развернутого треугольника составит увеличенная в семь раз длина окружности, или 7 × 8100 = 56 700 км.



Спиральная линия соответствует гипотенузе треугольника. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Квадрат 14 400 есть 207 360 000. Квадрат 56 700 равен 3 214 890 000. Их сумма — 3 422 250 000. Нажмите на кнопку извлечения квадратного корня на Вашем калькуляторе, и Вы узнаете, что для полученного числа он равен 58 500. Это длина полосы в километрах.

Всем нам хорошо известно, что цилиндр — популярная форма для банок с едой и напитками. Эти формы невероятно разнообразны — от тонких и длинных до коротких и толстых. Предположим, производитель хотел бы минимизировать расход металла, необходимого для одной целой банки (боковая поверхность плюс дно и верх). Иными словами, он хотел бы знать, какова форма банки заданного объема с наименьшей возможной площадью поверхности.

Есть простая пропорция длины и диаметра цилиндра, позволяющая получить нужный результат. А Вам она известна? Загляните в раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 211.

8

8

По дороге в Мандалай

1. Цифра 5 появится 16 раз. Вы не забыли, что она высвечивается дважды в числе 55?

2. Ответ — 24. Не многие люди могут посчитать их все в уме, без составления списка.

3. Снимите по одной гайке с каждого из оставшихся колес и прикрутите ими колесо, которое Вы меняете.

4. Когда машина проедет 10 000 км, каждое ее колесо также пройдет эту дистанцию. Таким образом, все четыре колеса проедут 40 000 км. Если пять шин использовались в равной мере, то каждое колесо выдержит 40 000/5 или 8000 км износа.

5. Автомобиль, едущий за другим автомобилем, который никогда не превышает скорость, может замедлить ход, а затем легко превысить скорость, догоняя впереди идущий.

6. Сорок столбов. Часто люди представляют себе четыре угловых столба, и по восемь между ними с каждой стороны, в общей сложности — 36.

7. Возьмите несколько монет на сумму более чем один доллар, которые не могут разменять доллар. В попытке разменять доллар и пересчитывая монеты всякий раз откладывайте монету наибольшего достоинства на стол, пока отложенная сумма не превысит $ 1. Последней отложенной монетой не может быть 50 или 25 центов, так как мы бы набрали ими ровно $ 1, без превышения.

Это не может быть и монета в 5 центов, так как на каждом этапе у нас на столе получалось целое число, кратное 5 центам, и мы не сможем перепрыгнуть через сумму в один доллар, прибавляя 5-центовую монетку. Аналогично этому, последней отложенной монетой не может быть и 1 цент. Значит, это должна быть монета в 10 центов, а на столе у нас должно получиться $ 1,05. Наша сумма должна состоять из нечетного числа 25-центовых монет. Если среди наших монет есть 5 центов или 5 по 1 центу, ими можно заменить последние 10 центов, тем самым разменивая доллар. Таким образом, у нас должны быть 1 или 3 монеты по 25 центов, ни одной 5-центовой и не более 4 монет по 1 центу. Теперь отложите нечетный четвертной. Остальные «серебряные» монеты могут в сумме давать не менее 90 центов, поскольку, как было доказано выше, мы в противном случае получим сумму, эквивалентную 1 доллару. 9 монет по 10 центов — самое большое количество монет, какое у нас может быть. Таким образом, нам понадобится: 1 монета в 25 центов, 9 монет по 10 центов и еще 4 цента — вот тот набор монет, который удовлетворяет всем нашим условиям.

8. Одна: серебряный доллар. Следующий лучший ответ — шесть: монета в полдоллара, четвертной, монета в 10 центов и три монеты по 5 центов.

«Как насчет перехода на лингвистику? — спросила машина. — Могу подбросить Вам парочку головоломок для разнообразия». «Хорошая идея», — сказал я, настраивая табло.

1. «По-английски: я – „car", Вы — „man". Оба этих слова состоят из трех букв. У меня не так много деталей, названия которых — всего три буквы (например, „fan" — „вентилятор"). Но у Вас таких много. Можете ли Вы назвать десять частей вашего тела, английские названия

которых состоят из трех букв?» Я не смог назвать больше девяти.

2. Мы проехали мимо таблички с надписью: «Slow. Road Construction Ahead» («Снизить скорость. Впереди дорожные работы»). Автомобиль задал вопрос: «А Вы можете назвать два английских слова с противоположным значением, каждое из которых можно поставить после слова „slow“ так, что в результате получится предупреждение из двух слов, и оба они будут обозначать одно и то же?»

3. «Я называюсь „Hustle“ („задира“). И есть только один способ переставить шесть букв моего имени так, чтобы получилось еще одно, весьма распространенное слово. Что это за слово?»

4. «В слове „континуум“ — удвоенная буква „у“. Приведите еще один пример слова с удвоенной буквой „у“. Это легко. На самом деле, проще нет вообще ничего».

5. «В каком необычном английском слове есть три буквы „u“, не обязательно подряд?»

6. «Назовите английское слово, состоящее из одного слога, за которым в словаре идет точно такое же слово, но с еще одной буквой в конце, и уже состоящее из трех слогов?»

7. «Какое английское слово полностью изменит свое значение, если Вы напишете его с большой буквы?»

Ответы на эти вопросы можно найти в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 214.

9

Черная дыра Калькутты

9

Давайте рассмотрим по одной грани каждого куба. Площадь грани равна квадрату его ребра, а значит, последовательность площадей граней это

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Вы узнаете эту последовательность? Это не что иное, как «гармоническая последовательность», которая лежала в основе головоломки о прыгающих супермячах из 28 главы в книге «Загадки иных миров». Как нам известно, гармоническая последовательность стремится к пределу! Это значит, что ее частичные суммы возрастают без предела. Чем дальше Вы продолжаете последовательность, тем меньше ее каждый следующий член — и они могут быть так малы, как Вы этого пожелаете — тем не менее, их сумма медленно возрастает, не имея верхней границы. Предельной суммы нет. Общая площадь черной дыры Калькутты беспредельна!

В стереометрии есть много пресловутых примеров фигур с бесконечным объемом или бесконечной площадью поверхности, но воронка Кэлвина Каттера наиболее доступна для понимания. Конечно же, внутренняя сторона воронки не может быть покрашена обычной краской. Вам придется воспользоваться идеальной краской с бесконечной неплотностью. В конце концов, Вы же красите бесконечно тонкую поверхность.

А как же глубина воронки? Она тоже бесконечна. Как же она тогда была сконструирована, что, бесконечно стремясь вниз, не прошла Землю насквозь? Ответ прост. После достижения проектной глубины Кэлвин закрутил ее в спираль. Но закрутить так, как нужно, совсем не просто. Спираль нельзя, например, свернуть вокруг центров кубических сегментов, нельзя также обернуть нижний край воронки вокруг бесконечного цилиндра или конуса.

Рассуждая о черных дырах, я недавно узнал потрясающий факт. Его сообщит мне Дэннис Говард из города Эшвил, штат Северная Каролина, хозяин книжного магазина, специализирующего на научной фантастике. Термин «черная дыра» использовал Эдвард Элмер («Док») Смит, «отец космической оперы», в романе, написанном за несколько десятилетий до того, как физик Джон Уилер выдумал его!

Как, должно быть, все любители научной фантастики знают, Смит был пионером дешевых романов о космических кораблях, круживших по Вселенной быстрее скорости света; их пилотами были бесхитростные парни и прекрасные женщины, все они говорили на ужасном американском сленге начала двадцатого века. Первая космическая опера Смита под названием «Небесный жаворонок Вселенной» («The Skylark of Space») была написана незадолго до 1920 года, но не была напечатана (в «Amazing Stories») вплоть до 1928. В главе 12 злодей Марк ДюКесн похищает Дороти Вэйнман, любимую девушку главного героя. Его космический корабль отчаянно пытается скрыться в поле сильной гравитации, которое Смит называет «мертвая звезда».

Если у Вас есть экземпляр этой ерунды, попробуйте отыскать фрагмент, в котором возникает понятие «черная дыра». Кто не смог найти, просто смотрите в разделе следующих ответов.

См. ответ на стр. 215.

10

10

Викторина в стиле научной фантастики

1. Земля, между прочим. Просто бросить камень нужно вверх.

2. Астронавт шел, пока он не уверился, что прошел больше километра. В некоторой точке его пути он прошел ровно один километр.

3. Как отмечает Виктор Серебрякофф в «Книге головоломок общества Менса» («Mensa Puzzle Book», 1982), эта древняя загадка не уточняет, что яйца являются именно куриными. Поскольку яйца рептилий были на земле задолго до того, как появились куры, яйца, очевидно, появились первыми.

4. Джоркенс выиграл пари, напомнив своему другу, что полгода назад Земля была с противоположной стороны Солнца.

5. Часто утверждают, что Великая Китайская стена (как утверждается на странице редактора в «Нью-Йорк Таймс» от 8 марта 1983 года) — «это единственное творение смертных, видимое с луны». Это вовсе не так. Ни одно творение человеческих рук на Земле не видно с Луны

невооруженным глазом. Даже очертания континентов разглядеть трудно.

6. Это удивительное следствие закона обратных квадратов в случае притяжения, когда сила, из-за однородности сферической оболочки, внутри полости равна нулю.

7. Это действительно работает, и даже может развить небольшую мощность. Но это относится к вечным двигателям не более, чем те устройства, которые извлекают энергию из морских приливов. Гироскоп будет воровать мощность у вращения Земли, неизбежно замедляя вращение Земли, хоть и в крошечных количествах.

8. Поверните страницу против часовой стрелки на 90 градусов, и Вы увидите название журнала.

9. Держите страницу горизонтально, у самого кончика носа, закройте один глаз и прочтите сообщение, сильно наклонив страницу. (Спасибо Марвину Миллеру за это оригинальное воплощение старой иллюзии.)

В следующем разделе ответов Вы найдете письмо, посвященное пятому вопросу, и мой ответ на него.

См. ответ на стр. 216.

11

Парикмахеры с Паришестрии

11

Два парикмахера могут сделать всю работу за 22,5 минуты. Вот этот способ: в первые 10 минут первый парикмахер стрижет клиента А, в то время как второй парикмахер моет шампунем клиентов В и С. В течение следующих 2,5 минут первый парикмахер на одну четверть остригает волосы В, а второй парикмахер заканчивает первую половину мытья А. За 10 следующих минут первый парикмахер стрижет С, в то время как второй парикмахер завершает мытье клиента А, а затем, в остальные 7,5 минут завершает стрижку В.

Теперь перейдем к чуть более сложной задаче. Она познакомит Вас с одной из самых полезных формул в элементарной алгебре. Как и прежде, один парикмахер выполняет стрижку за десять минут. Тем временем еще одному парикмахеру, который только учится своему делу, стрижка удается за двадцать минут. Если бы двум парикмахерам позволили вместе обслуживать одного клиента, то сколько бы времени им понадобилось, чтобы подстричь его или ее волосы?

См. ответ на стр. 217.

12

12

Все дело в зеркалах

Если бы «Бублик» перевернулся нечетное число раз в четырехмерном пространстве, он остался бы перевернутым, когда попал обратно в три пространственных и одно временно́е галактическое измерение. ГЛАС знал, что этого не произошло потому, что если бы это случилось, «Бублик» бы взорвался в момент приземления!

Антивещество — это перевернутая материя. Если обычная материя зеркально отражается без изменения ее временно́й направленности, она становится антивеществом. Всем поклонникам фантастики должно быть известно, что, встретившись, материя и антиматерия полностью уничтожаются. Такой большой объект, как «Бублик», состоящий из антивещества, садясь на планету из материи, вызвал бы взрыв намного более мощный, чем любая водородная бомба. Вся масса корабля, плюс сопоставимая с ним глыба материи на планете, были бы полностью преобразованы в энергию.

Зеркальная симметрия играет важную роль в современной физике и космологии, в том числе в теориях великого объединения, созданных для того, чтобы объединить все фундаментальные законы Вселенной. В качестве развлекательного предисловия к зеркальной симметрии попробуйте вот такой таинственный эксперимент. Его придумал и прислал мне много лет назад Фрэнк Б. Брэди.

Только одно из следующих пяти предложений ложно. Все остальные истинны:

1. CARSON WAS BORN CHRISTMAS DAY 1809—LIVED TO THE AGE OF 59 (*Карсон родился в Рождество 1809 — Прожил 59 лет*).

2. BUFFALO BILL WAS BORN IN 1846—HIS BIRTHPLACE WAS SCOTT COUNTY, IOWA (*Баффало Билл родился в 1846 — Место его рождения Скотт Каунти, Айова*).

3. HICKOK DIED DEC 3 1883—DOC BEECH DECIDED HE CHOKED (*Хикок умер в декабре, 3, 1883 — Док Бич решил, что он подавился*).

4. CUSTER WAS KILLED AT LITTLE BIG HORN MONTANA IN JUNE 1876 (*Кастер был убит в Литтл Биг Хорн, штат Монтана, в июне 1876*).

5. CROCKETT OF TENNESSEE MET DEATH AT THE ALAMO IN THE YEAR 1836 (*Крокет из Теннесси встретил смерть в Аламо в 1836 году*).

Зеркало мгновенно определит ложное предложение. Просто поднесите перевернутую страницу к зеркалу и посмотрите на отражение. Вы сможете прочитать только ложное высказывание! Почему зеркало перевернет четыре истинных предложения, а ложное утверждение оставит неизменным? Раздел следующих ответов расскажет это и многое другое.

См. ответ на стр. 219.

13

13

іДьявол

Этот рассказ (сюжет которого я, кстати, стащил у Лорда Дансени, из его рассказа «Сказано под присягой» («Told Under Oath»), сборник «Призраки Хэвисайд Лейер» («The Ghosts of The Heaviside Layer»)) не является по-настоящему противоречивым, но он сильно пахнет самоотносимым парадоксом. Если женщина всегда говорит правду, то ее последнее высказывание должно быть правдой. Но если оно истинно, то вся ее история, в том числе и заключительное утверждение, должна быть ложной. С другой стороны, если ее последнее высказывание ложно, может быть, ее история истинна.

Многие романы, рассказы и стихи обыгрывают похожие темы с самоотоносимостью. Вы найдете несколько классических примеров в главе о логических парадоксах в моей книге «Порядок и неожиданность» («Order and Surprise»). Мой любимый пример — лимерик, но чтобы понять его, Вы сначала должны поразмыслить над следующим двустишием:

There was a young man from Peru
Whose limericks stopped on line two.

Автор лимериков из г. Сочи
Сочинял их всего из двух строчек.

А что Вам подсказывает этот, еще более короткий лимерик?

There was a young man from Verdun.

Поэт из города Уренгой.

Если Вы не замечаете (или не слышите) парадокса, загляните в следующий раздел ответов.

См. ответ на стр. 221.

14

14

Как-Вы-сказали Фланаган

Честь раскусить мошенничество Фланагана с диагоналями куба, а также с полетом воздушного шара я оставляю вам, мои дорогие читатели.

Анаграммой к слову «canoe» является слово «ocean». А сможете ли Вы найти для слова «canoe» анаграмму из двух слов, которая описывала бы привычный геометрический объект?

Я назову ее Вам в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 222.

15

Скажу Вам как релятивист...

15

Причина, по которой гигантские ножницы нельзя использовать для отправки сигналов быстрее скорости света, заключается в следующем: Когда Вы «стрижете» ручками, механический импульс должен передаваться от молекулы к молекуле, а эта скорость этой передачи меньше скорости света. В теории относительности материальные тела не являются абсолютно жесткими. В противном случае Вы могли бы отправлять импульсы быстрее скорости света, просто раскачивая один конец стержня огромной протяженности. К сожалению, колебание распространяется подобно волне, которая движется медленнее, чем свет.

Палвер собирался было закурить, когда Таня, дочь начальника компьютерного отсека на «Бублике», подошла к столу.

— Разве ты еще не бросил курить?

Палвер отрицательно покачал головой.

— Я пытался несколько раз за эту экспедицию, но я не могу представить себе, как продержаться.

— Я знаю легкий способ бросить курить.

— Я весь внимание, — сказал Палвер.

— В этой пачке пятьдесят сигарет, не так ли?

— Да.

— Вот, что тебе предстоит сделать. После того как ты выкуришь одну — ту, которую ты собираешься закурить — подожди одну секунду, прежде чем закурить следующую. После второй сигареты подожди две секунды, прежде чем взяться за следующую. После третьей жди четыре секунды, затем — восемь секунд после следующей, и так далее. Просто продолжай удваивать секунды. И я гарантирую, что ты никогда не выкуришь эту пачку.

— Это и в самом деле так? Почему бы и нет?

— Проверь сам, — сказала Таня.

Палвер провел пару быстрых вычислений на компьютере своих наручных часов. Он был изумлен. Как долго ему придется ждать между 49-й и 50-й сигаретами? Невероятно долгое время (загляните в раздел вторых ответов).

15

См. ответ на стр. 222.

16

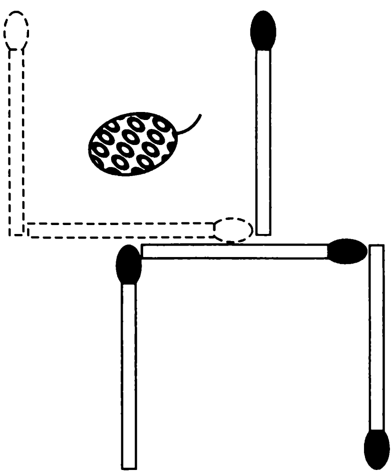
16

Пари в баре «Бублика»

Ни Фларп, ни Палвер не смогли решить эту задачу. Когда Лоск показал, как нужно переместить две спички, Палвер захохотал и ударил себя по лбу.

— Восхитительно! — воскликнул он. — И почему это я сразу не догадался?

— Потому что ты дурень, — сказал Фларп, — вот почему.



Палвер ничуть не обиделся. Он пристально смотрел на схему на столе.

— Я сам не верю в это, — сказал он, наконец, — но, мне кажется, что я нашел способ решить эту задачу путем перемещения только одной спички.

— Одна снежинка еще не снег, — фыркнул Фларп, — это невозможно.

— Не будьте столь уверены, — ответил Палвер и поводил пальцем у Фларпа перед носом. — Вы купите мне еще выпить, если я прав?

— Заметано, — сказал Фларп.

Что, во имя Азимова, задумал Палвер? Вы можете выяснить это в разделе вторых ответов.

16

См. ответ на стр. 224.

17

Поймай пучеглазого монстра

17

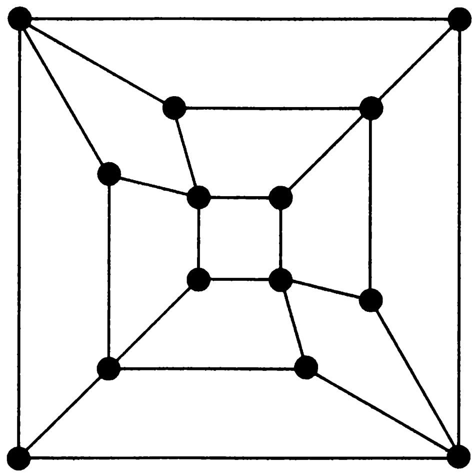
Чет-нечетанин никогда не сможет поймать Пума, пока не изменится четность в игре. Если математическая структура имеет два различных положения, одно из них можно обозначить как четное, другое — как нечетное, и тогда эти два положения приобретают противоположную четность. В теории чисел все четные числа имеют одну четность, нечетные — другую. Некоторые из наиболее известных доказательств в теории чисел, например, доказательство того, что квадратный корень из 2 — иррациональное число, основаны на рассмотрении четности.

В нашей игре два положения отличаются следующим образом: если чет-нечетанин, когда наступает его очередь ходить, отделен от Пума четным числом горизонтальных или вертикальных проходов, его положение является четным. Если число отделяющих его походов нечетное, тогда — нечетным.

Чет-нечетанин не сможет поймать Пума до тех пор, пока будет сохраняться исходная четность игры, то есть до тех пор, пока от поимки Пума его будет отделять четное число вертикальных и горизонтальных проходов, а сам Пум будет далеко от верхнего левого угла. Если чет-нечетанин сможет изменить четность, он с легкостью сцапает Пума в одном из трех прямых углов.

Изменить четность можно только одним способом. Он должен направиться прямо к треугольному блоку в левом верхнем углу и обойти его. Как только он сможет сделать это, Пум запросто попадется.

Вопрос четности, такой как этот, часто возникает в настольных играх. В шашках и шахматах, например, особенно ближе к концу игры, четность определяет, кто выиграет, а кто — проиграет. В прикладной физике четность обозначает правое и левое изображение в зеркале. В 1957 году К. Н. Янг и Т. Д. Ли получили Нобелевскую премию за доказательство того, что в определенных взаимодействиях элементарных частиц при зеркальном отражении четность не сохраняется.



14 городов планеты Чет-нечет

А вот еще одна задачка на четность. На рисунке показана сеть дорог, соединяющих 14 городов на планете Чет-нечет. Возможно ли, выехав из одного города и строго придерживаясь линий, посетить остальные города только по одному разу? В теории графов такая линия называется линией Гамильтона (если такая линия замыкается, ее называют кругом Гамильтона). Существует восхитительно простой способ доказать, используя «контроль четности», что в этой сети нет линии Гамильтона. Доказательство Вы найдете в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 224.

18

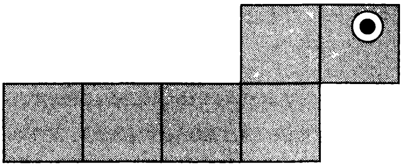
Крестик — нолик — человечек

18

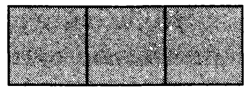
Чтобы выиграть в «Ножку», нужно сначала занять центральную клетку. А после этого всегда делать ход, прямо противоположный последнему ходу Вашего соперника. Вы не победите, пока не займете последнюю клетку, но этот ход всегда будет создавать Ножку. (Конечно, если Ваш противник сделает ошибку, и Вы получите шанс выиграть на следующем ходу, Вы можете сократить игру.)

А как насчет других четырехклеточных животных? Самые маленькие поля, на которых выигрывают Элька, Носатик и Худыш (побеждает первый игрок, второй игрок никогда не может выиграть, что объясняется ниже), это поля 4, 5 и 7 порядков, соответственно. Пышка, на удивление, заканчивается вничью на всех полях. Доказательство этого очень милое, и дается оно в первой главе увлекательной книги Гэрари о том, что он назвал игрой на выигрыш и игрой на ускользание.

Обратите внимание, что во всех до сих пор упомянутых играх на выигрыш первый игрок всегда может избежать поражения. Существует забавное доказательство того, что в играх такого типа второй игрок не может придерживаться выигрышной стратегии. Предположим, что выигрышная стратегия для второго игрока есть. Первый игрок может сделать первый ход произвольно, а затем притвориться, что он является вторым игроком и украсть стратегию второго игрока! Его произвольный первый ход не может быть предопределен. Если стратегия требует сделать ход на данной клетке, он просто делает другой произвольный ход. Теперь мы столкнулись с противоречием. Если у второго игрока есть выигрышная стратегия, то первый игрок может просто украсть ее и выиграть! Наше доказательство, конечно же, ничего не говорит нам о том, как первый игрок может выиграть или свести игру вничью.



Змейка



Троечка

Много задач, связанных с «животными полимино», до сих пор не решено. Давайте рассмотрим Змейку, животное из шести клеток, показанное на рисунке вверху. Может ли первый игрок стать с ней победителем, и если да, то каково наименьшее поле, на котором она выигрывает? Гэрари предлагал $ 50 в награду за первое доказательство того, что есть поле, на котором Змейка выигрывает, составленное до 1990, и $ 100 за первое доказательство того, что она никогда не сможет победить.

В каждой из рассмотренных выше игр есть вариант, в котором оба игрока делают одинаковые метки, скажем X, и первый, кто составит указанное животное, выигрывает. Гэрари называет их одноцветными играми. Ничья, очевидно, невозможна, если поле достаточно большое для того, чтобы на нем поместилось животное. Вам может показаться, что одноцветная игра обычна и неинтересна. Вовсе нет!

Рассмотрим игру с Троечкой, простым животным из трех клеток в линию. Легко заметить, что первый игрок выигрывает одноцветную Троечку в игре на выигрыш на поле 3 порядка. Поле 4 порядка анализировать непросто, а результат на поле 5 порядка до сих пор неизвестен для игры на ускользание.

Каждое из четырехклеточных животных замостит квадрат. Исключением является Ножка, которая не может замостить ни один прямоугольник. Элька замостит квадрат, если и только если ее сторона кратна четырем, а прямоугольник — если и только если произведение ее сторон кратно восьми, при этом обе стороны, по крайней мере — 2. В качестве приятной задачи, ответ которой давать не будем, потому что Вы и так в скором времени решите ее, предлагаю Вам вырезать шесть копий Эльки и узнать, насколько быстро Вы можете сложить из них прямоугольник 3×8.

У пяти четырехклеточных существ в общей сложности 20 клеток. Замостят ли они все вместе прямоугольник 4×5? Ответ: «нет», но Вы могли бы это доказать? Доказательство откроет для Вас действенный метод, основанный на технике колорирования. Загляните в раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 226.

19

Вскрыть за 60 секунд

19

Слово NTH (N^{TH}, «n-ное»).

Таня, которой нравились любые игры в слова, проводила много часов, изучая буквенную панель сейфа. Она не смогла найти слово длиннее, чем SEMISUCCESSES («полу-успех»), в котором использовались бы только буквы на белых клавишах. PHFFFT (букв.: «фффить», т. е. «прочь») было самым длинным выражением, какое она смогла найти на серых клавишах.

Однажды Таня зарисовала клавишу «L» шариковой ручкой. Капитан «Бублика», чтобы избавиться от волокиты, истребил все чернильное на корабле, и поэтому все пользовались только шариковыми ручками.

— Я изобрела новую головоломку, — сказала она своему отцу. — Какое имя зашифровано на этой клавиатуре?

— Это просто, — сказал полковник Лоск. — Я боюсь, что ты заново изобрела велосипед. Ответ NOEL («Ноэль») — «no L». Это было в одной из книг Гарднера по математике. Люди обычно писали его на рождественских открытках, в те дни популярной была рождественская песня «Ноэль, Ноэль...». Не расстраивайся. Ты молодец, что подумала об этом. Вот тебе похожая загадка из старой английской книги головоломок.

Полковник Лоск стер метку с буквы L и зарисовал букву W.

Таня в течение нескольких минут рассматривала буквенную панель.

— Ну, хотя бы намекни! Какое это слово?

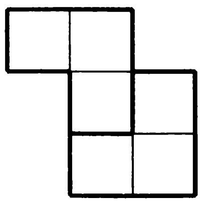
— Скажем так, оно описывает такое место на Земле, где можно быть в абсолютной безопасности во время тотальной ядерной войны.

Таня так и не смогла решить эту головоломку. Если и Вы не сможете, то всегда можно заглянуть в раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 227.

20

Любовь у полиминойцев

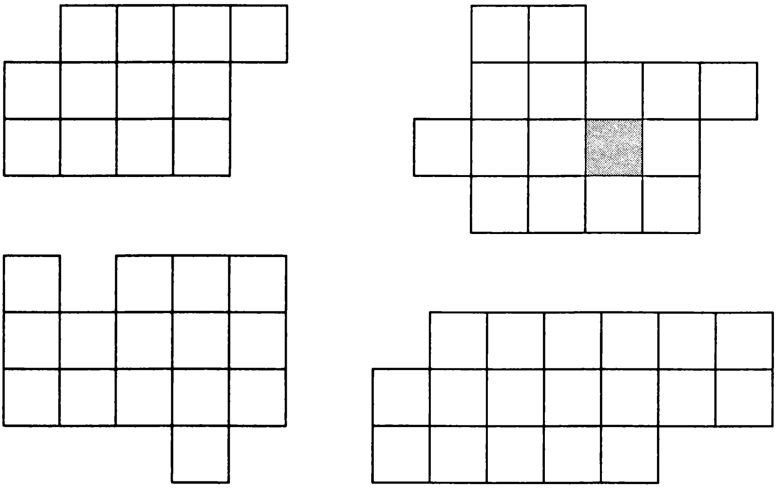


Отсутствует форма, показанная на рисунке вверху.

В дополнение к своим трехклеточным животным доктор Матсу создал полиминойцев до 25 порядка. (Порядок для полимино — это число клеток, которое оно содержит.) Некоторые животные из пяти и более клеток, обнаружил доктор, в редких случаях спариваются по трое, четверо и даже по пятеро.

В верхней части рисунка, слева, Вы видите 12-клеточное животное, созданное парой 6-клеточных существ. Можете ли Вы разделить эту форму на две идентичных 6-элементных особи? Справа от этой формы помещено изображение 15-клеточного животного, образованного спариванием трех 5-клеточных существ. Обратите внимание на отверстие внутри. Можете ли Вы разделить эту форму в три одинаковых 5-клеточных особи?

В нижней части того же рисунка, слева, есть еще один 15-клеточный организм, который Вам предстоит разделить на три идентичных 5-клеточных. А справа для Вас



приготовлена 18-клеточная особь, которую нужно разделить на три идентичных 6-элементных полиминойца. Все способы разделения приведены в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 228.

21

21

Викторина внутренних планет

1. До 1965 года астрономы считали, что период вращения Меркурия точно такой же, как и его период обращения вокруг Солнца. Если это правда, то одно полушарие Меркурия будет постоянно обращено к Солнцу, подобно тому, как наша Луна одной своей стороной всегда развернута к Земле. «Отличие Меркурия», — писал британский астроном Фред Хойл еще в 1962 году, — «не только в том, что он обладает самой горячей поверхностью, но и в том, что самая холодная поверхность во все планетарной системе также принадлежит ему».

Используя радиолокационные отражения от противоположных сторон Меркурия, астрономы в 1965 году обнаружили, что Меркурий и Солнце находятся в постоянном резонансном замке 3-к-2. Маленькая планета поворачивается три раза вокруг своей оси, проходя каждые две орбиты. Там нет сумеречной зоны.

2. До недавнего времени многие астрономы полагали, что Венера, подобно Меркурию, всегда повернута к Солнцу одной своей стороной. Так полагали и многие писатели-фантасты. «Поскольку Венера, конечно же, не вращается, — пишет Стэнли Г. Вейнбаум в книге „Пожиратели лотоса" (Stanley G. Weinbaum, „The Lotus Eaters"), — следовательно, там нет смены дня и ночи. Одна ее сторона всегда освещена Солнцем, а другая — навсегда покрыта мраком, и только либрации планеты создают на сумеречной стороне некое подобие смены времен года».

Радиолокационные измерения в 1962 году раскрыли два удивительных факта. Венера вращается в другую сторону относительно всех других планет Солнечной системы. (Уран имеет неоднозначное направление вращения; его ось практически параллельна плоскости эклиптики, поэтому любой его полюс можно назвать северным.) На Венере Солнце восходит на западе.

Венера обращается вокруг Солнца за 224,7 земных суток. Это может показаться невероятным, но радиолокационные измерения 1962 года показали, что период вращения планеты равен примерно 243 земным суткам, то есть больше, чем ее год.

3. Если бы Земля была уменьшена до размера бильярдного шара, он не был бы таким же гладким, как шар из слоновой кости; он больше походил бы на кожуру апельсина. Вы смогли бы почувствовать шероховатость его поверхности. Если нарисовать орбиту Земли в масштабе на небольшом листке бумаги, было бы невозможно отличить ее от окружности. Путь действительно имеет форму эллипса, но его отклонение от окружности будет слишком мало, чтобы быть заметным.

4. Каждый конец зеленой стороны долларовой банкноты можно сложить, как показано на рисунке, чтобы показать лицо марсианина. Это дает нам забавную головоломку, чтобы производить впечатление на друзей. Сколько глаз на долларовой купюре? Все считают два глаза Вашингтона и большой глаз на вершине пирамиды. Менее очевиден глаз орла — уже четыре. Большинство людей дальше не идет. Нет, Вы настаивайте, что на ней восемь глаз. Просто сложите купюру с двух концов, чтобы доказать это.

Теперь — еще четыре вопроса о тех же планетах.

5. Есть ли у Меркурия магнитное поле?

6. Рассмотрим момент, когда Венера находится ближе всего к Земле. (Эта ситуация называется «нижнее соединение»; далее мы будем называть это просто «со-

единение».) В соответствии с предположением, что орбиты двух планет круговые и находятся в одной плоскости, это будет означать, что Венера находится на отрезке, идущем от Земли к Солнцу. Вопросы: а) сколько земных суток пройдет до следующего соединения? б) Сколько раз Венера обернется вокруг своей оси для наблюдателя на Земле, который постоянно обозревает поверхность Венеры на экране локатора и который воспринимает меняющееся изображение так, как будто бы это было исключительно вращение Венеры вокруг собственной оси. (Хотя это отчасти связано с тем фактом, что они оба вращаются вокруг Солнца и при этом Земля вращается вокруг Венеры.) Представьте Венеру в виде воздушного шара с десятью красными полосами, идущими от одного полюса до другого, так что мы можем рассчитать вращение, считая, сколько полос пройдет у нас перед глазами. Мы можем рассматривать ось Венеры как перпендикуляр к плоскости ее орбиты.

Ответ на вопрос 6 (б) удивит Вас; смотрите второй раздел ответов.

7. Всем известно, что гравитация Луны вызывает приливы на той стороне Земли, которая обращена к Луне. Почему же одновременно возникают приливы и на противоположной стороне Земли?

8. Вы встречаете женщину, которая утверждает, что она марсианка. Она и в самом деле говорит вам, что родилась там. Могла ли она говорить правду?

На вопросы отвечает раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 230.

22

22

Загадки Плоской планеты

15 ходов таковы: C — E — F — D — B — A – C — E — G — F — D — B — C — E — D.

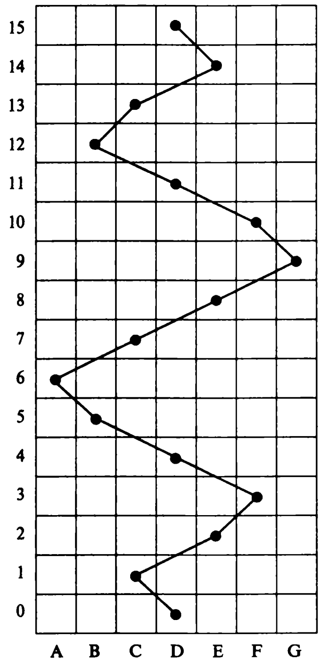
Обобщения и вариации этой классической головоломки ведут нас в захватывающие области алгебры и комбинаторики, где попадаются восхитительные соразмерности. Вот несколько путей исследования:

1. Предположим, в игре участвуют n черных фишек с одной стороны и n белых — с другой. Их разделяет одна свободная клетка. Докажите, что решением для минимального количества ходов является $n(n+2)$ хода.

2. Под каждой буквой приведенного выше решения напишите букву «С», если Вы скользнули в соседнюю клетку, и «П», если перепрыгнули. У Вас получится ряд СПСППСПППСППСПС. Обратите внимание, наша последовательность — палиндром. Докажите, что все решения с минимальным числом ходов на поле длиной $n+1$ состоят из палиндромов скольжений и прыжков.

3. Под каждой буквой найденного ранее решения напишите букву «Б» для белой фишки и «Ч» — для черной. У Вас получится: ЧББЧЧЧБББЧЧЧББЧ, еще один палиндром. Покажите, что все решения для минимального числа ходов — палиндромы.

4. Рисунок вверху показывает график перемещения пустой клетки в решении с минимальным количеством ходов для $n = 3$. Обратите внимание, что перемещениям свойственна 180-градусная симметрия (если график перевернуть, он будет выглядеть точно так же). Докажите,



что это справедливо для всех решений с минимальным числом ходов.

5. Проанализируйте головоломку в случае, если между фишками больше одной пустой клетки.

6. Допустим, что число фишек с каждой стороны разное: m черных фишек и n белых, с пустой клеткой между ними. Докажите, что решение с минимальным числом ходов в данном случае — $mn + m + n$, где mn — прыжки, а $m + n$ — скольжения. Наша исходная задача, конечно же, представляет собой частный случай задачи обобщенной. Допустите, что $m = n$, и у Вас будет формула $n(n + 2)$.

Существует и шуточное решение задачи, в котором Вам понадобится всего 1 ход вместо 15. Подумайте, что это за «ход» мог бы быть? Впрочем, Вы всегда можете заглянуть в раздел вторых ответов.

См. ответ на стр. 234.

22

23

Ножницы Дирака

23

Предположим, Вы повернули ножницы на 720 градусов по часовой стрелке, если смотреть с потолка. Держите ножницы в правой руке. Левой рукой возьмитесь за центр скрученных веревок, поднимите веревку вверх, к дальнему концу ножниц, перекиньте петлю через ножницы и позвольте ей упасть в Вашу правую руку. Возьмите ножницы в левую руку. Отпустите ножницы правой рукой, позволяя веревочной петле упасть. Поднимите ножницы. Вы там, откуда начали. Все веревки распутались!

Чтобы продемонстрировать эту головоломку, Вам не обязательно использовать именно ножницы. Подойдет любая вещь, к которой может прикрепляться любое количество шнуров, при условии, что их будет больше двух. Свободные концы можно закрепить в любом месте в комнате. Представьте себе, например, кофейник с десятком эластичных лент, протянутых от него до любого места на любой стене, или на потолке, или на полу. Поверните кофейник на 360 градусов вокруг любой оси. И никакие манипуляции с эластичными лентами не помогут Вам привести их в первоначальное положение. Поверните кофейник еще раз, в сумме 720 градусов, и Вы всегда сможете распутать их.

Еще один вариант эксперимента, который, в некоторой степени, поможет быстрее понять, как можно повернуть объект, постоянно присоединенный к стене с помощью кабеля или шланга, не перекрутив и не переломав при этом кабель, вот какой. Он также напоминает, что это весьма интересное наблюдение хорошо знакомо всем, кто когда-либо сматывал или разматывал катушку шланга или электрического провода и боролся с его запутыванием.

Возьмите целый рулон туалетной бумаги. Прижмите свободный конец бумаги тяжелой книгой к столу и отойдите на некоторое расстояние от стола, держа рулон в руке. Вы должны быть лицом к столу и держать рулон в горизонтальном положении так, чтобы полоса, идущая к столу, не скручивалась. Вставьте два пальца правой руки в отверстие рулона справа и держите ими рулон. «Снимите» один полный оборот бумаги и оттяните ее от рулона в сторону левой рукой, но не отрывайте бумагу и не поворачивайте рулон. Полоска бумаги окажется скрученной. Повторите операцию, но поменяйте руки (левой держите рулон, правой — бумагу). При втором «снятии» бумаги направо полоса скручивается в обратную сторону, при этом конец полосы становится более длинным и раскручивается. До сих пор мы не поворачивали рулон. Теперь мы можем повернуть рулон на два полных оборота вокруг своей оси, раскручивая то, что было снято, и мы вернемся в исходное положение. Повторяя этот процесс, мы можем повернуть рулон столько раз, сколько нам захочется, не разрывая бумагу.

Мы хотим объяснить, как эти эксперименты касаются «свойства вращения, при котором два оборота тела вокруг оси могут непрерывно превращаться, через набор движений, каждое из которых завершается в своей исходной позиции, в полное отсутствие движения» (см. письмо Дирака ко мне). Куски туалетной бумаги, которые постоянно остаются на рулоне, подвергаются двум полным оборотам в нашем эксперименте. Куски, находящиеся дальше, подвергаются другим движениям, но каждый из них возвращается в исходное положение в конце эксперимента. Кроме того, движение каждого очень близко к тому, что и в соседних с ним частях, если мы рассмотрим отдельные мелкие кусочки. Если мы пройдемся вдоль полосы, пока не дойдем до книги, мы найдем ряд движений, упомянутых Дираком, которые заканчиваются отсутствием движения.

Так как вращение идет вокруг оси, перпендикулярной направлению полосы, эксперимент представляется весьма предсказуемым, но, конечно же, начальное направление полосы не имеет значения; наша бумага может протянуться над столом, и мы могли бы приклеить ее к стене в точке на оси вращения рулона.

Веревки Дирака моделируют то, что топологи называют «расслоенными пучками». Если Вам захочется узнать больше о том, как трюк с ножницами связан с расслоенными пучками и квантовой механикой, обратитесь к работе Герберта Дж. Бернстайна и Энтони В. Филлипса, «Расслоенные пучки и квантовая теория» (Herbert J. Bernstein, Anthony V. Phillips, «Fiber Bundles and Quantum Theory») в журнале «Scientific American» за июль 1981 года. Вы также можете прочесть письма, посвященные этой статье, в октябрьском и декабрьском выпусках журнала за тот же год. Описание практического применения ножниц Дирака в гениальном механическом устройстве, которое позволяет непрерывно вращать кабель без скручивания, Вы можете найти в том же журнале, в разделе «Любитель науки» («Amateur Scientist») за декабрь 1975 года. Другие хорошие источники: Этан Д. Болкер, «Спинорный ключ» (Ethan D. Bolker, «The Spinor Spanner»), журнал «American Mathematical Monthly», ноябрь 1973, а также М. Х. А. Ньюман, «К задаче с веревками Дирака» (M. H. A. Newman, «On a String Problem of Dirac») в журнале Лондонского математического общества, июль 1942.

О Дираке есть множество анекдотов. Самый известный — с участием сестры Юджина Вигнера, лауреата Нобелевской премии по физике. Вскоре после того, как Дирак женился на сестре Вигнера, он принимал у себя своего старого друга, который еще не слышал о женитьбе

Дирака. Я передам слово Георгию Гамову, чтобы он мог закончить этот рассказ вместо меня историей из своей книги «Тридцать лет, которые потрясли физику» («Thirty Years That Shook Physics»). Друг Дирака «увидел рядом с ним привлекательную молодую женщину, которая подавала чай. Он устроился удобно на диване... „О!“ — воскликнул Дирак. — „Я забыл вас представить. Это сестра Вигнера“».

Гамов рассказывает еще об одном случае, имевшем место, когда Дирак посещал Петра Капицу, знаменитого русского физика. Дирак увлеченно рассматривал вязание его супруги. Через несколько часов после своего визита он бросился обратно в дом, чтобы рассказать Анне Алексеевне, что он размышлял о топологических аспектах ее вязания и обнаружил второй способ вязки. После того, как он показал ей свой второй способ, Анна Алексеевна сообщила ему, что он заново изобрел колесо.

Наша последняя история, и вновь от Гамова, касается вопроса и ответа, которые прозвучали после одной из лекций Дирака. Кто-то встал, чтобы сказать: «Я не понял, как Вы вывели вон ту формулу на левой стороне доски». Догадались ли Вы, как Дирак ответил? Его ответ — в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 236.

24

Выстрелы «в яблочко» и «в молоко»

24

1. Лукреций, «О природе вещей», около 99 г. до Р. Х. Это точное описание испарения показывает, что древнегреческая и римская теория частиц имела более серьезное эмпирическое основание, чем некоторые историки науки это любят признавать.

2. Руджер Иосип Бошкович, «Теория натуральной философии», 1758. В сегодняшней теории частиц считается, что материя состоит из шести видов лептонов и шести видов кварков, все они подобны точкам и не имеют внутренней структуры.

3. Джонатан Свифт, «Путешествие в Лапуту» из книги «Путешествия Гулливера», 1726. До 1877 года два спутника Марса обнаружены не были. Ближний, Фобос, совершает полный оборот вокруг него за семь часов с небольшим, а Деймос, дальний спутник, — примерно за 31 час. То, что у Марса есть два спутника, еще раньше предсказал Кеплер. Это, вероятно, и стало основой расчетов Свифта.

4. Сэмюэл Джонсон, в письме к миссис Трейл, 12 ноября 1791 г.

5. Роберт Гук, британский физик, из труда «Микрография», 1664.

6. Бенджамин Франклин, письмо аббату Сулави, 22 сентября 1782 г.

7. Эразм Дарвин (дед Чарльза Дарвина), из труда «Зоономия», 1794.

8. Альфред Теннисон, «Локсли Холл», 1886.

А теперь посмотрим, сможете ли Вы назвать имя одного ученого, ответственного за следующие оплошности:

«Говорящее кино не вытеснит обычный немой кинофильм... В кинопантомиму сейчас вкладывают столь огромные средства, что было бы нелепо нарушать ход вещей» (1913).

«Я не сомневаюсь в том, что исчерпаны возможности самолета, который еще два-три года назад считался решением проблемы [летающих машин], и что мы должны обратиться к поискам в другим областях» (1895).

«Через пятнадцать лет гораздо больше электроэнергии будет продаваться для электрического транспорта, чем для освещения» (1910).

«Ни под каким предлогом нельзя оправдывать использование высокого напряжения и переменных токов, будь то научные или коммерческие соображения... Мое личное стремление — целиком запретить использование переменных токов. Они не нужны, поскольку опасны» (1889).

См. ответ на стр. 236.

25

Фларп снова подбрасывает монетку

25

— Предположим, шансы в пользу четного числа орлов, — объяснила Таня. — Очевидно, что то же самое можно сказать и о четном числе решек, потому что вероятность того, что на любом броске выпадет орел, такая же, как и для решки. Шансы для одного из случаев никак не могут выше, поэтому предположение, что шансы могут быть в пользу орла или решки, ложно. И единственный случай, когда оно ложно, это тот случай, когда вероятность выбросить четное число орлов в точности равна вероятности сделать то же самое с четным числом решек.

Даже Фларп был удивлен простотой рассуждений Тани. Он стал подбрасывать монетку, но Таня остановила его, положив свою ладонь ему на руку.

— Оставим мужской шовинизм, — сказала она. — У меня есть такое же право играть, как и у любого из вас двоих. Давайте подбросим монетку для тройного варианта решения.

— Но как мы сможем сделать это? — спросил Фларп. — У меня есть только одна монета, да и Палвер говорит, что у него только купюры.

— У меня есть пара изменений, — сказала Таня, — но вам и в самом деле не понадобится больше одной монеты.

И снова, что же, ради космоса, у Тани на уме? Как можно с помощью всего одной монеты принять справедливое решение для трех человек? Решение Вы найдете во втором разделе ответов.

См. ответ на стр. 237.

26

Ночной калейдоскоп

Рассуждения розовой дамы кажутся интуитивно верными, но они совершенно неправильные. Вводная информация суть важна при оценке возможности того, что мужчина был синим.

Я столкнулся с этой задачей в книге Говарда Гарднера «Новая наука о разуме: история революции в познании» («The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution»). В оригинальной задаче речь шла о цвете машины такси, как его увидел человек с плохим зрением. Давайте конкретизируем ее с помощью простой модели: итак, у нас есть ваза со 100 цветными стеклянными шариками, 15 из них зеленые, 85 — синие. Шарики перемешались, и некто, закрыв глаза, вытягивает из вазы шарик. Он открывает глаза, замечает цвет шарика, а затем опускает его обратно в вазу. В комнате больше никого нет.

Потом он говорит своему другу: «Я вытянул зеленый шарик».

Допустим, что человек хорошо отличает зеленый от синего 4 из 5 раз; тогда какова вероятность того, что он взял синий шарик вместо зеленого? Есть несколько подходов к ответу на этот вопрос. Первый — иллюстрация при помощи дерева вероятностей, показанного на рисунке внизу. Нижние цифры демонстрируют четыре процентных показателя:

1. В 68 процентах случаев человек говорит, что вытянул синий, и шарик оказывается синим.

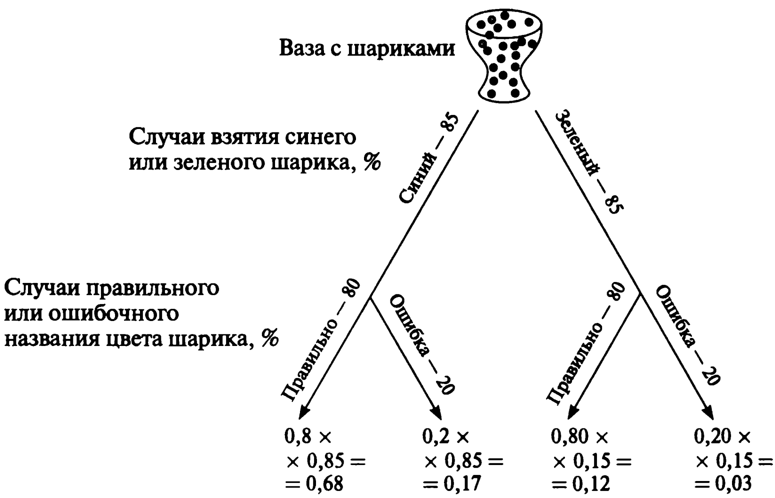
2. Процент синих шариков, названных зелеными — 17.

3. В 12 процентах случаев был назван зеленый цвет, и шарик оказался зеленым.

4. 3 процента случаев приходится на зеленые шарики, названные синими.

Эти проценты, в нижней части перевернутого дерева, получены путем умножения значений на двух отрезках, соединяющих каждый конец ветви с вазой на самом верху. Все четыре случая, конечно же, взяты по отношению к 100 процентам.

В нашем примере человек сказал, что вытянул зеленый шарик. 0,17 + 0,12, или 29 процентов от всех случаев. Таким образом, правильный ответ на вопрос о вероятности того, что шарик (или подозреваемый в убийстве) был синим, составляет 17/29, или больше, чем 1/2. Большая разница по сравнению с оценкой розовой дамы в 1/5!



Если Вы сомневаетесь в правильности этого ответа, то, вероятно, сможете убедиться в том, что он верный, благодаря вот такой, более трудоемкой, процедуре.

Обозначив синие шарики B, а зеленые — G, изобразите 85 B и 15 G на листе бумаги. Обведите 1/5 всех

В, чтобы отметить то количество раз, когда синий шарик ошибочно был назван зеленым. Затем отведите 4/5 всех G, отмечая все разы, когда зеленый шарик был назван правильно. У Вас получится 29 обведенных цифр, обозначающих те 29 раз, когда был назван зеленый цвет. А теперь подсчитайте количество В в этой группе. Окажется, что их ровно 17. Следовательно, вероятность того, что шарик был синим, составит 17/29 = 0,586 +.

К чести розовой дамы, я должен добавить, что Л. Джонатан Коэн, философ из Оксфордского университета, горячо отстаивал ее ход рассуждения. Он утверждал, что в подобном суде мы имеем дело не с конкретной вазой и шариками, когда допустимо повторять эксперимент сотни раз. У нас есть только единичный случай, и, зная, что человек, называя цвета, ошибся 1 раз из 5 — это все, что нам нужно знать. Вводная информация не имеет значения. Розовая присяжная рассуждала должным образом, оценивая вероятность того, что беглец был синим, в 1/5.

Если Вы хотите подробнее изучит аргументы Коэна, Вы найдете их в его полемичной статье «Можно ли экспериментально продемонстрировать человеческую иррациональность?» («Can Human Irrationality Be Experimentally Demonstrated?») в журнале «Behavior and Brain Science» (1981. Vol. 4). Я на стороне большинства статистиков, которые полагают, что Коэн заблуждается, и что все, что он сделал, только лишний раз доказывает, что очень немногие люди имеют достаточно тонкое чутье в парадоксальных аспектах статистики, для того чтобы составлять хорошие вероятностные суждения.

Давайте сведем задачу к абсурду. Предположим, человек правильно назвал цвет только в половине случаев. (Может быть, он подбросил монетку, решая, какой цвет назвать — синий или зеленый.) Если бы у вас не было вводной информации о соотношении синих и зеленых шариков, было бы разумно оценить вероятность как 1/2 того, что шарик был синим, когда человек сказал, что он — зеленый. Но Вы, конечно же, изменили бы свою оценку, если бы узнали, что в вазе лежит миллиард синих шариков и всего один зеленый. И если Вы знаете, что в вазе только синие шарики, Вы бы предположили, что сказанное этим человеком не имеет никакого значения.

Но не так быстро! Давайте защищать дело Коэна. Наш пример с вазой предполагает, что человек, который скрылся с места преступления, был случайно выбран из смешанной расы города, но мы в действительности не знаем этого. У женщины могло быть много приятелей, все или большинство из которых были зелеными. Позиция Коэна касается ситуаций, подобных этой, случаев из реальной жизни, которые слишком плохо определены, и в которых слишком много неизвестных факторов, чтобы применять формальные рассуждения. В любом случае, эта задача породила множество острых споров. Вы найдете список наиболее важных статей в любой книге Гарднера.

27

Еще раз, Как Вы сказали?

27

Рассмотрим клетку 2. Двухходовой последовательности, однозначно приводящей на нее короля, нет. В-В является неоднозначной, поскольку она могла также привести короля на клетку 1 или 3. В-Л однозначной тоже не будет, потому что она также может привести короля на клетку 1. Попробуйте любые комбинации — Вы не сможете найти однозначную двухходовую последовательность, которая привела бы короля на любую из клеток по сторонам или на центральную клетку.

Таким образом, согласно определению, эти клетки неразрешимы. Человек в соседней комнате мог переставлять короля на любую из этих пяти клеток, а затем говорить абсолютную правду!

Что же здесь происходит? Очевидно, мы можем доказать, что все девять клеток разрешимы, а также, что пять из них — нет!

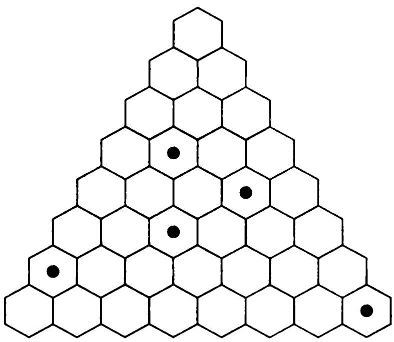
Вы можете заметить, однако, что мы незаметно подменили значение «неразрешимости», переходя ко второй части доказательства; исходное определение требует, чтобы мы установили, где находится король, пользуясь только информацией о двух символах, но потом мы скользнули к передаче дополнительной информации о том, что клетка «неразрешима».

Этот парадокс тесно связан с более знакомым нам «парадоксом узника» — темой одной из глав в моей книге «Парадокс узника» («Unexpected Hanging»), а также головоломки 20 в книге «Научно-фантастические головоломки» («Science Fiction Puzzle Tales»). Этот вариант с шахматным королем изобрел Рой Соренсен, философ из университета штата Делавэр. Он излагает его в своей статье «Непокорные варианты парадокса предсказания» («Recalcitrant Variations of the Prediction Paradox») в «The Australian Journal of Philosophy» (December 1982. Vol. 69. P. 355–362).

Как сказал Фланаган, показывая мне этот парадокс: «Это самое неслыханное из того, что я когда-либо слышал».

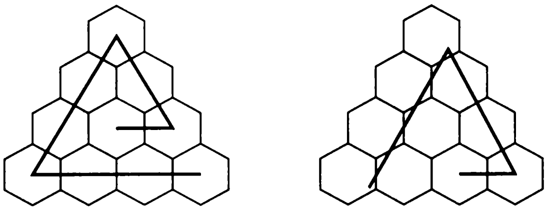
28

Алиса в Стране пчел



Как можно разместить на треугольном поле 8-го порядка пять не атакующих пчелиных ладей, показано выше. Герберт Тейлор, математик из Калифорнии, изучал проблемы, связанные с не атакующими пчелиными ладьями на сотовых полях как треугольной, так и шестиугольных формы, но у нас пока нет доступа к интересным результатам его исследований. Я могу сказать Вам, однако, что максимальное число не атакующих пчелиных ладей на треугольниках со сторонами от 9 до 13 клеток, это 6, 7, 7, 8 и 9 соответственно. Загляните в раздел вторых ответов.

На прощание Герберт показал Алисе несколько головоломок с сотовыми треугольниками. Вот, например, одна, которая требует провести непрерывную линию полета пчелы (кратчайшего расстояния из прямых отрезков), которая пройдет через все клетки треугольника 4-го порядка. Герберт показал Алисе, как это можно сделать четырьмя полетами пчелы (слева). Немного подумав, Алиса смогла сделать это тремя линиями (справа).



Задача «Полет пчелы»

— Не скажжжу пче-му, — прожужжал Герберт, — но это можно сделать и за два полета пчелы.

Нужно соблюдать два правила. В каждую клетку можно зайти один и только один раз, а линии должны проходить полностью в пределах треугольника. Ответ и еще больше вопросов Вы найдете в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 238.

29

«Задира» едет в Баффало

29

Это штаты Вайоминг (Wyoming) и Юта (Utah).

— Позвольте, я расскажу Вам о замечательном числовом совпадении, — сказал я Зэ. — Годы рождения Вашингтона, Линкольна, Франклина Рузвельта и Рейгана соответственно 1732, 1809, 1882 и 1911. Поставьте их в ряд. Под первым числом напишите разницу между ним и вторым числом. Под вторым — разницу между ним и третьим. Под третьим напишите, насколько оно меньше четвертого, и под четвертым — его разницу с первым.

Нас интересуют только абсолютные значения — разности, выраженные в положительных числах. Эта процедура дает нам новый набор из четырех чисел, вот такой:

1732	1809	1882	1911
77	73	29	179

Повторяйте процедуру как можно дольше. В результат трудно поверить:

77	73	29	179
4	44	150	102
40	106	48	98
66	58	50	58
8	8	8	8
0	0	0	0

— Как необычно! — воскликнул автомобиль. — Дайте мне пару минут, чтобы проанализировать это.

— Конечно, приятель. Но при условии, что Ваши персептроны будут следить за дорогой.

— Не беспокойтесь. Я обрабатываю данные параллельно, и Вам это хорошо известно.

Это и вправду замечательное совпадение? Загляните во второй раздел ответов.

См. ответ на стр. 241.

29

30

Аркады Раймонда Палмера

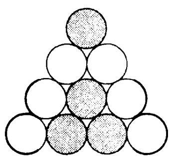
30

Эксперимент предполагает, что два стальных шарика, находящихся далеко друг от друга, падают одновременно. Тщательное измерение их пути покажет, что они параллельны, если лифт идет с ускорением вверх. Если он находится в состоянии покоя на планете, эти пути будут сходиться друг к другу, так как каждый шар падает в сторону центра планеты.

Не нарушает ли это знаменитый принцип эквивалентности Эйнштейна? Нет, но это доказывает, что гравитационное поле, окружающее планету или звезды, имеет сферическую структуру, которую нельзя продублировать в лифте, идущем с ускорением вверх.

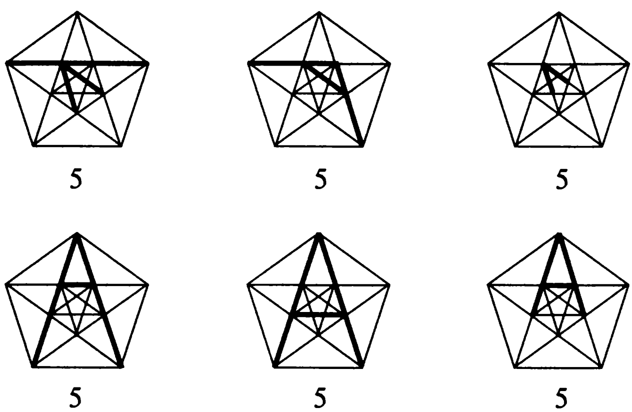
31

Ребус с флагами на Марсе



8	1	6
3	5	7
4	9	2

Сумма: 31



Сумма: 30

Рисунок вверху слева показывает, как заштриховать четыре окружности. Решение единственное, не считая поворотов. Отметим, что два из равносторонних треугольников, которые должны быть устранены закрашиванием, это треугольники, не имеющие горизонтальной стороны.

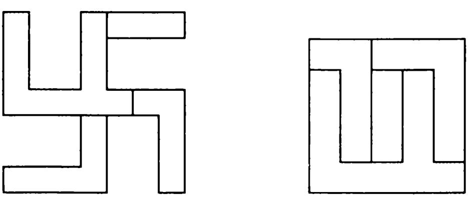
Рисунок вверху справа показывает, как провести линию на ло шу, чтобы получить максимальную сумму 31.

Чтобы построить магический квадрат 3 × 3 с последовательностью четных чисел, начиная с 2, нужно просто удвоить число в каждой клетке ло шу. А теперь отнимите 1 от числа в каждой клетке этого «четного» магического квадрата, и у Вас будет «нечетный» квадрат, содержащий последовательные нечетные номера, начинающиеся с 1.

Магические константы этих квадратов 30 и 27 соответственно. Константа любого магического квадрата, кстати, легко определяется. Просто сложите все числа в квадрате и разделите сумму на количество горизонтальных строк (или вертикальных столбцов).

После того, как ло шу был предъявлен, построить его четную и нечетную версии было легко; но как найти выражения для того, чтобы назначить цифру каждой клетке магического квадрата 3 × 3? Создатели флага ло шу, возможно, шли путем проб и ошибок; но, может быть, Вы придумаете более систематический подход (не обращая внимания на второй раздел ответов), найдя отношение между записью в центре квадрата и «магической» константой.

Нижний рисунок показывает, как найти шесть комплектов с буквой «А» и сделать это в общей сложности 30 раз. Ответ на задачу со знаком гаммадиона даем ниже.



См. ответ на стр. 245.

32

32

Исчезающая планка

Несмотря на то, что только половина планки была отрезана, планка исчезнет в том смысле, что ни одна оставшаяся часть не будет иметь длину больше нуля! Вы можете убедиться в этом, рассмотрев, как убывает длина сегментов, которые остаются после каждого шага. Первый шаг оставляет два сегмента длиной 3/8. Сегменты становятся все меньше и меньше, после каждого шага, их длина стремится к нулю в пределе. Другими словами, после того, как Великий Алеф выполнит свою задачу, не останется ни одного кусочка планки, который имел бы длину больше нуля. Вот так. Значит, ничего видимого не останется. Планка практически исчезла, даже при том, что осталась еще целая половина от ее исходной длины! Доказательство того, что часть планки все еще на сцене, Вы найдете в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 248.

33

987 654 321

Вот ответы на девять вопросов числовой викторины:

9. Число 987 654 321 делится на 9, и, следовательно, является композитным (не простым). Самый быстрый способ определить, кратно ли число 9 — сложить все его цифры, затем сложить цифры в полученной сумме, и продолжать так до тех пор, пока не остается одна цифра. Исходное число кратно 9, если и только если эта последняя цифра (она называется «цифровым корнем» числа) будет цифрой 9. Сумма цифр числа 987 654 321—45, а $4 + 5 = 9$, поэтому исходное число делится на 9. Конечно же, это означает, что оно также делится и на 3.

8. У всех факториалов больше 1! Есть 2 в качестве фактора, и, следовательно, они должны быть четными. Кроме того, все факториалы больше 5! должны заканчиваться цифрой 0. Каждый критерий сразу показывает, что 987 654 321 — это не факториал.

7. Любое число, которое делится на четное число, должно заканчиваться на четную цифру. Так как наше гигантское число заканчивается на 1, оно не может быть кратным 2, 4, 6 или 8. Оно не может быть кратным 5, потому что все нечетные числа, кратные 5, заканчиваются на 5. Делится оно на 7? Да. Число 987 654 321 987 654 321 делится на 7 без остатка, поэтому наше гигантское число, которое состоит из полумиллиона повторений этого, кратного 7, также делится на 7.

6. Самый быстрый ручной способ узнать, кратно ли 11 большее число — это сложить все цифры, стоящие

на четных позициях, затем сделать то же самое для тех, которые стоят на нечетных позициях, а потом найти разность двух сумм. Исходное число кратно 11, если и только если разность равна 0 или кратна 11. Когда мы применяем этот способ проверки к числу 987 654 321 987 654 321, суммы цифр на четных и нечетных позициях составят 45; их разность — 0. Значит, это 18-значное число кратно 11, и поэтому наше гигантское число тоже кратно 11.

5. Если мы разделим

987 654 321 987 654 321 на 987 654 321,

частное, очевидно, составит 1 000 000 001, поэтому и гигантское число также можно разделить на 1 000 000 001. Поскольку

$$1\,000\,000\,001 = 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 52\,579$$

(простые множители числа), мы знаем, что наше гигантское число также кратно каждому из этих множителей. С помощью этой уловки можно определять множители для огромных чисел без необходимости писать сложные компьютерные программы.

4. Как сказано в большинстве введений в теорию чисел, даже совершенные числа все имеют вид

$$(2^p - 1)2^{p-1}, \quad \text{где } 2^p - 1 \text{ — простое число.} \qquad (1)$$

В частности, четное совершенное число должно иметь ровно два разных простых множителя.

Простые множители совершенного числа должны удовлетворять различным отношениям. Если есть больше чем 2 простых множителя, удовлетворить им всем не представляется возможным, и большинство математиков полагают, что нет иных идеальных чисел, кроме четных вида (1). Доказательства этому не существует; но для данного нечетного числа легко показать, что оно не является совершенным, даже если нет возможности найти его множители. Если оно имеет маленькие множители, мы сможем быстро найти условие, которое не выполняется; если у числа есть только большие множители, тогда сумма его делителей будет намного меньше, чем само это число, а значит, нет необходимости использовать более тонкие отношения, упомянутые выше.

Мы знаем, что $N = 987\,654\,321$ делится на 9, и мы видим, что 9 является самой высокой степенью 3, которая делит его. Пусть S — сумма тех делителей N, которые не кратны 3. Тогда $3S$ — сумма всех делителей, которые кратны 3, но не кратны 9, а $9S$ — сумма всех делителей, которые кратны 9. Следовательно, сумма всех делителей, включая N, имеет вид $(1 + 3 + 9)S$, и мы хотим показать, что это не $2N$. Если бы это было так, N будет делиться на 13, но когда мы выполняем деление, мы видим, что это не так. В качестве примера того случая, когда нет малого множителя, мы докажем, что $M = 8\,280\,485\,077$ не является совершенным. Мы используем простые числа < 17 и увидим, что ни одно из них не делит его. Пусть разложение M на простые степени имеет вид

$$M = p^a q^b \ldots .$$

Поскольку каждый множитель $\geqslant 17$ и $17^9 > M$, существует по крайней мере 8 из них. Сумма всех делителей, включая M, выглядит так:

$$\begin{aligned} \sigma &= (p^a + p^{a-1} + \cdots + 1)(q^b + q^{b-1} + \cdots + 1) \cdots < \\ &< p^a \frac{p}{p-1} q^b \frac{q}{q-1} \cdots \left(= M \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1} \cdots \right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Неравенство было получено при замене конечных геометрических прогрессий соответствующими бесконечными прогрессиями, чьи суммы задаются более простыми формулами.

Если бы M было совершенным, σ составила бы $2M$, и, следовательно, произведение дробей во второй строке (2) было бы > 2. Однако, поскольку простые множители $p, q, \ldots$ все $\geqslant 17$, имеем

$$\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \leqq 1 + \frac{1}{17} < 1{,}06, \qquad \frac{q}{q-1} < 1{,}06, \ldots.$$

Произведение по крайней мере 8 таких множителей $<1{,}6$. Поэтому M не является идеальным числом.

33

Когда четное совершенное число, которое, как мы знаем, имеет вид (1), записано в системе счисления с основанием 2, оно имеет простую схему. Оно состоит из p единиц, за которыми идет $p-1$ нулей, и оно является совершенным, если и только если число, представленное последовательностью единиц (в двоичной системе 2, конечно), является простым. Например, первые четыре совершенных числа — это 6, 28, 496 и 8128. В двоичной записи они выглядят так: 110, 11 100, 111 110 000 и 1 111 111 000 000. Простые числа, записанные единицами, это 3, 7, 31 и 127. Мы с легкостью замечаем, что число единиц само по себе должно быть простым, чтобы двоичное число, состоящее из единиц, само было простым. Действительно, если число единиц делится, скажем, на 3, то рассматриваемое двоичное число делится на 111. Например, $111\,111\,111\,111 = 111 \times 1\,001\,001\,001$. При более распространенном способе записи это утверждение выглядит так: $2^n - 1$ является простым, только если n простое число.

Можете ли Вы построить подобное доказательство того, что число $100\ldots01$ может быть простым, только если количество цифр, не считая последней, является степенью 2? Загляните в раздел вторых ответов.

Числа $2^p - 1$ называются числами Мерсенна. Последовательность чисел Мерсенна возрастает очень быстро. Определение их признака простоты перечислением всех возможных делителей, даже при помощи компьютеров, не обсуждается, разве что исключением станут новейшие из них. Тем не менее, Эдуард Лукас придумал, как определить признак простоты для таких чисел. Значения

p больше 100 можно определить от руки. На компьютере можно проверить числа с p порядка 100 000. Простое число Мерсенна $2^{21\,701} - 1$ обнаружили студенты Лаура Никель и Курт Нолл; последний обнаружил также, что $2^{23\,209} - 1$ является простым числом (в 1979 году). Программа, написанная Дэвидом Словински и запущенная на суперкомпьютере «Cray», принадлежащем «Chevron Geosciences», обнаружила, что $2^{216\,091} - 1$ является простым числом. Это 30-е из известных простых чисел Мерсенна. Простое число, найденное в «Chevron Geosciences», состоит из 65 050 знаков в десятичной форме и является крупнейшим простым числом, известным автору на момент написания этих строк; в наши дни, чтобы побить этот рекорд, много времени не потребуется.

Неизвестно, существует ли бесконечно много простых чисел Мерсенна. Поскольку распределение простых чисел не носит регулярный характер, среди чисел величиной n, в среднем, каждый $(\ln n)$-ный является простым числом, где ln — обозначение естественного логарифма. (Наименее точные формы этого весьма удивительного утверждения доказать не так уж сложно, но мы должны адресовать вас к учебникам по теории чисел.) Если мы предположим, что $2^n - 1$, вероятно, так же будет простым числом, как и случайно выбранное нечетное число такого же размера, то простых чисел Мерсенна должно быть бесконечно много. Хотя это предположение и сомнительно, оно предсказывает, что должно быть около 36 простых чисел Мерсенна $< 300\,000$, то есть в пределах той же приблизительной цифры, что и их фактическое количество, 30.

Сравнительно новые изложения вычислений с использованием идеальных чисел и доказательство теста Лукаса можно найти в книге «Вычислительные методы в теории чисел» («Computational Methods in Number Theory», H. W. Lenstra Jr., R. Tidjeman edit., Centre Tract 154, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1982). Вы также можете обратиться к следующим работам: Карл Померанс, «Заметки о проверке простоты» (Carl Pomerance, «Notes on Primality Testing», MAA Notes, 1984); Даниэль Шенкс, «Решенные и нерешенные проблемы в теории чисел» (Daniel Shanks, «Solved and Unsolved Problems in Number Theory», 3rd Ed. Chelsea, N. Y., 1985).

3. Единственное решение:

$$9+8+7+6+5-4-32+1=0.$$

2. Вот доказательство того, что ни одно число, начинающееся с 9, со знаками в последовательном циклическом нисходящем порядке (с или без 0, разделяющего повторяющиеся последовательности), не может быть простым. Все простые числа, кроме 2 и 5, заканчиваются на 1, 3, 7 или 9. В каждом из этих случаев сумма цифр числа, которое мы рассматриваем, кратна 3; следовательно, число не является простым. Так же, как и те, что заканчиваются на 5 или на четную цифру.

Простые числа могут составляться, если цифры взяты в порядке возрастания. Наименьшее такое простое число — это 1 234 567 891. Известно еще только одно простое число этого типа. Он состоит из 123 456 789, повторенного семь раз, а затем — 1 234 567. Алан Кассель в 1977 году выдвинул гипотезу (с почти полной уверенностью) о том, что это гигантское число является простым. Что это так, в 1978 году доказали Р. Э. Крэндалл и Майкл А. Пенк.

1. Чтобы сложить карты для трюка с написанием, просто выполните операции в обратном порядке! Держите туз в левой руке, сверху положите двойку, затем напишите «два», одновременно перекладывая три карты снизу наверх. Проделайте то же самое с 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. У Вас получится стопка карт, сложенных как раз для выполнения трюка.

Метод, очевидно, применим к написанию с любым количеством карт в любом желаемом порядке. Например, Вы можете сложить все 52 карты так, чтобы Вы могли записывать и откладывать их в любом порядке, какой Вам придется по душе. Конечно, это могут быть и не игральные карты. Можно взять бейсбольные карточки, фотографии друзей или любые картинки. Вы всегда сможете сложить свою «колоду» так, чтобы выполнять трюк с написанием имен или того, что изображено на картах.

Вот несколько забавных числовых трюков с числом 987 654 321, которые Вы можете проделать с помощью калькулятора. Разделите 987 654 321 на 123 456 789. Ответ Вас удивит. Еще один сюрприз ждет Вас, когда Вы разделите 987 654 312 (обратите внимание, что здесь 2 и 1 поменялись местами) на 8. Еще больше сюрпризов принесет Вам сложение 123 456 789 и 987 654 321, а также, если Вы вычтете меньшее из большего. В последнем случае сначала не очевидно, что все девять цифр представлены в разности. Если 987 654 321 умножить на 2, 4, 5, 7 или 8, все десять цифр окажутся в каждом произведении. Если множитель равен 2, произведение будет включать пять нечетных цифр слева и пять четных цифр справа.

А теперь — любопытная комбинаторная головоломка с двенадцатью цифрами на циферблате. Можете ли Вы переставить числа (сохраняя их круг) так, чтобы ни одна тройка соседних чисел не давала бы в сумме больше 21? Это наименьшее значение из тех, которое может принимать самая большая сумма тройки чисел.

Я не знаю специальной процедуры для того, чтобы найти такую перестановку, но должен быть способ написать компьютерную программу, которая напечатает все подобные перестановки в разумные сроки. Раздел вторых ответов более чем подтверждает это.

См. ответ на стр. 250.

33

34

34

Там, где время идет вспять

«Посмотрите, что произойдет, — сказала Ада, — если, получив первый ответ в День 2, вы сотрете компьютерную программу, которую предполагалось отправить на День 100. Вы получили бы ответ на сообщение, которое Вы никогда не отправляли! Сообщение отправлено. То же самое сообщение не отправлено. А тождественно не—А. Это острое логическое противоречие в нашей теории».

Можно возразить, что в схеме Мак-Бита просто нужно запретить стирать сообщения. Ясно, однако, что при этом сам изъян не исчезнет. Теория, которая допускает противоречие, должна быть оставлена. Это подобно тому, как если бы логик изобрел новую формальную логическую систему, а потом некто обнаружил бы в ней цепочку дедуктивных выводов, ведущую к утверждению, истинному и ложному одновременно. Мы не спасем систему, сказав: «Мы запрещаем такую цепочку». Если система позволяет доказывать и истинность, и ложность утверждения, она логически несостоятельна. Ее следует отбросить или исправить сам недостаток.

У комика Хенни Янгмэна есть анекдот о человеке, который говорит своему врачу: «У меня болит нога, когда я двигаю ею вот так». Врач отвечает: «А Вы ею вот так не двигайте». В течение многих лет Эйнштейн придумывал эксперименты, которые доказывали бы логическую противоречивость квантовой механики. Один известный аргумент был настолько тонким, что заставил Нильса Бора бодрствовать всю ночь в попытке найти изъян в рассуждениях Эйнштейна. По злой иронии, оказалось, что сам Эйнштейн забыл учесть влияние теории относительности, выстраивая этот мысленный эксперимент!

Эйнштейн не смог раскрыть ни одной логической непоследовательности в квантовой механике, хотя до конца своей жизни он был убежден, что эта теория является неполной. То, что он назвал «тихим голосом», сообщило ему, что эта теория в конечном итоге будет замещена теорией более глубокой, которая восстановит классическую причинность и избавит квантовую механику от ее тенденции к солипсизму. Если Луна не существует, пока никто не смотрит на нее, любил он спрашивать, будет ли она существовать, если только мышь смотрит на Луну?

Задачи об обратном ходе времени и мирах, где время идет вспять, обсуждаются в соответствующих главах моей книги«Симметричная Вселенная» («Ambidextrous Universe»). Вы также можете обратиться к приводимым в них ссылкам.

35

35

Мудрость Соломонова

Соломон открыл окно, позволяя пчелам залетать во дворцовые покои. Пчелы садились на настоящие цветы.

Наименее известная из всех легенд о визите царицы Савской, рассказывая которую, я могу сослаться только на очень ненадежный источник, касается причудливого ответа царицы на просьбу Соломона выйти за него замуж. Ее слуги внесли две чаши. В одной из них было десять золотых талантов, в другой — десять талантов серебра. «После того, как Вам надежно завяжут глаза, — сказала царица Савская, — я буду передвигать эти чаши по столу наугад. Вы укажете на одну из чаш и достанете из нее один талант. Если он окажется золотым, я приму Ваше предложение о браке. Если он будет серебряным, мне придется еще подумать над ним».

Соломон задумался на несколько минут, а затем с улыбкой сказал: «О могущественная царица, позволено ли мне перемешать таланты так, как мне будет угодно?»

Царица Савская задумалась над вопросом. Если золото и серебро одинаково разделено между двумя чашами, шанс Соломона вытащить золотой талант, очевидно, был 1/2. Предположим, он смешал их так, что в каждой чаше оказалось пять золотых талантов и пять серебряных. Вероятность выбора золотого таланта снова будет 1/2. Царица приложила все усилия, но все же не смогла найти возражений на просьбу Соломона.

Как Соломон разложил 20 талантов в две чаши так, что вероятность вытащить золотой талант выросла почти до 3/4? Удивительный ответ находится в разделе вторых ответов.

См. ответ на стр. 252.

35

36

Тэнг, пожиратель планет

Наименьшее число планет, удовлетворяющее Тэнговой процедуре поедания, является наименьшим общим кратным (НОК) целых чисел от 1 до 7, плюс одна планета, которая была съедена в первый день. НОК семи чисел — 420. Таким образом, сначала в солнечной системе была 420 + 1 = 421 планета. Тэнг поедал их в последовательности 1, 210, 70, 35, 21, 14, 10. Всего 361. Отнимая это число от 421, мы получаем 60 — число планет, которые остались не съеденными.

Наша следующая задача не сложнее предыдущей, но, конечно же, коварнее и запутанней ее. И вновь Тэнгу приглянулась еще одна солнечная система. И вновь он пировал целую неделю, каждый день. В первый день он съел половину планет плюс еще половина планеты. Во второй день он съел половину оставшихся планет плюс половину планеты. Каждый следующий день он делал в точности то же самое — съедал половину оставшихся планет и еще половину планеты. После его седьмой трапезы все планеты были съедены. Говоря «половина планет», мы имеем в виду половину от числа планет. Решая эту задачу, лучше всего допустить, что у всех планет одинаковая масса. В противном случае еще «половина планеты» может привести к чрезвычайно непредсказуемой перегрузке пищеварительной системы Тэнга.

Сколько планет было в этой солнечной системе в самом начале? Решение найдется просто, если Вас посетит правильное прозрение. Смотрите второй раздел ответов.

См. ответ на стр. 257.

Загадки

Первые ответы

Вторые ответы

Третьи ответы

Четвертые ответы

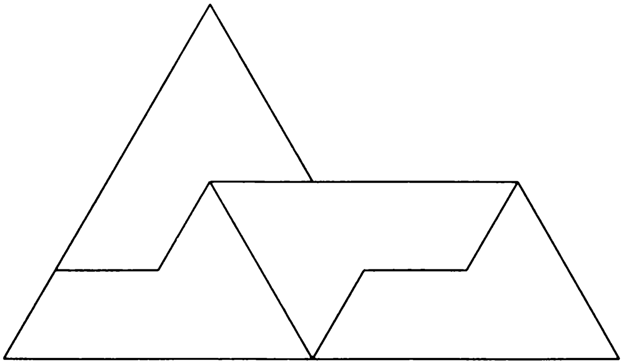
1

1

Загадки Сфинкса

На рисунке показано, как делится сфинкс.

Заметьте, что исходный сфинкс развернут влево. Мы назовем его L-сфинкс. Из четырех маленьких сфинксов только один является L-сфинксом. Остальные три развернуты вправо, и мы назовем их R-сфинксы.



Ровно через 24 часа после своего рождения сфинкс достигает зрелости, делится на четыре части и, тем самым, исчезает. Предположим, что в полдень, в нулевой день, начало колонии дают два сфинкса, один из которых повернут влево, другой — вправо. В полдень первого дня колония будет состоять из восьми особей, четырех L-сфинксов и четырех R-сфинксов. В полдень второго дня сфинксов будет уже 32, по 16 каждого вида; на третий день численность колонии сфинксов составит 128 особей, причем L-сфинксов и R-сфинксов вновь будет поровну.

Иными словами, каждый день популяция увеличивается в четыре раза, сохраняя при этом равное количество L- и R-особей. Рост популяции имеет лишь одно жесткое ограничение — количество пищи, доступной в однослойной культуре, иначе сфинксы в скором времени покрыли бы всю Землю.

А что будет, если в нулевой день начало колонии положит один только L-сфинкс? В первый день мы получим одну L-особь и три R-особи. На второй день мы обнаружим десять L-сфинксов и шесть R-сфинксов. Очевидно, что в этом случае число особей в видовых группах никогда не будет равным. В каждом новом поколении большинство особей будет принадлежать то к одному, то к другому виду. Численное преимущество одного вида будет постоянно расти, но, в то же самое время, этот рост будет постепенно замедляться относительно численности колонии в целом. Это открывает перед нами несколько заманчивых проблем из области элементарной комбинаторики.

Возьмем для начала вот такую простенькую: сколько сфинксов каждого вида будет в этой колонии в полдень седьмого дня? За методичным подсчетом Вы можете обратиться к разделу третьих ответов.

См. ответ на стр. 260.

2

Ясновидение и таинственная семерка

Мы ищем число, чьи 9 наименьших кратных составлялись бы циклической перестановкой их цифр. В соответствии с тем, о чем мы сказали в разделе первых ответов, достаточно найти число со следующими признаками:

а) в его обратном числе, при делении в столбик, у Вас должны возникнуть все восемь остатков: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) при умножении на девять в обратном числе будет столько же знаков, сколько и в самом искомом числе.

Второе условие выполнимо для любого целого числа, начинающегося с цифры 9. Если мы воспользуемся компьютером, то обнаружим, что при делении 1/97 мы получим все эти ненулевые остатки, или, фактически, все целые числа от 1 до 96 будут в остатке. Это позволяет нам заключить, что искомое число, обладающее указанными свойствами, есть число

103092 783505 154639 175257 731958 762886 597938 144329

896907 216494 845360 824742 268041 237113 402061 855670;

его цифры составляют первый полный период числа 10/97.

Питер Унгар нашел еще одно интересное свойство приведенной выше последовательности. Если мы представим ее как цикл, то есть за 70 идет 10, то все двухразрядные последовательности, кроме 00, 33, 66 и 99, появляются в ней только один раз. Вы можете найти этому простое объяснение? Загляните в раздел третьих ответов.

В десятичном остатке из задачки с телефонным номером «залипнет» 7. Дадим некоторые пояснения. Если

Вы переставите цифры любого числа так, чтобы получилось второе, отличное от него, а затем от большего числа отнимете меньшее, полученная разность всегда будет кратна 9. По условию задачи Вам нужно было вычесть 2 из этого кратного. Результат, таким образом, с необходимостью составит число, у которого при делении на 9 в остатке будет 7. Дробь 7/9 в десятичном выражении выглядит так: 0,777777....

Наш последний фокус — поистине изумительная дерзость ясновидца. Задумайте любое слово. Запишите его на листке бумаги семь раз. Сложите листок пополам и сядьте на него. А теперь обратитесь в разделу третьих ответов. Я не только скажу, что на Вашем листке, но также угадаю, что такого есть в тех туфлях, которые сейчас на Вас.

См. ответ на стр. 261.

3

Идем к Хармиане!

Это, конечно же, планета Земля!

Команда «Бублика» составляла планы исследования пустынной поверхности Ирас как раз в тот момент, когда было получено неожиданное сообщение с домашней базы. Недавно запущенный инфракрасный спутник-зонд только что передал убедительное доказательство существования одиннадцатой планеты! Она тут же получила имя Хармиана, поскольку Ирас и Хармиана — это две преданные служанки Клеопатры в знаменитой пьесе Шекспира. Некоторые читатели, вероятно, помнят, как Клеопатра поцеловала их обеих перед самой своей смертью и произнесла: «Прощай, добрая Хармиана. Ирас, прощай навсегда». Сразу после поцелуя Ирас упала замертво, то ли от разрыва сердца, то ли потому, что она тоже позволила аспиду укусить себя.

Ларк Суук, бессменный капитан «Бублика», был большим любителем Шекспира. «Ирас, прощай! — сказал он по внутренней связи, отменив планы посадки. — Идем к Хармиане!»

А теперь посмотрим, как быстро Вы сможете составить титул августейшей особы, просто переставив буквы в слове «Хармиана» [1)].

См. ответ на стр. 262.

[1)] *Прим. пер.:* английское название пьесы Шекспира — «Charmian» — также имеет свою анаграмму в виде простого английского слова.

4

Технологии с планеты Чътуа

Принцип шифрования состоит в замене первой буквы алфавита — последней, второй — предпоследней и т. д., как если бы мы использовали алфавит в обратном порядке (А заменяется на Я, Б — на Ю, В — на Э; для английского алфавита A замещается Z, B — Y, C — X и т. д.). Название планеты «Чътуа» дешифруется как «Земля», а ее звезды, «Нрусиъ», — «Солнце». Этот шифр называется «атбаш». Абрахам Синков в работе «Elementary Cryptanalysis» («*Основы криптоанализа*») сообщает, что этот шифр использовался Американской армией в прошлом. Он также отмечает, что в нем n-я буква алфавита обозначается $(25n+1)^{st}$ (mod 26).

Насколько мне известно, поиск слов и их аналогов, перевернутых с помощью этого шифра — совершенно неисследованная область языковых игр. Мне удалось найти лишь несколько простых примеров для английского алфавита. Например, «told» («сказал») в перевернутом виде — «glow» («блеск»). Конечно же, это не просто, но возможно составлять даже целые предложения, которые будут заменяться своими аналогами.

В разделе третьих ответов Вы найдете отклики некоторых моих читателей на мое замечание о том, что этот шифр открывает новые возможности для игры в слова.

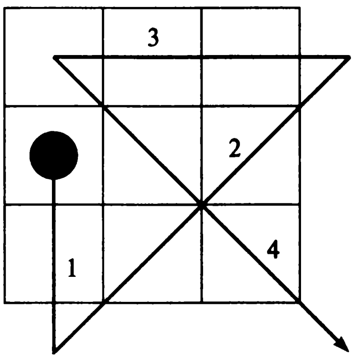
См. ответ на стр. 263.

5

6

Путешествие по Солнечной системе

На рисунке внизу показано, как гривенник может совершить турне по Солнечной системе всего за четыре перехода. А кто сказал, что монета не может выскальзывать за пределы квадрата?



Давайте еще больше упростим условия. Если допускается, чтобы часть движущегося гривенника захватывала только часть каждой клетки (с Марса начинать не обязательно), то можно ли решить головоломку меньше, чем за четыре хода? Ответ есть в разделе третьих ответов.

См. ответ на стр. 265.

6

7

Полоса на Паришестрии

Форма правильного круглого цилиндра с минимальной площадью поверхности для заданного объема — это цилиндр, чья высота равна его диаметру. Через мгновение мы покажем, как этот удивительно простой результат можно получить из еще более простого и неудивительного факта, но сперва мы сделаем пару замечаний о том, почему банкам и бочкам редко придают такую форму.

Наиболее очевидная причина — уменьшение затрат не то же самое, что уменьшение площади поверхности. Для достижения предписанной прочности оболочка может быть сделана из более дешевого материала, чем дно и крышка; в стоимость также включается и длина швов. С этой точки зрения предпочтение отдается более вытянутым формам, нежели широким. Внешний вид банки может повлиять на уровень продаж, а более высокие банки, оказывается, вмещают больше продукта, чем короткие того же объема.

Теперь мы соотнесем форму цилиндра с минимальной поверхностью для заданного объема и форму призмы с квадратным основанием, с наименьшей площадью поверхности для заданного объема. Поскольку это вовсе не удивительно, что решением последней задачи является куб, равенство высоты и диаметра в цилиндре с наименьшей площадью поверхности также выглядит достаточно естественным.

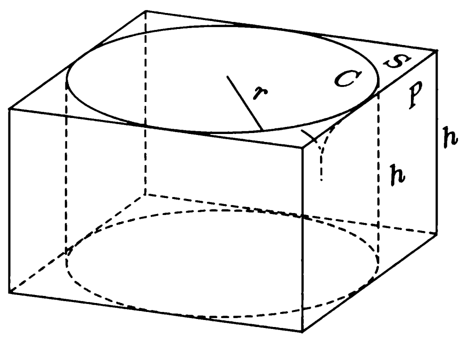
Для начала рассмотрим эту конструкцию на чертеже: круг C с радиусом r вписан в квадрат S. Обозначим периметр круга и квадрата P_C и P_S соответственно. Имеем:

$$\text{площадь } (C) = \frac{r}{2}p_C, \quad \text{площадь } (S) = \frac{r}{2}p_S, \qquad (1)$$

что можно увидеть, разделив каждую из этих фигур на треугольники с основанием на периметре и вершиной в центре фигуры. (В случае с кругом представьте себе много-много очень узких треугольников.) Высота каждого из этих треугольников равна r. И, следовательно:

$$\text{площадь } (C) : \text{площадь } (S) = p_C : p_S;$$

обе эти пропорции соответствуют $\pi : 4$, но это не понадобится в нашем доказательстве.



Теперь рассмотрим круглый цилиндр Y с радиусом r и высотой h, вписанный в призму P с квадратным основанием (см. рисунок). На верхней и нижней гранях мы видим описанное ранее на плоском рисунке; поэтому и для объемов этих призм справедливо отношение P_C : P_S. Площади боковых частей также составляют пропорцию, в чем можно убедиться, мысленно развернув фигуру в прямоугольники. Следовательно:

$$\frac{\text{площадь поверхности } Y}{\text{площадь поверхности } P} = \frac{\text{объем } Y}{\text{объем } P}$$

Таким образом, если мы знаем, что среди всех призм одного объема, имеющих квадратное основание, наименьшей площадью поверхности обладает куб, то мы можем заключить, что цилиндр, вписанный в куб, также имеет наименьшую площадь поверхности среди всех круглых цилиндров такого же объема.

Положение о кубе очень просто доказать, используя вычисления, а затем, точно также, и наше исходное положение о цилиндре. Мы предложили альтернативный способ доказательства, основанный на том факте, что среднее арифметическое трех положительных чисел больше их среднего геометрического, хотя эти числа и тождественны. (См: Беккенбах Эдвин, Беллман Ричард, «Введение в неравенства» (Beckenbach Edwin, Bellman Richard, «An Introduction to Inequalities» // NML. Vol. 3. P. 53).)

Мы сводим к минимуму площадь поверхности не только для призм с квадратным основанием, но и для любых произвольных прямоугольных параллелепипедов с ребрами a, b, c. Площадь поверхности такого трехмерного тела равна $2(ab+ac+bc)$. Сумма членов в скобках — V^2. Таким образом, их среднее геометрическое зависит только от V, и поэтому их среднее арифметическое и их сумма будут наименьшими, если они тождественны. А это так, только если параллелепипед является кубом, ч. т. д.

Представьте, что мы хотим сделать коробку в форме призмы, чье основание — правильный шестиугольник. Вы можете вычислить пропорцию для минимальной площади поверхности с заданным объемом? Загляните в раздел третьих ответов.

См. ответ на стр. 266.

8

По дороге в Мандалай

1. «Eye» («глаз»), «ear» («ухо»),
«arm» («рука»), «leg» («нога»),
«toe» («палец на ноге»), «lip» («губа»),
«hip» («бедро»), «rib» («ребро»),
«jaw» («челюсть»), «gum» («десна»),
«gut» («живот»). Есть другие.
2. «Slow up» и «slow down».
3. «Sleuth» («сыщик»).
4. Вакуум.
5. «Unusual» («необычный»).
6. «Are», «area».
7. «Polish» («польский язык»).

Почти рассвело, когда я обнаружил, что нам осталось всего в 20 км до фермы моего отца.

— Я собираюсь выключить Ваш голос, — сказал я, — так что Вы не сможете прервать мой глубокий, насыщенный баритон и мое громкое исполнение «The Road To Mandalay» («По дороге в Мандалай»). Кстати, Вам нравится Киплинг?

— Откуда я знаю? — сказал автомобиль. — Я никогда в киплинге не участвовал.

Щелк!

Моя баллада была очень кстати. Как раз когда я пропел последнюю строфу, зарю раскатом грома с берегов Миссисипи мне прислал Теннеси.

9

Черная дыра Калькутты

Вот этот отрывок:

Перкинс вскрикнул и бросился на пол; Маргарет схватилась за сердце обеими руками; Дороти, хоть ее глаза были и впрямь как черные дыры на ее белом лице, спокойно посмотрела на него [на ДюКесна] и спросила: «Так что же, это конец?»

Каждый из моих двоих читателей, Уильям Сирс и Джеймс Фрай, вычислили сумму объемов бесконечной последовательности кубов. Она составила 2,61 237 534...; это иррационально число оказалось удивительно близко к

$$(\sqrt{6}/4) + 2 = 2{,}61\,237\,243\ldots .$$

И это чистое совпадение. Специалист по теории вычислительных систем Р. Уильям Госпер-младший исследовал эти два числа, используя, как он сказал, «целочисленное линейное программирование», и обнаружил еще более удивительное совпадение: 81, разделенное на π в кубе, равняется 2,612 374 289... .

Майк Стьюбен предложил еще более простую бесконечную последовательность ящиков с конечным объемом, но бесконечной площадью и длиной. Каждый ящик имеет основание 1×1. Высота первого также 1, это куб. Высота второго $1/2$, третьего — $1/4$ и т. д., знаменатели составляют двойную последовательность. Их общий объем, очевидно, составляет 2 кубических единицы, но и длина, и площадь поверхности этих пирамид — сумма бесконечной единичной последовательности.

10

Викторина в стиле научной фантастики

10

Следующее письмо и мой ответ появились в апрельском номере «Журнала научной фантастики Айзека Азимова» в 1985 году:

Дорогой Мартин Гарднер!

В ноябрьском номере 1984 года вопроса вы положили конец ошибочному мнению о том, что Великая китайская стена видна с Луны. Хотя, как я слышал, именно Великая китайская стена и видна из космоса, по-видимому, с низкой околоземной орбиты. Это правда? Если это так, то следовало бы дать объяснение об ошибке в «Нью-Йорк Таймс»...

Мартин Гарднер отвечает:

Газета «Нью-Йорк Таймс» (от 8 марта 1983) сообщила на странице редактора, что Великая китайская стена — «это единственное творение смертных, видимое с Луны». 20 марта Таймс опубликовала письмо читателя, который сообщал, что это было столь же абсурдно, как и увидеть палочку от эскимо с расстояния в 384 километра. На странице редактора в том же выпуске «Таймс» принес свои извинения за ошибку.

11

Парикмахеры с Паришестрии

Если Вы обдумывали задачу достаточно долго, Вы, должно быть, догадались, что если парикмахер Y делает определенное количество работы за y минут, а парикмахер Z делает такое же количество работы за z минут, то формула для x, времени, которое понадобится обоим парикмахерам на то, чтобы сделать работу вместе, выглядит так:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Применяя формулу к нашей задаче, в ответе мы получим $6\frac{2}{3}$ минуты. Многие люди, не задумываясь, отвечают: 15 минут! У этой формулы бесконечное число применений. Вот четыре из них:

1. Если один человек может косить газон в y единиц времени, а другой может косить его в z единиц времени, то формула показывает время x, которое им понадобится, чтобы постричь газон вместе.

2. Если кран наполняет бассейн в y единиц времени, а второй кран заполнит тот же бассейн в z единиц времени, то x — это время, за которое оба крана заполнят бассейн.

3. Если y — расстояние от объекта до сферической линзы, а z — расстояние от изображения до линзы, то x — это фокусное расстояние данной линзы.

4. Если два электрических резистора соединены параллельно, а их сопротивление равно y и z соответственно, то общее сопротивление равно x.

Инженеры и физики знают многих других примеров того, как эта смехотворно простая формула применяется к различным аспектам физического мира.

12

Все дело в зеркалах

Слова, состоящие только из букв, которые симметричны относительно горизонтальной оси, проходящей через их середину, не будут изменяться, когда мы перевернем их и поднесем к зеркалу. Только буквы, которые не являются одинаковыми выше и ниже оси, изменятся. Если вы изучите все буквы в ложном высказывании и представите себе горизонтальную линию, проходящую через середину слов, вы увидите, что каждая буква обладает такого рода симметрией.

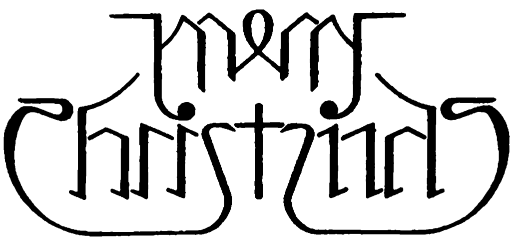
Буквы с лево-правой симметрией (а не с симметрией верх-низ) остаются неизменными в зеркале, если вы держите их перед зеркалом, не переворачивая с ног на голову. Например, если вы напечатаете слово «automata» вот так:

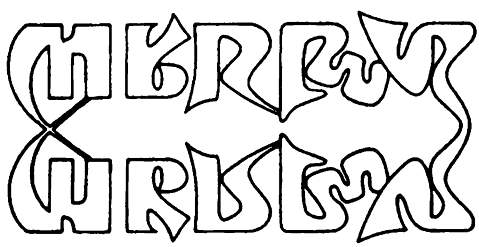
A
U
T
O
M
A
T
A

и поднесете его к зеркалу, не переворачивая, в зеркале оно останется неизменным. Если тема симметрии и ее связь с алфавитом заинтриговала вас, позвольте мне посоветовать прекрасную книгу «Перевертыши» Скотта Кима («Inversions»). В 1981 году ее издали в «Byte Books»,

12

в мягкой обложке. Искусные каллиграфии Кима потрясают подобно хорошему волшебству. На рисунке ниже показано два способа, которыми Ким представил «Веселого Рождества» («Merry Christmas»). Первый способ — с лево-правой симметрией, здесь надпись не меняется, когда ее подносят к зеркалу. Во втором — симметрия верх-низ, в чем вы можете убедиться, если перевернете страницу вверх ногами и посмотрите на ее отражение в зеркале.





А теперь — последний вопрос, который я оставлю без ответа, и, тем самым, Вам и Вашим друзьям представится удовольствие обсудить его. Почему в обычном зеркале меняются местами только левая и правая стороны вещей, и никогда — их верх и низ? Трудно поверить, но серьезные статьи, в которых обсуждался этот банальный вопрос, были опубликованы в журналах по философии! Вы найдете ссылки и детальное обсуждение этой задачи в главе 3 моей книги «Симметричная Вселенная» («Ambidextrous Universe»).

13

іДьявол

Вспоминая двухстрочный лимерик, Вы автоматически завершаете и второй:

Whose limericks stopped on line one.

Пишет лимерики одной строкой.

К сожалению, если Вы закончите этот стих именно так, у Вас получится двустишие, и тем самым Вы попадаете в колоссальное противоречие.

А теперь — заключительный парадокс. Есть определенное событие, о котором я с полной уверенностью могу сказать, что оно произойдет или не произойдет в течение следующих десяти минут. Вы абсолютно не способны правильно предсказать, случится оно или нет. Я не утверждаю, что у Вас не получится предсказать его. Я имею в виду, что предсказать его логически невозможно!

В не верите? Тогда сделайте вот что. Если Вы думаете, это событие произойдет, напишите «Да» в пустом прямоугольнике внизу. Если Вы думаете, что оно не произойдет, напишите в прямоугольнике «Нет».

Теперь перейдите к следующему разделу ответов, чтобы выяснить, что это за событие и насколько оправдалось Ваше предсказание. Если Вы предсказали правильно, я пришлю Вам миллионов долларов.

См. ответ на стр. 267.

13

14

Как-Вы-сказали Фланаган

«Canoe» — «a cone» («конус»).

15

15

Скажу Вам как релятивист...

Удваивающаяся последовательность — а она состоит из последовательных степеней числа 2, начиная с $2^0 = 1$ — увеличивается, как говорят математики, с экспоненциальной скоростью, достигая огромных значений гораздо раньше, чем это кажется возможным.

Между 49-й и 50-й сигаретами пройдет время, равное

$$2^{48} = 281\,474\,976\,710\,656 \text{секунд}.$$

В минуте 60 секунд, час равен 60 минутам, в сутках 24 часа и 365 дней в году. (Мы не будем учитывать високосные годы для упрощения вычислений.) Чтобы перевести наше время в секундах во время в годах, нам нужно разделить на $60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31\,536\,000$.

Результат — более 8 925 512 лет!

На самом деле Палвер, вероятно, бросит курить после 25-й сигареты, потому что тогда ему придется ждать более шести месяцев, прежде чем он сможет закурить в следующий раз. Допустим, Вы хотели бы определить сумму всех временных интервалов до определенной степени 2. Вы стали бы складывать все степени, чтобы получить их сумму? Нет, есть чудесный короткий путь. Загляните в раздел третьих ответов.

См. ответ на стр. 268.

16

Пари в баре «Бублика»

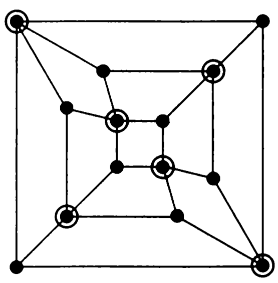
— Да, я ошибся, — сказал Палвер. — Сделайте мне еще один двойной Марсианский мартини.

17

17

Поймай пучеглазого монстра

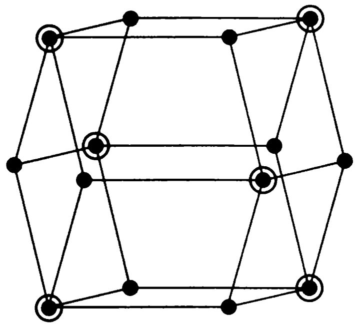
Города на карте распадаются на две группы четности: те, к которым ведут четыре дороги, и те, к которым — три. На рисунке внизу все четные города обведены кружком. Заметьте, что каждый путь из четного города ведет в нечетный, и наоборот. Таким образом, следуя любой линии в сети, четные и нечетные города будут чередоваться.



Четные и нечетные города

Следуя линии, мы встретим одинаковое количество четных и нечетных городов, если два крайних города имеют разную четность. Но если четность крайних городов одинакова, то в одной группе городов их будет на один больше.

Посчитайте количество четных и нечетных городов. Восемь нечетных и шесть четных. Разность больше единицы. А значит, дорога не может пройти через каждый город только один раз. Всякий раз один город будет нам не по пути.



Ромбический додекаэдр

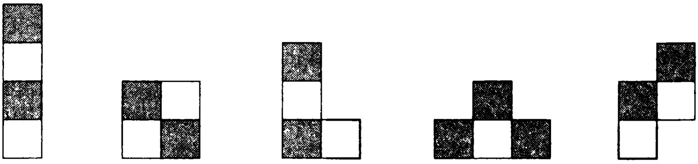
Как показано на рисунке, наша сеть дорог комбинаторно подобна решетке простого выпуклого многогранника, называемого ромбическим додекаэдром, чью форму обычно имеют кристаллы граната. Х. С. М. Коксетер, знаменитый геометр из университета Торонто, первым нашел приводимое выше доказательство того, что эта решетка не имеет линии Гамильтона. Это самый простой из известных многогранников такого типа. Насколько я знаю, еще никому не удалось доказать, что любой многогранник, имеющий менее 14 вершин, имеет в своей решетке линию Гамильтона.

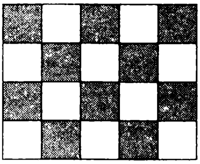
18

Крестик — нолик — человечек

Если Вы сделаете каждому животному шахматную разметку, как показано на рисунке внизу, то увидите, что у каждого из них по две черных и две белых клетки. Только у Носатика — три клетки одного цвета и одна клетка — другого. Следовательно, пять кусочков не могут замостить любую фигуру, если, в шахматной разметке, у них на две клетки одного цвета больше. В прямоугольнике 4 × 5 равное количество черных и белых клеток, что делает невозможным замостить его, если только Вы не разрежете Носатика на две части.

18





19

Вскрыть за 60 секунд

Это безопасное место «nowhere», no W here («нигде»).

А теперь — одна увлекательная задача, у которой не будет ответа в следующем разделе, потому что это испортило бы все удовольствие.

Представьте себе шахматного короля, стоящего на одной из букв. Перемещаясь на одну клетку за один ход в любом направлении — вверх, вниз, влево, вправо, и по диагонали — можно «писать» различные слова. Например, Вы можете «написать» такие имена, как LEM, TUTU и POPOV, а также такие слова, как GNU («гну»), ELM («вяз»), VOW («клятва»), NUTS («орехи»), MELTS («тает»), STUNTS («ошеломляет»), STUNG («ужалил»).

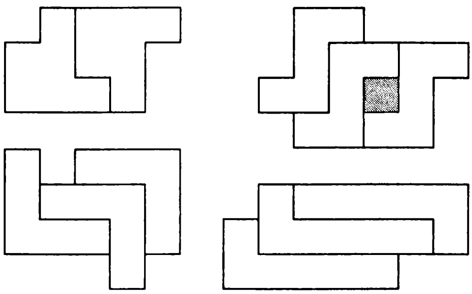
Ваша задача — найти прилагательное, которое описывает состояние мичмана Палвера после того, как он принял чересчур много Марсианского мартини.

19

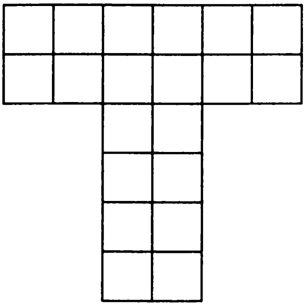
20

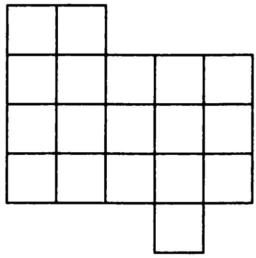
Любовь у полиминойцев

Решения всех четырех задач приведены ниже. Только верхнее правое и нижнее левое решения — единственно возможные. Эти схемы, великодушно предоставленные доктором Матсу, всего лишь разминка перед двумя более сложными задачами.



Разделите Т-образное животное на четыре одинаковых существа из 5 клеток каждое. Разделите форму справа на две идентичные 9-клеточные особи. Для большинства это оказывается трудной задачей.





Такого рода задачи на разделение — разрежь фигуру на две и более конгруэнтных части — в изобилии предложены в книгах головоломок Сэма Лойда и Генри Эрнеста Дьюдени. А также можете просмотреть мою колонку в журнале «Scientific American» за июль 1977 года, посвященную этой теме.

См. ответ на стр. 268.

21

Викторина внутренних планет

5. У Меркурия слабое магнитное поле. Оно не так сильно, как у Земли, но оно сильнее магнитных полей Венеры и Марса. Никто не знает, почему у Меркурия такое поле, но также никто толком не знает наверняка, почему у Земли такое магнитное поле.

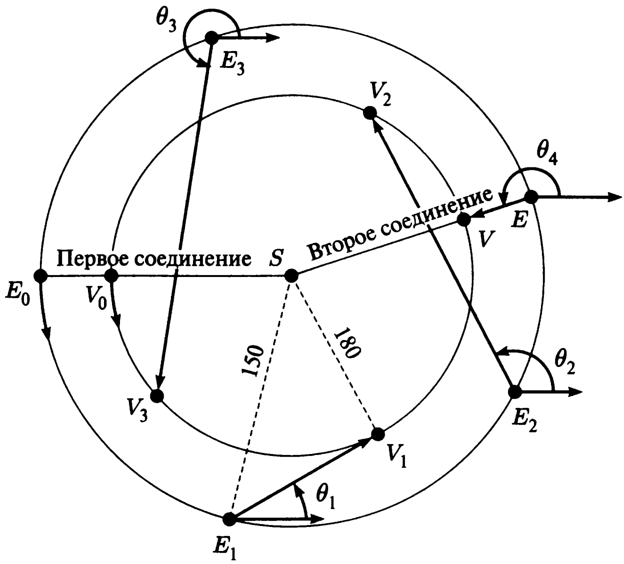
21

6а. Угловая скорость орбитального движения Земли вокруг Солнца равна 1 обороту за 365,24 дня, тогда как у Венеры — 1 оборот за 224,7 дня. Увеличение угла, образуемого двумя планетами, как он виден с Солнца (см. рисунок), задано разностью этих двух величин, составляющей 0,00171245 оборота за день.

Этот угол увеличится за 584,0 дня при одном полном обороте.

6б. В течение этого времени отрезок ES, от Земли к Солнцу, составит $584/365,24 = 1,5990$ оборотов с запада на восток, так что новая позиция EV составит 1,5990 оборота к востоку от прежнего. Это чистое количество, на которое отрезок EV, от Земли до Венеры, сместился по отношению к фиксированным звездам в течение этого времени, как мы сейчас объяснили.

Если бы Венера оставалась на отрезке Солнце—Земля все время, было бы совершенно ясно, что EV сделал 1,5990 оборота. Тем не менее, Венера вращается вокруг Солнца быстрее, и EV смещается с переменной скоростью. За короткие периоды он даже поворачивается с востока на запад. Однако, поскольку орбита Венеры находится полно-



стью внутри орбиты Земли, чистое количество, на которое EV смещается за время, равное 584 дням (то есть, на общую сумму с запада на восток минус общая с востока на запад), будет тем же самым, как если бы Венера фактически оставалась на отрезке Солнце—Земля все время. Это, мы надеемся, достаточно ясно; мы имеем в виду тех, кто хочет намека на строгое доказательство до конца этого обсуждения.

Количество оборотов Венеры вокруг своей оси за 584,0 дней между соединениями составляет $584/243 = 2,403$ оборота с востока на запад. Это должно быть добавлено к видимому вращению в 1,599 оборота, которое мы вычислили выше. Таким образом, видимая с Земли, Венера, должно быть, прошла $2{,}403 + 1{,}599 = 3{,}998$ оборота с востока на запад. Если бы результат составил ровно 4, это означало бы что, то же самое полушарие Венеры было бы повернуто к Земле при каждом соединении. Некоторые астрономы считают, что это действительно выяснится, когда станут доступными дополнительные наблюдения. Это было бы слишком необычное совпадение, чтобы быть случайным, но не менее загадочно, как незначительная гравитация Земли может заметно повлиять на вращение Венеры. (Комар мог бы поддерживать чемпиона по боксу сзади на таком расстоянии, если бы ему пришлось преодолевать только земное притяжение.)

Наконец, приведем обещанный более строгий аргумент, что количество оборотов T, на которое линия EV смещается с востока на запад между соединениями, в точности равно 1,599 оборота, которые мы получили бы, если бы Венера оставалась на отрезке от Земли до Солнца во все время движения. Если бы T было отличным от 1,599, то разница D должна была бы составить целое число оборотов, в противном случае направление EV в конце может не быть таким, каким по нашим вычислениям оно должно быть. Теперь рассмотрим, что произойдет, если бы Венере пришлось двигаться вокруг Солнца с той же угловой скоростью, но по несколько меньшей окружности. Тогда бы T могло, от силы, измениться лишь незначительно. Но так как она изменяется, D должно быть кратно одному обороту. Единственный способ изменить T не более чем на малую величину, это не изменять его вовсе. Таким образом, мы можем постепенно уменьшать орбиту Венеры, пока не получим радиус 0, то есть пока он не совпадет с центром Солнца. В последнем случае T будет равно 1,599 оборота с запада на восток, и этого было бы достаточно для начала. Таким образом, линия, вдоль которой мы видим Венеру, смещается вокруг планеты с запада на восток на 1,599 оборота. На изображение, если не учитывать эффект изменения в расстоянии, это повлияет так же, как если бы эта линия была статичной, и Венера вращалась бы на 1,599 оборота с востока на запад.

7. Притяжение Луны на Земле чуть сильнее с той стороны, которая повернута к Луне, чем с противоположной. В результате Луна одновременно притягивает океанскую воду на ближайшей к себе стороне, а также

слегка отталкивает Землю от воды на противоположной стороне. Это вызывает приливы с обеих сторон Земли.

8. Эта дама может быть родом из города Марс, штат Пенсильвания. В Техасе есть города Меркурий и Земля, а города с названием Венера (Венус) есть во Флориде, Небраске, Техасе и Пенсильвании.

22

Загадки Плоской планеты

Переверните доску с фишками (или лист бумаги) вверх ногами.

Уильям Хиггинсон в статье «Математизируя „лягушек"» («Mathematizing „Frogs"») в журнале «Mathematics Teacher», октябрь 1981 рассматривает классическую игру с фишками. В конце своей статьи он предлагает проанализировать игру на поле из 8 клеток, таком, как изображено здесь внизу, однако никаких специальных заданий он не дает.

A	B	C	D	E	F	G	H
R	R		W	W		B	B

В журнале университета Кейптауна «Mathematical Digest» (июль 1985) я вернулся к этой задаче и предложил следующие условия для двух заданий. Имеются фишки трех цветов: R — красные, W — белые и B — синие. Любая фишка совершает один ход в любую сторону, на соседнюю пустую клетку или же она может перепрыгнуть в любую сторону через фишку любого цвета на клетку сразу же за ней. Какое наименьшее число ходов потребуется для того, чтобы:

1. Сделать циклическую перестановку цветов. То есть, изменить порядок цветовых пар на «белый» — «синий» —

«красный», расставив фишки как в исходной схеме. Я предположил, что проще всего сначала поменять местами белые и красные фишки (8 ходов), затем красные (они теперь посередине) и синие (8 ходов). Всего: 16 ходов.

2. Переставить цвета на концах поля. Мне не удалось сделать это менее чем за 22 хода.

Майкл Джеймс, 18-тилетний студент из города Дурбан в ЮАР, упростил оба решения. Первую задачу он решил в 15 ходов, вторую — в 20 (см. следующий раздел ответов).

Доказательство формулы $n(n + 2)$ для стандартного вида задачи (одна пустая клетка между n белыми и n черными фишками) Вы найдете в статье Хиггинсона, а также в решении Бенжамина Л. Шварца, предложенного им для задачи 952 в журнале «Mathematics Magazine» (ноябрь 1976).

См. ответ на стр. 269.

23

Ножницы Дирака

«Это не вопрос, это утверждение, — ответил Дирак. — Следующий вопрос, пожалуйста».

24

24

Выстрелы «в яблочко» и «в молоко»

Все эти замечания были сделаны Томасом Эдисоном. Первые три я нашел в упомянутой выше книге «Эксперты говорят...», а четвертое — в разделе, посвященном прогнозам, в книге «Случайные тропы в науке» («A Random Walk in Science»), составитель Р. Л. Вебер (1973).

25

Фларп снова подбрасывает монетку

Как пояснила Таня, Вы бросаете монету два раза. Если выпадает «орел — орел», первый человек, А, платит. Если «орел — решка», платит второй, В, а если «решка — орел», очередь платить наступает для третьего, С. Если монета дважды падает решкой, Вы делаете еще одну пару бросков. Решение может быть принято в два захода. Определенного максимума нет, но вероятность решения после n пары бросков приближается к 1 так стремительно, что оно практически наверняка будет достигнуто быстро.

Наши читатели знают, что Таня любит игры со словами так же сильно, как и занимательную математику. Она взяла ручку Фларпа и черкнула тройку букв: SPB. «Можете ли вы назвать мне знакомое всем английское слово, в котором эти три буквы идут друг за другом именно в таком порядке?»

Фларп и Палвер ломали голову над этой задачей минут десяти, не находя никакого решения.

«Вот вам подсказка», — сказала Таня. Она просунула розовый кончик языка между губами и свистнула так громко (то, что называют «Bronx cheer»), что все, кто был в зале, обернулись, встревоженно оглядываясь по сторонам.

Вы найдете это слово в разделе третьих ответов.

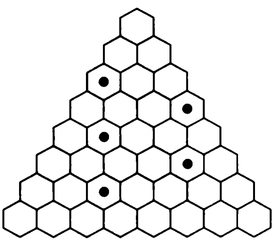
См. ответ на стр. 270.

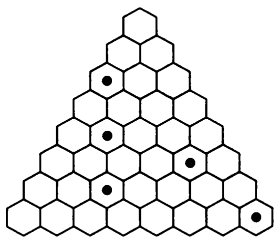
28

Алиса в Стране пчел

Уильям Вандерлайн и Том Найт независимо друг от друга решили задачу с размещением пяти не атакующих пчелиных ладей на треугольной доске 8-го порядка простым способом. Я говорил, что максимальное число таких фигур — пять. Добавив нижний ряд из восьми пустых ячеек к решению, которое я привел для треугольника 7-го порядка, в котором также пять ладей, они получили решение, отличное от того, что я дал в разделе первых ответов.

28



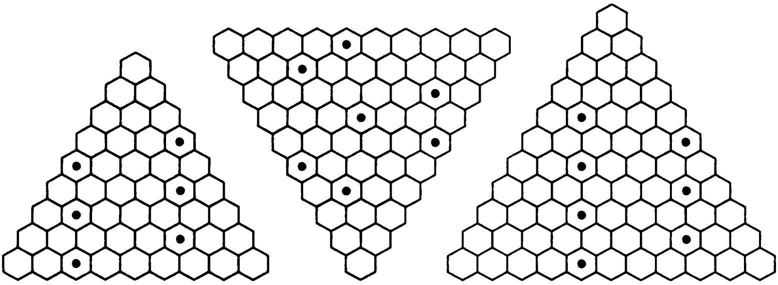


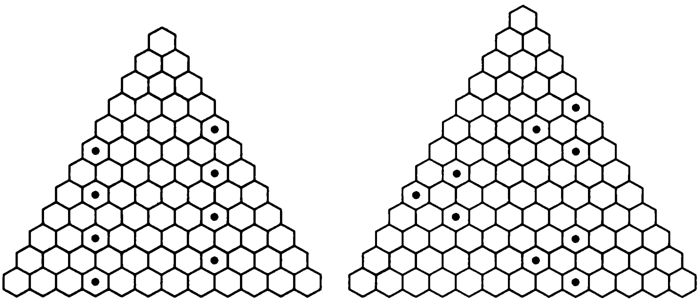
Пол Д. Хобсон прислал третье решение, наряду с двумя другими. Оно основано на только что описанной схеме (смотри выше, слева), перемещением верхней точки вниз, в нижний правый угол (см. выше, справа).

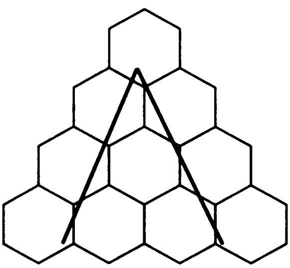
Герберт Тейлор представил приводимые ниже решения для треугольных полей от 9-го до 13-го порядка:

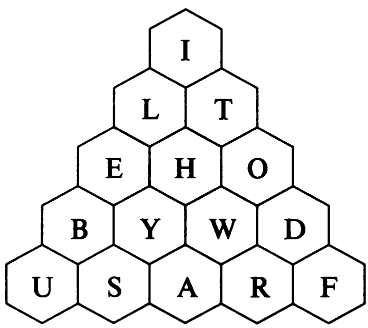
Решение с двумя полетами пчелы (кратчайшими расстояниями) показано ниже. Ими я обязан Майклу Д. Хоффа.

Все знают, что пчелы — эксперты правописания. И неудивительно, что множество их головоломок связано









Пчелописание

с написанием слов и предложений на шестисторонних сотовых схемах. На треугольной схеме 3-го порядка Вы видите задачу пчелописания, которую Герберт показал Алисе перед тем, как она продолжила свое путешествие по Стране чудес.

Ваша задача, начиная с любой клетки, двигаться, как пчелиные ладьи — но только на одну клетку за один ход — и написать первые шесть слов известного стихотворения. Вы можете удваивать букву, «перемещаясь» на клетку, где Вы уже находитесь. Например, можно написать такие слова: «hoot» («крик») и «hell» («ад»). Удивительно, сколько слов можно написать на этой схеме: «why» («почему»), «war» («война»), «they» («они»), «dwarf» («карлик»), «lithe» («гибкий»), «bye-bye» («пока-пока»), «wayward» («своенравный») и дюжины других.

Стихотворение, кстати, является одной из многих стихотворных пародий Кэрролла в его книгах о приключениях Алисы. Смотрите раздел третьих ответов.

См. ответ на стр. 271.

28

29

«Задира» едет в Баффало

Перебрав несколько сотен наборов случайно выбранных целых чисел, «Задира» пришел к выводу, что независимо от того, какие это цифры, такая процедура всегда заканчивается рядом нулей. Это и в самом деле так, даже если мы имеем k целых чисел вместо четырех, при условии, что k является степенью 2. Ниже мы обсудим только случай $k = 4$, а также дадим ссылки на более подробную информацию.

Вы можете попробовать убедиться в том, что при нечетном k данная процедура никогда не приведет к нулевому результату во всех позициях, если только все исходные цифры не равны. Не заглядывайте в следующий раздел ответов слишком быстро, и Вы увидите, почему это так, ведь впоследствии Вы можете огорчиться из-за того, что поторопились и не смогли самостоятельно найти этому причину.

Возвращаясь к $k-4$, докажем, что процесс ограничится целыми числами; и мы сделаем набросок доказательства того, почему он также ограничивается четырьмя случайными действительными числами. Как Вы можете видеть, слово «случайный» используется здесь намеренно.

Пусть a, b, c, d — четверка действительных чисел в данном циклическом порядке, то есть за d следует a. Количество операций вычитания, которое нужно будет выполнить, чтобы получить 0, 0, 0, 0, будет называться уровень a, b, c, d; если мы не сможем получить четыре нуля, мы будем называть этот уровень бесконечным. Сначала

29

приведем два простых случая, когда уровень $\leqslant 6$. На данном этапе даже не нужно еще допускать, что a, b, c, d являются целыми числами. Это могут быть произвольные действительные числа.

Если одно из наших чисел $\geqslant$ обоих своих соседей, мы называем его локально максимальным, или локальным максимумом. Локально минимальное число определяется аналогичным образом. Либо их называют локальным экстремумом. Обратите внимание, что равенство допускается. Например, если три числа равны, среднее будет как локально максимальным, так и минимальным.

Случай (i): четверка a, b, c, d содержит локальный минимум и локальный максимум, которые не являются соседними. Пусть b будет локальным минимумом, а d — локальным максимумом. Тогда абсолютные разности таковы:

$$a' = a - b, b' = c - b, c' = d - c, d' = d - a.$$

Следующая группа разностей $|c - a|, |b - 2c + d|, |c - a|, |d - 2a + b|$.

Так как первый и третий члены идентичны, обозначим эту четверку:

$$a'', b'', a'', c''. \tag{1}$$

Третий набор абсолютных разностей имеет вид:

$$A, A, B, B.$$

Четвертый набор имеет вид:

$$0, A', 0, A'.$$

Пятый набор —

$$A', A', A', A'$$

и шестой набор это —

$$0, 0, 0, 0.$$

Случай (ii): здесь имеем два несмежных локальных максимума или минимума. Один можно обосновать аналогично описанному выше, где уровень также $\leqslant 6$, как и в этом случае; мы оставляем это в качестве упражнения.

Мы можем объединить два вышеуказанных случая в следующем утверждении: *если четверка a, b, c, d содержит два несмежных локальных экстремума, то ее уровень $\leqslant 6$.*

Теперь мы заметим, что если два из четырех чисел равны, то уровень также $\leqslant 6$. И в самом деле, если равные числа несмежны, то уровень $\leqslant 4$, что было выведено из (1) выше. Если они являются смежными, то они оба — локальные экстремумы, и по крайней мере одно из двух оставшихся чисел должно быть максимальным или минимальным, так что, по меньшей мере, у нас будет три локальных экстремума, и два из них должны быть несмежны.

Можно подумать, что не охваченные случаи можно рассматривать подобным образом, но это не так. Как мы увидим в третьем разделе ответов, существуют четверки сколь угодно высокого уровня, а также четверки бесконечно высокого уровня.

Тем не менее, мы можем быстро показать, что четверка a, b, c, d целых чисел имеет конечный уровень. Можно считать, без ограничения общности, что a, b, c, d положительные. (Добавление одинаковой константы завершит ее без изменения уровня, за исключением тривиального случая, когда все числа равны 0.) Если мы теперь составим абсолютные разности, мы не получим 0, пока уровень > 5, хотя это может случиться, только если два числа на предыдущем уровне были равны, и этого не может произойти на уровне > 6. Если все цифры в четверке положительные, тогда наибольшая среди абсолютных разностей меньше наибольшего числа среди исходных. Это означает, что если наши исходные числа — положительные целые числа, мы должны спуститься до уровня 6 за количество шагов, не большее, чем самое большое из исходных чисел. (В действительности, число необходимых шагов намного меньше, что будет ясно из аргумента, приводимого ниже.) Таким образом, четверка целых чисел всегда имеет конечный уровень. Отсюда непосредственно следует, что *четверка рациональных чисел также имеет конечный уровень.*

Теперь попробуйте найти четверку с бесконечным уровнем. Очевидно, что ее члены не могут все быть рациональными числами. Прежде чем заглянуть в раздел третьих ответов, подумайте над вот такой подсказкой: мы увлечены разностями, и мы знаем, что разности соседних членов геометрической прогрессии образуют геометрическую прогрессию с тем же знаменателем!

См. ответ на стр. 273.

31

Ребус с флагами на Марсе

Сначала мы выведем очень простое алгебраическое представление магических квадратов 3×3.

Пусть S — общая сумма в каждой строке, столбце и диагонали. Пусть a — число в середине квадрата. Складывая суммы всех трех рядов, мы находим:

$$\text{Сумма всех 9 элементов квадрата} = 3S. \qquad (1)$$

Если сложить числа двух главных диагоналей, среднего ряда и центрального столбца, мы находим, что

$$4a + (\text{сумма всех элементов, за исключением } a) = 4S. \quad (2)$$

Вычитаем уравнение (1) из уравнения (2):

$$3a = S \text{ или } a = 1/3S.$$

Пусть запись в правом верхнем углу магического квадрата: $a + b$, запись в верхнем левом углу: $a + c$. (Так определяемые числа b и c могут быть отрицательными.) Так как сумма в каждой диагонали — это $3a$, записи в левом нижнем и правом нижнем углах: $a - b$ и $a - c$.

Теперь у нас есть представления элементов в четырех углах и, конечно же, в центре; недостающие элементы можно найти из условия, согласно которому каждая из крайних строк и столбцов содержит сумму $3a$.

31

Мы представляем результат следующим образом:

	$a-b-c$	
$a+b-c$		
		$a-c$

		$a+b$
	a	
$a-b$		

$a+c$		
		$a-b+c$
	$a+b+c$	

Числа, находящиеся в нашем магическом квадрате, это девять чисел вида

$$a+ib+jc \quad (i,j=-1,0,1). \tag{3}$$

Каждая из трех частей нашей схемы показывает тройку, соответствующую фиксированному значению j; каждая такая тройка образует арифметическую прогрессию. Мы можем сказать: девять чисел магического квадрата 3×3 могут быть организованы в 3 группы по три таким образом, что числа в каждой тройке будут находиться в арифметической прогрессии с одинаковой разностью. Более того, младшие члены троек также находятся в арифметической прогрессии.

И наоборот, если имеется девять чисел, удовлетворяющих указанным выше условиям, они могут быть записаны в виде (3). Можно принять разность между любыми тройками за b, а разность между младшими членами троек за c, а число посередине средней тройки — за a.

Если девять чисел должны быть последовательными натуральными числами, то $a = 5$, и либо $b = \pm 1$, а $c = \pm 3$, либо $b = \pm 3$, а $c = \pm 1$.

Заметьте, на ло шу 8 находится в углу. Переместим 8 к крайней клетке, как показано ниже.

	8	

Можете ли Вы расставить восемь других целых чисел (неотрицательные целые числа) в восемь пустых ячеек так, чтобы получился магический квадрат (без двух похожих чисел), где в каждой строке, каждом столбце и в каждой из двух главных диагоналей сумма чисел была бы 15 — такой же, как волшебная постоянная ло шу?

См. ответ на стр. 275.

32

32

Исчезающая планка

Вот как Великий Алеф доказывал, что планка, хотя и была невероятно искромсана, все-таки не исчезла. Он просто помещал поверх ее кусочек планки, немного длиннее 1/4 от исходной. Держа его горизонтально, он слегка отводил его в сторону, а затем запускал вдоль невидимой планки, от одного ее конца к другому. И фрагмент не проваливался, потому что каждый разрыв, оставшийся после бесконечной операции нарезки, был короче 1/4.

Великий Алеф подтверждал реальность иллюзии, нажимая ладонями на концы невидимой планки, а затем проводил руками от концов к центру. При этом все точки сдвигались, образуя в воздухе планку размером в половину исходной. Доказывая, что она целая, Великий Алеф молниеносно разбивал ее пополам ребром ладони, после чего кланялся под гром аплодисментов всех существ в аудитории, у кого были руки.

В основе фантастического трюка с планкой лежит знаменитое бесконечное множество, впервые описанное Кантором и известное как «канторов дисконтинуум». В версии Кантора, на каждом шаге сегменты линии длиной 1 делятся на три равные части и центральная треть отбрасывается. Легко доказать, что в пределе сумма длин удаленных сегментов равна 1, тем не менее, бесконечное множество точек остается. Хотя в этом остатке точек столько, сколько их было в исходном сегменте, между каждыми двумя из этих точек существует разрыв.

Вы найдете всестороннее изучение ошеломительного дисконтинуума Кантора в классической работе Ричарда Куранта и Герберта Роббинса «Что такое математика?» (Richard Courant, Herbert Robbins, «What is Mathematics?») В основе моего описания иллюзии Великого Алефа лежит статья Ларри Э. Кнопа «Исчезающая планка Кантора» («Cantor's Disappearing Table»), которая появилась в «College Mathematics Journal» за ноябрь 1985 года.

33

987 654 321

4. Если количество цифр, не считая последней, в $N = 100\ldots01$ меньше числа, имеющего нечетный множитель > 1, тогда N может быть разложено на множители. Мы вновь на типичном примере показываем, как это работает. Предположим, что у нас есть 17 нулей. Мы возьмем нечетный множитель 3 (для 18). Представляем N в виде суммы 3 элементов с чередующимися знаками следующим образом:

33

$$
\begin{array}{r}
1000001000000000000 \\
-\quad 1000001000000 \\
+\quad 1000001 \\
\hline
N = 1000000000000000001
\end{array}
$$

Поскольку все три слагаемых кратны 1000001, это множитель N. Приводимое нами разложение на множители действует независимо от того, какое избирается основание, как это есть в теореме разложения на множители для чисел, все цифры которых равны. Оба они являются завуалированной формой тождества, с которым Вы, вероятно, сталкивались в алгебре.

Читателей попросили найти перестановку чисел на циферблате, чтобы ни одна тройка соседних чисел не давала бы в сумме больше 21. Вот один из ответов:

1, 8, 10, 3, 5, 9, 4, 6, 11, 2, 7, 12.

Я нашел эту задачу в статье Дина С. Кларка, «Комбинаторная Теорема о циркулянтной матрице» («A Combinatorial Theorem on Circulant Matrices») в журнале «American Mathematical Monthly» (декабрь 1985). Кларк приводит короткое доказательство того, что самая большая сумма в такой тройке, при любой круговой перестановке чисел от 1 до 12, не может быть меньше, чем 21, но он не знает, сколько перестановок позволяют достичь этой нижней границы.

Ответ (не считая зеркальных отражений) — 261. Если считать и зеркальные отражения, тогда — 522. Тим Рольф, Том Брос, Дэвид Смит и Фред Гэлвин первыми прислали результаты их компьютерных программ для этой задачи.

35

Мудрость Соломонова

Соломон положил 1 золотой талант в одну чашу, а другие 19 — в другую. На рисунке ниже показана, с помощью простой схемы перевернутого дерева, возможность того, что Соломон выберет золотой талант. Вероятность выбрать любую из чаш — 1/2.

35

Если он выберет чашу А, вероятность достать из нее золотой талант равна 1, то есть наверняка. Умножим это на 1/2, чтобы получить вероятность в 1/2 того, что Соломон достанет золотой талант из чаши А.

В общем, на такой схеме, вероятность события в каждой точке перевернутого дерева получается умножением вероятностей, которыми отмечены ветви, ведущие от этой точки к «корню» дерева на самой вершине графика.

Если выбрана чаша В, то вероятность достать из нее золотой талант равна 9/19. Умножим это на 1/2, чтобы получить вероятность 9/38 того, что Соломон возьмет золотой талант из чаши В.

Теперь сложим обе вероятности. Сумма 1/2 и 9/38 составляет 14/19 = 0,736+ или почти 3/4. Это вероятность того, что Соломон вытянет золотой талант, если он будет выбирать чашу наугад, а затем достанет из нее талант.

Поженились ли в конце концов Соломон и царица Савская? Восточные предания гласят, что царица Савская, хоть и была очень красивой, имела чрезвычайно волосатые ноги, и Соломон отказался жениться на ней,

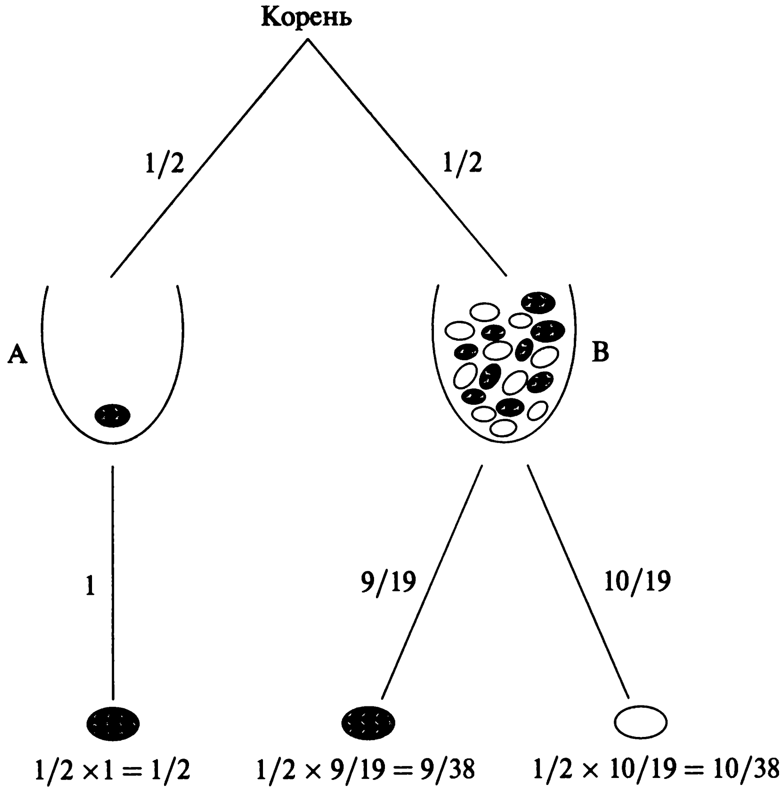


Схема задачи Соломона

пока она не удалит их с помощью тайных знаний джиннов. Эфиопы полагают, что царица Савская родила Соломону сына, который стал их первым королем. Все последующие цари Эфиопии ведут свой род от Соломона и царицы Савской. 45-й псалом Ветхого Завета был истолкован некоторыми комментаторами как пророчество этих событий.

Мусульманские фундаменталисты верят, что Аллах даровал Соломону власть над джиннами, коллегами ветхозаветных демонов из Корана. Считается, что благодаря этой силе у Соломона появились многочисленные магические устройства. Ковер из зеленого шелка, который мог перенести его туда, куда он хотел, в то время как стая птиц летела над его головой, подобно навесу, чтобы защитить его от солнца. И еврейский, и мусульманский фольклор говорят о заколдованном перстне, который мог прошептать ответ на любой вопрос.

Самой большой слабостью Соломона, как говорится в Библии (I Книга Царств 11: 1—3), было то, что он «любил многих чужестранных женщин ...и у него было семьсот жен... и триста наложниц». Эти дамы — в том числе и первая жена Соломона, дочь великого египетского фараона — постоянно ссорились. Чтобы положить конец этим раздорам, Соломон изобрел интригующее развлечение, похожее на настольную игру, и научил ему своих женщин. Победителям круговых турниров и конкурсов задач вручались дорогостоящие призы. Известная как «Соломон», игра уже поступила в продажу в Соединенных Штатах. Если Вам стало любопытно, Вы можете получить подробную информацию, написав в Kadon Enterprises, 1227 Lorene Drive, Pasadena, MD 21122. Компания производит и продает множество симпатичных математических игр и головоломок.

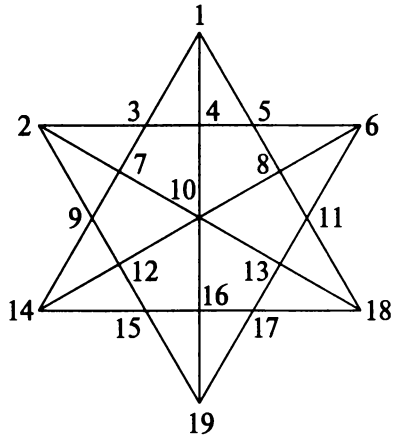
35

Доска, на которой играют в «Соломона» — это уже знакомая нам Звезда Давида (иногда ее называют гексаграммой) с добавлением трех линий, соединяющих противоположные углы (см. рисунок). Это схема, которая позволяет разгадывать десятки увлекательных головоломок. Вот некоторые из них:

1. Можно ли посадить 19 деревьев в девять прямых рядов по пять деревьев в каждом? Решение показано на схеме.

2. Можно ли разместить на схеме числа от 1 до 19 так, чтобы получилась «волшебная звезда», где сумма пяти цифр в каждом ряду была бы одинаковой?

3. Сколько треугольников на схеме? А сколько четырехугольников?



4. Если все вершины звезды соединены линиями так, чтобы получился полный граф для этих шести точек (все остальные точки взяты как точки пересечения, где линии проходят одна под или над другой), то могут ли 15 линий идти одна под и над другой таким образом, чтобы невозможно было провести заузленную замкнутую кривую?

5. Используя правила, сформулированные Леонардом Эйлером, легко показать, что граф Соломона нельзя соединить одну непрерывной линией, которая не пересекает любой из отрезков дважды. Такой путь возможен, если и только если все точки являются точками пересечения четного числа линий, или если имеются только две «нечетные» точки. Во втором случае путь, очевидно, должен начинаться и заканчиваться в двух нечетных точках. У графа шесть нечетных точек, следовательно, для его прохождения необходимо три отдельных пути.

Предположим, однако, что Вам позволено пересечь отрезок два раза и (или) идти вне графа. Каким будет кратчайший непрерывный путь, проходящий через все отрезки?

6. Начертите схему на картоне, а затем разрежьте ее вдоль по линиям так, чтобы у Вас получилось 18 кусочков. Их легко складывать вместе, без пробелов или наложе-

ний, так, чтобы получались прямоугольники и ромбы различных очертаний. Можете ли Вы сложить равносторонний треугольник? А можете ли доказать, что 18 кусочков не сложатся в квадрат или правильный шестиугольник?

7. В Соломонов солитэр играют так. Положите по одной фишке на все точки, кроме одной. Любая фишка может перепрыгнуть любую соседнюю (как в шашках), если следующая за ней точка является свободной. Фишка, через которую перепрыгнули, удаляется. Можете ли Вы удалить все фишки, кроме одной, которая завершит игру на том единственном месте, где первоначально фишки не было?

В силу шестисторонней симметрии графа, есть только четыре существенно различающихся места для позиции без фишки. И все они имеют решения с последней фишкой на этой пустой точке. Если цепочка прыжков считается одним движением, как в шашках, то минимальное количество ходов, необходимое для каждой пустой точки, еще не известно. Я приведу 9-ходовое решение для пустой точки в центре. Чудесная книга о солитэре с фишками и комбинаторном анализе, стоящим за ним, — это Джон Д. Бизли, «Входы и выходы солитэра с фишками» (John D. Beasley, «The Ins and Outs of Peg Solitaire», Oxford University Press, 1985).

См. ответ на стр. 277.

36

Тэнг, пожиратель планет

Правильное озарение должно сообщить Вам, что половина любого нечетного числа плюс половина — это целое число. Поэтому Тэнгу никогда не удалось бы съедать по половине планеты. Если Вы допустили, что он сделал это, Вы, вероятно, безнадежно запутались.

Нам известно, что в конце седьмого дня все планеты были съедены. Это может произойти, только если Тэнг в последний день съел одну планету (половина плюс половина равняется один). Теперь мы пойдем из конца в начало, удваивая и добавляя 1. На шестой день останется $2 + 1 = 3$ планеты. Удвоение и добавление 1 на каждом шаге генерирует последовательность 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127. Итого, вначале было 127 планет. Тэнг съел их все в нисходящей последовательности степеней числа 2: 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Заметьте, что числа в последовательности планет, которые можно было съесть в каждый из дней (1, 3, 7, ...), на один меньше, чем степень 2 каждое. Числа этого типа, выраженные формулой $2^n - 1$, называются числами Мерсенна. Мы сталкивались с такими числами на предыдущих страницах, когда говорили о совершенных числах. Если такое число является также простым (т. е. делится только на себя и 1), оно называется простым числом Мерсенна. Общее число планет, съеденных Тэнгом, 127, является четвертым простым числом Мерсенна. Только 30 таких простых чисел было известно в 1986 году, и ни один математик не знает, конечно или бесконечно их количество. Наибольшее известное простое число, $2^{216091} - 1$,

36

является простым числом Мерсенна. Оно было обнаружено в 1985 году суперкомпьютером «Cray», принадлежащим «Chevron Geosciences» из Хьюстона. Тогда была использована программа, написанная Дэвидом Словински из «Cray Research», что в городе Чиппева Фолс, штат Висконсин. Новое простое число Мерсенна имеет 65 050 знаков.

А теперь испытайте себя, решая еще одну задачу. Найдя еще одну сочную солнечную систему, Тэнг выбросил одну планету (ему не понравился ее запах), затем съел 1/11 из тех, что остались. На второй день он выбросил еще две планеты и съел 1/11 часть оставшихся. На третий день он выбросил уже три планеты, и так далее, каждый раз съедая 1/11 того, что оставалось. Другими словами, каждый n-й день он выбрасывал n планет перед тем, как съесть 1/11 часть того, что осталось. В конце концов все планеты закончились.

Сколько планет было в этой солнечной системе, и сколько дней ушло на то, чтобы их истребить? Ответ — в разделе третьих ответов.

См. ответ на стр. 281.

Загадки

Первые ответы

Вторые ответы

Третьи ответы

Четвертые ответы

1

Загадки Сфинкса

В таблице показано, как колония сфинксов, начатая L-сфинксом в нулевой день, растет в течение первой недели. Ответ на наш вопрос дан в последней строке таблицы: в полдень седьмого дня в колонии будет 16 384 особи, 8128 из которых будут L-сфинксы и 8256 — R-сфинксы. Заметьте, что общее число особей в колонии всегда равно 4^n, а разница между L- и R-особями всегда составляет $\pm 2^n$.

день	L-сфинксы	R-сфинксы	Общее число особей	Разность (L − R)
0	1	0	1	1
1	1	3	4	2
2	10	6	16	4
3	28	36	64	8
4	136	120	256	16
5	496	528	1024	32
6	1080	2016	4096	64
7	8128	8256	16 384	128

1

А теперь задачка посложней. Можете ли Вы вывести формулы расчета числа L- и R-особей при известном n — количестве истекших дней? Ответ в разделе четвертых ответов познакомит Вас с одним важным различием между тем, что математики называют рекурсивными и нерекурсивными формулами.

См. ответ на стр. 284.

2

Ясновидение и таинственная семерка

Чтобы узнать, почему все двухразрядные последовательности, кроме 00, 33, 66 и 99, появляются в 96-значном периоде числа 1/97 только один раз, давайте посмотрим на остаток R на определенном этапе деления. В обычном длинном делении, когда мы «сносим» следующий 0, мы рассчитываем целую часть $10R/97$, чтобы определить цифру следующего разряда. Мы можем найти следующую пару цифр (каждая из которых может оказаться и 0), вычисляя целую часть $[100R/97]$ для $100R/97$.

Чтобы вычислить целую часть $100R/97$ для всех 96 значений R, примем во внимание, что 100/97 лишь немногим больше 1.

$$\left[\frac{100}{97}R\right] = R + \left[\frac{3}{97}R\right] = \begin{cases} R \text{ для } 1 \leqq R \leqq 32, \\ R+1 \text{ для } 33 \leqq R \leqq 64, \\ R+2 \text{ для } 65 \leqq R \leqq 96. \end{cases}$$

Как видим, все положительные целые числа до 98, за исключением «выпрыгнувших» 33 и 66, оказываются в нашей последовательности.

Французский инженер Жан Морис Эмиль Бодо (1845–1903) впервые описал и применил циклические последовательности, где в любом сегменте длиной n каждый из возможных знаков встречается только один раз и отличен от всех остальных. В честь него также была названа единица измерения скорости передачи информации по аналоговым линиям связи: 1 бод = 1 бит/с.

2

Период 1/97 можно представить как последовательность Бодо, если подставить 0, 3, 6 и 9 после каждого случая их единичного возникновения в ряду.

Делением в столбик можно составить лишь некоторые последовательности Бодо. Но с легкостью это можно сделать, если применить такое деление к многочленам, чьи коэффициенты являются элементами конечных полей. Обратитесь к книге «Последовательности с регистром сдвига» («Shift Register Sequences») Соломона Голомба, славного изобретателя полимино.

На Вашем листке — Ваша пятая точка, а в Ваших туфлях — Ваши ноги.

3

Идем к Хармиане!

Это слово «махарани» [1]. А Вы можете сказать, чья жена — махарани? Дайте ответ, который составит анаграмму из двух слов. Загляните в следующий раздел ответов.

См. ответ на стр. 286.

3

[1] *Прим. пер.:* английский вариант загадки: «Charmian» — «Chair man» («председатель»). Английская анаграмма из трех слов скажет Вам, богат или беден председатель.

4

Технологии с планеты Чътуа

Вот это письмо и мой ответ были напечатаны в ноябрьском номере «Журнала научной фантастики Айзека Азимова» за 1984 год.

Уважаемый Мартин Гарднер!

Благодаря Вам нашелся еще один способ потратить мое время! Ниже я прилагаю список совершенно неинтересных, в большинстве своем экзотических слов, которые, однако, соответствуют критериям из Вашей истории «Технологии с планеты Чътуа».

Примерно на половине моих поисков я обнаружила вот это — как будто бы из сюжета «Сумеречной зоны» — слово «wizard» («колдун») зашифровывается как «draziw», т. е. само это слово наоборот. Этого, пожалуй, хватит на одно чудо из области теории имен, нумерологии или чего-нибудь еще. А может быть и нет.

А для тех, у кого в жизни случаются особенно унылые периоды, эта игра помогла сформулировать новый закон: «efts» — «vugh» («снова» — «яма»). Ох, как это верно! Пожалуйста, не просите меня вновь заниматься чем-то подобным. Я глубоко уважаю Вас и не могу отказать Вам, но давайте на этом остановимся.

Искренне Ваша Патриция В. Мур,
Голден Вэйли, штат Миннесота

Мисс Мур первой откликнулась на мое предложение о поиске слов, которые превращаются в другие слова при использовании алфавитного шифра. Она нашла вот такие пары слов из четырех и пяти букв: «girl — trio»

4

(«девочка — трио»), «girth — trigs» («подпруга — тормозные башмаки»), «grogs — tilth» («крупицы земли — пашня»). Примеры из шести букв пока нам не известны. А тот факт, что слово «wizard» превращается в «wizard» наоборот — поистине потрясающий!

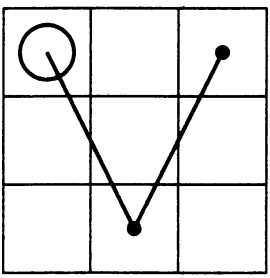
Среди других читателей, был, например Теодор Бек из Стэнтона, штат Калифорния, который прислал список из 53 пар слов. Карл Кэди из города Урбана, штат Иллинойс, сочинил вот такое предложение: «Oft Levi Mix told Zig, lug over NRC glow art» («Часто Леви Микс говорил Зигу протащить через ННИС (Национальный научно-исследовательский совет) блестящее искусство»), которое в зашифрованном виде читается так: «Lug over NRC glow art, often Levi Mix told Zig» («Протащи через ННИС блестящее искусство, часто Леви Микс говорил Зигу»). Кстати сказать, Леопольд Блум в «Улиссе» Джеймса Джойса использует перевернутый алфавитный шифр, записывая имя и адрес женщины, с которой он ведет тайную переписку.

4

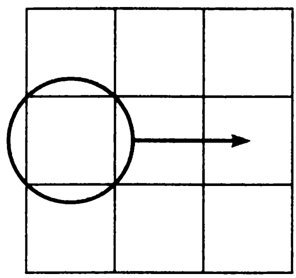
6

Путешествие по Солнечной системе

Если диаметр гривенника меньше, чем сторона клетки, то легко заметить, что он может проходить через часть каждой клетки в два хода. Если же его диаметр больше стороны клетки, достаточно одного хода, как показано ниже:



2 хода

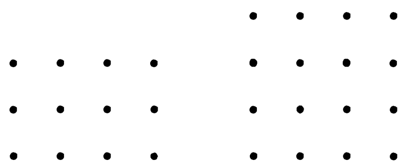


1 ход

6

Исходная задача, очевидно, обобщается для ячеек любой прямоугольной решетки, а также для клеток треугольных матриц и других схем. Множество таких задач, обычно в виде «туров» шахматной королевы, можно найти в книге головоломок Сэма Лойда и Генри Э. Дьюдени. Новаторская статья, посвященная проблеме в общем: Соломон В. Голомб, Джон Л. Сэлфридж, «Уникурсальная ломаная линия и другие графы в узлах решеток» (Solomon W. Golomb, John L. Selfridge, «Unicursal Polygonal Paths and other graphs on lattice points» // «Pi Mu Epsilon Journal». Vol. 6 (autumn, 1970). P. 101–117). Здесь рассматривается задача найти путь через узлы решеток, а не через клетки.

Чтобы подогреть Ваш интерес к этой, еще мало изученной области рекреационной теории графов, рассмотрим массивы 3×4 и 4×4, показанные ниже:



Точки следует пересечь непрерывной прямой линией. Замкнутая или «вновь входящая» прямая — та, которая заканчивается там, где она началась, не обязательно в узле решетки. В противном случае она — открытая. Узлы каждой из этих решеток могут пересечь всего лишь шесть отрезков прямой, но получить замкнутые прямые гораздо сложнее, чем открытые. Посмотрим, сможете ли Вы найти 6-линейный замкнутый обход для каждой схемы.

См. ответ на стр. 288.

7

Полоса на Паришестрии

Высота коробки будет равна расстоянию между параллельными сторонами.

В общем виде, если основание призмы — многоугольник, описанный вокруг круга, то наименьшую площадь поверхности будет иметь призма, высота которой равна диметру круга.

13

iДьявол

Вот это событие: Вы напишете «нет» в прямоугольнике.

Эту версию хорошо известного парадокса прогнозирования я представил в главе 11 книги «Новые математические забавы из „Scientific American"» («New Mathematical Diversions from "Scientific American"», 1966).

Это один из самых простых парадоксов среди множества парадоксов прогнозирования, которые возникают всякий раз, когда предсказание и предсказываемое событие связаны причинно-следственной связью. Наш пример можно еще больше упростить, если попросить кого-нибудь ответить «да» или «нет» на вопрос: «Вы ответите „да" или „нет"»?

Два знаменитых парадокса прогнозирования, гораздо более сложные, чем наш, рассмотрены в главе «Парадокс узника» из моей книги «Парадокс узника и другие математические забавы», («Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions», Simon and Schuster, 1969). Вы также можете обратиться к двум главам о парадоксе Ньюкомба из моей книги «Пончики, завязанные узлом, и другие математические забавы», («Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments», W. H. Freeman, 1986).

13

15

Скажу Вам как релятивист...

Сумма первых n степеней 2, начиная с $2^0 = 1$, это $2^{n+1} - 1$.

Например, сумма первых десяти степеней 2 равняется $2^{11} - 1 = 2047$.

Вот простое доказательство методом математической индукции: Формула, конечно, верна для $n = 1$.

Если

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

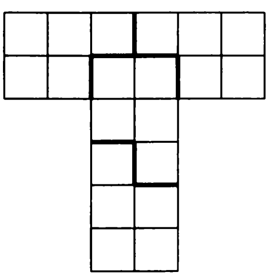
то затем, добавив 2^n с обеих сторон, мы получаем

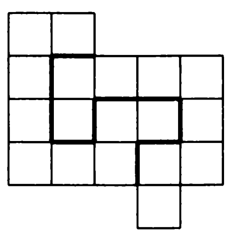
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

20

Любовь у полиминойцев

Вот единственно возможные решения этих двух задач на разделение.





22

Загадки Плоской планеты

15 ходов для циклической перестановки (R — вправо; L — влево)

DL,	BR,	DR,	AR,	BR
CL,	EL,	CL,	GL,	HL
FR,	DR,	EL,	GL,	FR

20 ходов для перестановки красных и синих фишек

ER,	BR,	DL,	GL,	EL
CR,	ER,	AR,	CR,	DL
FL,	HL,	GR,	ER,	CL
DR,	FL,	DL,	BR,	CL

25

Фларп снова подбрасывает монетку

Это слово «raspberry» («малина»). В английском языке словом «raspberry» также называют неприличный звук, свист неодобрения или оскорбления.

Это пример того, как слово, издавна вдохновлявшее поэтов, теперь приобрело уничижающий его смысл. Приложение к Оксфордскому словарю английского языка прослеживает использование этого слова в грубом смысле вплоть до 1915 года, но не дает объяснений о происхождении этого нового смысла. Вот прекрасное четверостишие из стихотворения «Маргаритка» («Daisy») Френсиса Томпсона, читая которое сегодня, невольно усмехнешься:

> Земли усталый лик ее смущала красота!
> Дала три дара мне своих:
> Взор, слово с ее нежных губ
> И дикую малину.

25

Два писателя-фантаста прислали объяснения о том, как слово «raspberry» («малина») обрело значение того, что в Соединенных Штатах называется «Bronx cheer» («Приветствие в Бронксе»). Полагают, что этот термин возник в Национальном театре, в Бронксе, в городе Нью-Йорк. Смотрите следующий раздел ответов.

См. ответ на стр. 290.

28

Алиса в Стране пчел

Решением головоломки пчелописания являются начальные строки стихотворения Исаака Уоттса «Против праздности и озорства» (Isaac Watts's, «Against Idleness and Mischief»). Вот его первые строфы:

How doth the little busy bee
Improve each shining hour,
And gather honey all the day
From every opening flower.
How skilfully she builds her cell!
How neat she spreads the wax!
And labours hard to store it well
With the sweet food she makes...

Как дорожит любым деньком
Малюточка пчела!
Гудит и вьется над цветком,
Прилежна и мила.
Как ловко крошка мастерит
Себе опрятный дом!
Как щедро деток угостит
Припрятанным медком! [2)]

28

Начало пародии Кэрролла:

How doth the little crocodile
Improve his shining tail,
And pour the waters of the Nile

[2)] Пер. О. Седаковой.

On every golden scale.
How cheerfully he seems to grin,
How neatly spreads his claws,
And welcomes little fishes in
With gently smiling jaws!

Как дорожит своим хвостом
Малютка крокодил! —
Урчит и вьется над песком,
Прилежно пенит Нил!
Как он умело шевелит
Опрятным коготком!
Как рыбок он благодарит,
Глотая целиком! [3)]

28

[3)] Пер. О. Седаковой.

29

«Задира» едет в Баффало

Пусть k нечетное, а числа: $a_1, \ldots, a_k$. Покажем, что если эти числа не равны, то абсолютные значения разностей $a'_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 1, \ldots, k$; $a_{k+1} = a_1$) также не являются равными. Причина в том, что сумма всех этих разностей равна 0. Если бы абсолютные значения были одинаковыми, их сумма может быть равна 0 только в том случае, когда среди них равное количество отрицательных и положительных чисел. А этого не может случиться при нечетном k. Таким образом, вычисляя абсолютные разности, мы не можем получить одинаковые числа, если исходные числа не были равны, а также мы никогда не получим все 0.

Наши наблюдения в конце второго ответа предполагают, что четверка вида

$$a = l,\ b = x,\ c = x^2,\ d = x^3 \tag{1}$$

может дать абсолютные разности, которые являются кратными исходных чисел. Мы считаем, что если $x > 1$, абсолютные разности a', b', c' составляют $x - 1$ раз a, b, c, в то время как $d' = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Таким образом, если

$$x^3 = x^2 + x + 1, \tag{2}$$

тогда вычисление разностей — это только умножение числа на $x - 1$, и мы никогда не получим 0. Уравнение (2) имеет одно действительное решение, которое, конечно, иррационально, и примерно равно 1,839286755. Так что,

29

приблизительное значение этой четверки бесконечного уровня составляет

$$1;\ 1{,}839286755;\ 3{,}382975769;\ 6{,}222262522, \qquad (3)$$

а рациональные четверки, близкие к этой, будут иметь высокий уровень.

Умножение рассмотренной выше четверки на ненулевую константу и прибавление другой константы для каждого элемента, конечно, даст нам другие четверки бесконечного уровня; но, на удивление, это единственные четверки бесконечного уровня, которые существуют. Чтобы убедиться в этом, нам нужны еще некоторые неравенства, и нам также понадобится теория матриц. Загляните в раздел четвертых ответов.

См. ответ на стр. 291.

31

Ребус с флагами на Марсе

1	8	6
10	5	0
4	2	9

Вы не забыли, что нуль является неотрицательным целым числом?

Вот более трудная задача для магического квадрата 3 × 3. Простой квадрат — тот, в котором только простые числа. Бесконечность простых магических квадратов 3-го порядка, вероятно, можно составить, используя девять различных простых чисел, но у какого из них будет самая маленькая магическая константа? Если 1 считать простым числом, как это иногда случалось где-то в 1900-е, то самая маленькая константа равна 111:

Сегодня 1 не считается простым числом. Каким будет простой магический квадрат 3-го порядка с использованием девяти различных простых чисел, исключая 1, с самой маленькой магической константой? Число 2, единственное четное простое число, использовать нельзя, так как все строки или диагонали с тремя нечетными простыми числами будут иметь нечетную сумму, в то время как любая строка, где есть 2, будет иметь четную сумму.

31

31. *Ребус с флагами на Марсе*

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Ответ на этот вопрос не является широко известным. Вы найдете такой квадрат в следующем разделе ответов.

См. ответ на стр. 295.

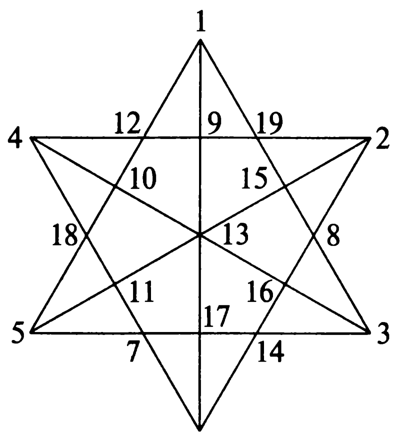
35

Мудрость Соломонова

Вот ответы к Соломоновым головоломкам:

1. Решение Вы найдете на графике в предыдущем разделе ответов.

2. Ниже показано одно из многих решений для задачи с волшебной звездой Соломона. Магическая константа (а она может быть разной) здесь — 46.



3. На схеме 56 треугольников и 156 четырехугольников. Среди четырехугольников — 57 выпуклые, 36 — невыпуклые и неперечеркнутые, а также 63 из них — перечеркнутые. (Перечеркнутый четырехугольник — это тот, у которого противоположные стороны пересекаются.)

35

Я не знаю, сколько на схеме пятиугольников (перечеркнутых и нет), и я даже не хочу этого знать!

Аннели Лакс пишет:

«От одного из моих увлеченных математикой студентов я узнала вот такой метод подсчета треугольников в подобных сложных фигурах.

А. Каждому „маленькому" треугольнику, то есть такому, который внутри не разделен на сегменты, назначим свой символ. Например, треугольник с вершинами 1, 12, 9 обозначим A; B — треугольник с вершинами 1, 9, 19; и т. д. Отметьте эти треугольники соответствующими символами.

Б. Назначим символы для всех остальных выпуклых многоугольников, не имеющих внутренних сегментов. На нашем рисунке шесть четырехугольников расположено посередине. Обозначим их M: 12, 9, 13, 10; N: 9, 9, 13, 15; и т. д.

В. Найдите треугольники, состоящие из двух уже обозначенных, обозначьте их символами этих составных частей, например, AB для 1, 12, 19; AM для 1, 10, 13; и т. д.

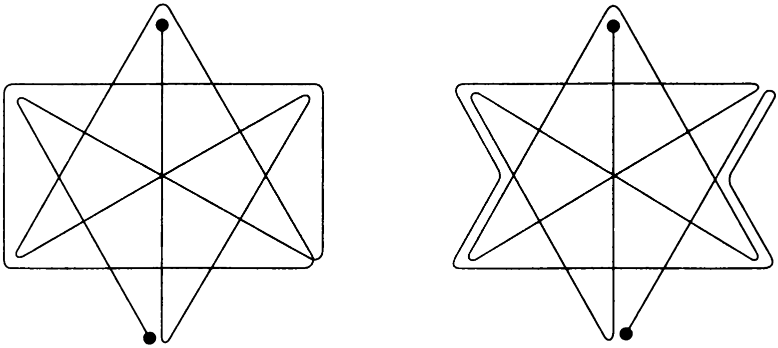
Г. Найдите треугольники, состоящие из трех, и запишите их обозначения тремя символами. Повторите ту же процедуру для состоящих из четырех частей и т. д., пока Ваш список не будет полным.

Проверьте список на наличие совпадений».

35

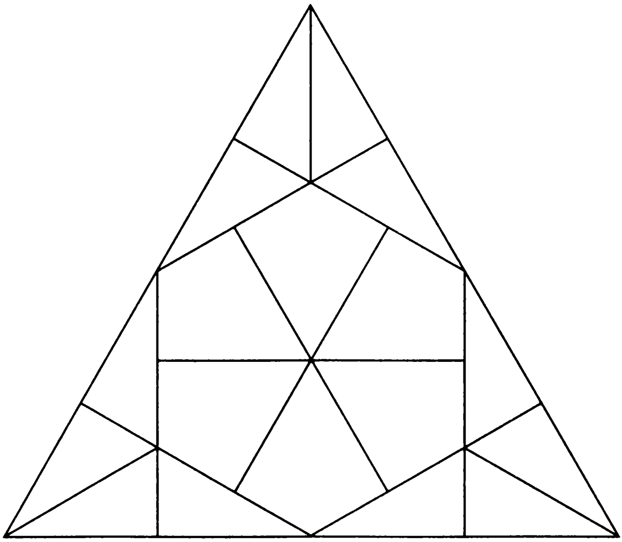
4. Джон X. Конвей впервые поднял этот любопытный вопрос, и доказал, что ответ — «да». Он также доказал, что полный граф из шести точек принадлежит к полным графам высшего порядка, которые могут быть построены без узлов. Этому посвящена работа: Джон X. Конвей, К. М. Гордон, «Узлы и звенья пространственных графов» (Conway John H., Gordon C. M., «Knots and Links in Spatial Graphs» // Journal of Graph Theory. 1983. Vol. 7. P. 445–453).

5. Если вдоль отрезков разрешаются удвоения, а путь ограничен линиями, то рисунок, приводимый выше слева,



показывает один из многих возможных способов прохождения графа с минимальной длиной пути. Если разрешено выходить за пределы графика, удваивать линии нет необходимости, путь может быть сокращен, как показано на рисунке справа.

6. Равносторонний треугольник складывается так:



Если мы разделим форму воздушного змея пополам, мы увидим, что части состоят из 24 прямоугольных треугольников с катетами 1, $\sqrt{3}$ и гипотенузой 2, площадь каждого составляет $1/2\sqrt{3}$. Общая площадь, следовательно, площадь треугольника, взятая 24 раза, или $12\sqrt{3}$.

При составлении квадрата его сторона должна быть $\sqrt{12\sqrt{3}}$, а такую длину нельзя получить ни в одной из комбинаций сторон отдельных частей. Аналогичное рассуждение исключает возможность сложить правильный шестиугольник, хотя такие части можно складывать в неправильные выпуклые шестиугольники.

7. Решение для солитэра Соломона из девяти ходов, начиная с пустой точки в центре, было найдено Кати Джонс, чья компания Kadon Enterprises производит и продает настольную игру «Соломон». Вот эти ходы: 14—10, 8—12, 19—10—14—16, 18—10—19—13, 1—8—18—10—1, 2—4, 9—3—5, 6—4, 1—10. Если кто-то из моих читателей найдет более короткое решение, мне было бы приятно получить его.

36

Тэнг, пожиратель планет

Единственный возможный последний шаг Тэнга — отбросить десять планет на десятый день, а затем съесть 1/11 от нуля планет. Идя от конца к началу, можно обнаружить, что в начале было 100 планет. У этой задачи бесконечное число вариантов. Например, замените дробь на 1/13, и начальное число планет увеличивается до 144, а количество дней — до 12.

Задачи такого рода — поиск интегральных решений для уравнений — принадлежат к разделу теории чисел под названием диофантов анализ. Самая известная головоломка этого типа — про пять человек, обезьяну и запас кокосовых орехов. Ей была посвящена новелла Бена Эймса Уильямса «Кокосовые орехи» в «Saturday Evening Post» (9 октября 1926 года). В моей книге «The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions» (*«Вторая научная американская книга математических головоломок и забав»*) ей посвящена отдельная глава.

Каждый, кто знаком с моей новеллой «Тэнг», наверняка вспомнит, что в то время, как Тэнг поедал Землю, его подхватило и проглотило гораздо большее четырехмерное существо. Теперь я могу впервые объявить, что зверь, проглотивший Тэнга, несколько напоминал то, что мы называем коровой, только у него было три головы и двенадцать лап. Его невозможно описать или вообразить, потому что мы не в состоянии представлять себе объекты в более чем трех измерениях.

Как только Тэнг сообразил, что его проглотила гиперкорова, он свернулся в тугой маленький шарик. В тепле и темноте коровьего гипержелудка он заснул. Когда он проснулся на следующий день, гиперкорова исчезла.

Загадки

Первые ответы

Вторые ответы

Третьи ответы

Четвертые ответы

1

Загадки Сфинкса

Рекурсивной формулой для функции от n, где n может принимать целые значения, называется такая формула, которая позволяет найти значение функции для любого данного n, при условии, что известны целые значения меньше n. Рекурсивные формулы, или алгоритмы, используют для вычисления последовательных значений функции вручную или с помощью компьютера. В нашем случае определить количество L- и R-сфинксов позволит вот такой рекурсивный алгоритм:

1. Число L-сфинксов в день n равно их количеству в предыдущий день — $(n - 1)$ плюс число R-сфинксов в предыдущий день, взятое 3 раза. Вот как выглядит эта запись на языке алгебры:

$$L(n) = L(n - 1) + 3R(n - 1).$$

Число L- и R-сфинксов в i-й день обозначим, соответственно, $L(i)$ и $R(i)$.

2. Число R-сфинксов в день n равно их количеству в предыдущий день — $(n - 1)$ плюс число L-сфинксов в предыдущий день, взятое 3 раза. Выразим это алгебраически:

$$R(n) = R(n - 1) + 3L(n - 1).$$

Нерекурсивной формулой называется такая формула, которая не требует, чтобы предыдущие случаи были

1

известны. Вы просто подставляете значение n в формулу, и она дает Вам ответ. В предыдущем разделе ответов мы обнаружили, что общее число сфинксов всегда составляло 4^n, а разница между L- и R-особями равнялась 2^n. Используя эти данные, мы с легкостью составим две нерекурсивные формулы для вычисления роста колонии сфинксов.

Число L-сфинксов в n-м поколении составит:

$$2^{n-1}[2^n + (-1)^n].$$

Число R-сфинксов в n-м поколении будет равно:

$$2^{n-1}[2^n - (-1)^n].$$

Соломон В. Голомб придумал сфинкса и дал имя «реплитка» всем многоугольникам, которые могут быть разделены на n своих реплик, идентичных с исходной фигурой. Некоторые виды реплитки Голомба делятся на две реплики, некоторые — на три, другие — на пять и более. «Сфинкс» — пока единственный известный пятиугольник, который делится на четыре части подобным образом. Если Вы отыщете другие такие, профессор Голомб обязательно хотел бы узнать о них! Вы можете больше узнать о теории реплитки и о некоторых ее восхитительных, но пока нерешенных проблемах из главы 19 моей книги «Парадокс узника и другие математические забавы» («The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions»).

3

Идем к Хармиане!

«Махарани» — жена «хана мира» [1].

Когда я впервые написал об игре с десятью картами, основанной на монотонных подпоследовательностях, я не знал, что Фрэнк Гэрари, Брюс Саган и Дэвид Вест уже давно проанализировали эти игры. Первый игрок всегда выигрывает, если берет пятерку на первом ходу. В игре наоборот первый игрок выиграет, если возьмет двойку. Это доказано в их статье «Компьютерный анализ игр с монотонной последовательностью» («Computer-Aided Analysis of Monotonic Sequence Games»).

В этой статье авторы рассматривают игры, основанные на обобщенной теореме Эрдёша—Секереша. Обобщенная теорема утверждает, что при неотрицательных целых числах M и N, последовательность, по крайней мере, $MN + 1$ отличных друг от друга целых чисел должна содержать возрастающую подпоследовательность длиной $N + 1$ или убывающую подпоследовательность длиной $M + 1$. Авторы не смогли вывести общую стратегию для стандартной или обратной версии игры для двух человек, основанной на этой теореме. Также неизвестно до сих пор, кто выиграет: первый или второй игрок в игре с 17 картами ($M = N = 4$), где из карт номиналом от 1 до 17 нужно составить монотонную (убывающую или возрастающую) подпоследовательность из пяти карт или избежать таковой.

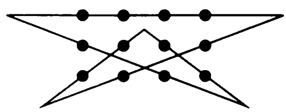
[1] *Прим. пер.:* председатель, конечно же, богат: «chair man» — «a rich man».

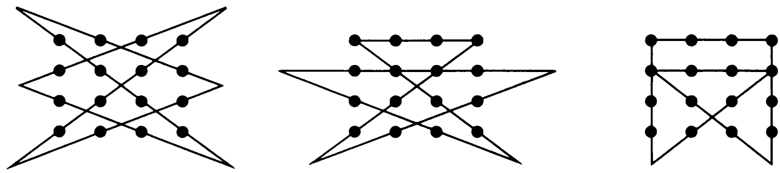
Интересуясь общим анализом игр со многими превосходными примерами, Вы можете полистать двухтомник Элвина Берлекампа, Джона Конвея и Ричарда Гая «Способы побеждать» (Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy, «Winning Ways», Academic Press, 1982).

6

Путешествие по Солнечной системе

Для массива 3×4 есть единственная (за исключением симметрии) закрытая схема из 5 отрезков. Три закрытых схемы для массива 4×4 показаны ниже. Детальный анализ случая 4×4 можно найти здесь: Фред Шу, «Эталонная книга математических развлечений» (Fred Schuh, «The Master Book of Mathematical Recreations» (Dover, 1968), глава 14).





М. С. Кламкин доказал, что открытые схемы для $n \times n$ массивов ($n > 2$) можно составить из всего лишь $2n-2$ отрезков (American Mathematical Monthly. February 1955. Vol. 62. P. 124). Сэлфридж доказал, что $2n$-2 отрезков всегда необходимы (Ibid. June 1955. Vol. 62. P. 443). Голомб и Сэлфридж в статье, которая цитировалась в предыдущем разделе ответов, показали, что то же самое утверждение справедливо и для замкнутых схем при $n > 3$, а также для схем, которые не превышают периметр квадрата при $n > 5$. О минимальных схемах для неквадратных моделей узловых решеток известно мало.

Несколько превосходных новых головоломок, основанных на турах королевы для узловых решеток, Вы сможете найти в статье Соломона В. Голомба: Paths on arrays of dots // Journal of Recreational Mathematics. July 1968. Vol. 1. P. 154–156. (Ответы там же: October 1969. Vol. 2. P. 220–230.) Также обратите внимание на статью: *Scherer Karl.* Dot Connection II // Ibid. 1981–82. Vol. 14. № 3. P. 232.

25

Фларп снова подбрасывает монетку

Вот эти два письма были опубликованы в «Журнале научной фантастики» Айзека Азимова в июле 1986 года:

Дорогой Исаак!

Мартин Гарднер в своей, как всегда восхитительной, колонке, пишет, что происхождение слова «raspberry» («малина») в смысле грубого свиста неизвестно. И, поскольку это, несомненно, мой единственный шанс когда-либо поправить Мартина Гарднера, спешу сделать это.

Его происхождение связано с рифмованным сленгом кокни — жителей лондонского Ист-Энда, представителей рабочих слоев населения. Вспомните, там одно слово заменяется фразой в рифму с ним, как, например, «ноги» — «мясо на дороге» или «жена» — «мука и вина». А потом часто вместо первой фразы используется вторая, тем самым превращая «ноги» в «мясо», а «жену» в «вину» и так далее.

Знаете ли, определенный звук, «fart» [2]*, который не предполагается слышать в вежливом обществе, стали в рифму называть «raspberry tart» («малиновый пирог»). Позже ссылка «переехала» анатомически вверх.*

С наилучшими пожеланиями,
Пол Андерсон
Оринда, штат Калифорния.

Дорогой Мартин!

«Raspberry», в смысле «Bronx cheer», это рифмованный сленг лондонских кокни: «fart» — «raspberry tart».

Джон Браннер
Южный Петертон, Сомерсет, Англия

25

[2] *Прим. пер.:* это слово обозначает метеоризм и обычно не используется в официальном общении.

29

«Задира» едет в Баффало

Мы должны показать, что единственные действительные четверки бесконечного уровня являются кратными для

$$1,\ z,\ z^2,\ z^3, \tag{1}$$

где z — действительный корень из $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$, а четверки получены из этих путем добавления одной и той же константы к каждому члену. Предположим, что четверка A, B, C, D имеет уровень > 8. Согласно нашим предыдущим результатам, будет только один локальный минимум и один локальный максимум, и они будут рядом друг с другом. Предположим, это A и D. Тогда последовательность между A и D монотонна, то есть она не убывает и не возрастает. Абсолютные разности здесь

$$a = |B - A|, \quad b = |C - B|,$$
$$c = |D - C|, \quad d = |D - A| = a + b + c;$$

последнее уравнение следует из того факта, что ряд A, B, C, D является монотонной последовательностью, а d является наибольшим среди этих четырех чисел. Наименьшее должно быть рядом с ним (в противном случае ряд a, b, c, d будет иметь несмежные экстремумы и может не иметь уровня > 7). Если это будет c, переименуем числа, переходя от d в другую сторону по кругу, по которому мы можем себе представить написанными все четыре числа. Это перемещает локальный минимум в a. Других локальных минимумов нет, следовательно,

$$0 < a < b < c < d. \tag{2}$$

29

Первое неравенство остается в силе, потому что наша первоначальная четверка имела уровень > 6 и, следовательно, не содержала одинаковых чисел. Следующий ряд абсолютных разностей имеет вид

$$\begin{gathered} a' = b - a, \quad b' = c - b, \\ c' = d - c = a + b, \quad d' = d - a = b + c. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $d = a + b + c$. В силу (2) d' является наибольшим из этих чисел. Так как мы по-прежнему выше уровня 6, наименьшее число должно быть рядом с ним. Мы видим, что $a' < c'$, поэтому a' должно быть наименьшим, а b' и c' не являются ни локальными минимумами, ни максимумами. Поэтому неравенства (2) справедливы также для массивов-штрих, и мы можем получить следующий ряд абсолютных разностей, применяя формулы (3) снова и снова. Это будет продолжаться до тех пор, пока мы выше уровня 6.

Матрица для первых трех уравнений в (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; \tag{4}$$

четвертое — всегда сумма трех других.

Обозначим приведенную выше «дифференцирующую» матрицу D и напомним, что для специального вектора $v = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix}$, см. (1) выше, дифференцирование имело эффект трансформации v_1 в

$$\begin{pmatrix} z-1 \\ z^2 - z \\ z^3 - z^2 \end{pmatrix} = (z-1) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = (z-1)v_1.$$

В самом деле, когда мы умножаем v_1 на D, мы получаем

$$Dv_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 \\ z^2 - z \\ z+1 \end{pmatrix},$$

и, поскольку $z^3 - z - z - 1 = 0$, третий компонент — это $z + 1 = z^3 - z^2$.

Ненулевой вектор v со свойством $D_v = \lambda_v$, где λ представляет собой скалярную величину, называется *собственным вектором* D с *собственным значением* λ. Эффект умножения вектора много раз на матрицу D можно лучше изучить при помощи собственных векторов. Мы наметим ниже процедуру; более подробную информацию Вы можете почерпнуть из книг по линейной алгебре. В нашем случае собственный вектор с компонентами $1, z, z^2$ имеет собственное значение $\lambda = z - 1$, где z является корнем кубического уравнения $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$. Если мы используем действительный корень (см. раздел третьих ответов), тогда $\lambda_1 = z_1 - 1 \approx 1{,}839\ldots - 1 = 0{,}839\ldots < 1$, и соответствующий собственный вектор v_1 имеет компоненты $1, z_1, z_1^2$. Таким образом, для вектора v_1 повторяющееся умножение на D имеет тот же эффект, что и повторяющееся умножение на скаляр $\lambda = 0{,}839\ldots$. В частности, чем большее количество раз мы умножаем v_1 на D, тем ближе мы к 0-вектору $[0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. (T указывает на то, что этот вектор является столбцом, хотя мы записали его в строчку.)

Если использовать комплексные числа, можно найти два других собственных вектора v_2, v_3 с собственными значениями $\lambda_2 = z_2 - 1$, $\lambda_3 = z_3 - 1$, где z_2, z_3 являются двумя другими (комплексными) корнями нашего кубического уравнения. Оба имеют абсолютное значение $\approx 1{,}54 > 1$. Как заставить эти специальные векторы, которые ведут себя очень просто при умножении на D, сказать нам, что происходит с общим вектором при повторном умножении на D? Ответ на удивление прост. Любой вектор $[a, b, c]^T$ является суммой кратных трех собственных векторов. Каждое применение D умножает величину v_2 и v_3 на $1{,}54\ldots$, число большее единицы, так что, несмотря на то, что их коэффициенты равны 0 в представлении $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ вектора $[a, b, c]^T$, величина

29

наших векторов рано или поздно начнет расти и устремится в бесконечность. Вычисления абсолютных разностей из их компонентов не может привести к такому результату; к слову, если числа $\geqslant 0$, ни одна из разностей не может быть больше самого большого из чисел. Мы пришли к выводу, что, если множество вторых разностей наших исходных чисел не образует постоянное кратное четверки (2), мы должны на некотором этапе спуститься ниже уровня 7, когда вычисление абсолютных разностей больше не должно быть эквивалентно умножению на матрицу D, и процесс подходит к концу.

Первое известное описание нашей задачи появилось в итальянском журнале «Periodico di Matematiche» (1937. (4) 7. P. 25—30), где она приписывается Э. Дуччи. Она также обсуждается в книге: Росс Хонсбергер, «Находчивость в математике» (Honsberger Ross, «Ingenuity in Mathematics» // New Mathematical Library. Vol. 23. Ch. 10.). Среди журнальных статей об этой проблеме мы упомянем работы Роберта Миллера в «American Math. Monthly» (1978. Vol. 85. P. 183—85) и Лероя Мейерса в «Crux Mathemarico-rum» (1982. Vol. 8. P. 262—266). Мейерс цитирует 22 ссылки.

31

Ребус с флагами на Марсе

Магическая константа 177 является минимально возможной для квадрата с различными простыми числами, не включая 1 в качестве простого числа. Наиболее раннее упоминание об этом квадрате, известное мне, содержится в книге: Джозеф Мадахи, «Математика на каникулах» (Madachy Joseph, «Mathematics on Vacation», Scribner's, 1966. P. 95), где она приписывается Рудольфу Ондрейка.

17	113	47
89	59	29
71	5	101

Можно ли составить простой магический квадрат 3-го порядка из девяти простых чисел в арифметической прогрессии? Да, и вновь число таких квадратов почти наверняка бесконечно. Один, с наименьшей магической постоянной, равной 3117, а разность арифметической прогрессии равна 210.

Можно ли составить магический квадрат 3-го порядка с последовательностью простых чисел? Это одна из самых сложных нерешенных задач в теории магического квадрата. Квадраты с последовательностью простых чисел были составлены для порядков 4, 5, и 6, есть даже простой квадрат с последовательностью простых чисел,

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

начиная с 3, — это квадрат 35 × 35 (наименьший возможный размер для такого квадрата). Но для квадрата 3-го порядка, начиная с любого числа, существуют такие жесткие ограничения, что до сих пор он ускользал от всех попыток компьютерного решения этой задачи. Я обещаю $ 100 первому, кто составит такой квадрат.

Мартин ГАРДНЕР
1914–2010

Выдающийся американский популяризатор науки, математик и писатель. В 1936 г. окончил математический факультет Чикагского университета. В середине 1950-х гг. основал рубрику «Математические игры» в журнале «Scientific American», в которой до 1983 г. был автором и ведущим.

Мартин Гарднер — автор более 70 книг и сотен статей, среди которых философские эссе и научно-популярные этюды, очерки по истории математики и научно-фантастические рассказы, математические фокусы и задачи на сообразительность. Но особую известность получили его статьи и книги по занимательной математике, в том числе переведенные на русский язык «Математические головоломки и развлечения», «Математические досуги», «Математические новеллы», «Математические чудеса и тайны» и другие. Произведения М. Гарднера отличаются яркостью изложения, парадоксальностью мысли, новизной и глубиной научных идей. Многие из этих идей были почерпнуты из современных научных публикаций и, в свою очередь, стали стимулом как для проведения серьезных исследований, так и для активного вовлечения читателя в самостоятельное творчество.

14379 ID 193545

9 785971 021407

Издательская группа URSS

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва, Нахимовский проспект, 56

Телефон / факс (многоканальный) +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте http://URSS.ru